

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

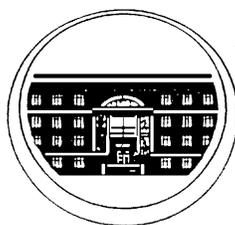
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 21

№ 3

2015



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 21, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. 320 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев,
д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай), М. И. Гомоюнов,
д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев, д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция),
д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов, д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев,
д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий, канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев,
д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных, д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь),
д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,
канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (*отв. секретарь*)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. Б. Куржанский, чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров,
чл.-корр. РАН С. В. Матвеев, чл.-корр. РАН А. А. Махнев,
акад. РАН Ю. С. Осипов, чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов, чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редакторы выпуска

д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук РАН М. Ю. Хачай

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2015

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ НЕ СОДЕРЖАТ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. I ¹**О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев**

Исследуются конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. В настоящей части работы найдены изоморфные типы графов простых чисел и оценки фиттинговой длины разрешимых групп, а также определены почти простые группы.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, разрешимая группа, граф простых чисел.

O. A. Alekseeva, A. S. Kondrat'ev. Finite groups whose prime graphs do not contain triangles. I

Finite groups whose prime graphs do not contain triangles are investigated. In the present part of the work, the isomorphic types of prime graphs and estimates of the Fitting length of solvable groups are found and also almost simple groups are determined.

Keywords: finite group, almost simple group, solvable group, prime graph.

Введение

Графом простых чисел (или *графом Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq .

Лючидо в работе [20] описала конечные простые группы G такие, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями, т. е. связными графами, не содержащими циклы. Кроме того, в этой работе описано строение конечной группы, граф простых чисел которой является деревом. Мы рассматриваем более общую задачу описания строения конечной группы G такой, что граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников (3-циклов). Заметим, что условие “граф простых чисел конечной группы не содержит треугольников” переносится на подгруппы и фактор-группы этой группы. Легко доказывается (см. лемму 3.1), что если G — группа с таким свойством, то либо G разрешима, либо фактор-группа $G/S(G)$ группы G по ее разрешимому радикалу $S(G)$ почти проста, т. е. имеет неабелев простой поколь $Soc(G)$. В настоящей части работы мы исследуем разрешимые и почти простые группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников.

В случае, когда исследуемая группа G разрешима, мы получаем следующий результат о ее строении в терминах графа $\Gamma(G)$ и фиттинговой длины $l_F(G)$ группы G .

Теорема 1. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если граф $\Gamma(G)$ несвязен, то G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа и граф $\Gamma(G)$ имеет точно две компоненты связности, каждая из которых является 1- или 2-цепью;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект 15-11-10025 (теорема 2), а также РФФИ, проект 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УРО РАН, проект 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.А03.21.0006) (теорема 1).

(2) если граф $\Gamma(G)$ связан, то граф $\Gamma(G)$ является либо n -цепью для $1 \leq n \leq 4$, либо 4-циклом, либо 5-циклом;

(3) если граф $\Gamma(G)$ является 2-цепью, то число $l_F(G)$ может быть сколь угодно большим;

(4) если граф $\Gamma(G)$ является 3-цепью, то $l_F(G) \leq 6$;

(5) если граф $\Gamma(G)$ является 4-цепью, то $l_F(G) \leq 4$;

(6) если граф $\Gamma(G)$ является 4-циклом, то $l_F(G) \leq 5$;

(7) если граф $\Gamma(G)$ является 5-циклом, то $l_F(G) = 3$.

Более того, для каждого изоморфного типа графа $\Gamma(G)$, кроме 2-цепи и 5-цикла, максимум числа $l_F(G)$ достигается на такой группе G , что фактор-группа $G/O(G)$ изоморфна группе $2 \cdot S_4^-$.

Пункты (1) и (2) теоремы 1 доказаны также в работе А. Грубера, Т. М. Келлера, М. Л. Льюиса, К. Нотона и Б. Штрассера [1, следствие 2.9]. Но в их доказательстве используются классификация графов простых чисел конечных разрешимых групп и некоторые комбинаторные результаты. Наше доказательство этих пунктов прямое, очень короткое и в нем не используются глубокие комбинаторные результаты. Кроме того, для доказательства п. (7) теоремы 1 мы ссылаемся на [1, предложение 4.4], так как в этом случае смогли получить только оценку $l_F(G) \leq 4$.

Заметим, что полученные в теореме 1 оценки числа $l_F(G)$ точны (см. замечания 2–4), кроме, быть может, п. (6), который нуждается в дальнейшем исследовании.

В случае, когда исследуемая группа G почти проста, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть G — конечная почти простая группа. Если граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) группа $\text{Soc}(G)$ изоморфна одной из групп A_n для $n \in \{5, 6, 7\}$, $L_2(q)$ для $q \in \{7, 2^3, 3^4, 11, 13, 17, 5^2, 7^2, 2^9\}$, $L_3(q)$ для $q \in \{3, 4, 5, 17\}$, $U_3(q)$ для $q \in \{3, 7\}$, $L_4(3)$, $U_4(q)$ для $q \in \{2, 3\}$, $G_2(3)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11} , M_{22} ;

(2) группа G изоморфна одной из групп A_8 , $L_2(q)$ для $q \in \{2^4, 2^6\}$, $L_3(q)$ для $q \in \{7, 8, 9\}$, $L_3(7) : 2$, $L_3(9) : 2$, $U_3(q)$ для $q \in \{4, 5, 8\}$, $U_3(5) : 2$, $U_3(8) : 3$, $U_5(2)$;

(3) $\text{Soc}(G) \cong L_2(q)$ для $q \in \{5^3, 17^2\}$ и $\text{PGL}_2(q) \not\leq G$;

(4) $\text{Soc}(G) \cong L_2(q)$, где $q \in \{2^p, 3^p\}$, p — нечетное простое число и $|\pi(q-1)| \leq 2 \geq |\pi(q+1)|$;

(5) $G \cong L_2(p)$, где p — простое число, $p > 17$ и $|\pi(p-1)| \leq 2 \geq |\pi(p+1)|$;

(6) $G \cong \text{PGL}_2(p)$, где p — простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна, $p > 17$ и $|\pi(p^2-1)| = 3$;

(7) группа G изоморфна $L_2(q)$ или $L_2(q) : r$, где $q = p^r$, $p \in \{3, 5, 7, 17\}$, r — простое число, r не делит $|\text{Soc}(G)|$, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $|\pi(q-\varepsilon 1)| = \pi((q+\varepsilon 1)/2) = 2$;

(8) группа G изоморфна $U_3(q)$ или $U_3(q) : p$, где $q = 2^p$, p , $q-1$ и $(q+1)/3$ — простые числа, $p \geq 5$, $|\pi((q^2-q+1)/3)| = 1$ и p не делит $|\text{Soc}(G)|$;

(9) $\text{Soc}(G) \cong L_3^\varepsilon(p)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, p — простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна, $p \geq 11$, $(p-\varepsilon 1)_3 = 3$, $|\pi(p^2-1)| = 3$ и $|\pi((p^2+\varepsilon p+1)/3)| = 1$;

(10) $\text{Soc}(G) \cong \text{Sz}(2^f)$, где либо $f = 9$, либо f — нечетное простое число и $\max\{|\pi(q-1)|, |\pi(q-\sqrt{2q}+1)|, |\pi(q+\sqrt{2q}+1)|\} \leq 2$;

(11) $G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^p$, p и $(q-1)/2$ — нечетные простые числа, $|\pi((q+1)/4)| = 1$ и $|\pi(q-\sqrt{3q}+1)| \leq 2 \geq |\pi(q+\sqrt{3q}+1)|$.

Из теоремы 2 и [5; 25] получается

Следствие. Пусть G — конечная почти простая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда (1) каждая связная компонента графа $\Gamma(G)$ является деревом; (2) если группа G проста, то граф $\Gamma(G)$ несвязен; (3) $|\pi(G)| \leq 8$ и равенство достигается, если $G \cong \text{Aut}(\text{Sz}(2^9))$.

Заметим, что теорема 2, в частности, существенно уточняет полученный в [20] список конечных простых групп таких, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями.

Вторая часть работы будет посвящена рассмотрению общего случая конечных неразрешимых групп, графы простых чисел которых не содержат треугольников.

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [2; 10; 11; 14; 15]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p и $\pi(n)$ обозначаются соответственно p -часть числа n и множество всех простых делителей числа n . Через $A \rtimes B$ или $A : B$ обозначается расщепляемое расширение (полупрямое произведение) группы A посредством группы (на группу) B .

Пусть G — конечная группа. Обозначим число и множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$ и $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$ соответственно; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Положим $\pi(G) = \pi(|G|)$.

Через $2:S_4^-$ обозначается бинарная октаэдральная группа, т.е. нерасщепляемое расширение группы порядка 2 посредством группы S_4 , силовская 2-подгруппа которого изоморфна обобщенной группе кватернионов порядка 16. Заметим, что $2:S_4^- \cong SL_2(3) \cdot 2$.

Если G — конечная разрешимая группа, то через $l_F(G)$ обозначается ее *фиттингова длина*, т.е. наименьшая длина нормальных рядов группы G , все факторы которых нильпотентны. Число $l_F(G)$ здесь совпадает с длиной ряда $1 < F_1(G) < F_2(G) < \dots < F_{n-1}(G) < F_n(G) = G$, где $F_1(G) = F(G)$ и $F_{i+1}(G)/F_i(G) = F(G/F_i(G))$ для $1 \leq i \leq n-1$.

Если группа G действует на группе H , то мы будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ (соответственно группа G) действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$ (соответственно $C_H(g) = 1$ для всех неединичных элементов $g \in G$).

Цепь с $n \geq 1$ вершинами называется n -*цепью*, а цикл с $n \geq 3$ вершинами — n -*циклом*. Граф, состоящий из n попарно не смежных вершин, называется n -*кокликой*.

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательствах теорем 1 и 2.

Предложение 1 (теорема Грюнберга — Кегеля [25, теорема A]). *Для группы G с несвязным графом $\Gamma(G)$ верно одно из следующих утверждений:*

- (а) G — группа Фробениуса;
- (б) G — 2-фробениусова группа, т.е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G , а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;
- (в) G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$ -группы посредством группы A , где $\text{Inn}(P) \leq A \leq \text{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leq s(P)$ и $A/\text{Inn}(P) \cong \pi_1(G)$ -группа.

Предложение 2 [14, замечание на с. 377]. *Пусть G — конечная группа, силовская 2-подгруппа которой изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, и $\overline{G} = G/O(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

- (а) \overline{G} изоморфна силовской 2-подгруппе группы G ;
- (б) \overline{G} изоморфна группе $2:A_7$;
- (в) \overline{G} является расширением группы $SL_2(q)$, где q нечетно, посредством циклической группы нечетного или удвоенного нечетного порядка.

Предложение 3 (лемма Мазурова [9, лемма 1]). *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G , G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C . Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Предложение 4. *Пусть p, q, r — различные простые числа и G — конечная группа вида $G = P \rtimes (T \rtimes \langle x \rangle)$, где P — нетривиальная p -группа, T — q -группа, $|x| = r$ и $C_G(P) = Z(P)$. Если $[T, x] \neq 1$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

- (а) $C_P(x) \neq 1$;

(б) $q = 2$, $r = 1 + 2^n$ — простое число Ферма и критическая подгруппа группы T экстраординарна.

Доказательство. Следует из [14, 5.1.4, 5.3.1] и [16, лемма]. \square

Если порядок каждого элемента группы есть степень некоторого простого числа, то, следуя В. Ши, будем называть эту группу кратко *EPPO-группой*.

Предложение 5 [17, теорема 1; 24, теорема 16]. Пусть G — конечная непримарная EPPO-группа. Тогда

- (а) если G разрешима, то $|\pi(G)| = 2$ и G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа;
- (б) если G проста, то G изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$.

Замечание 1. Из п. (а) предложения 5, доказанного Г. Хигманом в [17, теорема 1], и классической теоремы Ф. Холла [14, теорема 6.4.1] немедленно вытекает следующее важное свойство конечных разрешимых групп, впервые отмеченное Лючидо в [19, теорема 1]: граф простых чисел конечной разрешимой группы не содержит 3-клик.

2. Разрешимые группы

В этом разделе мы докажем теорему 1.

Лемма 2.1. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда

- (а) если граф $\Gamma(G)$ несвязен, то G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа и граф $\Gamma(G)$ имеет точно две компоненты связности, каждая из которых является 1- или 2-цепью;
- (б) если граф $\Gamma(G)$ связан, то граф $\Gamma(G)$ является либо n -цепью для $1 \leq n \leq 4$, либо 4-циклом, либо 5-циклом.

Доказательство. (а) Допустим, что граф $\Gamma(G)$ несвязен. По п. (а) предложения 1 G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Ввиду [14, теорема 6.4.1] и замечания 1 граф $\Gamma(G)$ имеет точно две компоненты связности, которые являются кликами (полными графами). Поскольку граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, отсюда следует утверждение (а).

(б) Допустим, что граф $\Gamma(G)$ связан. Покажем, что степень (валентность) каждой вершины в $\Gamma(G)$ не превосходит 2. Предположим противное. Тогда в графе $\Gamma(G)$ существует вершина p , смежная с тремя различными вершинами q_1, q_2, q_3 . Если подграф $\{q_1, q_2, q_3\}$ в графе $\Gamma(G)$ является кликой, то ввиду [14, теорема 6.4.1] и граф простых чисел $\{q_1, q_2, q_3\}$ -холловой подгруппы в G является кликой, что противоречит замечанию 1. Поэтому можно считать, что вершины q_1 и q_2 смежны в графе $\Gamma(G)$. Но тогда $\{p, q_1, q_2\}$ есть треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Итак, степень каждой вершины в графе $\Gamma(G)$ не превосходит 2, в частности, граф $\Gamma(G)$ не содержит точек ветвления.

Предположим, что граф $\Gamma(G)$ не содержит циклов. Тогда ввиду [2, предложение 3, гл. IV] он является n -цепью для некоторого n . Если $n \geq 5$, то $\Gamma(G)$ содержит 3-клик, что противоречит замечанию 1. Поэтому $n \leq 4$, т. е. утверждение (б) выполняется.

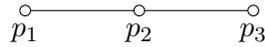
Пусть теперь граф $\Gamma(G)$ содержит n -цикл C для некоторого $n \geq 3$. Поскольку граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, $n \geq 4$. Если $n \geq 6$, то C содержит $(n - 1)$ -цепь, где $n - 1 \geq 5$, что противоречит предыдущему абзацу. Поэтому $n \in \{4, 5\}$. Если $C \neq \Gamma(G)$, то ввиду связности графа $\Gamma(G)$ он содержит вершину p , которая не лежит в C и смежна с некоторой вершиной из C . Теперь ясно, что подграф $C \cup \{p\}$ содержит 3-клик, что невозможно по замечанию 1. Следовательно, $C = \Gamma(G)$. \square

Лемма 2.2. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 2-цепью. Тогда число $l_F(G)$ может быть сколь угодно большим.

Доказательство. Допустим, что граф $\Gamma(G)$ есть 2-цепь $\{p, q\}$. Построим рекуррентно последовательность групп G_n ($n \in \mathbb{N}$), полагая G_1 равной циклической группе порядка pq и G_n — регулярному сплетению $G_{n-1} \wr G_1$ для $n > 1$. Тогда ясно, что $\Gamma(G_n)$ есть 2-цепь $\{p, q\}$ и $l_F(G_n) = n$. \square

Лемма 2.3. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 3-цепью. Тогда либо $l_F(G) \leq 5$, либо $l_F(G) \leq 6$ и $G/O(G) \cong 2 \cdot S_4^-$.

Доказательство. Граф $\Gamma(G)$ имеет вид



Положим $\overline{G} = G/O_{p_2}(G)$. Тогда $O_{\{p_1, p_3\}}(\overline{G}) \neq 1$. Без ограничения общности можно считать, что $O_{p_1}(\overline{G}) \neq 1$. Поэтому $F(\overline{G}) = O_{p_1}(\overline{G})$ и $F_2(\overline{G})/F(\overline{G})$ является неединичной нильпотентной $\{p_2, p_3\}$ -группой.

В G существует $\{p_1, p_3\}$ -холлова подгруппа U . Тогда $U = P_1 P_3$, где $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ для $i \in \{1, 3\}$. Поскольку граф $\Gamma(U)$ несвязен, ввиду предложения 1 подгруппа U есть группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Поскольку $1 \neq O_{p_1}(\overline{G}) \leq F(\overline{U})$, ввиду [14, теорема 10.3.1] подгруппа P_3 есть циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, $F(U) \leq P_1$ и фактор-группа $P_1/F(U)$ циклическая.

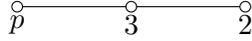
Предположим, что $p_3 = 2$. Тогда U — группа Фробениуса с абелевым ядром P_1 и дополнением P_3 . Поскольку $C_{\overline{G}}(F(\overline{G})) \leq F(\overline{G})$, имеем $F(\overline{G}) = \overline{P}_1$. По предложению 2 либо $G = O(G)P_3$, либо группа $G/O(G)$ изоморфна $SL_2(3)$ или $2 \cdot S_4^-$. Поэтому $O(\overline{G})/F(\overline{G}) = O_{p_2}(\overline{G}/F(\overline{G}))$ и, следовательно, $l_F(G) \leq 6$.

Пусть теперь $p_3 > 2$. Тогда подгруппа P_3 циклическая. Предположим, что p_3 делит $|F_2(\overline{G})|$. Возьмем в $F_2(\overline{G})$ подгруппу \overline{T} порядка p_3 . По лемме Фраттини имеем $\overline{G} = F_2(\overline{G})N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Положим $\overline{C} = C_{\overline{G}}(\overline{T})$. Ясно, что \overline{C} является $\{p_2, p_3\}$ -группой и $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{C}$ — циклическая группа. Легко видеть, что $\overline{P}_3 \leq \overline{C}$ и $N_{\overline{C}}(\overline{P}_3) \leq C_{\overline{C}}(\overline{P}_3)$. Поэтому ввиду теоремы Бернсайда (см. [14, теорема 7.4.3]) $\overline{C} = O_{p_3}(\overline{C})\overline{P}_3 = O_{p_2}(\overline{C})\overline{P}_3$ и, следовательно, $l_F(G) \leq 5$.

Пусть теперь p_3 не делит $|F_2(\overline{G})|$. Тогда $F_2(\overline{G})/F(\overline{G}) = O_{p_2}(\overline{G}/F(\overline{G})) \neq 1$. Ввиду теоремы Шура — Цассенхауза [14, теорема 6.2.1] можно считать, что $F_2(\overline{G})\overline{T} = F(\overline{G}) \times (\overline{Q} \times \overline{T})$, где \overline{Q} — некоторая силовская p_2 -подгруппа из $F_2(\overline{G})$. Так как $[\overline{Q}, \overline{T}] \neq 1$, ввиду предложения 4 имеем $p_2 = 2$ и $p_3 - 1$ есть степень 2. Группа $\overline{G}/F(\overline{G})$ точно действует на элементарной абелевой p_1 -группе $F(\overline{G})/\Phi(F(\overline{G}))$ (см. [14, 5.1.4]). Поскольку $F_3(\overline{G})/F_2(\overline{G})$ является неединичной нильпотентной $\{p_1, p_3\}$ -группой, она равна либо $O_{p_1}(\overline{G}/F_2(\overline{G}))$, либо $O_{p_3}(\overline{G}/F_2(\overline{G}))$. Если выполняется первый случай, то ввиду [10, (36.4)] подгруппа \overline{T} централизует неединичный элемент из $F(\overline{G})/\Phi(F(\overline{G}))$ и, следовательно, централизует неединичный элемент из $F(\overline{G})$; противоречие. Поэтому выполняется второй случай. Тогда $\overline{G} = F_2(\overline{G})N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим, что $l_F(G) \leq 5$. \square

З а м е ч а н и е 2. Существует разрешимая группа G , для которой граф $\Gamma(G)$ является 3-цепью и $l_F(G) = 6$. Действительно, пусть p — простое число, большее 3, и $H = 2 \cdot S_4^-$. Тогда $Z(H) = \langle z \rangle$, где z — (единственный) элемент порядка 2 в H . Хорошо известно (см. [11]), что существует неприводимый $GF(3)H$ -модуль V размерности 3 с ядром $Z(H)$. Пусть $G_0 = V \rtimes H$ — соответствующее этому модулю полупрямое произведение группы V на группу H . Тогда $F(G_0) = V \times \langle z \rangle$, $F_2(G_0) = VO_2(H)$, $F_3(G_0) = G_0'$ и $F_4(G_0) = G_0$, откуда $l_F(G_0) = 4$. Пусть $G_1 = \mathbb{Z}_p \wr G_0$ — регулярное сплетение группы \mathbb{Z}_p с группой G_0 . Тогда $G_1 = E \rtimes G_0$, где E — элементарная абелева группа порядка p^{432} . Ввиду [14, теорема 5.2.3] имеем $E = C_E(z) \times [E, z]$. Подгруппа $E_0 := [E, z]$ неединична и нормальна в G_1 . Положим $G_2 = E_0 \rtimes G_0$ и $G = \mathbb{Z}_3 \wr G_2$ (сплетение регулярное). Тогда $G = W \rtimes G_2$, где $W = F(G) = O_3(G)$ и $F_2(G) = WE_0$. Ясно,

что граф $\Gamma(G)$ имеет вид



Легко видеть также, что $l_F(G) = 6$.

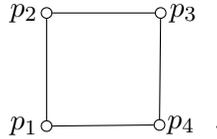
Лемма 2.4. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 4-цепью. Тогда либо $l_F(G) \leq 3$, либо $l_F(G) = 4$ и $G/O(G) \cong 2:S_4^-$.

Доказательство. Следует из [20, предложение 3]. \square

Замечание 3. В [20, пример 1] приведен пример разрешимой группы G вида $(7^2 \times 13^2) \rtimes 2:S_4^-$, для которой граф $\Gamma(G)$ является 4-цепью и $l_F(G) = 4$.

Лемма 2.5. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 4-циклом. Тогда либо $l_F(G) \leq 4$, либо $l_F(G) \leq 5$ и $G/O(G) \cong 2:S_4^-$.

Доказательство. Граф $\Gamma(G)$ имеет вид



Без ограничения общности можно считать, что $O_{p_1}(G) \neq 1$. Положим $\tilde{G} = G/F(G)$. Пусть $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ для $1 \leq i \leq 4$. В G существуют $\{p_1, p_3\}$ -холлова подгруппа U и $\{p_2, p_4\}$ -холлова подгруппа V . Можно считать, что $U = P_1P_3$ и $V = P_2P_4$. Поскольку графы $\Gamma(U)$ и $\Gamma(V)$ несвязны, ввиду предложения 1 каждая из подгрупп U и V является группой Фробениуса или 2-фробениусовой группой. Поскольку $1 \neq O_{p_1}(G) \leq F(U)$, подгруппа P_3 есть циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, $F(U) \leq P_1$ и фактор-группа $P_1/F(U)$ циклическая. Без ограничения общности можно считать, что $F(V) = O_{p_2}(V) \leq P_2$, подгруппа P_4 есть циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов и фактор-группа $P_2/F(V)$ циклическая. Пусть U_1 и V_1 — (единственные) подгруппы порядков p_3 и p_4 из подгрупп P_3 и P_4 соответственно.

Предположим, что $F(\tilde{G})$ является $\{p_3, p_4\}$ -группой. Тогда $F(\tilde{G})$ — либо циклическая группа, либо прямое произведение циклической примарной группы нечетного порядка на (обобщенную) группу кватернионов. Поскольку $C_{\tilde{G}}(F(\tilde{G})) \leq F(\tilde{G})$, ввиду теоремы Ремака отсюда следует, что группа $\tilde{G}/F(\tilde{G})$ либо нильпотентна, либо изоморфна прямому произведению циклической группы на группу S_3 , причем $G/O(G) \cong 2:S_4^-$. Получаем, что в первом случае $l_F(G) \leq 3$, а во втором случае $l_F(G) \leq 4$.

Поэтому можно считать, что $O_{p_1}(\tilde{G}) \neq 1$ или $O_{p_2}(\tilde{G}) \neq 1$. Предположим, что $O_{p_1}(\tilde{G}) \neq 1$. Тогда $O_{p_2}(G) \neq 1$. Пусть X — полный прообраз в G подгруппы $O_{p_1}(\tilde{G})\tilde{V}_1$. Тогда ввиду теоремы Шура — Цассенхауза имеем $X = O_{p_2}(G) \rtimes (Q \rtimes V_1)$ для некоторой силовской p_1 -подгруппы Q из X . Ясно, что $C_Q(O_{p_2}(G)) = O_{p_1}(G) < Q$. Рассмотрим группу $\overline{X} = X/O_{p_1}(G)$. Тогда $\overline{X} = \overline{O_{p_2}(G)} \rtimes (\overline{Q} \rtimes \overline{V}_1)$ и группа $\overline{Q} \rtimes \overline{V}_1$ действует точно на $\overline{O_{p_2}(G)}$. Подгруппа \overline{V}_1 централизует подгруппу $\overline{Q} = O_{p_1}(\tilde{G})$, так как в противном случае ввиду предложения 4 имеем $p_1 = 2$ и критическая подгруппа группы \overline{Q} экстраспециальна, откуда центральная инволюция из $O_{p_1}(\tilde{G})$ лежит в центре группы \tilde{G} , что противоречит несмежности вершин p_1 и p_3 в графе $\Gamma(G)$. Поэтому централизующая $O_{p_1}(\tilde{G})$ подгруппа $O_{p_1'}(\tilde{G})$ есть $\{p_2, p_4\}$ -подгруппа, нормальная в \tilde{G} и содержащая \tilde{V}_1 . Ясно, что $O_{p_1'}(\tilde{G})$ — нормальная подгруппа в \tilde{V} и, следовательно, либо $O_{p_2}(\tilde{G}) \neq 1$, либо \tilde{V}_1 — нормальная подгруппа в \tilde{G} .

Предположим, что $O_{p_2}(\tilde{G}) \neq 1$. Тогда $\widetilde{O_{p_2}(V)} = [\widetilde{O_{p_2}(V)}, \tilde{V}_1] \leq O_{p_1'}(\tilde{G})$, и поэтому $O_{p_2}(\tilde{G}) = \widetilde{O_{p_2}(V)}$. Рассуждая, как выше, получим, что подгруппа \overline{U}_1 централизует подгруппу $O_{p_2}(\tilde{G})$

и $O_{p_2}(\tilde{G}) = \overline{O_{p_2}(\tilde{V})}$. Отсюда следует, что в группе $F_3(G)/F_2(G)$ подгруппы $U_1F_2(G)/F_2(G)$ и $V_1F_2(G)/F_2(G)$ нормальны и, следовательно, эта группа является $\{p_3, p_4\}$ -группой. Рассуждая, как выше, получим, что $l_F(G/F_2(G)) \leq 2$ или $l_F(G/F_2(G)) \leq 3$, причем $G/O(G) \cong 2 \cdot S_4^-$. Поэтому утверждение леммы выполняется.

Пусть теперь \tilde{V}_1 — нормальная подгруппа в \tilde{G} . Тогда подгруппа Фиттинга группы $\tilde{G}/O_{p_1}(\tilde{G})$ является $\{p_3, p_4\}$ -группой. Рассуждая, как выше, получим, что утверждение леммы выполняется.

Итак, можно считать, что $O_{p_1}(\tilde{G}) = 1$ и $O_{p_2}(\tilde{G}) \neq 1$. Если $O_{p_2}(G) \neq 1$, то, как доказано выше, утверждение предложения выполняется. Пусть $O_{p_2}(G) = 1$. Тогда $F(G) = O_{p_1}(G)$ и, как выше, показываем, что подгруппа \overline{U}_1 централизует подгруппу $O_{p_2}(\tilde{G})$ и, следовательно, подгруппа Фиттинга группы $\tilde{G}/O_{p_2}(\tilde{G})$ является $\{p_3, p_4\}$ -группой. Теперь, как и выше, получаем, что утверждение леммы выполняется. \square

Лемма 2.6. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ является 5-циклом. Тогда $l_F(G) = 3$.

Доказательство. Следует из [1, предложение 4.4]. \square

Замечание 4. В [22, табл. 4] приведен пример разрешимой группы G вида $(5^2 \times 13) \rtimes (2 \times F_{21})$, где F_{21} обозначает группу Фробениуса порядка 21, для которой граф $\Gamma(G)$ является 5-циклом и $l_F(G) = 3$.

Доказательство теоремы 1. Пусть G — конечная разрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Если граф $\Gamma(G)$ несвязен, то ввиду п. (а) предложения 1, предложения 2 и [14, теорема 10.3.1] получаем, что либо $l_F(G) \leq 3$, либо $l_F(G) = 4$, G — группа Фробениуса и $G/O(G) \cong 2 \cdot S_4^-$, так что утверждение теоремы выполняется. Если граф $\Gamma(G)$ связан, то утверждение теоремы следует из лемм 2.1–2.6. \square

3. Почти простые группы

В этом разделе мы докажем теорему 2.

Лемма 3.1. Пусть G — конечная неразрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда $\overline{G} := G/S(G)$ — почти простая группа.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $F^*(\overline{G}) = M_1 \times \cdots \times M_n$, где $n \geq 2$ и M_1, \dots, M_n — простые неабелевы группы. Поэтому $2 \in \pi(M_i)$ и $|\pi(M_i)| \geq 3$ для всех i . Ясно, что существуют различные нечетные простые числа $p_1 \in \pi(M_1)$ и $p_2 \in \pi(M_2)$. Но тогда $\{2, p_1, p_2\}$ есть треугольник в графе $\Gamma(M_1 \times M_2)$; противоречие. \square

Лемма 3.2. Пусть G — конечная простая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда G изоморфна одной из групп из заключения теоремы 2.

Доказательство. Если $G \cong A_9$ или G — спорадическая простая группа, не изоморфная M_{11} и M_{22} , то из [11] следует, что граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, 5\}$. Поскольку $A_n < A_{n+1}$, граф $\Gamma(A_n)$ для всех $n \geq 9$ содержит треугольник. Поэтому для спорадических и знакопеременных групп выполняется один из пп. (1), (2) теоремы 2.

Пусть теперь $G = L(q)$ — простая группа лиева типа L над полем $GF(q)$.

Предположим сначала, что L — классический тип. Группы $L_n(q)$, $U_n(q)$, $S_{2n}(q)$, $O_{2n}^\pm(q)$ и $O_{2n+1}(q)$ имеют секции, изоморфные группам $L_{n-1}(q)$, $U_{n-1}(q)$, $S_{2n-2}(q)$, $O_{2n-1}(q)$ и $O_{2n-1}(q)$ соответственно (см., например, [18, предложения 4.1.3, 4.1.4, 4.1.6]). Ввиду [12, табл. 8.8, 8.10, 8.12, 8.14, 8.18, 8.20, 8.26, 8.28, 8.39] группы $L_4(q)$, $U_4(q)$, $S_4(q)$ и $O_7(q)$ имеют секцию, изоморфную группе $O_4^+(q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$, а группы $L_5(q)$, $U_5(q)$ и $U_6(q)$ имеют секции, изоморфные группам $L_2(q) \times L_3(q)$, $L_2(q) \times U_3(q)$ и $L_2(q) \times U_4(q)$ соответственно. Группы $S_4(2)' \cong A_6$, $L_4(2) \cong A_8$, $S_4(3) \cong U_4(2)$, $U_4(3)$ и $U_5(2)$ удовлетворяют одному из пп. (1), (2) теоремы 2. Кроме того, ввиду [11] и [6, таблица] графы простых чисел групп $S_6(2) \cong O_7(2)$, $S_6(3)$ и $O_7(3)$

содержат треугольники. Поэтому ввиду леммы 3.1 можно считать, что G изоморфна $L_2(q)$, $L_3(q)$ или $U_3(q)$.

Пусть $G = L_2(q)$. По [12, табл. 8.1] G имеет циклические подгруппы порядков $(q-1)/(2, q-1)$ и $(q+1)/(2, q-1)$. Отсюда следует, что $|\pi(q \pm 1)/(2, q-1)| \leq 2$, в частности, $|\pi(q^2-1)| \leq 4$ и, следовательно, $|\pi(G)| \leq 5$. Ввиду [6–8] выполняется один из пп. (1)–(7) теоремы 2.

Пусть $G = L_3^\epsilon(q)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$. По [12, табл. 8.3, 8.5] G имеет циклические подгруппы порядков $(q^2-1)/(3, q-\epsilon 1)$ и $(q^2+\epsilon q+1)/(3, q-\epsilon 1)$. Поэтому $|\pi(q^2-1)| \leq 3$ и $|\pi((q^2+\epsilon q+1)/(3, q-\epsilon 1))| \leq 2$, в частности, $|\pi(G)| \leq 6$. Если $|\pi(q^2-1)| \leq 2$, то группа $L_2(q)$ является $EPPO$ -группой и по п. (б) предложения 5 $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$, так что $|\pi(G)| \leq 5$ и ввиду [6–8] выполняется п. (1) теоремы 2. Пусть $|\pi(q^2-1)| = 3$. Тогда $|\pi((q^2-1)/(3, q-\epsilon 1))| = 2$ и $(q^2-1)_3 = (3, q-\epsilon 1) = 3$. Теперь ввиду [8] и [3, предложения 2.1, 2.2, 3.1, 4.1, 4.2] выполняется один из пп. (8), (9) теоремы 2.

Пусть теперь L — исключительный лиев тип. Если $G = G_2(q)$ и $q > 2$, то по [12, табл. 8.30, 8.41, 8.42] G имеет секцию, изоморфную группе $O_4^+(q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$, поэтому ввиду леммы 3.1 получаем $q = 3$, так что выполняется п. (1) теоремы 2. Если $G = {}^3D_4(q)$, то по [12, табл. 8.51] группа G имеет секцию, изоморфную $L_2(q^3) \times L_2(q)$, и поэтому граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник.

Пусть $G = Sz(q)$, где $q = 2^f$ и f — неединичное нечетное число. По [12, табл. 8.16] G имеет циклические самоцентрализующиеся подгруппы порядков $q-1$, $q-\sqrt{2q}+1$ и $q+\sqrt{2q}+1$. Ясно, что $\max\{|\pi(q-1)|, |\pi(q-\sqrt{2q}+1)|, |\pi(q+\sqrt{2q}+1)|\} \leq 2$. Предположим, что f не просто. Тогда ввиду теоремы Жигмонди [26] $f = f_1 f_2$, где f_1 и f_2 — нечетные простые числа. Если $f_1 \neq f_2$, то число $q-1$ делится на взаимно простые числа $2^{f_1}-1$ и $2^{f_2}-1$, а также снова по теореме Жигмонди — на простое число, не делящее $(2^{f_1}-1)(2^{f_2}-1)$, что противоречит неравенству $|\pi(q-1)| \leq 2$. Поэтому $f_1 = f_2$ и $f = f_1^2$. Если $f_1 = 3$, то $q-1 = 7 \cdot 73$, $q-\sqrt{2q}+1 = 13 \cdot 37$ и $q+\sqrt{2q}+1 = 5 \cdot 109$, так что выполняется п. (10) теоремы 2. Если $f_1 = 5$, то $q-1 = 301 \cdot 601 \cdot 1801$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник. Пусть $f_1 > 5$. Положим $q_0 = 2^{2f_1}$. По малой теореме Ферма $q_0^2 = 16^{f_1} \equiv 16 \pmod{f_1}$, откуда $q_0^2 - 1 \equiv 15 \pmod{f_1}$ и, следовательно, f_1 не делит $q_0^2 - 1$. По [5, лемма 3] имеем $((q_0^{2f_1} - 1)/(q_0^2 - 1), q_0^2 - 1) = (f_1, q_0^2 - 1) = 1$. Но $(q_0^{2f_1} - 1)/(q_0^2 - 1) = ((q_0^{f_1} - 1)/(q_0 - 1)) \cdot ((q_0^{f_1} + 1)/(q_0 + 1))$ и $(q_0^{f_1} - 1, q_0^{f_1} + 1) = 1$, следовательно, $((q^2 + 1)/(q_0 + 1), q_0 + 1) = 1$. Отсюда $(q^2 + 1)/(q_0 + 1) = ((q - \sqrt{2q} + 1)/(2^{f_1} - \sqrt{2^{f_1+1}} + 1)) \cdot ((q + \sqrt{2q} + 1)/(2^{f_1} + \sqrt{2^{f_1+1}} + 1))$, и поэтому $|\pi(2^{f_1} - \sqrt{2^{f_1+1}} + 1)| = |\pi(2^{f_1} + \sqrt{2^{f_1+1}} + 1)| = 1$. Но тогда в группе $Sz(2^{f_1})$ централизаторы элементов порядка 5 являются 5-группами и, следовательно, по [13] $f_1 \in \{3, 5\}$, что противоречит предположению. Таким образом, выполняется п. (10) теоремы 2.

Пусть $G = {}^2G_2(q)$, где $q = 3^f$ и f — неединичное нечетное число. По [12, табл. 8.43] G имеет подгруппу, изоморфную $2 \times L_2(q)$, и циклические подгруппы порядков $q - \sqrt{3q} + 1$ и $q + \sqrt{3q} + 1$. Поэтому $|\pi(q^2 - 1)| = 3$ и $\max\{|\pi(q - \sqrt{3q} + 1)|, |\pi(q + \sqrt{3q} + 1)|\} \leq 2$. Но тогда ввиду [8, лемма 1.3] выполняется п. (11) теоремы 2.

Пусть $G = {}^2F_4(q)'$, где $q = 2^f$ и f — нечетное число. Если $f = 1$, то ввиду [11] граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, так что выполняется п. (1) теоремы 2. Если $f > 1$, то ввиду [21] группа G имеет подгруппу, изоморфную $Sz(q) \times Sz(q)$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник.

Для остальных исключительных лиевых типов L граф $\Gamma(G)$ для группы $G = L(q)$ содержит треугольник, так как ввиду [23] имеем $S_8(q) < F_4(q) < E_6(q) < E_7(q) < E_8(q)$. \square

Лемма 3.3. Пусть G — конечная почти простая, но непростая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда G изоморфна одной из групп из заключения теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3.2 цоколь группы G изоморфен группе из пп. (1)–(11) заключения теоремы 2.

Если $|\pi(G)| \leq 5$, то справедливость утверждения леммы вытекает из [6–8; 11]. Поэтому можно считать, что $|\pi(G)| \geq 6$ и группа $\text{Soc}(G)$ изоморфна простой группе из пп. (4), (7), (8), (10) или (11) заключения теоремы 2.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (4). Если $Soc(G) \cong L_2(3^p)$, то $|\pi(G)| \leq 5$. Поэтому $Soc(G) \cong L_2(2^p)$, где p — нечетное простое число и $|\pi(2^p \pm 1)| = 2$, следовательно, $G \cong \text{Aut}(L_2(2^p))$ и p не делит $|Soc(G)|$. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка p из G изоморфен группе $L_2(2) \cong S_3$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (7). Тогда $Soc(G) \cong L_2(q)$, где $q = p^r$, $p \in \{3, 5, 7, 17\}$, r — простое число, r не делит $|Soc(G)|$, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $|\pi(q - \varepsilon 1)| = \pi((q + \varepsilon 1)/2) = 2$. Отсюда $|\pi(Soc(G))| = 5$ и, следовательно, $L_2(q) : r \leq G$. Если $L_2(q) : r < G$, то $G \cong \text{Aut}(L_2(p^r))$, откуда G содержит циклическую подгруппу порядка $q + \varepsilon 1$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\pi(q + \varepsilon 1)$; противоречие. Поэтому $G \cong L_2(q) : r$. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка r из G изоморфен $L_2(p)$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (8). Тогда $Soc(G) \cong U_3(q)$, где $q = 2^p$, p , $q - 1$ и $(q + 1)/3$ — простые числа, $p \geq 5$, $|\pi((q^2 - q + 1)/3)| = 1$ и p не делит $|Soc(G)|$. Отсюда $|\pi(Soc(G))| = 5$ и, следовательно, $U_3(q) : p \leq G$. Если $U_3(q) : p < G$, то в G есть подгруппа вида $U_3(q) : 2$ или $U_3(q) : 3$ и по [6] граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник; противоречие. Поэтому $G \cong U_3(q) : p$. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка p из G изоморфен $U_3(2) \cong 3^2 : Q_8$. Но ввиду [3, предложение 3.1] вершины 2 и 3 не смежны в графе $\Gamma(Soc(G))$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть группа $Soc(G)$ изоморфна группе из п. (10). Тогда $Soc(G) \cong Sz(2^f)$, где либо $f = 9$, либо f — нечетное простое число. Ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] $G \cong \text{Aut}(Sz(2^f))$ и централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка 3 и f из G изоморфен группе $Sz(8)$ и $Sz(2)$ в первом и втором случае соответственно, следовательно, ввиду [5] два различных простых делителя его порядка не лежат в одной компоненте связности графа $\Gamma(Soc(G))$. Поэтому граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, откуда утверждение леммы выполняется.

Пусть $Soc(G) \cong {}^2G_2(3^f)$, где f — нечетное простое число. Тогда ввиду [15, 2.5.12, 4.9.1] $G \cong \text{Aut}(Soc(G)) \cong {}^2G_2(3^f) : f$ и централизатор в $Soc(G)$ любого элемента порядка f из G изоморфен группе ${}^2G_2(3) \cong \text{Aut}(L_2(8)) \cong L_2(8) : 3$ и, следовательно, ввиду [11] вершины 2 и 3 смежны в графе $\Gamma(G)$ и при $f > 3$ граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, f\}$; противоречие. Пусть $f = 3$. Поскольку, как мы видели выше, $2 \times L_2(27) < Soc(G)$, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, 7\}$; противоречие. □

Теорема 2 теперь следует из лемм 3.2 и 3.3. □

Авторы выражают благодарность А. В. Васильеву, В. И. Зенкову и Н. В. Масловой за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A characterization of the prime graphs of solvable groups / A. Gruber, T.M. Keller, M.L. Lewis, K. Naughton, B. Strasser // J. Algebra. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.08.040>.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. IV-VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
3. Васильев А.В., Вдовин Е.П. Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
4. Васильев А.В., Вдовин Е.П. Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
5. Кондратьев А.С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
6. Kondratiev A.S. Finite almost simple 5–primary groups и their Gruenberg–Kegel graphs // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 634–674.
7. Кондратьев А.С., Храмцов И.В. О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.

8. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырехпримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
9. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
10. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
11. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
12. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407.)
13. **Chen Z.M., Shi W.J.** On simple C_{pp} -groups // J. Southwest China Normal Univ. 1993. Vol. 18, no. 3. P. 249–256 (In Chinese).
14. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
15. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40, no. 3).
16. **Hartley B., Meixner T.** Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small // Arch. Math. (Basel). 1981. Vol. 36, no 3. P. 211–213.
17. **Higman G.** Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. (2.). 1957. Vol. 32. P. 335–342.
18. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 129.)
19. **Lucido M.C.** The diameter of the prime graph of finite groups // J. Group Theory. 1999. Vol. 2, no. 2. P. 157–172.
20. **Lucido M.C.** Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8). 2002. Vol. 5-B, no. 1. P. 131–148.
21. **Malle G.** The maximal subgroups of ${}^2F_4(q^2)$ // J. Algebra. 1991. Vol. 139, no. 1. P. 52–68.
22. On realizability of a graph as the prime graph of a finite group / A.L. Gavriluk, I.V. Khrantsov, A.S. Kondrat'ev, N.V. Maslova // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 246–257.
23. **Stensholt E.** Certain embeddings among finite groups of Lie type // J. Algebra. 1978. Vol. 53, no. 1. P. 136–187.
24. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
25. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
26. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, no. 1. P. 265–284.

Алексеева Оксана Алексеевна

Поступила 22.06.15

канд. физ.-мат. наук

проректор

Русско-Британский институт управления

e-mail: Alekseeva.O.A@rbiu.ru

Кондратьев Анатолий Семенович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

УДК 519.9

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹**Г. А. Амирханова, А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко**

Предлагается метод решения следующей обратной задачи линейного программирования (ЛП). Дана задача ЛП и выбран один из ее допустимых векторов. Требуется так минимально изменить вектор целевой функции задачи, чтобы выбранный вектор стал оптимальным. Мера близости векторов оценивается при помощи евклидовой нормы. В работе обратная задача ЛП сводится к задаче безусловной минимизации некоторой выпуклой кусочно-квадратичной функции. Для решения этой задачи минимизации используется обобщенный метод Ньютона.

Ключевые слова: линейное программирование, обратная задача линейного программирования, двойственность, безусловная оптимизация, обобщенный метод Ньютона.

G. A. Amirkhanova, A. I. Golikov, Yu. G. Evtushenko. On an inverse linear programming problem.

A method for solving the following inverse linear programming (LP) problem is proposed. For a given LP problem and one of its feasible vectors, it is required to adjust the objective function vector as little as possible so that the given vector becomes optimal. The closeness of vectors is estimated by means of the Euclidean vector norm. The inverse LP problem is reduced to a problem of unconstrained minimization for a convex piecewise quadratic function. This minimization problem is solved by means of the generalized Newton method.

Keywords: linear programming, inverse linear programming problem, duality, unconstrained optimization, generalized Newton method.

Введение

Рассматривается обратная задача линейного программирования (ЛП) в следующей постановке. Даны прямая задача ЛП и один из ее допустимых векторов, который нужно превратить в оптимальный путем минимального изменения коэффициентов целевой функции. Впервые обратная задача ЛП в такой постановке рассматривалась в работах [1–3]. В этих же работах приведены примеры использования подобных задач. При этом в постановках обратных задач для меры близости векторов использовались нормы l_1 и l_∞ , что позволяло оставаться в рамках линейного программирования при решении обратной задачи.

В данной работе показано, что при использовании евклидовой нормы обратная задача ЛП сводится к безусловной минимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции. Известно, что для решения такой задачи весьма эффективен обобщенный метод Ньютона, который в данном случае сходится глобально за конечное число шагов [4–6].

1. Обратная задача линейного программирования

Пусть прямая и двойственная задачи ЛП соответственно имеют вид

$$\min_{x \in X} \hat{c}^\top x, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0_n\}, \quad (P)$$

$$\max_{u \in U} b^\top u, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq \hat{c}\}. \quad (D)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-00805), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1) и Министерства образования и науки Республики Казахстан (номер государственной регистрации проекта 0115РК00554).

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{c} \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ заданы, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор прямых и $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор двойственных переменных; через 0_i обозначен i -мерный нулевой вектор. Всюду ниже предполагаем, что множество допустимых векторов прямой задачи (P) не пусто. Также предполагаем, что матрица ограничений A имеет ранг m и $m < n$.

Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна — Таккера) для задач (P) и (D) запишем в виде

$$Ax - b = 0_m, \quad x \geq 0_n, \quad D(x)v = 0_n, \quad (1.1)$$

$$v = \hat{c} - A^\top u \geq 0_n. \quad (1.2)$$

Здесь в ограничениях двойственной задачи (D) введен неотрицательный вектор дополнительных переменных $v = \hat{c} - A^\top u \geq 0_n$. Через $D(z)$ обозначается диагональная матрица, у которой i -й диагональный элемент есть i -я компонента вектора z .

Общая постановка обратной задачи к прямой задаче (P) заключается в нахождении вместо исходного вектора \hat{c} нового вектора c такого, что задача

$$c^\top \hat{x} = \min_{x \in X} c^\top x \quad (1.3)$$

имеет в качестве решения заданный вектор $\hat{x} \in X$, при этом евклидово расстояние $\|c - \hat{c}\|$ является минимально возможным (такой вектор c обозначим через c^*).

Без потери общности предположим, что первые l компонент вектора \hat{x} строго больше нуля. Это позволит представить векторы \hat{x} , \hat{c} , c , $v = c - A^\top u$ и матрицу A в виде

$$\hat{x}^\top = [\hat{x}_l^\top, \hat{x}_d^\top], \quad \hat{c}^\top = [\hat{c}_l^\top, \hat{c}_d^\top], \quad c^\top = [c_l^\top, c_d^\top], \quad v^\top = [v_l^\top, v_d^\top], \quad A = [A_l \mid A_d], \quad (1.4)$$

где $\hat{x}_l > 0_l$, $\hat{x}_d = 0_d$, $d = n - l$.

В соответствии с разбиением (1.4) заданный вектор \hat{x} будет решением (1.3), если для векторов $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ выполнены следующие условия Куна — Таккера:

$$A_l \hat{x}_l = b, \quad \hat{x}_l > 0_l, \quad \hat{x}_d = 0_d, \quad \hat{x}_l^\top v_l = 0, \quad \hat{x}_d^\top v_d = 0, \quad (1.5)$$

$$v_l = c_l - A_l^\top u = 0_l, \quad v_d = c_d - A_d^\top u \geq 0_d. \quad (1.6)$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности (1.5), (1.6) для задачи (1.3) приходим к следующей оптимизационной постановке обратной задачи:

$$\min_{c_l \in \mathbb{R}^l, c_d \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^m} \{1/2 \|c_l - \hat{c}_l\|^2 + 1/2 \|c_d - \hat{c}_d\|^2\} \quad (1.7)$$

при ограничениях

$$c_l - A_l^\top u = 0_l, \quad (1.8)$$

$$c_d - A_d^\top u \geq 0_d. \quad (1.9)$$

Выписанная задача является задачей выпуклого квадратичного программирования с $n + m$ неизвестными и n ограничениями.

Возможна и другая эквивалентная форма оптимизационной постановки обратной задачи (1.7)–(1.9). Остановимся на ней более подробно. Заметим, что если \hat{x} не является решением исходной задачи (P), то условия Куна — Таккера (1.5), (1.6) не выполняются при $c_l = \hat{c}_l$ и $c_d = \hat{c}_d$. При этом система (1.6) несовместна, т. е. неразрешима следующая система:

$$A_l^\top u = \hat{c}_l, \quad A_d^\top u \leq \hat{c}_d. \quad (1.10)$$

Противоречивые (несобственные) системы линейных неравенств и уравнений и методы их оптимальной коррекции изучались и ранее (например, см. [7–9] и др.). Применительно

к несовместной системе (1.10) речь идет о нахождении такого вектора v^* , чтоб при замене вектора \hat{c} на $c^* = \hat{c} + v^*$ несовместная система (1.10) становилась бы совместной и при этом евклидова норма вектора v^* была бы минимальна. Таким образом, обратная задача (1.3) может быть сведена к следующей оптимизационной задаче:

$$\min_{v_l \in \mathbb{R}^l, v_d \in \mathbb{R}_+^d, u \in \mathbb{R}^m} \{1/2 \|v_l\|^2 + 1/2 \|v_d\|^2\}, \quad A_l^\top u - v_l = \hat{c}_l, \quad A_d^\top u - v_d \leq \hat{c}_d, \quad v_d \geq 0_d. \quad (1.11)$$

Выпишем функцию Лагранжа задачи (1.11):

$$L(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = 1/2 \|v_l\|^2 + 1/2 \|v_d\|^2 + y_l^\top (A_l^\top u - v_l - \hat{c}_l) + y_d^\top (A_d^\top u - v_d - \hat{c}_d).$$

Задача, двойственная к (1.11), представима как

$$\max_{y_l \in \mathbb{R}^l, y_d \in \mathbb{R}_+^d} \min_{v_l \in \mathbb{R}^l, v_d \in \mathbb{R}_+^d, u \in \mathbb{R}^m} L(v_l, v_d, u, y_l, y_d).$$

Необходимые и достаточные условия минимума внутренней задачи имеют вид

$$L_{v_l}(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = v_l - y_l = 0_l \Rightarrow v_l = y_l, \quad (1.12)$$

$$L_{v_d}(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = v_d - y_d \geq 0_d, \quad v_d^\top (v_d - y_d) = 0, \quad v_d \geq 0_d \Rightarrow v_d = (y_d)_+, \quad (1.13)$$

$$L_u(v_l, v_d, u, y_l, y_d) = A_l y_l + A_d y_d = 0_m. \quad (1.14)$$

Подставляя y_l и y_d из (1.12) и (1.13) в функцию Лагранжа и учитывая выражение (1.14), получаем двойственную целевую функцию

$$\begin{aligned} \tilde{L}(y_l, y_d) &= 1/2 \|y_l\|^2 + 1/2 \|(y_d)_+\|^2 - \hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - y_l^\top y_l - y_d^\top (y_d)_+ + u^\top A_l y_l + u^\top A_d y_d \\ &= -\hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - 1/2 \|y_l\|^2 - 1/2 \|y_d\|^2. \end{aligned}$$

Итак, задача, двойственная к обратной задаче (1.11), имеет вид

$$\max_{y_l \in \mathbb{R}^l, y_d \in \mathbb{R}_+^d} \{-\hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - 1/2 \|y_l\|^2 - 1/2 \|y_d\|^2\} \quad (1.15)$$

при ограничениях

$$A_l y_l + A_d y_d = 0_m, \quad y_d \geq 0_d. \quad (1.16)$$

Аналогично можно получить двойственную задачу к (1.15), (1.16). Для этого выпишем соответствующую функцию Лагранжа

$$L(y_l, y_d, u) = -\hat{c}_l^\top y_l - \hat{c}_d^\top y_d - 1/2 \|y_l\|^2 - 1/2 \|(y_d)_+\|^2 + u^\top (A_l y_l + A_d y_d).$$

Двойственная к (1.15), (1.16) имеет вид

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \max_{y_l \in \mathbb{R}^l, y_d \in \mathbb{R}_+^d} L(y_l, y_d, u). \quad (1.17)$$

Необходимые и достаточные условия максимума внутренней задачи в (1.17) имеют вид

$$L_{y_l}(y_l, y_d, u) = -\hat{c}_l - y_l + A_l^\top u = 0_l,$$

$$L_{y_d}(y_l, y_d, u) = -\hat{c}_d - y_d + A_d^\top u \leq 0_d, \quad y_d^\top (-\hat{c}_d - y_d + A_d^\top u) = 0, \quad y_d \geq 0_d.$$

Отсюда получаем $y_l = A_l^\top u - \hat{c}_l$ и $y_d = (A_d^\top u - \hat{c}_d)_+$. Подставляем эти выражения в функцию Лагранжа $L(y_l, y_d, u)$ и после простых преобразований получаем двойственную задачу

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} \tilde{L}(u) = \min_{u \in \mathbb{R}^m} \{1/2 \|A_l^\top u - \hat{c}_l\|^2 + 1/2 \|(A_d^\top u - \hat{c}_d)_+\|^2\}. \quad (1.18)$$

При этом решение y_l^* , y_d^* квадратичной задачи (1.15), (1.16) выражается через решение u^* задачи безусловной минимизации (1.18) по формуле

$$y_l^* = A_l^\top u^* - \hat{c}_l, \quad y_d^* = (A_d^\top u^* - \hat{c}_d)_+.$$

В свою очередь по решению y_l^* , y_d^* согласно (1.12), (1.13) можно получить решение обратной задачи (1.3):

$$c_l^* = \hat{c}_l + v_l^* = \hat{c}_l + A_l^\top u^* - \hat{c}_l = A_l^\top u^*, \quad c_d^* = \hat{c}_d + v_d^* = \hat{c}_d + (A_d u^* - \hat{c}_d)_+. \quad (1.19)$$

Итак, доказано

Утверждение 1. *Задача квадратичного программирования (1.11) с $m+n$ неизвестными и n ограничениями позволяет найти искомый вектор c^* — решение обратной задачи (1.3) с помощью однократного решения задачи безусловной минимизации (1.18) выпуклой кусочно-квадратичной функции с m неизвестными и вычислить его по простым формулам (1.19).*

Безусловная минимизация в (1.18) может выполняться любым подходящим методом. Но, как известно, для безусловной минимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона [4;6]. Минимизируемая функция $\tilde{L}(u)$ дифференцируема. Однако для этой функции обычная матрица Гессе не существует, так как градиент $\tilde{L}_u(u) = A_l(A_l^\top u - \hat{c}_l) + A_d(A_d^\top u - \hat{c}_d)_+$ функции $\tilde{L}(u)$ недифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является $m \times m$ симметричной положительно полуопределенной матрицей следующего вида:

$$\partial_u^2 \tilde{L}(u) = A_l A_l^\top + A_l D^*(z) A_l^\top,$$

где через $D^*(z)$ обозначена $l \times l$ диагональная матрица с i -м диагональным элементом z_i , равным 1, если $(A_d^\top u - \hat{c}_d)_i > 0$, и равным 0, если $(A_d^\top u - \hat{c}_d)_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$. Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, то к ней добавляется регуляризирующее слагаемое δI_m , где δ — малая положительная величина и I_m — единичная матрица порядка m . В работах [4–6] показано, что обобщенный метод Ньютона с регуляризацией шага спуска сходится глобально за конечное число шагов при минимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции. В [10;11] приведены результаты вычислительного эксперимента на персональных компьютерах с задачами, у которых матрица A имела несколько десятков миллионов столбцов n и несколько тысяч строк m . В [12–14] рассмотрены варианты распараллеливания, что дало возможность решать задачи существенно большей размерности и сократить время счета.

2. Другие постановки обратной задачи линейного программирования

Для задачи ЛП вместо традиционных необходимых и достаточных условий оптимальности типа (1.1), (1.2) можно использовать и иные. В частности, следуя [15–18], введем новую $(\nu \times n)$ -матрицу K , где $\nu = n - m$. Считаем, что строки матрицы K линейно независимы, принадлежат нуль-пространству матрицы A , и поэтому натянутое на них подпространство $\text{im } K^\top$ совпадает с нуль-пространством (ядром) матрицы A . В качестве K можно использовать любую матрицу, ν строк которой образуют базис² нуль-пространства матрицы A . Поэтому $AK^\top = 0_{m\nu}$. Здесь через 0_{ij} обозначена $(i \times j)$ -матрица с нулевыми элементами.

²Матрицу K можно построить различными способами. Например, если A представима в блочном виде $A = [B | N]$, где B невырождена, то матрицу K можно записать как $K = [-N^\top (B^{-1})^\top | I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса–Жордана матрицу A привести к виду $A = [I_m | N]$, то матрица K окажется представима в виде $K = [-N^\top | I_\nu]$. Вообще, если найдена одна такая матрица, то любая другая может быть получена из нее умножением слева на подходящую невырожденную $(\nu \times \nu)$ -матрицу.

С помощью матрицы K прямую (P) и двойственную (D) задачи можно переписать в виде

$$\min_{x \in X} \hat{c}^\top x, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0_n\}, \quad (P)$$

$$\min_{v \in V} \hat{x}^\top v, \quad V = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = K\hat{c}, v \geq 0_n\}. \quad (D_v)$$

Тогда аналогом необходимых и достаточных условий (1.1), (1.2) будут условия

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \quad Kv = K\hat{c}, \quad v \geq 0_n, \quad \hat{c}^\top x + \hat{x}^\top v = \hat{c}^\top \hat{x}.$$

В соответствии с представлением (1.4), которое основано на разбиении заданного допустимого вектора \hat{x} на $\hat{x}_l > 0_l$, $\hat{x}_d = 0_d$, $d = n - l$, введем разбиение матрицы $K = [K_l \mid K_d]$. Условия оптимальности (1.5) и (1.6) для задачи (1.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_l \hat{x}_l = b, \quad \hat{x}_l > 0_l, \quad \hat{x}_d = 0_d, \quad v_l = 0_l, \quad v_d \geq 0_d, \\ K_l c_l = 0_\nu, \quad K_d v_d = K_d c_d. \end{aligned}$$

Тем самым приходим к следующей оптимизационной постановке обратной задачи:

$$\min_{c_l \in \mathbb{R}^l, c_d \in \mathbb{R}^d, v_d \in \mathbb{R}_+^d} \{1/2 \|c_l - \hat{c}_l\|^2 + 1/2 \|c_d - \hat{c}_d\|^2\} \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$K_l c_l = 0_\nu, \quad (2.2)$$

$$K_d v_d - K_d c_d = 0_\nu, \quad v_d \geq 0_d. \quad (2.3)$$

Эта задача квадратичного программирования имеет $n + d$ неизвестных и $2(n - m)$ ограничений и распадается на две независимые подзадачи. Первая из них имеет вид

$$\min_{c_l \in \mathbb{R}^l} 1/2 \|c_l - \hat{c}_l\|^2, \quad K_l c_l = 0_\nu. \quad (2.4)$$

Вторая подзадача выглядит так:

$$\min_{c_d \in \mathbb{R}^d, v_d \in \mathbb{R}_+^d} 1/2 \|c_d - \hat{c}_d\|^2, \quad K_d v_d - K_d c_d = 0_\nu, \quad v_d \geq 0_d. \quad (2.5)$$

Первая подзадача является задачей проектирования вектора \hat{c}_l на ядро матрицы K_l . Ее функция Лагранжа имеет вид

$$L(c_l, p_1) = 1/2 \|c_l - \hat{c}_l\|^2 + p_1^\top K_l c_l.$$

Запишем двойственную задачу к (2.4):

$$\max_{p_1 \in \mathbb{R}^\nu} \min_{c_l \in \mathbb{R}^l} L(c_l, p_1)$$

и необходимое и достаточное условие минимума внутренней задачи минимизации

$$L_{c_l}(c_l, p_1) = c_l - \hat{c}_l + K_l^\top p_1 = 0_l.$$

Подставляя в функцию Лагранжа найденное отсюда выражение $c_l = \hat{c}_l - K_l^\top p_1$, приходим к двойственной к (2.4) задаче

$$\max_{p_1 \in \mathbb{R}^\nu} \{\hat{c}_l^\top K_l^\top p_1 - 1/2 \|K_l^\top p_1\|^2\}, \quad (2.6)$$

которая является задачей безусловной максимизации вогнутой квадратичной функции.

Таким образом, верно

Утверждение 2. Решение c_l^* подзадачи (2.4) выражается через решение p_1^* двойственной задачи (2.6) по формуле $c_l^* = \hat{c}_l - K_l^\top p_1^*$. Если матрица K_l имеет ранг ν , то решением задачи (2.6) будет вектор $p_1^* = (K_l K_l^\top)^{-1} K_l \hat{c}_l$ и вектор c_l^* имеет вид $c_l^* = (I_l - K_l^\top K_l) \hat{c}_l$, где K_l^+ — псевдообратная матрица. В таком случае $K_l^+ = K_l^\top (K_l K_l^\top)^{-1}$.

К сожалению, вторая подзадача не сводится к решению задачи безусловной оптимизации. Но возможна иная, отличная от (2.1)–(2.3), постановка обратной задачи, при которой требуется найти векторы c_d^* и v_d^* , одновременно минимально отличающиеся от заданных векторов \hat{c}_d и \hat{v}_d . В этом случае приходим к следующей постановке второй подзадачи:

$$\min_{c_d \in \mathbb{R}^d, v_d \in \mathbb{R}_+^d} \{1/2 \|c_d - \hat{c}_d\|^2 + 1/2 \|v_d - \hat{v}_d\|^2\}, \quad (2.7)$$

$$K_d v_d - K_d c_d = 0, \quad v_d \geq 0.$$

Двойственная к этой задаче уже будет задачей безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции. Действительно, функция Лагранжа задачи (2.7) имеет вид

$$L(c_d, v_d, p_2) = 1/2 \|c_d - \hat{c}_d\|^2 + 1/2 \|v_d - \hat{v}_d\|^2 + p_2^\top (K_d v_d - K_d c_d).$$

Двойственная к задаче (2.7) есть $\max_{p_2 \in \mathbb{R}^\nu} \min_{c_d \in \mathbb{R}^d, v_d \in \mathbb{R}_+^d} L(c_d, v_d, p_2)$. Из необходимых и достаточных условий минимума внутренней подзадачи, которые имеют вид

$$L_{c_d}(c_d, v_d, p_2) = c_d - \hat{c}_d - K_d^\top p_2 = 0,$$

$$L_{v_d}(c_d, v_d, p_2) = v_d - \hat{v}_d + K_d^\top p_2 \geq 0, \quad v_d^\top (v_d - \hat{v}_d + K_d^\top p_2) = 0, \quad v_d \geq 0,$$

находим $c_d = \hat{c}_d + K_d^\top p_2$ и $v_d = (\hat{v}_d - K_d^\top p_2)_+$. Подставим эти выражения в функцию Лагранжа $L(c_d, v_d, p_2)$. После простых преобразований получаем двойственную к (2.7) задачу

$$\max_{p_2 \in \mathbb{R}^\nu} \{-\hat{c}_d^\top K_d^\top p_2 - 1/2 \|K_d^\top p_2\|^2 - 1/2 \|(\hat{v}_d - K_d^\top p_2)_+\|^2\}. \quad (2.8)$$

Итак, двойственная задача (2.8) является задачей безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции от ν неизвестных. Ее решение p_2^* позволяет легко вычислить решения c_d^* и v_d^* подзадачи (2.7)

$$c_d^* = \hat{c}_d + K_d^\top p_2^*, \quad v_d^* = (\hat{v}_d - K_d^\top p_2^*)_+. \quad (2.9)$$

Заметим, что если c_d^* — решение задачи (2.5) и c_d^{**} — решение задачи (2.7), то $\|c_d^* - \hat{c}_d\| \leq \|c_d^{**} - \hat{c}_d\|$.

Для решения задачи безусловной максимизации (2.8) также можно применять обобщенный метод Ньютона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zhang J., Liu Z.** Calculating some inverse linear programming problems // J. Comput. Appl. Math. 1996. Vol. 72, issue 2. P. 261–273.
2. **Zhang J., Liu Z.** A further study on inverse linear programming problems // J. Comput. Appl. Math. 1999. Vol. 106, issue 2. P. 345–359.
3. **Ahuja R.K., Orlin J.B.** Inverse Optimization // Operations Research. 2001. Vol. 49, № 5. P. 771–783.
4. **Mangasarian O.L.** A finite Newton method for classification // Optimizat. Meth. and Software. 2002. Vol. 17, № 5. P. 913–930.
5. **Kanzow C., Qi H., Qi L.** On the minimum norm solution of linear programs // J. Optim. Theory Appl. 2003. Vol. 116. P. 333–345.
6. **Mangasarian O.L.** A Newton method for linear programming // J. Optim. Theory Appl. 2004. Vol. 121. P. 1–18.

7. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 335 с.
8. **Еремин И.И.** Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Юж.-Урал. гос. ун-та, 2005. 195 с.
9. **Попов Л.Д.** Двойственный подход к применению барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 231–237.
10. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.** Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1564–1573.
11. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Обобщенный метод Ньютона для задач линейной оптимизации с ограничениями-неравенствами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 98–108.
12. **Попов Л.Д.** Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 206–221.
13. Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования / В.А.Гаранжа, А.И.Голиков, Ю.Г.Евтушенко, М.Х.Нгуен // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1369–1384.
14. **Попов Л.Д.** Опыт организации гибридных параллельных вычислений в методе Евтушенко—Голикова для задач с блочно-ангулярной структурой ограничений // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 38–50.
15. **Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.** Барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования). М.: Изд-во ВЦ РАН, 1992. 76 с.
16. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. Chichester: Wiley, 1997. 508 p.
17. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Нахождение нормальных решений в задачах линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 12. С. 1766–1386.
18. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Два параметрических семейства задач линейного программирования и их приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 4. С. 31–44.

Амирханова Гульшат Аманжоловна
науч. сотрудник
ИИВТ КН МОН РК

Поступила 14.05.2015

Голиков Александр Ильич
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына

Евтушенко Юрий Гаврилович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
директор
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: evt@ccas.ru

УДК 517.977

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ДИНАМИКЕ¹**А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова**

Рассматривается математическая модель, содержащая две базовые компоненты: управляемую динамику и краевую задачу, в роли которой выступает конечномерная многокритериальная равновесная модель. Конечномерная задача описывает некоторый управляемый объект, который находится в стационарном (равновесном) состоянии. Под действием внешних возмущений объект теряет свое состояние устойчивости и оказывается в произвольном положении. Управляя динамикой, необходимо вернуть объект в состояние равновесия. В работе предлагается и исследуется математическая модель описанной ситуации и метод ее решения. Предлагаемая модель относится к классу задач стабилизации. Реальный прообраз этой задачи легко найти в любой сфере человеческой активности, начиная с технологий и заканчивая политикой.

Ключевые слова: терминальное управление, краевая задача, равновесная модель, линейная динамика, оптимальность по Парето, равновесие по Нэшу, седловой подход, сходимости.

A. S. Antipin, E. V. Khoroshilova. Multicriteria boundary value problem in dynamics.

We consider a mathematical model that contains two basic components: a controlled dynamics and a boundary value problem in the form of a finite-dimensional multicriteria equilibrium model. The finite-dimensional problem describes some controlled object, which is in equilibrium (in a steady state). Under the influence of external disturbances the object loses its stability and takes an arbitrary position. It is required to return the object to equilibrium by controlling the dynamics. We propose and study a mathematical model of this situation and a method for its solution. The proposed model belongs to the class of stabilization problems. A real-world prototype of this problem can be easily found in every sphere of human activity: from technologies to politics.

Keywords: terminal control, boundary value problem, equilibrium model, linear dynamics, Pareto optimality, Nash equilibrium, saddle-point approach, convergence.

1. Постановка краевой задачи

В работе рассмотрим сначала краевую конечномерную задачу, а затем управляемую динамическую систему, которая выбором управления удерживает краевую модель в состоянии равновесия. Краевая задача является математической моделью ситуации, весьма распространенной в различных областях человеческой деятельности.

Пусть группа из m участников образует сообщество (экономический союз) для реализации общей цели (проекта). Цели и интересы каждого из участников описываются стоимостными целевыми функциями $f_i(x_1)$, $i = 1, 2, \dots, m$, которые определены на некотором общем множестве ресурсов $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$. Проблема, стоящая перед участниками проекта, заключается в том, как выбрать распределение поставок ресурсов так, чтобы, с одной стороны, проект был реализован с наименьшими суммарными расходами, а, с другой стороны, каждый из участников был заинтересован в минимизации своего вклада в реализацию общего проекта.

В первом приближении эту ситуацию можно описать в виде простейшей задачи многокритериальной оптимизации:

$$f(x_1^*) \in \text{ParetoMin}\{f(x_1) \mid x_1 \in X_1\}, \quad (1.1)$$

где $f(x_1) = (f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_m(x_1))$ — векторный критерий, а выпуклые скалярные функции $f_i(x_1)$, $i = 1, 2, \dots, m$, имеют смысл стоимости ресурсов, которые i -й участник должен внести в сообщество для реализации проекта. Допустимое множество ресурсов (альтернатив) X_1 на первом этапе рассмотрения проблемы носит геометрический характер.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-06045) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1).

Задача многокритериальной оптимизации (1.1) порождает в качестве множества решений обширное многообразие точек, оптимальных по Парето. Предполагается, что не все участники в формируемом сообществе равноправны. Например, одни участники имеют более сильный хозяйственный механизм, и соответственно их долевое участие может быть больше, а другие участники имеют более слабую экономику, и их вклад в общее дело будет менее значимым или даже отрицательным (долг). Поэтому некоторые целевые функции будут принимать неотрицательные значения, т. е. $f_i(x_1) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m'$, а оставшаяся часть функций может принимать отрицательные значения, т. е. $f_i(x_1) < 0, i = m' + 1, \dots, m$.

В задаче многокритериальной оптимизации выбирается Парето-оптимальное решение, которое нельзя улучшить, не увеличивая расходы какого-либо участника. С точки зрения индивидуальных интересов не все Парето-оптимальные решения равноправны.

Кроме того, наряду с индивидуальными интересами каждого участника в отдельности существуют еще и групповые интересы, например стоимость проекта в целом. Для разных Парето-оптимальных оценок, которые задают конфигурацию параметров будущего проекта, эта стоимость, вообще говоря, разная. Естественно выбрать проект, реализация которого имеет минимальную стоимость. Таким образом, необходимо сформулировать математическую модель, в решении которой заложена идея согласования индивидуальных интересов каждого участника с групповыми (коллективными) интересами сообщества.

В качестве модели предлагается рассмотреть игру двух лиц с равновесием по Нэшу [1]:

$$\langle \lambda^*, f(x_1^*) \rangle \in \text{Min}\{\langle \lambda^*, f(x_1) \rangle \mid x_1 \in X_1\}, \quad (1.2)$$

$$\langle \lambda - \lambda^*, f(x_1^*) - \lambda^* \rangle \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad (1.3)$$

где неравенство (1.3) можно заменить на эквивалентное ему уравнение с оператором проектирования вектора на положительный ортант переменных $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ [2, кн. 1, с. 214]:

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \alpha(f(x_1^*) - \lambda^*)), \quad \alpha > 0.$$

Добавим к задаче (1.2), (1.3) управляемую динамику и сформулируем общую динамическую модель с краевой задачей на правом конце интервала времени.

2. Динамика и седловой подход к решению задачи

Рассмотрим модель в динамике, которая представляет собой линейную управляемую дифференциальную систему

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1^* \in X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u(\cdot) \in U,$$

где множество допустимых управлений предполагается ограниченным интегрально:

$$U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \|u(\cdot)\|_{L_2^r}^2 \leq C\}.$$

Здесь $D(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы, x_0 — заданное начальное условие, $x(t_1)$ — правый конец траектории $x(t) \in AC^n[t_0, t_1]$ (линейное многообразие абсолютно непрерывных функций). Управления $u(\cdot)$ являются элементами пространства $L_2^r[t_0, t_1]$ и принадлежат шару $\|u(\cdot)\|_{L_2^r}^2 \leq C$. Шар, будучи интегрально ограниченным множеством, содержит поточечно неограниченные функции. Последнее означает, что множество достижимости X_1 представляет собой либо все пространство \mathbb{R}^n , либо его подпространство [3]. Далее наряду с обозначением $x(t_1)$ будем использовать также x_1 .

Объединяя динамику с краевой задачей, сформулируем *динамическую краевую модель*, которая описывает переходный процесс управляемого объекта из начального состояния $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ в терминальное состояние $x(t_1) = x_1^*$:

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$x(t_1) = x_1^* \in X_1 \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u(\cdot) \in U, \quad (2.2)$$

$$U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \|u(\cdot)\|_{L_2^r}^2 \leq C\}, \quad (2.3)$$

где x_1^* является x_1 -компонентой решения многокритериальной равновесной задачи (1.2), (1.3):

$$\langle \lambda^*, f(x_1^*) \rangle \in \text{Min}\{\langle \lambda^*, f(x_1) \rangle \mid x_1 \in X_1\}, \quad (2.4)$$

$$\langle \lambda - \lambda^*, f(x_1^*) - \lambda^* \rangle \leq 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (2.5)$$

Под решением задачи (2.1)–(2.5) понимается набор $(\lambda^*; x_1^*, x^*(t), u^*(t))$, где первые две компоненты есть решения задачи (2.4), (2.5), а вторые являются решениями задачи (2.1)–(2.3). Подробнее, ведется поиск такого управления $u^*(t) \in U$, чтобы траектория $x^*(t)$ попала своим правым концом в соответствующую компоненту x_1^* решения краевой задачи. Геометрически это означает, что векторы $f(x^*(t_1))$ и λ^* , отвечающие этому управлению, лежат на одной прямой (внутри положительного ортанга $\lambda_i > 0$). Именно это отражает вариационное неравенство (2.5). Решение $x^*(t_1)$ зависит от вектора f : различным векторам f будут отвечать разные $x^*(t_1)$.

Подчеркнем, что решения $x^*(t)$, $u^*(t)$ дифференциальной системы (2.1) в общем случае являются элементами пространств $L_2^n[t_0, t_1]$, $L_2^r[t_0, t_1]$, т. е. эти решения удовлетворяют системе (2.1) для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. В частности, в качестве $x^*(t)$ вполне может выступать функция типа канторовой лестницы [4], которая почти всюду дифференцируема на отрезке и отображает канторово множество меры нуль в множество положительной меры. Эту функцию нельзя восстановить по ее производной, но тем не менее она является решением уравнения $\frac{d}{dt}x(t) = 0$, которое получается из (2.1), если $D(t) = I$, $B(t) = 0$, где I — единичная матрица.

Поэтому дифференциальный оператор $\frac{d}{dt}x(t) - D(t)x(t) - B(t)u(t)$ системы (2.1) мы будем рассматривать на декартовом произведении линейного многообразия абсолютно непрерывных функций $AC^n[t_0, t_1] \subset L_2^n[t_0, t_1]$ и управлений из $U \subset L_2^r[t_0, t_1]$. В [2, кн. 1, с. 443] показано, что любому управлению $u(\cdot) \in U$ в линейной системе (2.1) отвечает единственная траектория $x(\cdot)$, которая является абсолютно непрерывной функцией и удовлетворяет тождеству

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Замыкание линейного многообразия абсолютно непрерывных функций по норме пространства $\overline{AC}^n[t_0, t_1]$ совпадает со всем пространством $L_2^n[t_0, t_1]$. Именно поэтому в качестве решений дифференциальной управляемой системы (2.1) могут быть как абсолютно непрерывные функции, так и функции типа канторовой лестницы, которые не являются абсолютно непрерывными.

В приложениях управление $u(\cdot)$ часто является кусочно-непрерывной функцией. При этом наличие точек разрыва на управлении никак не сказывается на значениях траектории $x(\cdot)$. Траектория не изменится, даже если изменить значения $u(\cdot)$ на множестве меры нуль.

3. Седловая функция (аналог функции Лагранжа)

Поставим в соответствие конечномерной задаче (2.4)–(2.5) функцию, которая будет играть роль, аналогичную функции Лагранжа в выпуклом программировании. Эта функция имеет вид

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1) = \langle \lambda, f(x_1) - 1/2\lambda \rangle \quad (3.1)$$

и определена для всех $\lambda \geq 0$, $x_1 \in X_1$. Отметим, что данная функция является выпукловогнутой относительно прямых (x_1) и двойственных (λ) переменных, точнее, сильно вогнутой

по двойственной переменной λ . Такие функции имеют седловые точки. Применительно к нашей ситуации седловая точка (λ^*, x_1^*) удовлетворяет системе неравенств

$$\langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda \rangle \leq \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle \leq \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^* \rangle \text{ для всех } \lambda \geq 0, x_1 \in X_1.$$

Левое неравенство системы означает, что λ^* является точкой максимума функции $\mathcal{L}(\lambda, x_1^*)$ по переменным λ при фиксированном значении $x(t_1) = x_1^*$. Выписав необходимое условие максимума для этой задачи, получим вариационное неравенство (2.5). Правое неравенство означает, что точка $x_1^* \in X_1$ является точкой минимума функции $\mathcal{L}(\lambda^*, x_1)$ по переменной x_1 при фиксированном значении λ^* . Именно это утверждается в задаче оптимизации (2.4).

В рассматриваемом случае функция $\mathcal{L}(\lambda, x_1)$ квадратичная и сильно вогнутая, следовательно, обладает свойством бесконечного роста, т.е. $\mathcal{L}(\lambda, x_1) \rightarrow -\infty$, если $\lambda \rightarrow \infty$ при любом фиксированном $x_1 \in X_1$. В этом случае теорема фон Неймана работает, и, следовательно, существование седловой точки для функции (3.1) гарантировано. Подчеркнем, что (3.1) не относится к функциям Лагранжа, поскольку она не является линейной по двойственным переменным. Нетрудно доказать, что седловая точка функции $\mathcal{L}(\lambda, x_1)$ является равновесным решением (2.4), (2.5).

В качестве следующего шага распространим функцию $\mathcal{L}(\lambda, x_1)$ на всю задачу (2.1)–(2.5). Близкие подходы рассматривались в [5–7]. Выпишем динамический аналог функции (3.1):

$$\mathcal{L}(\lambda, \psi(t); x_1, x(t), u(t)) = \langle \lambda, f(x_1) - 1/2\lambda \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle dt, \quad (3.2)$$

определенную при всех $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times AC^n[t_0, t_1] \times U$. В случае регулярных ограничений (условие Слейтера) функция (3.2) всегда имеет седловую точку $(\lambda_1^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, которая удовлетворяет системе седловых неравенств

$$\mathcal{L}(\lambda, \psi(\cdot); x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \leq \mathcal{L}(\lambda^*, \psi^*(t); x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \leq \mathcal{L}(\lambda^*, \psi^*(t); x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \quad (3.3)$$

при всех $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times AC^n[t_0, t_1] \times U$.

Покажем, что седловая точка системы (3.3) является решением исходной системы (2.1)–(2.5). В развернутом виде седловая система имеет представление

$$\begin{aligned} & \langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \right\rangle dt \\ & \leq \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \right\rangle dt \\ & \leq \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^* \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $\Psi_2^n[t_0, t_1]$ — линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из пространства, сопряженного к $L_2^n[t_0, t_1]$. Это многообразие всюду плотно в $L_2^n[t_0, t_1]$.

Учитывая, что $(x_1^*, x^*(t), u^*(t))$ — решение дифференциального уравнения (2.1), перепишем левое неравенство системы (3.4) в форме двух задач оптимизации, первая из которых

$$\langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi(t) - \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \right\rangle dt \leq \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle \quad (3.5)$$

выполняется для всех $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$, а другая задача

$$(x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \text{Arg min} \left\{ \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^* \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle dt \right\} \quad (3.6)$$

— при всех $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times \text{AC}^n[t_0, t_1] \times U$. Из (3.5) имеем

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad (3.7)$$

$$\langle \lambda, f(x_1^*) - 1/2\lambda \rangle \leq \langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle, \quad \lambda \geq 0.$$

Здесь второе неравенство представляет собой задачу максимизации квадратичной функции. Если для этой задачи выписать необходимое условие, то получим вариационное неравенство $\langle \lambda - \lambda^*, f(x_1^*) - \lambda^* \rangle \leq 0$, $\lambda \geq 0$. Неравенство означает, что линейная функция на положительном ортанте достигает своего максимума в конечной точке $\lambda^* \neq 0$. Последнее возможно, если все компоненты вектора нормали $f(x_1^*) - \lambda^*$ равны нулю. Отсюда для всех внутренних точек положительного ортанта, т. е. для $\lambda > 0$, получаем $f(x_1^*) = \lambda^*$. Иными словами, оба вектора лежат на одном луче. С другой стороны, вариационное неравенство эквивалентно операторному уравнению [2, кн. 1, с. 214]

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \alpha(f(x_1^*) - \lambda^*)). \quad (3.8)$$

Итак, задачу (3.6) можно представить как задачу минимизации выпуклой функции $\langle \lambda^*, f(x_1^*) - 1/2\lambda^* \rangle \leq \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^* \rangle$ при одном скалярном ограничении

$$\left\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle = 0.$$

С учетом (3.4), (3.5) получим исходную систему (2.1)–(2.5). Таким образом, доказано, что седловая точка системы (3.4) является решением исходной системы (2.1)–(2.5).

4. Постановка задачи, метод решения

Из сказанного выше следует, что поиск седловой точки системы (3.4) приводит к необходимости решить систему

$$(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \text{Arg min} \left\{ \langle \lambda^*, f(x_1) - 1/2\lambda^* \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle dt \mid x_1, x(\cdot), u(\cdot) \right\}, \quad (4.1)$$

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \alpha(f(x_1^*) - \lambda^*)), \quad (4.2)$$

$$\psi^*(t) = \psi^*(t) + \alpha \left(D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \right), \quad \alpha > 0, \quad (4.3)$$

при всех $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times \text{AC}^n[t_0, t_1] \times U$, $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$. Здесь система записана в форме, удобной для реализации метода простой итерации. Похожую модель см. в [8].

Для решения этой задачи можно использовать различные подходы, в том числе метод простой итерации. В форме метода проекции градиента этот метод эффективен для решения задач оптимизации, но не гарантирует сходимости к решению в задачах седлового (игрового) типа. Для решения этих задач существуют седловые подходы. Одним из таких подходов является *двойственный экстрапроксимальный метод*, развитый в [9], где управление процессом

идет по двойственным переменным $(\lambda, \psi(\cdot))$, а прямые переменные $(x_1, x(\cdot), u(\cdot))$ находятся как решение задачи оптимизации. Формулы данного процесса имеют вид

$$\bar{\lambda}^k = \arg \min\{1/2|\lambda - \lambda^k|^2 - \alpha\langle \lambda, f(x_1^k) - 1/2\lambda \rangle \mid \lambda \geq 0\}, \quad (4.4)$$

$$\bar{\psi}^k(t) = \psi^k(t) + \alpha\left(D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t) - \frac{d}{dt}x^k(t)\right), \quad (4.5)$$

$$(x_1^{k+1}, x^{k+1}(\cdot), u^{k+1}(\cdot)) = \arg \min\left\{1/2|x_1 - x_1^k|^2 + \alpha\langle \bar{\lambda}^k, f(x_1) - 1/2\bar{\lambda}^k \rangle + 1/2\|x(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2\|u(t) - u^k(t)\|^2 + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar{\psi}^k(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle dt\right\}, \quad (4.6)$$

$$\lambda^{k+1} = \arg \min\{1/2|\lambda - \lambda^k|^2 - \alpha\langle \lambda, f(x_1^{k+1}) - 1/2\lambda \rangle \mid \lambda \geq 0\}, \quad (4.7)$$

$$\psi^{k+1}(t) = \psi^k(t) + \alpha\left(D(t)x^{k+1}(t) + B(t)u^{k+1}(t) - \frac{d}{dt}x^{k+1}(t)\right), \quad \alpha > 0, \quad (4.8)$$

где минимум в (4.6) берется по всем $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in X_1 \times AC^n[t_0, t_1] \times U$.

5. Доказательство сходимости

Целевая функция задачи (4.6) является регуляризованной, сильно выпуклой и поэтому имеет единственную точку минимума. Любая минимизирующая последовательность сходится к минимуму функции со скоростью геометрической прогрессии [2, кн. 1, с. 299]. Отметим, что точка минимума регуляризованной выпуклой функции удовлетворяет неравенству

$$1/2|z^* - x|^2 + \alpha f(z^*) \leq 1/2|z - x|^2 + \alpha f(z) - 1/2|z - z^*|^2, \quad z \in Z, \quad (5.1)$$

где $f(z)$ — выпуклая, не обязательно дифференцируемая функция, определенная на выпуклом множестве Z , z^* — точка минимума функции $1/2|z - x|^2 + \alpha f(z)$ на Z , x — фиксированная точка, $\alpha > 0$ — параметр [9]. Используя (5.1), представим задачу (4.6) в виде

$$\begin{aligned} & 1/2|x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + \alpha\langle \bar{\lambda}^k, f(x_1^{k+1}) - 1/2\bar{\lambda}^k \rangle + 1/2\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar{\psi}^k(t), D(t)x^{k+1}(t) + B(t)u^{k+1}(t) - \frac{d}{dt}x^{k+1}(t) \right\rangle dt \\ & \leq 1/2|x_1 - x_1^k|^2 + \alpha\langle \bar{\lambda}^k, f(x_1) - 1/2\bar{\lambda}^k \rangle + 1/2\|x(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2\|u(t) - u^k(t)\|^2 \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar{\psi}^k(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle dt \\ & - 1/2|x_1 - x_1^{k+1}|^2 - 1/2\|x(t) - x^{k+1}(t)\|^2 - 1/2\|u(t) - u^{k+1}(t)\|^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогично, при помощи (5.1) преобразуем экстремальные уравнения (4.4), (4.7) к виду

$$|\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle \bar{\lambda}^k, f(x_1^k) - 1/2\bar{\lambda}^k \rangle \leq |\lambda - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle \lambda, f(x_1^k) - 1/2\lambda \rangle - |\lambda - \bar{\lambda}^k|^2, \quad \lambda > 0, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} & |\lambda^{k+1} - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle \lambda^{k+1}, f(x_1^{k+1}) - 1/2\lambda^{k+1} \rangle \\ & \leq |\lambda - \lambda^k|^2 - 2\alpha\langle \lambda, f(x_1^{k+1}) - 1/2\lambda \rangle - |\lambda - \lambda^{k+1}|^2, \quad \lambda > 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Далее, чтобы иметь единообразный механизм получения различных оценок, представим уравнения (4.5), (4.8) в формах, аналогичных (5.3), (5.4). С этой целью будем рассматривать эти

уравнения как необходимые и достаточные условия минимумов квадратичных функционалов типа (4.4), (4.7). Введем обозначение

$$F(x^k(t), u^k(t)) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t) - \frac{d}{dt}x^k(t), \quad (5.5)$$

тогда уравнения (4.5), (4.8) можно переписать в квадратичной форме

$$\bar{\psi}^k(\cdot) = \arg \min \{1/2 \|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - \alpha \langle \psi(t), F(x^k(t), u^k(t)) \rangle \mid \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]\},$$

$$\psi^{k+1}(\cdot) = \arg \min \{1/2 \|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - \alpha \langle \psi(t), F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \rangle \mid \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]\}.$$

С учетом преобразования (5.1) полученные задачи представим в виде

$$\begin{aligned} & \|\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha \langle \bar{\psi}^k(t), F(x^k(t), u^k(t)) \rangle \\ & \leq \|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha \langle \psi(t), F(x^k(t), u^k(t)) \rangle - \|\psi(t) - \bar{\psi}^k(t)\|^2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & \|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha \langle \psi^{k+1}(t), F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \rangle \\ & \leq \|\psi(t) - \psi^k(t)\|^2 - 2\alpha \langle \psi(t), F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \rangle - \|\psi(t) - \psi^{k+1}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

для всех $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$. Дополнительно предположим, что функция $f(x_1)$ удовлетворяет условию Липшица для всех допустимых x_1 и h :

$$|f(x_1 + h) - f(x_1)| \leq Lh. \quad (5.8)$$

Докажем теорему о сходимости метода (4.4)–(4.8) к решению задачи (4.1)–(4.3).

Теорема. *Если решение равновесной задачи (4.1)–(4.3) существует, функции $f_i(x_1)$, $i = 1, \dots, t$, выпуклы и подчинены условию Липшица, то последовательность двойственного экстраградиентного метода (4.4)–(4.8) $(\lambda^k, \psi^k(\cdot); x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot))$ с параметром α , удовлетворяющим условию $0 < \alpha < \alpha_0 = \min\{1/L; 1/(\sqrt{2}C_0); 1/(\sqrt{2}B_{\max})\}$, содержит подпоследовательность, которая сходится к одному из решений $(\lambda^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ задачи. При этом сходимость слабая — по управлениям, сильная — по траекториям, сопряженным траекториям, а также по всем терминальным переменным.*

Кроме того, последовательность суммарных отклонений от решения $|\lambda^k - \lambda^*|^2 + \|\psi^k(t) - \psi^*(t)\|^2 + |x_1^k - x_1^*|^2 + \|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^k(t) - u^*(t)\|^2$ монотонно убывает с ростом k для всех начальных условий $(\lambda^0, \psi^0(\cdot); x_1^0, x^0(\cdot), u^0(\cdot))$.

Доказательство теоремы сводится к вычислению оценок отклонения, полученного на $(k+1)$ -ой итерации приближения к решению от самого решения задачи, последующего анализа оценок, из которого будет следовать ограниченность итеративной последовательности, существование (по крайней мере одной) слабой предельной точки. Затем идет доказательство факта, что слабо предельная точка является решением исходной задачи. В силу ограниченного объема статьи будем выписывать соответствующие оценки без их подробного обоснования и одновременно указывать источники, где это обоснование можно найти.

1. Суммарная оценка отклонения x_1^{k+1} , $x^{k+1}(\cdot)$, $u^{k+1}(\cdot)$ от x_1^* , $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & 1/2 |x_1^{k+1} - x_1^*|^2 + 1/2 \|x^{k+1}(t) - x^*(t)\|^2 + 1/2 \|u^{k+1}(t) - u^*(t)\|^2 \\ & + 1/2 |x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + 1/2 \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + 1/2 \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 + \alpha \langle \bar{\lambda}^k - \lambda^*, f(x_1^{k+1}) - f(x_1^*) \rangle \\ & + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t)(x^{k+1}(t) - x^*(t)) + B(t)(u^{k+1}(t) - u^*(t)) - \frac{d}{dt}(x^{k+1}(t) - x^*(t)) \rangle dt \\ & \leq 1/2 |x_1^k - x_1^*|^2 + 1/2 \|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + 1/2 \|u^k(t) - u^*(t)\|^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для получения этой оценки были использованы неравенства (5.2) и (3.4). Детальный анализ вывода оценки можно видеть в [5–12].

2. В качестве следующего шага, используя (5.3)–(5.7), получим суммарную оценку отклонения λ^{k+1} , $\psi^{k+1}(t)$ от λ^* , $\psi^*(t)$:

$$\begin{aligned}
 & |\lambda^{k+1} - \lambda^*|^2 + |\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 + |(\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}^k) + \alpha(f(x_1^k) - f(x_1^{k+1}))|^2 \\
 & \quad - \alpha^2 |f(x_1^k) - f(x_1^{k+1})|^2 - 2\alpha \langle \bar{\lambda}^k - \lambda^*, f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k) \rangle \\
 & + \|\psi^{k+1}(t) - \psi^*(t)\|^2 + \|\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)\|^2 - \alpha^2 \|F(x^k(t), u^k(t)) - F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))\|^2 \\
 & \quad + \|\psi^{k+1}(t) - \bar{\psi}^k(t) + \alpha(F(x^k(t), u^k(t)) - F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)))\|^2 \\
 & - 2\alpha \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t)(x^{k+1}(t) - x^*(t)) + B(t)(u^{k+1}(t) - u^*(t)) - \frac{d}{dt}(x^{k+1}(t) - x^*(t)) \right\rangle dt \\
 & \leq |\lambda^k - \lambda^*|^2 + \|\psi^k(t) - \psi^*(t)\|^2. \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

3. Найдем суммарную оценку отклонений по всем прямым и двойственным переменным. Умножим для этого неравенство (5.9) на 2 и с учетом (5.8) сложим его с (5.10):

$$\begin{aligned}
 & |x_1^{k+1} - x_1^*|^2 + \|x^{k+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{k+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{k+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{k+1}(t) - \psi^*(t)\|^2 \\
 & \quad + |x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 + \|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 \\
 & \quad + |\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 + |(\bar{\lambda}^k - \lambda^{k+1}) + \alpha(f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k))|^2 - \alpha^2 |f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k)|^2 \\
 & \quad + \|\psi^{k+1}(t) - \bar{\psi}^k(t) + \alpha(F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t)))\|^2 \\
 & \quad \quad - \alpha^2 \|F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t))\|^2 \\
 & \leq |x_1^k - x_1^*|^2 + \|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^k(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^k - \lambda^*|^2 + \|\psi^k(t) - \psi^*(t)\|^2. \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое из левой части (5.11), используя неравенство треугольника и оценку нормы линейного ограниченного дифференциального оператора, которую можно получить по лемме Гронуолла: $C_0 = e^{D_{\max}(t_1 - t_0)} B_{\max} \sqrt{t_1 - t_0}$, где $B_{\max} = \|B(t)\|_{L_\infty} = \max \|B(t)\| \forall t \in [t_0, t_1]$, $D_{\max} = \|D(t)\|_{L_\infty}$ [2, кн. 2, с. 653]:

$$\|F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t))\| \leq C_0 \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\| + B_{\max} \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|.$$

С учетом неравенства $2|xy| \leq x^2 + y^2$ находим

$$\|F(x^k(t), u^k(t)) - F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))\|^2 \leq 2\|A\|^2 \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + 2B_{\max}^2 \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2.$$

Используя полученную оценку и условие Липшица $|f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k)|^2 \leq L^2 |x_1^{k+1} - x_1^k|^2$, представим неравенство (5.11) в форме

$$\begin{aligned}
 & |x_1^{k+1} - x_1^*|^2 + \|x^{k+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{k+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{k+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{k+1}(t) - \psi^*(t)\|^2 \\
 & \quad + d_1 |x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + d_2 \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + d_3 \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 + \|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 \\
 & \quad \quad + |\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 + |(\bar{\lambda}^k - \lambda^{k+1}) + \alpha(f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k))|^2 \\
 & \quad \quad + \|\psi^{k+1}(t) - \bar{\psi}^k(t) + \alpha(F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t)))\|^2 \\
 & \leq |x_1^k - x_1^*|^2 + \|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^k(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^k - \lambda^*|^2 + \|\psi^k(t) - \psi^*(t)\|^2, \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

где $d_1 = 1 - (\alpha L)^2 > 0$, $d_2 = 1 - 2(\alpha C_0)^2$, $d_3 = 1 - 2(\alpha B_{\max})^2$. Потребуем, чтобы $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$, тогда α должно удовлетворять условию

$$0 < \alpha < \alpha_0 = \min \{1/L; 1/(\sqrt{2}C_0); 1/(\sqrt{2}B_{\max})\}.$$

Из (5.12) следует монотонное убывание последовательности суммарных отклонений

$$\begin{aligned} & |x_1^{k+1} - x_1^*|^2 + \|x^{k+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{k+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{k+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{k+1}(t) - \psi^*(t)\|^2 \\ & \leq |x_1^k - x_1^*|^2 + \|x^k(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^k(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^k - \lambda^*|^2 + \|\psi^k(t) - \psi^*(t)\|^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

4. Просуммируем неравенства (5.12) от $k = 0$ до $k = K$:

$$\begin{aligned} & |x_1^{K+1} - x_1^*|^2 + \|x^{K+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{K+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{K+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{K+1}(t) - \psi^*(t)\|^2 \\ & + d_1 \sum_{k=0}^K |x_1^{k+1} - x_1^k|^2 + d_2 \sum_{k=0}^K \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 + d_3 \sum_{k=0}^K \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 \\ & + \sum_{k=0}^K \|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 + \sum_{k=0}^K |\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 + \sum_{k=0}^K |(\bar{\lambda}^k - \lambda^{k+1}) + \alpha(f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k))|^2 \\ & + \sum_{k=0}^K \|\psi^{k+1}(t) - \bar{\psi}^k(t) + \alpha(F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t)))\|^2 \\ & \leq |x_1^0 - x_1^*|^2 + \|x^0(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^0(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^0 - \lambda^*|^2 + \|\psi^0(t) - \psi^*(t)\|^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из полученного неравенства следует ограниченность последовательности решений

$$\begin{aligned} & |x_1^{K+1} - x_1^*|^2 + \|x^{K+1}(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^{K+1}(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^{K+1} - \lambda^*|^2 + \|\psi^{K+1}(t) - \psi^*(t)\|^2 \\ & \leq |x_1^0 - x_1^*|^2 + \|x^0(t) - x^*(t)\|^2 + \|u^0(t) - u^*(t)\|^2 + |\lambda^0 - \lambda^*|^2 + \|\psi^0(t) - \psi^*(t)\|^2, \end{aligned}$$

а также сходимость рядов из (5.14) и соответственно стремление к нулю при $k \rightarrow \infty$ величин

$$\begin{aligned} & |x_1^{k+1} - x_1^k|^2 \rightarrow 0, \quad \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|^2 \rightarrow 0, \quad \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 \rightarrow 0, \\ & \|\psi^{k+1}(t) - \psi^k(t)\|^2 \rightarrow 0, \quad |\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 \rightarrow 0, \quad |(\bar{\lambda}^k - \lambda^{k+1}) + \alpha(f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k))|^2 \rightarrow 0, \\ & \|\psi^{k+1}(t) - \bar{\psi}^k(t) + \alpha(F(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - F(x^k(t), u^k(t)))\|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

5. Поскольку последовательность $(\lambda^k, \psi^k(\cdot); x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot))$ ограничена на декартовом произведении пространств $\mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \text{AC}^n[t_0, t_1] \times \text{U}$, то она слабо компактна [4]. Последнее означает, что существуют подпоследовательность $(\lambda^{k_i}, \psi^{k_i}(\cdot); x_1^{k_i}, x^{k_i}(\cdot), u^{k_i}(\cdot))$ и точка $(\lambda', \psi'(\cdot); x_1', x'(\cdot), u'(\cdot))$, которая является слабым пределом этой подпоследовательности. Заметим, что в конечномерных (евклидовых) пространствах слабые и сильные сходимости совпадают.

В уравнениях (4.7), (4.8) перейдем по выделенной подпоследовательности к ее слабому пределу. Тогда в силу слабой непрерывности линейных операторов [2] получим

$$\lambda' = \pi_+(\lambda' + \alpha(f(x_1') - \lambda')), \quad \psi'(t) = \psi'(t) + \alpha\left(D(t)x'(t) + B(t)u'(t) - \frac{d}{dt}x'(t)\right). \quad (5.15)$$

Отсюда следует, что предельная точка является решением краевой задачи и одновременно решением дифференциальной системы (4.2), (4.3).

Теперь покажем, что эта слабо предельная точка является решением задачи оптимизации (4.1). Прежде всего напомним, что функция Лагранжа (3.2) порождает двойственную функцию относительно переменных $\lambda \geq 0$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$. Двойственная функция имеет вид

$$\mathcal{M}(\lambda, \psi(\cdot)) = \min \{ \mathcal{L}(\lambda, \psi(\cdot); x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \mid x_1, x(\cdot), u(\cdot) \},$$

где минимум берется по всем $x_1, x(\cdot), u(\cdot)$ для каждой пары $(\lambda, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$. Эта функция является выпуклой вверх, субдифференцируемой, и в точке максимума выполняются необходимые и достаточные условия экстремума (3.7), (3.8) [2]. Эти условия совпадают

с системой (5.15) и, как показано в разд. 3, достаточны, чтобы точка $(\lambda', \psi'(\cdot); x'_1, x'(\cdot), u'(\cdot))$ была решением задачи (4.1) и, следовательно, всей системы (4.1)–(4.3). Другими словами, компоненты векторов $(\lambda', \psi'(\cdot); x'_1, x'(\cdot), u'(\cdot))$ и $(\lambda^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ соответственно совпадают и описывают одну и ту же точку, которая является решением исходной задачи (2.1)–(2.5).

Теорема доказана.

Важно отметить, что процесс (4.4)–(4.8) стремится к решению задачи, монотонно убывая по норме пространств (5.13). При этом траектории $\psi^k(\cdot)$, $x^k(\cdot)$ являются абсолютно непрерывными функциями, однако предельные точки этих последовательностей могут не принадлежать классам абсолютно непрерывных функций. Таким образом, установлено, что процесс (4.4)–(4.8) сходится монотонно по норме пространства прямого произведения всех прямых и двойственных переменных задачи, причем по управлениям сходимость слабая, по остальным переменным — сильная (по норме соответствующего пространства [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антипин А.С.** О двух постановках равновесных задач // Оптимизация и приложения. М: Изд-во ВЦ РАН, 2011. Вып. 2. С. 13–41.
2. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2 кн. М.: МЦНМО, 2011. Кн. 1, 624 с; кн. 2, 434 с.
3. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения / Ф.П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов, А. В. Разгулин. М.: Изд-во ВМК МГУ, 2010. 384 с.
4. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 572 с.
5. **Antipin A.S.** Two-person game with Nash equilibrium in optimal control problems // Optim. Lett. 2012. Vol. 6, iss. 7. P. 1349–1378.
6. **Антипин А.С., Хорошилова Е.В.** Линейное программирование и динамика // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 7–25.
7. **Антипин А.С.** Терминальное управление краевыми моделями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 2. С. 257–285.
8. **Антипин А.С., Васильева О.О.** Динамический метод множителей в терминальном управлении // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 46–68.
9. **Антипин А.С.** Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 11. С. 1969–1990; № 12. С. 2102–2111.
10. **Антипин А.С., Хорошилова Е.В.** Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 13–28.
11. **Антипин А.С., Хорошилова Е.В.** О краевой задаче терминального управления с квадратичным критерием качества // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2014. Т. 8. С. 7–28. (Сер. Математика.)
12. **Васильев Ф.П., Хорошилова Е.В., Антипин А.С.** Регуляризованный экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 27–37.

Поступила 04.05.2015

Антипин Анатолий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. научн. сотрудник
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: asantip@yandex.ru

Хорошилова Елена Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: khorelena@gmail.com

УДК 519.116

О РЕШЕТКЕ РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

В. А. Баранский, Т. А. Королева, Т. А. Сеньчонок

В работе рассматривается решетка разбиений натурального числа n , введенная Т. Брылавски. Наша цель — дать детальное обоснование новому, удобному для применений, способу задания отношения порядка, а также алгоритмам нахождения пересечения и объединения элементов в ней. Указанный нами способ задания отношения порядка, пересечения и объединения элементов в решетке разбиений натурального числа дает новые возможности для применения этих решеток в исследовании хроматических многочленов полных многодольных графов.

Ключевые слова: разбиение натурального числа, решетка, диаграмма Ферре.

V. A. Baransky, T. A. Koroleva, T. A. Sen'chonok. On the partition lattice of an integer.

The partition lattice of an integer introduced by T. Brylawski is studied. The aim is to give a detailed validation to a new practically convenient method of specifying an order relation and to algorithms for finding the intersection and the union of elements in this lattice. Our method of specifying an order relation and the union and intersection of elements in the partition lattice of a positive integer provides new opportunities for applying such lattices in the study of chromatic polynomials of complete multipartite graphs.

Keywords: integer partition, lattice, Ferrer's diagram.

Разбиением натурального числа n называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел

$$u = (u_1, u_2, \dots)$$

такая, что $u_1 \geq u_2 \geq \dots$, причем u содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Число l такое, что $l \geq 1$, $u_l > 0$ и $u_{l+1} = u_{l+2} = \dots = 0$, назовем *длиной* разбиения u и обозначим через $l(u)$. Мы будем писать $n = \text{sum}(u)$ и для удобства записывать разбиение u в одном из следующих видов:

$$u = (u_1, u_2, \dots) = (u_1, \dots, u_l) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, u_{l+2}) = \dots$$

Разбиение натурального числа удобно изображать диаграммой Ферре, которую можно представлять в виде вертикальной стенки, сложенной из кубических блоков одинакового размера. На рис. 1 приведен пример такой диаграммы.

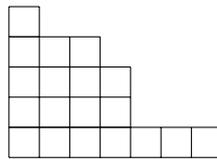


Рис. 1

На указанной диаграмме представлено разбиение числа 19 на 7 слагаемых: $19 = 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1$. Здесь 7 — длина разбиения $(5, 4, 4, 3, 1, 1, 1)$.

Потенциалом блока назовем число блоков, расположенных под данным блоком в соответствующем столбце диаграммы. *Потенциалом диаграммы* назовем сумму потенциалов всех ее блоков. Потенциал диаграммы, изображающей разбиение u , обозначим через $J(u)$.

Через $NPL(n)$, $NPL(n, t)$, $NPL(n, s..t)$, где $1 \leq s \leq t \leq n$, обозначим соответственно: множество всех разбиений натурального числа n ;

множество всех разбиений длины t натурального числа n ;

множество всех разбиений длины l натурального числа n , для которых $s \leq l \leq t$.

Введем понятие *элементарного преобразования* разбиения $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ числа $n = \text{sum}(u)$. Предположим, что существуют натуральные числа $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}, i < j$, такие, что

1) $u_i - 1 \geq u_{i+1}$ и $u_{j-1} \geq u_j + 1$;

2) $u_i = u_j + \delta$, где $\delta \geq 2$.

Будем говорить, что разбиение $v = (u_1, u_2, \dots, u_i - 1, \dots, u_j + 1, \dots, u_t)$ получено элементарным преобразованием (или *перекидыванием блока*) разбиения $u = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_t)$, и будем писать в этом случае $u \rightarrow v$. Отметим, что v отличается от u точно на двух компонентах с номерами i и j . Для диаграммы Ферре такое преобразование означает перемещение верхнего блока i -го столбца вправо в j -й столбец. Условия 1) и 2) гарантируют, что после такого перемещения снова получится диаграмма Ферре. Указанное элементарное преобразование будем записывать в виде

$$\begin{bmatrix} i & j \\ u_i - 1 & u_j + 1 \end{bmatrix}.$$

Введем отношение \geq на множестве $NPL(n)$, полагая $u \geq v$ для $u, v \in NPL(n)$, если v можно получить из u с помощью последовательного выполнения конечного числа (возможно, нулевого) элементарных преобразований.

Заметим, что после применения элементарного преобразования уменьшается на $\delta - 1$ потенциал диаграммы, так как на $\delta - 1$ уменьшается число блоков, находящихся под перемещаемым блоком. Следовательно, если $u, v \in NPL(n)$ и $u > v$, то $J(u) > J(v)$.

Теперь ясно, что отношение \geq на множестве $NPL(n)$ является отношением частичного порядка.

В [1] было анонсировано без доказательства, что отношение \geq совпадает с известным отношением доминирования на $NPL(n)$, относительно которого, как установил Т. Брылавски [2], $NPL(n)$ является решеткой. Одна из главных целей данной работы — привести полное доказательство этого факта. Предлагаемый нами способ задания рассматриваемого отношения дает новые возможности для применения таких решеток при исследовании хроматических многочленов (см., например, [3]). Далее решетку вида $(NPL(n), \geq)$ будем называть *решеткой разбиений натурального числа n* .

В [1] были анонсированы также алгоритмы нахождения пересечения и объединения элементов в решетках $NPL(n)$. Другая цель работы — привести развернутое обоснование этих алгоритмов, отсутствующее в [1]. Кроме того, мы указываем новый способ применения этих алгоритмов в “обратном порядке”, который дает дополнительные возможности для вычислений в рассматриваемых решетках.

Перейдем к изучению порядка \geq на $NPL(n)$.

Элементарное преобразование разбиения натурального числа n , имеющее вид

$$\begin{bmatrix} i & i + 1 \\ u_i - 1 & u_{i+1} + 1 \end{bmatrix},$$

будем называть *падением блока* (см. рис. 2(а)), а элементарное преобразование

$$\begin{bmatrix} i & j \\ u_i - 1 & u_j + 1 \end{bmatrix}$$

— *сдвигом блока* (см. рис. 2(б)), если $i + 1 < j$, $u_i = u_{i+1} + 1, u_{i+1} = u_{i+2} = \dots = u_{j-1}$ и $u_{j-1} = u_j + 1$. Для удобства в дальнейшем падение блока при $\delta = 2$ также будем называть сдвигом блока (см. рис. 2(в)).

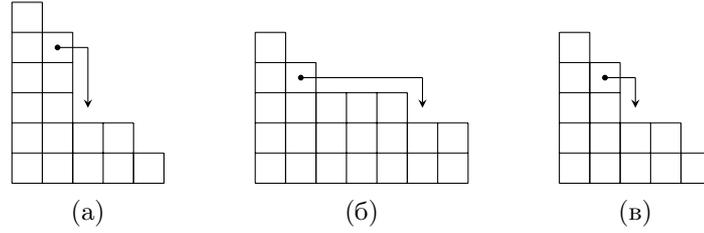


Рис. 2

Если разбиение v получается из разбиения u падением блока или сдвигом блока, то будем писать $u \Rightarrow v$.

Пример 1. $(7, 5, 1, 1) \Rightarrow (7, 4, 2, 1)$ — падение блока.

$(6, 4, 3, 3, 2, 1) \Rightarrow (6, 3, 3, 3, 3, 1)$ — сдвиг блока.

Как обычно [4], мы будем говорить, что разбиение u покрывает разбиение v в $NPL(n)$, если $u > v$ и не существует такого $w \in NPL(n)$, что $u > w > v$.

Лемма 1. *Разбиение u покрывает разбиение v в $NPL(n)$ тогда и только тогда, когда $u \Rightarrow v$.*

Доказательство. Если $u \Rightarrow v$, то, очевидно, u покрывает v . Теперь достаточно проверить, что для любого элементарного преобразования $u \rightarrow v$, не являющегося падением или сдвигом блока, разбиение u не покрывает разбиение v . Рассмотрим такое элементарное преобразование $u \rightarrow v$. Пусть оно имеет вид

$$\begin{bmatrix} i & j \\ u_i - 1 & u_j + 1 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что по определению элементарного преобразования выполняется $u_{j-1} > u_j$.

Случай 1. Пусть в $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ от i -го столбца до j -го столбца диаграммы Ферре имеется более одного “уступа”, т. е. более одного строгого неравенства в последовательности $u_i - 1 \geq u_{i+1} \geq u_{i+2} \geq \dots \geq u_j$. Тогда, перекидывая верхний блок i -го столбца последовательно через каждый уступ, мы заменим элементарное преобразование $u \rightarrow v$ на неодноэлементную цепочку элементарных преобразований, т. е. u не покрывает v .

Случай 2. Пусть в $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ от i -го столбца до j -го столбца диаграммы Ферре имеется точно один “уступ”, т. е. $u_i - 1 = u_{i+1} = u_{i+2} = \dots = u_{j-1} > u_j$. Поскольку элементарное преобразование $u \rightarrow v$ не является падением или сдвигом блока, здесь выполняется $i < j - 1$ и $u_i - u_j = \delta \geq 3$. Поэтому $u \rightarrow v$ можно заменить цепочкой из двух элементарных преобразований

$$\begin{bmatrix} j-1 & j \\ u_{j-1}-1 & u_j+1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & j-1 \\ u_i-1 & (u_{j-1}-1)+1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, опять u не покрывает v . □

На множестве $NPL(n)$ зададим еще одно отношение \geq , полагая $u \geq v$ в случае, если

$$\begin{aligned} u_1 &\geq v_1 \\ u_1 + u_2 &\geq v_1 + v_2 \\ &\dots \\ u_1 + \dots + u_i &\geq v_1 + \dots + v_i \\ &\dots \\ u_1 + \dots + u_{t-1} &\geq v_1 + \dots + v_{t-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_t)$, t — максимальная из длин u и v . Конечно, здесь выполняется $u_1 + u_2 + \dots + u_t = n = v_1 + v_2 + \dots + v_t$ и $u_1 + u_2 + \dots + u_s = v_1 + v_2 + \dots + v_s$ при $s > t$. Поэтому условие (1) эквивалентно условию $u_1 + u_2 + \dots + u_i \geq v_1 + v_2 + \dots + v_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Теперь рефлексивность, антисимметричность и транзитивность отношения \succeq очевидны, т.е. \succeq является отношением частичного порядка на $NPL(n)$. Его называют отношением *доминирования*. Именно это отношение \succeq было рассмотрено на $NPL(n)$ в [2].

Отметим, что из условия (1), в силу того что t — максимальная из длин u и v , вытекает $v_1 + v_2 + \dots + v_{t-1} < n$, и поэтому $l(v) = t \geq l(u)$, т.е. из условия $u \succeq v$ следует условие $l(u) \leq l(v)$.

Лемма 2. Пусть для $u = (u_1, u_2, \dots, u_t), v = (v_1, v_2, \dots, v_t) \in NPL(n)$, где t — максимальная из длин u и v , выполняется $u \triangleright v$. Тогда существует $z = (z_1, z_2, \dots, z_t) \in NPL(n)$ такой, что $u > z \succeq v$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по t . Отметим, что $t = l(v) \geq l(u)$.

При $t = 1$ утверждение тривиально. Частично упорядоченное множество $(NPL(n, 1..2), \succeq)$ при $t = 2$ представляет из себя цепь

$$n \Rightarrow (n-1, 1) \Rightarrow (n-2, 2) \Rightarrow \dots \Rightarrow (\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor),$$

где $\lceil n/2 \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное $n/2$, а $\lfloor n/2 \rfloor$ — целая часть числа $n/2$. Поэтому на $NPL(n, 1..2)$ отношения \geq и \succeq совпадают и утверждение леммы верно.

Пусть $t \geq 3$. Рассмотрим условие (1), которое выполняется для u и v .

С л у ч а й 1. Пусть $u_1 = v_1$. Тогда, отбросив u_1 и v_1 в (1), получаем $(u_2, \dots, u_t) \triangleright (v_2, \dots, v_t)$. Заметим, что мы можем считать верным неравенство $l(u) > 1$, так как при $l(u) = 1$ выполняется $u = (n, 0, \dots, 0)$, и поэтому $u > v$ (любое разбиение числа n можно получить перекидыванием блоков из его тривиального разбиения $(n, 0, 0, \dots)$).

Теперь по предположению индукции в $NPL(n - u_1, 1..(t-1))$ выполняется

$$(u_2, \dots, u_t) > (z_2, \dots, z_t) \succeq (v_2, \dots, v_t)$$

для некоторого (z_2, \dots, z_t) . Положим $z_1 = u_1 = v_1$. Тогда, очевидно, имеем $z_1 = u_1 \geq u_2 \geq z_2$ и $z_1 = v_1 \geq v_2$. Определим $z \in NPL(n)$, полагая

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_t).$$

Ясно, что z — искомое разбиение, т.е.

$$(u_1, u_2, \dots, u_t) > (z_1, z_2, \dots, z_t) \succeq (v_1, v_2, \dots, v_t).$$

Здесь неравенство $>$ обеспечивается такой же цепочкой элементарных преобразований, как и при переходе от (u_2, \dots, u_t) к (z_2, \dots, z_t) . Для \succeq условие типа (1) получается из соответствующих условий, обеспеченных выполнением неравенства

$$(z_2, \dots, z_t) \succeq (v_2, \dots, v_t),$$

добавлением z_1 слева и v_1 справа к каждому из неравенств и указанием тривиального равенства $z_1 = v_1$.

С л у ч а й 2. Пусть $u_1 > v_1$. Тогда существует такое $i \leq t-1$, что

$$\begin{aligned} u_1 &> v_1 \\ u_1 + u_2 &> v_1 + v_2 \\ &\dots \\ u_1 + \dots + u_i &> v_1 + \dots + v_i \\ u_1 + \dots + u_{i+1} &= v_1 + \dots + v_{i+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда выводим $v_1 + v_2 + \dots + v_{i+1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{i+1} > v_1 + v_2 + \dots + v_i + u_{i+1}$ и, следовательно, $v_{i+1} > u_{i+1}$.

Возьмем теперь наименьшее $j \leq i$ такое, что

$$u_1 \geq v_1, u_2 \geq v_2, \dots, u_j \geq v_j, u_{j+1} < v_{j+1}.$$

Тогда имеем $u_1 > v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_j \geq v_{j+1} > u_{j+1}$, поэтому $\delta = u_1 - u_{j+1} \geq 2$.

Выберем такое $p \leq j$, что $u_1 = u_2 = \dots = u_p > u_{p+1} \geq \dots \geq u_{j+1}$ (случай $p = j$ не исключается).

2.1. Пусть $u_p - u_{p+1} \geq 2$. Тогда в (u_1, u_2, \dots, u_t) выполним падение блока

$$\begin{bmatrix} p & p+1 \\ u_p - 1 & u_{p+1} + 1 \end{bmatrix}$$

и положим $z = (z_1, z_2, \dots, z_t) = (u_1, u_2, \dots, u_p - 1, u_{p+1} + 1, \dots, u_t)$. Найденное разбиение z удовлетворяет заключению леммы.

В самом деле, после замены в условии (2) чисел в соответствии с указанным падением блока неравенство с номером p сохранится, но может стать нестрогим, а все остальные неравенства, очевидно, тоже сохранятся.

2.2. Пусть $u_p - u_{p+1} = 1$. Тогда существует такое $q \leq j$, что

$$u_1 = u_2 = \dots = u_p > u_{p+1} = \dots = u_q > u_{q+1}$$

и $p < q$. Тогда в (u_1, u_2, \dots, u_t) совершим элементарное преобразование

$$\begin{bmatrix} p & q+1 \\ u_p - 1 & u_{q+1} + 1 \end{bmatrix}$$

и получим искомое разбиение

$$(z_1, z_2, \dots, z_t) = (u_1, u_2, \dots, u_p - 1, \dots, u_{q+1} + 1, \dots, u_t).$$

Действительно, после замены в условии (2) чисел в соответствии с указанным элементарным преобразованием неравенства с номерами от p до q сохранятся, но могут стать нестрогими. Остальные же неравенства, очевидно, сохранятся. \square

Следствие 1. Если $u \succeq v$ в $NPL(n)$, то $u \geq v$.

Поскольку элементарные преобразования перемещают блоки вправо, верно утверждение, обратное утверждению следствия 1. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Отношения \succeq и \geq совпадают на $NPL(n)$. \square

Пусть даны два разбиения $u = (u_1, u_2, \dots, u_t), v = (v_1, v_2, \dots, v_t) \in NPL(n)$, где t — наибольшая из длин u и v . Укажем алгоритм вычисления вспомогательной последовательности $w = w(u, v) = (w_1, w_2, \dots)$.

А л г о р и т м. Полагаем $\Delta_0(u) = 0$ и $\Delta_0(v) = 0$ (это начальные запасы для u и v).

Для $i = 1, 2, \dots$ выполняем следующие действия до тех пор, пока не получим число w_i , равное 0 :

i) полагаем

$$w_i = \min\{u_i + \Delta_{i-1}(u), v_i + \Delta_{i-1}(v)\}$$

и определяем запасы для u и v после i -го этапа:

$$\Delta_i(u) = u_i + \Delta_{i-1}(u) - w_i = u_1 + u_2 + \dots + u_i - w_1 - w_2 - \dots - w_i \geq 0,$$

$$\Delta_i(v) = v_i + \Delta_{i-1}(v) - w_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i - w_1 - w_2 - \dots - w_i \geq 0.$$

Пример 2. $n = 44, t = 7.$

$\Delta =$	0	1	0	0	0	1	1	0
$u =$	13	9	7	6	5	3	1	
$v =$	12	11	9	4	3	3	2	
$\Delta =$	0	0	1	3	1	0	0	0
$w =$	12	10	7	6	4	3	2	

Ясно, что всегда $\Delta_1(u) = 0$ или $\Delta_1(v) = 0$, причем

$$\min\{u_1, v_1\} = w_1 \leq \max\{u_1, v_1\}.$$

Лемма 3 [1, лемма 2]. Для любого $i = 2, 3, \dots$ такого, что $w_i \neq 0$, выполняются утверждения:

- 1) $\Delta_i(u) = 0$ или $\Delta_i(v) = 0$;
- 2) $w_{i-1} \geq w_i$;
- 3) $\min\{u_i, v_i\} \leq w_i \leq \max\{u_i, v_i\}$.

Следствие 2. Алгоритм завершает работу на этапе $t + 1$ построением разбиения w числа n .

Доказательство. Поскольку t — наибольшая из длин u и v , в силу равенства $\text{sum}(u) = \text{sum}(v) = n$ имеем $w_1, w_2, \dots, w_t \neq 0$. Из условия $\Delta_t(u) = 0$ или $\Delta_t(v) = 0$ с учетом равенств $u_{t+1} = v_{t+1} = 0$ вытекает $w_{t+1} = 0$. □

Лемма 4 [1, лемма 3]. Разбиение $w = w(u, v)$ является пересечением $u \wedge v$ разбиений u и v в $(NPL(n), \leq)$.

Отметим важное для приложений свойство указанного алгоритма. Из определения алгоритма легко следует, что его можно применять справа налево.

Вначале для разбиений $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_t)$ натурального числа n полагаем $\Delta_t(u) = 0$ и $\Delta_t(v) = 0$ (это начальные дефициты для u и v). Для $i = t, t - 1, \dots, 1$ последовательно выполняет следующие действия:

- (i.1) полагаем $w_i = \max\{u_i - \Delta_i(u), v_i - \Delta_i(v)\}$;
- (i.2) определяем дефициты для u и v после i -го этапа:

$$\Delta_{i-1}(u) = w_i - (u_i - \Delta_i(u)),$$

$$\Delta_{i-1}(v) = w_i - (v_i - \Delta_i(v)).$$

Отметим, что “таблица” выполнения алгоритма в “обратном” порядке будет абсолютно такой же, как и “таблица” его выполнения слева направо (см., например, пример 2).

Вернемся теперь к диаграммам Ферре. Для каждой диаграммы Ферре разбиения $u \in NPL(n)$ имеется кодиаграмма Ферре его коразбиения $\tau(u) \in NPL(n)$. Рассмотрим

Пример 3.

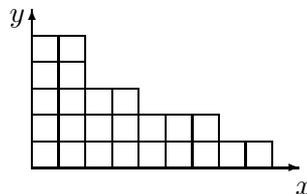


Рис. 3

На рис. 3 представлена диаграмма Ферре для $n = 24 = 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$ и $l = 9$.

Поменяем ролями оси x и y , т. е. рассмотрим новую диаграмму, роль столбцов которой играют строки исходной диаграммы. Тогда мы получим кодиagramму исходной диаграммы, отвечающую коразбиению $n = 24 = 9 + 7 + 4 + 2 + 2$.

В общем случае кодиagramма $\tau(u)$ строится по диаграмме u аналогичным образом.

Очевидно, отображение τ , переводящее u в $\tau(u)$, является подстановкой на $NPL(n)$ и τ^2 — тождественная подстановка, т. е. $\tau(\tau(u)) = u$ для любого $u \in NPL(n)$. Такие подстановки называют *инволюциями*.

Заметим (см. рис. 2), что для любых $u, v \in NPL(n)$:

- 1) $u \Rightarrow v$ — падение блока тогда и только тогда, когда $\tau(v) \Rightarrow \tau(u)$ — сдвиг блока;
- 2) $u \Rightarrow v$ — сдвиг блока тогда и только тогда, когда $\tau(v) \Rightarrow \tau(u)$ — падение блока.

Отсюда следует, что для любых $u, v \in NPL(n)$ условие $u \geq v$ эквивалентно условию $\tau(v) \geq \tau(u)$, т. е. τ — это *антиавтоморфизм* частично упорядоченного множества $(NPL(n), \leq)$.

Теорема 2. *Отображение τ является инволютивным антиавтоморфизмом частично упорядоченного множества $(NPL(n), \leq)$.* □

Следствие 3. *Для любых $u, v \in NPL(n)$ выполняется*

$$u \vee v = \tau(\tau(u) \wedge \tau(v))$$

— объединение разбиений u и v в $(NPL(n), \leq)$.

Доказательство. В силу теоремы 2 объединение $u \vee v$ существует, и мы имеем $\tau(u \vee v) = \tau(u) \wedge \tau(v)$, откуда следует $u \vee v = \tau(\tau(u) \wedge \tau(v))$. □

Отметим, что последнее равенство дает нам естественный алгоритм вычисления объединения $u \vee v$, в котором используются переход к кодиagramмам и алгоритм вычисления пересечения $\tau(u) \wedge \tau(v)$ в решетке $(NPL(n), \leq)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранский В.А., Королева Т.А. Решетка разбиений натурального числа // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 4. С. 439–442.
2. Brylawski T. The lattice of integer partitions // Discrete Math. 1973. Vol. 6. P. 210–219.
3. Баранский В.А., Сеньчонок Т.А. Хроматическая определяемость элементов высоты ≤ 3 в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 3–18.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Поступила 23.03.2015

Королева Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Югорский государственный университет
e-mail: tatyana-borodina@mail.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

УДК 519.6

УДАЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ИЗ ФАСЕТНОГО ОПИСАНИЯ МНОГОГРАННИКА¹

С. И. Бастраков, Н. Ю. Золотых

Рассматривается следующая задача: заданы вершинное и фасетное описания выпуклого многогранника, требуется найти вершинное описание нового многогранника, получаемого из исходного удалением заданных неравенств. Предлагается новый алгоритм решения задачи, приводятся доказательства его корректности и верхние оценки трудоемкости. В отличие от других подходов, предлагаемый алгоритм полиномиален в случае удаления одного неравенства. Результаты вычислительного эксперимента показывают превосходство предлагаемого алгоритма над инкрементным методом в ряде случаев.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, удаление неравенств, метод двойного описания.

S. I. Bastrakov, N. Yu. Zolotykh. Elimination of inequalities from a facet description of a polyhedron.

We consider the following problem: given vertex and facet representations of a convex polyhedron, compute a vertex representation of the polyhedron defined by a subsystem of inequalities of the original polyhedron. We present a new algorithm, prove its correctness, and give upper bounds for the complexity. Unlike other approaches, the proposed algorithm is polynomial for the case of removing one inequality. Computational experiments show that the algorithm outperforms the incremental method in a number of cases.

Keywords: convex polyhedra, constraint removal, double description method.

1. Введение

Каждый выпуклый многогранник (полиэдр) в \mathbb{R}^d может быть представлен двумя способами: как множество решений системы линейных неравенств и как выпукло-коническая оболочка системы векторов [1–4]. Систему линейных неравенств, которая определяет многогранник, будем называть его *фасетным* описанием:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \geq b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times d}, \quad b \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

Вершинным описанием многогранника будем называть множество векторов, выпукло-коническая оболочка которых есть данный многогранник²:

$$P = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_l) + \text{cone}(u_1, u_2, \dots, u_k), \quad v_i \in \mathbb{R}^d, \quad i = \overline{1, l}, \quad u_j \in \mathbb{R}^d, \quad j = \overline{1, k}. \quad (1.2)$$

Данные описания называются неприводимыми, если удаление любого элемента (неравенства в случае фасетного описания, вектора в случае вершинного описания) приводит к изменению задаваемого ими многогранника. Заметим, что вершинное описание выпуклого многогранника эквивалентно перечислению всех его граничных (угловых) решений [1].

В дальнейшем изложении под многогранниками будут подразумеваться выпуклые многогранники.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-31318).

²В общем случае не каждое неравенство в системе (1.1) обязательно соответствует фасете многогранника и не каждый вектор (1.2) обязательно является вершиной или рецессивным направлением многогранника. Поэтому фасетное описание многогранника может содержать не только фасеты, а вершинное описание — не только вершины и рецессивные направления. Тем не менее, данные названия широко распространены в современной литературе и в соответствии со сложившейся практикой используются без кавычек.

Одной из фундаментальных задач теории систем линейных неравенств является переход от описания многогранника в виде (1.1) к описанию (1.2) и обратно. Данная задача имеет не только теоретический интерес, но она появляется и в целом ряде приложений: при нахождении множества всех решений задачи линейного программирования [5], в методах отсекающих плоскостей для задач глобальной оптимизации [6], в биологической кинетике [7], при анализе, оптимизации и верификации программ для ЭВМ [8; 9], в задачах идентификации состояния динамических систем [10] и многих других (некоторые из таких приложений отмечены в [11]). Часто в таких задачах исходное множество ограничений $Ax \geq b$ в (1.1) может не быть зафиксировано, а может уточняться. Например, к этой системе могут добавляться новые неравенства, а некоторые из нее исключаться. Заметим, что задача добавления ограничений представляется более изученной: для перепостроения описания (1.2) при добавлении новых неравенств в описании (1.1) можно использовать любой инкрементный алгоритм, например, метод двойного описания [12; 13]. Наоборот, задача исключения неравенств изучена не достаточно сильно.

В настоящей работе рассматривается задача удаления неравенств из фасетного описания многогранника по заданным вершинному и фасетному описаниям в постановке [14]. Пусть для непустого многогранника P известны неприводимые вершинное и фасетное описания (1.1), (1.2). Рассмотрим многогранник, определяемый подсистемой неравенств с индексами из множества $I \subset \{1, 2, \dots, m\}$. Его фасетное описание имеет вид

$$P(I) = \{x \in \mathbb{R}^d : A(I)x \geq b(I)\}, \quad (1.3)$$

где под $A(I)$, $b(I)$ понимаются подматрица и подвектор, составленные из строк с индексами из множества I . Многогранник $P(I)$ получается из исходного многогранника P путем удаления подсистемы неравенств $A(I_{rem})x \geq b(I_{rem})$, где $I_{rem} = \{1, 2, \dots, m\} \setminus I$, из фасетного описания. Задача состоит в построении неприводимого вершинного описания многогранника $P(I)$ по заданным неприводимым фасетному и вершинному описаниям многогранника P . Двойственной задачей является удаление элементов вершинного описания — построение фасетного описания многогранника, порождаемого подмножеством векторов, — она легко сводится к рассматриваемой задаче для двойственного многогранника. Требование неприводимости фасетного описания многогранника P является существенным, в противном случае результат удаления неравенств может определяться неоднозначно [14]. В качестве мотивации к исследованию данной задачи авторы [14] называют анализ, оптимизацию и верификацию программ [8; 9].

Задачу удаления неравенств из фасетного описания многогранника можно рассматривать как задачу построения вершинного описания многогранника $P(I)$ по заданному фасетному описанию (1.3) с дополнительной информацией о многограннике P (1.1), (1.2). Под прямым способом решения задачи будем понимать построение вершинного описания многогранника $P(I)$ без использования этой дополнительной информации. Таким образом, прямой способ состоит в решении классической задачи построения двойственного описания многогранника [1; 2]. Для нее известно [15], что при любой фиксированной размерности d существуют полиномиальные от длины входа алгоритмы; в противном случае, за исключением ряда семейств многогранников [16; 17], вопрос о существовании полиномиальных от суммарной длины входа и выхода алгоритмов является открытым, все известные алгоритмы не являются полиномиальными в указанном смысле.

Использование дополнительной информации о многограннике P может позволить ускорить решение задачи, особенно в случае удаления небольшого количества неравенств. Так, в [14] предложен алгоритм удаления неравенств из фасетного описания многогранника, названный авторами инкрементным, и эмпирически показано его превосходство над прямым построением вершинного описания. При этом основным этапом инкрементного алгоритма также является построение вершинного описания многогранника, определяемого некоторой подсистемой системы неравенств (1.3). Из результатов [15] следует, что при использовании любого из известных методов построения вершинного описания многогранника не удастся дать полиномиальную верхнюю оценку трудоемкости прямого и инкрементного алгоритмов даже в случае

удаления одного неравенства. В связи с этим возникает вопрос о существовании полиномиального алгоритма решения задачи удаления неравенств из фасетного описания многогранника, хотя бы для частного случая удаления фиксированного числа неравенств.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм, который явным образом не использует операцию построения вершинного описания многогранника. Вместо этого используется информация о смежности фасет и вершин/экстремальных лучей исходного многогранника. Приводятся верхние оценки трудоемкости в случае удаления одного и нескольких неравенств. В случае удаления одного неравенства предлагаемый алгоритм является полиномиальным от длины входа.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 вводятся используемые понятия и обозначения, а также показывается способ сведения задачи для многогранников к задаче для многогранных конусов. Краткое описание инкрементного алгоритма [14] содержится в разд. 3. Раздел 4 посвящен предлагаемому алгоритму. Результаты вычислительных экспериментов приводятся в разд. 5.

2. Выпуклые многогранники и многогранные конусы

Каждый многогранный (полиэдральный) конус в \mathbb{R}^d может быть представлен двумя способами [1–4]. Фасетное описание задает конус как множество решений однородной системы линейных неравенств:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \geq 0\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times d}.$$

Остовом конуса называется неприводимая система векторов, коническая оболочка которых есть данный конус:

$$C = \text{cone}(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad u_i \in \mathbb{R}^d, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим через $U(C)$ остов конуса C .

Каждому многограннику в \mathbb{R}^d вида (1.1) с помощью стандартной процедуры гомогенизации (см., например, [1; 4]) может быть поставлен в соответствие конус в \mathbb{R}^{d+1} вида

$$C = \{(x_0, x)^T \in \mathbb{R}^{d+1} : -bx_0 + Ax \geq 0, x_0 \geq 0\}, \quad (2.1)$$

где пара (x_0, x) , в которой $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, интерпретируется как вектор в \mathbb{R}^{d+1} . При этом исходный многогранник является пересечением конуса (2.1) с гиперплоскостью $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_0 = 1\}$ и имеется взаимно-однозначное соответствие между гранями многогранника и конуса.

Задача удаления неравенств из фасетного описания многогранника в \mathbb{R}^d может быть сведена к аналогичной задаче для многогранного конуса в \mathbb{R}^{d+1} следующим образом. С помощью гомогенизации построим конус $C(I)$, соответствующий многограннику $P(I)$:

$$C(I) = \{(x_0, x)^T \in \mathbb{R}^d : -b(I)x_0 + A(I)x \geq 0\}.$$

Пусть найден остов $U(C(I))$ этого конуса, тогда искомое вершинное описание многогранника $P(I)$ определяется следующим образом. Каждый вектор $w = (w_0, w_1, \dots, w_d)^T \in U(C(I))$ в случае $w_0 \neq 0$ соответствует вершине $v = (w_1/w_0, w_2/w_0, \dots, w_d/w_0)$ многогранника $P(I)$, а в случае $w_0 = 0$ — экстремальному лучу $u = (w_1, w_2, \dots, w_d)$; результирующий многогранник является суммой выпуклой оболочки построенных таким образом вершин и конической оболочки рецессивных направлений. Сведение к задаче для конуса удобно тем, что после гомогенизации вершины и экстремальные направления многогранника могут обрабатываться единообразно, различие между ними делается лишь при обратном переходе к многограннику. В дальнейшем рассматривается задача удаления неравенств из фасетного описания многогранного конуса.

Грани многогранника являются результатом его пересечения с такой гиперплоскостью, где многогранник целиком лежит в одном из определяемых ей замкнутых полупространств. Очевидно, любая грань многогранника сама является многогранником. *Фасетами d -мерного*

конуса называются грани размерности $d - 1$. Две фасеты конуса называются смежными, если их пересечение является гранью размерности $d - 2$. Обозначим через $F(C)$ множество всех фасет конуса C и через $R(C)$ множество всех пар смежных фасет. Два вектора остова $u, v \in U(C)$ называются смежными, если их коническая оболочка является гранью размерности 2. Обозначим через $E(C)$ множество всех пар смежных векторов. Известно несколько критериев смежности фасет и векторов остова и способов их проверки [1; 2; 4; 7; 18; 19].

3. Инкрементный алгоритм удаления неравенств

В настоящем разделе дадим краткое описание алгоритма удаления неравенств, предложенного в [14] и названного авторами инкрементным. Так как фасетное описание исходного конуса является неприводимым, каждое из неравенств соответствует фасете. Обозначим через F множество фасет, соответствующих удаляемым неравенствам. В дальнейшем для краткости будем называть их *удаляемыми* фасетами. Строится множество фасет, смежных хотя бы с одной из удаляемых фасет, обозначим его через F_{adj} .

Обозначим через A_{adj} матрицу подсистемы неравенств, определяющих фасеты из F_{adj} . C помощью одной из модификаций метода двойного описания [12] строится остов конуса, определяемого неравенствами из A_{adj} :

$$C_{adj} = \{x \in \mathbb{R}^d : A_{adj}x \geq 0\} = \text{cone}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

В остове $U(C_{adj})$ найдем подмножество векторов U_{new} , которые не удовлетворяют хотя бы одному из удаляемых неравенств. Тогда для остова результирующего конуса справедливо включение $U(C(I)) \subseteq U(C) \cup U_{new}$. Таким образом, множество векторов $U(C) \cup U_{new}$ порождает искомый конус, однако не обязательно является неприводимым. Удаление избыточных элементов порождающего множества является стандартной процедурой, которая может быть выполнена достаточно эффективно [14], в результате получается искомый остов $U(C(I))$. Таким образом, трудоемкость алгоритма равна трудоемкости построения остова конуса C_{adj} . Вместо метода двойного описания может использоваться любой другой алгоритм построения двойственного описания многогранника, в ряде случаев это может давать существенное преимущество [15].

В случае удаления нескольких неравенств описанную процедуру можно произвести либо сразу для всех неравенств, либо итеративно для каждого из них. Авторы алгоритма отмечают, что, по-видимому, ни один из этих способов не является предпочтительным для всех случаев.

4. Новый алгоритм удаления неравенств

4.1. Описание алгоритма

Предлагаемый алгоритм производит итеративное удаление неравенств из фасетного описания конуса по одному. Рассмотрим процедуру удаления неравенства $ax \geq 0$. Пусть заданы неприводимые описания многогранного конуса C :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \geq 0, ax \geq 0\} = \text{cone}(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (4.1)$$

необходимо найти остов конуса

$$C_{new} = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \geq 0\}.$$

Обозначим через $U_+ = \{u \in U(C) : au > 0\}$ множество векторов остова, не лежащих на удаляемой фасете и через $U_0 = \{u \in U(C) : au = 0\} = U(C) \setminus U_+$ множество векторов остова, лежащих на удаляемой фасете. Обозначим через $a(f)$ вектор коэффициентов неравенства, соответствующего фасете f .

Обозначим удаляемую фасету как f_a . Аналогично инкрементному алгоритму найдем множество фасет F_{adj} , смежных с удаляемой. Инициализируем текущий остов множеством U_+ . Найдем все ребра конуса, ровно один из векторов которых лежит в удаляемой фасете. Обозначим множество таких ребер через E_{adj} . Для каждого из ребер $(u, v) \in E_{adj} : u \in U_0, v \in U_+$ рассмотрим заданный в параметрическом виде луч $l_{uv}(t) = u + t(u - v)$, $t > 0$. Найдем ближайшую к удаляемой фасете точку пересечения луча с фасетами из F_{adj} , не содержащими луч полностью. Если такая точка существует, добавим ее к текущему остову, в противном случае добавим u к текущему остову. По окончании обработки всех ребер из E_{adj} текущий остов дает искомый остов конуса C_{new} . Приведем псевдокод алгоритма.

```

procedure DeleteFacet( $C, a$ )
   $U_+ := \{u \in U(C) : au > 0\}$ ,  $U_0 := \{u \in U(C) : au = 0\}$ 
   $F_{adj} := \{f \in F(C) : (f, f_a) \in R(C)\}$ 
   $E_{adj} := \{(u, v) \in E(C) : u \in U_0, v \in U_+\}$ 
   $V_- := \emptyset, V_0 := \emptyset$ 
  for each  $(u, v) \in E_{adj}$ 
     $w := \text{FirstIntersection}(F_{adj}, f, u, v)$ 
    if  $(w \neq \infty)$ 
       $V_- := V_- \cup \{w\}$ 
    else
       $V_0 := V_0 \cup \{u\}$ 
    end
  end
  return  $U_+ \cup V_0 \cup V_-$ 
end

```

```

procedure FirstIntersection( $F_{adj}, f, u, v$ )
   $G := \{f \in F_{adj} : \{u, v\} \not\subset f\}$ 
   $G_+ := \{f \in G : a(f)v > a(f)u\}$ 
  if  $(G_+ \neq \emptyset)$ 
     $t^* := \min_{f \in G_+} \left\{ \frac{a(f)u}{(a(f)v - a(f)u)} \right\}$ 
    return  $u + (u - v)t^*$ 
  else
    return  $\infty$ 
  end
end

```

Множества U_+ , U_0 строятся путем прямой подстановки векторов остова в удаляемое неравенство. Множества пар смежных фасет $R(C)$ и смежных векторов остова $E(C)$ определяются путем выполнения попарных тестов смежности аналогично методу двойного описания, например одним из способов [7; 18; 19]. Предлагается использование попарного “алгебраического” теста (см. [18]). Множество G в процедуре FirstIntersection является множеством фасет, не содержащих луч $l_{uv}(t)$ целиком, а G_+ — подмножеством таких фасет, пересекаемых лучом. В таком случае точка пересечения соответствует значению $\tilde{t} = a(f)u / (a(f)v - a(f)u)$ в параметрическом представлении луча; и $\tilde{t} > 0$, так как $a(f)u > 0$ в силу $u \in U_0$ и $a(f)v - a(f)u > 0$ в силу $f \in G_+$. Момент t^* соответствует первому пересечению лучом фасеты из F_{adj} (возможно, одновременному пересечению нескольких фасет). Поэтому точка $u + (u - v)t^*$ не удовлетворяет удаляемому неравенству, но удовлетворяет остальным неравенствам конуса и, следовательно, принадлежит конусу C_{new} . В следующем подразделе будет показано, что она принадлежит остову данного конуса.

4.2. Доказательство корректности

Теорема 1. *Предлагаемый алгоритм строит остов конуса C_{new} .*

Доказательство. Рассмотрим обратный переход от конуса C_{new} к C — операцию пересечения конуса C_{new} с полупространством $\{x \in \mathbb{R}^d: ax \geq 0\}$, выполняемую методом двойного описания в модификации [18]. Обозначим $U'_+ = \{u \in U(C_{new}): au > 0\}$, $U'_0 = \{u \in U(C_{new}): au = 0\}$, $U'_- = \{u \in U(C_{new}): au < 0\}$. В результате комбинирования в методе двойного описания образовывались пары

$$U'_\pm = \{(au_+)u_- + (-au_-)u_+ : u_+ \in U'_+, u_- \in U'_-, (u_+, u_-) \in E(C')\},$$

остовы конусов C_{new} и C связаны следующим образом [18]:

$$U_+ = U'_+, \quad (4.2)$$

$$U_0 = U'_0 \cup U'_\pm. \quad (4.3)$$

Очевидно, $U' = U'_+ \cup U'_0 \cup U'_-$. Для доказательства корректности нужно показать, что для построенных алгоритмом множеств V_0, V_- справедливо равенство $U' = U_+ \cup V_0 \cup V_-$. В силу (4.2) достаточно показать, что $U'_0 = V_0$ и $U'_- = V_-$.

Покажем, что $U'_0 = V_0$. Из (4.3) следует $U'_0 \subseteq U_0$, поэтому в процессе работы алгоритма для каждого из векторов $u \in U'_0$ будут рассматриваться всевозможные пары $(u, v) \in E_{adj}$. Лучи $l_{uv}(t)$ не могут иметь точек пересечения с фасетами из F_{adj} , не содержащими $l_{uv}(t)$ полностью, так как в этом случае вектор u являлся бы конической комбинацией v и точки пересечения, что противоречит неприводимости U'_0 . Таким образом, в процессе работы алгоритма каждый вектор $u \in U'_0$ будет добавлен в V_0 , следовательно, $U'_0 \subseteq V_0$. Для доказательства обратного включения рассмотрим $u \in V_0$. В таком случае $u \in U_0 = U'_0 \cup U'_\pm$ и ни один из лучей $l_{uv}(t), (u, v) \in E_{adj}$ не пересекает фасет из F_{adj} . В случае $u \in U'_\pm$, вектор u являлся бы результатом комбинирования пары $(u_+, u_-) \in U'_+ \times U'_-$, что противоречит отсутствию точек пересечения (u_- была бы такой точкой). Поэтому $u \in U'_0$ и $V_0 \subseteq U'_0$, что завершает доказательство равенства $U'_0 = V_0$.

Покажем, что $U'_- = V_-$. При переходе от C_{new} к C каждая пара $(v, w) \in (U'_+ \times U'_-) \cap E(C_{new})$ в результате комбинирования создает вектор $u \in U_0$. При этом вектор w лежит на луче $l_{uv}(t)$ и является единственным вектором из $U(C_{new})$, лежащим на данном луче — в противном случае вектор w как ближайшее к f_a пересечение был бы избыточным, что противоречит неприводимости $U(C_{new})$. Поэтому в процессе работы алгоритма при обработке пары $(u, v) \in E_{adj}$ процедура FirstIntersection найдет именно вектор w . Таким образом, V_- совпадает с множеством векторов из U'_- , образующих хотя бы одну пару для комбинирования. Осталось показать, что U'_- состоит только из таких векторов, т. е. не существует вектор, который вместе со всеми смежными векторами лежит в U'_- . Если такой вектор u существует, т. е. неравенства, определяющие его опорный конус [4], при переходе от C_{new} к C станут неравенствами-следствиями, что противоречит требованию о неприводимости фасетного описания конуса C . \square

4.3. Анализ трудоемкости

Верхнюю оценку трудоемкости предлагаемого алгоритма устанавливает следующая теорема. Считается, что любая арифметическая операция выполняется за время $O(1)$.

Теорема 2. *Трудоемкость удаления одного неравенства из фасетного описания конуса C (4.1) предлагаемым алгоритмом составляет $O(m^2n^2d)$, где $m = |F(C)|$, $n = |U(C)|$, d — размерность пространства.*

Доказательство. Множества U_+ , U_0 могут быть построены за время $O(nd)$ прямой подстановкой векторов остова в удаляемое неравенство. Для построения множества пар смежных фасет $R(C)$ будем использовать попарный “алгебраический” тест. Тогда трудоемкость проверки смежности одной пары фасет равна трудоемкости вычисления ранга матрицы размера не более $n \times d$ и составляет $O(n^2d)$. Количество проверяемых пар составляет $O(m^2)$, поэтому трудоемкость построения множества $R(C)$ составляет $O(m^2n^2d)$. Аналогично, трудоемкость построения множества пар смежных векторов остова $E(C)$ составляет $O(m^2n^2d)$. Множества F_{adj} и E_{adj} строятся путем перебора элементов множеств $R(C)$ и $E(C)$ соответственно с проверкой необходимых условий, верхняя оценка трудоемкости данной операции равняется $O(m^2n^2d)$. Так как $|E_{adj}| < n^2$ и $|F_{adj}| < m^2$, количество итераций цикла по $(u, v) \in E_{adj}$ может быть оценено сверху как $O(n^2)$, а трудоемкость итерации составляет $O(m^2)$. Следовательно, общая трудоемкость алгоритма составляет $O(m^2n^2d)$. \square

Таким образом, в случае удаления одного неравенства трудоемкость предлагаемого алгоритма является полиномиальной от длины входа. В случае, когда производится последовательное удаление нескольких неравенств, общая трудоемкость зависит от размера остова промежуточных конусов. Хорошо известно, что данная величина не ограничена полиномом от размера входа и выхода (если размерность не фиксирована), а также может существенно зависеть от порядка удаления неравенств [15]. В общем случае удастся лишь дать пессимистичную верхнюю оценку, устанавливаемую следующим утверждением.

Утверждение. *Трудоемкость последовательного удаления k неравенств из фасетного описания конуса при любой фиксированной размерности $d > 3$ составляет $O(k m^{2+2\lfloor (d-1)/2 \rfloor})$, где $m = |F(C)|$.*

Доказательство. Максимальный размер остова конуса с m фасетами составляет $O(m^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor})$ [4]. Количество фасет после удаления i неравенств составляет $m - i$, поэтому трудоемкость удаления каждого из неравенств составляет $O(m^{2+2\lfloor (d-1)/2 \rfloor})$. Умножение на количество удаляемых неравенств дает суммарную верхнюю оценку.

Отметим, что полученная верхняя оценка совпадает с верхней оценкой инкрементного метода при последовательном удалении неравенств и использовании распространенных модификаций метода двойного описания [7; 18; 19].

5. Результаты вычислительных экспериментов

Нами была разработана программная реализация трех алгоритмов: прямого построения вершинного описания, инкрементного алгоритма [14] и предлагаемого алгоритма. Отметим, что в [14] предложено эвристическое правило, позволяющее комбинировать инкрементный и прямой алгоритмы, в разработанной программной реализации инкрементного алгоритма данное правило не используется. Реализация выполнена на языке программирования C++ на основе свободно распространяемого пакета операций над многогранниками `qskeleton` [20], реализующего модификацию метода двойного описания [21]. Вычислительные эксперименты проводились на узле кластера ННГУ “Лобачевский” с процессорами Intel Xeon E5-2660 и 64 ГБ ОЗУ.

Для сравнения эффективности алгоритмов были выбраны несколько семейств многогранников из библиотеки `cdlib` [22], использованных также в [14]. В дополнение к ним использовались многогранник $S_4(20) \times S_4(20)$, являющийся произведением двух 4-мерных циклических многогранников с 20 вершинами, и выпуклая оболочка `sphere6` 1000 точек, случайно равномерно распределенных на поверхности 6-мерной сферы. Для каждого из многогранников были решены задачи удаления 1, 5 и 10 неравенств со случайно выбранными индексами (одинаковыми для всех алгоритмов) из фасетного описания. Результаты вычислительного эксперимента приведены в таблице.

**Сравнение времени работы программной реализации
прямого, инкрементного и предлагаемого алгоритмов**

Задача	n_{del}	T_{naive}	$T_{incremental}$	T_{new}
ccc6	1	4.2	<i>0.01</i>	<i>0.01</i>
ccc6	5	4.1	0.4	<i>0.3</i>
ccc6	10	3.8	2.3	<i>1.6</i>
sampleh8	1	35.6	5.2	<i>4.8</i>
sampleh8	5	38.1	13.1	<i>6.9</i>
sampleh8	10	42.9	12.5	<i>7.3</i>
trunc10	1	1.5	<i>0.1</i>	<i>0.1</i>
trunc10	5	2.7	<i>1.4</i>	1.6
trunc10	10	6.1	6.2	<i>4.3</i>
C4(20) × C4(20)	1	101.2	13.6	<i>2.4</i>
C4(20) × C4(20)	5	95.4	29.8	<i>16.1</i>
C4(20) × C4(20)	10	82.7	56.2	<i>45.7</i>
sphere6	1	15.4	<i>0.3</i>	0.7
sphere6	5	15.2	<i>1.1</i>	2.4
sphere6	10	14.8	<i>2.5</i>	5.1

Столбец n_{del} содержит количество удаляемых неравенств, столбцы T_{naive} , $T_{incremental}$ и T_{new} — время работы прямого, инкрементного и предлагаемого алгоритмов в секундах. Рекордные значения времени для каждой задачи выделены курсивом.

Проведенный вычислительный эксперимент показывает, что в большинстве рассмотренных случаев предлагаемый алгоритм превосходит инкрементный и оба алгоритма значительно превосходят прямой алгоритм. Достигается выигрыш относительно инкрементного алгоритма до 1.85 раз. При этом на задаче sphere6 предлагаемый алгоритм уступает инкрементному примерно в 2 раза. Результаты сравнения прямого и инкрементного алгоритмов в целом согласуются с [14], с менее ярко выраженным отставанием прямого алгоритма. Это может быть объяснено разницей в используемых модификациях метода двойного описания.

6. Заключение

В работе предложен новый алгоритм удаления неравенств из фасетного описания многогранника по заданным неприводимым вершинному и фасетному описаниям. Удаление неравенств производится последовательно, по одному на каждом шаге. Основной идеей алгоритма является поиск точек пересечения лучей, являющихся продолжением ребер, инцидентных векторам на удаляемой фасете, с фасетами, смежными удаляемой. Доказана корректность алгоритма.

Получена верхняя оценка трудоемкости удаления одного неравенства $O(|F(C)|^2|U(C)|^2d)$. В случае удаления одного неравенства предлагаемый алгоритм является полиномиальным от длины входа, в отличие от инкрементного алгоритма. Результаты вычислительных экспериментов показывают превосходство предлагаемого алгоритма над инкрементным алгоритмом [14] в большинстве случаев.

При этом наиболее трудоемким этапом предлагаемого алгоритма в большинстве случаев является построение множеств смежных фасет и векторов остова $R(C)$ и $E(C)$. В ряде случаев данные множества могут быть заранее найдены в процессе построения фасетного описания и остова исходного конуса, например, если для этого используется метод двойного описания. Кроме того, в случае последовательного удаления нескольких неравенств информация о смежности может храниться и обновляться для промежуточных конусов, а не переисчисляться заново при обработке каждого неравенства. Целью дальнейшей работы является разработка модификации предложенного алгоритма на основе данной идеи.

Авторы выражают благодарность рецензентам за конструктивные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
2. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1970. 191 с.
3. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
4. **Циглер Г.** Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014. 586 с.
5. **Черникова Н.В.** Алгоритм для отыскания множества всех решений задачи линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 6. С. 1387–1395.
6. **Horst R., Pardalos P.M., Thoai N.** Introduction to global optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. 318 p. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 3.)
7. **Terzer M., Stelling J.** Large-scale computation of elementary flux modes with bit pattern trees // Bioinformatics. 2008. Vol. 24, iss. 19. P. 2229–2235.
8. **Cousot P., Halbwachs N.** Automatic discovery of linear restraints among variables of a program // Conf. Record of the Fifth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages. 1978. P. 84–96.
9. **Vagnara R., Hill P.M., Zaffanella E.** Applications of polyhedral computations to the analysis and verification of hardware and software systems // Theoret. Comput. Sci. 2009. Vol. 410, no. 46. P. 4672–4691.
10. **Панюков А.В.** Представление суммы Минковского для двух полиэдров системой линейных неравенств // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. № 14. С. 108–119.
11. **Зоркальцев В.И.** Иван Иванович Еремин и линейная оптимизация // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования / ИММ УрО РАН. № 13. Екатеринбург, 2015. С. 241–250.
12. Метод двойного описания / Т. С. Моцкин, Х. Райфа, Д. Л. Томпсон, Р. М. Тролл // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 81–109.
13. **Черникова Н.В.** Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 2. С. 334–337.
14. **Amato G., Scozzari F., Zaffanella E.** Efficient constraint/generator removal from double description of polyhedra // Electr. Notes Theor. Comput. Sci. 2014. Vol. 307. P. 3–15.
15. **Avis D., Bremner D., Seidel R.** How good are convex hull algorithms? // Comput. Geom. 1997. Vol. 7, no. 5-6. P. 265–301.
16. **Avis D., Fukuda K.** Reverse search for enumeration // Discrete Appl. Math. 1996. Vol. 65, no. 1-3. P. 21–46.
17. **Bremner D., Fukuda K., Marzetta A.** Primal-dual methods for vertex and facet enumeration // Discrete Comput. Geom. 1998. Vol. 20, no. 3. P. 333–357.
18. **Золотых Н.Ю.** Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 1. С. 153–163.
19. **Fukuda K., Prodon A.** Double description method revisited // Lecture Notes in Comput. Sci. 1996. Vol. 1120. P. 91–111.
20. GitHub [site]: qskeleton. URL: <https://github.com/sbastrakov/qskeleton>.
21. **Бастраков С.И., Золотых Н.Ю.** Использование идей алгоритма Quickhull в методе двойного описания // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 232–237.
22. GitHub [site]: cddlib. URL: <https://github.com/mcmtrroffaes/cddlib/>.

Бастраков Сергей Иванович
аспирант

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: bastrakov@vmk.unn.ru

Золотых Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, доцент

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: nikolai.zolotykh@gmail.com

Поступила 1.06.2015

УДК 512.54

О ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ СТОЛБЦАХ ТАБЛИЦЫ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП $Sp_4(q)$ И $PSp_4(q)$ ПРИ НЕЧЁТНОМ q ¹

В. А. Белоногов

Ранее автором была высказана гипотеза: если два столбца таблицы характеров конечной группы, соответствующие двум её классам сопряжённых элементов, полупропорциональны, то мощность одного из этих классов делит мощность другого. В статье получено новое её подтверждение. А именно, гипотеза доказана для симплектических групп $Sp_4(q)$ и $PSp_4(q)$ при нечётном q . При чётном q гипотеза была доказана автором ранее.

Ключевые слова: конечные симплектические группы, таблица характеров, полупропорциональные функции.

V. A. Belonogov. On semiproportional columns in the character tables of the groups $Sp_4(q)$ and $PSp_4(q)$ for odd q .

Previously the author stated the following conjecture: if two columns of the character table of a finite group corresponding to two of its classes of conjugate elements are semiproportional, then the cardinality of one of these classes divides the cardinality of the other. We obtain a new confirmation of this conjecture. Namely, the conjecture is verified for the symplectic groups $Sp_4(q)$ and $PSp_4(q)$ for odd q . For even q the conjecture was proved by the author earlier.

Keywords: finite symplectic groups, character table, semiproportional functions.

Введение

Функции α и β из некоторого множества M в поле \mathbb{C} называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества H из M пропорциональны ограничения α и β на H и их ограничения на $M \setminus H$. В частности, можно говорить о полупропорциональных характерах, о полупропорциональных строках или о полупропорциональных столбцах таблицы характеров конечной группы.

Понятно, что два неприводимых характера конечной группы полупропорциональны, если и только если полупропорциональны соответствующие им строки таблицы характеров этой группы. Возможна двойственная ситуация, когда полупропорциональны два столбца таблицы характеров группы. Для краткости, два класса сопряжённых элементов конечной группы G назовём *полупропорциональными*, если соответствующие им столбцы таблицы характеров группы G полупропорциональны. Классы сопряжённых элементов группы мы будем называть далее просто *классами* группы.

Тематика настоящей статьи связана с понятиями взаимодействия, D -блока и Φ -блока (см. [1] и также [2, гл. 3 и § 8.3]). Ранее автором было получено полное описание всех пар полупропорциональных неприводимых характеров и пар полупропорциональных классов (в другой терминологии — малых D -блоков и малых Φ -блоков соответственно [2]) в спорадических простых группах [3]; в группах $L_2(q)$, $SL_2(q)$, $PGL_2(q)$, $GL_2(q)$ [4]; в группах $PGL_3(q)$, $GL_3(q)$, $PGU_3(q)$, $GU_3(q)$ [5]; в группах $L_3(q)$, $SL_3(q)$, $U_3(q)$, $SU_3(q)$ [6] и в группах $Sp_4(q)$ при чётных q [7].

В частности, для всех этих групп оказались справедливыми следующие две гипотезы.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5).

Гипотеза 1 (гипотеза о полупропорциональных характерах). *Если конечная группа G имеет два полупропорциональных неприводимых характера φ и ψ , то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Гипотеза 2 (гипотеза о полупропорциональных классах). *Если конечная группа G имеет два полупропорциональных класса сопряжённых элементов, то мощность одного из этих классов делит мощность другого.*

В недавней статье [8] доказана гипотеза 1 для групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётных q , а в [9] описаны все пары полупропорциональных неприводимых характеров в этих группах.

В настоящей статье, в теоремах 1 и 2 ниже, мы докажем для этих групп гипотезу 2. Заключительная формулировка дана в теореме 3, где не делается ограничений на чётность или нечётность числа q .

Напомним, что симплектическая группа $G = \mathrm{Sp}_4(q)$ при нечётном q имеет порядок $q^4(q^4 - 1)(q^2 - 1)$, $Z(G) = \langle z \rangle$ — группа порядка 2 и $G/Z(G) = \mathrm{PSp}_4(q)$ — простая группа. По определению $G = \{g \in \mathrm{GL}_4(q) \mid {}^t g A g = A\}$, где ${}^t g$ — матрица, транспонированная к g , и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теорем 1 и 2 состоит в анализе таблиц характеров рассматриваемых групп. Таблица характеров $X(G)$ группы $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, полученная Б. Сринивасан в [10], приведена автором в более удобной форме и с учётом поправок А. Пшигоцкого [11] в [8, разд. 2] в таблицах $A, \dots, D, A', \dots, D'$. Ввиду их большого размера (занимающего 10 страниц) они здесь не приводятся. Поэтому при чтении настоящей статьи читателю *необходимо иметь под рукой статью [8]* (заметим, что в [8, с. 32] при определении множества R_2 вместо буквы σ ошибочно поставлена буква θ). Отметим также поправку к таблице $X(G)$, сделанную автором в начале разд. 2 статьи [9]: в статье Б. Сринивасан [10] множество R_1 определено как множество $\{1, 2, \dots, (q^2 - 1)/4\}$, но в этом случае число характеров вида $\chi_1^{(k)}$ оказывается меньше, чем $(q^2 - 1)/4$, в противоречие с утверждением автора; *корректное определение* должно быть таким: R_1 есть множество, состоящее из первых $(q^2 - 1)/4$ членов ряда, получающегося из натурального ряда $1, 2, \dots$ удалением чисел k таких, что $\chi_1^{(k)} = \chi_1^{(j)}$ при некотором $j < k$ (значения характеров $\chi_1^{(k)}$ вычисляются по формулам из таблицы характеров группы G). В [9, разд. 3] сформулировано очень простое (и подтверждённое многими примерами) гипотетическое правило построения множества R_1 без каких-либо вычислений значений характеров. Некоторый подход к его доказательству предпринят в [12]. Но пока это — лишь гипотеза.

При $q = 3$ группа $\mathrm{PSp}_4(q)$ является также и группой чётной характеристики, поскольку $\mathrm{PSp}_4(3) \simeq \mathrm{PSU}_4(2) \simeq \mathrm{SU}_4(2)$. Как видно из её таблицы характеров (см. [13, с. 27]),

группа $\mathrm{PSp}_4(3)$ не имеет пар полупропорциональных классов.

Далее используются следующие обозначения: $\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряжённых элементов группы G ; g^G — класс сопряжённых элементов группы G , содержащий элемент g из G ; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых характеров G ; $\mathrm{Irr}(G|N)$ — множество всех неприводимых характеров группы G , содержащих в своём ядре нормальную подгруппу N группы G ; \mathbb{C} — множество всех комплексных чисел; $\dot{\cup}$ — знак объединения попарно не пересекающихся множеств. Под *парой* мы понимаем здесь неупорядоченную пару, т. е. двухэлементное множество. Однако в выражениях типа “упорядоченная пара (x, y) ” слово “упорядоченная” часто будем опускать.

Следующие теоремы 1 и 2 формулируются в терминах таблицы характеров группы $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, записанной в [8]. Для элемента g группы G через g' обозначается элемент gz в случае, когда $(gz)^G \neq g^G$. Напомним, что $\mathrm{Cl}(G) = A \dot{\cup} B \dot{\cup} C \dot{\cup} D$, где

A состоит из 14-и классов группы G с представителями $a_1 = 1, a'_1 = z, a_{21}, a'_{21}, a_{22}, a'_{22}, a_{31}, a'_{31}, a_{32}, a'_{32}, a_{41}, a'_{41}, a_{42}, a'_{42}$, записанными в 6-и колонках;

$B = \dot{\cup}_{i=1}^9 B_i$, где каждое B_i (записанное в отдельной колонке таблицы $X(G)$) состоит из нескольких классов группы G ;

C равно объединению нескольких множеств C_i и C'_i , состоящих из нескольких классов группы G (при любом i множества C_i и C'_i записаны в одной колонке; всего — 4 колонки);

D есть множество из 9-и классов сопряжённых элементов с представителями $d_1, d_{21}, d'_{21}, d_{22}, d'_{22}, d_{24}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}$, записанными в 4-х колонках.

Из [8, разд. 2.1] непосредственно следует, что

$$\text{если элементы } x, y \text{ из } G \text{ записаны в одной колонке таблицы } X(G), \text{ то } |x^G| = |y^G|. \quad (0.1)$$

Сформулируем теперь полученные в статье результаты.

Теорема 1. Пусть $\{x^G, y^G\}$ — пара полупропорциональных классов группы $G = \text{Sp}_4(q)$, где q нечётно ($x, y \in G$). Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $\{x^G, y^G\} = \{x^G, (x')^G\}$, где $x \in \{a_1, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, d_{21}, d_{22}\}$;

(2) $\{x^G, y^G\} = \{d_{32}^G, d_{34}^G\}$;

(3) $\{x^G, y^G\}$ содержится в одном из множеств: B_j при $1 \leq j \leq 9$ и $C_j \cup C'_j$ при $j \in \{1, 21, 22, 3, 41, 42\}$.

В любом случае $|x^G| = |y^G|$.

Теорема 2. Пусть $\{\bar{x}^{\bar{G}}, \bar{y}^{\bar{G}}\}$ — пара полупропорциональных классов группы $\bar{G} = \text{PSp}_4(q)$, где q нечётно ($\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$). Тогда $\{\bar{x}^{\bar{G}}, \bar{y}^{\bar{G}}\}$ содержится в одном из множеств: \widehat{B}_j при $1 \leq j \leq 9$ и \widehat{C}_j при $j \in \{1, 21, 22, 3, 41, 42\}$. При этом $|\bar{x}^{\bar{G}}| = c|\bar{y}^{\bar{G}}|$, где $c \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

Здесь \widehat{B}_j обозначает множество образов в $\bar{G} = G/Z(G)$ классов группы $G = \text{Sp}_4(q)$, содержащихся в B_j . Подобно определяется \widehat{C}_j .

Из теорем 1 и 2 и результатов статьи [7] непосредственно вытекает

Теорема 3. Гипотеза 2 верна для групп $\text{Sp}_4(q)$ и $\text{PSp}_4(q)$ при любом $q \geq 2$. Более того, если $\{x^G, y^G\}$ — пара полупропорциональных классов какой-либо из этих групп, то $|x^G| = c|y^G|$, где $c \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

Напомним, что по [7] при чётном q группа $\text{Sp}_4(q) = \text{PSp}_4(q)$ имеет точно одну пару полупропорциональных классов и порядки этих классов равны (см. в [7] теорему 2, а также замечание, в котором указывается, что эта теорема верна и в исключительном случае $q = 2$, в котором $\text{Sp}_4(2) \simeq S_6$).

1. Предварительные результаты

Предложение 1 [2, теорема 8310]. Пусть x^G и y^G — различные классы сопряжённых элементов группы G ($x, y \in G$) и $\Phi \subseteq \text{Irr}(G)$. Тогда равносильны условия:

(1) $x^G \cup y^G$ — Φ -блок группы G ;

(2) при некоторых $a, b \in \mathbb{C}$

$$\varphi(y) = a\varphi(x) \text{ для всех } \varphi \in \Phi,$$

$$\chi(y) = b\chi(x) \text{ для всех } \chi \in \text{Irr}(G) \setminus \Phi.$$

Кроме того, если выполнены равенства условия (2), то $\{a, b\} = \left\{1, -\frac{|x^G|}{|y^G|}\right\}$.

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 1. Если x^G и y^G — полупропорциональные классы сопряжённых элементов группы G ($x, y \in G$), то для любого $\chi \in \text{Irr}(G)$

- (1) либо $\chi(x) = \chi(y)$, либо $\chi(x)|x^G| = -\chi(y)|y^G|$;
- (2) $\chi(x) = 0 \iff \chi(y) = 0$;
- (3) если $\chi(x)$ и $\chi(y)$ — ненулевые вещественные числа одного знака, то они равны.

Заметим, что согласно утверждению (1) следствия 1 условие полупропорциональности двух классов x^G и y^G равных порядков равносильно условию $\chi(x) = \pm\chi(y)$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$.

Следующие предложения будут использованы в доказательстве теоремы 2.

Предложение 2 [14, леммы 23, 24]. Пусть N — нормальная подгруппа конечной группы G и $g \in G$. Справедливы следующие утверждения.

- (1) Существует взаимно однозначное отображение $\varphi : \chi \rightarrow \tilde{\chi}$ множества $\text{Irr}(G|N)$ на $\text{Irr}(G/N)$ такое, что $\tilde{\chi}(gN) = \chi(g) = \chi(gn) = \chi/ng$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G|N)$ и $n \in N$.
- (2) Пусть ζ_1, \dots, ζ_k — все неприводимые характеры группы G , не входящие в $\text{Irr}(G|N)$. Тогда $|C_G(g)| = |C_{G/N}(gN)| + \sum_{i=1}^k |\zeta_i(g)|^2$.

Предложение 3. Пусть G — конечная группа с центром Z порядка 2. Тогда для любого $g \in G$ либо $|C_G(g)| = |C_{G/Z}(gZ)|$, либо $|C_G(g)| = 2|C_{G/Z}(gZ)|$, причём первый случай имеет место, если и только если $\zeta(g) = 0$ для всех характеров ζ группы G , не входящих в $\text{Irr}(G|Z)$.

Доказательство. Так как, очевидно, $C_{G/Z}(gZ) \geq C_G(g)/Z$ и $|C_G(g)/Z| = |C_G(g)|/2$, то $|C_{G/Z}(gZ)| \geq |C_G(g)|/2$. Но отсюда и из утверждения (2) предложения 2 непосредственно следует требуемое заключение.

Предложение 3 доказано.

2. Доказательство теоремы 1

Справедливость теоремы 1 при $q = 3$ непосредственно видна из [13, с. 27]. Далее предполагается, что $q \geq 5$. Мы будем рассматривать таблицу характеров $X(G)$ группы G [8, табл. A–D], используя предложение 1 и, в особенности, следствие 1. В таблице $X(G)$ после двух вспомогательных полос имеются 32 нумерованные полосы, состоящие из значений нескольких характеров, указанных во 2-й колонке таблицы, и, подобно, после двух вспомогательных колонок имеются 23 нумерованные колонки, состоящие из значений неприводимых характеров на классах сопряжённых элементов, представители которых записаны в ней во 2-й полосе.

Очень важным рабочим инструментом является условие (2) следствия 1. А именно, как только мы замечаем, что в столбцах таблицы характеров, соответствующих двум классам x^G и y^G , хотя бы в одной строке таблицы стоит нуль в одном из этих столбцов и ненулевое значение в другом, мы заключаем, что классы x^G и y^G не полупропорциональны. Кроме того, согласно следствию 1 в столбцах таблицы характеров, соответствующих двум полупропорциональным классам x^G и y^G , имеется одно и то же число нулей, причём нули стоят в тех же самых строках. Ссылку на этот результат мы обычно не будем оговаривать.

Поскольку доказательство теоремы 2 во многом повторяет этапы доказательства теоремы 1, то далее мы будем вставлять некоторые замечания, позволяющие сократить доказательство теоремы 2.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1.

Тот факт, что пары классов п. (1) теоремы 1 являются полупропорциональными, непосредственно следует из правила вычисления $\chi(x')$ по $\chi(x)$ для $\chi \in \text{Irr}(G)$. Напомним, что для получения значения $\chi(x')$ в таблице $X(G)$ нужно взять запись из 2-й колонки той же строки и положить в ней $D = \chi(x)$. Поэтому $\chi(x') = \pm\chi(x)$, так как все значения характеров, записанные во 2-й колонке, равны $\pm D$. (Также полупропорциональны классы $c_j(i)^G$ и $(c_j(i)')^G$, где $i \in T_2$ и $j \in \{1, 21, 22\}$ или $i \in T_1$ и $j \in \{3, 41, 42\}$, но это — частные случаи п. (3) теоремы.)

Теперь нам нужно рассмотреть пары $\{x^G, y^G\}$ полупропорциональных классов группы G , отличные от приведённых в утверждении (1).

Лемма 1. *Пары классов элементов из различных колонок таблицы $X(G)$ не полупропорциональны.*

Доказательство. Обозначим через Θ часть этой таблицы, состоящую лишь из полос с номерами 2, 3 и 6–10.

Замечание 1. Мы включили в Θ лишь неприводимые характеры, содержащие в своём ядре $Z(G) = \langle z \rangle$, чтобы иметь возможность применить полученные результаты в доказательстве теоремы 2 к группе $G/Z = PSp_4(q)$, используя утверждение (1) предложения 2.

Для каждого m с $3 \leq m \leq 23$ запишем возрастающую последовательность $N(m)$, состоящую из номеров i всех полос, входящих в Θ , таких что на пересечении i -й полосы и m -й колонки стоит нуль. При этом необходимо убедиться, что для любого $j \in \{2, 3\} \cup \{6, \dots, 10\}$, не входящего в $N(m)$, значения всех столбцов m -й колонки в j -й полосе отличны от нуля. Теперь из следствия 1 непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} &\text{класс } m\text{-й колонки может быть полупропорционален} \\ &\text{классу } n\text{-й колонки только в случае, когда } N(m) = N(n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Просматривая последовательно колонки таблицы $X(G)$, запишем эти последовательности $N(m)$: $N(3) = (10)$, $N(4) = (2, 7, 9, 10)$, $N(5) = (2, 6, 8, 10)$, $N(6) = (2, 6, 7, 8, 9, 10)$, $N(7) = (2, 3, 8, 9)$, $N(8) = (6, 7)$, $N(9) = (7)$, $N(10) = (6)$, $N(11) = (2, 3, 6, 7)$, $N(12) = (6)$, $N(13) = (2, 6)$, $N(14) = (7)$, $N(15) = (2, 7, 9, 10)$, $N(16) = (6)$, $N(17) = (6, 9, 10)$, $N(18) = (8)$, $N(19) = (7, 8, 10)$, $N(20) = ()$, $N(21) = (10)$, $N(22) = (2, 10)$, $N(23) = (2, 3, 10)$.

Отметим здесь все равные среди этих последовательностей: $N(3) = N(21)$, $N(4) = N(15)$, $N(9) = N(14)$, и $N(10) = N(12) = N(16)$. Отсюда и из (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} &\text{класс элементов } m\text{-й колонки может быть полупропорционален} \\ &\text{классу элементов } n\text{-й колонки при } m < n \text{ только в случае, когда} \\ &(m, n) \in \{(3, 21), (4, 15), (9, 14), (10, 12), (10, 16), (12, 16)\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Теперь мы составим таблицу, которая завершит доказательство леммы 1.

(m, n)	Полосы	Характер χ	$\chi(g_m)$	$\chi(g_n)$
(3,21)	11	$\chi_1^{(2)}$	$1 - q^2 \neq 0$	0
(4,15)	11	$\chi_1^{(2)}$	$1 - q \neq 0$	0
(9,14)	16	$\chi_6^{(1)}$	0	$q - 1 \neq 0$
(10,12)	18	$\chi_8^{(1)}$	0	$q + 1 \neq 0$
(10,16)	22	$\xi_3^{(1)}$	0	$q + 1 \neq 0$
(12,16)	18	$\chi_8^{(1)}$	$q + 1 \neq 0$	0

В 1-м столбце таблицы записаны все пары (m, n) из списка, приведённого в (2.2). Во 2-м столбце указан номер некоторой полосы таблицы $X(G)$, а в 3-м столбце указан некоторый характер, записанный в этой полосе. В 4-м и 5-м столбцах даны значения характера, записанного в предыдущем столбце, на произвольном элементе g_m из m -й колонки и на произвольном элементе g_n из n -й колонки (при условии, что эти значения не зависят от выбора элемента (класса) в указанной колонке). Всё это легко проверить по таблице $X(G)$. Теперь ввиду п. (2) следствия 1 из таблицы следует, что для любой пары (m, n) из списка, приведённого

в (2.2), класс m -й колонки не может быть полупропорционален классу n -й колонки. Отсюда и из предложения (2.2) следует неполупропорциональность классов из различных колонок.

Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. В таблице выше все характеры χ , за единственным исключением $\chi = \xi_3^{(1)}$, содержатся в $\mathrm{Irr}(G|Z(G))$, что мы учтём при доказательстве теоремы 2. Использовать здесь вместо $\xi_3^{(1)}$ характер $\xi_3^{(2)}$ с ядром $Z(G)$ можно лишь при $q \geq 7$.

Отметим, что в таблице можно было бы в первых трёх строках взять 6-ю полосу с $\chi = \theta_9$, где пары $(\chi(g_m), \chi(g_n))$ имеют соответственно вид $(q(q+1)/2, (q+1)/2)$, $(q, 1)$ и $(2, q+1)$, что приводит к противоречию ввиду п. (3) следствия 1.

Теперь, чтобы установить условия (2) и (3) теоремы 1, необходимо рассмотреть пары классов $\{x^G, y^G\}$ такие, что $\{x^G, y^G\}$ содержится в A или в D и не удовлетворяет условию (1).

Согласно лемме 1 классы x^G и y^G должны быть записаны в одной колонке таблицы $X(G)$. Перечислим все такие пары:

$$\{a_{21}^G, a_{22}^G\}, \{a'_{21}^G, a'_{22}^G\}, \{a_{41}^G, a_{42}^G\}, \{a'_{41}^G, a'_{42}^G\}, \{d_{21}^G, d_{22}^G\}, \{d'_{21}^G, d'_{22}^G\}, \{d_{31}^G, d_{33}^G\}, \{d_{32}^G, d_{34}^G\}. \quad (2.3)$$

Заметим, что каждая из этих пар есть пара алгебраически сопряжённых классов группы G . Напомним, что в таблице $X(G)$ представители алгебраически сопряжённых классов записаны в одной колонке, причём в этой колонке даются значения неприводимых характеров лишь на одном из них; значения неприводимых характеров на другом получаются из значений на первом заменой b на b^* и b^* на b .

Лемма 2. Среди пар, перечисленных в (2.3), имеется лишь одна пара полупропорциональных классов, а именно пара $\{d_{32}^G, d_{34}^G\}$. Кроме того, $\chi(d_{32}) = \pm\chi(d_{34})$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что a_{21}^G полупропорционален a_{22}^G . Так как $|a_{21}^G| = |a_{22}^G|$, то по п. (1) следствия 1 должно быть $\chi(a_{21}) = \pm\chi(a_{22})$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Однако это не верно при $\chi = \theta_1$, так как по таблице $\theta_1(a_{21}) = q^2b = q^2(-1 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2$ и $\theta_1(a_{22}) = q^2b^* = q^2(-1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2$, где $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$. Предположение о полупропорциональности классов a_{41}^G и a_{42}^G или классов a'_{41}^G и a'_{42}^G влечёт противоречивое равенство $\theta_3(a_{41}) = \pm\theta_3(a_{42})$, т.е. $b^* = \pm b$. Подобно доказываемся непорциональность пар $\{d_{21}^G, d_{22}^G\}$, $\{d'_{21}^G, d'_{22}^G\}$ (рассмотреть значения характера θ_1) и пары $\{d_{31}^G, d_{33}^G\}$ (рассмотреть значения характера θ_3).

Покажем, что классы d_{32}^G и d_{34}^G полупропорциональны. Рассмотрим колонку 23 таблицы $X(G)$, в которой отмечены элементы d_{32} и d_{34} и в следующих полосах приведены значения на них всех характеров $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Мы видим, что в большинстве полос $\chi(d_{32}) = \chi(d_{34})$. Исключение могут встретиться лишь в полосах, содержащих b и b^* , причём только в тех строках, в которых значения χ равны $\pm(b - b^*)$. Выпишем все χ с этим свойством:

$$\theta_7, \theta_8; \xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)} \text{ при нечётном } k-t; \xi'_{21}^{(k)}, \xi'_{22}^{(k)} \text{ при чётном } k-t; \xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)} \text{ при нечётном } k-t; \xi'_{41}^{(k)}, \xi'_{42}^{(k)} \text{ при чётном } k-t; \varphi_3, \varphi_4 \text{ при чётном } t; \varphi_7, \varphi_8 \text{ при нечётном } t.$$

Остаётся заметить, во всех этих случаях $\chi(d_{32}) = -\chi(d_{34})$. Для любого другого характера χ имеем $\chi(d_{32}) = \chi(d_{34})$.

З а м е ч а н и е 3. Каждый из перечисленных выше 14 характеров со свойством $\chi(d_{32}) = -\chi(d_{34})$ имеет единичное ядро (см. колонку 2).

Лемма 2 доказана.

Поэтому справедливы утверждения (2) и (3) теоремы 1.

Наконец, из леммы 1 и утверждения (0.1) следует, что полупропорциональные классы группы G имеют равные порядки.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Как отмечено во введении, группа $P\mathrm{Sp}_4(3)$ не имеет пар полупропорциональных классов. Поэтому далее мы предполагаем, что $q \geq 5$. Таблицу характеров группы $G/Z(G) = P\mathrm{Sp}_4(q)$ можно получить из таблицы характеров группы G , используя п. (1) предложения 2. Выпишем множество $\mathrm{Irr}(G|Z(G))$ всех неприводимых характеров χ группы G , содержащих $Z(G)$ в своём ядре, т. е. таких, что $\chi(z) = \chi(1)$ (для проверки этого равенства при любом χ достаточно рассмотреть колонку под номером 2 в $X(G)$). Пусть r — число таких характеров. Оставив в таблице $X(G)$ лишь строки, соответствующие характерам $\mathrm{Irr}(G|N)$ (вычеркнув остальные), мы получим матрицу M размеров $r \times k$, где k — число классов сопряжённых элементов группы G . В этой матрице M присутствуют повторяющиеся столбцы, так как по предложению 2 $\chi(g) = \chi(gz)$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$ и $g \in G$. Убрав из M повторные столбцы, мы получим таблицу характеров группы $G/Z(G)$.

Характер группы $G/Z(G)$, получающийся описанным здесь способом из характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$, обозначим через $\tilde{\chi}$. Для $\Psi \subseteq \mathrm{Irr}(G|Z(G))$ положим $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi} \mid \psi \in \Psi\}$.

При естественном гомоморфизме $G \rightarrow \bar{G} := G/Z(G)$ образ подмножества (или элемента) X из G будем обозначать через \bar{X} . Отметим, что $\bar{g} = \overline{g'}$, где $g \in G$ и $g' = gz$, и $c_j(\bar{i}) = \overline{c_j(i)}$.

Таким образом, таблицу характеров $X(\bar{G})$ группы $\bar{G} := G/Z(G) = P\mathrm{Sp}_4(q)$ можно прочесть по таблице характеров группы G ; при этом мы будем сохранять для $X(\bar{G})$ номера соответствующих полос и колонок из $X(G)$. Понятно, что при этом переходе от $X(G)$ к $X(\bar{G})$ некоторые из полос и колонок пропадают или “редеют”. При этом, $\mathrm{Cl}(\bar{G}) = \hat{A} \dot{\cup} \hat{B} \dot{\cup} \hat{C} \dot{\cup} \hat{D}$, где \hat{A} есть множество всех классов $\bar{x}^{\bar{G}}$ таких, что $x^G \in A$, и подобно определяются \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} .

Для завершения доказательства нам достаточно доказать следующие утверждения:

(А) любые два полупропорциональных класса группы \bar{G} записаны в одной колонке таблицы $X(\bar{G})$;

(В) если $\bar{x}^{\bar{G}}$ и $\bar{y}^{\bar{G}}$ — полупропорциональные классы группы \bar{G} , то $\bar{x}^{\bar{G}} \cup \bar{y}^{\bar{G}}$ не содержится в $\hat{A} \cup \hat{D}$;

(С) если классы $\bar{x}^{\bar{G}}$ и $\bar{y}^{\bar{G}}$ группы \bar{G} записаны в одной колонке таблицы $X(\bar{G})$, то $|\bar{x}^{\bar{G}}| = c|\bar{y}^{\bar{G}}|$, где $c \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

Сначала докажем (А). Внимательно просматривая доказательство леммы 1 и учитывая замечания 1–3, мы увидим, что можно повторить её аргументы, не выходя (при рассмотрении характеров) за рамки $\mathrm{Irr}(G|Z(G))$, лишь за одним исключением. А именно, в доказательстве леммы 1 в таблице при рассмотрении пары $(m, n) = (10, 16)$ использован характер $\xi_3^{(1)}$, ядро которого не содержит $Z(G)$. Здесь (т. е. в доказательстве теоремы 2) вместо него мы возьмём характер $\xi_3^{(2)}$ с ядром $Z(G)$. Однако этот характер существует лишь при $q \geq 7$, и поэтому мы должны отдельно рассмотреть случай $q = 5$.

Итак, пусть $q = 5$. В этом случае в таблице вместо характера $\xi_3^{(1)}$ мы можем взять характер $\chi = \varphi_5$, поскольку ввиду равенства $t = (q - 1)/2 = 2$ (t чётно) $\varphi_5 \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$. И теперь в предпоследней строке таблицы мы будем иметь: $\chi(g_{10}) = \varphi_5(b_4(1, 2)) = 0$, но $\chi(g_{16}) = \varphi_5(c_1(2)) = 3 \neq 0$. Поэтому случай $(m, n) = (10, 16)$ также невозможен, и верно утверждение (А).

Для доказательства утверждения (В) рассмотрим доказательство леммы 2. В 1-м абзаце этого доказательства используются лишь характеры θ_1 и θ_3 , лежащие в $\mathrm{Irr}(G|Z(G))$. Следовательно, мы можем перенести её аргументы на группу \bar{G} , и поэтому единственным контрпримером к утверждению (В) могла бы быть лишь пара $\{\bar{x}^{\bar{G}}, \bar{y}^{\bar{G}}\} = \{\overline{d_{32}^{\bar{G}}}, \overline{d_{34}^{\bar{G}}}\}$. Однако такая пара не существует, так как согласно замечанию 3 $\chi(d_{32}) = \chi(d_{34})$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Z(G))$, т. е. $\tilde{\chi}(\overline{d_{32}}) = \tilde{\chi}(\overline{d_{34}})$ для любого $\tilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(\bar{G})$ и, значит, $\overline{d_{32}^{\bar{G}}} = \overline{d_{34}^{\bar{G}}}$. Утверждение (В) доказано.

Докажем (С). Предположим, что классы $\bar{x}^{\bar{G}}$ и $\bar{y}^{\bar{G}}$ группы \bar{G} записаны в одной колонке таблицы $X(\bar{G})$. Тогда (см. 4-й абзац доказательства теоремы 2) классы x^G и y^G группы G

должны быть записаны в одной колонке таблицы $X(G)$ и, следовательно, по (0.1) имеют равные порядки. Но отсюда и из предложения 3 следует утверждение (С).

Таким образом, верно заключение теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** D -блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР. 1984. С. 3–31.
2. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. 380 с.
3. **Белоногов В.А.** Взаимодействия и D -блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 4–44.
4. **Белоногов В.А.** О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.
5. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.
6. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
7. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 19–37.
8. **Белоногов В.А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 19–37.
9. **Белоногов В.А.** Полупропорциональные неприводимые характеры групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётных q // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2013. Т. 19, № 1. С. 25–40.
10. **Srinivasan В.** The characters of the finite symplectic group $\mathrm{Sp}(4, q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 131, № 2. P. 488–525.
11. **Przygocki А.** Schur indices of symplectic groups // Commun. Algebra. 1982. Vol. 10, № 3. P. 279–310.
12. **Белоногов В.А.** О суммах $\cos \frac{2n\pi}{q^2+1} + \cos \frac{2qn\pi}{q^2+1}$ при натуральных n и нечётных q // Алгебра и комбинаторика: тез. Междунар. конф., посв. 60-летию А. А. Махнева. Екатеринбург: Изд-во УМЦ-УПИ, 1913. С. 15–18.
13. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 285 p.
14. **Белоногов В.А., Фомин А.Н.** Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976. 126 с.

Белоногов Вячеслав Александрович

д-р физ.-мат. наук, профессор

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 27.01.2015

УДК 517.977

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}^1$

И. Н. Белоусов

В работе найдены возможные автоморфизмы простых порядков и подграфы их неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$. Показано, что графы с массивами пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ и $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ не являются вершинно симметричными

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$.

Possible prime-order automorphisms and fixed-point subgraphs are found for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$. It is shown that graphs with intersection arrays $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$, and $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ are not vertex-symmetric.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность ее вершины, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ , число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (соответственно $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (соответственно смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (соответственно λ -подграфом). Если Γ — граф диаметра d , то через $\Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_t}$, где $i_j \leq d$ для всех $j = 1, \dots, t$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ в Γ .

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит ровно v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит ровно в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит ровно μ вершин для любых двух вершин a и b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (соответственно $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно через $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u и w , находящихся на расстоянии i в Γ , для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно*

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 14-11-00061 (теорема), при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006) (следствие).

транзитивным, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x и y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются через p_{ij}^l и называются числами пересечений графа Γ .

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

Предложение 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, на $v \leq 1000$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и $\mu > 1$, то верно одно из утверждений:

- (1) Γ — примитивный граф с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ или $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$;
- (2) Γ — антиподальный граф с $\mu = 2$ и массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r \in \{3, 4, \dots, 21\} \setminus \{10, 16\}$ и $v = 2r(r + 1)$;
- (3) Γ — антиподальный граф с $\mu \geq 3$ и массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$ или $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

В статье продолжено исследование реберно симметричных графов с массивами пересечений из п. (2) предложения 1. Если $2r + 1$ — степень простого числа, то граф существует. Более того, существует единственный реберно симметричный граф, полученный из схемы Р. Мэттона. Заметим, что $2r + 1$ — не степень простого числа для $r = 7, 17, 19$. Случаи $r = 7$ и $r = 17$ рассмотрены в [2; 4]. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$.

Граф Γ с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ имеет $v = 1 + 39 + 702 + 18 = 760$ вершин и спектр $39^1, \sqrt{39}^{360}, -1^{39}, -\sqrt{39}^{360}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф и либо
 - (i) $p = 19$, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 38$ и $\alpha_2(g) = 684$ или $\alpha_3(g) = 760$, либо
 - (ii) $p \in \{2, 5\}$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 40$ и $\alpha_2(g) = 720$;
- (2) Ω лежит в антиподальном классе Γ и либо
 - (i) $p = 13$, $|\Omega| = 19$ и $\alpha_1(g) = 39(2r + 1)$, где $r \leq 9$, либо
 - (ii) $p = 3$, $|\Omega| \in \{1, 7, 13, 19\}$ и $\alpha_1(g) = 39$;
- (3) $p = 17$, Ω — граф икосаэдра, $\alpha_1(g) = 34$ и $\alpha_3(g) = 102$;
- (4) $p = 3$, Ω является 4-кликой и $\alpha_1(g) = 36$;
- (5) $p = 2$ и либо
 - (i) Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$, либо
 - (ii) Ω — объединение семи изолированных 4-клик, $\alpha_3(g) = 48$, $\alpha_1(g) = 36$.

Следствие. Графы с массивами пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ и $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ не являются вершинно симметричными.

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 1 [3, лемма 1]. Пусть O_K — кольцо целых алгебраических чисел поля K . Если d — целое число, не делящееся на квадрат простого числа, $K = \mathbf{Q}(d^{1/2})$ — соответствующее

квадратичное поле, то один из целочисленных базисов кольца O_K равен $(1, (1 + d^{1/2})/2)$, если $d \equiv 1 \pmod{4}$ и равен $(1, d^{1/2})$, если $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$. В случае $d = 39$ один из целочисленных базисов кольца O_K равен $(1, \sqrt{39})$.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений (X, \mathcal{R}) с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$ и $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_k$ для чисел пересечений p_{ij}^l .

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$ соответственно. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1 , поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j . Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенствами $PQ = QP = vI$.

Предложение 2 [5, теорема 17.12]. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1 , отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j \rangle$.

Фактически из доказательства теоремы 17.12 из [5] следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q .

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство \mathbf{C}^v является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств W_0, \dots, W_d матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. [3, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и, если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 360 (отвечающее собственному значению θ_1) и χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 39, то

$$\begin{aligned} \chi_1(g) &= (18\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + (18\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{39}/39)/38, \\ \chi_2(g) &= (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/19 - 1. \end{aligned}$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 39$ делится на p .

Доказательство. Имеем

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 39 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 36 & 36 & 39 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1) = \sqrt{39}$. Тогда

$$P_1 - \sqrt{39}I = \begin{pmatrix} -\sqrt{39} & 1 & 0 & 0 \\ 39 & 2 - \sqrt{39} & 2 & 0 \\ 0 & 36 & 36 - \sqrt{39} & 39 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{39} \end{pmatrix}.$$

Если $(1, x_2, x_3, x_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы $P_1 - \sqrt{39}I$, то $x_2 = 1/\sqrt{39}$, $x_3 = -1/(18\sqrt{39})$ и $x_4 = -1/18$. Отсюда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 360 & 360/\sqrt{39} & -20/\sqrt{39} & -20 \\ 39 & -1 & -1 & 39 \\ 360 & -360/\sqrt{39} & 20/\sqrt{39} & -20 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (18\alpha_0(g) + 18\alpha_1(g)/\sqrt{39} - \alpha_2(g)/\sqrt{39} - \alpha_3(g))/38$.

Аналогично $\chi_2(g) = (39\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 39\alpha_3(g))/760$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 760 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/19 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из [6, лемма 2]. Лемма доказана.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G , $\Omega = \text{Fix}(g)$ и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$.

Заметим, что Γ содержит ровно 40 антиподальных классов, в каждом из которых 19 вершин.

З а м е ч а н и е. Если Ω пересекает антиподальные классы K и L , то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

В самом деле, вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если g — автоморфизм Γ порядка 2, 3 или 5, то $18w_1 = w_2$;*

(2) *если Ω — пустой граф, то либо*

(i) *$p = 19$ и $(\alpha_1(g), \alpha_2(g), \alpha_3(g)) \in \{(38, 684, 38), (0, 0, 760)\}$, либо*

(ii) *$p \in \{2, 5\}$ и $(\alpha_1(g), \alpha_2(g), \alpha_3(g)) = (40, 720, 0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если g — элемент группы G , то значение характера для g является суммой n корней из единицы степени $|\psi(g)|$, где n — размерность представления ψ .

Заметим, что корни из единицы степени 2, 3 имеют рациональные вещественные части. Если $|g| = 2, 3$, то значение характера — вещественное число, поэтому оно является целым. В случае $|g| = 5$ можно воспользоваться формулами $\cos 2\pi/5 = (\sqrt{5} - 1)/4$ и $\cos 4\pi/5 = -(\sqrt{5} + 1)/4$.

Таким образом, если g — автоморфизм графа Γ порядка 2, 3 или 5, то из леммы 2 следует, что $18w_1 = w_2$.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $760 = 2^3 \cdot 5 \cdot 19$, то $p = 19, 5$ или 2.

Пусть $p = 19$. Тогда $\chi_1(g) = (\sqrt{39}(18w_1 - w_2)/39 - w_3)/2$ и $\chi_2(g) = w_3 - 1$. По лемме 2 число $\chi_2(g) - 39 = w_3 - 40$ делится на 19, поэтому $w_3 = 2, 21$ или 40. В силу леммы 1 пара $(1, \sqrt{39})$ образует целочисленный базис кольца алгебраических целых чисел поля $\mathbf{Q}(\sqrt{39})$. Поэтому $w_3 = 2$ или 40. В первом случае имеем $w_1 + w_2 = 38$, $\chi_1(g) = \sqrt{39}(18w_1 - w_2)/78 - 1 = 19\sqrt{39}(w_1 - 2)/78 - 1$, и отсюда $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 38$, $\alpha_2(g) = 19 \cdot 36 = 684$. Во втором случае $\alpha_3(g) = 760$, и элемент g оставляет инвариантным каждый антиподальный класс графа Γ .

Если $p = 2, 5$ и $\alpha_3(g) \neq 0$, то g фиксирует вершину в соответствующем антиподальном классе, противоречие.

Если $p = 5$, то $\alpha_1(g) = 5w_1$, $\alpha_2(g) = 5 \cdot 18w_1$ и $5w_1 + 5 \cdot 18w_1 = 760$. Отсюда $\alpha_1(g) = 40$, $\alpha_2(g) = 720$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_1(g) = 2w_1$, $\alpha_2(g) = 2 \cdot 18w_1$ и $2w_1 + 2 \cdot 18w_1 = 760$. Отсюда $\alpha_1(g) = 40$, $\alpha_2(g) = 720$.

Лемма доказана.

В леммах 4–6 предполагается, что Ω содержит вершину a . Заметим, что если $a, b \in \Omega$ и $p > 2$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$, поэтому $\lambda_\Omega = \mu_\Omega = 2$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если $p \neq 2, 3, 13$, то Ω содержит по вершине из $[a]$, $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_3(a)$;*
- (2) *если $p > 17$, то $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.*

Доказательство. Если $p \neq 2, 3, 13$, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$, $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_3(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g -допустимым, и в случае $p > 17$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $p > 2$, то выполняется одно из утверждений:*

- (1) *Ω лежит в антиподальном классе графа Γ , $\alpha_3(g) = 17 - |\Omega|$ и либо*
 - (i) *$p = 3$, $|\Omega| \in \{1, 7, 13, 19\}$ и $\alpha_1(g) = 39$, либо*
 - (ii) *$p = 13$, $|\Omega| = 19$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 39(2l + 1)$, где $l \leq 9$;*
- (2) *$p = 17$, Ω — граф икосаэдра, $\alpha_1(g) = 34$ и $\alpha_3(g) = 102$;*
- (3) *$p = 3$, Ω является 4-кликкой и $\alpha_1(g) = 36$.*

Доказательство. Пусть $p > 2$. Допустим, что Ω содержит $[a]$. Тогда вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для некоторых вершин a_i, a_j из $[a]$, поэтому $u \in \Omega$. Отсюда $\Gamma_2(a) \subset \Omega$ и $\Gamma = \Omega$, противоречие.

Кроме того, в окрестности каждой вершины из $\Gamma - \Omega$ имеется не более одной вершины из Ω .

Пусть $p > 17$. Тогда $|\Omega| = 19t$, где t — число антиподальных классов, попадающих в Ω , Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $40 - t$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $19t(39 - t)$, но не больше $(760 - 19t)$, поэтому $t = 1$. Отсюда $|\Omega| = 19$ и p делит 39, противоречие.

Пусть теперь $p \leq 17$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Рассмотрим множество вершин U , лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω .

Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(40 - t)/(760 - 19t) = st/19$ вершинами из Ω , поэтому $st = |\Omega| \leq 19$.

Заметим, что если Ω содержит изолированную вершину, то Ω лежит в антиподальном классе графа Γ и либо $p = 3$ и $|\Omega| \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$, либо $p = 13$ и $|\Omega| \in \{6, 19\}$. В любом случае $\alpha_3(g) = 19 - |\Omega|$. Далее, $\chi_1(g) = (|\Omega| - 1)/2 + (18\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{39}/(39 \cdot 38)$, ввиду леммы 1 число $|\Omega|$ нечетно, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 741$ и $18\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 19(\alpha_1(g) - 39)$ делится на $38 \cdot 39$. Отсюда либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 39$, либо $p = 13$ и $\alpha_1(g) = 39(2l + 1)$, где $l \leq 9$.

Если $t > 1$, то Ω является $(k' + 1)$ -кликкой или связным вполне регулярным графом с параметрами $(v', k', 2, 2)$ и $1 + k' + (k' - 3)k'/2 \leq 19$. Поэтому $k' \in \{3, 5, 6\}$.

В случае $k' = 6$ число p делит 33, поэтому $p \in \{3, 11\}$ и p делит $19 - s$. Далее, пара $(|\Omega|, s)$ равна $(16, 1)$ и подграф Ω является кличкой, противоречие.

В случае $k' = 5$ число p делит 34, поэтому $p = 17$. Далее, Ω — локально 5-угольный граф, поэтому Ω — граф икосаэдра, $t = 6, s = 2$ и $\alpha_3(g) = 102$. Так как $\alpha_1(g) - 34$ делится на 78, то $\alpha_1(g) = 34$.

В случае $k' = 3$ граф Ω является 4-кликкой и $p = 3$. Далее, $\alpha_2(g) = 18\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 36$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $p = 2$, то либо*

- (i) Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$, либо
- (ii) Ω является объединением семи изолированных 4-клик, $\alpha_3(g) = 48$ и $\alpha_1(g) = 36$.

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, число $|\Omega|$ четно, любой антиподальный класс пересекает Ω по $s = 2j + 1$ вершинам, $j \leq 9$ и t четно. Пусть K — антиподальный класс, содержащий вершину a . Тогда $K \cap \Omega = \{a, a_2, \dots, a_s\}$. Если $d(u, u^g) \leq 2$ для некоторой вершины $u \in \Gamma - \Omega$, то $[u]$ содержит 0 или 2 вершины из Ω .

Как и выше, доказываем, что $|\Omega| = st \leq 38$; кроме того, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (s - 1)(t - 1)$. В случае $s = 1$ граф Ω является t -кликкой, поэтому $t \leq 4$. Противоречие с тем, что $[a] - \Omega$ содержит по крайней мере 18 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Пусть $s > 1$ и x — число изолированных вершин в $\Omega(a)$. Тогда Ω содержит вершину a , $t - 1$ вершин из $\Omega(a)$, $(x(t - 2) + (t - 1 - x)(t - 4))/2$ вершин c из $\Omega_2(a)$, для которых $[c] \cap [a] \subset \Omega$, $(39 - 3x - (t - 1 - x))/2$ вершин из $\Omega_2(a)$, смежных с парами вершин из $[a] - \Omega$ и $s - 1$ вершин из $\Omega_3(a)$. Поэтому $1 + (t - 1) + (x(t - 2) + (t - 1 - x)(t - 4))/2 + (39 - 3x - (t - 1 - x))/2 + (s - 1) \leq 38$, $s \leq 19 - (t - 2)^2/2$ и $t \in \{2, 4, 6\}$.

Далее, число вершин в $\Gamma_2(a) \cap \Omega$, с одной стороны, равно $(x(t - 2) + (t - 1 - x)(t - 4))/2 + (39 - 3x - (t - 1 - x))/2$, а с другой стороны, равно $(s - 1)(t - 1)$. Поэтому $(2s - t + 3)(t - 1) = 39$ и $(t, s) \in \{(2, 19), (4, 7)\}$.

Пусть $(t, s) = (2, 19)$. Тогда Ω является объединением 19 изолированных ребер, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$.

Пусть $(t, s) = (4, 7)$. Тогда Ω — регулярный граф степени 3 и связная компонента Δ графа Ω является графом $K_{4,4}$ с удаленным максимальным паросочетанием или 4-кликкой. В первом случае $t \geq 8$, противоречие. Поэтому Ω является объединением семи изолированных 4-клик, $\alpha_3(g) = 12 \cdot 4 = 48$ и $\alpha_1(g) = 36$.

Лемма доказана.

Из лемм 3–6 следует теорема.

3. Граф с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ не является вершинно симметричным

Сначала приведем одну лемму об абелевых накрытиях клик.

Лемма 7 [7, теорема 2.5]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu(r - 1), 1; 1, \mu, k\}$, K — абелева подгруппа из $\text{Aut}(\Gamma)$, транзитивная на каждом антиподальном классе и p — простой делитель r . Тогда p делит $k + 1$, и в случае $k = r\mu + 1$ число r — степень 2.*

До конца раздела предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$ и $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . По лемме 7 группа G не содержит абелевых подгрупп, действующих транзитивно на каждом антиподальном классе. Ввиду теоремы имеем $\{2, 5, 19\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) если f — элемент порядка 19 из G и g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$, то $|g| = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$;
- (2) $S(G) = O_2(G)$;
- (3) цоколь $\bar{\Gamma}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(19)$ или J_3 .

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 19 из G , g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$. Ввиду теоремы из действия f на Ω следует, что либо $p = 13$, $|\Omega| = 19$ и $\alpha_1(g) = 39(2l + 1)$, где $l \leq 9$, либо $p = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 38$. В первом случае имеем $l = 9$ и каждая $\langle g \rangle$ -орбита длины 19 является кликой, противоречие.

Из утверждения (1) следует равенство $S(G) = O_2(G)$.

Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [8, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна группе $L_2(19)$ порядка $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$ или группе J_3 порядка $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$.

Лемма доказана.

Завершим **доказательство** следствия в случае массива $\{39, 36, 1; 1, 2, 39\}$. По [9] группа J_3 не содержит подгрупп индекса, делящего 760. В случае $L_2(19)$ подгруппа \bar{T}_a содержится в диэдральной подгруппе порядка 18 и для антиподального класса F подгруппа $\bar{T}_{\{F\}}$ является расширением группы порядка 19 с помощью циклической группы порядка 9. Отсюда $S(G)_a$ — группа порядка 2 и $|S(G) : S(G)_a|$ делит 8. Противоречие с действием \bar{T} на $S(G)$.

4. Графы с массивами пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$ и $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ не являются вершинно симметричными

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Пусть F — антиподальный класс графа Γ , содержащий вершину a . В [2, теорема] доказано, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф и либо
 - (i) $p = 7$, $\alpha_1(g) = 14t$ и $\alpha_3(g) = 14$ или $\alpha_3(g) = 112$, либо
 - (ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 16$;
- (2) $|\Omega| = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 15$ и $\alpha_3(g) = 6$;
- (3) Ω — антиподальный класс, $p \in \{3, 5\}$, $\alpha_1(g) = 15$ и $\alpha_3(g) = 0$;
- (4) Ω является 4-кликой, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 12$ и $\alpha_3(g) = 24$;
- (5) $p = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 14$.

Лемма 9. Пусть G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если f — элемент порядка 7 из G , g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$, то $|g| = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 14$ и $|C_G(f)| = 14$;
- (2) $S(G) = O_2(G)$;
- (3) цоколь $G/S(G)$ изоморфен $L_2(7)$.

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 7 из G , g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$. Ввиду [2, теорема] из действия f на Ω следует, что либо $p = 3, 5$ и Ω — антиподальный класс, либо $p = 2$ и Ω — объединение двух антиподальных классов. Но в случаях $p = 3, 5$ имеем $\alpha_1(g) = 15$, противоречие. Если V — подгруппа порядка 4 из $C_G(f)$, содержащая g , и $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$, то $|U| = 14$ и некоторая инволюция $h \in V$ фиксирует 2 вершины из U и переставляет антиподальные классы из Ω . В этом случае $U = \text{Fix}(h) = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^{gh}) = 1\}$. Аналогично $W = \{w \in \Gamma \mid d(w, w^h) = 1\}$ совпадает с $\text{Fix}(gh)$. Противоречие с тем, что $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^{gh}) = 1\} = W$.

Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Если $|\bar{T}| = 7$, то $|\bar{G}|$ не делится на 8, причем f принадлежит ядру действия G на множестве антиподальных классов, противоречие с утверждением (1). Итак, $S(G) = O_2(G)$.

Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Заметим, что $\{2, 7\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и $|G|$ не делится на 25 и на 49. Если $|\bar{T}|$ не делится на 7, то по [8, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна A_5 , A_6 или $U_4(2)$, противоречие с действием элемента порядка 7 на \bar{T} .

Значит, $|\bar{T}|$ делится на 7 и по [8, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, A_7 , $L_3(4)$, A_8 , A_9 , $U_4(3)$ или $Sp_6(2)$. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делит $16 \cdot 7$, и для антиподального класса F число $|\bar{T} : \bar{T}_{\{F\}}|$ делит 16, то $\bar{T} \cong L_2(7)$, $\bar{T}_a = Z_3$ и $\bar{T}_{\{F\}} = Z_7 \cdot Z_3$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия в случае массива $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$. По лемме 9 либо группа G изоморфна $PGL_2(7)$, причем элемент f порядка 7 из $G_{\{F\}}$ действует без неподвижных точек на $S(G)_{\{F\}}$, либо $|S(G) : S(G)_a| = |S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 2$.

В последнем случае $S(G)$ — элементарная абелева 2-группа. Покажем, что порядок группы $S(G)_F$ делит 2. В противном случае найдутся две инволюции $g, h \in S(G)_F$, каждая из которых фиксирует точно 2 антиподальных класса. Отсюда $\Omega = \text{Fix}(h)$, противоречие с действием группы $\langle g, h \rangle$ на $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$. Ввиду [2, теорема] имеем $S(G)_F = S(G)_{\{F\}}$, поэтому $S(G) = \langle z \rangle$ — группа порядка 2. Ввиду леммы 9 инволюция z фиксирует два антиподальных класса, противоречие с тем, что z поточечно фиксирует Γ .

Итак, $G \cong PGL_2(7)$, $T_a = Z_3$ поточечно фиксирует 4-клик, $T_{\{F\}} = Z_7 \cdot Z_3$ и любая инволюция из G действует без неподвижных точек на Γ . Компьютерные вычисления в GAP [10] показывают, что не существует дистанционно регулярного графа степени 15 с описанными свойствами.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Пусть F — антиподальный класс графа Γ , содержащий вершину a . В [4, теорема 1] доказано, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф и либо
 - (i) $p = 17$, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 34$ и $\alpha_2(g) = 544$ или $\alpha_3(g) = 612$, либо
 - (ii) $p = 2, 3$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 36$;
- (2) Ω лежит в антиподальном классе, $p = 7$ и $|\Omega| = 3, 17$ или $p = 5$ и $|\Omega| = 7, 17$;
- (3) $p = 3, 5$ и Ω — граф икосаэдра;
- (4) $p = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 34$.

Лемма 10. Пусть G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если f — элемент порядка 17 из G , g — элемент простого порядка $p < 17$ из $C_G(f)$, то $|g| = 2$, Ω — объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 34$ и $|C_G(f)| = 34$;
- (2) $S(G) = O_2(G)$;
- (3) цоколь группы $G/S(G)$ изоморфен $L_2(17)$.

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 17 из G , g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$. Ввиду [4, теорема 1] из действия f на Ω следует, что либо $p = 2, 3$ и Ω — пустой граф, либо $p = 5, 7$ и Ω — антиподальный класс, либо $p = 2$ и Ω — объединение двух антиподальных классов. Но если $p = 2, 3$ и Ω — пустой граф, имеем $\alpha_1(g) = 36$, а если $p = 5, 7$ и Ω — антиподальный класс, имеем $\alpha_1(g) = 35, 35 \cdot 17$. В последнем случае любая $\langle g \rangle$ -орбита длины 7 является кликой. В любом случае получаем противоречие.

Если V — подгруппа порядка 4 из $C_G(f)$, содержащая g , и $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$, то $|U| = 34$ и некоторая инволюция $h \in V$ фиксирует 2 вершины из U и переставляет антиподальные классы из Ω . В этом случае $U = \text{Fix}(h) = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^{gh}) = 1\}$. Аналогично $W = \{w \in \Gamma \mid d(w, w^h) = 1\}$ совпадает с $\text{Fix}(gh)$. Противоречие с тем, что $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^{gh}) = 1\} = W$.

Пусть $R = O_3(G) \neq 1$. Тогда $|R : R_a| = 9$ и для любого элемента g порядка 3 из R_a подграф Ω является графом икосаэдра. По [4, лемма 5] имеем $\alpha_1(g) = 30$ и $\alpha_3(g) = 90$. Если R_a содержит элементарную абелеву группу $\langle g, h \rangle$ порядка 9, то h фиксирует по крайней мере 3 вершины из $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$. С другой стороны, из действия h на $\Omega(a)$ следует, что $\Omega = \text{Fix}(h)$, противоречие. Итак, $|R_a|$ делит 3, противоречие с действием элемента порядка 17 из G на R .

Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Если $|\bar{T}| = 17$, то получим противоречие с утверждением (1). Итак, $S(G) = O_2(G)$.

Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Заметим, что $\{2, 3, 17\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и $|G|$ не делится на 49. Если $|\bar{T}|$ не делится на 17, то получим противоречие с действием элемента порядка 17 на \bar{T} .

Значит, $|\bar{T}|$ делится на 17 и ввиду [8, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(17)$, $L_2(16)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$ или $Sp_8(2)$. Так как по [9] группа \bar{T} содержит максимальную подгруппу индекса, делящего $36 \cdot 17$, то \bar{T} изоморфна $L_2(17)$, \bar{T}_a — циклическая группа порядка, делящего 8, и $|S(G) : S(G)_a| \cdot (16/|\bar{T}_a|) = 4$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия в случае массива $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$. По лемме 10 либо группа G изоморфна $L_2(17)$ или $PGL_2(17)$, причем элемент f порядка 17 из $G_{\{F\}}$ действует без неподвижных точек на $S(G)_{\{F\}}$, либо $|S(G) : S(G)_a| = |S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 2$.

В последнем случае $S(G)$ — элементарная абелева 2-группа. Покажем, что порядок группы $S(G)_F$ делит 2. В противном случае найдутся две инволюции $g, h \in S(G)_F$, каждая из которых фиксирует точно 2 антиподальных класса. Отсюда $\Omega = \text{Fix}(h)$, противоречие с действием группы $\langle g, h \rangle$ на $U = \{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$. Ввиду [4, теорема 1] имеем $S(G)_F = S(G)_{\{F\}}$, поэтому $S(G) = \langle z \rangle$ — группа порядка 2. Ввиду леммы 10 инволюция z фиксирует два антиподальных класса, противоречие с тем, что z поточечно фиксирует Γ .

Итак, либо $G \cong L_2(17)$, $T_a \cong Z_4$ и $T_{\{F\}} \cong Z_{17} \cdot Z_4$, либо $G \cong PGL_2(17)$, $T_a \cong Z_8$ и $T_{\{F\}} \cong Z_{17} \cdot Z_8$. Противоречие с тем, что для инволюции $g \in T_a$ подграф Ω — объединение двух антиподальных классов и $\alpha_1(g) = 34$.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буриченко В.П., Махнев А.А. О вполне регулярных локально циклических графах // Современные проблемы математики: тез. 42-й Всерос. молод. конф. / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 11–14.
2. Буриченко В.П., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$ // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 4. С. 375–379.
3. Махнев А.А., Падучих Д.В. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 1. С. 14–18.
4. Циовкина Л.Ю. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 285–293.
5. Cameron P.J. Permutation groups. London Math. Soc. Student Texts № 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
6. Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
7. Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E. Antipodal distance transitive covers of complete graphs // Europ. J. Comb. 1998. Vol. 19, no. 4. P. 455–478.
8. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Rep. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
9. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.7.8. 2015. URL: <http://www.gap-system.org>.

Белоусов Иван Николаевич

Поступила 11.03.2015

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: i_belousov@mail.ru

УДК 512.544

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГРУППАХ ФИНИТАРНЫХ ПОДСТАНОВОК

В. В. Беляев

В работе исследуются подстановочные свойства действий сопряжением группы финитарных подстановок на ее классах сопряженных элементов. С помощью найденных свойств показано, что классы сопряженных элементов в группах финитарных подстановок являются дискретными подмножествами относительно любой хаусдорфовой групповой топологии. Более того, доказано, что последнее свойство характеризует знакопеременные группы в классе счетных локально конечных простых групп.

Ключевые слова: группы финитарных подстановок, безусловно дискретные подмножества, минимальные групповые топологии.

V. V. Belyaev. Classes of conjugate elements in finitary permutation groups.

We study the permutation properties of the conjugacy actions of a finitary permutation group on its classes of conjugate elements. These properties are used to show that classes of conjugate elements in finitary permutation groups are discrete subsets with respect to any Hausdorff group topology. Moreover, it is proved that the above property characterizes alternating groups in the class of countable locally finite simple groups.

Keywords: finitary permutation groups, unconditionally discrete sets, minimal group topologies.

1. Введение

В данной работе продолжается начатое в [13] исследование подстановочных свойств действия сопряжением группы финитарных подстановок на ее любом классе сопряженных элементов.

Напомним, что подстановка g множества Ω называется *финитарной*, если ее носитель $\text{supp}(g) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^g \neq \alpha\}$ конечен. Множество всех финитарных подстановок образует в $\text{Sym}(\Omega)$ нормальную подгруппу $\text{FSym}(\Omega)$, которая называется *финитарной симметрической группой*, а любая подгруппа из $\text{FSym}(\Omega)$ называется *группой финитарных подстановок* множества Ω . Группа четных финитарных подстановок множества Ω называется *знакопеременной группой* и обозначается через $\text{Alt}(\Omega)$.

Исследование, проведенное в [13], показало, что в некоторых случаях действие сопряжением группы финитарных подстановок на ее произвольном классе сопряженных элементов индуцирует группу финитарных подстановок этого класса. Но в общем случае действие на классе хотя и удовлетворяет некоторым условиям конечности, не является финитарным.

Настоящая работа посвящена рассмотрению одного условия конечности, названного нами D-условием, которому удовлетворяют действия сопряжением на классах в произвольной группе финитарных подстановок. Среди всех известных автору на сегодняшний день условий конечности, которым удовлетворяет это действие на классе, D-условие допускает несколько интерпретаций и поэтому вызывает наибольший интерес. D-условие определяется следующим образом.

Будем говорить, что *действие группы G на множестве Σ удовлетворяет D-условию*, если

- (D) либо Σ — конечное множество, либо найдется конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что пересечение $\bigcap_{x \in F} \text{supp}(x)$ является конечным непустым множеством.

Используя D-условие, мы можем дать определение DC-групп, являющихся основным объектом исследования данной работы.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть G — произвольная группа и $g \in G$. Класс g^G мы будем называть D-классом, если действие сопряжением группы G на классе g^G удовлетворяет D-условию. Группу, все классы сопряженных элементов которой являются D-классами, мы будем называть DC-группой.

З а м е ч а н и е. Другими словами, класс g^G является D-классом, если либо $g \in Z(G)$, либо найдется конечное подмножество $F \subseteq G$, состоящее из элементов, непостоянных с g , такое, что лишь конечное число сопряженных с g элементов непостоянны ни с одним элементом из F .

Из определения D-класса следует, что любая FC-группа, т. е. группа с конечными классами сопряженных элементов, является DC-группой. Более того, любой финитарный класс, т. е. класс сопряженных элементов, на котором группа индуцирует сопряжением группу финитарных подстановок, также является D-классом. Следовательно, группы с финитарными классами сопряженных элементов, названные в [13] FC-группами, являются DC-группами.

Наш первый результат еще более расширяет семейство примеров DC-групп.

Теорема 1.1. *Любая группа финитарных подстановок является DC-группой.*

Перед формулировкой следствий теоремы 1.1 напомним читателю некоторые понятия, тесно связанные с D-условием. Эти понятия возникли в двух различных областях теории групп: в исследованиях решетки идеалов групповых алгебр и при изучении условий минимальности для групповых топологий.

А. Е. Залесский в [6] ввел следующее понятие группы подстановок конечного типа.

Группа $G \leq \text{Sym}(\Sigma)$ называется группой подстановок *конечного типа*, если выполнено условие

(D*) найдется конечное подмножество неединичных элементов $F \subseteq G$ такое, что

$$\bigcap_{x \in F} \text{supp}(x) = \emptyset.$$

Очевидно, D*-условие равносильно тому, что стабилизатор G_α произвольной точки $\alpha \in \Sigma$ содержит по крайней мере один элемент из конечного множества F и, следовательно, любая подгруппа, сопряженная с G_α , также нетривиально пересекает множество F . Последнее мотивирует введение в [6] еще одного понятия.

О п р е д е л е н и е 1.2. Собственная подгруппа H в группе G называется *скованной* (confined), если найдется конечное множество неединичных элементов $F \subseteq G$ такое, что $H \cap g^{-1}Fg \neq \emptyset$ для любого $g \in G$.

Мы не будем в данной работе объяснять способ применения подстановочного действия конечного типа для построения идеалов в групповых алгебрах. Читатели, заинтересованные в этих приложениях, могут обратиться к работам [5; 6]. Здесь мы ограничимся лишь указанием связи между условиями (D) и (D*).

Пусть G — бесконечная группа подстановок множества Σ , удовлетворяющая D-условию, т. е. существует конечное подмножество $F \subset G$ такое, что $\Delta = \bigcap_{x \in F} \text{supp}(x)$ — непустое конечное множество. В этом случае множество F состоит, очевидно, из неединичных элементов и, добавив к F произвольные неединичные представители стабилизаторов G_α для каждого $\alpha \in \Delta$, мы получим требуемое в D*-условии конечное множество неединичных элементов с пустым пересечением их носителей. Казалось бы, проведению этих рассуждений может мешать отсутствие неединичного элемента в стабилизаторе G_α для некоторой точки $\alpha \in \Delta$. Но допустим, что нашлась точка $\alpha \in \Delta$ такая, что $G_\alpha = 1$. В этом случае G -орбита точки α содержится в Δ и поэтому является конечной, из чего, в свою очередь, следует конечность группы G , противоречащая нашему предположению. Таким образом, любая бесконечная группа подстановок, удовлетворяющая D-условию, является группой подстановок конечного типа, и поэтому справедливо

Следствие 1.1. Пусть G — произвольная группа финитарных подстановок и $g \in G$. Если класс g^G бесконечен, то действие сопряжением группы G индуцирует на этом классе группу подстановок конечного типа.

Подобно тому как в [6] условие (D*) было интерпретировано в терминах скованности стабилизатора точки, условие (D) также может быть описано с помощью некоторых ограничений, накладываемых на эти стабилизаторы точек. С этой целью мы вводим новое понятие.

О п р е д е л е н и е 1.3. Подгруппу H группы G будем называть *сильно скованной*, если найдется конечное, возможно пустое, подмножество $F \subseteq G$ такое, что множество $L = \{x \in G \mid H \cap xFx^{-1} = \emptyset\}$ совпадает с объединением конечного множества правых смежных классов H в G .

Согласно определению 1.3 любая подгруппа конечного индекса группы G является сильно скованной в G , так как в этом случае достаточно положить $F = \emptyset$. В том случае, когда индекс сильно скованной подгруппы H в группе G бесконечен, множество F , очевидно, непусто, а множество L состоит из всех элементов правых смежных классов H , которые сдвигаются элементами из F , т. е. $L = \{x \in G \mid Hxf \neq Hx \text{ для любого } f \in F\}$. Таким образом, действие группы G правым умножением на множестве правых смежных классов ее сильно скованной подгруппы удовлетворяет условию (D). Обратно, если транзитивное действие группы G удовлетворяет условию (D), то, очевидно, стабилизатор любой точки является сильно скованной в G подгруппой. Так как централизатор $C_G(g)$ является стабилизатором точки $g \in g^G$ относительно действия сопряжением G на классе g^G , то из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.2. Централизатор любого элемента в группе финитарных подстановок является сильно скованной подгруппой.

Говоря о связи между условиями (D) и (D*), необходимо также отметить, что D-условие является гораздо более сильным ограничением на группу подстановок, чем условие (D*), и следствие 1.1 легко доказать непосредственно без использования теоремы 1.1.

Перейдем теперь к рассмотрению D-условия с другой, топологической, точки зрения. Топологические следствия D-условия являются особенно важными для нас, так как они будут играть главную роль при изучении локально конечных простых DC-групп.

Теперь мы предположим, что действие группы G на бесконечном множестве Σ является транзитивным и удовлетворяет D-условию, т. е. нашлось конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что $\Delta := \bigcap_{x \in F} \text{supp}(x)$ есть непустое конечное множество точек. Пусть также на множестве Σ определена G -инвариантная хаусдорфова топология, т. е. любой элемент $g \in G$ индуцирует непрерывную подстановку хаусдорфова пространства Σ . Так как множество неподвижных точек $\text{fix}(g) := \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha^g = \alpha\}$ непрерывной подстановки хаусдорфова пространства замкнуто, то $\text{supp}(g) := \Sigma \setminus \text{fix}(g)$ является открытым для любого $g \in G$. Значит, конечное непустое множество Δ является открытым как пересечение конечного семейства открытых множеств. Отсюда, очевидно, следует, что любое одноточечное подмножество из Δ является открытым, а из транзитивного действия G на Σ вытекает, что любое одноточечное подмножество из Σ также открыто, т. е. топология, определенная на Σ , является дискретной.

Так как любая хаусдорфова топология на конечном множестве также является дискретной, то справедлива

Теорема 1.2. Пусть действие группы G на множестве Σ является транзитивным и удовлетворяет D-условию. Тогда любая G -инвариантная хаусдорфова топология на множестве Σ является дискретной.

Из теорем 1.1 и 1.2 непосредственно вытекает

Следствие 1.3. Любая G -инвариантная хаусдорфова топология на любом классе сопряженных элементов в DC-группе G , и в частности в группе финитарных подстановок, является дискретной.

С помощью следствия 1.3 легко получить сильные ограничения на хаусдорфовы групповые топологии, которые можно определить на DC-группе. Действительно, пусть G — хаусдорфова топологическая группа. Тогда ограничение групповой топологии на класс g^G определяет на этом классе G -инвариантную хаусдорфову топологию. Если определенное таким образом топологическое пространство g^G дискретно, то $C_G(g)$ есть открытая подгруппа в топологической группе G , и поэтому в DC-группе G централизатор любого элемента является открытой подгруппой относительно любой хаусдорфовой групповой топологии на G .

Напомним, что А. А. Марков [14] назвал подмножество S группы G *безусловно замкнутым*, если S — замкнутое множество в любой хаусдорфовой групповой топологии на G . Мы несколько расширим использование термина “безусловно”, вводя следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1.4. Подмножество S из группы G будем называть *безусловно открытым (безусловно дискретным)*, если S — открытое (дискретное) множество в любой хаусдорфовой групповой топологии на G .

Таким образом, справедливо

С л е д с т в и е 1.4. *Каждый класс сопряженных элементов в DC-группе, и в частности в группе финитарных подстановок, является безусловно дискретным, а централизатор любого элемента — безусловно открытым множеством.*

Так как пересечение конечного семейства открытых множеств является открытым множеством, то пересечение конечного семейства безусловно открытых множеств в группе также является безусловно открытым. Значит, в DC-группе G централизатор $C_G(F)$ любого конечного подмножества $F \subseteq G$ является безусловно открытым. Беря в качестве базы окрестностей единицы централизаторы конечных подмножеств группы G , мы задаем на G групповую топологию, которая называется *централизаторной*. Используя понятие централизаторной топологии, мы можем несколько по-иному представить указанное свойство централизаторов конечных подмножеств в DC-группе.

С л е д с т в и е 1.5. *Централизаторная топология на DC-группе G , и в частности на группе финитарных подстановок, слабее любой хаусдорфовой групповой топологии на G .*

Централизаторная топология является хаусдорфовой в том и только том случае, когда пересечение централизаторов всех конечных подмножеств равно 1, т. е. $Z(G) = 1$. Поэтому из следствия 1.5 вытекает

С л е д с т в и е 1.6. *Централизаторная топология на DC-группе G и, в частности, на группе финитарных подстановок, с тривиальным центром $Z(G)$ является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.*

Группы, допускающие наислабейшую хаусдорфову групповую топологию, были названы Д. Дикраняном и М. Мегрелишвили [3] *a-минимальными группами*. Пользуясь этим термином, мы можем сказать, что любая DC-группа с тривиальным центром является *a-минимальной*.

Необходимо также отметить, что в частном случае $G = \text{FSym}(\Omega)$ топологические свойства группы G , представленные в следствиях 1.4–1.6, вытекают из результатов Т. Банаха, И. Гурана и И. Протасова [1]. Теорема 1.2 из [1] утверждает, что для любой подгруппы $G \leq \text{Sym}(\Omega)$, содержащей $\text{FSym}(\Omega)$, топология поточечной сходимости является наислабейшей хаусдорфовой топологией на G и, значит, G — *a-минимальная группа*. Теорема 1.2 из [1] не противоречит следствию 1.6, так как централизаторная топология на $\text{FSym}(\Omega)$ совпадает с топологией поточечной сходимости.

В общем случае централизаторная топология на $G \leq \text{FSym}(\Omega)$ может быть строго слабее топологии поточечной сходимости. Например, пусть G — вполне импримитивная p -группа финитарных подстановок множества Ω . Так как нормальное замыкание произвольного конечного подмножества $F \subseteq G$ является нильпотентной группой, то $C_G(F)$ содержит неединичную

нормальную в G подгруппу. Отсюда, очевидно, следует, что стабилизатор G_α точки $\alpha \in \Omega$ не содержит $C_G(F)$ ни для какого конечного подмножества $F \subseteq G$. Значит, стабилизатор G_α , являющийся окрестностью единицы в топологии поточечной сходимости, не содержит никаких окрестностей единицы в централизаторной топологии. С другой стороны, для произвольного конечного подмножества $F \subseteq G$ поточечный стабилизатор $G_{(\Delta)}$, где $\Delta = \text{supp}(F)$, содержится в $C_G(F)$, т.е. централизаторная топология слабее топологии поточечной сходимости. Таким образом, централизаторная топология на группе G строго слабее топологии поточечной сходимости. Заметим, что $Z(G) = 1$. Значит, мы можем воспользоваться следствием 1.6, в силу которого G есть a -минимальная группа подстановок, но топология поточечной сходимости на G не является наислабейшей. Читателей, заинтересованных в более детальном сравнении топологии поточечной сходимости и централизаторной топологии на группе финитарных подстановок, мы отсылаем к работе [12].

Построение новых примеров a -минимальных групп вызывает интерес у специалистов в области топологических групп (см., например, [3, вопросы 2.2 и 3.3]). Поэтому мы в данной работе даем еще один способ построения a -минимальных групп с помощью групп финитарных подстановок.

Теорема 1.3. Пусть $H \leq \text{FSym}(\Omega)$, \overline{H} — замыкание H в $\text{Sym}(\Omega)$ относительно топологии поточечной сходимости и $Z(\overline{H}) = 1$. Тогда любая подгруппа из \overline{H} , содержащая H , является a -минимальной группой.

Понятно, что теорема 1.2 из [1] есть частный случай теоремы 1.3 для $H = \text{FSym}(\Omega)$.

Теорема 1.3 завершает рассмотрение основных следствий теоремы 1.1, полученных в работе, и мы переходим к другому вопросу, естественно возникающему в связи с теоремой 1.1. Насколько широк класс DC-групп? В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением поставленного вопроса в классе локально конечных простых групп.

Теорема 1.4. Для бесконечной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны:

1. G — знакопеременная группа.
2. G — DC-группа.

Полученный результат позволяет надеяться на положительный ответ на следующий вопрос:

Верно ли, что полупростая локально конечная DC-группа имеет точное финитарное подстановочное представление?

Топологические следствия D-условия сыграли большую роль при доказательстве теоремы 1.4. Более того, оказалось, что счетные знакопеременные группы полностью характеризуются этими топологическими свойствами. Точнее, справедлива

Теорема 1.5. Для счетной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны:

1. G — знакопеременная группа.
2. Любой класс сопряженных элементов в G является безусловно дискретным.
3. Централизатор любого элемента в G является безусловно открытым.
4. Централизаторная топология на G является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.

Заметим также, что теоремы 1.4 и 1.5 представляют здесь несколько ослабленные варианты результатов исследований, проведенных в разд. 5. Для характеристики знакопеременных групп в классе локально конечных простых групп достаточно наложить указанные в этих теоремах ограничения лишь на один неединичный класс сопряженных элементов или на централизатор одного неединичного элемента.

Кроме перечисленных в теореме 1.5 топологических ограничений есть еще одно топологическое свойство групп финитарных подстановок, которое вызывает большой интерес. Из теоремы 1.5 следует, что счетная знакопеременная группа a -минимальна, т. е. допускает наименее слабую хаусдорфову групповую топологию. Более того, счетная локально конечная простая a -минимальная группа обязана быть знакопеременной, если ее наименее слабая хаусдорфова групповая топология является централизаторной. Но, может быть, в теореме 1.5 достаточно ограничиться требованием лишь a -минимальности группы? К сожалению, нам не удалось получить ответ на этот вопрос; а мы смогли лишь свести проблему к исследованию узкого класса простых групп, достаточно хорошо изученных на сегодняшний день (см., например, [4]).

Теорема 1.6. *Любая a -минимальная счетная локально конечная простая группа имеет точное финитарное линейное представление.*

Завершая рассмотрение полученных результатов, поясним содержание других разделов работы. В разд. 2 приведены результаты по структурной теории групп финитарных подстановок, которые используются в разд. 3 при доказательстве теоремы 1.1. Доказательства теорем 1.3 и 1.6, касающихся a -минимальных групп, даются в разд. 4, а топологические свойства знакопеременных групп (теоремы 1.4 и 1.5) рассматриваются в разд. 5. Отметим также, что ранее были даны все необходимые пояснения к топологическим следствиям D-условия, представленным в теореме 1.2, и поэтому отдельное доказательство теоремы 1.2 не требуется.

2. Строение замкнутых подгрупп в $\text{FSym}(\Omega)$

В этом разделе мы приводим все необходимые нам в работе результаты из [10; 11], касающиеся строения групп финитарных подстановок, замкнутых в симметрической группе финитарных подстановок относительно топологии поточечной сходимости. В дальнейшем, говоря о замкнутых подгруппах в $\text{FSym}(\Omega)$, мы всегда будем иметь в виду именно топологию поточечной сходимости. Как и в работах [10; 11], для любой подгруппы G из $\text{FSym}(\Omega)$ через G^* мы будем обозначать замыкание G в $\text{FSym}(\Omega)$ относительно топологии поточечной сходимости и называть группу G^* *финитарным замыканием* группы G . Напомним также, что подстановка $h \in \text{Sym}(\Omega)$ называется G -*предельной*, если для любого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Omega$ найдется подстановка $g \in G$ такая, что $h|_{\Delta} = g|_{\Delta}$, т. е. $\alpha^h = \alpha^g$ для любой точки $\alpha \in \Delta$. Таким образом, группа G^* , являющаяся финитарным замыканием группы G , состоит из всех G -предельных финитарных подстановок.

В общем случае группа подстановок представима в виде поддекартова произведения своих транзитивных конститuent (см., например, [2]). Но в случае группы финитарных подстановок любой ее элемент действует неждественно лишь на конечном множестве орбит группы, и поэтому справедлива

Теорема 2.1. *Пусть $G \leq \text{FSym}(\Omega)$. Тогда G есть подпрямое произведение своих транзитивных конститuent.*

Более того, в [10] показано, что если G — замкнутая подгруппа в $\text{FSym}(\Omega)$, то, взяв вместо групповых орбит “обобщенные” орбиты, можно заменить в теореме 2.1 слово “подпрямое” на слово “прямое”. Эти прямые разложения замкнутых подгрупп из $\text{FSym}(\Omega)$ уже использовались нами ранее (см., например, [13]) и будут также применяться в данной работе. Полученный нами опыт использования результатов работы [10] показывает, что для формулировки некоторых следствий из основной теоремы в [10] желательно ввести несколько дополнительных терминов, с помощью которых удобнее описывать и вышеупомянутые “обобщенные” орбиты группы, и прямые разложения замкнутых подгрупп из $\text{FSym}(\Omega)$.

Сначала напомним исходные понятия и термины, которые использовались в [10].

Пусть G — произвольная группа. Подгруппы A и B из G мы называем *соизмеримыми*, если их пересечение $A \cap B$ является подгруппой конечного индекса как в A , так и в B .

Очевидно, что соизмеримость есть отношение эквивалентности на множестве всех подгрупп из G . Кроме того, соизмеримость есть G -инвариантное отношение, т. е. соизмеримость инвариантна относительно действия сопряжением группы G на множестве ее подгрупп.

Пусть теперь Ω — произвольное G -пространство. Точки $\alpha, \beta \in \Omega$ мы называем *соизмеримыми* (или, точнее, G -соизмеримыми), если их стабилизаторы G_α и G_β — соизмеримые подгруппы в G . Так как соизмеримость подгрупп есть G -инвариантное отношение эквивалентности, то соизмеримость точек также является G -инвариантным отношением эквивалентности на Ω .

Введем несколько терминов, которые не использовались нами ранее в [10; 11].

О п р е д е л е н и е 2.1. Классы G -соизмеримых точек мы будем называть *кластерами* G -пространства Ω или, короче, G -кластерами.

В силу G -инвариантности отношения соизмеримости точек действие G на Ω индуцирует действие G на множестве кластеров.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть Δ — произвольный G -кластер. Множество точек $\Delta^G := \bigcup_{g \in G} \Delta^g$ будем называть *кластерной G -орбитой* пространства Ω . G -пространство, совпадающее с кластерной G -орбитой, назовем *кластерно транзитивным*.

Заметим, что под кластерной G -орбитой Δ^G понимается не орбита кластера Δ в G -пространстве кластеров, а множество точек из Ω , содержащихся в орбите кластера. Отметим также, что под “обобщенными” орбитами, упоминавшимися в начале этого раздела, имелись в виду именно кластерные орбиты.

С помощью понятия кластерной орбиты мы можем переформулировать основную теорему из [10] следующим образом.

Теорема 2.2. Пусть G — замкнутая подгруппа в $\text{FSym}(\Omega)$ и $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ — множество всех кластерных G -орбит. Для каждого $i \in I$ положим $G_i := \{g \in G \mid \text{supp}(g) \subseteq \Omega_i\}$. Тогда

1. G_i — замкнутая нормальная подгруппа в G для любого $i \in I$.
2. G_i действует кластерно транзитивно на Ω_i для любого $i \in I$.
3. G есть прямое произведение подгрупп G_i , $i \in I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, первое утверждение теоремы 2.2 следует из определения подгрупп G_i , а второе утверждение следует из третьего. Поэтому только третье утверждение теоремы нуждается в доказательстве, но оно вытекает из [10, основная теорема]. \square

Заметим также, что теорема 2.2, строго говоря, не является равносильной переформулировкой основной теоремы из [10] в новых терминах. Теорема 2.2 немного слабее ее, так как компоненты прямого разложения, предложенного в [10], определялись через понятие неразложимости и поэтому ФС-компонента прямого разложения группы G в теореме 2.2 может содержать несколько компонент прямого разложения G из [10].

Итак, согласно теореме 2.2 любая финитарно замкнутая группа G финитарных подстановок представима в виде прямого произведения финитарно замкнутых кластерно транзитивных групп G_i , $i \in I$. Полученное прямое разложение группы G вызывает естественный вопрос: *что можно сказать о строении кластерно транзитивных компонент?* При рассмотрении этого вопроса удобно разбить класс всех кластерно транзитивных групповых пространств на два подкласса.

О п р е д е л е н и е 2.3. Пусть G — произвольная группа. G -пространство Ω мы будем называть *монокластерным*, если Ω есть G -кластер, т. е. все точки из Ω G -соизмеримы. Кластерно транзитивные G -пространства, содержащие по крайней мере два различных G -кластера, мы будем называть *поликластерными*.

Таким образом, любая кластерно транзитивная группа подстановок является либо поликластерной, либо монокластерной. Например, группа автоморфизмов любого связного локально конечного графа является монокластерной группой подстановок вершин этого графа, а любая бесконечная локально конечная примитивная группа подстановок дает нам пример

транзитивного группового пространства с одноточечными кластерами. Из приведенных примеров видно, что в общем случае классы монокластерных и поликластерных групп подстановок необъятны, но в случае групп финитарных подстановок ситуация иная.

Теорема 2.3 [11, основная теорема]. Пусть G — замкнутая поликластерная подгруппа из $\text{FSym}(\Omega)$, т. е. Ω содержит несоизмеримые точки и G действует транзитивно на множестве G -кластеров. Тогда G представима в виде ограниченного сплетения конечной группы подстановок и группы $\text{FSym}(\Sigma)$ для некоторого бесконечного множества Σ . В частности, множество G -кластеров бесконечно, и для любых двух различных G -кластеров Δ и Γ найдется подстановка $t \in G$ такая, что $\Delta^t = \Gamma$, $\Gamma^t = \Delta$ и $\text{supp}(t) = \Gamma \cup \Delta$.

Что касается монокластерных групп финитарных подстановок, то, в отличие от поликластерного случая, здесь, во-первых, дополнительное ограничение финитарной замкнутости не играет существенной роли при изучении их строения и, во-вторых, конструктивное описание таких групп вряд ли возможно. В работе [13], посвященной исследованию монокластерных групп финитарных подстановок, был получен ряд общих свойств таких групп, одно из которых используется в данной работе. Перед формулировкой этого свойства напомним одно определение из [13].

Пусть G — произвольная группа и $g \in G$. Класс сопряженных с g элементов называется *финитарным*, если группа подстановок, индуцируемая действием сопряжением G на классе g^G , является финитарной. Очевидно, финитарность класса g^G равносильна тому, что любой элемент из G перестановочен почти с каждым элементом, сопряженным с g .

Теорема 2.4 [13, предложение 2.4]. В монокластерной группе финитарных подстановок все классы сопряженных элементов являются финитарными.

3. Доказательство теоремы 1.1

Свойства финитарно замкнутых групп финитарных подстановок, изложенные в предыдущем разделе, подсказывают нам следующий план доказательства теоремы 1.1: сначала редуцировать общую ситуацию к случаю замкнутых подгрупп из $\text{FSym}(\Omega)$, а затем показать, что монокластерные и поликластерные группы, а также их прямые произведения являются ДС-группами. Этот план действительно удастся реализовать в виде последовательности лемм.

Лемма 3.1. Пусть $G \leq \text{FSym}(\Omega)$ и G^* — замыкание G в $\text{FSym}(\Omega)$ относительно топологии поточечной сходимости. Тогда для любых непостоянных элементов a и b из G^* найдется такое конечное подмножество $F(a, b) \subseteq G$, что

1. Любой элемент из $F(a, b)$ непостоянен с a .
2. Любой элемент из класса a^{G^*} , перестановочный с b , перестановочен также с некоторым элементом из $F(a, b)$.

Доказательство. Пусть $n = |\text{supp}(a)| + 1$. Используя определение G -предельной подстановки, последовательно выберем из G конечное множество элементов $F = F(a, b) = \{b_1, \dots, b_n\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $b_1|_{\text{supp}(a,b)} = b|_{\text{supp}(a,b)}$.
2. $b_{i+1}|_{\text{supp}(a,b,b_1,\dots,b_i)} = b|_{\text{supp}(a,b,b_1,\dots,b_i)}$.

Согласно выбору $b_i|_{\text{supp}(a)} = b|_{\text{supp}(a)}$ для любого $b_i \in F$. Следовательно, $[a, b_i b^{-1}] = 1$, и поэтому $[b_i, a] = [b, a]$. Так как по условию леммы $[b, a] \neq 1$, то и все элементы из F непостоянны с a .

Пусть теперь x — произвольный элемент из класса a^{G^*} . Заметим, что $b_i|_{\text{supp}(b,b_j)} = b|_{\text{supp}(b,b_j)}$ для любых $i > j$. Отсюда следует, что $\text{supp}(b_i b^{-1}) \cap \text{supp}(b_j b^{-1}) = \emptyset$. Если $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(b_i b^{-1}) \neq \emptyset$ для любого $b_i \in F$, то $|\text{supp}(x)| \geq n$, что противоречит неравенству $|\text{supp}(x)| =$

$|\text{supp}(a)| < n$. Значит, $\text{supp}(b_k b^{-1}) \cap \text{supp}(x) = \emptyset$ для некоторого $b_k \in F$, откуда следует равенство $[b_k b^{-1}, x] = 1$, равносильное равенству $[b_k, x] = [b, x]$. Следовательно, если x перестановочен с b , то x перестановочен также с b_k . Таким образом, множество F удовлетворяет требуемым условиям.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $G \leq \text{FSym}(\Omega)$. Если G^* является DC-группой, то G также является DC-группой.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент из G . Согласно условию леммы класс a^{G^*} является D-классом в группе G^* , т.е. найдется конечное подмножество $B \subseteq G^*$, состоящее из элементов, неперестановочных с a , такое, что почти любой элемент из a^{G^*} перестановочен с некоторым элементом из B .

Воспользуемся леммой 3.1 и для каждого $b \in B$ выберем конечное подмножество $F(a, b) \subseteq G$, удовлетворяющее заключению леммы 3.1. Согласно выбору конечное множество $F = \bigcup_{b \in B} F(a, b)$, во-первых, содержится в G , во-вторых, состоит из элементов неперестановочных с a , и, в-третьих, почти каждый элемент из a^{G^*} перестановочен с некоторым элементом из F . Очевидно, из включения $G \leq G^*$ следует включение $a^G \subseteq a^{G^*}$, и поэтому почти каждый элемент из a^G перестановочен с некоторым элементом из F . Последнее означает, что a^G — D-класс в группе G и в силу произвольного выбора элемента a группа G является DC-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Монокластерная группа финитарных подстановок является DC-группой.*

Доказательство. Пусть G — монокластерная группа финитарных подстановок. Согласно теореме 2.4 все классы сопряженных элементов в G являются финитарными. Легко понять, что любой финитарный класс является D-классом. Действительно, если a^G — бесконечный класс, то a — нецентральный элемент в группе G и, взяв множество F , состоящее из одного элемента, неперестановочного с a , мы получим конечное подмножество $F \subseteq G$, требуемое в определении D-класса. Таким образом, G является DC-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Поликластерная группа финитарных подстановок является DC-группой.*

Доказательство. Пусть G — поликластерная группа финитарных подстановок, т.е. найдутся по крайней мере два различных G -кластера, и G действует транзитивно на множестве всех кластеров.

Так как единичный класс в любой группе является D-классом, то достаточно проверить D-условие только для неединичных классов сопряженных элементов.

Пусть g — произвольный неединичный элемент из G и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — все кластеры, содержащие хотя бы одну точку из $\text{supp}(g)$. В силу бесконечности множества всех кластеров среди кластеров, непересекающихся с $\text{supp}(g)$, можно выбрать n различных кластеров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

Согласно теореме 2.3 для каждого $i = 1, \dots, n$ найдется подстановка $t_i \in G$, переставляющая кластеры Δ_i и Γ_i , причем $\text{supp}(t_i) = \Delta_i \cup \Gamma_i$. Так как $\text{supp}(g^{t_i})$ содержит точку из $\Gamma_i = \Delta_i^{t_i}$, то $[g, t_i] \neq 1$ для произвольного $i = 1, \dots, n$.

Покажем теперь, что множество $S = \{h \in g^G \mid [h, t_j] \neq 1 \text{ для } i = 1, \dots, n\}$ конечно. Действительно, возьмем произвольную подстановку $h \in S$. Так как h неперестановочна с t_i , то $\text{supp}(h) \cap \text{supp}(t_i) \neq \emptyset$ и поэтому $\text{supp}(h)$ содержит хотя бы одну точку из Δ_i или из Γ_i для каждого i . Заметим, что число кластеров, пересекающихся с $\text{supp}(h)$, не зависит от выбора h в классе g^G и равно n . Значит, $\text{supp}(h) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{supp}(t_i)$, откуда следует конечность множества S .

Таким образом, D-условие для класса g^G выполнено и в силу произвольного выбора неединичного элемента g группа G является DC-группой.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Прямое произведение любого семейства DC-групп является DC-группой.*

Доказательство леммы мы будем проводить, используя внутреннюю версию прямого произведения, т.е. считать, что группа G разложима в прямое произведение своих DC-подгрупп G_i , $i \in I$.

Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и покажем, что класс $C := g^G$ удовлетворяет D-условию. Будем сразу предполагать, что класс C бесконечен, так как любой конечный класс удовлетворяет D-условию.

Из прямого разложения $G = \prod_{i \in I} G_i$ следует, что элемент g представим в виде произведения $g = \prod_{i \in J} g_i$ элементов $g_i \in G_i$ для некоторого конечного подмножества $J \subseteq I$. Положим $C_i = g_i^{G_i}$ для каждого $i \in J$. Понятно, что $C = \prod_{i \in J} C_i$ и поэтому класс C конечен тогда и только тогда, когда все классы C_i для $i \in J$ конечны. Так как C — бесконечный класс, то некоторые из классов C_i бесконечны. Пусть K — множество всех $i \in J$, для которых классы C_i , $i \in J$, бесконечны. Согласно D-условию для каждого $i \in K$ найдется конечное непустое подмножество $F_i \subseteq G_i$ такое, что множество L_i , состоящее из всех элементов из C_i , неперестановочных ни с одним элементом из F_i , конечно и непусто.

Заметим, что для любых $x \in G$, $i \in K$ и $f \in F_i$ справедливы равенства $[g^x, f] = [\prod_{i \in J} g_i^x, f] = [g_i^x, f]$. Поэтому элемент g^x неперестановочен ни с одним элементом из $F = \bigcup_{i \in K} F_i$ тогда и только тогда, когда $g_i^x \in L_i$ для любого $i \in K$. Следовательно, множество всех элементов из класса g^G , неперестановочных ни с одним элементом из F , конечно и непусто.

Лемма доказана.

Лемма 3.5 завершает доказательство теоремы 1.1. Действительно, из лемм 3.3–3.5 следует, что прямые произведения монокластерных и поликластерных групп финитарных подстановок являются DC-группами. Отсюда согласно теореме 2.2 вытекает, что любая финитарно замкнутая группа финитарных подстановок является DC-группой. Наконец, воспользовавшись леммой 3.2, мы получаем требуемое заключение для произвольных групп финитарных подстановок.

4. Наислабейшие хаусдорфовы групповые топологии

Согласно следствию 1.6 централизаторная топология на группе G финитарных подстановок с тривиальным центром является наислабейшей хаусдорфовой топологией, и поэтому G есть a -минимальная группа. Насколько широк класс a -минимальных групп — основной вопрос, который будет рассматриваться в данном разделе работы.

Нетрудно понять, что изучение a -минимальных групп тесно связано с исследованием способов построения групповых топологий. Один из самых простых способов состоит в задании на группе подстановок $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ топологии поточечной сходимости, в которой поточечные стабилизаторы $G_{(\Delta)}$ конечных подмножеств $\Delta \subseteq \Omega$ образуют базис окрестностей единицы. Конечно, эта групповая топология может быть определена и без обращения к подстановочным представлениям группы G . Для этого достаточно взять в G произвольное семейство подгрупп \mathcal{L} , замкнутое относительно сопряжения, и объявить базой окрестностей единицы пересечения всех конечных подмножеств из \mathcal{L} . Если пересечение всех подгрупп из \mathcal{L} есть единица, то определенная таким способом групповая топология на G является хаусдорфовой.

Указанный способ построения групповых топологий позволяет получить следующее свойство a -минимальных простых групп.

Лемма 4.1. *Если G — a -минимальная простая группа, то для любых собственных подгрупп H_1 и H_2 из G найдется конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что $G \neq (\bigcap_{x \in F} H_1^x) \cdot (\bigcap_{x \in F} H_2^x)$.*

Доказательство. Взяв в качестве базы окрестностей 1 пересечения всех конечных семейств подгрупп, сопряженных с H_1 и H_2 , определим на G две групповые топологии τ_1

и τ_2 соответственно. Так как G — простая группа, то $\bigcap_{x \in G} H_i^x = 1$, $i = 1, 2$, и, значит, τ_1 и τ_2 — хаусдорфовы топологии. Согласно нашему предположению G имеет наислабейшую хаусдорфову групповую топологию $\tau \subseteq \tau_1 \cap \tau_2$. В топологии τ выберем окрестность единицы W такую, что $W \cdot W \neq G$. Так как топология τ слабее τ_1 и τ_2 , окрестность W содержит некоторые окрестности единицы в топологиях τ_1 и τ_2 . Следовательно, найдутся конечные подмножества F_1 и F_2 , такие, что $\bigcap_{x \in F_i} H_i^x \subseteq W$ для $i = 1, 2$. Полагая $F = F_1 \cup F_2$, мы получаем требуемое конечное множество F .

Лемма доказана.

Полученное свойство простых a -минимальных групп позволяет применить к исследованию a -минимальных групп некоторые результаты из [7].

Напомним, что подгруппа H из G называется *инертной*, если индекс $|H : H \cap H^g|$ конечен для любого $g \in G$. Также будем говорить, что G *инертно факторизуется* подгруппами H_1 и H_2 , если H_1 и H_2 — финитно аппроксимируемые подгруппы в G и для любого конечного подмножества $F \subseteq G$ имеем $G = \left(\bigcap_{x \in F} H_1^x\right) \cdot \left(\bigcap_{x \in F} H_2^x\right)$.

Лемма 4.2 [7, следствие 1.9]. *Если счетная локально конечная простая группа G не допускает инертной факторизации, то G имеет точное финитарное линейное представление.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.6. Очевидно, из леммы 4.1 следует, что неабелева a -минимальная простая группа не допускает инертной факторизации. Поэтому теорема 1.6 есть непосредственное следствие лемм 4.1 и 4.2.

Лемма доказана.

Известно [4, теорема 1.3], что бесконечные простые локально конечные группы финитарных линейных преобразований исчерпываются конечномерными группами лиева типа, конечномерными группами классического типа и знакопеременными группами финитарных подстановок. Так как знакопеременные группы согласно следствию 1.6 являются a -минимальными, то для окончательного решения вопроса о строении счетных локально конечных простых a -минимальных групп осталось рассмотреть лишь конечномерные группы лиева типа и бесконечномерные группы классического типа, определенные над локально конечными полями.

Обратимся теперь к теореме 1.3. Основой ее доказательства является следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть H — DC-группа с тривиальным центром и $\text{Inn}(H) \leq G \leq \overline{\text{Inn}}(H)$. Тогда G — a -минимальная группа. (Здесь, $\text{Inn}(H)$ — группа внутренних автоморфизмов группы H , а $\overline{\text{Inn}}(H)$ — группа локально внутренних автоморфизмов группы H).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $Z(H) = 1$, то H изоморфна $\text{Inn}(H)$ и ввиду следствия 1.4 каждый класс сопряженных элементов в $\text{Inn}(H)$ является безусловно дискретным. Из включения $G \leq \overline{\text{Inn}}(H)$ следует, что любой класс сопряженных элементов g^G в группе G для $g \in \text{Inn}(H)$ является классом сопряженных элементов в $\text{Inn}(H)$, а так как свойство безусловной дискретности сохраняется при переходе к надгруппам, то g^G является безусловно дискретным классом в G для любого $g \in \text{Inn}(H)$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $C_G(g)$ — безусловно открытая подгруппа для любого $g \in \text{Inn}(H)$. Заметим, наконец, что $C_G(\text{Inn}(H)) = 1$. Значит, семейство централизаторов $C_G(F)$, где F пробегает все конечные подмножества из $\text{Inn}(H)$, образует базис окрестностей единицы хаусдорфовой групповой топологии и в силу безусловной открытости централизаторов $C_G(F)$ эта топология является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.3. Пусть $H \leq \text{FSym}(\Omega)$, \overline{H} — замыкание группы H в $\text{Sym}(\Omega)$ относительно топологии поточечной сходимости, $Z(\overline{H}) = 1$ и $H \leq G \leq \overline{H}$.

Сначала заметим, что согласно [12, утверждение 3.8] $Z(\overline{H}) = C_{\overline{H}}(H)$, а так как $Z(\overline{H}) = 1$, то $C_G(H) = 1$. Воспользуемся теперь утверждением 5.1 из [12], из которого следует, что $H \triangleleft G$ и

любой элемент из G сопряжением индуцирует локально внутренний автоморфизм H . Значит, группа G вложима в $\text{Inn}(H)$, и применение леммы 4.3 завершает доказательство.

Теорема доказана.

5. Топологические характеристики бесконечных знакопеременных групп

Из теоремы 1.1 и топологических следствий D-условия, приведенных в первом разделе, вытекают различные свойства групп финитарных подстановок, и в частности знакопеременных групп. В какой степени эти свойства характеризуют знакопеременные группы в классе всех локально конечных простых групп? При исследовании этого вопроса мы будем пользоваться другими характеристиками бесконечных знакопеременных групп, полученными нами ранее в [8].

Лемма 5.1 [8, теорема 1.4]. *Для бесконечной локально конечной простой группы G следующие условия эквивалентны:*

1. G — знакопеременная группа.
2. Любая счетная финитно аппроксимируемая подгруппа из G является локально нормальной.

Лемма 5.2 [8, теорема 1.6]. *Для счетной локально конечной простой группы G следующие условия эквивалентны:*

1. G — знакопеременная группа или группа лиева типа.
2. Любая собственная инертная подгруппа из G локально нормальна.

Конечно, условие 2 из леммы 5.2 не позволяет выделить знакопеременные группы в классе счетных локально конечных простых групп. Применяя лемму 5.2, приходится использовать дополнительные средства для исключения возможности для G быть группой лиева типа. В нашем случае таким дополнительным средством является результат, казалось бы, совсем не подходящий для этой роли, так как в нем утверждается существование не дискретной хаусдорфовой групповой топологии на любой счетной локально конечной группе. Но дело в том, что бесконечные знакопеременные группы могут быть снабжены не дискретными неархимедовыми топологиями, т. е. топологиями, у которых базис окрестностей единицы состоит из подгрупп, в то время как на группах лиева типа нельзя определить не дискретную неархимедову хаусдорфову групповую топологию, что и позволяет исключать случай групп лиева типа с помощью следующего утверждения.

Лемма 5.3 [9, теорема 1]. *Любая счетная локально конечная группа допускает не дискретную хаусдорфову групповую топологию.*

Помимо лемм 5.1–5.3 нам потребуется еще один вспомогательный результат общего характера.

Лемма 5.4. *Любая счетная подгруппа простой группы G содержится в счетной простой подгруппе из G .*

Доказательство. Так как G — простая группа, то нормальное замыкание любого неединичного элемента из G совпадает с G , и поэтому для любой пары (x, y) неединичных элементов из G найдется конечное подмножество $S(x, y) \subseteq G$ такое, что $y \in \langle s^{-1}xs \mid s \in S(x, y) \rangle$.

Пусть H — произвольная счетная подгруппа из G . Индуктивно определим возрастающую последовательность счетных подгрупп $H = H_1 \leq H_2 \leq \dots$, полагая

$$H_{n+1} = \langle H_n, S(x, y) \mid x, y \in H_n^\# \rangle,$$

и рассмотрим ее объединение $H^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Подгруппа H^* является, очевидно, счетной подгруппой, содержащей H . Допустим, что H^* — непростая группа. В этом случае найдется пара (a, b) неединичных элементов из H^* такая, что нормальное замыкание элемента a в H^* не содержит элемент b . Согласно построению подгруппы H^* в ней найдется подгруппа H_n , содержащая элементы a и b . Следовательно, $S(a, b) \subseteq H_{n+1} \leq H^*$ и $b \in \langle s^{-1}as \mid s \in S(a, b) \rangle$, т. е. элемент b содержится в нормальном замыкании элемента a в подгруппе H_{n+1} и тем более в нормальном замыкании элемента a в подгруппе H^* . Полученное противоречие показывает, что H^* — простая группа.

Лемма доказана.

Первую характеристику знакопеременных групп нам удалось получить лишь при наложении дополнительных ограничений на мощность группы. Мы посчитали уместным собрать в этой характеристической теореме такие свойства знакопеременных групп, которые, несмотря на внешнее различие, имеют одинаковую природу. В результате мы получили весьма большой список характеристических свойств, который в урезанном виде был дан ранее в теореме 1.5.

Теорема 5.1. *Для счетной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны:*

- (1) G — знакопеременная группа.
- (2) G — DC-группа.
- (3) G содержит хотя бы один неединичный D-класс.
- (4) Все классы сопряженных элементов в G безусловно дискретны.
- (5) G содержит хотя бы один неединичный безусловно дискретный класс сопряженных элементов.
- (6) Централлизаторы всех элементов из G безусловно открыты.
- (7) Централлизатор хотя бы одного неединичного элемента из G безусловно открыт.
- (8) Централлизаторная топология на G является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.
- (9) Централлизаторы всех элементов сильно скованы в G .
- (10) Централлизатор хотя бы одного неединичного элемента сильно скован.

Доказательство. Сначала мы укажем те связи между перечисленными десятью условиями, которые непосредственно следуют из их формулировок.

Во-первых, напомним, что класс g^G является D-классом тогда и только тогда, когда $C_G(g)$ есть сильно скованная подгруппа в G . Поэтому условия (9) и (10) являются переформулировками условий (2) и (3) соответственно в терминах сильно скованных подгрупп.

Во-вторых, условия (3), (5) и (7) являются частными случаями условий (2), (4) и (6) соответственно.

В-третьих, импликации $(2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6)$ и $(3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7)$, представляющие собой последовательный переход от D-условия к безусловной дискретности классов и, далее, к безусловной открытости централизаторов, пояснялись в первом разделе (см. следствие 1.4).

Обратимся теперь к условиям (6), (7) и (8). Заметим, что для групп с тривиальным центром условия (6) и (8) эквивалентны. Более того, эти три условия равносильны для любой простой неабелевой группы G . Действительно, пусть $g \in G^\#$ и $C_G(g)$ — безусловно открытая в G подгруппа. В этом случае $C_G(x)$ для любого $x \in g^G$ также является безусловно открытой подгруппой и, значит, $\bigcap_{x \in S} C_G(x)$ — безусловно открытая подгруппа для любого конечного подмножества $S \subseteq g^G$. Так как G — простая группа, то $\langle g^G \rangle = G$, и поэтому для любого конечного подмножества $F \subseteq G$ найдется конечное подмножество $S \subseteq g^G$ такое, что $F \subseteq \langle S \rangle$. Следовательно, $C_G(F)$ содержит $C_G(S)$ и, значит, $C_G(F)$ также является безусловно открытой подгруппой. Последнее для групп с тривиальным центром означает, что централизаторная топология является наислабейшей хаусдорфовой групповой топологией.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нам достаточно установить справедливость двух импликаций: $(1) \Rightarrow (2)$ и $(6) \Rightarrow (1)$. Первая из этих двух импликаций вытекает

из теоремы 1.1. Обратимся к импликации (6) \Rightarrow (1). Заметим, что ранее мы нигде не предполагали счетность группы G . Только сейчас мы будем использовать это ограничение.

Итак, пусть G — счетная простая локально конечная группа и централизаторы всех элементов из G безусловно открыты. Также пусть H — произвольная собственная инертная подгруппа в G . Определим на G групповую топологию с базисом окрестностей единицы, состоящим из пересечений $\bigcap_{x \in F} H^x$, где F пробегает все конечные подмножества из G . Так как $\bigcap_{x \in G} H^x = 1$, то эта топология является хаусдорфовой и в силу того что централизаторы элементов из G безусловно открыты, для любого $g \in G$ найдется конечное подмножество $F \subseteq G$ такое, что $\bigcap_{x \in F} H^x \leq C_G(g)$. Согласно определению инертной подгруппы пересечение $\bigcap_{x \in F} H^x$ соизмеримо с H , и поэтому индекс $|H : C_H(g)|$ конечен. Значит, H — локально нормальная группа и мы можем воспользоваться леммой 5.2, в силу которой G есть либо знакопеременная группа, либо группа лиева типа.

Если G — группа лиева типа, то $C_G(F) = 1$ для некоторого конечного подмножества $F \subseteq G$ и, так как централизаторы конечных подмножеств безусловно открыты, единичная подгруппа является безусловно открытой в G . Последнее означает, что единственной хаусдорфовой групповой топологией на G является дискретная топология, а это противоречит лемме 5.3. Следовательно, случай группы лиева типа невозможен и G — знакопеременная группа.

Теорема доказана.

К сожалению, полностью доказать аналог теоремы 5.1 для бесконечных групп произвольной мощности нам не удалось, но некоторые из свойств, указанных в теореме 5.1, остаются характеристическими для бесконечных знакопеременных групп любой мощности.

Теорема 5.2. *Для бесконечной локально конечной простой группы G следующие условия равносильны:*

- (1) G — знакопеременная группа.
- (2) G — DC-группа.
- (3) G содержит хотя бы один неединичный D-класс.
- (4) Централизаторы всех элементов сильно скованы в G .
- (5) Централизатор хотя бы одного неединичного элемента сильно скован.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, нам достаточно доказать лишь одну импликацию (3) \Rightarrow (1), так как импликации (1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (5) обсуждались в теореме 5.1.

Итак, пусть G — бесконечная простая локально конечная группа и g^G — неединичный D-класс, т. е. нашлось конечное подмножество $F \subseteq G$, состоящее из элементов непостоянных с g , такое, что почти каждый элемент из g^G перестановочен хотя бы с одним элементом из F .

Для доказательства условия (1) мы используем характеристику знакопеременных групп, данную в лемме 5.1. Пусть R — произвольная счетная финитно аппроксимируемая подгруппа из G и $H = \langle R, g, F \rangle$. Счетная подгруппа H согласно лемме 5.4 содержится в счетной простой подгруппе $K \leq G$. Так как $F \subseteq K$, то класс g^K удовлетворяет D-условию, т. е. является неединичным D-классом в счетной простой группе K . Воспользовавшись теоремой 5.1, получаем, что K — знакопеременная группа и, в силу леммы 5.1, подгруппа R из K должна быть локально нормальной группой. Таким образом, любая счетная финитно аппроксимируемая подгруппа из G локально нормальна. Снова воспользовавшись леммой 5.1, получаем требуемое заключение: G — знакопеременная группа.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Banakh T., Guran I., Protasov I.** Algebraically determined topologies on permutation groups // Topology Appl. 2012. Vol. 159, no. 9. P. 2258–2268.
2. **Cameron P.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts № 45.)

3. **Dikranjan D., Megrelishvili M.** Minimality conditions in topological groups // Recent Progress in General Topology III/ eds. K. P. Hart, Jan Mill van, P. Simon. Berlin: Springer Verlag, 2013. P. 229–329.
4. **Hall J.I.** Locally finite simple groups of finitary linear transformations // Proc. NATO Advanced Study Institute on Finite and Locally Finite Groups. Istanbul, 1994. P. 147–188.
5. **Hartley B., Zalesskii A.E.** Confined subgroups of simple locally finite groups and ideals of their group rings // J. London Math. Soc. 1997. Vol. 55, no. 2. P. 210–230.
6. **Zalesskii A.E.** Group rings of simple locally finite groups // Proc. NATO Advanced Study Institute on Finite and Locally Finite Groups. Istanbul, 1994. P. 219–246.
7. **Беляев В.В.** Локально конечные простые группы, представимые в виде произведения двух инертных подгрупп // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 4. С. 360–368.
8. **Беляев В.В.** Локальные характеристики бесконечных знакопеременных групп и групп лиевского типа // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 4. С. 369–390.
9. **Беляев В.В.** Топологизация счетных локально конечных групп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 6. С. 613–618.
10. **Беляев В.В.** Прямые суммы финитарных групп подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 45–49.
11. **Беляев В.В.** Сплетения групп финитарных подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 38–43.
12. **Беляев В.В.** Группы финитарных подстановок и топология поточечной сходимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 47–55.
13. **Беляев В.В.** Группы с финитарными классами сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 45–61.
14. **Марков А.А.** О безусловно замкнутых множествах // Мат. сб. 1946. Т. 18, № 1. С. 3–26.

Беляев Виссарион Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий научн. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: v.v.belyaev@list.ru

Поступила 1.04.2014

УДК 512.556

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ХЬЮИТТОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕТКАМИ ПОДАЛГЕБР ПОЛУПОЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С МАХ-СЛОЖЕНИЕМ¹

Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров

Рассматривается решетка $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ подалгебр полуполя $U^\vee(X)$ всех непрерывных положительных функций на топологическом пространстве X . Топологическое пространство называется хьюиттовским, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени числовой прямой \mathbb{R} . Основным результатом работы является доказательство определяемости любого хьюиттского пространства X решеткой $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Ключевые слова: полуполе непрерывных функций, подалгебра, решетка подалгебр, изоморфизм, хьюиттовское пространство, мах-сложение.

E. M. Vechtomov, V. V. Sidorov. Definability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras of semifields of continuous positive functions with max-plus.

The lattice $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ of subalgebras of the semifield $U^\vee(X)$ of all continuous positive functions defined on a topological space X is considered. A topological space is said to be a Hewitt space if it is homeomorphic to a closed subspace of a Tychonoff power of the real line \mathbb{R} . The main result of the paper is the proof of the fact that any Hewitt space X is determined by the lattice $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Keywords: semifield of continuous functions, subalgebra, lattice of subalgebras, isomorphism, Hewitt space, max-addition.

Введение

Прежде чем сформулировать основной результат работы и перейти к его доказательству, введем ряд определений и обозначений.

Под *полукольцом* мы понимаем алгебраическую систему $\langle S, +, \cdot, 0 \rangle$, в которой $\langle S, +, 0 \rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения и $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ для всех $s \in S$. Коммутативное полукольцо, отличное от кольца, каждый ненулевой элемент которого обратим, называется *полуполем с нулем*. Легко показать, что в любом полуполе S с нулем сумма ненулевых элементов отлична от 0, поэтому множество $S \setminus \{0\}$ с теми же операциями сложения и умножения образует алгебру, которую будем называть *полуполем*.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ и \mathbb{P} — множества всех действительных, неотрицательных действительных и положительных действительных чисел соответственно. Множество всех непрерывных положительных действительныхзначных функций на X с поточечными операциями *мах-сложения* \vee , где

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ для всех } x \in X,$$

и умножения функций образует полуполе, обозначаемое через $U^\vee(X)$.

Подалгеброй полуполя $U^\vee(X)$ назовем произвольное его подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из \mathbb{P} . Множество всех подалгебр полуполя $U^\vee(X)$ с добавленным пустым множеством относительно включения \subseteq (символ \subset означает у нас строгое включение) образует решетку $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект 1.1375.2014/К).

Под *окрестностью точки* топологического пространства X будем понимать любое содержащее ее открытое множество. Через \overline{F} будем обозначать замыкание множества $F \subseteq X$, а через F° — его внутренность. Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \in X \setminus F$ найдется непрерывная действительзначная функция λ или, что равносильно, $\lambda \in U^\vee(X)$, такая, что $\lambda(F) = \{a\}$ и $\lambda(x) = b$, где $a \neq b$. Тихоновские пространства — это, с точностью до гомеоморфизма, подпространства тихоновских степеней пространства \mathbb{R} . Топологическое пространство X называется *хьюиттовским* (или *вещественно полным*, или *функционально замкнутым*), если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства \mathbb{R} .

Целью статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Любое хьюиттовское пространство X определяется решеткой $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.*

Уточним, что значит “топологическое пространство определяется ассоциированной с ним алгебраической системой”. Говорят, что пространство X из класса K топологических пространств определяется алгебраической системой $A(X)$, если для любого пространства $Y \in K$ изоморфизм систем $A(X)$ и $A(Y)$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y .

Одной из первых теорем определяемости служит результат И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [8] об определяемости компактов X кольцом $C(X)$ непрерывных действительзначных функций, заданных на X . Этот результат послужил источником и образцом для многочисленных обобщений и углублений как в сторону расширения класса определяемых пространств с класса компактов, так и в сторону ослабления структуры кольца $C(X)$ и привлечения новых функционально-алгебраических объектов $A(X)$, связанных с X (см. обзоры [2; 3]).

В 1997 г. Е. М. Вечтомовым [4] была доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X решеткой $\mathbb{A}(C(X))$ подалгебр кольца $C(X)$, а в 2010 г. он и В. В. Сидоров [5] перенесли этот результат для решеток подалгебр $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ непрерывных неотрицательных функций с обычным сложением $+$ и мах-сложением \vee соответственно.

Тесным образом с полукольцами $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ связаны полуполя $U(X)$ и $U^\vee(X)$, образованные подмножествами положительных функций. В связи с развитием их теории возникла гипотеза о том, что всякое хьюиттовское пространство X определяется каждой из решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Таким образом, этой работой мы продолжаем исследование [5] и доказываем гипотезу для решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Случай $\mathbb{A}(U(X))$ пока открыт.

Отметим, что ограничение хьюиттовскими пространствами при решении задач определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций совершенно естественно и мотивируется тем, что для любого топологического пространства X найдутся [11, теоремы 3.9 и 8.7] тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца и полуполя (как с обычным сложением, так и с мах-сложением).

Приступим к доказательству теоремы. Вначале разберем случай компактов, после чего сведем к нему общий случай хьюиттовских пространств. Ключевую роль в рассуждениях будут играть однопорожденные подалгебры.

Все рассматриваемые далее пространства считаем тихоновскими.

1. Однопорожденные подалгебры

Наименьшую подалгебру A полуполя $U^\vee(X)$, содержащую функцию f , назовем *однопорожденной* и обозначим через $\langle f \rangle$. Она состоит из всевозможных ненулевых многочленов из $\mathbb{R}^+[f]$ без свободного члена (с операциями мах-сложения и умножения). Через $[f]$ обозначим подалгебру $\langle f \rangle \vee \mathbb{P}$, которая образована ненулевыми многочленами из $\mathbb{R}^+[f]$. Для обозначения коэффициентов многочленов будем использовать (возможно) индексированные буквы a, b и c .

Лемма 1. Для произвольной функции $f \in U^\vee(X)$, для которой $1 \in \text{Im } f$, имеем

$$f = a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n \implies a_1 = 1 \text{ или } f = 1.$$

Доказательство. Поскольку $1 \in \text{Im } f$, $a_1 \vee \dots \vee a_n = 1$. Значит, если $a_1 < 1$, то $(a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n)(x) = f(x)$ равносильно $f(x) = 1$. \square

Будем говорить, что в решетке имеется *решеточная характеристика* некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки.

Докажем, что в $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ имеется решеточная характеристика подалгебры \mathbb{P} .

Предложение 1. Подалгебра \mathbb{P} служит единственным атомом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Доказательство. Очевидно, в подалгебре \mathbb{P} нет собственных подалгебр. Поэтому она является атомом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Далее, если A — минимальная подалгебра и $f \in A$, то $\langle f \rangle = A = \langle f^2 \rangle$. Поэтому функция f имеет вид $a_2 f^2 \vee \dots \vee a_{2n} f^{2n}$ (можно считать, что $1 \in \text{Im } f$). Тогда $f = 1$ по лемме 1. Значит, $A = \mathbb{P}$. \square

Элемент A решетки называется \vee -*неразложимым*, если из $A = B \vee C$ следует $A = B$ или $A = C$. Решетка называется *полной*, если любое непустое подмножество ее элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Элемент A полной решетки называется *компактным*, если для любого непустого семейства $(A_i)_{i \in J}$ ее элементов $A \leq \bigvee_{j \in J} A_j$ влечет $A \leq \bigvee_{i \in I} A_i$ для некоторого конечного подмножества $I \subseteq J$.

Поскольку в решетке $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ есть наибольший элемент (полуполе $U^\vee(X)$) и всякое непустое ее подмножество имеет точную нижнюю грань (пересечение любого числа подалгебр полуполя $U^\vee(X)$ будет подалгеброй или пусто), согласно [9, теорема 19] она является полной.

Дадим решеточную характеристику однопорожденных подалгебр.

Предложение 2. Однопорожжденные подалгебры полуполя $U^\vee(X)$ — это в точности \vee -неразложимые компактные элементы решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Доказательство. Установим \vee -неразложимость однопорожденных подалгебр.

Допустим, это не так и нашлась подалгебра $\langle f \rangle$ такая, что $\langle f \rangle = A \vee B$ для некоторых подалгебр $A, B \subset \langle f \rangle$. Ясно, что $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$. Поэтому можно считать, что $|\text{Im } f| \geq 2$ и $1 \in \text{Im } f$.

Функция f как элемент подалгебры $A \vee B$ имеет вид

$$f = P_0(f) \vee Q_0(f) \vee P_1(f)Q_1(f) \vee \dots \vee P_m(f)Q_m(f) = a_1 f \vee a_2 f^2 \vee \dots, \quad (1.1)$$

где $P_i \in A$ и $Q_i \in B$ — многочлены от f без свободного члена. Произведение двух многочленов без свободного члена является нулевым многочленом или многочленом, младшая степень которого не меньше второй. Следовательно, $P_1(f)Q_1(f) \vee \dots \vee P_m(f)Q_m(f) = b_2 f^2 \vee b_3 f^3 \vee \dots$. Кроме того, по лемме 1 в равенстве (1.1) $a_1 = 1$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$P_0 = f \vee c_2 f^2 \vee \dots \vee c_n f^n.$$

Далее, поскольку $P_0 \in A$ и $A \subset \langle f \rangle$, то $P_0 \neq f$. Отсюда $P_0(f(x)) > f(x)$ в некоторой точке $x \in X$, что противоречит (1.1). Значит, однопорожжденные подалгебры \vee -неразложимы. Докажем их компактность.

Пусть $\langle f \rangle \subseteq \bigvee_{j \in J} A_j$ для некоторого семейства подалгебр $\{A_j\}_{j \in J}$. Тогда $f \in A_{j_0}$ для некоторой подалгебры A_{j_0} , $j_0 \in J$. Отсюда $\langle f \rangle \subseteq A_{j_0}$, т. е. подалгебра $\langle f \rangle$ компактна.

Обратно, пусть подалгебра A — \vee -неразложимый компактный элемент решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Поскольку $A = \bigvee_{f \in A} \langle f \rangle$, в силу компактности A

$$A = \langle f_1 \rangle \vee \dots \vee \langle f_n \rangle$$

для некоторых $f_1, \dots, f_n \in A$. Без ограничения общности можно считать, что $n \in \mathbb{N}$ принимает наименьшее возможное значение. Тогда в предположении $n \geq 2$ получаем

$$A = \langle f_1 \rangle \vee (\langle f_2 \rangle \vee \dots \vee \langle f_n \rangle).$$

Отсюда $A = \langle f_1 \rangle$ или $A = \langle f_2 \rangle \vee \dots \vee \langle f_n \rangle$ в силу \vee -неразложимости A , что противоречит минимальности n . Значит, $n = 1$, т. е. подалгебра A однопорожденная. \square

Поскольку $[f] = \langle f \rangle \vee \mathbb{P}$, из предложений 1 и 2 получаем

Следствие 1. *Имеется решеточная характеристика подалгебр $[f]$, где $f \in U^\vee(X)$.*

2. Доказательство теоремы для компактов

В этом разделе все пространства считаем компактными.

Для произвольной функции $f \in U^\vee(X)$ через $\text{Max } f$ и $\text{Min } f$ обозначим замкнутые подмножества компакта X , на которых функция $f \in U^\vee(X)$ принимает свое наибольшее $\text{max } f$ и наименьшее $\text{min } f$ значения соответственно. Функцию f будем называть *нормированной*, если $\text{max } f = 1$. Ясно, что если функции f и $g \in [f]$ отличны от констант, то $\text{Max } f = \text{Max } g$, поскольку функция g имеет вид $a_0 \vee a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n$ и $\text{Max } a_i f^i = \text{Max } f$ при $a_i > 0, i \geq 1$.

Следующая лемма служит основой всех дальнейших рассуждений.

Лемма 2. *Для произвольных подалгебр $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$, отличных от \mathbb{P} , имеется решеточная характеристика равенства $\text{Max } f \cup \text{Max } g = X$, а именно*

$$\text{Max } f \cup \text{Max } g = X \iff \mathbb{P} \subseteq \langle u \rangle \vee \langle v \rangle$$

для всех $\langle u \rangle \subseteq [f]$, $\langle v \rangle \subseteq [g]$.

Доказательство. Функции f, g, u и v будем считать нормированными.

Пусть $\langle u \rangle \subseteq [f]$, $\langle v \rangle \subseteq [g]$ и $\text{Max } f \cup \text{Max } g = X$. Если $u = 1$ или $v = 1$, то $1 = u \vee v$. Иначе $\text{Max } u = \text{Max } f$ и $\text{Max } v = \text{Max } g$, а потому $1 = u \vee v$. В любом случае $\mathbb{P} \subseteq \langle u \rangle \vee \langle v \rangle$.

Обратно, рассуждая от противного, выберем точку $x \in X \setminus (\text{Max } f \cup \text{Max } g)$ и положим $u = f \vee r$ и $v = g \vee r$, где $r = f(x) \vee g(x)$. Ясно, что функции $u \in [f]$ и $v \in [g]$ нормированы и отличны от констант. По условию $1 \in \langle f \vee r \rangle \vee \langle g \vee r \rangle$, т. е. 1 представима в виде

$$1 = a_{10}(f \vee r) \vee a_{01}(g \vee r) \vee \dots \vee a_{mn}(f \vee r)^m (g \vee r)^n. \quad (2.2)$$

В точке x равенство (2.2) принимает вид $1 = a_{ij}r^{i+j}$ для некоторых i, j , где, для определенности, $i \geq 1$. Тогда для любой точки $y \in \text{Max } f$ имеем

$$a_{ij}(1 \vee r)^i (g(y) \vee r)^j \geq a_{ij}r^j = 1/r^i > 1,$$

что противоречит (2.2). Значит, такую точку x выбрать нельзя, т. е. $\text{Max } f \cup \text{Max } g = X$. \square

Отметим, что в лемме 2 существенным образом используется наличие решеточной характеристики подалгебры \mathbb{P} и подалгебр вида $\langle f \rangle$ или $[f]$ (см. предложения 1 и 2 и следствие 1). Вообще, ситуация, когда для решеточной характеристики какого-либо свойства используются свойства, решеточная характеристика которых была получена ранее, будет встречаться неоднократно.

Лемма 3. *Для произвольных подалгебр $\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_n \rangle$, отличных от \mathbb{P} , имеем*

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Max}^\circ f_i \neq \emptyset \iff \text{Max } f_i \cup \text{Max } g = X$$

для некоторой подалгебры $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$ и всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $V = \bigcap_{i=1}^n \text{Max}^\circ f_i \neq \emptyset$, где $\text{Max}^\circ f_i$ — внутренность множества $\text{Max} f_i$. Зафиксируем точку $x \in V$. После чего воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем функцию $g \in U^\vee(X)$ такую, что $g = 1$ на $X \setminus V$ и $g(x) = 1/2$. Тогда $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$ и $\text{Max} f_i \cup \text{Max} g = X$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Обратно, поскольку $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$ и $\text{Max} f_i \cup \text{Max} g = X$ для всех $i = 1, \dots, n$, открытое множество $X \setminus \text{Max} g$ не пусто и включено в $\bigcap_{i=1}^n \text{Max}^\circ f_i$. \square

Согласно лемме 2 условие $\text{Max} f_i \cup \text{Max} g = X$ леммы 3 является чисто решеточным. Поэтому из леммы 3 получаем

Следствие 2. Для произвольной системы $\{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от \mathbb{P} , имеется решеточная характеристика следующего условия: множества $\text{Max}^\circ f_i$ не пусты и образуют центрированное семейство $\{\text{Max}^\circ f_i\}_{i \in I}$.

Перейдем к финальной стадии доказательства теоремы. Для этого с каждой точкой компакта свяжем некоторую систему подалгебр решетки. Затем покажем, что все такие системы подалгебр имеют решеточную характеристику, причем факт принадлежности двух таких систем одной и той же точке также чисто решеточный.

Предложение 3. 1) Для любой точки $x \in X$, где $|X| \geq 2$, найдется максимальная система $S = \{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от \mathbb{P} , такая, что семейство $\{\text{Max}^\circ f_i\}_{i \in I}$ центрировано, причем $\bigcap_{i \in I} \text{Max} f_i = \{x\}$.

2) Для любой максимальной системы $S = \{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от \mathbb{P} , с центрированным семейством $\{\text{Max}^\circ f_i\}_{i \in I}$ выполняются следующие свойства:

- 2.1) $\bigcap_{i \in I} \text{Max} f_i = \{x\}$ для некоторой точки $x \in X$;
- 2.2) $x \in \overline{\text{Max}^\circ f_i}$ для всех $i \in I$;
- 2.3) если $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$ и $x \in \text{Max}^\circ f$, то $\langle f \rangle \in S$.

Доказательство. 1) Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и с каждой точкой $y \in X$, отличной от x , свяжем некоторую подалгебру $\langle f_y \rangle$ такую, что $x \in \text{Max}^\circ f_y$, но $y \notin \text{Max} f_y$. После чего рассмотрим множество M всевозможных систем $\{\langle f_j \rangle\}_{j \in J}$ подалгебр, отличных от \mathbb{P} , каждая из которых обладает свойством центрированности семейства $\{\text{Max}^\circ f_j\}_{j \in J}$ и включает систему $\{\langle f_y \rangle\}_{y \in X, y \neq x}$. Множество M не пусто (содержит $\{\langle f_y \rangle\}_{y \in X, y \neq x}$) и, будучи упорядочено по включению, индуктивно, так как мажорантой любой цепи систем подалгебр из M будет их объединение, очевидно, обладающее свойством центрированности и включающее $\{\langle f_y \rangle\}_{y \in X, y \neq x}$. По принципу Куратовского — Цорна это означает существование в M максимальной системы подалгебр $S = \{\langle f_i \rangle\}_{i \in I}$.

Далее, семейство замкнутых множеств $\{\text{Max} f_i\}_{i \in I}$ компакта X центрировано (в силу центрированности $\{\text{Max}^\circ f_i\}_{i \in I}$), а потому имеет непустое пересечение. Кроме того,

$$\bigcap_{i \in I} \text{Max} f_i \subseteq \bigcap_{y \in X, y \neq x} \text{Max} f_y = \{x\}. \quad (2.3)$$

Значит, $\bigcap_{i \in I} \text{Max} f_i = \{x\}$.

2) Поскольку семейство $\{\text{Max}^\circ f_i\}_{i \in I}$ центрировано, то центрированным будет и семейство замкнутых множеств $\{\text{Max} f_i\}_{i \in I}$ компакта X . Следовательно, пересечение $\bigcap_{i \in I} \text{Max} f_i$ не пусто. Выберем произвольную точку x из пересечения и докажем, что произвольная ее окрестность $U_x \neq X$ пересекается с каждым множеством $\text{Max}^\circ f_i$, $i \in I$. Отсюда, в частности, получим утверждения пп. 2.2) и 2.3) ($\text{Max}^\circ f \cap \text{Max}^\circ f_i \neq \emptyset$ для всех $i \in I$, а потому $\langle f \rangle \in S$ в силу максимальнойности S).

Предположим обратное, т. е. $U_x \cap \text{Max}^\circ f_i = \emptyset$ для некоторой подалгебры $\langle f_i \rangle \in S$. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем нормированную функцию $f \in U^\vee(X)$ такую, что $f = 1$ на $X \setminus U_x$ и $f(x) = 1/2$. Тогда $\text{Max}^\circ f_i \subseteq \text{Max}^\circ f$, а потому добавление к S

подалгебры $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$ не нарушает свойство центрированности. Отсюда $\langle f \rangle \in S$ в силу максимальности S . Кроме того, $x \notin \bigcap_{i \in I} \text{Max } f_i$, так как $x \notin \text{Max } f$; противоречие. Значит, любая окрестность точки x пересекается с каждым множеством $\text{Max}^\circ f_i, i \in I$.

Наконец, заметим, что в силу п. 2.3) для любой точки $y \neq x$ подалгебра $\langle f_y \rangle$ (в обозначениях п. 1)) лежит в S , т. е. верно соотношение (2.3). Пункт 2.1) доказан. \square

Следствие 2 показывает, что множество всевозможных систем подалгебр (см. предложение 3) имеет решеточную характеристику. Объявим две такие системы S и S' эквивалентными, если они отвечают одной и той же точке:

$$S \sim S' \iff \bigcap_{\langle f \rangle \in S} \text{Max } f = \bigcap_{\langle f \rangle \in S'} \text{Max } f.$$

Наша ближайшая цель — доказать, что отношение \sim имеет решеточную характеристику.

Для произвольного множества $A \subseteq X$ через M_A обозначим подалгебру

$$M_A = \{f \in U^\vee(X) : A \subseteq \text{Max } f\}.$$

Лемма 4. Пусть $|X| \geq 2$. Тогда для любых замкнутых множеств A и B имеем

$$A \cap B = \emptyset \iff M_A \vee M_B = U^\vee(X).$$

Доказательство. Пусть $M_A \vee M_B = U^\vee(X)$. Тогда $A \cap B \subseteq \text{Max } f$ для любой функции $f \in U^\vee(X)$, что при $|X| \geq 2$ возможно лишь в случае $A \cap B = \emptyset$.

Обратно, пусть $A \cap B = \emptyset$. Докажем, что любую функцию $f \in U^\vee(X)$ можно представить в виде gh , где $g \in M_A$ и $h \in M_B$. Отсюда, в частности, будет следовать, что $M_A \vee M_B = U^\vee(X)$.

Функцию f будем считать нормированной. Воспользуемся тем, что компакт X является нормальным пространством, и выберем нормированную функцию $\lambda \in U^\vee(X)$ такую, что $\lambda = 1$ на A и $\lambda = \min f$ на B . Положим $g = f \vee \lambda$ и $h = f / (f \vee \lambda)$. Тогда $g \in M_A, h \in M_B$ и $f = gh$. \square

Следующая лемма использует результат леммы 2 и содержит решеточную характеристику подалгебр $M_{\overline{\text{Max}^\circ f}}, \text{Max}^\circ f \neq \emptyset$ (условие $\text{Max}^\circ f \neq \emptyset$ является решеточным по следствию 2).

Лемма 5. Для произвольных подалгебр $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}, \text{Max}^\circ f \neq \emptyset$ и $\langle g \rangle$ имеем

$$g \in M_{\overline{\text{Max}^\circ f}} \iff \text{Max } g \cup \text{Max } h = X$$

для всех подалгебр $\langle h \rangle$ таких, что $\text{Max } f \cup \text{Max } h = X$.

Доказательство. Функции f, g и h будем считать нормированными.

Пусть подалгебра $\langle g \rangle$ такова, что $\overline{\text{Max}^\circ f} \subseteq \text{Max } g$. Докажем, что $\text{Max } g \cup \text{Max } h = X$ для любой подалгебры $\langle h \rangle$ со свойством $\text{Max } f \cup \text{Max } h = X$. Рассуждая от противного, выберем точку $x \in \text{Max } f \setminus (\text{Max } g \cup \text{Max } h)$. Тогда $f(x) = 1, g(x) < 1$ и $h(x) < 1$. Выберем произвольную окрестность U_x точки x , на которой значения h меньше 1. Поскольку $\text{Max } f \cup \text{Max } h = X, f = 1$ на U_x , в частности $x \in \text{Max}^\circ f$. Но $\overline{\text{Max}^\circ f} \subseteq \text{Max } g$, поэтому $g(x) = 1$; противоречие. Значит, $\text{Max } g \cup \text{Max } h = X$.

Обратно, предположим, существует нормированная функция g такая, что $g(x) < 1$ в некоторой точке $x \in \overline{\text{Max}^\circ f}$, хотя $\text{Max } g \cup \text{Max } h = X$ для любой подалгебры $\langle h \rangle$ такой, что $\text{Max } f \cup \text{Max } h = X$. Рассмотрим произвольную окрестность U_x точки x , на которой значения g меньше 1. Зафиксируем точку $y \in U_x \cap \text{Max}^\circ f$, воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем нормированную функцию $h \in U^\vee(X)$ такую, что $h = 1$ на $X \setminus (U_x \cap \text{Max}^\circ f)$ и $h(y) = 1/2$. Ясно, что $\text{Max } f \cup \text{Max } h = X$, хотя $\text{Max } g \cup \text{Max } h \subset X$, так как $g(y) < 1$ и $h(y) < 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. \square

Предложение 4. Для любых систем подалгебр S и S' (см. предложение 3) имеем

$$S \sim S' \iff M_{\overline{\text{Max}^\circ f}} \vee M_{\overline{\text{Max}^\circ g}} \neq U^\vee(X)$$

для всех $\langle f \rangle \in S$, $\langle g \rangle \in S'$.

Доказательство. Пусть системы S и S' соответствуют точке x . Тогда согласно п. 2.2) предложения 3 $x \in \overline{\text{Max}^\circ f} \cap \overline{\text{Max}^\circ g}$ для любых $\langle f \rangle \in S$, $\langle g \rangle \in S'$. Значит, по лемме 4 $M_{\overline{\text{Max}^\circ f}} \vee M_{\overline{\text{Max}^\circ g}} \neq U^\vee(X)$.

Обратно, пусть условие выполняется, но системы S и S' соответствуют различным точкам x и y . Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем функции $f, g \in U^\vee(X)$ такие, что $x \in \text{Max}^\circ f$ и $y \in \text{Max}^\circ g$, причем $\text{Max} f \cap \text{Max} g = \emptyset$. Тогда согласно п. 2.3) предложения 3 имеем $\langle f \rangle \in S$, $\langle g \rangle \in S'$. Кроме того, $M_{\overline{\text{Max}^\circ f}} \vee M_{\overline{\text{Max}^\circ g}} = U^\vee(X)$ по лемме 4; противоречие. Значит, $S \sim S'$. \square

Обозначим через S_x класс эквивалентности, образованный системами S , которые соответствуют точке x . Из предложения 4 следует, что классы S_x имеют решеточную характеристику.

Предложение 5. Для произвольных подалгебр $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$, $\text{Max}^\circ f \neq \emptyset$, и класса S_x имеем

$$x \in \text{Max}^\circ f \iff \text{Max} f \cup \text{Max} g = X$$

для некоторой подалгебры $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$ такой, что $\langle g \rangle \notin S$ для всех $S \in S_x$.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Max}^\circ f$. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем нормированную функцию $g \in U^\vee(X)$ такую, что $g = 1$ на $X \setminus \text{Max}^\circ f$ и $g(x) = 1/2$. Тогда $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$, $\text{Max} f \cup \text{Max} g = X$ и $\langle g \rangle \notin S$ для всех $S \in S_x$, так как $x \notin \text{Max} g$.

Обратно, поскольку $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$ и $\text{Max} f \cup \text{Max} g = X$, множество $\text{Max}^\circ g$ не пусто и включает $X \setminus \text{Max} f$. Следовательно, если $x \notin \text{Max}^\circ f$, то $\text{Max}^\circ f_i \cap \text{Max}^\circ g \neq \emptyset$ для любой подалгебры $\langle f_i \rangle$, где $x \in \text{Max}^\circ f_i$. Таким образом, семейство множеств, состоящее из $\text{Max}^\circ g$ и всевозможных $\text{Max}^\circ f_i$, $x \in \text{Max}^\circ f_i$, центрировано. Поэтому, как и при доказательстве п. 1) предложения 3, найдется система подалгебр S , содержащая подалгебры $\langle g \rangle$ и $\langle f_i \rangle$, где $x \in \text{Max}^\circ f_i$, причем $S \in S_x$. С другой стороны, $\langle g \rangle \notin S$, так как $S \in S_x$; противоречие. Значит, $x \in \text{Max}^\circ f$. \square

Доказательство теоремы для компактов. Случай $|X| = 1$ очевиден, поскольку

$$|X| = 1 \iff \text{решетка } \mathbb{A}(U^\vee(X)) \text{ — двухэлементная цепь } \emptyset \subset \mathbb{P}.$$

Пусть $|X| \geq 2$ и $\alpha: \mathbb{A}(U^\vee(X)) \rightarrow \mathbb{A}(U^\vee(Y))$ — изоморфизм решеток. Тогда в силу предложений 3–5 соответствие $\varphi: X \rightarrow Y$, заданное правилом $\varphi(x) = y \iff \alpha(S_x) = S_y$, будет биекцией компактов X и Y , причем если $\alpha(\langle f \rangle) = \langle g \rangle$, то $\varphi(\text{Max}^\circ f) = \text{Max}^\circ g$. Множества вида $\text{Max}^\circ f$ образуют базу открытых множеств любого тихоновского пространства, в том числе и компакта. Значит, φ — гомеоморфизм. \square

3. Доказательство теоремы для хьюиттовских пространств

Сведем доказательство теоремы для хьюиттовских пространств к случаю компактов. Для этого предварительно введем два класса подалгебр специального вида.

Подалгебру A полуполя $U^\vee(X)$ назовем *b-подалгеброй*, если все функции из A ограничены сверху, и *sr-подалгеброй*, если любая функция $f \in A$ строго положительна, т. е. $\inf f > 0$. Ясно, что в случае компакта X все подалгебры будут sr- и b-подалгебрами. Заметим также, что подалгебра A обладает свойством P (быть sr- или b-подалгеброй) тогда и только тогда, когда любая подалгебра $\langle f \rangle \subseteq A$ обладает свойством P . Подалгебра констант \mathbb{P} является sr-, b-подалгеброй. Поэтому для решеточной характеристики sr- и b-подалгебр можно ограничиться однопорядоченными подалгебрами, отличными от \mathbb{P} .

Дадим решеточную характеристику sr-подалгебр. Пространство X считаем тихоновским.

Лемма 6. $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$ — *sr-подалгебра тогда и только тогда, когда $\langle f \rangle \subseteq \langle g' \rangle \vee \langle h' \rangle$ и*

$$\langle g' \rangle \subseteq [g], \langle g' \rangle \not\subseteq \langle g \rangle, \quad \langle h' \rangle \subseteq [h], \langle h' \rangle \not\subseteq \langle h \rangle \quad (3.4)$$

для некоторых подалгебр $\langle g' \rangle, \langle h' \rangle, \langle g \rangle, \langle h \rangle$.

Доказательство. Пусть $\langle f \rangle$ — *sr-подалгебра*, отличная от \mathbb{P} . Можно считать, что $f > 1$. Выберем точки $x_0, y_0 \in X$ и числа $a, b, c \in \mathbb{P}$ такие, что $a < f(x_0) < b < f(y_0) < c$. Тогда множества

$$A = \{x \in X : f(x) \notin (a, b)\}, \quad B = \{x \in X : f(x) \notin (b, c)\}$$

не пусты ($y_0 \in A, x_0 \in B$) и замкнуты. Воспользуемся тем, что пространство X тихоновское, и выберем пару нормированных функций $\lambda_A, \lambda_B \in U^\vee(X)$ таких, что

$$\lambda_A(A) = \{1\}, \lambda_A(x_0) = 1/(2f(x_0)), \quad \lambda_B(B) = \{1\}, \lambda_B(y_0) = 1/(2f(y_0)).$$

Положим

$$g = f\lambda_B, \quad g' = f\lambda_B \vee 1, \quad h = f\lambda_A, \quad h' = f\lambda_A \vee 1.$$

Тогда $\langle g' \rangle \subseteq [g], \langle h' \rangle \subseteq [h]$ и $\langle f \rangle \subseteq \langle g' \rangle \vee \langle h' \rangle$, так как

$$g' \vee h' = (f\lambda_B \vee 1) \vee (f\lambda_A \vee 1) = f(\lambda_A \vee \lambda_B) \vee 1 = f \cdot 1 \vee 1 = f$$

($\lambda_A \vee \lambda_B = 1$, поскольку $A \cup B = X$). Докажем, что $\langle g' \rangle \not\subseteq \langle g \rangle$ ($\langle h' \rangle \not\subseteq \langle h \rangle$) получается аналогично).

Рассуждая от противного, получаем, что $f\lambda_B \vee 1 \in \langle f\lambda_B \rangle$, т. е.

$$f\lambda_B \vee 1 = a_1(f\lambda_B) \vee a_2(f\lambda_B)^2 \vee \dots \vee a_n(f\lambda_B)^n;$$

это равенство в точках x_0 и y_0 равносильно системе

$$\begin{cases} f(x_0) = a_1 f(x_0) \vee a_2 f^2(x_0) \vee \dots \vee a_n f^n(x_0), \\ 1 = a_1 \cdot 1/2 \vee a_2 \cdot 1/2^2 \vee \dots \vee a_n \cdot 1/2^n, \end{cases}$$

которая несовместна, так как

$$1 = a_1 \vee a_2 f(x_0) \vee \dots \vee a_n f^{n-1}(x_0) > a_1 \cdot 1/2 \vee a_2 \cdot 1/2^2 \vee \dots \vee a_n \cdot 1/2^n = 1.$$

Обратно, пусть $\langle f \rangle \subseteq \langle g' \rangle \vee \langle h' \rangle$. Включения (3.4) показывают, что $\langle g' \rangle$ и $\langle h' \rangle$ — *sr-подалгебры*. Поэтому любая функция из подалгебры $\langle g' \rangle \vee \langle h' \rangle$, включая f , строго положительна. \square

Опираясь на лемму 6, получим следующую решеточную характеристику однопорочденных *b-подалгебр*.

Лемма 7. $\langle f \rangle \neq \mathbb{P}$ — *b-подалгебра тогда и только тогда, когда для любой sr-подалгебры $\langle g \rangle \subseteq [f]$ найдется sr-подалгебра $\langle h \rangle \neq \mathbb{P}$ такая, что $\mathbb{P} \subseteq \langle g \rangle \vee \langle h \rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle f \rangle$ — *b-подалгебра* и $\langle g \rangle \subseteq [f]$ — *sr-подалгебра*. Если $\langle g \rangle = \mathbb{P}$, то $\mathbb{P} \subseteq \langle g \rangle \vee \langle h \rangle$ для любой *sr-подалгебры* $\langle h \rangle \neq \mathbb{P}$ (такая, очевидно, в $U^\vee(X)$ найдется).

Если $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$, то положим $h = g^{-1}$. Тогда функция $h \notin \mathbb{P}$ строго положительна в силу ограниченности сверху функции $g \in [f]$. Кроме того, $\mathbb{P} \subseteq \langle g \rangle \vee \langle g^{-1} \rangle$, так как $1 = g \cdot g^{-1}$.

Обратно, включение $\mathbb{P} \subseteq \langle g \rangle \vee \langle h \rangle$ означает, что

$$1 = P_0(g) \vee Q_0(h) \vee P_1(g)Q_1(h) \vee \dots \vee P_m(g)Q_m(h)$$

для некоторых многочленов $P_i \in \mathbb{R}^+[g], Q_i \in \mathbb{R}^+[h]$ без свободных членов.

Допустим, что $\langle g \rangle$ — не *b-подалгебра*. Тогда, поскольку $\langle h \rangle$ — *sr-подалгебра*, функция

$$P_0(g) \vee P_1(g)Q_1(h) \vee \dots \vee P_m(g)Q_m(h)$$

будет нулевой, так как иначе она не ограничена сверху. Следовательно, $1 = Q_0(h)$, что противоречит $\langle h \rangle \neq \mathbb{P}$.

Итак, подалгебра $\langle g \rangle$ является *b-подалгеброй*. Значит, $\langle f \rangle$ — также *b-подалгебра*. \square

Лемма 8. Пусть X — компакт. Тогда для произвольных подалгебр $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$, отличных от \mathbb{P} , имеем

$$\mathbb{P} \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle \implies \text{Min } g \subseteq \text{Max } f.$$

Доказательство. Выберем точку $x \in \text{Min } g$ и докажем, что $x \in \text{Max } f$.

Пусть $\mathbb{P} \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$. Тогда 1 можно записать как

$$1 = a_{10}f \vee a_{01}g \vee \dots \vee a_{mn}f^m g^n.$$

Отсюда $1 = a_{ij}f^i(x)g^j(x)$ для некоторых i, j .

Если $i = 0$, то $j \geq 1$, а потому $a_{0j}g^j(y) > 1$ для любой точки $y \in \text{Max } g$ ($g(y) > g(x)$, так как $\langle g \rangle \neq \mathbb{P}$); противоречие. Следовательно, $i \geq 1$. Теперь, если $f(x) < \text{max } f$, то для любой точки $z \in \text{Max } f$ имеем $a_{ij}f^i(z)g^j(z) > a_{ij}f^i(x)g^j(x) = 1$, что невозможно. Значит, $x \in \text{Max } f$. \square

С этого момента считаем тихоновское пространство X хьюиттовским. Пусть βX — стоун-чеховская компактификация пространства X . Множество всех ограниченных строго положительных функций полуполя $U^\vee(X)$ образует подалгебру, которую обозначим через $\text{spb}U^\vee(X)$. Она канонически изоморфна полу полю $U^\vee(\beta X)$. Соответствующие канонические изоморфизмы полуполей и их решеток подалгебр обозначим через φ_X и α_X соответственно.

Лемма 9. Для любого класса S_x систем подалгебр полуполя $U^\vee(\beta X)$ равносильны следующие условия:

1) $x \in \beta X \setminus X$;

2) найдется не sr -, b -подалгебра $\langle f \rangle$ полуполя $U^\vee(X)$ такая, что для любой sr -подалгебры $\langle g \rangle \subseteq [f]$ подалгебра $\langle h \rangle \neq \mathbb{P}$ полуполя $U^\vee(\beta X)$, для которой $\mathbb{P} \subseteq \langle h \rangle \vee \alpha_X(\langle g \rangle)$, лежит в S для всех $S \in S_x$.

Доказательство. Пусть $x \in \beta X \setminus X$. Согласно [10, теорема 3.11.10] найдется функция $f' \in C(\beta X)$, $0 \leq f' \leq 1$, такая, что $f'(x) = 0$ и $f' > 0$ на X . Положим $f = f'|_X$. Тогда $\langle f \rangle$ — не sr -, b -подалгебра полуполя $U^\vee(X)$. Очевидно, $x \in \text{Min}^\circ \varphi_X(g)$ для любой sr -подалгебры $\langle g \rangle \subseteq [f]$. Далее, рассмотрим произвольную подалгебру $\langle h \rangle \neq \mathbb{P}$ полуполя $U^\vee(\beta X)$, для которой $\mathbb{P} \subseteq \langle h \rangle \vee \alpha_X(\langle g \rangle)$. По лемме 8 $\text{Min} \varphi_X(g) \subseteq \text{Max } h$, т. е. $x \in \text{Max}^\circ h$. Значит, согласно п. 2.3) предложения 3 $\langle h \rangle \in S$ для всех $S \in S_x$.

Обратно, пусть условия п. 2) выполнены, но $x \in X$. Поскольку $f(x) > 0$ и $\langle f \rangle$ — не sr -подалгебра, то $f(y) < f(x)$ для некоторой точки $y \in X$. Положим $g = f \vee f(y)$ и $h = 1/\varphi_X(f \vee f(y))$. Тогда $\langle g \rangle$ — sr -подалгебра, включенная в $[f]$, $\langle h \rangle \neq \mathbb{P}$ и $\mathbb{P} \subseteq \langle h \rangle \vee \alpha_X(\langle g \rangle)$, так как $h \cdot \varphi_X(g) = 1$. Кроме того, $x \notin \text{Max } h$, поскольку $\text{Max } h = \text{Min} \varphi_X(g)$ и $x \notin \text{Min} \varphi_X(g)$. Значит, $\langle h \rangle \notin S$ для всех $S \in S_x$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. \square

Доказательство теоремы для хьюиттовских пространств. Пусть для произвольных хьюиттовских пространств X и Y имеется изоморфизм α решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$. В силу лемм 6 и 7 б- и sr -подалгебры полуполей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$ имеют решеточные характеристики. Поэтому отображение $\gamma = \alpha_Y \circ \alpha \circ \alpha_X^{-1}$ будет изоморфизмом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(\beta X))$ на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(\beta Y))$. Тогда, как было показано ранее для компактов, соответствие

$$\varphi(x) = y \iff \gamma(S_x) = S_y \text{ для любых } x \in \beta X \text{ и } y \in \beta Y$$

будет гомеоморфизмом компактов βX и βY . Кроме того, $\varphi(X) = Y$ в силу леммы 9. Значит, $\varphi|_X$ — гомеоморфизм хьюиттовских пространств X и Y . Теорема доказана. \square

4. Заключение

Если в полуполе $U^\vee(X)$ мах-сложение заменить обычным сложением, то получим аддитивно-сократимое полуполе $U(X)$.

Приведем несколько результатов, касающихся определяемости хьюиттовских пространств, применительно к полу полям $U(X)$ и $U^\vee(X)$. Аналогичные результаты для колец и полуколец непрерывных функций можно найти в работах [1, предложение 2.2; 7].

Предложение 6. Для любых топологических пространств X и Y равносильны условия:

- 1) $\nu\tau X \approx \nu\tau Y$;
- 2) аддитивные редукты полу полей $U(X)$ и $U(Y)$ изоморфны;
- 3) аддитивные редукты полу полей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$ изоморфны;
- 4) решетки подалгебр $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$ изоморфны.

Доказательство. Согласно [11, теоремы 3.9 и 8.7] для произвольных топологических пространств X и Y существуют хьюиттовские пространства $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$, для которых канонически изоморфны кольца функций $C(X)$ и $C(\nu\tau X)$, $C(Y)$ и $C(\nu\tau Y)$. Поэтому условие 1) влечет остальные. Импликация 4) \Rightarrow 1) — теорема данной статьи. Далее, неравенство $f \leq g$ равносильно равенству $f \vee g = g$ для любых $f, g \in C(X)$. Кроме того, если $f, g \in U(X)$, то неравенство $f \leq g$ равносильно следующему условию: для любой функции $h \in U(X)$ такой, что $h = g + u$ для некоторой $u \in U(X)$, найдется функция $v \in U(X)$ такая, что $h = f + v$. Таким образом, как из условия 2), так и из условия 3) следует изоморфизм решеток функций $\langle U(X), \leq \rangle$ и $\langle U(Y), \leq \rangle$. В [1, предложение 2.2] показано, что этот изоморфизм равносильен изоморфизму колец $C(X)$ и $C(Y)$, который влечет условие 1) согласно известному результату Хьюитта [12]. \square

З а м е ч а н и е. Изоморфизм мультипликативных редуктов $U(X)$ и $U(Y)$ или, что равносильно, аддитивных полугрупп $C(X)$ и $C(Y)$, не влечет изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$, поскольку мультипликативный редукт $U(X)$, будучи делимой абелевой группой без кручения, определяет лишь мощность кольца $C(X)$.

Следующий пример показывает, что при изоморфизме полу полей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$ образ подалгебры не обязан быть подалгеброй (в отличие от полу полей $U(X)$). Поэтому импликация

$$U^\vee(X) \cong U^\vee(Y) \Rightarrow \mathbb{A}(U^\vee(X)) \cong \mathbb{A}(U^\vee(Y)),$$

хотя и следует из импликации 3) \Rightarrow 4) предложения 6, не может быть установлена напрямую.

П р и м е р. Пусть $X = \{x, y\}$ — двухточечное дискретное пространство. Тогда $U^\vee(X) = \mathbb{P} \times \mathbb{P}$. Рассмотрим отображение

$$\varphi: U^\vee(X) \rightarrow U^\vee(X), \quad \varphi: (a, b) \mapsto (a, b^2).$$

Легко видеть, что φ — автоморфизмом полу поля $U^\vee(X)$. Если $\varphi(\mathbb{P})$ — подалгебра, то вместе с функцией $(2, 4) = \varphi((2, 2))$ подалгебра $\varphi(\mathbb{P})$ обязана содержать функцию $2 \cdot (2, 4) = (4, 8)$, что невозможно, так как $\varphi: (r, r) \mapsto (r, r^2) \neq (4, 8)$ для всех $r \in \mathbb{P}$. Значит, образ $\varphi(\mathbb{P})$ не будет подалгеброй.

Естественным продолжением рассмотренного примера служит

Предложение 7. Изоморфизм φ полу полей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$ переводит подалгебры в подалгебры тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$.

Доказательство. Пусть изоморфизм φ переводит подалгебры в подалгебры. Поскольку $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(\mathbb{P})$, $\varphi^{-1}(\mathbb{P})$ — подалгебры, то $\mathbb{P} \subseteq \varphi(\mathbb{P})$ и $\mathbb{P} \subseteq \varphi^{-1}(\mathbb{P})$. Отсюда $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$.

Обратно, пусть $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$. Тогда образ $\varphi(A)$ подалгебры A замкнут относительно сложения и умножения функций. Остается показать, что $rf \in \varphi(A)$ для любых $f \in \varphi(A)$, $r \in \mathbb{P}$, или, что

то же самое, $\varphi^{-1}(rf) = \varphi^{-1}(r)\varphi^{-1}(f) \in A$. Последнее верно, так как $\varphi^{-1}(r) \in \mathbb{P}$, $\varphi^{-1}(f) \in A$ и A — подалгебра. \square

В заключение сформулируем две открытые проблемы.

Проблема 1. Доказать (предположительно) определяемость любого хьюиттовского пространства X решеткой $\mathbb{A}(U(X))$.

Вслед за проблемой определяемости пространств X некоторой алгебраической структурой $A(X)$ в случае ее положительного решения естественно перейти к описанию изоморфизмов структур $A(X)$. Произвольный изоморфизм решеток всех подалгебр однотипных алгебр называется *решеточным изоморфизмом* данных алгебр.

Нами описаны решеточные изоморфизмы полуколец $C^+(X)$ (см. [6]) и $C^\vee(X)$ (в печати).

Проблема 2. Описать решеточные изоморфизмы полуколец $U(X)$ и $U^\vee(X)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // *Фундамент. и прикл. математика*. 1998. Т. 4, вып. 2. С. 493–510.
2. **Вечтомов Е.М.** Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // *Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия*. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 3–46.
3. **Вечтомов Е.М.** Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // *Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия*. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 29. С. 119–191.
4. **Вечтомов Е.М.** Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // *Мат. заметки*. 1997. Т. 62, № 5. С. 687–693.
5. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В.** Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр // *Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер.1: Математика. Механика. Информатика*. 2010. Вып. 11. С. 112–125.
6. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В.** Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // *Фундамент. и прикл. математика*. 2010. Т. 16, вып. 3. С. 63–103.
7. **Вечтомов Е.М., Сидоров В.В., Чупраков Д.В.** Полукольца непрерывных функций. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. 312 с.
8. **Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н.** О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // *Докл. АН СССР*. 1939. Т. 22, № 1. С. 11–15.
9. **Салий В.Н.** Решетки с единственными дополнениями. М.: Наука, 1984. 128 с.
10. **Энгелькинг Р.** *Общая топология*. М.: Мир, 1986. 752 с.
11. **Gillman L., Jerison M.** *Rings of continuous functions*. N.J.: Springer-Verlag, 1976. 303 p.
12. **Hewitt E.** *Rings of real-valued continuous functions* // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1948. Vol. 64, no. 1. P. 45–99.

Вечтомов Евгений Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой

Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vecht@mail.ru

Сидоров Вадим Вениаминович
канд. физ.-мат. наук
доцент

Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Поступила 20.04.2015

УДК 519.16 + 519.85

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ ПОДХОД К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПОКРЫТИЯ ГРАФА НЕСМЕЖНЫМИ ЦИКЛАМИ¹

Э. Х. Гимади, И. А. Рыков

Рассматривается задача m -CYCLES COVER о покрытии полного неориентированного графа m вершинно-несмежными циклами экстремального суммарного веса ребер. Представлен общий так называемый TSP-подход к построению приближенного алгоритма решения задачи с использованием решения задачи коммивояжера (TSP). Проведен анализ модификаций алгоритма для задачи Euclidean MAX m -CYCLES COVER на детерминированных входах (весах ребер) в многомерном евклидовом пространстве и для задачи Random MIN m -CYCLES COVER на случайных входах $UNI(0, 1)$. Показано, что оба алгоритма имеют временную сложность $O(n^3)$ и являются асимптотически точными при числе покрывающих циклов $m = o(n)$ и $m \leq n^{1/3} / \ln n$ соответственно.

Ключевые слова: покрытие графа циклами, задача коммивояжера, приближенные алгоритмы, вычислительная сложность, точность аппроксимации, асимптотическая оптимальность, случайные входы, вероятностный анализ.

E. Kh. Gimadi, I. A. Rykov. Asymptotically optimal approach to the approximate solution of several problems of covering a graph by nonadjacent cycles.

We consider the m -Cycle Cover Problem, which consists in covering a complete undirected graph by m vertex-nonadjacent cycles with extremal total edge weight. The so-called TSP approach to the construction of an approximate algorithm for this problem with the use of a solution of the traveling salesman problem (TSP) is presented. Modifications of the algorithm for the problems Euclidean Max m -Cycle Cover with deterministic instances (edge weights) in a multidimensional Euclidean space and Random Min m -Cycle Cover with random instances $UNI(0, 1)$ are analyzed. It is shown that both algorithms have time complexity $O(n^3)$ and are asymptotically optimal for the number of covering cycles $m = o(n)$ and $m \leq \frac{n^{1/3}}{\ln n}$, respectively.

Keywords: cycle cover of a graph, Traveling Salesman Problem, approximation algorithms, time complexity, approximation ratio, asymptotic optimality, random instances, probabilistic analysis.

Введение

Заданы полный неориентированный граф $G(V, E, w)$ на n вершинах и натуральное число $m \leq n/3$, где $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ — весовая функция на множестве ребер графа. Далее для веса подграфа $G' \subset G$ введем обозначение $W(G') = \sum_{e \in E(G')} w_e$.

В задаче покрытия графа m циклами (далее m -CYCLES COVER) требуется найти такое семейство $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ из m вершинно-несмежных циклов, что покрыты все вершины графа и суммарный вес ребер в покрытии экстремален. Формально задача m -CYCLES COVER на минимум (на максимум) записывается следующим образом:

$$W(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^m W(C_k) \rightarrow \min (\max)$$

при выполнении условий

$$\bigcup_{k=1}^m C_k = V, \quad V(C_{k'}) \cap V(C_k) = \emptyset \text{ для любых } 1 \leq k' < k \leq m.$$

¹Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 15-01-00976, 15-01-00462 и 13-07-00070).

По-видимому, впервые такая постановка задачи была рассмотрена в работах М. Ю. Хачая и Е. Д. Незнахиной [4; 5], в которых показано, что задача на минимум NP -трудна в сильном смысле как в общем, так и в частных случаях (Metric и Euclidean). Для метрической задачи предложен эффективный 2-приближенный алгоритм, а для задачи покрытия графа в евклидовой плоскости двумя циклами обоснована приближенная полиномиальная схема, находящая приближенное решение с произвольной относительной погрешностью ε за время $O(n^3(\ln n)^{O(1/\varepsilon)})$.

В настоящей статье представлен общий так называемый TSP-подход к построению приближенного алгоритма решения задачи с использованием решения задачи коммивояжера (TSP). Проведен анализ модификаций алгоритма для задачи Euclidean MAX m -CYCLES COVER на детерминированных входах (весах ребер) в многомерном евклидовом пространстве и для задачи Random MIN m -CYCLES COVER на случайных входах UNI(0, 1). Показано, что оба алгоритма имеют временную сложность $O(n^3)$ и являются асимптотически точными при числе покрывающих циклов $m = o(n)$ и $m \leq n^{1/3}/\ln n$ соответственно.

1. TSP-подход к построению приближенного алгоритма \tilde{A} решения задачи m -CYCLES COVER

TSP-подход к приближенному решению задачи m -CYCLES COVER заключается в перестроении одноциклической остовной конфигурации решения задачи TSP (если таковую конфигурацию удалось найти) в остовный подграф задачи m -CYCLES COVER. Приближенный алгоритм \tilde{A} решения задачи m -CYCLES COVER представим в виде трех последовательных этапов.

Алгоритм \tilde{A}

Э т а п 1. Пусть имеется алгоритм решения задачи TSP на минимум (максимум). На начальном этапе посредством этого алгоритма находим гамильтонов цикл \tilde{H} . Представим этот цикл в виде последовательности вершин $\tilde{H} = (1, \dots, n)$.

Назовем *допустимым* такое разбиение $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ цикла \tilde{H} на семейство \mathcal{S} , состоящее из несмежных сегментов (цепей) $S_k = (u_{k-1}, u_k]$, $k = 1, \dots, m$, что

$$1 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_m \leq n \quad (1.1)$$

и каждый сегмент S_k содержит не менее двух ребер; $u_0 = u_m$. Множество всех допустимых наборов u обозначим через \tilde{U} .

Ребра $(u_k, u_k + 1)$ между соседними сегментами разбиения цикла \tilde{H} назовем *разделяющими*.

Ребра (хорды цикла \tilde{H}) вида $(u_{k-1} + 1, u_k)$, $k = 1, \dots, m$, назовем *замыкающими*. Их добавление преобразует семейство сегментов \mathcal{S} в цикловое покрытие графа

$$\mathcal{C} = \{C_k = (u_{k-1} + 1, \dots, u_k), k = 1, \dots, m\}.$$

Э т а п 2. Решаем вспомогательную задачу

$$f(u) = \sum_{k=1}^m (w(u_{k-1} + 1, u_k) - w(u_k, u_k + 1)) \rightarrow \min_{u \in \tilde{U}} (\max_{u \in \tilde{U}}) \quad (1.2)$$

по всем допустимым разбиениям (1.1).

Содержательно вспомогательная задача состоит в выборе наилучшего из вариантов отбрасывания m разделяющих ребер цикла и замыкания полученных m цепей соответствующими хордами, поскольку по любому допустимому набору $u = (u_1, \dots, u_m)$ из гамильтонова цикла \tilde{H} можно получить допустимое цикловое покрытие $\mathcal{C}(\tilde{H}, u) = \{C_k, k = 1, \dots, m\}$ задачи m -CYCLES COVER, удалив разделяющие ребра и замкнув получившиеся цепи в циклы

$$C_k = (u_{k-1} + 1, \dots, u_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.3)$$

Э т а п 3. В качестве приближенного решения основной задачи MIN (MAX) m -CYCLES COVER можно принять семейство $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\tilde{H}, u^*)$ — множество циклов вида (1.3), получаемое по оптимальному решению u^* вспомогательной задачи.

Описание общей схемы алгоритма \tilde{A} закончено.

З а м е ч а н и е. Точное решение вспомогательной задачи на этапе 2 алгоритма \tilde{A} может быть найдено стандартным методом динамического программирования за время $O(mn^3)$ при требуемой памяти $O(mn)$. Однако (см. далее) для нас оказалось достаточным использование более быстрых, хотя и приближенных алгоритмов решения этой задачи.

2. Определение приближенного алгоритма с оценками и асимптотически точного алгоритма

Пусть \mathcal{K}_n — класс всех примеров массовой задачи дискретной оптимизации, имеющих размерность n .

Говорим, что приближенный алгоритм \mathcal{A} на классе $\{\mathcal{K}_n\}$ имеет оценку относительной погрешности $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$, если для каждого входа $I \in \mathcal{K}_n$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{F_{\mathcal{A}}(I) - OPT(I)}{OPT(I)} \right| \leq \varepsilon_{\mathcal{A}}(n).$$

Следуя [1], говорим, что приближенный алгоритм \mathcal{A} на классе $\{\mathcal{K}_n\}$ с заданной на нем вероятностной мерой \mathbf{Pr} имеет оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$ и $\delta_{\mathcal{A}}(n)$, если для произвольного входа I имеет место неравенство

$$\mathbf{Pr}\left\{\left| \frac{F_{\mathcal{A}}(I) - OPT(I)}{OPT(I)} \right| > \varepsilon_{\mathcal{A}}(n)\right\} \leq \delta_{\mathcal{A}}(n),$$

где $\mathbf{Pr}\{\cdot\}$ — вероятность соответствующего события; $OPT(I)$ ($F_{\mathcal{A}}(I)$) — оптимальное (приближенное) значение целевой функции на входе I ; $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$ — верхняя оценка *относительной погрешности*; $\delta_{\mathcal{A}}(n)$ — верхняя оценка *вероятности несрабатывания* (доля случаев, когда алгоритм \mathcal{A} не гарантирует решения с анонсированной погрешностью).

Ясно, что алгоритм тем лучше, чем меньше оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$ и $\delta_{\mathcal{A}}(n)$. Но особо “хорошими” представляются асимптотически точные (asymptotically optimal) алгоритмы.

Алгоритм \mathcal{A} на классе рассматриваемых задач с детерминированными входами называем *асимптотически точным*, если $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Алгоритм \mathcal{A} на классе рассматриваемых задач со случайными входами называем *асимптотически точным*, если существуют оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \rightarrow 0$ и $\delta_{\mathcal{A}}(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Приближенный алгоритм A_1 решения задачи Euclidean MAX m -CYCLES COVER

В 1987 г. А. И. Сердюковым в работе [3] представлен асимптотически точный алгоритм решения задачи коммивояжера на максимум в d -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^d (Euclidean MAX TSP). Временная сложность алгоритма — $O(n^3)$, где n — число вершин. В [2] предложена более простая версия с аналогичными оценками.

Естественным обобщением задачи Euclidean MAX TSP является рассматриваемая в работе задача Euclidean MAX m -CYCLES COVER для нахождения остова подграфа, состоящего ровно из m циклов максимального суммарного веса. При этом можно допустить, что размеры L_i циклов (по числу входящих в них вершин) могут быть как заданными, так и переменными. Задача коммивояжера является частным случаем этой задачи при $m = 1$.

В соответствии с общей схемой, описанной выше, приближенный алгоритм решения задачи MAX m -CYCLES COVER основан на построении гамильтонова цикла алгоритмом решения задачи Euclidean MAX TSP [2].

3.1. Алгоритм A_g решения задачи Euclidean MAX TSP [2]

Построение гамильтонова цикла алгоритмом A_g отталкивается от максимального взвешенного паросочетания M^* (мощности $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$) и основывается на следующих двух содержательных фактах, верных в любом евклидовом пространстве:

- 1) среди достаточно большого количества отрезков найдутся два “почти параллельных”;
- 2) два почти параллельных отрезка можно заменить на пару других отрезков с тем же набором концевых точек (крест-накрест), лишь незначительно потеряв в суммарной длине.

Формально эти факты выражаются следующими леммами.

Лемма 1 [3]. Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d с фиксированной размерностью d дано произвольное множество из t прямолинейных отрезков. Тогда наименьший угол между двумя отрезками из этого множества ограничен сверху константой $\alpha(d, t)$ такой, что $\alpha(d, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. При этом

$$\sin^2 \frac{\alpha(d, t)}{2} \leq \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}, \quad (3.1)$$

где константа γ_d не зависит от числа отрезков.

Лемма 2 [2]. Пусть даны два отрезка (ребра) $I_j = (x_j, y_j)$, $I_i = (x_i, y_i)$ в \mathbb{R}^d и $\alpha \leq \pi/2$ — угол между ними. Тогда справедливо неравенство

$$\max \left\{ w(x_j, x_i) + w(y_j, y_i), w(x_j, y_i) + w(y_j, x_i) \right\} \geq \max \left\{ w(I_j), w(I_i), \cos \frac{\alpha}{2} (w(I_j) + w(I_i)) \right\}. \quad (3.2)$$

После упорядочения ребер паросочетания по убыванию весов последние $t-2$ ребер объявляются легкими, остальные — тяжелыми (число t выбирается специальным образом). Опираясь на первую из приведенных лемм, тяжелые ребра объединяются в $t-1$ цепочек таких, что внутри цепочки каждые два ребра “почти параллельны”.

О п р е д е л е н и е. Назовем α -набором такую последовательность тяжелых ребер, в которой угол между любыми двумя соседними ребрами не превышает числа α .

Лемма 3. Множество $\{I_1, \dots, I_\mu\}$ ребер можно представить в виде совокупности $(t-1)$ $\alpha(d, t)$ -наборов, перемежаемых $(t-2)$ легкими ребрами (угол $\alpha(d, t)$ определен соотношением 3.1). Временная сложность такого представления не превышает $O(\mu t^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы основано на том, что до тех пор, пока имеется не менее t $\alpha(d, t)$ -наборов тяжелых ребер, их первые ребра попадают под действие леммы 1, а значит среди них найдется пара с углом, не превосходящим $\alpha(d, t)$. Тогда эти два набора очевидным образом объединяются в $\alpha(d, t)$ -набор и число наборов уменьшается на единицу.

Итак, приведем описание алгоритма A_g .

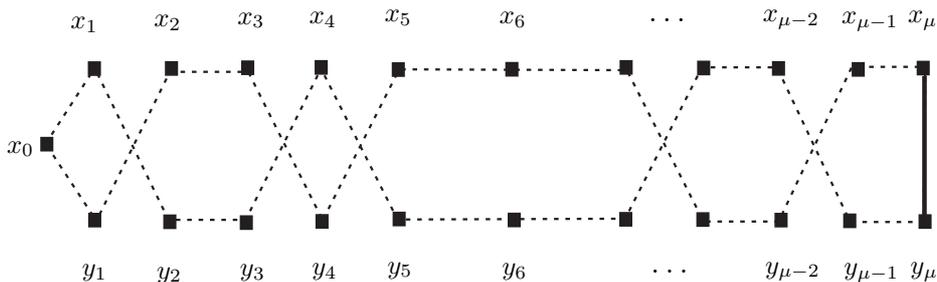


Рис. 1

Алгоритм A_g

Э т а п 1. Находим паросочетание $M = \{I_1, \dots, I_\mu\}$ максимального веса, выделяем $(t-2)$ самых легких по весу ребра в M . Остальные ребра называем *тяжелыми*.

Э т а п 2. Согласно лемме 2 множество $\{I_1, \dots, I_\mu\}$ ребер представляем в виде совокупности $(t-1)$ $\alpha(d, t)$ -наборов, составленных из тяжелых ребер и перемежаемых $(t-2)$ легкими ребрами.

Э т а п 3. Для каждой пары соседних ребер выбираем один из двух способов замены их на пару ребер с теми же концами — тот, что дает пару с большим суммарным весом. Включаем полученную пару ребер в итоговый цикл $H(A_g)$. При четном n также включаем крайние ребра паросочетания, а при нечетном — одно из них. Скажем $e = (x_1, y_1) \in E$, заменяем на пару ребер $(x_1, x_0), (x_0, y_1)$, где x_0 — вершина, не попавшая в паросочетание M (на рис. 1 предлагаемый обход $H(A_g)$ изображен для случая нечетного n).

Алгоритм A_g описан полностью.

Теорема 1 [2]. *Алгоритм A_g при $t^* = \lceil n^{\frac{d-1}{d+1}} \rceil$ находит асимптотически точное решение задачи Euclidean MAX TSP.*

3.2. Алгоритм A_1

Итак, выше описан алгоритм построения гамильтонова цикла для задачи Euclidean MAX TSP. В соответствии с общей схемой, решая задачи оптимальной замены m ребер этого цикла на соответствующие хорды, мы получаем алгоритм решения задачи Euclidean MAX m -CYCLES COVER.

Заметим, однако, что для доказательства асимптотической точности алгоритма нам не потребуется выбор оптимального варианта замены ребер на хорды. Достаточно фиксировать некоторый произвольный вариант (т. е. набор индексов вершин u_k с разностью не менее 3), а затем получить еще $n-1$ вариантов последовательным “сдвигом” множества выбрасываемых ребер цикла, т. е. увеличением чисел u_k на одинаковое число j , значения которого пробегают от 1 до $n-1$.

В силу этого указанный алгоритм решает не только задачу Euclidean MAX m -CYCLES COVER, но и более общую задачу, в которой длины произвольного подмножества циклов заданы.

Приведем описание алгоритма A_1 .

Алгоритм A_1

Э т а п 1. Используя алгоритм A_g , построить гамильтонов цикл $\tilde{H}_1 = H(A_g) = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Э т а п 2. Выбрать произвольные u_i с разностью $L_k = u_{k+1} - u_k \geq 3$. Если заданы некоторые из длин циклов L_i , выбрать $u_{k+1} = u_k + L_k$.

Э т а п 3. Для каждого j от 0 до $n-1$:

– удалить из \tilde{H}_1 ребра $e_{L_1+j}, e_{L_1+L_2+j}, \dots, e_{L_1+\dots+L_m+j}$, получив m цепей;

– замкнуть каждую из полученных цепей в цикл, получив m циклов, имеющих длины L_1, \dots, L_m соответственно.

Полученное допустимое решение обозначается через \tilde{Q}_j .

Э т а п 4. Выбрать финальное решение \tilde{C}_1 такое, что $w(\tilde{C}_1) = \max_{0 \leq j < n} w(\tilde{Q}_j)$.

Алгоритм A_1 описан полностью.

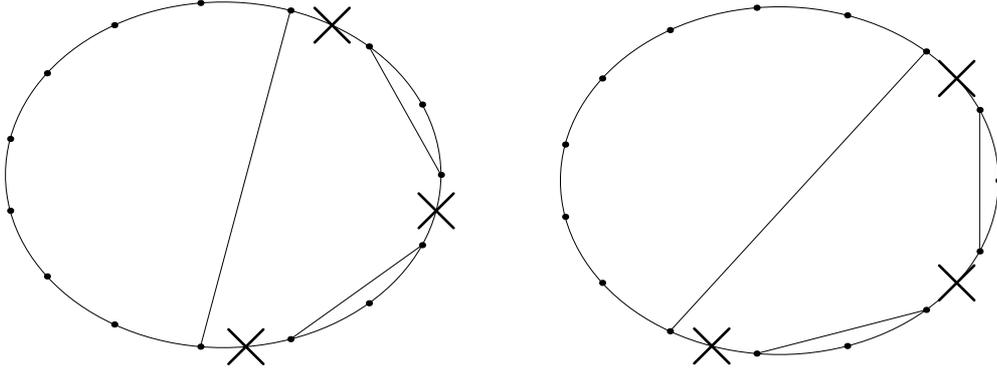


Рис. 2

На рис. 2 представлены 2 из n различных решений \tilde{Q}_j , получающихся циклическим сдвигом удаляемых ребер.

3.3. Анализ качества работы алгоритма A_1

В ходе анализа будем использовать обозначения алгоритма A_g , а именно, M — паросочетание максимального веса, $(t-2)$ — количество легких ребер.

Пусть $W_1(M)$ — вес тяжелых ребер паросочетания. Очевидна справедливость оценки

$$W_1(M) \geq W(M) \left(1 - \frac{t-2}{\mu}\right). \quad (3.3)$$

Лемма 4. *Вес построенного циклового покрытия \tilde{C}_1 удовлетворяет неравенству*

$$W(\tilde{C}_1) \geq 2W(M) \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(1 - \frac{t-2}{\mu}\right) \cos \frac{\alpha(d, t)}{2}.$$

Доказательство. Пусть $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{t-2}$ — номера легких ребер и K_1, \dots, K_{t-1} — совокупность $\alpha(d, t)$ -наборов. При этом $K_i = \{I_j \mid \nu_{i-1} < j < \nu_i\}$, $1 \leq i < t$; $\nu_0 = 0$.

Запишем вес гамильтонова обхода \tilde{H}_1 , построенного на этапе 1, в виде $W(H_1) = W(E_1) + W(E_2)$, где E_1 — множество ребер обхода \tilde{H}_1 с концевыми вершинами, принадлежащими тяжелым ребрам, E_2 — множество ребер обхода \tilde{H}_1 , смежных легким ребрам.

С учетом неравенства (3.2) имеем

$$\begin{aligned} W(E_1) &= \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i-2} \max\{w(x_j, x_{j+1}) + w(y_j, y_{j+1}), w(x_j, y_{j+1}) + w(y_j, x_{j+1})\} + w(I_1) + w(I_m) \\ &\geq \cos \frac{\alpha(d, t)}{2} \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i-2} (w(I_j) + w(I_{j+1})) + w(I_1) + w(I_m) \\ &\geq \cos \frac{\alpha(d, t)}{2} \left(2W_1(M) - \sum_{i=1}^{t-2} (w(I_{\nu_i-1}) + w(I_{\nu_i+1}))\right), \\ W(E_2) &= \sum_{i=1}^{t-2} \max\{w(x_{\nu_i-1}, x_{\nu_i}) + w(y_{\nu_i-1}, y_{\nu_i}), w(x_{\nu_i-1}, y_{\nu_i}) + w(y_{\nu_i-1}, x_{\nu_i})\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t-2} \max\{w(x_{\nu_i}, x_{\nu_i+1}) + w(y_{\nu_i}, y_{\nu_i+1}), w(x_{\nu_i}, y_{\nu_i+1}) + w(y_{\nu_i}, x_{\nu_i+1})\} \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{t-2} \max\{w(I_{\nu_{i-1}}), w(I_{\nu_i})\} + \sum_{i=1}^{t-2} \max\{w(I_{\nu_i}), w(I_{\nu_{i+1}})\} \geq \sum_{i=1}^{t-2} (w(I_{\nu_{i-1}}) + w(I_{\nu_{i+1}})).$$

Суммируя $W(E_1)$ и $W(E_2)$, с учетом (3.3) получим

$$W(\tilde{H}_1) \geq 2W(M) \left(1 - \frac{t-2}{\mu}\right) \cos \frac{\alpha(d, t)}{2}.$$

Далее, поскольку в качестве решения \tilde{C}_1 выбирается лучшее из n построенных решений, имеем

$$nW(\tilde{C}_1) \geq \sum_{j=0}^{n-1} W(\tilde{Q}_j).$$

Так как решения \tilde{Q}_j получены циклическим сдвигом оставляемых ребер цикла, соединенных хордами, имеем, что каждое ребро цикла выбрасывается суммарно m раз и $n - m$ раз входит в решение. Таким образом, игнорируя вес хорд, мы получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} W(\tilde{Q}_j) \geq (n - m)W(\tilde{H}_1),$$

а значит,

$$W(\tilde{C}_1) \geq \left(1 - \frac{m}{n}\right)W(\tilde{H}_1).$$

Лемма доказана.

Пусть C^* — оптимальное цикловое покрытие задачи Euclidean MAX m -CYCLES COVER.

Лемма 5. $2W(M) \geq \left(1 - \frac{m}{n}\right)W(C^*).$

Доказательство. Покажем, что C^* можно перестроить в гамильтонов цикл, потеряв вес не более, чем вес $(m - 1)$ самых легких ребер.

Выберем наиболее легкое ребро $e_1 = (x, y)$ из множества ребер C^* и наиболее тяжелое ребро $e_2 = (u, v)$ среди ребер всех циклов, не содержащих e_1 . Циклы, содержащие e_1 и e_2 , можно объединить в один, заменив ребра e_1, e_2 либо на пару ребер $a = (x, u)$, $b = (y, v)$, либо на пару ребер $c = (x, v)$, $d = (y, u)$. Выберем вариант замены с большей суммой ребер.

В силу неравенства треугольника $w(e_2) \leq w(a) + w(c)$ и $w(e_2) \leq w(b) + w(d)$. Сложив эти неравенства, получим $2w(e_2) \leq w(a) + w(b) + w(c) + w(d)$ и, следовательно, $w(e_2) \leq \max(w(a) + w(b), w(c) + w(d))$. Значит, при замене на лучший из вариантов добавляемые ребра компенсируют вес e_2 и потеря веса не превышает $w(e_1)$.

Повторим процедуру объединения пар циклов $m - 1$ раз, каждый раз выбирая наиболее легкое ребро и наиболее тяжелое ребро из отличного цикла. Наконец, получив гамильтонов цикл, в случае нечетного n удалим из него самое легкое ребро. Разобьем оставшиеся ребра на два паросочетания M_1 и M_2 .

Поскольку удаляется ребро минимального веса, а также максимального веса из другого цикла, нетрудно видеть, что на каждом j -м шаге процедуры объединения среди ребер циклового покрытия сохраняются все ребра, имеющие с j -го по m -й минимальные веса в C^* . Значит, суммарный потерянный вес не превышает веса m наиболее легких ребер C^* , следовательно, оценивается сверху величиной $(m/n)W(C^*)$. Имеем

$$W(C^*) \leq \frac{m}{n}W(C^*) + W(M_1) + W(M_2) \leq \frac{m}{n}W(C^*) + 2W(M).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. Для веса циклового покрытия \tilde{C}_1 справедлива оценка точности

$$\rho_A = \frac{W(\tilde{C}_1)}{W(C^*)} \geq 1 - 2 \frac{m+t-1}{n} - \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}.$$

Доказательство. С учетом лемм 1, 4 и 5, а также очевидного соотношения $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{W(\tilde{C}_1)}{W(C^*)} \geq \left(1 - \frac{m}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{t-2}{\mu}\right) \cos \frac{\alpha(d,t)}{2} \\ &\geq \left(1 - \frac{m}{n} - \frac{m}{n} - \frac{t-2}{\mu}\right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha(d,t)}{4}\right) \geq \left(1 - 2 \frac{m+t-1}{n}\right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha(d,t)}{4}\right) \\ &\geq 1 - 2 \frac{m+t-1}{n} - 2 \sin^2 \frac{\alpha(d,t)}{4} \geq 1 - 2 \frac{m+t-1}{n} - \sin^2 \frac{\alpha(d,t)}{2} \geq 1 - 2 \frac{m+t-1}{n} - \frac{\gamma_d}{t^{2/(d-1)}}. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство в цепочке следует из $2 \sin^2(\varphi/2) = 1 - \cos \varphi \leq 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$, верного для всех $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Лемма доказана.

Теорема 2. В случае $m = o(n)$ алгоритм A_1 при величине параметра $t^* = \lceil n^{\frac{d-1}{d+1}} \rceil$ за время $O(n^3)$ находит асимптотически точное решение задачи Euclidean MAX m -CYCLES COVER.

Доказательство. Подставив величину t^* в оценку точности алгоритма, получим

$$\rho_A \geq 1 - 2 \frac{m+t^*-1}{n} - \frac{\gamma_d}{(t^*)^{2/(d-1)}} \geq 1 - 2 \frac{m}{n} - 2 \frac{n^{\frac{d-1}{d+1}}}{n} - \frac{\gamma_d}{n^{2/(d+1)}} = 1 - (2m)n^{-1} - \beta_d n^{-2/(d+1)} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$. При этом константа β_d зависит только от размерности пространства.

Временная сложность алгоритма определяется трудоемкостью алгоритма A_g и имеет оценку $O(n^3)$.

Теорема доказана.

4. Приближенный алгоритм решения задачи Random MIN m -CYCLES COVER на случайных входах UNI(0, 1)

Предполагаем, что веса ребер полного графа на n -вершинном множестве V определены на классе UNI(0, 1) случайных входов, состоящих из независимых случайных величин с одинаковой функцией равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$.

4.1. Алгоритм A_2

Алгоритм A_2 представляет модификацию общего алгоритма \tilde{A} на минимум применительно к решению задачи Random MIN m -CYCLES COVER на случайных входах UNI(0, 1). На этапе 1 находим гамильтонов цикл \tilde{H}_2 посредством приближенного асимптотически точного алгоритма решения TSP из работы А. Фриза [6]. На этапе 2 для решения вспомогательной задачи (1.2) используется специальная процедура (алгоритм $A_{p,m}$) на случайном графе.

В качестве отправной конструкции (остовного подграфа полного графа K_n), из которой строится гамильтонов цикл \tilde{H}_2 , в работе [6] используется 2-фактор минимального веса. Напомним, что 2-фактор — это остовный подграф графа K_n , в котором каждая вершина имеет степень 2. Другими словами, это есть семейство вершинно несмежных циклов, покрывающих все вершины графа. Известно, что 2-фактор минимального веса строится за время $O(n^3)$ [8].

Пусть z_{TSP} , z_{2FAC} , z_{MST} означают веса минимального гамильтонова цикла, минимального 2-фактора и минимального остовного дерева соответственно, а аббревиатура **whp** (“с высокой вероятностью”), используемая в англоязычной литературе, означает, что случайное событие B_n в последовательности $\{B_n\}$ происходит с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Главным результатом работы [6] является

Теорема 3 [6, теорема 1].

$$z_{TSP} - z_{2FAC} = o(1) \quad \mathbf{whp}. \quad (4.1)$$

Более того, за время $O(n^3)$ **whp** строится тур (гамильтонов цикл \tilde{H}_2) длиной

$$W(\tilde{H}_2) = z_{2FAC} + o(1).$$

Еще ранее А. Фризом [7] было доказано, что **whp** $z_{MST} \geq 1.202$, откуда с учетом очевидных неравенств $z_{TSP} \geq z_{2FAC}$, $z_{TSP} \geq z_{MST}$ и формулы (4.1) имеем

$$\frac{W(\tilde{H}_2)}{z_{TSP}} = \frac{z_{2FAC} + o(1)}{z_{TSP}} \leq 1 + \frac{o(1)}{z_{TSP}} \leq 1 + \frac{o(1)}{z_{MST}} \leq 1 + \frac{o(1)}{1.202} = 1 + o(1) \quad \mathbf{whp}, \quad (4.2)$$

т. е. алгоритм, представленный в работе [6], за время $O(n^3)$ строит асимптотически точное решение задачи MIN TSP.

4.2. Приближенный алгоритм решения вспомогательной задачи (1.2) на случайном графе

Пусть p — параметр, $0 \leq p \leq 1$. Обозначим через $G'_p = (V, E', w')$ подграф графа $G = (V, E, w)$, где $E' = \{e \in E \setminus E(\tilde{H}_2) \mid w'(e) = w(e) \leq p\}$. Ясно, что в случайном графе G'_p на входах $\text{UNI}(0, 1)$ произвольное ребро e принадлежит множеству E' с вероятностью p .

Вспомогательную задачу (1.2) решаем (вообще говоря, приближенно) посредством процедуры $A_{p,m}$ с параметрами

$$p = \frac{1}{n^{1/3}}, \quad m \leq \frac{n^{1/3}}{\ln n}. \quad (4.3)$$

Обозначим через $q = \lfloor n/m \rfloor$, $\nu = n - qm$, $\{S_1, \dots, S_m\}$ — семейство несмежных сегментов (цепей) $(u_{k-1}, u_k]$ в гамильтоновом цикле \tilde{H}_2 , где

$$u_k = \begin{cases} kq, & \text{если } 1 \leq k < m - \nu, \\ (k+1)q, & \text{если } m - \nu \leq k \leq m, \end{cases} \quad k = 1, \dots, m.$$

Внутреннее ребро $e_k = (i, i+1)$ в сегменте S_k назовем *хорошим*, если случайный граф G'_p содержит пару ребер $(u_{k-1} + 1, i+1)$ и (i, u_k) .

Процедура $A_{p,m}$ состоит в выборе m хороших ребер (по одному в каждом сегменте). Если такие внутренние ребра не нашлись, то имеет место несрабатывание алгоритма A_2 . В противном случае использование соответствующих ребер-хорд цикла \tilde{H}_2 дает покрытие графа m циклами.

4.3. Анализ работы процедуры $A_{p,m}$

Нетрудно видеть, что процедура $A_{p,m}$ выполняется за линейное время.

Лемма 7. В каждом из m сегментов S_k , $k = 1, \dots, m$, **whp** имеется хорошее ребро.

Доказательство. Очевидно, что внутреннее ребро сегмента S_k является хорошим с вероятностью p^2 и плохим с вероятностью $1 - p^2$. Число внутренних ребер в сегменте не менее $q - 3$. Поэтому вероятность отсутствия хорошего ребра в фиксированном сегменте — не более $(1 - p^2)^{q-3}$, а вероятность найти хорошее ребро в каждом из m сегментов — не менее $(1 - (1 - p^2)^{q-3})^m \geq 1 - m(1 - p^2)^{q-3}$. Отсюда для оценки вероятности отсутствия хороших ребер в каждом из m сегментов имеем

$$\begin{aligned} m(1 - p^2)^{q-3} &\leq m \exp(- (q - 3)p^2) \leq m \exp\left(- \left(\frac{n}{m} - 3\right)p^2\right) = m \exp\left(- \frac{np^2}{m} (1 - o(1))\right) \\ &\leq \frac{n^{1/3}}{\ln n} \exp\left(- \frac{n \ln n}{n^{1/3} n^{2/3}} (1 - o(1))\right) = \frac{n^{1/3}}{\ln n} \frac{1}{n^{1-o(1)}} = \frac{1}{\ln n} \frac{1}{n^{2/3-o(1)}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Вес добавленных (замыкающих) ребер имеет величину $o(1)$.*

Доказательство. Поскольку добавляются ребра-хорды из случайного графа G'_p , а их вес по определению не превышает p , то суммарный вес добавленных ребер — не более

$$mp \leq \frac{n^{1/3}}{\ln n} \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

4.4. Основной результат о качестве работы алгоритма A_2

Теорема 4. *Алгоритм A_2 с использованием вспомогательной процедуры $A_{p,m}$ с параметрами (4.3) решает задачу Random MIN m -CYCLES COVER асимптотически точно за время $O(n^3)$.*

Доказательство. Поскольку вспомогательный алгоритм реализуется за линейное время, то временная сложность алгоритма A_2 предопределена временем решения задачи отыскания гамильтонова цикла в работе [6], а именно величиной $O(n^3)$.

Найденное цикловое покрытие \tilde{C} состоит, во-первых, из семейства сегментов S_1, \dots, S_m гамильтонова цикла \tilde{H}_2 без m “хороших ребер”, выявленных посредством процедуры $A_{p,m}$. Во-вторых, это покрытие включает в себя $2m$ добавленных (замыкающих) ребер-хорд вида $(u_{k-1} + 1, i + i)$ и (i, u_k) , $k = 1, \dots, m$.

С вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, с учетом лемм 7 и 8, а также соображений, упомянутых в обосновании цепочки соотношений (4.2), имеем

$$\begin{aligned} \frac{W(\tilde{C})}{W(C^*)} &\leq \frac{W(\tilde{H}_2) + mp}{z_{2FAC}} \leq \frac{z_{2FAC} + o(1) + mp}{z_{2FAC}} \\ &= 1 + \frac{o(1)}{z_{2FAC}} \leq 1 + \frac{o(1)}{z_{MST}} \leq 1 + \frac{o(1)}{1.202} = 1 + o(1) \quad \text{whp.} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что результаты работы алгоритма $A_{p,m}$ могут быть улучшены посредством использования операции “циклического сдвига”, описанной в подразд. 3.2.

5. Заключение

В настоящей статье рассматривалась задача m -CYCLES COVER — покрытие полного неориентированного графа m вершинно-несмежными циклами экстремального суммарного веса ребер. На основе так называемого TSP-подхода к решению задачи m -CYCLES COVER представлены два приближенных алгоритма с полиномиальной временной сложностью. Алгоритм A_1 решает задачу Euclidean MAX m -CYCLES COVER на детерминированных входах (весах ребер) в многомерном евклидовом пространстве. Показано, что этот алгоритм имеет временную сложность $O(n^3)$ и является асимптотически точным при числе покрывающих циклов $m = o(n)$. Алгоритм A_2 для задачи Random MIN m -CYCLES COVER на случайных входах $\text{UNI}(0, 1)$ реализуется за время $O(n^3)$ и при $m \leq n^{1/3}/\ln n$ строит асимптотически точное решение.

Для дальнейших исследований представляет интерес получение аналогичных результатов решения задач m -CYCLES COVER как на минимум, так и на максимум на классах входных данных, отличных от представленных в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 31. С. 35–42.
2. **Гимади Э.Х.** Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера // Методы оптимизации и их приложения: тр. XII Байкал. междунар. конф. Т. 1. Иркутск, 2001. С. 117–124.
3. **Сердюков А.И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Управляемые системы. Новосибирск, 1987. Вып. 27. С. 79–87.
4. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** Полиномиальная приближенная схема для евклидовой задачи о цикловом покрытии графа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 297–311.
5. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** Аппроксимируемость задачи о минимальном по весу цикловом покрытии графа // Докл. РАН. 2015. Т. 461, № 6. С. 644–649.
6. **Frieze A.M.** On random symmetric travelling salesman problems // Math. Oper. Res. 2004. Vol. 29, № 4. P. 878–890.
7. **Frieze A.M.** On the value of a random minimum spanning tree problem // Discrete Appl. Math. 1985. Vol. 10, № 1. P. 47–56.
8. **Gabow H.N.** An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. N.Y., 1983. P. 448–456.

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. научн. сотрудник
Институт математики СО РАН
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Поступила 10.05.2015

Рыков Иван Александрович
канд. физ.-мат. наук
научн. сотрудник
Институт математики СО РАН
e-mail: rykov@ngs.ru

УДК 519.16+519.85

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИОННАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА НА ДВА КЛАСТЕРА¹**А. В. Долгушев, А. В. Кельманов, В. В. Шенмайер**

Рассматривается NP -трудная в сильном смысле задача разбиения конечного множества точек евклидова пространства на два кластера заданных мощностей по критерию минимума суммы по обоим кластерам внутрикластерных сумм квадратов расстояний от элементов кластера до их центров. Предполагается, что центр одного из искомого кластера задан (без ограничения общности, в начале координат), а центр другого неизвестен и определяется как среднее значение по всем элементам, образующим этот кластер. Предложена полиномиальная аппроксимационная схема (PTAS).

Ключевые слова: кластерный анализ, евклидово пространство, NP -трудная задача, PTAS.

A. V. Dolgushev, A. V. Kel'manov, V. V. Shenmaier. Polynomial-time approximation scheme for a problem of partitioning a finite set into two clusters.

We consider the strongly NP -hard problem of partitioning a finite set of points of Euclidean space into two clusters of given cardinalities under the minimum criterion for the sum over the clusters of the intracluster sums of squared distances from elements of the cluster to its center. It is assumed that the center of one of the clusters is given (without loss of generality, at the origin). The center of the second cluster is unknown and is determined as the mean value over all elements in this cluster. A polynomial-time approximation scheme (PTAS) is provided.

Keywords: cluster analysis, Euclidean space, NP -hard problem, PTAS.

Введение

Предметом исследования работы является одна из NP -трудных в сильном смысле квадратичных задач би-разбиения конечного множества точек евклидова пространства. Цель исследования — обоснование полиномиальной приближенной схемы (PTAS) для ее решения.

Исследование мотивировано актуальностью задачи, в частности, в статистическом анализе данных, распознавании образов, компьютерной геометрии, а также в естественно-научных и технических приложениях, связанных с классификацией и интерпретацией наблюдаемых данных (см., например, [4; 9; 11–16; 18] и цитированные там работы).

К числу наиболее известных [2] задач анализа данных и распознавания образов относится задача MSSC (Minimum Sum-of-Squares Clustering) разбиения конечного множества точек евклидова пространства на заданное число кластеров по критерию минимума суммы по всем кластерам суммы квадратов внутрикластерных расстояний от элементов кластера до его геометрического центра (центроида), который определяется как среднее значение по всем элементам кластера. Двухкластерный — базовый — вариант задачи имеет следующую формулировку.

З а д а ч а Minimum Sum-of-Squares 2-Clustering (2-MSSC). Дано: конечное множество \mathcal{X} точек из \mathbb{R}^d . Найти разбиение множества \mathcal{X} на два непустых кластера \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 такое, что

$$\sum_{x \in \mathcal{C}_1} \|x - \bar{x}(\mathcal{C}_1)\|^2 + \sum_{x \in \mathcal{C}_2} \|x - \bar{x}(\mathcal{C}_2)\|^2 \rightarrow \min,$$

где $\bar{x}(\mathcal{C}_j) = 1/|\mathcal{C}_j| \sum_{x \in \mathcal{C}_j} x$ — геометрические центры (центроиды) кластеров ($j = 1, 2$).

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-07-00070, 15-01-00462 и 15-01-00976).

Геометрический смысл задачи ясен из ее формулировки. В статистической практике задача возникает при решении следующей задачи проверки гипотез. Имеется неоднородная выборка из двух d -мерных распределений. Соответствие элементов выборки распределению неизвестно. Требуется проверить гипотезу о том, что элементы этой выборки соответствуют двум гауссовским распределениям с неизвестными средними и одной и той же известной диагональной ковариационной матрицей с одинаковыми диагональными элементами.

Несмотря на полувековую известность задачи 2-MSSC, ее труднорешаемость установлена лишь несколько лет назад в [1]. В настоящей работе рассматривается близкая в постановочном плане, но не эквивалентная задача двухкластерного разбиения. В этой задаче так же, как и в задаче 2-MSSC, требуется разбить конечное множество точек евклидова пространства на два кластера по критерию минимума суммы по обоим кластерам внутрикластерных сумм. При этом одна из внутрикластерных сумм такая же, как и в задаче MSSC, т. е. это сумма квадратов расстояний от элементов кластера до неизвестного центроида $\bar{x}(C_1)$, а другая — сумма квадратов расстояний от элементов кластера до заданного в произвольной точке желаемого центра. Без ограничения общности заданным центром может служить начало координат. Поэтому в целевой функции рассматриваемой ниже задачи вместо центроида $\bar{x}(C_2)$ фигурирует центр 0 (см. следующий раздел). Кроме того, предполагается, что мощности кластеров заданы на входе.

Как и задача 2-MSSC, рассматриваемая задача индуцируется, в частности, проблемой проверки статистической гипотезы о том, что имеющаяся в распоряжении выборка неоднородна и содержит элементы, принадлежащие двум гауссовским распределениям с такими же (как в проблеме, порождающей задачу MSSC) свойствами ковариационных матриц. Отличие лишь в предположении о том, что у одного из распределений среднее предполагается равным нулю, а у другого — неизвестным. При этом известны размеры подвыборок, но соответствие их элементов распределению неизвестно. Содержательные проблемы из области помехоустойчивого анализа данных, которые также моделируют рассматриваемую задачу, можно найти, например, в [4; 9; 11; 14; 18].

Математическая формулировка задачи приведена в следующем разделе. Там же приведены характеристики существующих алгоритмов. Здесь лишь отметим, что из сильной NP -трудности задачи (см. следующий раздел), имеющей числовые входы, следует, что согласно [3; 17] для нее не существует ни точного полиномиального, ни точного псевдополиномиального алгоритмов, ни полностью полиномиальной приближенной схемы FPTAS, если $P \neq NP$. Поэтому представляет интерес выяснение вопроса аппроксимируемости задачи. В частности, актуален вопрос о построении схемы PTAS. В настоящей работе такая схема обоснована.

1. Формулировка задачи, известные и полученные результаты

Рассматриваемая задача, некоторые ее обобщения, а также полиномиально эквивалентная ей задача на максимум изучались в [4; 5; 7–18]. Задача имеет следующую формулировку.

З а д а ч а 1: Minimum Sum-of-Squares 2-Clustering with Given Center of One Cluster and Cluster Cardinalities. Дано: конечное множество \mathcal{X} точек из \mathbb{R}^d и натуральное число k . Найти разбиение множества \mathcal{X} на два непустых кластера \mathcal{C} и $\mathcal{X} \setminus \mathcal{C}$ такое, что

$$f(\mathcal{C}) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \|x - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}} \|x\|^2 \rightarrow \min,$$

где $\bar{x}(\mathcal{C}) = 1/|\mathcal{C}| \sum_{x \in \mathcal{C}} x$ — геометрический центр (центроид) кластера \mathcal{C} при ограничении $|\mathcal{C}| = k$.

Эта задача полиномиально эквивалентна [11] задаче Subset with the Longest Vector Sum (LVS) максимизации нормы суммы векторов подмножества заданной мощности, которая изучалась в [4; 7; 9; 14–16]. Из указанной полиномиальной эквивалентности и результатов [14–16]

о сложности задачи LVS следует, что задача 1 NP -трудна в сильном смысле. При этом в случае фиксированной размерности пространства задача 1 полиномиально разрешима за время $\mathcal{O}(d^2 n^{2d})$, где n — мощность входного множества \mathcal{X} , что является следствием соответствующих результатов для задачи LVS [10].

К числу других, найденных к настоящему времени алгоритмических решений, относятся следующие. В [11] предложен 2-приближенный алгоритм, трудоемкость которого есть величина $\mathcal{O}(dn^2)$. В [18] предложен рандомизированный алгоритм, который в случае $k \geq \beta n$ для некоторого $\beta \in (0, 1)$ при заданных относительной погрешности ε и вероятности несрабатывания алгоритма γ находит $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение задачи за время $\mathcal{O}(2^m d(m + n))$, где $m = \max(4/(\beta\gamma\varepsilon), 8/\beta \log(2/\gamma))$, линейное по n и d при фиксированных значениях β , γ и ε . Там же найдены условия, при которых этот алгоритм асимптотически точен и имеет трудоемкость $\mathcal{O}(dn^2)$. В [5] для случая фиксированной размерности d и целочисленных координат точек построен точный псевдополиномиальный алгоритм, имеющий трудоемкость $\mathcal{O}(n(kD)^d)$, где D — максимальное абсолютное значение координат входных точек. Для случая, когда размерность пространства фиксирована, также существует и полностью полиномиальная приближенная схема (FPTAS) с трудоемкостью $\mathcal{O}(n^2(1/\varepsilon)^{d/2})$ [17].

Основной результат настоящей работы — схема PTAS для общего случая, когда размерность пространства не фиксирована (d принадлежит входу задачи). Предложенная схема позволяет решать задачу 1 с произвольной относительной погрешностью ε за время $\mathcal{O}(dn^{2/\varepsilon+1} \times (9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$. Представленные результаты получены путем развития подхода, предложенного в работе [19] при построении полиномиальной приближенной схемы для задачи поиска подмножества векторов.

2. Геометрические основы алгоритма

Положим

$$F(y, \mathcal{C}) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \|x - y\|^2 + \sum_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}} \|x\|^2, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}. \quad (1)$$

Тогда $f(\mathcal{C}) = F(\bar{x}(\mathcal{C}), \mathcal{C})$ и справедливы следующие свойства функции (1).

С в о й с т в о 1. Для произвольной точки $y \in \mathbb{R}^d$ и конечного множества $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$F(y, \mathcal{C}) = f(\mathcal{C}) + |\mathcal{C}| \|y - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2. \quad (2)$$

Действительно,

$$F(y, \mathcal{C}) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \|x - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2 - \sum_{x \in \mathcal{C}} 2 \langle x - \bar{x}(\mathcal{C}), y - \bar{x}(\mathcal{C}) \rangle + \sum_{x \in \mathcal{C}} \|y - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}} \|x\|^2,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Но сумма первого и последнего слагаемого в полученном выражении равна $f(\mathcal{C})$, третье слагаемое равно $|\mathcal{C}| \|y - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2$, а второе равно нулю в силу того, что $\sum_{x \in \mathcal{C}} x = |\mathcal{C}| \bar{x}(\mathcal{C})$.

С в о й с т в о 2. Для любого фиксированного подмножества \mathcal{C} минимум функции $F(y, \mathcal{C})$ по y достигается в точке $y = \bar{x}(\mathcal{C})$ и равен $f(\mathcal{C})$.

Справедливость следует из (2).

Для произвольной точки $y \in \mathbb{R}^d$ определим множество \mathcal{C}^y , состоящее либо из k точек множества \mathcal{X} , имеющих наибольшие проекции на луч из начала координат в точку y , если эта точка не равна нулевому вектору, либо из произвольных k точек множества \mathcal{X} — в противном случае.

С в о й с т в о 3. Для любой фиксированной точки $y \in \mathbb{R}^d$ минимум функции $F(y, \mathcal{C})$ по всем k -элементным подмножествам \mathcal{C} достигается на подмножестве \mathcal{C}^y .

Справедливость свойства следует из равенства

$$F(y, \mathcal{C}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \|x\|^2 + k \|y\|^2 - 2 \sum_{x \in \mathcal{C}} \langle x, y \rangle,$$

в правой части которого первые два члена — константы.

Свойство 2 показывает, что приближенное решение задачи 1 может быть найдено с помощью аппроксимации центроида $\bar{x}(\mathcal{C}^*)$ оптимального кластера \mathcal{C}^* некоторой построенной специальным образом точкой y из \mathbb{R}^d . При этом в силу свойства 3 справедливо неравенство $F(y, \mathcal{C}^y) \leq F(y, \mathcal{C}^*)$, и, следовательно, в соответствии с (2) абсолютная ошибка аппроксимации $F(y, \mathcal{C}^y) - f(\mathcal{C}^*)$ не превосходит величины $k \|y - \bar{x}(\mathcal{C}^*)\|^2$. Фактически, эти наблюдения показывают, что приближенное решение задачи 1 можно искать путем выбора наилучшего решения в семействе решений \mathcal{C}^y , построенных для точек y , принадлежащих некоторому конечному множеству — специально построенной сетке с шагом, определяющим погрешность решения.

Обозначим через

$$\varepsilon(y, \mathcal{C}) = \frac{F(y, \mathcal{C}) - f(\mathcal{C})}{f(\mathcal{C})}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}, \quad (3)$$

относительную погрешность приближения значения функции $f(\mathcal{C})$ значением функции $F(y, \mathcal{C})$.

Лемма 1. Пусть y — произвольная точка пространства \mathbb{R}^d . Тогда для относительной погрешности аппроксимации оптимального значения $f(\mathcal{C}^*)$ значением $f(\mathcal{C}^y)$ на допустимом подмножестве имеет место оценка

$$\frac{f(\mathcal{C}^y) - f(\mathcal{C}^*)}{f(\mathcal{C}^*)} \leq \varepsilon(y, \mathcal{C}^*).$$

Доказательство. Действительно, в силу свойств 2 и 3 имеем $f(\mathcal{C}^y) \leq F(y, \mathcal{C}^y) \leq F(y, \mathcal{C}^*)$. Отсюда следует справедливость леммы.

Иными словами, относительная погрешность $\varepsilon(y, \mathcal{C}^*)$ приближения к оптимальному значению $f(\mathcal{C}^*)$ значения функции $F(y, \mathcal{C}^*)$ в некоторой точке y является верхней оценкой для относительной погрешности аппроксимации оптимального значения $f(\mathcal{C}^*)$ значением целевой функции $f(\mathcal{C}^y)$ на допустимом решении. Этот факт используется ниже при оценивании погрешности приближения (в теореме 2).

Лемма 2. Пусть y — произвольная точка из \mathbb{R}^d и $v = v(y, \mathcal{C})$ — ближайшая к центроиду $\bar{x}(\mathcal{C})$ точка, лежащая на одном из множества лучей, проведенных из y во все точки множества \mathcal{C} . Тогда для относительной погрешности приближения значения функции $f(\mathcal{C})$ значением функции $F(v, \mathcal{C})$ справедлива оценка

$$\varepsilon(v, \mathcal{C}) \leq \frac{\varepsilon(y, \mathcal{C})}{1 + \varepsilon(y, \mathcal{C})}.$$

Доказательство. Для произвольной точки $z \in \mathbb{R}^d$ согласно определению величины $\varepsilon(z, \mathcal{C})$ и свойству 1 имеем

$$\varepsilon(z, \mathcal{C}) = \frac{|\mathcal{C}| \|z - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2}{\sum_{x \in \mathcal{C}} \|x - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}} \|x\|^2}.$$

Отсюда следует, что если из входа \mathcal{X} задачи 1 исключить точки множества $\mathcal{X} \setminus \mathcal{C}$, то величина $\varepsilon(z, \mathcal{C})$ увеличится в c раз, где

$$c = 1 + \frac{\sum_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}} \|x\|^2}{\sum_{x \in \mathcal{C}} \|x - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2}$$

— константа, не зависящая от выбора точки z и превосходящая либо равная 1. Следовательно, отношение левой части доказываемого неравенства к правой при указанном исключении из множества \mathcal{X} множества $\mathcal{X} \setminus \mathcal{C}$ не уменьшится. Поэтому достаточно доказать утверждение леммы для случая, когда $\mathcal{X} = \mathcal{C}$, и, следовательно, когда в соответствии с (1) имеет место равенство $F(y, \mathcal{C}) = \sum_{x \in \mathcal{C}} \|x - y\|^2$.

Продолжение доказательства далее аналогично доказательству, изложенному в [19], и приводится здесь ради полноты изложения.

Для упрощения выкладок выберем систему координат, в которой точка $\bar{x}(\mathcal{C})$ совпадает с началом координат O , а координатные оси повернуты таким образом, что точка y лежит на первой из них, т. е. $y = (y(1), 0, \dots, 0)$. Для определенности пусть $y(1) \geq 0$, а точка v находится в плоскости, образованной первой и второй координатными осями.

Поскольку точка O — центроид кластера \mathcal{C} , то среди его точек найдутся такие, что лежат в полупространстве $x(1) \leq 0$. Следовательно, луч yv пересекает гиперплоскость $x(1) = 0$ в некоторой точке $A = (0, a, 0, \dots, 0)$. При этом, если одно из чисел $y(1)$ или a равно нулю, то точка y совпадает с оптимальным решением $\bar{x}(\mathcal{C})$. Следовательно, утверждение леммы очевидно. Поэтому, не нарушая общности, будем предполагать, что $a > 0$ и $y(1) > 0$.

Заметим, что согласно выбору луча yv , все точки кластера \mathcal{C} находятся вне конуса \mathcal{C} , образованного лучом yv и $(d-1)$ -мерным шаром радиуса a , находящимся в гиперплоскости $x(1) = 0$, с центром в начале координат.

Из равенства (2) и определения (3) имеем

$$\varepsilon(y, \mathcal{C}) = \frac{\|y\|^2 k}{F(O, \mathcal{C})} = \frac{y(1)^2 k}{F(O, \mathcal{C})}. \quad (4)$$

Из геометрических соображений следует

$$\varepsilon(v, \mathcal{C}) = \frac{\|v\|^2 k}{F(O, \mathcal{C})} = \frac{a^2 y(1)^2}{a^2 + y(1)^2} \frac{k}{F(O, \mathcal{C})}. \quad (5)$$

Оценим величину $F(O, \mathcal{C})$. Применим для этого технику упрощений, заключающуюся в переходе к более простой геометрической структуре с сохранением оцениваемой величины. Заметим, что $F(O, \mathcal{C}) = F(O', \mathcal{C}')$, где $O' = (0, 0)$, а множество \mathcal{C}' состоит из точек вида $x' = (x(1), \sqrt{\|x\|^2 - x(1)^2})$, где $x \in \mathcal{C}$. Действительно, каждая точка x' совпадает по первой координате с исходной точкой x , а вторая координата точки x' равна расстоянию от x до первой оси координат. Следовательно, $\|x'\| = \|x\|$.

Далее, в силу того, что $O' = (0, 0)$ и что среднее квадратов не меньше квадрата среднего, имеем $F(O', \mathcal{C}') \geq k \|x'\|^2$, где $x' = \bar{x}(\mathcal{C}')$. Но поскольку точки исходного кластера \mathcal{C} лежат вне конуса \mathcal{C} , то точки множества \mathcal{C}' лежат над прямой, соединяющей точки $y' = (y(1), 0)$ и $A' = (0, a)$. Следовательно, точка x' также лежит над этой прямой. При этом, поскольку $x'(1) = 0$, имеем $\|x'\| \geq a$. Отсюда

$$F(O, \mathcal{C}) \geq k a^2. \quad (6)$$

Подставим оценку (6) в равенство (5). Имеем

$$\varepsilon(v, \mathcal{C}) \leq \frac{y(1)^2}{a^2 + y(1)^2}. \quad (7)$$

С другой стороны, объединяя равенства (4) и (5), получим

$$\varepsilon(v, \mathcal{C}) = \frac{a^2 \varepsilon(y, \mathcal{C})}{a^2 + y(1)^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим правые части выражений (7) и (8) как функции от аргумента a . Первая из них монотонно убывает от 1 до 0, вторая монотонно возрастает от 0 до $\varepsilon(y, \mathcal{C})$. Следовательно, наименьшее из значений этих двух функций будет максимально в точке их равенства,

определяемой соотношением $y(1)^2 = a^2 \varepsilon(y, \mathcal{C})$. Таким образом,

$$\varepsilon(v, \mathcal{C}) \leq \frac{a^2 \varepsilon(y, \mathcal{C})}{a^2 + a^2 \varepsilon(y, \mathcal{C})} = \frac{\varepsilon(y, \mathcal{C})}{1 + \varepsilon(y, \mathcal{C})}.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Пусть \mathcal{C} — произвольное множество точек мощности k и натуральное число t не превосходит k . Тогда линейная оболочка одного из подмножеств \mathcal{C} мощности t содержит точку x_t такую, что $\varepsilon(x_t, \mathcal{C}) \leq 1/t$.

Доказательство проводится индукцией по t .

База индукции: $t = 1$. Пусть точка x_1 — ближайшая к центру из всех точек множества \mathcal{C} . Тогда $F(\bar{x}(\mathcal{C}), \mathcal{C}) \geq k \|x_1 - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2$. Следовательно,

$$F(x_1, \mathcal{C}) = F(\bar{x}(\mathcal{C}), \mathcal{C}) + k \|x_1 - \bar{x}(\mathcal{C})\|^2 \leq 2F(\bar{x}(\mathcal{C}), \mathcal{C}).$$

Таким образом, $\varepsilon(x_1, \mathcal{C}) \leq 1$.

Индуктивный переход. Рассмотрим в качестве точки x_{t+1} точку $x(x_t, \mathcal{C})$ из леммы 2. Заметим, что эта точка лежит в линейной оболочке $(t+1)$ -й точки множества \mathcal{C} . При этом согласно лемме 2 имеем

$$\varepsilon(x_{t+1}, \mathcal{C}) \leq \frac{\varepsilon(x_t, \mathcal{C})}{1 + \varepsilon(x_t, \mathcal{C})}.$$

По индукции $x_t \leq 1/t$. Следовательно,

$$\varepsilon(x_{t+1}, \mathcal{C}) = \frac{1}{1/\varepsilon(x_t, \mathcal{C}) + 1} \leq \frac{1}{t+1}.$$

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы также справедливо, поскольку точка $\bar{x}(\mathcal{C})$ принадлежит линейной оболочке k точек из \mathcal{C} и при этом $\varepsilon(\bar{x}(\mathcal{C}), \mathcal{C}) = 0 < 1/t$.

З а м е ч а н и е 2. Доказанная оценка относительной погрешности является достижимой при любых t .

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть в качестве множества \mathcal{C} набор из k единичных орт пространства \mathbb{R}^k . Расстояние от начала координат $O = (0, \dots, 0)$ до центра данного кластера равно величине $\sqrt{1/k}$. Отсюда и из равенства (2) получаем $f(\mathcal{C}) = F(O, \mathcal{C}) - k/k = k - 1$.

С другой стороны, линейная оболочка любых t единичных орт находится на расстоянии $\sqrt{1/t}$ от начала координат. Следовательно, согласно неравенству треугольника расстояние от точки y_t до центра кластера не меньше величины $\sqrt{1/t} - \sqrt{1/k}$. Отсюда в силу равенства (2) имеем

$$F(x_t, \mathcal{C}) - f(\mathcal{C}) \geq k(1/t - 2/\sqrt{tk} + 1/k).$$

Таким образом,

$$\varepsilon(x_t, \mathcal{C}) \geq (1/t - 2/\sqrt{tk} + 1/k) / (1 - 1/k),$$

что стремится к величине $1/t$ с ростом k .

Фактически, теорема 1 показывает, что в совокупности линейных оболочек всех t -элементных подмножеств множества \mathcal{X} найдется такая, что будет содержать точку, гарантирующую относительную погрешность аппроксимации не хуже, чем $1/t$. Этот факт используется ниже для построения аппроксимационной схемы.

3. Схема PTAS

Суть предлагаемого ниже сеточного подхода к построению схемы PTAS заключается в отыскании ограниченной области пространства, в которой находится точка x_t , являющаяся центроидом приближенного решения задачи 1 с относительной погрешностью $1/t$. Для отыскания этой области в линейной оболочке t -элементного подмножества точек множества \mathcal{X} формируется $(t-1)$ -мерная сетка (решетка) с шагом h и числом узлов s^{t-1} , где s — целочисленный параметр алгоритма, h — константа, вычисляемая на предварительном шаге алгоритма, исходя из следующих соображений.

Пусть \mathcal{C}^* — оптимальный кластер, точки x_1, \dots, x_t последовательно построены с помощью леммы 2 применительно к множеству \mathcal{C}^* . Тогда из геометрических соображений имеем

$$\|x_t - \bar{x}(\mathcal{C}^*)\| \leq \|x_1 - \bar{x}(\mathcal{C}^*)\| \leq \sqrt{f(\mathcal{C}^*)/k}.$$

В полученном выражении величина $f(\mathcal{C}^*)$ неизвестна, но она может быть оценена сверху значением $f(\hat{\mathcal{C}}) = \min_{x \in \mathcal{X}} f(\mathcal{C}^x)$ целевой функции задачи 1 на 2-приближенном решении $\hat{\mathcal{C}}$, полученном с помощью алгоритма, изложенного в [11] (перебором всех точек входного множества \mathcal{X} в качестве допустимых центров искомого кластера). Отсюда

$$\|x_t - \bar{x}(\mathcal{C}^*)\| \leq A, \quad (9)$$

где $A = \sqrt{f(\hat{\mathcal{C}})/k}$. Таким образом, в силу неравенства треугольника для нахождения области, в которой находится точка x_t , достаточно анализировать окрестности радиуса $2A$ рассматриваемых t -элементных подмножеств. Этот радиус, как показано выше, можно вычислить на предварительном этапе алгоритма.

Пусть $\{z_1, \dots, z_t\}$ — произвольный набор точек из \mathcal{X} . Рассмотрим $(t-1)$ -мерную сетку на линейной оболочке точек из этого набора. В качестве центра сетки возьмем точку z_1 , в качестве базиса сетки возьмем ортонормированный базис, получаемый по правилам линейной алгебры из точек $z_2 - z_1, \dots, z_t - z_1$, а в качестве шага сетки возьмем величину

$$h = 4A/s = 4/s \sqrt{f(\hat{\mathcal{C}})/k}, \quad (10)$$

где s — целочисленный параметр алгоритма. Заметим, что евклидов шар радиуса $2A$ покрывают не более, чем s^{t-1} ячеек построенной сетки. Поэтому для поиска ограниченной области, содержащей точку x_t , достаточно просмотреть s^{t-1} узлов сетки.

Оценим качество наилучшего сеточного решения, т. е. решения, получаемого путем аппроксимации точки x_t ближайшим узлом построенной сетки.

Лемма 3. Пусть $\{z_1, \dots, z_t\}$ — набор точек из \mathcal{C}^* , определенный в соответствии с леммой 2, в линейной оболочке которого лежит искомая точка x_t , y — ближайший к x_t узел построенной сетки. Тогда

$$\varepsilon(y, \mathcal{C}^*) \leq \varepsilon(x_t, \mathcal{C}^*) + 8\zeta(t, s), \quad (11)$$

где $\zeta(t, s) = \sqrt{t-1}/s + (t-1)/s^2$.

Доказательство. В $(t-1)$ -мерном евклидовом пространстве расстояние от точки x_t до ближайшего узла y сетки с равномерным шагом h , очевидно, не превосходит величины $u = h/2\sqrt{t-1}$. Отсюда и из равенства (2) получаем

$$F(y, \mathcal{C}^*) - F(x_t, \mathcal{C}^*) \leq k((a+u)^2 - a^2),$$

где $a = \|x_t - \bar{x}(\mathcal{C}^*)\|$.

Далее, в силу неравенства (9) имеем $a \leq A$, следовательно,

$$(a + u)^2 - a^2 \leq 2Au + u^2 = Ah\sqrt{t-1} + h^2/4(t-1) = 4A^2/s\sqrt{t-1} + 4A^2/s^2(t-1) = 4A^2 \zeta(t, s).$$

Таким образом,

$$F(y, \mathcal{C}^*) - F(x_t, \mathcal{C}^*) \leq 4k A^2 \zeta(t, s) = 4f(\widehat{\mathcal{C}}) \zeta(t, s).$$

Кроме того, из теоремы 1 следует, что $f(\widehat{\mathcal{C}}) \leq 2f(\mathcal{C}^*)$. Поэтому

$$F(y, \mathcal{C}^*) - F(x_t, \mathcal{C}^*) \leq 8f(\mathcal{C}^*) \zeta(t, s).$$

Поделив это выражение на $f(\mathcal{C}^*)$, получим (11).

Лемма доказана.

Приведем схематично пошаговую запись алгоритма.

А л г о р и т м \mathcal{A} .

Шаг 1. Найдем 2-приближенное решение $\widehat{\mathcal{C}}$ задачи 1 и значение $f(\widehat{\mathcal{C}})$ целевой функции с помощью алгоритма, предложенного в [11]. Вычислим шаг h сетки по формуле (10).

Шаг 2. Для каждого подмножества фиксированной мощности $t \in \{2, \dots, n\}$ входного множества \mathcal{X} построим линейную оболочку и ее дискретную сетку с шагом h .

Шаг 3. Для каждого узла y сетки, лежащего в шаре радиуса $2\sqrt{f(\widehat{\mathcal{C}})/k}$, построим подмножество \mathcal{C}^y .

Шаг 4. По формуле (2) вычислим значение функции $F(y, \mathcal{C}^y)$.

Шаг 5. В семействе решений, найденных на шагах 2, 3 и 4, выберем точку \widehat{y} и подмножество $\widehat{\mathcal{C}}^y$, для которых значение функции минимально. Выбранное подмножество объявим решением задачи 1.

Теорема 2. Алгоритм \mathcal{A} находит приближенное решение задачи с относительной погрешностью $1/t + 8\zeta(t, s)$, где $\zeta(t, s) = \sqrt{t-1}/s + (t-1)/s^2$, за время $O(dn^{t+1}s^{t-1})$.

Доказательство. В соответствии с пошаговой записью алгоритма \mathcal{A} он заключается в переборе $n^t s^{t-1}$ кандидатов на роль центра искомого кластера и выборе среди этих кандидатов наилучшего. Согласно теореме 1 и леммам 1 и 3 такая последовательность вычислений приведет к решению, имеющему относительную погрешность $1/t + 8\zeta(t, s)$. Поскольку выбор k точек множества \mathcal{X} , имеющих наибольшие проекции на направление к локальному центру, занимает не более n операций (например, с помощью предложенного в [6] алгоритма поиска k -го наименьшего числа в массиве из n чисел), а все арифметические операции с точками линейно зависят от размерности пространства, трудоемкость алгоритма \mathcal{A} оценивается величиной $O(dn^{t+1}s^{t-1})$.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Арифметические операции над точками можно реализовать таким образом, что погрешность вычисления узлов сетки будет пренебрежительно мала по сравнению с шагом сетки и, следовательно, не повлияет на оценку относительной погрешности алгоритма.

Следствие 1. При $t = 1$ алгоритм имеет относительную погрешность 1 (или, другими словами, относительную точность 2) и трудоемкость $O(dn^2)$, что совпадает с результатом, полученным в работе [11].

Следствие 2. В случае, когда $t = 2$, алгоритм имеет относительную погрешность $1/2 + \varepsilon$ и трудоемкость $O(dn^3/\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1]$. В этом случае в качестве s достаточно взять величину $9/\varepsilon$.

Следствие 3. При $t = 2/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и $s = 9t^{3/2}$ алгоритм позволяет решать задачу 1 с относительной погрешностью ε за время $O(dn^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$.

Действительно, при выбранном s имеем $\zeta(t, s) \leq 1/(9t) + 1/(81t^2) \leq 1/(8t)$. Следовательно, относительная погрешность алгоритма не превосходит величины $2/t = \varepsilon$. Оценка трудоемкости алгоритма следует из того, что $s^{t-1} = (9t^{3/2})^{t-1} \leq (9(2/\varepsilon)^{3/2})^{2/\varepsilon} \leq (9/\varepsilon)^{3/\varepsilon}$. Таким образом, получена схема PTAS.

Заключение

В работе построена схема PTAS для NP -трудной в сильном смысле задачи би-разбиения конечного множества точек евклидова пространства на два кластера заданных мощностей по критерию минимума суммы по обоим кластерам сумм квадратов внутрикластерных расстояний от элементов кластеров до их центров при условии, что центр одного из искомым кластеров задан в начале координат, а центр другого неизвестен и определяется как среднее значение по всем элементам, образующим этот кластер.

Одним из направлений дальнейших исследований является изучение важного частного случая рассмотренной задачи, когда размерность пространства не фиксирована, но ограничена величиной $C \log n$, где C — некоторая константа. Актуальность этого случая объясняется тем, что размерность $\mathcal{O}(\log n)$ пространства является минимальной, при которой возможно существование n -элементного множества точек с координатами из фиксированного конечного набора значений. Вопрос о сложностном статусе задачи 1 в указанном случае открыт, и, возможно, для него существует полиномиальная приближенная схема с существенно меньшей трудоемкостью, чем построенная в настоящей работе схема для общего случая задачи.

Другим интересным вопросом является изучение близкой в постановочном плане задачи, в которой геометрический размер каждого кластера определяется не через суммарное квадратичное отклонение точек кластера от его центра, а через чебышевский радиус кластера, т. е. радиус минимальной сферы, охватывающей кластер.

И наконец, необходимо отметить, что несмотря на существование приближенной полиномиальной схемы для задачи 1, доказанное выше, для полиномиально эквивалентной ей задачи LVS — максимизации нормы суммы векторов подмножества заданной мощности — в общем случае до сих пор не известно не только схемы PTAS, но даже какого-либо приближенного полиномиального алгоритма с константной точностью. Иными словами, вопрос о принадлежности задачи LVS классу APX открыт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NP -hardness of Euclidean sum-of-squares clustering / D. Aloise, A. Deshpande, P. Hansen, P. Popat // Machine Learning. 2009. Vol. 75, no. 2. P. 245–248.
2. **Anil K., Jain K.** Data clustering: 50 years beyond k -means // Pattern Recognition Letters. 2010. Vol. 31. P. 651–666.
3. **Garey M.R., Johnson D.S.** Computers and intractability: a guide to the theory of NP -completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 314 p.
4. A posteriori detecting a quasiperiodic fragment in a numerical sequence / E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, M. A. Kel'manova, S. A. Khamidullin // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, no. 1. P. 30–42.
5. **Kel'manov A., Khandeev V.** An exact pseudopolynomial algorithm for a bi-partitioning problem // Optimization and Applications — OPTIMA-2014: Proc. V Intern. Conf. (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 4.) Moscow: Dorodnicyn Computing Centre of RAS, 2014. P. 108–109.
6. **Wirth H.** Algorithms + Data Structures = Programs. New Jersey: Prentice Hall, 1976. 366 p. (Prentice-Hall Series in Automatic Computation.)
7. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом / А. Е. Бабурич, Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. В. Пяткин // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2007. Т. 14, № 1. С. 32–42.
8. **Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Рыков И.А.** О двух задачах выбора подмножества векторов с целочисленными координатами в евклидовом пространстве с максимальной нормой суммы размерности // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2008. Т. 15, № 4. С. 30–43.
9. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов / Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, М. А. Кельманова, С. А. Хамидуллин // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1(25). С. 55–74.
10. **Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А.** О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножеств векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2008. Т. 15, № 6. С. 11–19.

11. Долгушев А.В., Кельманов А.В. Приближенный алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискрет. анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 2. С. 29–40.
12. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач анализа данных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 11. С. 2045–2051.
13. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 11. С. 2106–2112.
14. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности одного из вариантов задачи выбора подмножества “похожих” векторов // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 5. С. 590–592.
15. Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2008. Т. 15, № 5. С. 20–34.
16. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 11. С. 2059–2067.
17. Кельманов А.В., Хандеев В.И. FPTAS для одной задачи двухкластерного разбиения множества векторов // Математическое программирование и приложения: тез. докл. XV Всерос. конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 141.
18. Кельманов А.В., Хандеев В.И. Рандомизированный алгоритм для одной задачи двухкластерного разбиения множества векторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 335–344.
19. Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2012. Т. 19, № 2. С. 92–100.

Долгушев Алексей Владимирович
канд. физ.-мат. наук,
Новосибирский государственный университет
e-mail: dolgushev@math.nsc.ru

Поступила 27.04.2015

Кельманов Александр Васильевич,
д-р физ.-мат. наук,
зав. лабораторией
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: kelm@math.nsc.ru

Шенмайер Владимир Владимирович
канд. физ.-мат. наук,
старший науч. сотрудник
Институт математики СО РАН
e-mail: shenmaier@mail.ru

УДК 519.6

О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ И НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ МАТРИЧНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. И. Ерохин

Представлены достаточные условия разрешимости и достаточные условия неразрешимости задач матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач линейного программирования по минимуму матричной евклидовой нормы для случая, когда на матрицу коррекции не накладывается каких-либо дополнительных ограничений.

Ключевые слова: несобственные задачи линейного программирования, матричная коррекция.

V. I. Erokhin. On some sufficient conditions for the solvability and unsolvability of matrix correction problems for improper linear programming problems.

Sufficient solvability conditions and sufficient unsolvability conditions are given for matrix correction problems related to a pair of mutually dual improper linear programming problems with respect to the minimum of the matrix Euclidean norm in the case when no additional constraints are imposed on the correction matrix.

Keywords: improper linear programming, matrix correction.

Введение

Данная работа направлена на исследование условий разрешимости задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования (ЛП). Представленные результаты являются дополнением и дальнейшим развитием основных результатов работы [17], посвященной матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП, и работы [18], посвященной проблеме разрешимости пары изначально несобственных взаимно двойственных задач ЛП после матричной коррекции системы ограничений прямой задачи.

Систематические исследования несобственных задач линейного и выпуклого программирования впервые были начаты И. И. Ереминым и постоянно оставались в фокусе его внимания. В настоящее время благодаря работам И. И. Еремина, его коллег и учеников, среди которых указанная проблематика оказалась наиболее близка Н. Н. Астафьеву, В. Д. Скарину, Л. Д. Попову и А. А. Ватолину, данное научное направление стало “визитной карточкой” отдела математического программирования Института математики и механики УрО РАН. Некоторые избранные результаты и публикации перечислены И. И. Ереминым в обзоре [15]. В контексте данной статьи представляют интерес классификация несобственных задач ЛП, формализация понятия “решение” несобственной задачи ЛП, разнообразные подходы к построению подобного решения (см., например, [10; 12; 13; 16; 19]), и прежде всего матричная коррекция [4; 12, §12–13], а также классическая теория двойственности, ее обобщения на несобственные задачи ЛП и применения к исследованию несовместных систем линейных уравнений и неравенств (см., например, [1; 11–14; 16]).

Необходимо также упомянуть работы А. И. Голикова и Ю. Г. Евтушенко [5–7], в которых пропагандируется (как инструмент построения эффективных алгоритмов решения систем линейных уравнений и неравенств, а также задач линейного и квадратичного программирования) существенно используемый в настоящей статье математический аппарат теорем об альтернативах.

Для определенности будем считать, что прямая задача ЛП записана в канонической форме, а двойственная — в основной.

Пусть $\mathcal{M}^{m \times n}$ — множество вещественных матриц размерности $m \times n$.

$$L(A, b, c): Ax = b, \quad x \geq 0, \quad c^\top x \rightarrow \max$$

— некоторая задача ЛП в канонической форме,

$$L^*(A, b, c): u^\top A \geq c^\top, \quad b^\top u \rightarrow \min$$

— двойственная ей задача ЛП в основной форме, $A \in \mathcal{M}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b, u \in \mathbb{R}^m$. Допустимые множества задач $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ обозначим символами

$$\mathcal{X}(A, b) \triangleq \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}, \quad \mathcal{U}(A, c) \triangleq \{u \mid [c^\top - u^\top A]_+ = 0\},$$

где $[\cdot]_+$ — положительная срезка вектора, заключающаяся в применении ко всем его элементам операции положительной срезки скалярной величины $[\xi]_+ \triangleq \max\{0, \xi\}$.

Задачей D_H матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ будем называть задачу построения матрицы $H \in \mathcal{M}^{m \times n}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей совместность скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A + H, b, c): (A + H)x = b, & x \geq 0, \quad c^\top x \rightarrow \max, \\ L^*(A + H, b, c): u^\top (A + H) \geq c^\top, & b^\top u \rightarrow \min. \end{cases}$$

Одновременно с D_H будем рассматривать задачу коррекции противоречивой системы ограничений задачи $L(A, b, c)$, формализованную как

$$P_H: \mathcal{X}(A + H, b) \neq \emptyset, \quad \|H\| \rightarrow \min,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова матричная (далее в зависимости от контекста матричная или векторная) норма, определяемая для $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}^{m \times n}$ как

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Задачи D_H и P_H являются представителями обширного класса задач матричной коррекции, постановки которых кроме требования коррекции матрицы A могут также содержать:

- дополнительные требования коррекции вектора b или пары векторов b и c ;
- запреты на коррекцию заданных строк и столбцов матрицы A или произвольных множеств элементов A , b , c ;
- матричные и векторные нормы, отличные от евклидовой, и в частности нормы, модифицированные с помощью индивидуальных весовых коэффициентов, применяемых поэлементно.

Все упомянутые потенциально возможные модификации задач D_H и P_H представляют самостоятельный интерес, могут быть предметом отдельного исследования и остаются за рамками данной статьи.

1. Инструментарий и предшествующие результаты

Следующие классические результаты хорошо известны, но приводятся для удобства читателя, поскольку они существенным образом используются в доказательствах теорем.

Теорема 1 (теорема двойственности [3, теорема 2.2.2]). *Задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ разрешимы тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $\mathcal{X}(A, b) \neq \emptyset$ и $\mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$.*

Утверждение (классификация несобственных задач ЛП [12, с. 13]). Если задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ неразрешимы, то возможны следующие три случая:

1. $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$, $L(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода, $L^*(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 2-го рода.
2. $\mathcal{X}(A, b) \neq \emptyset$, $\mathcal{U}(A, c) = \emptyset$, $L(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 2-го рода, $L^*(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода.
3. $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$, $\mathcal{U}(A, c) = \emptyset$, $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ — несобственные задачи ЛП 3-го рода.

Лемма 1 (теорема Александрова — Фана [2, с. 75]). Совместна одна и только одна из двух систем:

$$u^\top A \geq c^\top$$

или

$$Az = 0, \quad c^\top z > 0, \quad z \geq 0. \quad (1.1)$$

Следствие. Если $\mathcal{U}(A, c) = \emptyset$, то существует вектор z , являющийся решением системы (1.1).

Теперь кратко изложим ряд более современных результатов, непосредственно связанных с темой данной статьи.

Следующий результат, сформулированный в виде леммы, основывается на [4, теорема 1; 8, лемма 1.1; 9, теоремы 2.1, 2.2; 12, теорема 12.2, замечание 12.1].

Лемма 2. Если решение задачи P_H существует, то оно имеет вид

$$H^* = (b - Ax^*) \frac{x^{*\top}}{x^{*\top} x^*}, \quad (1.2)$$

где $x^* \in \operatorname{Argmin}_{x \geq 0} \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}$. При этом $\|H^*\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\|x^*\|}$.

Теорема 2 (об условиях разрешимости задачи D_H [17, теорема 3]). Задача D_H разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача математического программирования

$$f(x, d, u) = \frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|c + d - A^\top u\|^2}{\|u\|^2} - \frac{(\gamma - u^\top Ax)^2}{\|x\|^2 \|u\|^2} \rightarrow \min, \quad (1.3)$$

$$c^\top x = b^\top u = \gamma, \quad d^\top x = 0, \quad x \geq 0, \quad d \geq 0.$$

Если задача (1.3) имеет непустое множество решений, к которому принадлежат векторы \hat{x} , \hat{d} , \hat{u} , то единственное (при фиксированных \hat{x} , \hat{d} , \hat{u}) решение задачи D_H выражается формулой

$$\hat{H} = (b - A\hat{x}) \frac{\hat{x}^\top}{\hat{x}^\top \hat{x}} + \frac{\hat{u}}{\hat{u}^\top \hat{u}} (\hat{c}^\top + \hat{d}^\top - \hat{u}^\top A) - \hat{\alpha} \frac{\hat{u} \hat{x}^\top}{\hat{x}^\top \hat{x} \hat{u}^\top \hat{u}}, \quad (1.4)$$

где

$$\hat{\alpha} = \hat{\gamma} - \hat{u}^\top A \hat{x}, \quad \hat{\gamma} = c^\top \hat{x} = b^\top \hat{u}. \quad (1.5)$$

При этом

$$\|\hat{H}\|^2 = f(\hat{x}, \hat{d}, \hat{u}), \quad (1.6)$$

$$\hat{x} \in \operatorname{Argmax}_{x \in \mathcal{X}(A + \hat{H}, b)} c^\top x, \quad (1.7)$$

$$\hat{u} \in \operatorname{Argmin}_{u \in \mathcal{U}(A + \hat{H}, c)} b^\top u. \quad (1.8)$$

Теорема 3 (о достаточных условиях существования решения задачи D_H [18, теорема 1]). *Если $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$ (т. е. $L(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода), задача P_H разрешима и матрица H^* является ее решением, то задача D_H также разрешима и матрица H^* также является ее решением.*

Теорема 4 [17, теорема 4]. *Если $\mathcal{X}(A, b) \neq \emptyset$, $b \neq 0$, $\mathcal{U}(A, c) = \emptyset$, то для существования решения задачи D_H необходимо, чтобы система $u^\top A = 0$, $u^\top b = 0$ имела только тривиальное решение.*

Теорема 5 [17, теорема 5]. *Если $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$, $c \neq 0$, то для существования решения задачи D_H необходимо, чтобы система $Ax = 0$, $c^\top x = 0$ имела только тривиальное решение.*

Теорема 6 [17, теорема 6]. *Если $\mathcal{U}(A, c) = \emptyset$ и существует вектор u , являющийся решением системы $u^\top A \geq 0$, $u^\top b > 0$, то задача D_H не имеет решения.*

2. Новые результаты

Лемма 3. *Задача P_H не имеет решения, если $L(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 3-го рода.*

Доказательство. Предположим противное, а именно пусть $L(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 3-го рода, т. е. $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$, $\mathcal{U}(A, c) = \emptyset$, но задача P_H разрешима и матрица H^* — ее решение. Очевидно, что $H^* \neq 0$ и, следовательно, $\|H^*\| > 0$. В силу леммы 2 для H^* справедливо представление (1.2). В то же время в силу условия $\mathcal{U}(A, c) = \emptyset$ и следствия из леммы 1 существует вектор $z \in \mathbb{R}^n$, являющийся решением системы (1.1). Рассмотрим вектор $y \in \mathbb{R}^n$ и матрицу \widehat{H} , задаваемые формулами

$$y = x^* + \alpha z, \tag{2.1}$$

где $\alpha > 0$ — скалярный параметр,

$$\widehat{H} = (b - Ay) \frac{y^\top}{y^\top y}. \tag{2.2}$$

Заметим, что в силу (2.1) и (2.2)

$$\|\widehat{H}\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\|x^* + \alpha y\|}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|\widehat{H}\| = 0. \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что, выбрав подходящее значение параметра $\alpha > 0$, можно добиться выполнения условия $\|\widehat{H}\| < \|H^*\|$ для любой матрицы $H^* \neq 0$. В то же время несложно убедиться, что $y \in \mathcal{X}(A + \widehat{H}, b)$. Совокупность двух последних условий противоречит утверждению о том, что матрица H^* — решение задачи P_H , следовательно, задача P_H не имеет решения, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Теорема 7. *Если $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$ и при этом задача P_H имеет решение, то $L(A, b, c)$ является несобственной задачей ЛП 1-го рода, а задача D_H также имеет решение, которое совпадает с решением задачи P_H .*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что первое утверждение является непосредственным следствием теоремы 1 и леммы 3, а второе утверждение — следствием первого утверждения и теоремы 3.

Теорема 8 (о достаточных условиях отсутствия решения задачи D_H). *Если существуют векторы $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, обладающие свойствами*

$$\|\bar{x}\| = \|\bar{u}\| = 1, \quad (2.4)$$

$$\bar{x} \geq 0, \quad (2.5)$$

$$c^\top \bar{x} = b^\top \bar{u} = 0, \quad (2.6)$$

$$[-\bar{u}^\top A]_+ \bar{x} = -\bar{u}^\top A \bar{x} = \bar{\alpha}, \quad (2.7)$$

и для любых векторов x, d, u , отвечающих условиям (1.3) и таких, что $\|x\|, \|d\|, \|u\| < +\infty$, выполняется условие

$$\|A\bar{x}\|^2 + \|[-\bar{u}^\top A]_+\|^2 - \bar{\alpha}^2 < f(x, d, u), \quad (2.8)$$

где $f(x, d, u)$ — функция, заданная формулой (1.3), то задача D_H не имеет решения.

Доказательство. Предположим противное, а именно пусть при выполнении сделанных выше предположений решение задачи D_H все же существует. Тогда в силу теоремы 2 существуют матрица \hat{H} , являющаяся решением задачи D_H , и соответствующие векторы $\hat{x}, \hat{d}, \hat{u}$, связанные совокупностью условий (1.3)–(1.8). Рассмотрим зависящие от скалярных параметров $p, q > 0$ объекты

$$x = \hat{x} + p\bar{x}, \quad (2.9)$$

$$u = \hat{u} + q\bar{u}, \quad (2.10)$$

$$H = (b - Ax) \frac{x^\top}{x^\top x} + \frac{u}{u^\top u} (c^\top + d^\top - u^\top A) - \alpha \frac{ux^\top}{x^\top x u^\top u}, \quad (2.11)$$

где

$$\alpha = \gamma - u^\top Ax, \quad \gamma = c^\top \hat{x} = b^\top \hat{u}, \quad (2.12)$$

а вектор d является решением задачи квадратичного программирования

$$\|c^\top + d^\top - u^\top A\|^2 \rightarrow \min_{d \geq 0, d^\top x = 0}. \quad (2.13)$$

Несложно показать, что при произвольных конечных значениях параметров $p, q > 0$ матрица, задаваемая формулой (2.11), принадлежит допустимому множеству задачи D_H , т. е. выполняются условия $\mathcal{X}(A + H, b) \neq \emptyset$ и $\mathcal{U}(A + H, c) \neq \emptyset$. Действительно, в силу (2.4)–(2.7) и (2.9)–(2.13)

$$(A + H)x = b + \frac{u}{u^\top u} (c^\top x + d^\top x - u^\top Ax - \alpha),$$

но

$$c^\top x = c^\top \hat{x} = \gamma, \quad d^\top x = 0, \quad c^\top x + d^\top x - u^\top Ax - \alpha \equiv 0,$$

поэтому

$$(A + H)x \equiv b \Leftrightarrow \mathcal{X}(A + H, b) \neq \emptyset.$$

В то же время

$$u^\top (A + H) = c^\top + d^\top + (u^\top b - u^\top Ax - \alpha) \frac{x^\top}{x^\top x}.$$

Но

$$u^\top b - u^\top Ax - \alpha \equiv 0, \quad d \geq 0,$$

поэтому

$$u^\top (A + H) \geq c^\top \Leftrightarrow \mathcal{U}(A + H, c) \neq \emptyset.$$

Рассмотрим предельный переход

$$\hat{H} = \lim_{p, q \rightarrow +\infty} H.$$

Используя соотношения (2.4)–(2.7) и (2.9)–(2.13), можно показать, что

$$\widehat{H} = -A\bar{x}\bar{x}^\top + \bar{u}[-\bar{u}^\top A]_+ - \bar{\alpha}\bar{u}\bar{x}^\top$$

и при этом

$$\|\widehat{H}\|^2 = \|A\bar{x}\|^2 + \|[-\bar{u}^\top A]_+\|^2 - \bar{\alpha}^2.$$

Но в силу условия (2.8) $\|\widehat{H}\|^2 < f(\hat{x}, \hat{d}, \hat{u}) = \|\widehat{H}\|^2$. Это означает, что существуют конечные значения параметров $p, q > 0$, при которых выполняется условие $\|H\|^2 < \|\widehat{H}\|^2$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы \widehat{H} в задаче D_H .

Теорема доказана.

3. Заключение

Полученные в работе результаты позволяют сделать следующие выводы.

Во-первых, удалось лучше понять конструктивную роль и более четко определить место задач матричной коррекции несовместной системы ограничений прямой задачи в общей проблематике задач матричной коррекции пары взаимно двойственных неособенных задач ЛП.

Установлено два важных факта.

1) Задача минимальной по евклидовой норме матричной коррекции несовместной системы ограничений прямой неособенной задачи ЛП 3-го рода неразрешима.

2) Существование решения задачи минимальной по евклидовой норме матричной коррекции несовместной системы ограничений прямой неособенной задачи ЛП означает, что указанная коррекция делает задачу ЛП собственной.

Во-вторых, удалось дополнить ряд результатов работы [17] новыми, менее очевидными достаточными условиями неразрешимости задачи матричной коррекции пары взаимно двойственных неособенных задач ЛП.

Неразрешимость (при определенных условиях) задач P_H, D_H (и им подобных) является стимулом к исследованию задач матричной коррекции в других постановках, гарантирующих разрешимость задач коррекции при выполнении сравнительно слабых допущений. Так, перспективной представляется, например, пока еще неисследованная задача (и подобные ей задачи)

$$R_H: \|x\|^2 + \|u\|^2 \rightarrow \min_{\mathcal{X}(A+H,b) \neq \emptyset, \mathcal{U}(A+H,c) \neq \emptyset, \|H\| \leq \mu, \mu > 0},$$

постановку которой можно считать дальнейшим развитием (обобщением) одного из подходов А. Н. Тихонова к построению устойчивых (регуляризованных) решений приближенных систем линейных алгебраических уравнений [20].

Автор выражает признательность организаторам XV Всероссийской конференции “Математическое программирование и приложения” за возможность представления предварительных результатов данной работы, а также участникам секции “Теория и методы математического программирования” за полезное обсуждение, вопросы и пожелания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев Н.Н. Двойственные системы однородных линейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 48–53.
2. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
3. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2008. 328 с.

4. **Ватолин А.А.** Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 12. С. 1907–1908.
5. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Применение теорем об альтернативах к нахождению нормальных решений линейных систем // Изв. вузов. Математика. 2001. № 12(475). С. 21–31.
6. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 354–375.
7. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Регуляризация и нормальные решения систем линейных уравнений и неравенств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 113–121.
8. **Горелик В.А., Кондратьева В.А.** Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 57–82.
9. **Горелик В.А., Ерохин В.И., Муравьева О.В.** Некоторые задачи аппроксимации матриц коэффициентов несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2001. С. 57–88.
10. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 288 с.
11. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного программирования // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 2. С. 229–238.
12. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
13. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
14. **Еремин И.И.** Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Академия, 2007. 256 с.
15. **Еремин И.И.** Авторские результаты по проблематике математического программирования в ретроспективе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 58–66.
16. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 83–89.
17. **Ерохин В.И.** Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 587–601.
18. **Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.** О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 144–156.
19. **Скарин В.Д.** О применении метода невязки для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 268–276.
20. **Тихонов А.Н.** О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 6. С. 1373–1383.

Ерохин Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
СПбГТУРП
e-mail: erohin_v_i@mail.ru

Поступила 06.05.2015

УДК 519.856

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹**В. Г. Жадан**

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается вариант прямого симплекс-метода, обобщающий соответствующий метод для задач линейного программирования. Дается описание перехода из одной крайней точки допустимого множества в другую крайнюю точку.

Ключевые слова: линейная задача полуопределенного программирования, крайние точки, прямой симплекс-метод.

V. G. Zhadan. On a variant of the simplex method for a linear semidefinite programming problem.

A linear semidefinite programming problem is considered. A variant of the primal simplex method, which generalizes the corresponding method for linear programming problems, is proposed for this problem. A passage from an extreme point of the admissible set to another extreme point is described.

Keywords: linear semidefinite programming problem, extreme points, primal simplex-type method.

Введение

Теории и методам решения линейных задач оптимизации традиционно уделяется большое внимание (см., например, [1–3]). Среди них особый интерес вызывают линейные задачи полуопределенного программирования. Эти задачи условной оптимизации, представленные в канонической форме, заключаются в минимизации на конусе положительно полуопределенных симметричных матриц линейной целевой функции при линейных ограничениях типа равенства [4]. К настоящему времени предложены достаточно эффективные численные методы решения линейных задач полуопределенного программирования, обобщающие главным образом методы внутренней точки для задач линейного программирования. Гораздо меньше исследованы методы симплексного типа, и на это имеется ряд причин. Среди них одна из основных причин заключается в отсутствии полиэдральности у конуса положительно полуопределенных матриц и, как следствие, наличие бесконечного числа крайних точек у допустимого множества. Тем не менее, имеется ряд работ, в которых строятся обобщения симплекс-метода для задач полуопределенного программирования. В [5] предложено довольно универсальное обобщение симплекс-метода для задач с ограничениями, задаваемыми в форме линейных матричных неравенств. Для задач конического программирования с произвольными замкнутыми выпуклыми конусами обобщение симплекс-метода рассматривалось в [6]. Еще один вариант симплекс-метода для полуопределенного программирования, использующий конечные аппроксимации конуса положительно полуопределенных матриц, приводится в [7]. В [8] был предложен метод аффинно-масштабирующего типа, в котором допускался выход на границу допустимого множества и, следовательно, движение по его граням, а также перескок с грани на грань.

Цель настоящей работы состоит в разработке стандартной процедуры симплекс-метода, аналогичной той, которая используется в линейном программировании для перехода из одной

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-08259, а также при содействии Программы ведущих научных школ НШ-4640.2014.1.

крайней точки в другую. Основное внимание здесь уделяется переходу в том случае, когда количество ограничений типа равенства не может совпадать с количеством переменных в крайней точке, равному так называемому “треугольному” числу (числу элементов симметричных матриц, расположенных на диагонали и под ней).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся условия оптимальности. В разд. 2 указываются основные сведения, касающиеся характеристики крайних точек и их невырожденности. Стандартный вариант метода в регулярном случае, когда неравенство, связывающее ранг матрицы в крайней точке и число ограничений в задаче, выполняется как равенство, рассматривается в разд. 3. В разд. 4 предлагается модификация метода, позволяющая осуществлять переход в новую крайнюю точку в нерегулярном случае.

1. Задача полуопределенного программирования и условия оптимальности

Пусть \mathbb{S}^n обозначает пространство симметричных матриц порядка n . Пусть, кроме того, \mathbb{S}_+^n — подмножество из \mathbb{S}^n , состоящее из положительно полуопределенных матриц. Множество \mathbb{S}_+^n является конусом в \mathbb{S}^n . Для указания на то, что матрица $M \in \mathbb{S}^n$ положительно полуопределена, будем пользоваться также неравенством $M \succeq 0$. Конус \mathbb{S}_+^n самосопряженный, но не является полиэдральным, его размерность равняется “треугольному” числу $n_\Delta = n(n+1)/2$.

Скалярное произведение (по Фробениусу) между двумя квадратными матрицами M_1 и M_2 одного и того же порядка n определяется как след матрицы $M_1^T M_2$ и обозначается $M_1 \bullet M_2 = \text{tr}(M_1^T M_2) = \sum_{i,j=1}^n m_1^{ij} m_2^{ij}$, где m_1^{ij} и m_2^{ij} — (ij) -е элементы соответственно матриц M_1 и M_2 . Если M_1 и M_2 — две положительно полуопределенные матрицы из \mathbb{S}^n , то $M_1 \bullet M_2 \geq 0$. Более того, $M_1 \bullet M_2 = 0$ в том и только в том случае, когда $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0_{nn}$. Здесь и ниже 0_s — нулевой вектор, состоящий из s нулевых компонент, 0_{sl} — нулевая матрица размерности $s \times l$.

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\begin{aligned} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad X \succeq 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь все матрицы C, X и A_i , $1 \leq i \leq m$, принадлежат пространству \mathbb{S}^n . Относительно матриц A_i , $1 \leq i \leq m$, считаем, что они линейно независимы. Задача линейного программирования в канонической форме является частным случаем задачи (1.1), когда дополнительно требуется, чтобы все матрицы были диагональными.

Двойственной к (1.1) является задача

$$\begin{aligned} \max \langle b, u \rangle, \\ \sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C, \quad V \succeq 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которой $b = (b^1, \dots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathbb{S}^n$, угловые скобки обозначают обычное евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^m . Ниже матрица $V = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i$ обозначается как $V(u)$.

Пусть \mathcal{F}_P и \mathcal{F}_D — допустимые множества в задачах (1.1) и (1.2), т.е. $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_A \cap \mathbb{S}_+^n$, $\mathcal{F}_A = \{X \in \mathbb{S}^n : A_i \bullet X = b^i, 1 \leq i \leq m\}$, $\mathcal{F}_D = \{[u, V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n : V = V(u) \succeq 0\}$.

Предполагается, что допустимые множества \mathcal{F}_P и \mathcal{F}_D непустые и задачи (1.1) и (1.2) имеют решения. Выполнение, например, условий Слейтера для обоих множеств \mathcal{F}_P и \mathcal{F}_D , которые заключаются в существовании у них внутренних точек, гарантирует наличие решений.

Пусть X_* и $[u_*, V_*]$ — оптимальные решения соответственно задач (1.1) и (1.2), при этом обязательно $V_* = V(u_*)$ и обе симметричные положительно полуопределенные матрицы X_* и V_* коммутируют между собой. Поэтому можно указать ортогональную матрицу Q такую, что $X_* = QD(\eta_*)Q^T$ и $V_* = QD(\theta_*)Q^T$, где $D(\eta_*)$ и $D(\theta_*)$ — диагональные матрицы, на диагоналях которых расположены векторы собственных значений $\eta_* = [\eta_*^1, \dots, \eta_*^n]$, $\theta_* = [\theta_*^1, \dots, \theta_*^n]$ матриц X_* и V_* соответственно. Для собственных значений η_*^i и θ_*^i выполняется условие комплементарности: $\eta_*^i \geq 0$, $\theta_*^i \geq 0$ и $\eta_*^i \theta_*^i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Если, кроме того, $\eta_*^i + \theta_*^i > 0$ для всех $1 \leq i \leq n$,

то говорят, что имеет место *условие строгой комплементарности*. Подпространства в \mathbb{R}^n , которые порождаются собственными векторами матриц X_* и V_* , соответствующими ненулевым собственным значениям (фактически столбцами матрицы Q), оказываются ортогональными друг к другу, а в случае строгой комплементарности их сумма дает все пространство \mathbb{R}^n (см., например, [4]).

Обратимся теперь к условиям оптимальности для пары задач (1.1) и (1.2). Мы предположили, что их решения существуют, поэтому следующая система равенств и неравенств

$$\begin{aligned} X \bullet V &= 0, \\ A_i \bullet X &= b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ V &= C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \\ X \succeq 0, \quad V &\succeq 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

обязательно имеет решение. При этом, как уже отмечалось, для матриц $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$ равенство $X \bullet V = 0$ возможно в том и только в том случае, когда $XV = VX = 0_{nn}$.

Далее нам потребуется векторная форма представления равенств (1.3). С этой целью введем ряд обозначений, которые являются стандартными при рассмотрении линейных задач полуопределенного программирования.

Если M — квадратная матрица порядка n , то символом $\text{vec } M$ обозначается прямая сумма ее столбцов, т.е. вектор-столбец длины n^2 , в котором последовательно один под другим располагаются столбцы матрицы M . Для симметричных матриц имеет смысл вместо вектор-столбца $\text{vec } M$ рассматривать вектор-столбец $\text{hvec } M$. В него также помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы M , но не полностью, а только их нижние части, начинающиеся с диагонального элемента. Аналогичным образом определяется вектор-столбец $\text{svect } M$. От $\text{hvec } M$ он отличается только тем, что все элементы, не стоящие на диагонали матрицы M , при помещении в $\text{svect } M$ умножаются на $\sqrt{2}$. Как вектор $\text{hvec } M$, так и вектор $\text{svect } M$ имеют длину n_Δ .

Для перехода от вектора $\text{vec } M$ к вектору $\text{hvec } M$ и для обратного перехода используются *элиминационные* и *дублирующие* $(0, 1)$ -матрицы (см. [9]). Элиминационная матрица \mathcal{L}_n для каждой квадратной матрицы M порядка n совершает преобразование $\mathcal{L}_n \text{vec } M = \text{hvec } M$. Напротив, дублирующая матрица \mathcal{D}_n для каждой симметричной матрицы M порядка n осуществляет обратное преобразование $\mathcal{D}_n \text{hvec } M = \text{vec } M$. Матрица \mathcal{L}_n имеет размерность $n_\Delta \times n^2$, матрица \mathcal{D}_n — размерность $n^2 \times n_\Delta$. Обе матрицы \mathcal{L}_n и \mathcal{D}_n являются матрицами полного ранга, равного n_Δ . Матрица \mathcal{L}_n полуортогональная, т.е. $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_n^T = I_{n_\Delta}$. Кроме того, $\mathcal{L}_n \mathcal{D}_n = I_{n_\Delta}$.

Пусть E_n — квадратная матрица порядка n , все элементы которой равны единице. Пусть, кроме того, D_2 — диагональная матрица порядка n_Δ , на диагонали которой располагается вектор $\text{svect } E_n$. Наряду с матрицами \mathcal{L}_n и \mathcal{D}_n в дальнейшем будем пользоваться также матрицами $\tilde{\mathcal{L}}_n = D_2 \mathcal{L}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n D_2^{-1}$.

Таким образом, для симметричной матрицы M порядка n , как можно проверить, $\text{svect } M = \tilde{\mathcal{L}}_n \text{vec } M$, $\text{vec } M = \tilde{\mathcal{D}}_n \text{svect } M$. Скалярное произведение $M_1 \bullet M_2$ между двумя матрицами M_1 и M_2 из \mathbb{S}^n в этом случае записывается как обычное скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^{n_Δ} , а именно, $M_1 \bullet M_2 = \langle \text{svect } M_1, \text{svect } M_2 \rangle$.

Проводя векторизацию равенств, входящих в условия оптимальности (1.3), получаем

$$\langle \text{svect } X, \text{svect } V \rangle = 0, \quad \mathcal{A}_{\text{svect}} \text{svect } X = b, \quad \text{svect } V = \text{svect } C - \mathcal{A}_{\text{svect}}^T u. \tag{1.4}$$

Здесь через $\mathcal{A}_{\text{svect}}$ обозначена матрица размерности $m \times n_\Delta$ со строками $\text{svect } A_i$, $1 \leq i \leq m$.

Разные способы решения системы (1.4), дополненные требованиями положительной полуопределенности матриц X и V , приводят к разным численным методам решения задач (1.1) и (1.2). Ниже будет рассмотрен один из таких способов, который можно трактовать как обобщение симплекс-метода для решения задач линейного программирования.

2. Крайние точки допустимого множества

Итерационный процесс в симплекс-методе строится с использованием *крайних точек* допустимого множества \mathcal{F}_P . В связи с этим поясним сначала, в чем состоит характеристика крайних точек $X \in \mathcal{F}_P$ и, в частности, невырожденных крайних точек (см., например, [4]).

Допустимое множество \mathcal{F}_P есть пересечение конуса \mathbb{S}_+^n с аффинным множеством \mathcal{F}_A . Так как оба этих множества выпуклые, то *границы множества* \mathcal{F}_P являются пересечениями граней конуса \mathbb{S}_+^n и множества \mathcal{F}_A . Грани конуса \mathbb{S}_+^n тесно связаны с подпространствами \mathcal{L} пространства \mathbb{R}^n , а именно, \mathcal{G} есть грань \mathbb{S}_+^n тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{L}) = \{M \in \mathbb{S}_+^n : \mathcal{R}(M) \subseteq \mathcal{L}\}$. Здесь $\mathcal{R}(M)$ обозначает пространство столбцов матрицы M . Если размерность \mathcal{L} равна r , то $\text{rank } X \leq r$ для всех элементов X из $\mathcal{G}(\mathcal{L})$, а размерность $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ равняется r_Δ . Сама матрица X может быть представлена в виде: $X = Q\Lambda Q^T$, где Q — матрица полного ранга размерности $n \times r$ и $\Lambda \in \mathbb{S}_+^r$. Для всех матриц $X \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ матрица Q одна и та же. *Сопряженная грань* $\mathcal{G}^*(\mathcal{L})$ к грани $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ определяется как грань, соответствующая ортогональному подпространству \mathcal{L}^\perp , т. е. $\mathcal{G}^*(\mathcal{L}) = \mathcal{G}(\mathcal{L}^\perp)$.

Рассмотрим далее понятие *минимальной грани* конуса \mathbb{S}_+^n , содержащей точку X . Для точки $X \in \mathbb{S}_+^n$ она определяется как $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}_+^n) = \{Y \in \mathbb{S}_+^n : \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)\}$. Таким образом, если матрица $X \in \mathbb{S}_+^n$ имеет ранг r , то грань $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}_+^n)$ изоморфна конусу \mathbb{S}_+^r и, следовательно, имеет размерность r_Δ . Сопряженная грань $\mathcal{G}_{\min}^*(X; \mathbb{S}_+^n)$ изоморфна конусу \mathbb{S}_+^{n-r} и имеет размерность $(n-r)_\Delta$.

Если теперь от конуса \mathbb{S}_+^n перейти к допустимому множеству \mathcal{F}_P , то получаем, что минимальная грань для точки $X \in \mathcal{F}_P$ относительно множества \mathcal{F}_P уже определяется как $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P) = \mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}_+^n) \cap \mathcal{F}_A = \{Y \in \mathcal{F}_P : \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)\}$.

Пусть r есть ранг матрицы $X \in \mathcal{F}_P$ и $X = QQ^T$, где Q — матрица полного ранга размерности $n \times r$. Положим $A_i^Q = Q^T A_i Q$. Размерность грани $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P)$ равна величине

$$\dim \mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P) = r_\Delta - \text{rank}[A_1^Q, \dots, A_m^Q]. \quad (2.1)$$

Точка X является крайней точкой множества \mathcal{F}_P , если размерность грани $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P)$ нулевая. Согласно (2.1) матрица $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r является крайней точкой множества \mathcal{F}_P тогда и только тогда, когда $\text{rank}[A_1^Q, \dots, A_m^Q] = r_\Delta$. Для линейно независимых матриц A_1, A_2, \dots, A_m данное равенство может выполняться только в случае, когда $r_\Delta \leq m$.

В принципе может оказаться так, что количество ограничений типа равенства m не совпадает ни с одним “треугольным” числом. В этом случае для крайней точки $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r неравенство $r_\Delta \leq m$ может выполняться только как строгое, т. е. $r_\Delta < m$. Такую крайнюю точку будем называть *нерегулярной*. В отличие от нее крайняя точка $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r , когда $r_\Delta = m$, называется *регулярной*.

Возьмем произвольную матрицу X из допустимого множества \mathcal{F}_P ранга r . Предположим далее, что для X имеет место разложение

$$X = Q \text{Diag}(\eta^1, \dots, \eta^r, 0, \dots, 0) Q^T, \quad (2.2)$$

где Q — ортогональная матрица порядка n и $\eta^i > 0$, $1 \leq i \leq r$. Касательное подпространство к \mathbb{S}_+^n в X (точнее, к подпространству из \mathbb{S}^n матриц ранга r , для которых справедливо (2.2)) имеет следующий вид [10]: $\mathcal{T}_X = \left\{ Q \begin{bmatrix} G & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix} Q^T : G \in \mathbb{S}^r, F \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \right\}$. Размерность \mathcal{T}_X определяется рангом матрицы X и равняется $\dim \mathcal{T}_X = r_\Delta + r(n-r) = n_\Delta - (n-r)_\Delta$.

О п р е д е л е н и е 1 [11]. Точка $X \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_A = \mathbb{S}^n$, где \mathcal{N}_A — подпространство в \mathbb{S}^n , параллельное аффинному множеству \mathcal{F}_A .

Размерность \mathcal{N}_A в силу сделанного предположения о линейной независимости матриц A_i , $1 \leq i \leq m$, равна $n_\Delta - m$. Так как $\dim \mathbb{S}^n = n_\Delta$, то равенство $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_A = \mathbb{S}^n$ имеет место только тогда, когда $\dim \mathcal{T}_X + \dim \mathcal{N}_A \geq n_\Delta$. Таким образом, чтобы крайняя точка $X \in \mathcal{F}_P$ была

невырожденной, должны выполняться следующие соотношения между рангом r матрицы X , размерностью пространства \mathbb{R}^n и количеством ограничений типа равенства, а именно, $r_\Delta \leq m \leq n_\Delta - (n - r)_\Delta$.

Пусть Q_B и Q_N — подматрицы ортогональной матрицы Q из (2.2), состоящие соответственно из первых r и последующих $n - r$ столбцов. Для того, чтобы точка $X \in \mathcal{F}_P$ была невырожденной [11], необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{bmatrix} Q_B^T A_i Q_B & Q_B^T A_i Q_N \\ Q_N^T A_i Q_B & 0_{(n-r)(n-r)} \end{bmatrix}$, $1 \leq i \leq m$, были линейно независимы.

О п р е д е л е н и е 2. Точка $X \in \mathcal{F}_P$, имеющая разложение (2.2), называется *сильно невырожденной*, если матрицы $Q_B^T A_i Q_B$, $1 \leq i \leq m$, линейно независимы.

Из вышесказанного следует, что любая сильно невырожденная точка X заведомо будет невырожденной в обычном смысле.

Ниже предполагается, что крайние точки $X \in \mathcal{F}_P$ сильно невырожденные. Кроме того, если они нерегулярные, то их ранг r удовлетворяет условию $r_\Delta > m - r$. В этом случае будем говорить, что задача (1.1) является *сильно невырожденной* и *вполне регулярной*.

3. Итерация метода в регулярном случае

Пусть задана начальная крайняя точка $X_0 \in \mathcal{F}_P$ и строится последовательность крайних точек $\{X_k\}$, причем таким образом, что соответствующие значения целевой функции в задаче (1.1) монотонно убывают от итерации к итерации.

Предположим, что $X \in \mathcal{F}_P$ — текущая крайняя точка ранга $r < n$, для которой справедливо представление (2.2). Для дальнейшего изложения его удобнее переписать в виде

$$X = Q_B D(\eta_B) Q_B^T. \quad (3.1)$$

Здесь по-прежнему Q_B — подматрица ортогональной матрицы Q , состоящая из первых r столбцов, $\eta_B = [\eta^1, \dots, \eta^r]$. Считаем сначала для простоты, что X является регулярной крайней точкой, причем сильно невырожденной.

Пусть X не является оптимальным решением и нам желательно перейти в новую крайнюю точку \bar{X} с меньшим значением целевой функции. Опишем этот переход, следуя идеологии симплекс-метода, применяемого для решения задач линейного программирования в канонической форме. Воспользуемся для этого условиями оптимальности (1.3) и (1.4), с помощью которых можно найти вектор двойственных переменных $u \in \mathbb{R}^m$ и вычислить слабую двойственную переменную (двойственную невязку) $V = V(u)$.

Из свойств функции следа для произведения матриц получаем $X \bullet V = (Q_B D(\eta_B) Q_B^T) \bullet V = \text{tr}(Q_B D(\eta_B) Q_B^T V) = \text{tr}(D(\eta_B) V^{Q_B}) = D(\eta_B) \bullet V^{Q_B}$, где введено обозначение $V^{Q_B} = Q_B^T V Q_B$. Отсюда видно, что равенство $X \bullet V = 0$ заведомо выполняется для матрицы V такой, что $V^{Q_B} = 0_{rr}$.

Введем дополнительные обозначения $A_i^{Q_B} = Q_B^T A_i Q_B \in \mathbb{S}^r$. Пусть $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B} — (m \times r_\Delta)$ -матрица, строками которой являются векторы $\text{svec}(A_i^{Q_B})$, $1 \leq i \leq m$. Тогда равенство $V^{Q_B} = 0_{rr}$ сводится к следующей системе m уравнений относительно m -мерного вектора u :

$$\text{svec } V^{Q_B} = \text{svec } C^{Q_B} - (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T u = 0_{r_\Delta}, \quad (3.2)$$

где $C^{Q_B} = Q_B^T C Q_B$. Так как, по предположению, точка X регулярная, то система (3.2) есть система m уравнений относительно m переменных. Если точка X сильно невырожденная, то квадратная матрица $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ неособая, и, разрешая систему (3.2), получаем

$$u = ((\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T)^{-1} \text{svec } C^{Q_B}. \quad (3.3)$$

В случае, когда матрица $V = V(u)$ положительно полуопределенная, X вместе с $[u, V]$ являются решениями соответственно задач (1.1) и (1.2). Предположим далее, что V не есть

положительно полуопределенная матрица, т. е. среди ее собственных значений имеются отрицательные. Заметим, что матрица V подобна матрице $V^Q = Q^T V Q$ и, следовательно, имеет те же самые собственные значения, что и матрица V^Q . Но V^Q есть матрица окаймления, так как у нее левый верхний блок нулевой. Поэтому в том случае, когда внедиагональные блоки V^Q ненулевые, обязательно у V^Q , а стало быть и у V имеются отрицательные собственные значения [9].

Рассмотрим разложение матрицы $V = HD(\theta)H^T$, где H — ортогональная матрица, θ — вектор собственных значений V . Пусть h_j обозначает j -й столбец матрицы H (собственный вектор матрицы V). Тогда V можно также записать в виде $V = \sum_{j=1}^n \theta^j h_j h_j^T$.

Предположим, что θ^k — отрицательное собственное значение V и ему соответствует собственный вектор h_k . В этом случае $V^{h_k} = h_k^T V h_k = \theta^k < 0$ или в другой записи

$$V^{h_k} = C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \theta^k < 0. \quad (3.4)$$

Здесь введены величина $C^{h_k} = h_k^T C h_k$ и m -мерный вектор \mathcal{A}^{h_k} с компонентами $h_k^T A_i h_k$, $1 \leq i \leq m$. Имеет место следующее свойство вектора h_k .

Утверждение 1. Вектор h_k не принадлежит подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$, порожденному столбцами матрицы Q_B .

Доказательство от противного. В самом деле, если допустить, что $h_k = Q_B z$ для некоторого ненулевого вектора $z \in \mathbb{R}^r$, то должно выполняться равенство $V h_k = V Q_B z = \theta^k Q_B z$. Отсюда после умножения этого равенства слева на матрицу Q_B^T получаем $V^{Q_B} z = \theta^k z$, что невозможно, поскольку матрица V^{Q_B} нулевая.

Утверждение доказано.

Воспользуемся матрицей единичного ранга $h_k h_k^T$ и перейдем в новую точку \bar{X} , полагая

$$\bar{X} = X + \alpha \Delta X, \quad \Delta X = Q_B \Delta Z Q_B^T + h_k h_k^T, \quad (3.5)$$

где α — некоторый положительный шаг, $\Delta Z \in \mathbb{S}^r$. Подберем матрицу ΔZ так, чтобы

$$A_i \bullet Q_B \Delta Z Q_B^T + A_i \bullet h_k h_k^T = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.6)$$

Тогда новая точка \bar{X} удовлетворяет ограничениям типа равенства в задаче (1.1).

Так как у матриц $M_1 M_2$ и $M_2 M_1$ один и тот же след, то (3.6) можно переписать как

$$(A_i^{Q_B}) \bullet \Delta Z + h_k^T A_i h_k = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.7)$$

Если от матриц перейти к соответствующим векторам, то данная система принимает вид

$$\mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \text{svec } \Delta Z + \mathcal{A}^{h_k} = 0_m. \quad (3.8)$$

Разрешая систему (3.8) относительно вектора $\text{svec } Z$, получаем

$$\text{svec } \Delta Z = -(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^{-1} \mathcal{A}^{h_k}. \quad (3.9)$$

Вычислим $C \bullet \Delta X$. Имеем согласно (3.5) $C \bullet \Delta X = C^{Q_B} \bullet \Delta Z + C^{h_k}$. Примем также во внимание (3.4). Тогда после перехода к векторной записи и подстановки вектора (3.9) получаем

$$\begin{aligned} C \bullet \Delta X &= \langle \text{svec } C^{Q_B}, \text{svec } \Delta Z \rangle + C^{h_k} = -\langle \text{svec } C^{Q_B}, (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^{-1} \mathcal{A}^{h_k} \rangle + C^{h_k} \\ &= -\langle ((\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T)^{-1} \text{svec } C^{Q_B}, \mathcal{A}^{h_k} \rangle + C^{h_k} = C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \theta^k < 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Следовательно, вдоль направления ΔX целевая функция в задаче (1.1) убывает. Таким образом, матрицу $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ в данном случае можно рассматривать как матрицу базиса, а матрицу Q_B

и вектор η_B — как *базисную пару переменных* (базисные наборы, состоящие, соответственно, из собственных векторов и собственных значений).

Для перехода в новую базисную пару (новую крайнюю точку) надо еще определить шаг перемещения $\alpha > 0$. Обозначим $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha\Delta X$. При перемещении вдоль ΔX с шагом $\alpha > 0$ матрица $\bar{X}(\alpha)$ принимает вид $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha\Delta X = Q_B [D(\eta_B) + \alpha\Delta Z] Q_B^T + \alpha h_k h_k^T$. Поскольку матрица единичного ранга $h_k h_k^T$ положительно полуопределенная, то максимально возможный шаг $\bar{\alpha}$, при котором матрица $\bar{X}(\alpha)$ остается положительно полуопределенной, определится из условия, когда у матрицы $M(\alpha) = D(\eta_B) + \alpha\Delta Z$ впервые появляется отрицательное собственное значение.

Пусть P — невырожденная матрица порядка r , с помощью которой обе матрицы $D(\eta_B)$ и ΔZ приводятся к диагональному виду одновременно, а именно, $D(\eta_B) = PP^T$, $\Delta Z = PD(\lambda)P^T$. Поэтому $M(\alpha) = P[D(\bar{e}) + \alpha D(\lambda)]P^T$, где \bar{e} — r -мерный вектор со всеми компонентами, равными единице. Отсюда видно, что выбор $\bar{\alpha}$ зависит от максимальной по модулю отрицательной компоненты вектора λ . Предположим, что это будет компонента λ_* . Тогда $\bar{\alpha} = -\lambda_*^{-1}$. В случае, когда $\lambda \geq 0_r$, задача (1.1) не имеет решения, так как в силу (3.10) $C \bullet \bar{X}(\alpha) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. При этом $\bar{X}(\alpha) \in \mathcal{F}_P$.

Если собственный вектор h_k матрицы $V(u)$ принадлежит грани $\mathcal{G}_{\min}^*(X_k; \mathbb{S}_+^n)$, сопряженной к минимальной грани $\mathcal{G}_{\min}(X_k; \mathbb{S}_+^n)$, то $Q_B^T h_k = 0_r$, и фактически вектор h_k можно рассматривать как один из столбцов матрицы Q_N . В этом случае из базисного набора собственных векторов Q_B мы исключаем какой-то вектор и вводим новый собственный вектор из Q_N .

4. Итерация метода в нерегулярном случае

Предположим теперь, что точка X является нерегулярной, т.е. $r_\Delta < m$, и пусть, для определенности, $m = r_\Delta + p$, где $p < r$. В этом случае система уравнений (3.2) относительно вектора u оказывается недоопределенной и поэтому может иметь целое множество решений.

Считаем по-прежнему, что точка X является сильно невырожденной. Тогда матрица $\mathcal{A}_{svect}^{Q_B}$ имеет полный ранг, равный r_Δ , и общее решение системы (3.2) можно записать как

$$u = \mathcal{A}_{svect}^{Q_B} [(\mathcal{A}_{svect}^{Q_B})^T \mathcal{A}_{svect}^{Q_B}]^{-1} \text{svec } C^{Q_B} + \tilde{u}, \quad (4.1)$$

где \tilde{u} — некоторый m -мерный вектор, принадлежащий нуль-пространству матрицы $(\mathcal{A}_{svect}^{Q_B})^T$.

Возьмем в качестве u нормальное решение

$$u = (\mathcal{A}_{svect}^{Q_B}) [(\mathcal{A}_{svect}^{Q_B})^T (\mathcal{A}_{svect}^{Q_B})]^{-1} \text{svec } C^{Q_B}, \quad (4.2)$$

т.е. в (4.1) полагаем $\tilde{u} = 0_m$. Среди всех возможных решений оно будет иметь минимальную норму. Снова определим $V = V(u)$. Пусть θ^k — отрицательное собственное значение матрицы V , ему соответствует собственный вектор h_k , входящий в число столбцов ортогональной матрицы H . Как и прежде, вектор h_k не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$.

Формула (3.5), задающая приращение ΔX , в данном случае оказывается неприемлемой, поскольку система (3.8) для определения вектора $\text{svec } Z$ становится переопределенной и может иметь решение лишь в том случае, когда вектор \mathcal{A}^{h_k} лежит в пространстве столбцов матрицы $\mathcal{A}_{svect}^{Q_B}$ или, другими словами, принадлежит нуль-пространству матрицы $(\mathcal{A}_{svect}^{Q_B})^T$.

Для устранения этого недостатка изменим подход к выбору матрицы ΔX , а именно, будем теперь строить ΔX в виде

$$\Delta X = [Q_B \ h_k] \begin{bmatrix} \Delta Z & w \\ w^T & 1 \end{bmatrix} [Q_B \ h_k]^T, \quad (4.3)$$

где $\Delta Z \in \mathbb{S}^r$ и $w \in \mathbb{R}^r$. Отметим, что данное направление ΔX переходит в направление из (3.5), если положить $w = 0_r$.

Выберем w следующим образом:

$$w = 1/2 \widetilde{W}y, \quad \widetilde{W} = [\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_p], \quad (4.4)$$

где все столбцы $\tilde{w}_j \in \mathbb{R}^r$, $1 \leq j \leq p$, матрицы \widetilde{W} — линейно независимы, $y \in \mathbb{R}^p$. Кроме того, потребуем, чтобы векторы $q_{w_j} = Q_B \tilde{w}_j$, $1 \leq j \leq p$, были ортогональны вектору h_k , т. е.

$$\langle h_k, q_{w_j} \rangle = \langle Q_B^T h_k, \tilde{w}_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq p. \quad (4.5)$$

Все векторы q_{w_j} , $1 \leq j \leq p$, принадлежат подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$. Вектор $q_y = Q_B \widetilde{W}y$ также принадлежит этому подпространству, и, согласно (4.5), $h_k^T q_y = 0$. Теперь вместо (3.7) имеем $A_i^{Q_B} \bullet \Delta Z + 2\langle Q_B^T A_i h_k, w \rangle + h_k^T A_i h_k = 0$, $1 \leq i \leq m$, или после подстановки вектора w из (4.4)

$$A_i^{Q_B} \bullet \Delta Z + \langle Q_B^T A_i h_k, \widetilde{W}y \rangle + h_k^T A_i h_k = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.6)$$

Второе слагаемое в (4.6) можно переписать также в виде: $\langle Q_B^T A_i h_k, \widetilde{W}y \rangle = \langle h_k, A_i Q_B \widetilde{W}y \rangle$.

Пусть \mathcal{B} — матрица размерности $m \times p$, у которой (i, j) -й элемент равняется $h_k^T A_i q_{w_j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$. Другими словами, i -я строка этой матрицы равняется вектору $h_k^T A_i Q_B \widetilde{W}$. Тогда, объединяя все уравнения (4.6) в единую систему, получаем

$$\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B} \text{svec } \Delta Z + \mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k} = 0_m. \quad (4.7)$$

Система (4.7) является системой m уравнений относительно m переменных, а именно, векторов $\text{svec } \Delta Z \in \mathbb{R}^{r_\Delta}$ и $y \in \mathbb{R}^p$.

Возьмем далее $(r_\Delta \times m)$ -матрицу $(\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})^T$ и $(p \times m)$ -матрицу \widetilde{U} , строками которой являются линейно независимые векторы $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p$ из нуль-пространства матрицы $(\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})^T$. Составим из них квадратную матрицу $\mathcal{P} = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})^T \\ \widetilde{U} \end{bmatrix}$. Данная матрица неособая, ее строки порождают пространство \mathbb{R}^m .

Пусть \mathcal{W} обозначает квадратную неособую матрицу $\mathcal{W} = (\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})^T \mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B}$ порядка r_Δ . После умножения системы (4.7) слева на матрицу \mathcal{P} приходим к эквивалентной системе, которая распадается на две подсистемы

$$\mathcal{W} \text{svec } \Delta Z + (\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})^T [\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}] = 0_{r_\Delta}, \quad (4.8)$$

$$\widetilde{U}[\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}] = 0_p. \quad (4.9)$$

Из первой подсистемы (4.8) находим

$$\text{svec } \Delta Z = -\mathcal{W}^{-1} (\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})^T [\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}]. \quad (4.10)$$

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})$ — пространства столбцов матриц \mathcal{B} и $\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B}$ соответственно. Пусть, кроме того, $\mathcal{R}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B}) = \emptyset$. Тогда матрица $\widetilde{U}\mathcal{B}$ неособая.

Доказательство. Покажем, что однородная система уравнений $\widetilde{U}\mathcal{B}y = 0_p$ имеет только тривиальное решение $y = 0_p$. Допустим противное, что существует ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^p$, удовлетворяющий этой системе. Из-за того, что \mathcal{B} — матрица полного ранга, следует принадлежность ненулевого вектора $z = \mathcal{B}y$ нуль-пространству матрицы \widetilde{U} , которое совпадает с пространством столбцов матрицы $\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B}$. Мы пришли к противоречию.

Утверждение доказано.

Принимая во внимание утверждение 2 и разрешая вторую подсистему (4.9), получаем $y = -(\widetilde{U}\mathcal{B})^{-1} \widetilde{U} \mathcal{A}^{h_k}$. Для сокращения записи положим $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(\widetilde{U}\mathcal{B})^{-1} \widetilde{U}$. После подстановки найденного y в выражение (4.10) для $\text{svec } \Delta Z$ приходим к

$$\text{svec } \Delta Z = \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{A}_{sv\text{ec}}^{Q_B})^T [\widetilde{\mathcal{B}} - I_m] \mathcal{A}^{h_k}. \quad (4.11)$$

Найдем теперь изменение значения целевой функции вдоль направления ΔX .

Утверждение 3. Матрица ΔX является направлением убывания целевой функции в задаче (1.1), причем $C \bullet \Delta X = \theta^k$.

Доказательство. Имеем $C \bullet \Delta X = \begin{bmatrix} Q_B^T C Q_B & Q_B^T C h_k \\ h_k^T C Q_B & h_k^T C h_k \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \Delta Z & w \\ w^T & 1 \end{bmatrix}$. Таким образом, при $C^{Q_B h_k} = Q_B^T C h_k$ получим

$$C \bullet \Delta X = \langle \text{svec } C^{Q_B}, \text{svec } \Delta Z \rangle + 2 \langle C^{Q_B h_k}, w \rangle + C^{h_k}. \quad (4.12)$$

Вычислим отдельно первое и второе слагаемые в правой части (4.12). Для первого слагаемого получаем

$$\begin{aligned} \langle \text{svec } C^{Q_B}, \text{svec } \Delta Z \rangle &= \langle \text{svec } C^{Q_B}, \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B})^T [\tilde{\mathcal{B}} - I_m] \mathcal{A}^{h_k} \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}_{\text{svec}}^{Q_B} \mathcal{W}^{-1} \text{svec } C^{Q_B}, [\tilde{\mathcal{B}} - I_m] \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \langle u, [\tilde{\mathcal{B}} - I_m] \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \langle u, \tilde{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{h_k} \rangle - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle, \end{aligned}$$

причем $\langle u, \tilde{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{h_k} \rangle = -\langle u, \mathcal{B} y \rangle = -\sum_{i=1}^m u^i A_i^{h_k q_y}$, $A_i^{h_k q_y} = h_k^T A_i q_y$, $1 \leq i \leq m$. Для второго слагаемого в (4.12) выполняется, соответственно,

$$2 \langle C^{Q_B h_k}, w \rangle = \langle C^{Q_B h_k}, \tilde{\mathcal{W}} y \rangle = \langle C h_k, Q^B \tilde{\mathcal{W}} y \rangle = \langle h_k, C q_y \rangle = C^{h_k q_y},$$

где $C^{h_k q_y} = h_k^T C q_y$. Учтем далее, что согласно (3.4) $C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = h_k^T V h_k = \theta^k$. Учтем также, что $V h_k = \theta^k h_k$ и что вектор $q_y = Q_B \tilde{\mathcal{W}} y$ ортогонален вектору h_k . Тогда получаем $C^{h_k q_y} - \sum_{i=1}^m u^i A_i^{h_k q_y} = h_k^T V q_y = \theta^k h_k^T q_y = 0$. Поэтому $C \bullet \Delta X = \theta^k < 0$. Следовательно, вдоль направления ΔX целевая функция убывает.

Утверждение доказано.

Выбор максимально возможного шага α проводится полностью аналогично регулярному случаю. Матрица X положительно полуопределенная, и из (4.3) следует, что симметричная матрица $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha \Delta X$ также будет оставаться положительно полуопределенной для α достаточно малых. Определим максимально возможный шаг $\bar{\alpha}$, при котором она сохраняет свою знакоопределенность. Понятно, что этот шаг $\bar{\alpha}$ находится из условия

$$\det \begin{bmatrix} D(\eta_B) + \alpha \Delta Z & \alpha w \\ \alpha w^T & \alpha \end{bmatrix} = 0.$$

При $\alpha > 0$ имеем $\det \begin{bmatrix} D(\eta_B) + \alpha \Delta Z & \alpha w \\ \alpha w^T & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \det [D(\eta_B) + \alpha \Delta Z - \alpha w w^T]$. Поэтому определение $\bar{\alpha}$ сводится к определению максимального по модулю отрицательного α , при котором $\det [D(\eta_B) + \alpha (\Delta Z - w w^T)] = 0$. Обе матрицы $D(\eta_B)$ и $G = \Delta Z - w w^T$ — симметрические, матрица $D(\eta_B)$ положительно определена, поэтому они приводятся к диагональному виду с помощью некоторой невырожденной матрицы P , а именно, $D(\eta_B) = P P^T$, $G = P D(\lambda) P^T$.

Если у вектора $\lambda = [\lambda^1, \dots, \lambda^r]^T$ хотя бы одна компонента отрицательна, то $\bar{\alpha}$ конечно и равняется $\bar{\alpha} = -\lambda_*^{-1}$, где λ_* — максимальная по модулю компонента из всех отрицательных компонент λ . В противном случае мы приходим к ситуации, когда в задаче (1.1) нет решения.

Рассмотрим вопрос о сходимости метода, предполагая, что задача (1.1) имеет решение. Считаем также дополнительно, что в качестве отрицательного собственного значения θ^k на каждом шаге берется максимальное по модулю значение.

Теорема. Пусть задача (1.1) является сильно невырожденной и вполне регулярной. Пусть, кроме того, начальная точка $X_0 \in \mathcal{F}_P$ такова, что множество $\mathcal{F}_P(X_0) = \{X \in \mathcal{F}_P : C \bullet X \leq C \bullet X_0\}$ ограничено. Тогда симплекс-метод порождает последовательность точек $\{X_k\} \subset \mathcal{F}_P(X_0)$, которая либо конечна, и тогда последняя точка есть решение задачи, либо последовательность $\{X_k\}$ — бесконечная, и тогда любая ее предельная точка также является решением задачи.

Доказательство. Если последовательность $\{X_k\}$ конечная, т.е. метод останавливается на некотором k -м шаге, то это может произойти только в том случае, когда после вычисления u_k получаем, что у матрицы $V_k = V(u_k)$ нет отрицательных собственных значений, т.е. пара $[u_k, V_k]$ является допустимой в двойственной задаче. Но тогда выполняются условия оптимальности (1.3), из которых следует, что X_k — решение задачи (1.1).

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{X_k\}$ — бесконечная. Так как она ограниченная, то у нее существуют предельные точки. Пусть $X_{k_s} \rightarrow \bar{X}$. В силу сделанных предположений о задаче и правила выбора шага α_k в любом случае, является ли крайняя точка X_k ранга r регулярной или нет, следующая точка X_{k+1} также будет сильно невырожденной крайней точкой, причем того же самого ранга r .

У последовательности $\{X_{k_s}\}$ все соответствующие матрицы Q_B из разложения (3.1) имеют одну и ту же норму Фробениуса, а именно, $\|Q_B\|_F = (\text{tr } Q_B^T Q_B)^{1/2} = \sqrt{r}$, т.е. принадлежат компактному множеству. Поэтому из $\{X_{k_s}\}$ можно извлечь подпоследовательность, для которой матрицы Q_B также сходятся к некоторой матрице \bar{Q}_B такой, что $\bar{Q}_B^T \bar{Q}_B = I_r$. Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность $\{X_{k_s}\}$ обладает этим свойством.

Если обратиться к матрице $(A_{\text{svec}}^{\bar{Q}_B})^T$, входящей в систему (3.2) для определения вектора двойственных переменных \bar{u} в точке \bar{X} , то поскольку точка \bar{X} сильно невырожденная, матрица $(A_{\text{svec}}^{\bar{Q}_B})^T$ будет иметь полный ранг, совпадающий с рангом по столбцам. Отсюда с учетом непрерывности соответствующих векторов $\text{svec } C^{Q_B}$ приходим к выводу, что решения системы (3.2), а именно, векторы двойственных переменных u_{k_s} , определяемые либо формулой (3.3), либо формулой (4.2), сходятся к \bar{u} .

Определим матрицу $\bar{V} = V(\bar{u})$. Данная матрица \bar{V} должна быть положительно полуопределенной. В самом деле, если допустить противное, то у \bar{V} имеется отрицательное собственное значение. Но собственные значения матриц непрерывны по Липшицу. Поэтому у матриц V_{k_s} , достаточно близких к \bar{V} , также существуют отрицательные собственные числа. Отсюда следует, что на этих итерациях должен осуществляться переход из точек X_{k_s} в последующие точки X_{k_s+1} с шагом α_{k_s} и с уменьшением значения целевой функции на величину $\alpha_{k_s} \theta^{k_s}$. Однако, шаги α_{k_s} не могут стремиться к нулю, так как из (3.9) или (4.11) следует, что матрицы ΔX_{k_s} ограничены по норме на $\mathcal{F}_P(X_0)$. Поэтому на некоторой k_s -й итерации обязательно получим, что $C \bullet X_{k_s+1} < C \bullet \bar{X}$, что в силу монотонного убывания значений целевой функции вдоль траектории противоречит сходимости $\{X_{k_s}\}$ к \bar{X} .

Теорема доказана.

Можно показать, что если задачи (1.1) и (1.2) достаточно хорошие, а именно, они невырожденные и их решения строго комплементарные, то ограниченное множество $\mathcal{F}_P(X_0)$ из условий теоремы существует по крайней мере для X_0 , достаточно близких к единственному решению X_* задачи (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
2. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2008. 347 с.
3. **Vanderbei R.J.** Linear programming. Foundations and extensions. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 418 p.
4. Handbook of semidefinite programming / eds. Н. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 656 p.
5. **Lasserre J.B.** Linear programming with positive semi-definite matreces // Math. Problems in Engineering. 1996. Vol. 2, iss. 6. P. 499–522.
6. **Pataki G.** Cone-LP’s and semidefinite programs: geometry and simplex-type method // Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5). Vancouver, 1996. P. 1–13.
7. **Косолап А.И.** Симплекс-метод для решения задач полуопределенного программирования // Вестн. Донец. нац. ун-та. 2009. Вып. 2. С. 365–369. (Сер. А: Естественные науки.)

8. **Жадан В.Г.** Об одном варианте допустимого аффинно-масштабирующего метода для полуопределенного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 145–160.
9. **Магнус Я.Р., Нейдеккер Ч.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002. 496 с.
10. **Арнольд В.И.** О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2(158). С. 101–114.
11. **Alizadeh F., Haerberly J.-P.F., Overton M.L.** Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Math. Programming. Ser. B. 1997. Vol. 7, no. 2. P. 129–162.

Жадан Виталий Григорьевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила 08.05.2015

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ АБЕЛЕВЫХ И НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ. I¹

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа и B — нильпотентная подгруппа из G . В данной работе доказано, что в случае разрешимой группы G найдется элемент g из G такой, что $A \cap B^g \leq F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G . В случае, когда G неразрешима, доказывается, что контрпример минимального порядка к гипотезе, согласно которой $A \cap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G , является почти простой группой.

Ключевые слова: конечная группа, абелева подгруппа, нильпотентная подгруппа, пересечение подгрупп, подгруппа Фиттинга.

V. I. Zenkov. On intersections of abelian and nilpotent subgroups in finite groups.

Let A be an abelian subgroup of a finite group G , and let B be a nilpotent subgroup of G . If G is solvable, then we prove that it contains an element g such that $A \cap B^g \leq F(G)$, where $F(G)$ is the Fitting subgroup of G . If G is not solvable, we prove that a counterexample of smallest order to the conjecture that $A \cap B^g \leq F(G)$ for some element g of G is an almost simple group.

Keywords: finite group, abelian subgroup, nilpotent subgroup, intersection of subgroups, Fitting subgroup.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G . Определим $M_G(A, B)$ как множество минимальных по включению пересечений вида $A \cap B^g$, где $g \in G$, а $m_G(A, B)$ как множество минимальных по порядку пересечений $A \cap B^g$, где $g \in G$. Из определения видно, что $M_G(A, B) \supseteq m_G(A, B)$. Если мы определим подгруппы $\text{Min}_G(A, B) = \langle M_G(A, B) \rangle$ и $\text{min}_G(A, B) = \langle m_G(A, B) \rangle$, то $\text{Min}_G(A, B) \geq \text{min}_G(A, B)$. В [1, теорема 1] было доказано, что в любой конечной группе G для любых ее абелевых подгрупп A и B подгруппа $\text{Min}_G(A, B)$ содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ группы G , а в [2, лемма 2.1] включение $\text{Min}_G(A, B) \leq F(G)$ доказано для любой циклической подгруппы A и любой нильпотентной подгруппы B из G . Эти результаты приводят к следующей гипотезе.

Гипотеза. Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа, а B — нильпотентная подгруппа из G . Тогда $A \cap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G .

В настоящей части работы доказаны две теоремы (в разд. 1 и 3).

Теорема 1. Пусть G — разрешимая конечная группа, A абелева, а B — нильпотентная подгруппа из G . Тогда $A \cap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G .

Теорема 2. Если G — контрпример минимального порядка к гипотезе, то G — почти простая группа.

В разд. 2 приведен ряд примеров, показывающих существенность условий теоремы 1.

Вторая часть работы будет посвящена подтверждению гипотезы для почти простых групп.

Применяемые нами обозначения взяты в основном из [3; 4].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда РФФ, проект 15-11-10025 (теорема 1), а также РФФИ, проект 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006 (теорема 2)).

1. Доказательство теоремы 1

Пусть G , A и B удовлетворяют условиям теоремы 1. Если $G = F(G)$, то теорема 1 доказана. Если $G \neq F(G)$, то, так как группа G разрешима, подгруппа Фиттинга $F(G)$ группы G неединична. Заметим, что в силу $F(G) \neq 1$ и теоремы Бернсайда — Виландта [3, теорема 17.14] $O_p(F(G)) \neq 1$ для некоторого простого числа p . Поэтому далее по индукции в факторгруппе $\overline{G} = G/O_p(G)$ имеем $\overline{A} \cap \overline{B}^g \leq F(\overline{G})$ для некоторого $g \in G$. Но $O_p(F(G)) = O_p(G)$. Поэтому $(p, |F(\overline{G})|) = 1$. Пусть R — полный прообраз подгруппы $F(\overline{G})$ в G . Заметим, что $R = O_p(G) \rtimes H$, где H — нильпотентная p' -подгруппа.

Если $R = G$, то в силу отмеченной p -замкнутости группы R имеем $O_p(A) \leq O_p(G)$ и $O_p(B) \leq O_p(G)$. Таким образом, $O_p(A) \leq F(G)$ и $O_p(B) \leq F(G)$. Поэтому для доказательства теоремы 1 в случае $R = G$ достаточно доказать ее для случая $A = O_{p'}(A)$ и $B = O_{p'}(B)$. Но тогда, опять же в силу p -замкнутости R , получаем, что H — p' -холлова подгруппа из R . Следовательно, по теореме Холла — Чунихина [3, теорема 20.1.1] без ограничения общности можно считать, что $A \leq H$ и $B \leq H$. Рассмотрим подгруппу $G_1 = O_p(G)A$ с абелевой p' -холловой подгруппой A . Тогда подгруппа $B_1 = G_1 \cap B$ также абелева и без ограничения общности лежит в A . Согласно [1, теорема 1] $A \cap A^{g_1} \leq F(G_1)$ для некоторого элемента g_1 из G_1 . Но $G_1 = O_p(G)A$. Поэтому $g_1 = ab$, где $b \in O_p(G)$. Следовательно, можно считать, что $g_1 = b \in O_p(G)$. Так как A — p' -подгруппа, то $A \cap A^{g_1}$ — p' -подгруппа из $F(G_1)$, поэтому $[O_p(G), A \cap A^{g_1}] = 1$. Но $C_R(O_p(G)) \leq O_{p',p}(R)$ в силу p -скованности R [4, предложение 1.27]. В частности, в нашем случае $A \cap A^{g_1} \leq O_{p'}(R) \leq F(R)$ в силу нильпотентности подгруппы H . Поэтому $A \cap B^{g_1} \leq F(R) = F(G)$, и в этом случае теорема 1 доказана.

Если $G \neq R$, то по индукции $\overline{A} \cap \overline{B}^g \leq F(\overline{G})$, откуда $A \cap B^{g^x} \leq R$ для любого элемента x из $O_p(G)$. Следовательно, $(A \cap B^{g^x}) \cap R \leq R \cap R = R$, откуда $(A \cap R) \cap (B^{g^x} \cap R) \leq R$ для любого элемента x из $O_p(G)$. Положим $A_1 = A \cap R$ и $B_1 = B^g \cap R$. Тогда A_1 и B_1 — подгруппы из R и для них ввиду доказанного в предыдущем абзаце найдется такой элемент b из $O_p(G)$, что $A_1 \cap B_1^b \leq F(R) \leq F(G)$ в силу характеристичности подгруппы R в группе G . Но тогда $A \cap B^{gb} \leq R$, поэтому $A \cap B^{gb} \cap R \leq R$. Отсюда $A \cap B^{gb} = A \cap B^{gb} \cap R = (A \cap R) \cap (B^{gb} \cap R) = A_1 \cap (B^g \cap R)^b = A_1 \cap B_1^b \leq F(G)$.

Теорема 1 доказана.

2. Примеры

Пример группы $G = E_9 \rtimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9 показывает, что в теореме 1 условие абелевости подгруппы A существенно и его нельзя ослабить до условия нильпотентности.

Пример группы $G = A_5$ при $A \simeq E_4$ и $B \simeq D_{10}$ показывает, что в теореме 1 условие нильпотентности подгруппы B нельзя ослабить даже до сверхразрешимости.

Пример группы $G = S_4$ — симметрической группы степени четыре показывает, что при определенном выборе подгрупп A и B включение $M_G(A, B) \supseteq m_G(A, B)$ может быть строгим. Действительно, если $|B| = 4$, $B \not\leq O_2(G)$ и $B \leq A \in \text{Syl}_2(G)$, то $M_G(A, B) = \{B, \langle z \rangle^f, \langle z \rangle^{f^2}\}$, а $m_G(A, B) = \{\langle z \rangle^f, \langle z \rangle^{f^2}\}$, где $\langle z \rangle = B \cap O_2(G)$, и f — элемент порядка три из G . В рассмотренном примере $\text{Min}_G(A, B) = A$ и $\text{min}_G(A, B) = O_2(G) < A$.

Приведенный пример группы $G = S_4$ показывает, что в общем случае, несмотря на то, что подгруппа A является минимальной неабелевой, а подгруппа B может быть даже циклической, подгруппа $\text{Min}_G(A, B)$ не содержится в $F(G) = O_2(G)$, хотя $\text{min}_G(A, B) \leq F(G)$. Возникает вопрос о справедливости неравенства $\text{min}_G(A, B) \leq F(G)$ в случае нильпотентной подгруппы B . Оказывается, что включение $\text{min}_G(A, B) \leq F(G)$ нарушается даже в случае, когда обе подгруппы A и B минимальные неабелевы. Например, это так в группе $G = E_9 \rtimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9 [5, теорема B(2a)]. Поэтому в общем случае вклю-

чение $\min_G(A, B) \leq F(G)$ может быть справедливо, лишь когда одна из подгрупп A или B абелева. Как показывает пример группы $G = S_4$, включение $\min_G(A, B) \leq F(G)$ справедливо, а включение $\text{Min}_G(A, B) \leq F(G)$ нарушается даже в случае, когда B — циклическая группа и $B \leq A \simeq D_8$. Однако в случае циклической подгруппы A для любой нильпотентной подгруппы B справедливо включение $\text{Min}_G(A, B) \leq F(G)$ [6, лемма 2.1]. Остается вопрос о справедливости включения $\min_G(A, B) \leq F(G)$ в случае абелевой подгруппы A , которая, вообще говоря, не обязательно циклическая. Рассмотрим пример группы $G = Z_2 \times S_4$. В этой группе $Z(G) = Z_2$, $O_2(G) \simeq E_8$. Зафиксируем силовскую 2-подгруппу S из S_4 . Тогда $T = Z(G) \times S$ — силовская 2-подгруппа в G и $Z(T) \simeq E_4$. Пусть x — элемент порядка 4 из S , а z — инволюция из $Z(G)$. Тогда xz — элемент порядка 4 такой, что $\langle (xz)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = Z(S)$, и для инволюции i , для которой $S = \langle x, i \rangle$, имеем $(xz)^i = x^i z^i = x^{-1} z^{-1} = (xz)^{-1}$. Поэтому $\langle xz, i \rangle \simeq \langle x, i \rangle \simeq D_8$ и $\langle xz, i \rangle \cap \langle x, i \rangle = \langle i, x^2 \rangle \simeq E_4$. Следовательно, если взять подгруппу $A = \langle i, x^2 z \rangle \simeq E_4$ и $S_1 = \langle xz, i \rangle$, то $A \cap S_1 = \langle i \rangle \not\leq O_2(G)$ и $A \cap O_2(G) = \langle x^2 z \rangle$. Если положить $B = S_1 = \langle xz, i \rangle \simeq D_8$, то $S_1 \cap O_2(G) = \langle x^2, xzi \rangle \simeq E_4$. Таким образом, инволюция x^2 из S_1 лежит в $G' \simeq A_4$, а инволюции xzi и $x^3 zi$ из S_1 лежат в $O_2(G) \setminus G'$. В $O_2(G)$ семь инволюций, причем на трех инволюциях из $O_2(G) \cap G'$, порождающих центры подгрупп S_1 , S_1^f и $S_1^{f^2}$, элемент f порядка три из G действует транзитивно, централизуя инволюцию z из $Z(G)$. Следовательно, элемент f действует транзитивно на трех инволюциях из $O_2(G)$, лежащих вне $Z(G)$ и вне G' , а также на множестве неупорядоченных пар, составленных из таких инволюций, которых также три. Поэтому пара инволюций $\{xzi, x^3 zi\}$ из $S_1 \setminus G'$ не содержит третью инволюцию $x^2 z$ из $O_2(G) \setminus G'$. Но при сопряжении элементом f , а затем f^2 инволюция $x^2 z$ будет содержаться в парах инволюций из подгрупп S_1^f и $S_1^{f^2}$ соответственно. Так как $S_1 \cap S_1^f \leq O_2(G)$, то $A \cap S_1^f = \langle x^2 z \rangle = A \cap S_1^{f^2}$. Таким образом, $m_G(A, B) = \{\langle x^2 z \rangle, \langle i \rangle\} = M_G(A, B)$, причем одно минимальное пересечение $\langle x^2 z \rangle$ лежит в $F(G)$, а второе $\langle i \rangle$ не лежит в $F(G)$. Поэтому самое большее, на что можно надеяться в общем случае, так это существование такого элемента g из G , при котором $A \cap B^g \leq F(G)$.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — контрпример к гипотезе и его порядок при этом минимален. Выберем подгруппы A и B в группе G так, чтобы число $|A||B|$ было минимальным. По теореме 1 можно считать, что G — неразрешимая группа. Пусть $S(G)$ — разрешимый радикал группы G и $\overline{G} = G/S(G)$. Если $S(G) \neq 1$, то по индукции в факторгруппе \overline{G} имеем $\overline{A} \cap \overline{B}^g = \overline{1}$ для некоторого элемента g из G . Другими словами, $A \cap B^{gr} \leq S(G)$ для любого элемента r из $S(G)$. Пусть $A_1 = A \cap S(G)$ и $B_1 = B^g \cap S(G)$. По индукции $A_1 \cap B_1^{r_1} \leq F(S(G)) \leq F(G)$ для некоторого элемента r_1 из $S(G)$. Следовательно, $A \cap B^{gr_1} = A \cap B^{gr_1} \cap S(G) = (A \cap S(G)) \cap (B^{gr_1} \cap S(G)) = A_1 \cap (B^g \cap S(G))^{r_1} = A_1 \cap B_1^{r_1} \leq F(G)$; противоречие. Поэтому $S(G) = 1$ и, следовательно, $F^*(G) = K_1 \times \dots \times K_n$, где K_1, \dots, K_n — простые неабелевы группы и $n \geq 2$. Положим $\text{Com}(G) = \{K_1, \dots, K_n\}$.

Пусть $G_1 = F^*(G)A$. Если $G_1 \neq G$, то по индукции в подгруппе G_1 для подгрупп A и $B_1 = G_1 \cap B$ имеем $A \cap B_1^{g_1} = 1$ для некоторого элемента g_1 из G_1 . Тогда $A \cap B^{g_1} = (A \cap B^{g_1}) \cap G_1 = A \cap (B \cap G_1)^{g_1} = A \cap B_1^{g_1} = 1$; противоречие. Поэтому $G_1 = G$.

Покажем, что A действует транзитивно на множестве $\text{Com}(G)$. Действительно, если для некоторой компоненты K из $\text{Com}(G)$ имеем $E_1(G) = \langle K^A \rangle \neq F^*(G)$, то пусть $E_2(G)$ — произведение компонент из $\text{Com}(G)$, не лежащих в $E_1(G)$. Тогда $F^*(G) = E_1(G) \times E_2(G)$ и A нормализует подгруппы $E_1(G)$ и $E_2(G)$. Поэтому подгруппы $E_1(G)$ и $E_2(G)$ нормальны в G и $G/C_G(E_1(G)) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(E_1(G))$ и $G/C_G(E_2(G)) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(E_2(G))$. Так как $C_G(E_1(G)) \cap C_G(E_2(G)) = C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$ [4, предложение 1.27] и является нормальной подгруппой в G , то $C_G(E_1(G)) \cap C_G(E_2(G)) = 1$. Следовательно, по теореме Ремака [3, теорема 4.3.9] груп-

па G изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(E_1(G)) \times \text{Aut}(E_2(G))$. По индукции в подгруппах $\text{Aut}(E_1(G))$ и $\text{Aut}(E_2(G))$ для образов группы G выполняется заключение теоремы. Значит, оно выполняется и в G ; противоречие.

Итак, A действует транзитивно на множестве $\text{Com}(G)$. Пусть A_1 — ядро действия (сопряжением) подгруппы A на множестве $\text{Com}(G)$. В силу абелевости подгруппы A и ее транзитивности на множестве $\text{Com}(G)$ имеем $A_1 = N_G(K_i)$ для $1 \leq i \leq n$ и, следовательно, $A \neq A_1$. Минимальность числа $|A||B|$ влечет, что A является прямым произведением своих элементарных абелевых подгрупп. Пусть A_2 — максимальная подгруппа в A , содержащая A_1 , x — элемент некоторого простого порядка p из $A \setminus A_2$ и $m = |A_2 : A_1|$. Тогда $A = A_2 \times \langle x \rangle$ и $n = |A : A_2||A_2 : A_1| = mp$. Пусть E — множество всех A_2 -орбит на $\text{Com}(G)$. Ввиду [6, Theorem 1.6A] E есть система импримитивности для A , и подгруппа $\langle x \rangle$ действует транзитивно на E . Можно считать, что $E = \{E_1, \dots, E_p\}$ и $E_1 = \{K_i \mid 1 \leq i \leq m\}$. Тогда $\{K_i, K_i^x, \dots, K_i^{x^{p-1}}\}$ — $\langle x \rangle$ -орбита на $\text{Com}(G)$, порождающая подгруппу $T_i = K_i \times K_i^x \times \dots \times K_i^{x^{p-1}}$ ($1 \leq i \leq m$). Поскольку $T_i \langle x \rangle \simeq K_i \wr \langle x \rangle$, $C_{T_i}(x) = D_i \simeq K_i$, где D_i — диагональ в T_i . Пусть $D = D_1 \times \dots \times D_m$. Поскольку $F(G) = 1$, каждый неединичный элемент a_1 из A_1 действует нетривиально на D_i для $1 \leq i \leq m$, поэтому каждый неединичный элемент a_2 из A_2 действует нетривиально на D . Любой элемент a из $A \setminus A_2$ имеет вид $a = a_2 x^i$, где $a_2 \in A_2$ и $1 \leq i \leq p-1$. Но x централизует D и $[D, a_2] \neq 1$ при $a_2 \neq 1$, поэтому $C_A(D) = \langle x \rangle$.

Если $A = \langle x \rangle$, то по теореме Бэра — Судзуки [4, теорема 2.66] $\langle x \rangle \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$ и, следовательно, G не является контрпримером к гипотезе. Поэтому $A \neq \langle x \rangle$. Тогда по минимальности числа $|A||B|$ имеем $\langle x \rangle \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G . По индукции в подгруппе $G_1 = DA$ имеем $A \cap B_1^{g_1} \leq F(G_1) = \langle x \rangle$ для $B_1 = G_1 \cap B^g$ и некоторого элемента g_1 из G_1 . Тогда $A \cap B^{gg_1} \leq G_1$, так как $A \leq G_1$. Следовательно,

$$A \cap B^{gg_1} = A \cap B^{gg_1} \cap G_1 = A \cap (B^{gg_1} \cap G_1) = A \cap (B^g \cap G_1)^{g_1} = A \cap B_1^{g_1} \leq \langle x \rangle.$$

Поэтому $A \cap B^{gg_1} \leq A \cap B_1^{g_1} \cap \langle x \rangle = \langle x \rangle \cap B_1^{g_1} \cap \langle x \rangle = \langle x \rangle \cap (B_1 \cap \langle x \rangle)^{g_1} \leq \langle x \rangle \cap (B^g \cap \langle x \rangle)^{g_1} = 1$; противоречие.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенков В.И.** Пересечение абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 1–2. С. 150–152.
2. **Jamali A., Viseh M.** On nilpotent subgroups containing non-trivial normal subgroups // J. Group Theory. 2010. Vol. 3, no. 3. P. 411–416.
3. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
4. **Горенштейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
5. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундаментал. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.
6. **Dixon J.D., Mortimer V.** Permutation groups. New York.: Springer-Verlag, 1996. 346 с.

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
профессор

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: v1i9z52@mail.ru

Поступила 21.06.2015

УДК 512.542

**КОНЕЧНЫЕ ПОЧТИ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ С ГРАФАМИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ,
ВСЕ СВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ КЛИКАМИ¹****М. Р. Зиновьева, А. С. Кондратьев**

Определены конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами, т. е. полными графами. Ключевым для доказательства этого является следующий полученный нами факт, имеющий независимый интерес: в графе простых чисел конечной простой неабелевой группы существуют две несмежные нечетные вершины, не делящие порядок группы внешних автоморфизмов этой группы.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, граф простых чисел.

M. R. Zinov'eva, A. S. Kondrat'ev. Finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques.

We find finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques, i.e., complete graphs. The proof is based on the following fact, which was obtained by the authors and is of independent interest: the prime graph of a finite simple nonabelian group contains two nonadjacent odd vertices that do not divide the order of the outer automorphism group of this group.

Keywords: finite group, almost simple group, prime graph.

Введение

Пусть G — конечная группа и $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка. Граф со множеством вершин $\pi(G)$, в котором две вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка rs , называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $\Gamma(G)$.

Лючидо и Могхаддамфар [11] определили конечные простые неабелевы группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются *кликами*, т. е. полными графами. А. В. Васильев и Е. П. Вдовин [1] устранили неточности, допущенные в этой статье М. Р. Зиновьева и В. Д. Мазуров [3] определили конечные простые неабелевы группы, графы простых чисел которых совпадают с графами простых чисел групп Фробениуса или 2-фробениусовых групп.

В данной работе мы рассматриваем конечные *почти простые* группы, т. е. группы с простым неабелевым цоколем, с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами, и получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть G — конечная почти простая, но не простая группа. Все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами тогда и только тогда, когда граф $\Gamma(G)$ несвязен и G изоморфна группе из следующего списка:

- (1) $S_6, M_{10}, PGL_2(9), S_8, S_{12}, \text{Aut}(L_2(8)), \text{Aut}(L_3(3)), L_3(4) : 2_1, L_3(8) : 2, L_3(8) : 3, \text{Aut}(L_3(8)), \text{Aut}(U_3(3)), U_3(9) : 2, \text{Aut}(U_3(9)), \text{Aut}(U_5(2)), \text{Aut}({}^3D_4(2)), \text{Aut}(Sz(32))$;
- (2) $L_2(2^m)\langle f \rangle$, где f — полевой автоморфизм группы $L_2(2^m)$ и $|f| = 2^k > 1$;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект 15-11-10025 (теорема 1), а также РФФИ, проект 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УРО РАН, проект 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006) (теорема 2).

- (3) $PGL_2(p)$, где $p > 3$ — простое число Ферма или Мерсенна;
- (4) $L_2(p^m)\langle df \rangle$, где p — нечетное простое число, m четно, d и f — диагональный и инволютивный полевой автоморфизмы группы $L_2(p^m)$ соответственно;
- (5) $L_3(2^m)\langle x \rangle$, где $m \geq 5$, $(2^m - 1)_3 \neq 3$, $|x| = 2 \cdot 3^k$, x^2 — полевой автоморфизм, а x^{3^k} — графовый автоморфизм группы $L_3(2^m)$;
- (6) $L_3(p) : 2$, где $p \geq 127$ — простое число Мерсенна и $(p - 1)_3 \geq 9$;
- (7) $U_3(2^m)\langle f \rangle$, где $(2^m + 1)_3 \neq 3$, f — полевой автоморфизм группы $U_3(2^m)$ и $|f| = 2^l \cdot 3^k$ для $l > 0$;
- (8) $U_3(p) : 2$, где $p \geq 17$ — простое число Ферма и $(p + 1)_3 \geq 9$;
- (9) $G_2(3^m)\langle f \rangle$, где f — полевой автоморфизм группы $G_2(3^m)$ и $\emptyset \neq \pi(|f|) \subseteq \{2, 3\}$;
- (10) $PSp_4(q)\langle f \rangle$, где f — полевой автоморфизм группы $PSp_4(q)$ и $|f| = 2^k > 1$;
- (11) $PSp_4(q)\langle df \rangle$, где d и f — диагональный и полевой автоморфизмы группы $PSp_4(q)$ соответственно и $|f| = 2^k > 1$.

Ключевым для доказательства теоремы 1 является следующий полученный нами результат, имеющий независимый интерес.

Теорема 2. Пусть G — конечная простая неабелева группа. Тогда в графе $\Gamma(G)$ существуют две несмежные нечетные вершины, не делящие $|\text{Out}(G)|$, причем такие вершины можно выбрать из $\pi_1(G)$, за исключением следующих случаев:

- (1) $\pi_1(G)$ является кликой;
- (2) $G \cong L_3^\varepsilon(q)$, где $q = p^m > 2$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ и либо $\pi(q + \varepsilon 1) = \{2\}$ и $(q - \varepsilon 1)_3 = 3$, либо p делит $2m$;
- (3) $G \cong U_5(2)$.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения в основном стандартны, их можно найти, например, в [6; 7; 9]. В частности, если A и B — группы, p — простое число и n — натуральное число, мы используем следующие обозначения: $\pi(n)$ — для множества всех простых делителей числа n , n_p — для наибольшей степени числа p , делящей n , \mathbb{Z}_n (или просто n) — для циклической группы порядка n , $A : B$ ($A \rtimes B$) — для расщепляемого расширения (полупрямого произведения) группы A посредством группы (на группу) B . Если K — конечная простая группа лиева типа, то $\text{Inndiag}(K)$ обозначает группу, порожденную всеми внутренними и диагональными автоморфизмами группы K . Кроме того, через $L_n^\varepsilon(q)$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ обозначаются $L_n(q) = PSL_n(q) = A_{n-1}(q)$ при $\varepsilon = +$ и $U_n(q) = PSU_n(q) = {}^2A_{n-1}(q)$ при $\varepsilon = -$.

Пусть G — конечная группа. Обозначим множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $\{\pi_i(G) \mid i = 1, \dots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $\Gamma(G)$; если порядок группы G четен, считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Мы используем описание связных компонент всех конечных почти простых групп, полученное в [4; 5; 12], арифметический критерий смежности двух вершин и описание клик максимального размера в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы, полученные в [1; 2]. Некоторое множество вершин графа называется его *кликкой*, если элементы этого множества попарно несмежны в этом графе. Кликка мощности n называется *n-кликкой*.

Предложение 1 (теорема Жигмонди [13]). Пусть q, n — натуральные числа, большие 1. Тогда существует простое число r , делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при $1 \leq i < n$, причем $r \equiv 1 \pmod{n}$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.

В обозначениях предложения 1 простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$ и обозначается через $r_n(q)$.

Предложение 2 (лемма Герона [8]). Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b . Тогда пара (p^a, q^b) равна $(3^2, 2^3)$, $(p, 2^b)$ или $(2^a, q)$.

Предложение 3 [11, Theorem 1; 1, следствие 7.6]. Пусть G — конечная простая неабелева группа и все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $M_{11}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, \text{HiS}, A_n$ ($n \in \{5, 6, 7, 9, 12, 13\}$), $L_2(q)$ ($q > 3$), $L_3(4)$, $L_3^\varepsilon(q)$ ($\varepsilon \in \{+, -\}$, $\pi(q + \varepsilon 1) = \{2\}$, $(q - \varepsilon 1)_3 \neq 3$), $U_4(3)$, $U_6(2)$, $Sp_6(2)$, $PSp_4(q)$ ($q > 2$), $D_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, $Sz(q)$ ($q = 2^{2k+1} > 2$), $G_2(q)$ ($q = 3^k$).

2. Доказательство теоремы 2

Пусть P — конечная простая неабелева группа.

Случай 1. P изоморфна одной из спорадических групп.

Утверждение теоремы для этого случая следует из неравенства $|\text{Out}(G)| \leq 2$ (см. [7]), описания связных компонент (см. [12]) и клик максимального размера (см. [1, табл. 1]) графа $\Gamma(P)$.

Случай 2. P изоморфна знакопеременной группе A_n для $n \geq 5$.

Хорошо известно, что $\text{Out}(P)$ — 2-группа. Если $n \leq 13$, то утверждение теоремы для этого случая следует из информации о порядках элементов группы P из [7]. Если $n = 14$, то вершины 5 и 11 принадлежат $\pi_1(P)$ и несмежны в графе $\Gamma(P)$. Если $n \in \{15, 16\}$, то граф $\Gamma(P)$ связан и вершины 7 и 11 в нем несмежны. Если $n = 17$, то вершины 7 и 11 принадлежат $\pi_1(P)$ и несмежны в графе $\Gamma(P)$.

Пусть $n \geq 18$. По [5, лемма 1] в интервале $((n+1)/2, n)$ лежат по крайней мере три нечетных простых числа p_1, p_2 и p_3 , пусть $p_1 < p_2 < p_3$. Положим $r = p_1$ и $s = p_2$. Ясно, что вершины r и s несмежны в графе $\Gamma(P)$. Если граф $\Gamma(P)$ связан, то $r, s \in \pi(P) = \pi_1(P)$. Если $\Gamma(P)$ несвязен, то по [12] $n \in \{p, p+1, p+2\}$ для некоторого нечетного простого числа p и $\pi_1(P) = \pi((n-3)!)$, поэтому r и s принадлежат $\pi_1(P)$.

Случай 3. P — конечная простая группа лиева типа над полем из $q = p^m$ элементов, где p — простое число и $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим все возможности для P , кроме рассмотренных в случае 2. При этом для вычисления компонент связности графа $\Gamma(P)$ и проверки включения $r, s \in \pi_1(P)$ мы используем [4; 5; 12], для вычисления $|\text{Out}(P)|$ — [7], для проверки равенства $(rs, |\text{Out}(P)|) = 1$ — предложение 1.

Пусть $P \cong A_1(q)$, где $5 < q \neq 9$. Тогда $|\text{Out}(P)| = (2, q-1) \cdot m$. Предположим сначала, что q четно. Тогда $m \geq 2$, $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \{2\}$, $\pi_2(P) = \pi(q-1)$, $\pi_3(P) = \pi(q+1)$ и $|\text{Out}(P)| = m$. Пусть $m = 6$. Возьмем $r = 7 \in \pi_2(P)$ и $s = 13 \in \pi_3(P)$. Тогда r и s несмежны в $\Gamma(P)$ и $(rs, m) = 1$. Пусть теперь $m \neq 6$. Возьмем $r = r_m(2) \in \pi_2(P)$ и $s = r_{2m}(2) \in \pi_3(P)$. Тогда r и s несмежны в $\Gamma(P)$ и по предложению 1 $(rs, m) = 1$. Предположим теперь, что q нечетно и $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \pi(q - \varepsilon 1)$, $\pi_2(P) = \pi((q + \varepsilon 1)/2)$, $\pi_3(P) = \{p\}$ и $|\text{Out}(P)| = 2m$. Если $m \leq 2$, то возьмем $r = p \in \pi_3(G)$ и в качестве s — любое нечетное простое число из $\pi_1(G) \cup \pi_2(G)$ (такое s существует, так как в противном случае по предложению 2 мы получили бы $q = 9$). Если $m > 2$, то положим $r = r_m(p)$ и $s = r_{2m}(p)$. Тогда в любом случае r и s несмежны в $\Gamma(P)$ и по предложению 1 $(rs, |\text{Out}(P)|) = 1$.

Пусть $P \cong A_2^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $q > 2$. Тогда $|\text{Out}(P)| = 2(3, q - \varepsilon 1)m$.

Предположим, что $\pi(q + \varepsilon 1) = \{2\}$. По предложению 2 либо $q = 9$ и $\varepsilon 1 = -$, либо $q = p > 2$. В первом случае $|\text{Out}(P)| = 4$ и по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика, следовательно, для $r = 3 \in \pi_1(G)$ и $s = 73 \in \pi_2(G)$ выполняется утверждение теоремы.

Пусть выполняется второй случай. Положим $r = p$ и s равным $r_3(p)$ при $\varepsilon = +$ и $r_6(p)$ при $\varepsilon = -$. Тогда по [1, предложение 3.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$, а по предложению 1 $(rs, |\text{Out}(P)|) = 1$. Предположим, что $\pi_1(G) = \pi(q(q^2 - 1))$ не является кликой. Тогда ввиду предложения 3 $(q - \varepsilon 1)_3 = 3$, поэтому $|\text{Out}(P)| = 6$ и $p > 3$. По [2, предложение 3.12]

единственной кокликой максимального размера в $\pi_1(G)$ является $\{3, p\}$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть теперь $\pi(q + \varepsilon 1) \neq \{2\}$. Пусть сначала $\varepsilon = +$. Тогда ввиду предложения 1 существуют простые числа $r = r_{2m}(p) \in \pi_1(G)$ и $s = r_{3m}(p) \in \pi_2(G)$, взаимно простые с $|\text{Out}(P)|$. Ввиду [2, предложение 3.12, рис. 7] в порожденном подграфе $\pi_1(G)$ каждая 2-коклика содержится в некоторой коклике максимального размера, которая имеет вид $\{p, r_2(q)\}$ при $(q - 1)_3 \neq 3$ и $\{p, 3, r_2(q)\}$ при $(q - 1)_3 = 3$. Поэтому $\pi_1(G)$ содержит две несмежные вершины, взаимно простые с $|\text{Out}(P)|$, тогда и только тогда, когда p не делит $2m$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть теперь $\varepsilon = -$. Пусть $m \geq 2$. Предположим, что не существует примитивный простой делитель числа $p^m - 1$. Тогда по предложению 1 либо $q = 2^6$, либо $q = p^2$ и $\pi(p + 1) = \{2\}$.

Пусть выполняется первый случай. Тогда $(q + 1)_3 = 1$, $|\text{Out}(P)| = 12$ и ввиду [2, предложение 3.12] и предложения 1 вершины $7 \in \pi_1(G)$ и $r_6(q) \in \pi_2(G)$ несмежны в $\Gamma(P)$ и взаимно просты с $|\text{Out}(P)|$, а 2-кокликами в $\pi_1(G)$ являются $\{2, 3\}$ или $\{2, 7\}$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть выполняется второй случай. Тогда $(q + 1)_3 = 1$, $|\text{Out}(P)| = 4$ и ввиду [2, предложение 3.12] $\pi_1(G)$ содержит 2-коклику $\{p, r\}$, где $r \in \pi(p - 1) \setminus \{2\}$, так что выполняется утверждение теоремы.

Таким образом, ввиду предложения 1 можно считать, что существуют нечетные простые числа $r = r_m(p) \in \pi_1(G)$ и $s = r_{6m}(p) \in \pi_2(G)$, взаимно простые с $|\text{Out}(P)|$. Ввиду [2, предложение 3.12, рис. 7] в порожденном подграфе $\pi_1(G)$ каждая 2-коклика содержится в некоторой коклике максимального размера, которая имеет вид $\{p, r_1(q)\}$ при $(q + 1)_3 \neq 3$ и $\{p, 3, r_1(q)\}$ при $(q + 1)_3 = 3$. Поэтому $\pi_1(G)$ содержит две несмежные вершины, взаимно простые с $|\text{Out}(P)|$, тогда и только тогда, когда p не делит $2m$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть $m = 1$. Тогда $|\text{Out}(P)| = 2(3, q + 1)$. Ввиду предложения 1 существуют нечетные простые числа $r \in \pi(p - 1) \setminus \{2\}$ и $s = r_6(p) \in \pi_2(G)$, взаимно простые с $|\text{Out}(P)|$. Ввиду [2, предложение 3.12, рис. 7] в порожденном подграфе $\pi_1(G)$ каждая 2-коклика содержится в некоторой коклике максимального размера, которая имеет вид $\{p, r_1(q)\}$ при $(q + 1)_3 \neq 3$ и $\{p, 3, r_1(q)\}$ при $(q + 1)_3 = 3$. Поэтому $\pi_1(G)$ содержит две несмежные вершины, взаимно простые с $|\text{Out}(P)|$, тогда и только тогда, когда $p > 2$, так что выполняется утверждение теоремы.

Пусть $P \cong L_4(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 3$ и $s = 5$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_4(4)$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_4(5)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 8$. Положим $r = 5$ и $s = 13$. По [1, предложение 3.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_4(q)$, $q > 5$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = (4, q - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{3m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_5(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_5(q)$, $q \neq 4$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = (5, q - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{3m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 4$. Положим $r = 5$ и $s = 13$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 12$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(7)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 12$. Положим $r = 5$ и $s = 19$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_6(q)$, $q \notin \{2, 3, 4, 7\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = (6, q - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{4m}(p)$ и $s = r_{5m}(p)$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_7(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 31$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_8(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 31$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_9(2)$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 127$ и $s = 31$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong L_n(q)$, где $n \geq 7$ и $(n, q) \neq (7, 2), (8, 2)$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\text{Out}(P)| = (n, q - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{m(n-2)}(p)$ и $s = r_{m(n-3)}(p)$. По [1, предложение 2.1] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Если $P \cong U_4(2), U_4(3), U_6(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong U_4(q)$, где $q \notin \{2, 3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = (4, q + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{4m}(p)$ и $s = r_{6m}(p)$. По [1, предложение 2.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_6(5)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 12$. Положим $r = 7$ и $s = 13$. По [1, предложение 2.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_6(q)$, где $q \notin \{2, 5\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = (6, q + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $r = r_{10m}(p)$. По [1, предложение 2.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_n(q)$, где $8 \leq n$ чётно. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\text{Out}(P)| = (n, q + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{nm}(p)$ и $s = r_{2(n-3)m}(p)$. По [1, предложение 2.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Если $P \cong U_5(2)$, то получаем утверждение (3) теоремы 2.

Пусть $P \cong U_5(q)$, где $q \neq 2$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = (5, q + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{4m}(p)$ и $s = r_{6m}(p)$. По [1, предложение 2.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_7(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [1, предложение 2.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong U_n(q)$, где $7 \leq n$ нечётно, $(n, q) \neq (7, 2)$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\text{Out}(P)| = (n, q + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{2(n-2)m}(p)$ и $s = r_{2(n-4)m}(p)$. По [1, предложение 2.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_5(q) \cong S_4(q)$. Тогда $|\text{Out}(P)| = (2, q - 1) \cdot m$, $s(P) = 2$, $\pi_1(P) = \pi(q(q^2 - 1))$, $\pi_2(P) = \pi((q^2 + 1)/(2, q - 1))$, причем $\pi_1(P)$ является кокликкой в $\Gamma(P)$. По предложению 1 либо $\pi(q + 1) = \{2\}$ и $m = 1$, либо существует число $r_{2m}(p)$. В первом случае положим $r = p \in \pi_1(G)$ и $s = r_4(p)$. Во втором случае положим $r = r_{2m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. Тогда в любом случае r и s несмежны в $\Gamma(P)$ и по предложению 1 $(rs, |\text{Out}(P)|) = 1$.

Если $P \cong S_6(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong O_7(3)$ или $P \cong S_6(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_7(q)$ или $P \cong S_6(q)$, где $q \notin \{2, 3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = (2, q - 1) \cdot m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.4] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong S_8(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong S_{10}(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 17$. По [2, предложение 2.4] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{2n+1}(q)$ или $P \cong S_{2n}(q)$, где $n \geq 4$ и $(n, q) \neq (4, 2), (5, 2)$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\text{Out}(P)| = (2, q - 1) \cdot m$. Положим $r = r_{2(n-1)m}(p)$ и $s = r_{2(n-2)m}(p)$. По [2, предложение 2.4] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Если $P \cong O_8^+(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong O_8^+(3)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 24$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_8^+(q)$, где $q \notin \{2, 3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = (4, q^4 - 1) \cdot 6m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.5] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{10}^+(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{10}^+(q)$, где $q \neq 2$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\text{Out}(P)| = (4, q^5 - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{8m}(p)$ и $s = r_{6m}(p)$. По [2, предложение 2.5] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{12}^+(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 11$ и $s = 17$. По [2, предложение 2.5] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{2n}^+(q)$, где $n \geq 6$ и $(n, q) \neq (6, 2)$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\text{Out}(P)| = (4, q^n - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{2(n-2)m}(p)$ и $s = r_{2(n-3)m}(p)$. По [2, предложение 2.5] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_8^-(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_8^-(q)$, где $q > 2$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = (4, q^4 + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.5] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{10}^-(2)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 11$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{12}^-(2)$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 17$. По [2, предложение 2.5] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong O_{2n}^-(q)$, где $n \geq 5$ и $(n, q) \neq (5, 2), (6, 2)$. Тогда $s(P) \in \{1, 2\}$ и $|\text{Out}(P)| = (4, q^n + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{2(n-2)m}(p)$ и $s = r_{2(n-3)m}(p)$. По [2, предложение 2.5] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(7)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 7$ и $s = 19$. По [1, предложение 3.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(q)$, где $7 < q \equiv 1 \pmod{3}$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = m$. Пусть $m = 1$ и $\pi(q + 1) = \{2\}$. Тогда $p = 2^s - 1$, где $3 \leq s$ — простое число, и $q - 1 = p - 1 = 2(2^{s-1} - 1)$. Если $2^{s-1} - 1 = 3^t$ для некоторого натурального числа t , то по [8] $s = 3$ и $q = 7$, но $q > 7$; противоречие. Значит, $q = p = 2^s - 1$, где $s \geq 5$, и можно положить $r \in \pi(p - 1) \setminus \{2, 3\}$ и $s = r_{3m}(p)$. Пусть $m \neq 1$ или $\pi(q + 1) \neq \{2\}$. Положим $r = r_{2m}(p) \notin \{2, 3\}$ и $s = r_{3m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(5)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(17)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 7$ и $s = 17$. По [1, предложение 3.2] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong G_2(q)$, где $2 < q \equiv -1 \pmod{3}$, $q \notin \{5, 17\}$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = m$. Пусть $m = 1$ и $\pi(q - 1) = \{2\}$. Тогда $p = 2^{2^n} + 1$, где $n \geq 1$, и $q + 1 = p + 1 = 2(2^{2^n-1} + 1)$. Если $2^{2^n-1} + 1 = 3^t$ для некоторого натурального числа t , то по [8] $2^n \in \{2, 4\}$ и $q \in \{5, 17\}$; противоречие. Значит, $q = p = 2^{2^n} + 1$, где $n \geq 3$, и можно положить $r \in \pi(p + 1) \setminus \{2, 3\}$ и $s = r_{6m}(p)$. Пусть $m \neq 1$ или $\pi(q - 1) \neq \{2\}$. Положим $r = r_m(p) \notin \{2, 3\}$ и $s = r_{6m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $G \cong G_2(q)$, где $q = 3^m$. Тогда $s(G) = 3$, $\pi_1(G) = \pi(q(q^2 - 1))$, $\pi_2(G) = \pi(q^2 + q + 1)$, $\pi_3(G) = \pi(q^2 - q + 1)$ и $|\text{Out}(G)| = 2m$. Положим $r = r_{3m}(3)$ и $s = r_{6m}(3)$. Тогда $r \in \pi_2(G)$ и $s \in \pi_3(G)$, следовательно, r и s несмежны в графе $\Gamma(G)$.

Если $P \cong {}^3D_4(2)$, то по предложению 3 $\pi_1(G)$ — клика.

Пусть $P \cong {}^3D_4(4)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 6$. Положим $r = 7$ и $s = 13$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^3D_4(q)$, где $q \notin \{2, 4\}$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 3m$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{3m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong F_4(2)$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 7$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong F_4(q)$, где $q > 2$. Тогда $s(P) \in \{2, 3\}$ и $|\text{Out}(P)| \in \{m, 2m\}$. Положим $r = r_{6m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\text{Out}(P)| = 2n + 1$. Положим $r = r_{6n}(p)$ и $s = r_{4n}(p)$. По [2, предложение 2.9] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2F_4(2)'$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 3$ и $s = 5$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_6(q)$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = (3, q - 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{8m}(p)$ и $s = r_{5m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2E_6(2)$. Тогда $s(P) = 4$ и $|\text{Out}(P)| = 6$. Положим $r = 7$ и $s = 11$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong {}^2E_6(q)$, где $q > 2$. Тогда $s(P) = 2$ и $|\text{Out}(P)| = (3, q + 1) \cdot 2m$. Положим $r = r_{10m}(p)$ и $s = r_{8m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$. Тогда $s(P) = 4$, $\pi_1(G) = \{2\}$, $\pi_2(G) = \pi(q - 1)$, $\pi_3(G) = \pi(q + \sqrt{2q} + 1)$, $\pi_4(G) = \pi(q - \sqrt{2q} + 1)$ и $|\text{Out}(G)| = 2n + 1$. Легко проверить, что $(q + \sqrt{2q} + 1)(q - \sqrt{2q} + 1) = q^2 + 1 = (q^4 - 1)/(q^2 - 1)$. Положим $r = r_{2n+1}(2)$ и $s = r_{4(2n+1)}(2)$. Тогда $r \in \pi_2(G)$ и $s \in \pi_3(G) \cup \pi_4(G)$, следовательно, r и s несмежны в графе $\Gamma(G)$.

Пусть $P \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\text{Out}(P)| = 2n + 1$. Положим $r = r_{2(2n+1)}(3)$ и $s = r_{2n+1}(3)$. По [2, предложение 2.9] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_7(2)$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\text{Out}(P)| = 1$. Положим $r = 5$ и $s = 31$. По [7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_7(3)$. Тогда $s(P) = 3$ и $|\text{Out}(P)| = 2$. Положим $r = 5$ и $s = 11$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_7(q)$, где $q \notin \{2, 3\}$. Тогда $s(P) = 1$ и $|\text{Out}(P)| = (2, q - 1) \cdot m$. Положим $r = r_{5m}(p)$ и $s = r_{4m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Пусть $P \cong E_8(q)$. Тогда $s(P) \in \{4, 5\}$ и $|\text{Out}(P)| = m$. Положим $r = r_{18m}(p)$ и $s = r_{14m}(p)$. По [2, предложение 2.7] r и s несмежны в $\Gamma(P)$.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — конечная почти простая, но не простая группа и все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами. Положим $P = \text{Soc}(G)$. Ввиду теоремы 2 и предложения 3 граф $\Gamma(G)$ несвязен и группа P изоморфна одной из следующих групп: M_{11} , M_{22} , J_1 , J_2 , J_3 , HiS , A_n ($n \in \{5, 6, 7, 9, 12, 13\}$), $L_2(q)$ ($q > 3$), $L_3^\varepsilon(q)$ ($q = p^m > 2$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, причем $\pi(q + \varepsilon 1) = \{2\}$ или p делит $2m$), $L_3(4)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $U_6(2)$, $Sp_6(2)$, $PSp_4(q)$ ($q > 2$), $D_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, $Sz(q)$ ($q > 2$), $G_2(q)$ ($q = 3^m$).

Далее рассмотрим возможности для G . Ввиду теоремы 2 и [7] можно считать, что группа P изоморфна одной из групп $L_2(q)$ ($q > 32$), $L_3^\varepsilon(q)$ ($q = p^m > 11$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, причем $\pi(q + \varepsilon 1) = \{2\}$ или p делит $2m$), $PSp_4(q)$ ($q > 2$), $G_2(3^m)$ ($m > 1$), $Sz(q)$ ($q > 2$).

Лемма 1. Если $P \cong L_2(q)$, где $q > 32$, то граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется один из пп. (2)–(4) теоремы 1.

Доказательство. Предположим, что $q = 2^m > 2^5$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \{2\}$, $\pi_2(P) = \pi(q - 1)$, $\pi_3(P) = \pi(q + 1)$ и $P < G \leq \text{Aut}(P) = P \rtimes \langle f \rangle$, где f — полевой автоморфизм порядка m группы P (см. [9, Proposition 2.5.12]). Возьмем $p \in \pi(G/P) \subseteq \pi(m)$.

Предположим, что $m \neq p$. Тогда $m/p \geq 2$. Для элемента $x = f^{m/p}$ порядка p имеем $C := C_P(x) \cong L_2(2^{m/p})$. Поэтому $\pi_1(C) = \{2\}$, $\pi_2(C) = \pi(2^{m/p} - 1)$, $\pi_3(C) = \pi(2^{m/p} + 1)$. Если p нечетно, то $1 \neq 2^{m/p} - 1 \mid (q - 1)$ и $1 \neq 2^{m/p} + 1 \mid (q + 1)$, откуда граф $\Gamma(G)$ связан, что не так. Поэтому $\pi(G/P) = \{2\}$ и $\pi_1(G) = \pi(2(q - 1))$ — клика в графе $\Gamma(G)$, так что заключение леммы выполняется.

Таким образом, можно считать, что $m = p > 5$ и $G = \text{Aut}(P)$. Имеем $C_P(f) \cong L_2(2) \cong S_3$. Если $p \in \pi(P)$, то $p \in \pi(C_P(f)) = \{2, 3\}$, противоречие. Поэтому $p \notin \pi(P)$ и $\{2, p\} \cup \pi(q + 1) \subseteq$

$\pi_1(G)$, так как 3 делит $q + 1$. Но по условию $\pi_1(G)$ — полный граф, значит, числа $r_{2m}(2)$ и p смежны в графе $\Gamma(G)$, что не так.

Пусть q нечетно. Тогда $q = p^m > 3$, где p — нечетное простое число и $m \in \mathbb{N}$. Пусть $q \equiv \epsilon 1 \pmod{4}$ при $\epsilon \in \{+, -\}$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(P) = \pi(q - \epsilon 1)$, $\pi_2(P) = \{p\}$, $\pi_3(P) = \pi((q + \epsilon 1)/2)$ и $P < G \leq \text{Aut}(P) = \text{Inndiag}(P) \rtimes \langle f \rangle$, где $\text{Inndiag}(P) = P \langle d \rangle \cong \text{PGL}_2(q)$, d — диагональный автоморфизм и f — полевой автоморфизм порядка m группы P соответственно (см. [9, Proposition 2.5.12]).

Пусть $q - 1 = 2^k$. Тогда $\epsilon = +$, $p^m - 2^k = 1$ и по предложению 2 либо $p^m = 3^2$, либо $m = 1$. Но $q \neq 9$. Значит, $q = p$ и $G \cong \text{PGL}_2(p)$. Отсюда $\pi_1(G) = \pi(q + 1)$ и $\pi_2(G) = \{p\}$ — клики в графе $\Gamma(G)$.

Пусть $q + 1 = 2^k$. Тогда $\epsilon = -$, $2^k - p^m = 1$ и по предложению 2 $m = 1$ и k — простое число. Таким образом, $q = p = 2^k - 1$ и $q - 1 = 2(2^{k-1} - 1)$. Если $k = 2$, то $q = 3$; противоречие. Поэтому $k \geq 3$ и, следовательно, $3 \in \pi(q - 1)$. Имеем $G \cong \text{PGL}_2(p)$. Отсюда $\pi_1(G) = \pi_1(q - 1)$ и $\pi_2(G) = \{p\}$ — клики в графе $\Gamma(G)$.

Пусть теперь $q \pm 1 \neq 2^k$. По предложению 1 существуют два простых числа $r = r_m(p)$ и $s = r_{2m}(p)$, не смежные в графе $\Gamma(G)$ и не делящие $2m$. Предположим, что $\text{Inndiag}(P) \leq G$. Поскольку $\text{PGL}_2(p)$ содержит циклические подгруппы порядков $q - 1$ и $q + 1$, имеем $\pi(q^2 - 1) \subseteq \pi_1(G)$. Но $\pi_1(G)$ — клика, поэтому r и s смежны в графе $\Gamma(G)$. Поскольку $(rs, |G/P|) = 1$, r и s смежны в графе $\Gamma(P)$, противоречие.

Итак, $G \cap \text{Inndiag}(P) = 1$. Предположим, что $G \cap \langle f \rangle \neq 1$, и возьмем элемент x некоторого простого порядка $t \in \pi(m)$ из $G \cap \langle f \rangle$. Тогда $O^{p'}(C_P(x)) \cong L_2(p^{m/t})$ (см. [9, Proposition 4.9.1]) и, следовательно, $\pi(p(p^{2m/t} - 1)) \subseteq \pi_1(G)$. Предположим, что t нечетно. Тогда $(p^{m/t} - 1)/2$ и $(p^{m/t} + 1)/2$ — неединичные делители чисел $(q - 1)/2$ и $(q + 1)/2$ соответственно, откуда $\pi(q^2 - 1) \subseteq \pi_1(G)$, что противоречит несмежности вершин r и s в графе $\Gamma(G)$. Таким образом, $|G/P|$ — степень 2. В частности, m четно и $\pi(p(q - 1)) \subseteq \pi_1(G)$. Но тогда p и r смежны в графе $\Gamma(G)$, а значит, и в графе $\Gamma(P)$, что невозможно.

Итак, $G \cap \langle f \rangle = 1$. Поэтому m четно, $\epsilon = +$ и $G = P \langle df_1 \rangle$, где $f_1 = f^{m/2}$. Предположим, что вершины 2 и $t \in \pi(p(q + 1)/2)$ смежны в графе $\Gamma(G)$. Тогда в G существует инволюция τ , централизованная элементом z порядка t из P . Поскольку $|C_P(z)| \in \{p, (q + 1)/2\}$, $\tau \in G \setminus P$. Но по [9, Proposition 4.9.1(d)] инволюции τ и f_1 сопряжены относительно $\text{Inndiag}(P)$, что, как показано в предыдущем абзаце, невозможно. Поэтому $\pi_1(G) = \pi(q - 1)$ — клика.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $P \cong L_3^\epsilon(q)$, где $q = p^m > 11$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \{+, -\}$, причем $\pi(q + \epsilon 1) = \{2\}$ или p делит $2m$. Тогда граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется один из пп. (5)–(8) теоремы 1.

Доказательство. Имеем $s(P) = 2$, $\pi_1(P) = \pi(p(q^2 - 1))$, $\pi_2(P) = \pi((q^2 + \epsilon q + 1)/(3, q - \epsilon 1))$, и $P < G \leq \text{Aut}(P) = \text{Inndiag}(P) \rtimes K$, где $K = \langle g \rangle \times \langle f \rangle$ для графового автоморфизма порядка 2 и полевого автоморфизма f порядка m группы P , если $\epsilon = +$, и $K = \langle f \rangle$ для полевого автоморфизма f порядка $2m$ группы P , если $\epsilon = -$, причем $|\text{Inndiag}(P)/P| = (3, q - \epsilon 1)$ (см. [7; 9, Proposition 2.5.12]). Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду [10, Tabl. I, II] имеем, что $G \cap \text{Inndiag}(P) = P$ и $\pi(G/P) \subseteq \{2, 3\}$, причем, если $\epsilon = +$, то $G/P = P(\langle g^k \rangle \times \langle f^{m/n} \rangle)/P$, где $k \in \{0, 1\}$ и $\pi(n) = \{3\}$.

Предположим, что $\pi(q + \epsilon 1) = \{2\}$. Пусть сначала $\epsilon = +$. Тогда по предложению 2 $q = p$ — простое число Мерсенна и, следовательно, группа G сопряжена в $\text{Aut}(P)$ с подгруппой $\text{Inndiag}(P) \langle g \rangle$. Поскольку $p > 11$, имеем $(p - 1)_3 > 1$. Если $(p - 1)_3 = 3$, то по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется коклика $\{3, p\}$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $(p - 1)_3 \geq 9$ и, следовательно, $p \geq 127$, так что выполняется п. (6) теоремы 1.

Пусть теперь $\epsilon = -$. Тогда по предложению 2 $q = p$ — простое число Ферма и, следовательно, группа G сопряжена в $\text{Aut}(P)$ с подгруппой $\text{Inndiag}(P) \langle f \rangle$. Поскольку $p > 11$, имеем $(p + 1)_3 > 1$. Если $(p + 1)_3 = 3$, то по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется коклика $\{3, p\}$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $(p + 1)_3 \geq 9$ и, следовательно, $p \geq 17$, так что

выполняется п. (8) теоремы 1.

Таким образом, можно считать, что $\pi(q + \varepsilon 1) \neq \{2\}$. Тогда p делит $2m$. Пусть $r \in \pi(q + \varepsilon 1) \setminus \{2\}$. Тогда по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется коклика $\{r, p\}$.

Предположим, что $p > 2$. Тогда p делит m и, в частности, $m \geq 3$. Возьмем в качестве r число $r_{2m}(p)$ при $\varepsilon = +$ и $r_m(p)$ при $\varepsilon = -$. Тогда по предложению 1 r не делит $2m$ и, следовательно, не делит $|G/P|$. Поскольку вершины p и r смежны в графе $\Gamma(G)$, то p делит $|G/P|$ и, следовательно, $p = 3$, $\text{Inndiag}(P) = P$ и $G \setminus P$ содержит некоторый элемент x порядка 3, централизующий некоторый элемент порядка r из P . Ввиду [9, Proposition 4.9.1] $C_P(x) \cong L_3^\varepsilon(q_0)$, где $q = q_0^3$, поэтому r делит $|C_P(x)| = q_0^3(q_0^2 - 1)(q_0 - \varepsilon 1)$. Поскольку $(q_0 + \varepsilon 1, q_0 - \varepsilon 1) = 2$, r делит $q_0^2 - 1 = p^{2m/3} - 1$, что противоречит выбору числа r .

Итак, $p = 2$. Тогда $m > 3$. По предложению 1 либо $m = 6$ и $\varepsilon = -$, либо существуют простые числа $r_{2m}(2)$ при $\varepsilon = +$ и $r_m(p)$ при $\varepsilon = -$, не делящие $2m$. Возьмем в качестве r в первом случае число 7, а во втором случае $r_{2m}(2)$ при $\varepsilon = +$ и $r_m(p)$ при $\varepsilon = -$. Тогда r не делит $|G/P|$. Поскольку вершины p и r смежны в графе $\Gamma(G)$, то 2 делит $|G/P|$ и $G \setminus P$ содержит инволюцию, централизующую некоторый элемент порядка r из P . Обратно, если x — инволюция из $G \setminus P$, то ввиду [9, Propositions 4.9.1, 4.9.2] группа $O^{2'}(C_P(x))$ изоморфна $L_2(q)$, $L_3(\sqrt{q})$ (при четном m) или $U_3(q)$ (при нечетном m) при $\varepsilon = +$ и $L_2(q)$ при $\varepsilon = -$, так что 2 смежна в графе $\Gamma(G)$ с любой вершиной из $\pi(q + \varepsilon 1) \neq \{2\}$.

Если $(q - \varepsilon 1)_3 = 3$, то по [2, предложение 3.12] в $\pi_1(P)$ имеется 3-коклика $\{2, 3, r\}$. Поскольку вершины 3 и r смежны в графе $\Gamma(G)$, то 3 делит $|G/P|$ и $G \setminus P$ содержит элемент порядка 3, централизующий некоторый элемент порядка r из P , и мы, как и выше, приходим к противоречию.

Таким образом, выполняется п. (5) или (7) теоремы 1.

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $P \cong \text{PSp}_4(q)$, то граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется один из пп. (10)–(11) теоремы 1.

Доказательство. Пусть $P \cong \text{PSp}_4(q)$, где $q = p^m > 2$, p — простое число и $m \in \mathbb{N}$. Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду [10, Tabl. I] имеем, что $G \cap \text{Inndiag}(P) = P$, m четно, G/P — циклическая 2-группа и при $p = 2$ группа G не содержит элемента, индуцирующего на P инволютивный графовый автоморфизм. Поскольку группа $\text{Out}(P)$ изоморфна \mathbb{Z}_{2m} при $p = 2$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m$ при $p \neq 2$ (см. [9, Proposition 2.5.12]), получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 4. Если $P \cong G_2(q)$, где $q = 3^m > 3$, то граф $\Gamma(G)$ несвязен и выполняется п. (9) теоремы 1.

Доказательство. Пусть $P \cong G_2(q)$, где $q = 3^m > 3$. Тогда $s(P) = 3$, $\pi_1(G) = \pi(q(q^2 - 1))$, $\pi_2(G) = \pi(q^2 - q + 1)$, $\pi_3(G) = \pi(q^2 + q + 1)$ и $P < G \leq \text{Aut}(P) = P \rtimes (\langle g \rangle \times \langle f \rangle)$, где g и f — графовый и полевой автоморфизмы группы P соответственно, причем $|g| = 2$ и $|f| = m$ (см. [9, Proposition 2.5.12]). Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду [10, Table I] имеем, что $s(G) = 2$ и либо $\pi_2(G) = \pi(q^2 + q + 1)$, $G = P \rtimes \langle g \rangle$ и m нечетно, либо $\pi_2(G) = \pi(q^2 - q + 1)$ и $G = P \langle f^{m/n} \rangle$, где $\emptyset \neq \pi(n) \subseteq \{2, 3\}$. В первом случае имеем $\pi_1(G) = \pi(q(q^2 - 1)(q^2 - q + 1))$ в противоречие с тем, что по [2, предложение 2.7] и предложению 1 вершины $r_{2m}(p)$ и $r_{6m}(p)$ несмежны в $\Gamma(P)$ и взаимно просты с $2m$. Поэтому выполняется второй случай.

Лемма доказана.

Лемма 5. Если $P \cong \text{Sz}(q)$ ($q > 2$), то граф $\Gamma(G)$ несвязен и G изоморфна группе $\text{Aut}(\text{Sz}(32))$.

Доказательство. Пусть $P \cong \text{Sz}(q)$, где $q = 2^m$ и $m > 1$ нечетно. Тогда $s(P) = 4$, $\pi_1(G) = \{2\}$, $\pi_2(G) = \pi(q - 1)$, $\pi_3(G) = \pi(q - \sqrt{2q} + 1)$, $\pi_4(G) = \pi(q + \sqrt{2q} + 1)$ и $P < G \leq \text{Aut}(P) = P \rtimes \langle f \rangle$, где f — полевой автоморфизм порядка m группы P (см. [9, Proposition 2.5.12]). Пусть $p \in \pi(G/P)$ и x — элемент порядка p из $G \cap \langle f \rangle$. Тогда $C := C_P(x) \cong \text{Sz}(q_0)$, где $q = q_0^p$.

Поскольку граф $\Gamma(G)$ несвязен, ввиду теоремы Грюнберга — Кегеля (см. [12, Theorem 1]) $p \in \pi_1(G)$.

Предположим, что $m \neq p$. Тогда $q_0 > 2$, $s(C) = 4$, $\pi_1(C) = \{2\}$, $\pi_2(C) = \pi(q_0 - 1)$, $\pi_3(C) = \pi(q_0 - \sqrt{2q_0} + 1)$, $\pi_4(C) = \pi(q_0 + \sqrt{2q_0} + 1)$. Числа $q_0 - 1$, $q_0 - \sqrt{2q_0} + 1$ и $q_0 + \sqrt{2q_0} + 1$ являются неединичными делителями чисел $q - 1$, $q - \sqrt{2q} + 1$ и $q + \sqrt{2q} + 1$ соответственно, а в P есть циклические подгруппы порядков $q - 1$, $q - \sqrt{2q} + 1$ и $q + \sqrt{2q} + 1$, поэтому $\pi_1(P) \cup \{p\} \subseteq \pi_1(G)$. Но по предложению 1 существует число $r = r_m(2)$, взаимно простое с $2m$. Поэтому 2 и r смежны в графе $\Gamma(G)$, а значит, и в графе $\Gamma(P)$, что не так.

Таким образом, $m = p$, $G = \text{Aut}(P)$ и $C \cong Sz(2)$ — группа Фробениуса порядка 20. Следовательно, $\{2, 5, p\} \subseteq \pi_1(G)$. Если $p \neq 5$, то 2 и 5 смежны в графе $\Gamma(G)$, а значит, и в графе $\Gamma(P)$, что не так. Поэтому $m = p = 5$.

Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 1–5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
2. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
3. **Зиновьева М.Р., Мазуров В.Д.** О конечных группах с несвязным графом // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 99–105.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов. // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
6. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
7. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
9. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surv. Monogr.; vol. 40, no. 3.)
10. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum; 2002. Vol. 107. P. 189–190.
11. **Lucido M.S., Moghaddamfar A.R.** Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. Vol. 7, no. 3. С. 373–384.
12. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
13. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.

Зиновьева Марианна Рифхатовна

Поступила 20.06.2015

канд. физ.-мат. наук

докторант

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

доцент

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина

e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Кондратьев Анатолий Семенович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина

e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

УДК 517.977.5

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МЕЖОРБИТАЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ
В НОРМАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ¹****И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин, В. Б. Костоусов, Е. К. Костоусова,
А. Б. Ложников, В. И. Починский**

В работе рассматривается задача оптимального управления нелинейной динамической системой, описывающей движение специального космического аппарата в нормальном гравитационном поле. Этот аппарат предназначен для транспортировки полезной нагрузки с одной околоземной эллиптической орбиты на другую, более высокую целевую орбиту. Искомое управление должно удовлетворять ряду ограничений и обеспечивать доставку на заданную целевую орбиту полезной нагрузки максимальной массы с выполнением ряда требований к текущему фазовому состоянию динамической системы. Предлагаются подходы к решению этой задачи, приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: межорбитальный переход, оптимальное управление, конечная тяга, полезная нагрузка, фазовые ограничения.

I. N. Kandoba, I. V. Koz'min, V. B. Kostousov, E. K. Kostousova, A. B. Lozhnikov, V. I. Pochinskii. On an optimal orbit transfer in a normal gravitational field.

We consider an optimal control problem for a nonlinear dynamic system describing the motion of a special-purpose spacecraft in a normal gravitational field. The spacecraft is designed for transporting a payload from a near-Earth elliptic orbit to a higher target orbit. The required control must satisfy a number of constraints and provide the transfer of a maximum-weight payload to a given target orbit under some requirements on the current phase state of the system. We propose approaches to the solution of this problem and present results of numerical simulation.

Keywords: orbit transfer, optimal control, finite thrust, payload, state constraints.

1. Введение

В настоящее время одной из приоритетных задач в ракетно-космической отрасли является создание бюджетных технических средств, обеспечивающих выведение на околоземные орбиты полезной нагрузки максимальной массы. Один из подходов для решения этой задачи основан на применении специальных космических аппаратов — разгонных блоков, представляющих собой, как правило, цилиндрическую платформу, на которой размещается полезная нагрузка. Разгонный блок (РБ) является дополнительной ступенью ракеты-носителя (РН) и может быть доставлен на относительно низкие (опорные) орбиты с помощью РН легкого класса. Конструктивные особенности двигательной установки РБ позволяют ему функционировать достаточно продолжительное время практически в безвоздушном пространстве в условиях существенно меньшего влияния гравитационного поля Земли. Эти обстоятельства обуславливают значительно меньшие энергетические затраты для перемещения расположенной на РБ полезной нагрузки с опорных орбит на более высокие (целевые) орбиты по сравнению с обычными РН, например, Союз-2.

Задача заключается в построении управления РБ, обеспечивающего перевод с опорной орбиты на заданную целевую орбиту полезной нагрузки максимальной массы. При этом конструктивные особенности и технические характеристики РБ диктуют ряд требований к допустимому управлению и траектории движения. Эти требования приводят к возникновению

¹Работа выполнена при поддержке программы ориентированных фундаментальных исследований УрО РАН (проект 13-1-012-НПО).

в задаче ограничений на управление и текущее фазовое состояние нелинейной динамической системы, описывающей управляемое движение РБ.

В работе предлагаются методы построения допустимых в этой задаче управлений, которые существенно учитывают специфику рассматриваемой нелинейной динамической системы, в частности и то обстоятельство, что в нормальном поле тяготения функция гравитационного ускорения в отличие от центрального поля уже не обладает свойством сферической симметрии.

2. Постановка задачи

Будем считать, что РБ оснащен одним сравнительно мощным маршевым двигателем (МД), развивающим основную реактивную тягу, и восьмью относительно слабыми двигателями малой тяги (ДМТ), обеспечивающими требуемую пространственную ориентацию РБ во время его движения. Для описания движения РБ как твердого тела в инерциальной стартовой системе координат на промежутке $[t_0, t_f]$ используются уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= W_R(B, m, U, u) + g(x), \\ \dot{\omega} &= \Lambda(\omega, m) + M(m, U, u), \\ \dot{B} &= BA(\omega), \\ \dot{m} &= - \sum_{k=0}^8 \mu_k u_k. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Начальный момент t_0 рассматриваемого промежутка управления соответствует моменту выхода РН на опорную орбиту. Полагаем, что в этот момент происходит отделение РБ от РН и задаются начальные условия для системы (2.1):

$$x(t_0) = x^{(0)}, \quad v(t_0) = v^{(0)}, \quad \omega(t_0) = \omega^{(0)} = 0, \quad B(t_0) = B^{(0)}, \quad m(t_0) = m^{(0)}. \quad (2.2)$$

Здесь $x, v \in \mathbb{R}^3$ — векторы положения и скорости центра масс РБ; $\omega \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость; $B = \{b^j\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — матрица поворота со столбцами b^j (компоненты столбцов b^j — это проекции единичных векторов, направленных вдоль осей подвижной связанной системы координат на оси инерциальной стартовой системы); m — масса РБ; μ_k — положительные константы массового расхода топлива ($k = 0, 1, \dots, 9$); $W_R \in \mathbb{R}^3$ и $g \in \mathbb{R}^3$ — реактивное и гравитационное ускорения соответственно; $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^3$ и $M \in \mathbb{R}^3$ — функции специального вида. Выражения, задающие функции W_R , A , M и Λ , будут конкретизированы ниже, а что касается гравитационного ускорения g , то в нормальном поле тяготения оно задается функцией

$$g(x) = -g_0 \frac{a^2}{\|x\|^3} x + C_{20} g_0 \left(\frac{a}{\|x\|} \right)^4 \tilde{f}(x),$$

где g_0 — гравитационная постоянная на экваторе, a — большая экваториальная полуось общеземного эллипсоида, C_{20} — коэффициент зональной гармоник, а функция \tilde{f} определяется достаточно сложным выражением (см. [1, с. 31; 4]).

Управлениями служат функции:

1) $U(t) \in \mathbb{R}^2$, где U_i — углы поворота сопла МД ($i=1, 2$),

$$U(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_f]; \quad \mathbb{U} = \{U = (U_1, U_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |U_1| \leq U_1^{\max}, |U_2| \leq U_2^{\max}\}; \quad (2.3)$$

2) $u(t) \in \mathbb{R}^9$, где $u_k(t) \in \{0, 1\}$ — функции типа включено/выключено, определяющие интервалы работы МД ($k = 0$) и ДМТ ($k = 1, \dots, 8$), т. е.

$$u_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{i=1}^{N_k} [\tau_i^{k+}, \tau_i^{k-}), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad t_0 \leq \tau_1^{k+} < \tau_1^{k-} < \tau_2^{k+} < \tau_2^{k-} < \dots < \tau_{N_k}^{k+} < \tau_{N_k}^{k-} \leq t_f. \quad (2.4)$$

Кроме того, к управляемому движению РБ предъявляется ряд дополнительных требований. Эти требования обуславливают наличие в задаче ограничений на управление и текущее фазовое состояние системы (2.1), (2.2). На практике число таких ограничений достаточно велико. Укажем наиболее существенные из них.

Прежде всего должны быть выполнены терминальные ограничения — РБ должен быть выведен на целевую орбиту с заданной точностью:

$$|i - \bar{i}| \leq \Delta_i, \quad |\Omega - \bar{\Omega}| \leq \Delta_\Omega, \quad |h_{\min} - \bar{h}_{\min}| \leq \Delta_{h_{\min}}, \quad |h_{\max} - \bar{h}_{\max}| \leq \Delta_{h_{\max}}, \quad |\omega_{\text{ор}} - \bar{\omega}_{\text{ор}}| \leq \Delta_\omega. \quad (2.5)$$

Здесь i — наклонение плоскости орбиты, Ω — долгота восходящего узла, h_{\min} и h_{\max} — минимальная и максимальная высоты орбиты соответственно, $\omega_{\text{ор}}$ — аргумент перигея. Эти параметры определяют эллиптическую оскулирующую орбиту (вообще говоря, отличную от круговой). Они однозначно определяются значениями $x(t_f)$, $v(t_f)$ [1; 4; 5]. Через \bar{i} , $\bar{\Omega}$, \bar{h}_{\min} , \bar{h}_{\max} , $\bar{\omega}_{\text{ор}}$ обозначены значения соответствующих параметров целевой орбиты, через Δ_i , Δ_Ω , $\Delta_{h_{\min}}$, $\Delta_{h_{\max}}$, Δ_ω — допустимые отклонения от этих параметров.

Следующие неравенства отражают содержательный смысл некоторых дополнительных, помимо (2.3) и (2.4), ограничений на управление: $N_0 \leq N_0^{\max}$, $\tau_1^{k+} - t_0 \geq \delta t_1$, $\tau_i^{k+} - \tau_{i-1}^{k-} \geq \delta t_2$, $\delta \tau \leq \tau_i^{k-} - \tau_i^{k+} \leq \Delta \tau$, где N_0^{\max} , δt_1 , δt_2 , $\delta \tau$, $\Delta \tau$ — заданные величины.

К фазовым ограничениям относятся, в частности, следующие. На продолжительных участках полета, где МД выключен, должно быть обеспечено равномерное вращение РБ вокруг его оси симметрии с заданной угловой скоростью; при этом ось симметрии на этих участках должна быть сориентирована перпендикулярно направлению на Солнце:

$$\omega(t) \equiv \bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, 0, 0)^\top, \quad x^{*\top} b^1(t) \equiv 0.$$

Опорная и целевая орбиты считаются эллиптическими, непересекающимися и компланарными. Пусть заданы значения параметров этих орбит; $x^{(0)}$, $v^{(0)}$ согласованы с опорной орбитой; момент t_f не фиксирован. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

З а д а ч а 1. Для управляемой системы (2.1) с заданными начальными условиями (2.2) найти кусочно-непрерывные программные управления $U(t)$ вида (2.3) и $u_k(t)$, имеющие структуру (2.4), которые максимизируют значение функционала $J_0[U, u] = m(t_f)$ и обеспечивают выполнение условий (2.5) на параметры целевой орбиты. При этом должны быть выполнены все дополнительные ограничения на управления и фазовое состояние.

Далее в задаче 1 будем исследовать только межорбитальные переходы РБ с двукратным включением МД ($N_0 = 2$).

Поскольку задача 1 характеризуется сложной нелинейной динамикой и обременена достаточно большим числом ограничений на управление и фазовое состояние динамической системы, представляется целесообразным сначала ее исследовать в упрощенной постановке.

3. Двухимпульсный межорбитальный переход центра масс РБ

Рассмотрим задачу построения оптимального импульсного управления, обеспечивающего орбитальный переход центра масс РБ (ЦМ) с помощью МД. Под импульсом понимается мгновенное ($t_i^- - t_i^+ = 0$, $i = 1, \dots, N_0$) изменение на $\Delta v^{(i)} = \Delta v(t_i^+)$ скорости v ЦМ в момент времени t_i^+ , $i = 1, \dots, N_0$ ($t_i^\pm = \tau_i^{0\pm}$, $i = 1, \dots, N_0$), а величина $\Delta V^{(i)} = \|\Delta v^{(i)}\|$ может быть произвольной (в том числе теоретически неограниченной). В этом случае в качестве оптимизируемого критерия может быть использована сумма приращений $\Delta V^{(i)}$ величины скорости в моменты t_i^+ сообщения импульсов. Как известно [3, с. 32], задача минимизации суммарного приращения величины скорости в точках сообщения импульсов равносильна задаче максимизации массы выводимого на целевую орбиту РБ.

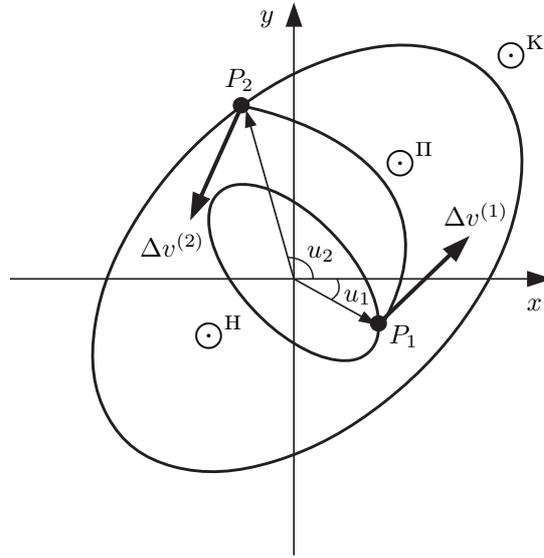


Рис. 1. Схема двухимпульсного перехода ЦМ между двумя компланарными эллиптическими орбитами.

Примем, что движение ЦМ на промежутке времени $[t_0, t_f]$ под воздействием импульсного управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = v(t, \hat{U}), \quad \dot{v} = g(x), \quad (3.1)$$

где управляющими параметрами для заданного количества импульсов N_0 являются моменты $t_i^+ \in [t_0, t_f]$ сообщения импульсов, а также величины $\Delta V^{(i)}$ и единичные векторы $\Delta v^{(i)} / \|\Delta v^{(i)}\|$, задающие направления импульсов ($i = 1, \dots, N_0$). Тогда допустимое импульсное управление \hat{U} имеет следующую структуру:

$$\hat{U} = \{t_i^+, \Delta v^{(i)}\}_{i=1}^{N_0}, \quad t_i^+ \in [t_0, t_f], \quad i = 1, \dots, N_0. \quad (3.2)$$

Таким образом, вспомогательная задача оптимального управления ЦМ может быть сформулирована следующим образом.

З а д а ч а 2. Для управляемой системы (3.1) с заданными начальными условиями $x(t_0) = x^{(0)}$, $v(t_0) = v^{(0)}$ найти программное управление \hat{U} структуры (3.2), которое минимизирует значение функционала $J_1[\hat{U}] = \sum_{i=1}^{N_0} \Delta V^{(i)}$ и обеспечивает выполнение условий (2.5) на параметры целевой орбиты.

Пусть в двухимпульсном управлении начальный импульс сообщается в точке P_1 схода с опорной орбиты \odot^H , а конечный — в точке P_2 входа на орбиту целевую \odot^K ($N_0 = 2$, $t_1^+ = t_0$, $t_2^+ = t_f$) (см. рис. 1). Для построения управления, обеспечивающего оптимальный переход ЦМ между заданными опорной и целевой орбитами, предлагается следующий подход, основанный на специальной процедуре минимизации функции суммарного импульса $\Delta V = \Delta V^{(1)} + \Delta V^{(2)}$. Для двух точек P_1 и P_2 на опорной и целевой орбитах, заданных соответствующими значениями аргументов широты u_1 и u_2 , движение ЦМ по переходной орбите $\odot^П$ на фиксированном интервале времени $[t_0, t_f]$ описывается решением краевой задачи

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = g(x), \quad x(t_0) = P_1(u_1), \quad x(t_f) = P_2(u_2). \quad (3.3)$$

Поскольку движение ЦМ осуществляется в нормальном поле тяготения, то его переходная орбита $\odot^П$ не является плоской (лежащей в плоскости компланарных эллиптических опорной и целевой орбит) и импульсы $\Delta v^{(1)}$, $\Delta v^{(2)}$ скорости ЦМ в заданных точках P_1 и P_2 на опорной и целевой орбитах являются также трехмерными. Эти импульсы могут быть представлены в следующем виде:

$$\Delta v^{(1)} = v(t_0) - v_H(u_1), \quad \Delta v^{(2)} = v(t_f) - v_K(u_2),$$

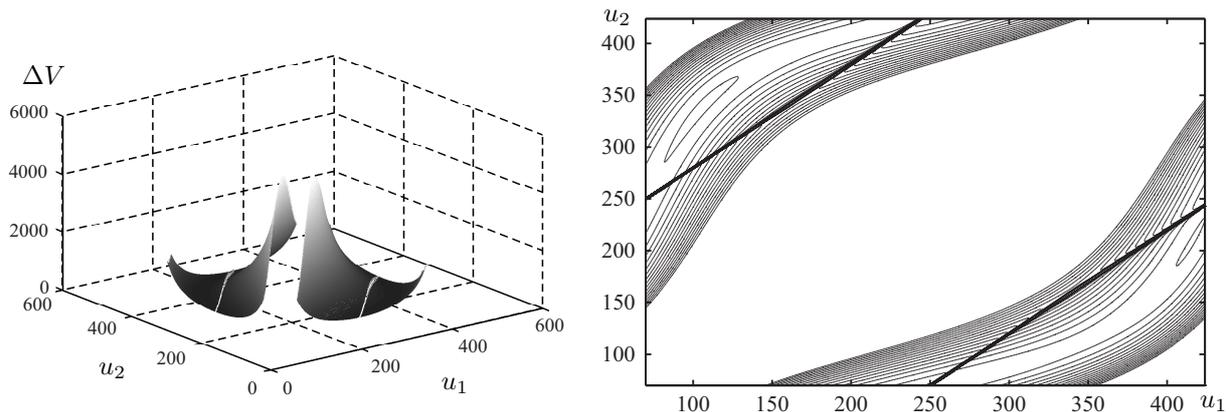


Рис. 2. График функции $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$ и ее линий уровня.

где для фиксированного значения t_f начальная $v(t_0)$ и конечная $v(t_f)$ скорости ЦМ определяются в результате решения краевой задачи (3.3); $v_H(u_1)$, $v_K(u_2)$ — скорости движения ЦМ по опорной и целевой орбитам в точках P_1 и P_2 соответственно. Эти скорости можно аналитически вычислить, используя значения параметров соответствующих орбит и аргументов широты u_1 и u_2 , по известным [1, с. 194] формулам небесной механики с учетом необходимого преобразования систем координат.

Таким образом, задачу построения оптимального импульсного управления, обеспечивающего переход ЦМ между заданными опорной и целевой орбитами, можно сформулировать как задачу минимизации функции суммарного импульса $\Delta V = \Delta V(t_f, u_1, u_2)$ — функции трех переменных. Алгоритм решения этой задачи основан на ее декомпозиции на две проблемы: внутреннюю и внешнюю оптимизационные задачи.

Под внутренней оптимизационной задачей понимается задача минимизации функции $\Delta V(t_f) = \Delta V(t_f, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, где \bar{u}_1 , \bar{u}_2 — некоторые фиксированные значения параметров u_1 и u_2 соответственно. Численное решение этой задачи связано с многократным решением краевой задачи (3.3).

Внешней оптимизационной задачей является задача минимизации функции $\Delta V(u_1, u_2) = \Delta V(t_f^*(u_1, u_2), u_1, u_2)$, где $t_f^*(u_1, u_2)$ — решение внутренней оптимизационной задачи, соответствующее паре значений u_1 и u_2 .

Численная реализация описанной выше процедуры глобальной минимизации функции $\Delta V = \Delta V(t_f, u_1, u_2)$ сопряжена с решением вопросов, связанных с единственностью и устойчивостью решений краевой задачи (3.3). Не для всех пар значений u_1 , u_2 эта краевая задача является корректно поставленной. Более подробное изложение этого приведено ниже.

Результаты численного моделирования. Описанный выше алгоритм построения оптимального двухимпульсного перехода ЦМ между двумя заданными точками на опорной и целевой орбитах был численно апробирован в рамках достаточно объемного вычислительного эксперимента. В этом эксперименте варьировались значения аргументов широты u_1 и u_2 , задающих различные пары точек P_1 и P_2 на указанных орбитах. В результате были численно построены функции суммарного импульса ΔV как функции двух аргументов $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$.

Результаты численного моделирования функции $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$ представлены на рис. 2. Отображенная на этом рисунке функция ΔV была численно построена для двух соосных (коаксиальных) опорной и целевой орбит — аргументы перигея опорной и целевой орбит совпадают. Параметры этих орбит имеют следующие значения: для опорной орбиты $h_{\min} = 260$ км, $h_{\max} = 528.4$ км; для целевой орбиты $\bar{h}_{\min} = 800$ км, $\bar{h}_{\max} = 2500$ км. Остальные параметры взяты одинаковыми: $i = \bar{i} = 97.372^\circ$, $\Omega = \bar{\Omega} = 55.4993^\circ$, $\omega_{\text{ор}} = \bar{\omega}_{\text{ор}} = 68.942^\circ$. Здесь минимальное значение ΔV_{\min} функции ΔV равно приблизительно 600 м/сек.

Численный анализ таких функций суммарного импульса $\Delta V = \Delta V(u_1, u_2)$ (не обязательно для соосных орбит) показывает, что они являются функциями овражного типа. Множество их локальных минимумов сосредоточено вдоль узких длинных областей, где расположено дно оврагов. В этих областях функции меняются мало. Как показывает анализ результатов вычислительного эксперимента, существует достаточно длинная область в плоскости переменных (u_1, u_2) , где значения оптимизируемого в задаче 2 критерия близки к экстремальному. С увеличением эксцентриситета орбит линии уровня и ограниченные ими узкие области становятся более изогнутыми.

Появление двух узких белых полос на рис. 2 слева и соответствующих им двух прямых темных полос на рис. 2 справа объясняется особенностями используемого подхода к решению задачи. Это области, где решение краевой задачи (3.3) не единственно, либо неустойчиво. Известно, что для случая центрального гравитационного поля (когда $C_{20} = 0$ в формуле для $g(x)$) задача (3.3) имела бы бесконечное число решений при $|u_2 - u_1| = 180^\circ$: одно решение соответствует одной плоскости переходной орбиты. В этом случае оптимальное по критерию минимизации функции суммарного импульса ΔV решение легко выделить: оно соответствует переходной орбите, лежащей в плоскости целевой и опорной орбит. Для нормального гравитационного поля в области неединственности решения переменные u_1, u_2 близки к значениям, где $|u_2 - u_1| = 180^\circ$ (см. рис. 2 справа), но для этого поля оптимальное решение выделить сложнее, так как соответствующая ему переходная траектория не принадлежит одной плоскости. Вблизи области неединственности решение неустойчиво. Для вычисления значений функции $\Delta V(u_1, u_2)$ в области некорректности краевой задачи (3.3) необходима модификация ее постановки. Одна из возможных модификаций состоит в выборе другой независимой переменной для ΔV вместо t_f . Если взять в качестве такой переменной одну из компонент скорости движения ЦМ по переходной траектории в начальный или конечный момент времени, например $\hat{v} = v_1(t_0)$, то внутренняя оптимизационная задача будет состоять в минимизации $\Delta V(\hat{v}) = \Delta V(\hat{v}, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, где ΔV находится в результате решения на интервале времени $[t_0, t_f]$ краевой задачи

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = g(x), \quad x(t_0) = P_1(\bar{u}_1), \quad v_1(t_0) = \hat{v}, \quad x(t_f) = P_2(\bar{u}_2),$$

в которой конечный момент t_f выступает в качестве неизвестного параметра.

4. Межорбитальный переход РБ как твердого тела с помощью конечной тяги

Результаты исследования вспомогательной задачи 2 позволяют сделать заключение, что существует достаточно много потенциально приемлемых альтернатив в выборе упомянутых выше точек на опорной и целевой орбитах для осуществления близкого к оптимальному орбитального перехода РБ.

Кроме того, решение задачи 2 дает полезную для решения задачи 1 априорную информацию о приблизительных энергетических затратах и направлениях вектора тяги МД в схемах выведения РБ с двукратным включением МД. В частности, решение задачи 2 может быть положено в основу начального приближения допустимого управления в задаче 1. Ниже приводится один из способов построения такого содержательного начального приближения, основанный на “распределении” заданного импульса скорости, а также предлагается общая схема решения задачи 1. Под “распределением” импульса скорости понимаем определение направления вектора тяги МД и промежутка времени его работы, на котором реализуется заданное импульсом приращение скорости центра масс РБ в системе (2.1).

В предлагаемых подходах к “распределению” импульса скорости и построения допустимых в задаче 1 управлений существенно используется специфика выражений, задающих динамическую систему (2.1), а также свойства управлений u_k , $k = 0, 1, \dots, 8$.

Свойства управлений u_k , $k = 0, 1, \dots, 8$. Прежде всего конкретизируем специфику функций, входящих в (2.1):

$$W_R = m^{-1}B(P^I h(U)u_0 + P^{II}L(u)), \quad M = \text{diag} \{J_i^{-1}(m)\} (P^I \tilde{h}(m, U)u_0 + P^{II} \tilde{L}(m, u)),$$

$$h(U) = (\cos U_1 \cos U_2, \sin U_1 \cos U_2, -\sin U_2)^\top, \quad \tilde{h}(m, U) = (0, l_1 \sin U_2, l_1 \sin U_1 \cos U_2)^\top,$$

$$L(u) = \begin{pmatrix} \sin \theta(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \\ \cos \theta(u_1 - u_2) + u_5 - u_7 \\ \cos \theta(-u_3 + u_4) + u_6 - u_8 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}(m, u) = \begin{pmatrix} l_2(-u_5 + u_6 - u_7 + u_8) \\ l_3(-u_3 + u_4) + l_4(-u_6 + u_8) \\ l_3(u_1 - u_2) + l_4(u_5 - u_7) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ J_2^{-1}(J_2 - J_1)\omega_3\omega_1 \\ -J_2^{-1}(J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь P^I и P^{II} — величины тяги МД и каждого из восьми ДМТ; θ — известная константа; $l_i = l_i(m)$ — известные функции ($i = 1, 2, 3, 4$); $J_i = J_i(m)$ — осевые моменты инерции РБ ($i = 1, 2, 3$), $J_2 \equiv J_3$.

Рассмотрим теперь свойства управлений u_k , $k = 0, 1, \dots, 8$.

С одной стороны, укажем некоторые полезные свойства управлений u_k , $k = 1, \dots, 8$, при условии $u_0 \equiv 0$, вытекающие из (4.1) и позволяющие, в частности, использовать известные результаты об оптимальном управлении для ряда задач управления системами типа (4.5), приведенными ниже. Эти функции можно разбить на пары $\{u_1, u_2\}$, $\{u_3, u_4\}$, $\{u_5, u_7\}$, $\{u_6, u_8\}$. Удобно рассматривать вспомогательные управления, являющиеся суммами типа $u_{ij}^{s_i s_j} = s_i u_i + s_j u_j$, где $s_i, s_j \in \{-1, 1\}$: $s_i = +$, если $s_i = 1$, т. е. u_i входит в сумму с плюсом; $s_i = -$, если $s_i = -1$, т. е. u_i входит в сумму с минусом.

С в о й с т в о 1. Если u_i и u_j могут принимать (как в (2.4)) только два значения: 0 и 1, то u_{ij}^{++} могут принимать три неотрицательных значения 0, 1, 2, а управления u_{ij}^{+-} — три значения с разными знаками из множества $\{-1, 0, 1\}$: $u_{ij}^{+-} = 0$, если $u_i = u_j$; $u_{ij}^{+-} = 1$, если $u_i = 1, u_j = 0$; $u_{ij}^{+-} = -1$, если $u_i = 0, u_j = 1$. При этом $u_{ij}^{+-} = 0$ может быть получено при $u_i = u_j = 0$ и при $u_i = u_j = 1$. Второй случай исключаем из рассмотрения при обратном переходе от управлений u_{ij}^{+-} к u_i и u_j , исходя из соображений минимизации расхода топлива.

С в о й с т в о 2. При выборе одной из трех комбинаций значений: либо $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$, либо $u_5 = u_7 = 1, u_6 = u_8 = 0$, либо $u_5 = u_7 = 0, u_6 = u_8 = 1$ получаем для 1-й компоненты вектора M нулевой либо ненулевой член соответствующего знака с множителем $\tilde{u}_1 = -u_5 + u_6 - u_7 + u_8 = -u_{57}^{++} + u_{68}^{++}$, равным соответственно либо $\tilde{u}_1 = 0$, либо $\tilde{u}_1 = -2$, либо $\tilde{u}_1 = 2$. При этом вклад четверки $\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ в вектор W_R и во 2-ю и 3-ю компоненты вектора M окажется нулевым.

С в о й с т в о 3. При $u_1 = u_2, u_3 = u_4$ вклад $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ в вектор M и во 2-ю и 3-ю компоненты вектора W_R (при $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ также и в 1-ю компоненту W_R) окажется нулевым.

С в о й с т в о 4. Эффект от свойств 2 и 3 в системе (2.1), (4.1) может быть интерпретирован, в частности, как возможность управления первой компонентой ω_1 вектора угловой скорости ω (например, с целью придания ей и дальнейшего удержания желаемого значения $\omega_1 = \bar{\omega}_1$) с помощью релейного управления $\tilde{u}_1 = -u_{57}^{++} + u_{68}^{++}$ со значениями из множества $\{-2, 0, 2\}$. При этом если начальные условия для 2-й и 3-й компонент вектора ω были нулевыми и выполняется $u_1 = u_2, u_3 = u_4$, то эти компоненты по-прежнему останутся нулевыми.

С в о й с т в о 5. Можно ввести также вспомогательные управления $\tilde{u}_2 = -u_3 + u_4 = u_{34}^{-+}$ и $\tilde{u}_3 = u_1 - u_2 = u_{12}^{+-}$, которые входят в M_2 и M_3 соответственно. Тогда, выбирая одну из трех следующих комбинаций: либо $u_3 = u_4 = 0$, либо $u_3 = 0, u_4 = 1$, либо $u_3 = 1, u_4 = 0$, получаем соответственно либо $\tilde{u}_2 = 0$, либо $\tilde{u}_2 = 1$, либо $\tilde{u}_2 = -1$. Аналогично можно получить либо $\tilde{u}_3 = 0$, либо $\tilde{u}_3 = 1$, либо $\tilde{u}_3 = -1$. Таким образом, управление вектором ω при использовании

пар $\{u_3, u_4\}$ и $\{u_1, u_2\}$ указанным образом и выполнении условий $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$ эквивалентно управлению динамикой ω с помощью двух релейных управляющих функций \tilde{u}_2 и \tilde{u}_3 , принимающих значения из множеств $\{-1, 0, 1\}$ и входящих аддитивно в правые части дифференциальных уравнений для 2-й и 3-й компонент вектора ω соответственно.

С в о й с т в о 6. При условии, что скорость вращения ω_1 установлена равной желаемой величине (в частности, значению $\bar{\omega}_1$), эффект от свойства 5 может быть интерпретирован как возможность, при соблюдении условия $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$, управления 2-й и 3-й компонентами вектора ω в силу двумерной *линейной* колебательной системы с помощью двух упомянутых выше релейных управлений $\tilde{u}_2 = u_{34}^{-+}$ и $\tilde{u}_3 = u_{12}^{+-}$.

С в о й с т в о 7. Пусть $u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$, $u_3 = u_4 = 0$. Тогда $M_1 = M_2 = 0$, а M_3 пропорционально $\tilde{u}_3 = u_1 - u_2 = u_{12}^{+-}$. Поэтому при начальном условии для ω с нулевыми значениями 1-й и 2-й компонент использование $\tilde{u}_3 = u_{12}^{+-}$ позволяет управлять в силу (2.1), (4.1) величиной ω_3 с целью придания ей желаемого значения $\tilde{\omega}_3$ независимо от ω_1 и ω_2 (оставляя их равными нулю). После того как достигнуто значение $\omega = (0, 0, \tilde{\omega}_3)^\top = \tilde{\omega}$, использование управления $\tilde{u}_3 \equiv 0$ (т. е. $u_1 = u_2 = 0$) позволяет поддерживать для ω это постоянное значение. При этом $A(\omega)$ упрощается и принимает специфический вид, который обеспечит в силу уравнений $\dot{B} = BA(\tilde{\omega})$ вращательное движение 1-го и 2-го ортов связанной системы координат (столбцов b^j матрицы B) вокруг орта b^3 (сохраняющего свое значение) с постоянной угловой скоростью, равной $\tilde{\omega}_3$.

С другой стороны, функции u_k полностью определяются значениями $\tau_i^{k\pm}$, $i=1, \dots, N_k$, т. е. конечным числом параметров. Это может быть удобно, в частности, для сведения ряда задач управления, упомянутых ниже (см. задачи типа 3–5), к задачам математического программирования, а также может быть учтено при использовании подхода, аналогичного описанному в [4] и основанного на решении вспомогательных задач оптимального управления на фиксированном промежутке времени. Управляющими параметрами в последних будут служить $U(\cdot)$ и $\tau_i^{k\pm}$, а минимизируемые функционалы будут включать слагаемые, отвечающие за суммарную длительность работы двигателей, значения параметров целевой орбиты и другие фазовые ограничения (используется идеология метода внешних штрафов). Для численного решения можно воспользоваться методами спуска в пространстве управлений, в частности методом типа метода сопряженных градиентов. Градиенты функционалов могут быть вычислены аналогично [6, с. 32–34, с. 61–63].

Например, для системы типа

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, U, u) = f^0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N f^k(\mathbf{x}, U) u_k, \quad t \in [t_0, t_f], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

с минимизируемым функционалом типа

$$J[U(\cdot), u(\cdot)] = \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + J_2[u(\cdot)],$$

где

$$J_2[u(\cdot)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\mu_k)^2 \sum_{i=1}^{N_k} (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+})^2,$$

получаем формулы

$$\frac{\partial J}{\partial U} = f_U^\top \Psi, \quad \frac{\partial J}{\partial \tau_i^{k+}} = -(\Psi^\top f^k)|_{t=\tau_i^{k+}+0} - (\mu_k)^2 (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+}),$$

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_i^{k-}} = (\Psi^\top f^k)|_{t=\tau_i^{k-}-0} + (\mu_k)^2 (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+}),$$

где $\Psi(\cdot)$ — непрерывное решение сопряженной системы $\frac{d}{dt} \Psi = -f \mathbf{x}^\top \Psi$, $t \in [t_0, t_f]$, $\Psi(t_f) = \Phi \mathbf{x}(\mathbf{x}(t_f))$; $(\Psi^\top f^k)|_{t=\tau_i^{k\pm} \pm 0} = \Psi(\mathbf{x}(\tau_i^{k\pm}))^\top f^k(\mathbf{x}(\tau_i^{k\pm}), U(\tau_i^{k\pm} \pm 0))$.

“Распределение” импульса скорости. Пусть в результате решения задачи 2 удалось найти нужные импульсы скорости $\Delta v^{(i)} \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, позволяющие перевести центр масс РБ с опорной орбиты на целевую. Предлагается по ним построить в задаче 1 начальное приближение для функций U , считая, что эти приближения отличны от нуля только на двух промежутках времени $[t_i^+, t_i^-]$, $i = 1, 2$ (на этих промежутках $u_0 = 1$; в остальные моменты времени $u_0 = 0$); начальные точки t_i^+ определяются по моментам сообщения импульсов $\Delta v^{(i)}$.

Будем считать, что на каждом из промежутков $[t_i^+, t_i^-]$ имеем $u_k = 0$, $k = 1, \dots, 8$, и вектор-функция $U \in \mathbb{R}^2$ постоянна: $U(t) \equiv U^{(i)}$, $t \in [t_i^+, t_i^-]$, $i = 1, 2$. Обозначим длины промежутков через Δt_i : $\Delta t_i = t_i^- - t_i^+$. Формулы для нахождения компонент векторов $U^{(i)} \in \mathbb{R}^2$ и значений Δt_i , $i = 1, 2$, могут быть получены из уравнений (2.1) движения РБ. “Распределяя” импульс скорости Δv (индекс $i \in \{1, 2\}$ для компактности формул опустим) на промежуток длины Δt , можно приближенно считать, что $\Delta v / \Delta t \approx W_R$, откуда, используя выражение для реактивного ускорения W_R (см. (4.1)), получаем $\Delta v / \Delta t \approx (P^I / m) B h(U)$, где P^I — величина тяги МД, $h(U) = (\cos U_1 \cos U_2, \sin U_1 \cos U_2, -\sin U_2)^\top$, масса m и матрица B берутся в начальный момент рассматриваемого промежутка $[t^+, t^-]$. Тогда можно найти величины Δt , U_1 и U_2 из трех уравнений, соответствующих покомпонентной записи векторного равенства

$$\frac{m}{P^I} B^\top \Delta v = \Delta t h(U). \quad (4.2)$$

Значение Δt легко вычислить, приравняв евклидовы нормы векторов из обеих частей (4.2), учтя ортогональность матрицы B и соотношение $\|h(U)\| = 1$, а значения U_2 и U_1 — из третьего и второго уравнений (4.2) соответственно. В предположении, что выполнено условие

$$\Delta v^\top b^1(t^+) > 0, \quad (4.3)$$

приходим к следующим выражениям:

$$\Delta t = \frac{m(t^+)}{P^I} \|\Delta v\|, \quad U_1 = \arcsin\left(\frac{\Delta v^\top b^2(t^+)}{\sqrt{\|\Delta v\|^2 - (\Delta v^\top b^3(t^+))^2}}\right), \quad U_2 = \arcsin\left(-\frac{\Delta v^\top b^3(t^+)}{\|\Delta v\|}\right), \quad (4.4)$$

где \arcsin понимается в смысле главного значения. Условие (4.3) выполняется, в частности, если $b^1(t^+) \approx \bar{v} / \|\bar{v}\|$, где $\bar{v} = \text{sign}(v^\top(t^+) \Delta v) v(t^+)$. При этом для соосных опорной и целевой орбит и переходных орбит типа Гоманна [5, с. 159–161] величины U_i оказываются близкими к нулю (так как при таких маневрах и указанном условии вектор Δv примерно коллинеарен вектору скорости и, значит, вектору $b^1(t^+)$ и приблизительно ортогонален двум другим столбцам ортогональной матрицы B), и соотношения (4.4) приводят к управлению $U \in \bar{U}$.

Общая схема решения задачи 1. В заключение кратко, не вдаваясь в детали, остановимся на вопросе осуществления межорбитального перехода РБ с помощью конечной тяги. Реализация одного из подходов к построению допустимого в основной задаче 1 управления сопряжена с численным решением нескольких вспомогательных задач управления вращением РБ как твердого тела. В этих задачах вращательное движение РБ на некотором промежутке времени $[t_1, t_2]$ описывается уравнениями следующего типа из системы (2.1):

$$\dot{\omega} = \Lambda(\omega, \bar{m}) + M(\bar{m}, 0, u), \quad \dot{B} = B \cdot A(\omega) \quad (u_0 \equiv 0). \quad (4.5)$$

Задача 3. Осуществить разворот первого столбца b^1 матрицы B по заданному вектору \bar{v} : $b^1(t_2) = \bar{v} / \|\bar{v}\|$.

Задача 4. Осуществить разворот первого столбца b^1 матрицы B ортогонально заданному направлению x^* : $x^{*\top} b^1(t_2) = 0$.

Задача 5. Установить заданную угловую скорость: $\omega(t_2) = \bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, 0, 0)^\top$.

Приведенные формулировки задач 3–5 не претендуют на полноту. В частности, промежуток $[t_1, t_2]$ может быть как фиксированным, так и нефиксированным; в задачах не указан

критерий качества. С точки зрения минимизации расхода топлива можно ввести в формулировку условие минимизации функционала

$$J_3[u(\cdot)] = \sum_{k=1}^8 \mu_k \sum_{i=1}^{N_k} (\tau_i^{k-} - \tau_i^{k+}).$$

Заметим, что решение задачи 4 может быть сведено к решению задачи типа 3. С учетом специфики формул для правых частей в (4.5) (см. (4.1)) для решения задачи 5 можно адаптировать (с учетом описанных выше свойств 4 и 6 функций u_k) известные законы управления [2, с. 525–537], а также несложно найти (с учетом свойств 4, 6 и 7) приближение к решению задачи 3 в том случае, когда вектор \bar{v} примерно ортогонален $b^3(t_1)$.

Для построения допустимых в задаче 1 управлений РБ с двукратным включением МД предлагается общая двухимпульсная схема выведения РБ с помощью конечной тяги. Эта схема реализуется в результате последовательного выполнения на промежутке $[t_0, t_f]$ следующих шагов.

1) Решение задачи 2 при $N_0 = 2$, т. е. нахождение импульсов скорости $\Delta v^{(i)} \in \mathbb{R}^3$ и моментов t_i^+ их сообщения, $i = 1, 2$.

2) Нахождение u на промежутке $[t_0, t_1^+]$ путем решения задачи 3 для некоторого подходящего значения \bar{v} , например для $\bar{v} = \text{sign}(v^{(1)\top} \Delta v^{(1)})v^{(1)}$, где $v^{(1)}$ вычислено в момент $t = t_1^+$ в силу системы (3.1).

3) Нахождение Δt_1 и $U^{(1)}$ по формулам (4.4) и использование на промежутке $[t_1^+, t_1^-]$, где $t_1^- = t_1^+ + \Delta t_1$, управлений $U \equiv U^{(1)}$, $u_0 \equiv 1$, $u_k \equiv 0$, $k = 1, \dots, 8$.

4) Нахождение u на некотором промежутке $[t_1^-, t_1]$ путем решения комбинации задач 4 и 5.

5) Пассивное движение РБ ($u \equiv 0$) на некотором промежутке $[t_1, t_2]$ с выполнением условий $\omega \equiv (\bar{\omega}_1, 0, 0)^\top$ и $x^{*\top} b^1 \approx 0$.

6) Нахождение u на промежутке $[t_2, t_2^+]$ путем решения задачи 3 для некоторого подходящего значения \bar{v} , например для $\bar{v} = \text{sign}(v^{(2)\top} \Delta v^{(2)})v^{(2)}$, где через $v^{(2)}$ обозначена скорость центра масс, вычисленная в момент $t = t_2^+$ в силу системы (3.1) на $[t_1^+, t_2^+]$ с начальными условиями, учитывающими сообщение импульса $\Delta v^{(1)}$ в момент t_1^+ .

7) Нахождение Δt_2 и $U^{(2)}$ по формулам типа (4.4). Осуществление на промежутке $[t_2^+, t_f]$, где $t_f = t_2^+ + \Delta t_2 + \delta t$, маневра РБ с целью выполнения терминальных ограничений (2.5). При этом в качестве начального приближения берется $U \equiv U^{(2)}$, $u_0 \equiv 1$, $u_k \equiv 0$, $k = 1, \dots, 8$ при $t \in [t_2^+, t_2^+ + \Delta t_2]$, а для дальнейшего уточнения управления может быть использована схема, например, подобная предложенной в [4].

Что же касается оптимального в основной задаче 1 управления, то для его построения можно воспользоваться известным аппаратом задач нелинейного программирования. В частности, может быть применен описанный в [7] метод дискретизации задачи оптимального управления на основе формул Рунге — Кутты четвертого порядка. Однако следует отметить, что его использование приводит к задаче достаточно большой размерности.

5. Заключение

Разработаны новые и модифицированы известные методы и численные алгоритмы построения допустимых управлений для нелинейной динамической системы, описывающей движение РБ при наличии ограничений на управление и текущее фазовое состояние системы. Результаты численного моделирования свидетельствуют о применимости предлагаемых подходов к решению прикладных задач, которые в настоящее время являются достаточно актуальными для разработчиков систем управления для ракетно-космической техники. Кроме того, исследуемая в работе задача представляет также теоретический интерес как пример нерешенной в

общем случае задачи оптимального управления нелинейной динамической системой с фазовыми ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г.** Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
2. **Атанс М., Фалб П.** Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. **Ивашкин В.В.** Оптимизация космических маневров. М.: Наука, 1975. 392 с.
4. **Костоусова Е.К., Починский В.И.** О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 201–216.
5. **Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.** Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
6. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
7. **Enright P.J., Conway V.A.** Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming // J. Guidance, Control and Dynamics. 1992. Vol. 15, № 4. P. 994–1002.

Поступила 12.05.2015

Кандоба Игорь Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kandoba@imm.uran.ru

Костоусов Виктор Борисович
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. отделом
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: vkost@imm.uran.ru

Ложников Андрей Борисович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

Козьмин Иван Викторович
науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Костоусова Елена Кирилловна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kek@imm.uran.ru

Починский Вениамин Иванович
канд. техн. наук
ведущий науч. сотрудник
ОАО НПО автоматики
им. акад. Н. А. Семихатова

УДК 519.711.3

**ТОЧНЫЕ ШТРАФЫ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ
ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ¹****В. В. Карелин, А. В. Фоминых**

В статье рассматривается дифференциальное включение с заданными многозначным отображением и начальной точкой. Для этого дифференциального включения требуется найти решение, доставляющее минимум интегральному функционалу. С помощью аппарата опорных функций и аппарата точных штрафных функций в случае непрерывной дифференцируемости опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным получены некоторые классические результаты принципа максимума для дифференциальных включений. Отдельно рассмотрен случай, когда опорная функция многозначного отображения не дифференцируема по фазовым переменным.

Ключевые слова: негладкий функционал, дифференциальное включение, опорная функция, точная штрафная функция, принцип максимума.

V. V. Karelin, A. V. Fominykh. Exact penalties in a problem of constructing an optimal solution of a differential inclusion.

A differential inclusion with given set-valued mapping and initial point is considered. For this differential inclusion, it is required to find a solution that minimizes an integral functional. We use the techniques of support functions and exact penalty functions to obtain some classical results of the maximum principle for differential inclusions in the case where the support function of the set-valued mapping is continuously differentiable in the phase variables. We also consider the case where the support function of the set-valued mapping is not differentiable in the phase variables.

Keywords: nonsmooth functional, differential inclusion, support function, exact penalty function, maximum principle.

Введение

В настоящее время дифференциальные включения (или дифференциальные уравнения с многозначной правой частью) практически незаменимы при математическом моделировании систем с неполным описанием [1] и анализе поведения разрывных систем [2]. Известны применения дифференциальных включений в задачах построения функций Ляпунова и оптимизации. Для приложений важна задача поиска решений дифференциального включения. Как правило, получить аналитическое решение дифференциального включения удастся лишь в специальных случаях, в остальных случаях для этой цели приходится использовать численные методы.

Отметим, что известные условия существования решения [1;3], как правило, содержат либо требование непрерывности, либо одновременно два требования: одной из полунепрерывностей и выпуклости значений соответствующего многозначного отображения.

В виде дифференциального включения $\dot{x} \in F(x, t)$ могут быть записаны дифференциальные неравенства, неявные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с ограничениями на фазовые координаты. Таким образом, дифференциальное включение является обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку у него из каждой начальной точки x_0 выходит целое семейство траекторий, то можно поставить задачу выделения решений с заданными свойствами, например таких, которые доставляют минимум некоторому функционалу.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00752, 14-01-31521 мол-а), гранта Санкт-Петербургского государственного университета (проект 9.38.205.2014).

В работах [1; 2] приведены теоремы, расширяющие на дифференциальные включения известный принцип максимума Л. С. Понтрягина. При этом принцип максимума получен при достаточно жестких предположениях, в частности при условии, что опорная функция $c(F(x, t), \psi)$ многозначного отображения $F(x, t)$ непрерывно дифференцируема по вектору фазовых координат. В настоящей работе задача при этом условии исследуется с применением аппарата точных штрафных [4] и опорных [5] функций. С помощью этого аппарата достаточно просто получается известный принцип максимума В. И. Благодатских. Дополнительно изучается случай, когда дифференцируемость по x опорной функции $c(F(x, t), \psi)$ не предполагается.

Идея использования точных штрафных функций в задачах оптимизации была предложена И. И. Ереминым в [6].

Дадим определения основных понятий, которые используются в статье.

О п р е д е л е н и е 1. *Опорной функцией* многозначного отображения F из X в Y называется функция

$$c(F(x), \psi) = \max_{f \in F(x)} (f, \psi) \quad \forall x \in X, \quad \forall \psi \in Y^*,$$

где Y^* — сопряженное пространство.

О п р е д е л е н и е 2. Через $C_n[0, T]$ обозначим пространство непрерывных n -мерных вектор-функций, определенных на отрезке $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 3. Через $P_n[0, T]$ обозначим пространство кусочно-непрерывных n -мерных вектор-функций, определенных на отрезке $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 4. *Производная Дини* функции φ из Z в \mathbb{R} в точке $z \in Z$ по направлению $v \in Z$ определяется величиной

$$\varphi'(z, v) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\varphi(z + \alpha v) - \varphi(z)}{\alpha}.$$

О п р е д е л е н и е 5. *Субдифференциал функции* φ из Z в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке $z \in Z$ есть множество

$$\partial\varphi(z) = \{W \in Z^* \mid \varphi(y) - \varphi(z) \geq (W, y - z) \quad \forall y \in Z\}.$$

О п р е д е л е н и е 6. *Супердифференциал функции* φ из Z в $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ в точке $z \in Z$ есть множество

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \{V \in Z^* \mid \varphi(y) - \varphi(z) \leq (V, y - z) \quad \forall y \in Z\}.$$

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t) \tag{1.1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{1.2}$$

Здесь $F(x, t)$, $t \in [0, T]$, — заданное многозначное отображение, которое будем считать полунепрерывным сверху, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно непрерывной на $[0, T]$ производной, $T > 0$ — заданный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из \mathbb{R}^n . Требуется подобрать такую вектор-функцию $x^*(t) \in C_n[0, T]$, являющуюся решением включения (1.1) и удовлетворяющую начальному условию (1.2), которая доставляет минимум функционалу

$$I(x) = \int_0^T f_0(x, t) dt, \tag{1.3}$$

где f_0 — заданная вещественная скалярная функция, которую будем считать непрерывной по обоим аргументам и непрерывно дифференцируемой по x .

2. Эквивалентная постановка задачи

Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x, t)$. Поскольку $\forall t \in [0, T]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(x, t)$ представляет собой выпуклое замкнутое и ограниченное множество, включение (1.1) можно переписать иначе [7]: $(\dot{x}, \psi) \leq c(F, \psi) \forall t \in [0, T]$, где $\psi \in \mathbb{R}^n$, $\|\psi\| = 1$. Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, тогда с учетом (1.2) получим $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau$.

Введем функции

$$l(\psi, z, t) = (z, \psi) - c(F, \psi), \quad (2.1)$$

$$h(\psi, z, t) = \max\{0, l(\psi, z, t)\} \quad (2.2)$$

и составим функционал

$$\varphi(\psi, z) = \sqrt{\int_0^T h^2(\psi, z, t) dt}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим множества $\Omega = [z \in P_n[0, T] \mid \varphi(\psi, z) = 0]$, $\Omega_\delta = [z \in P_n[0, T] \mid \varphi(\psi, z) < \delta]$. Тогда $\Omega_\delta/\Omega = [z \in P_n[0, T] \mid 0 < \varphi(\psi, z) < \delta]$.

Нетрудно убедиться, что для функционала (2.3) справедливы соотношения

$$\begin{cases} z \in \Omega, & \text{если } (\dot{x}, \psi) \leq c(F, \psi) \forall t \in [0, T], \\ z \notin \Omega & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Запишем функционал

$$\Phi(\psi, z) = I(z) + \lambda\varphi(\psi, z), \quad (2.4)$$

в котором $I(z) = I\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau\right)$, λ — достаточно большое положительное число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях это — точная штрафная функция. Последнее означает, что существует такое положительное число λ^* , что $\forall \lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (1.3) при наличии ограничений (1.1), (1.2) эквивалентна задаче безусловной минимизации функционала (2.4). Величина λ^* называется *константой точного штрафа*.

3. Дифференциальные свойства функционалов $\varphi(z)$ и $I(z)$

Далее считаем, что вектор-функция $f(x, t)$ непрерывна по обоим аргументам и непрерывно дифференцируема по x и что при всех $t \in [0, T]$ и при всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется включение $f(x, t) \in F(x, t)$. Ниже для краткости будем иногда писать f вместо $f(x, t)$. Далее в статье функции $l(\psi, z, t)$, $h(\psi, z, t)$, $\varphi(\psi, z)$ и $\Phi(\psi, z)$ рассматриваются при фиксированном значении ψ , поэтому будем писать вместо них $l(z, t)$, $h(z, t)$, $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ соответственно. Рассмотрим функционал $\varphi(z)$ подробнее. Пусть $v \in P_n[0, T]$. Положим $z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v(t)$. Вычислим

$$l(z_\alpha, t) = l(z, t) + \alpha H_1(z_\alpha, t) + o(\alpha, t), \quad \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где $H_1(z_\alpha, t) = (\psi, v(t)) - \max_{f \in F} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t v(\tau) d\tau, \psi \right)$. Здесь использованы определение опорной функции и свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [1]. С учетом (2.1) и (2.2) далее найдем

$$h(z_\alpha, v) = h(z, t) + \alpha H(z_\alpha, t) + o(\alpha, t), \quad \frac{o(\alpha, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$\begin{aligned} H(z_\alpha, t) &= H_1(z_\alpha, t), \quad l(z, t) > 0, \quad H(z_\alpha, t) = 0, \quad l(z, t) < 0, \\ H(z_\alpha, t) &= \max\{0, H_1(z_\alpha, t)\}, \quad l(z, t) = 0. \end{aligned}$$

Введем множества $T_+(z) = [t \in [0, T] \mid l(z, t) > 0]$, $T_-(z) = [t \in [0, T] \mid l(z, t) < 0]$, $T_0(z) = [t \in [0, T] \mid l(z, t) = 0]$.

Сначала рассмотрим случай $z \notin \Omega$.

Лемма 1. Если $z \notin \Omega$, то функционал $\varphi(z)$ супердифференцируем [8] и его супердифференциал в точке z имеет вид

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \frac{h(z, t)}{\varphi(z)}\psi + \int_t^T -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)}\psi \, d\tau, \quad f \in F,$$

где символ “итрих” означает операцию транспонирования.

Доказательство. Из выражения (2.3) имеем

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T \frac{h(z, t)}{\varphi(z)} H(z_\alpha, t) \, dt + o(\alpha), \quad \frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0.$$

Поскольку $z \notin \Omega$, имеем $H = H_1$. Тогда с учетом выражения для H_1 и теоремы об интеграле опорной функции, а также положительной однородности опорной функции по второму аргументу [7] получаем

$$\varphi'(z, v) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\varphi(z + \alpha v) - \varphi(z)}{\alpha} = \int_0^T \left(\frac{h(z, t)}{\varphi(z)}\psi, v(t) \right) dt - \max_{f \in F} \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t v(\tau) \, d\tau, \frac{h(z, t)}{\varphi(z)}\psi \right) dt.$$

Интегрируя по частям в последнем слагаемом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(z, v) &= \int_0^T \left(\frac{h(z, t)}{\varphi(z)}\psi, v(t) \right) dt - \max_{f \in F} \int_0^T \left(v(t), \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)}\psi \, d\tau \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{h(z, t)}{\varphi(z)}\psi, v(t) \right) dt + \min_{f \in F} \int_0^T \left(v(t), \int_t^T -\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)}\psi \, d\tau \right) dt = \min_{V \in \bar{\partial}\varphi(z)} (V, v), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \left\{ V \in P_n[0, T] \mid V(t) = \frac{h(z, t)}{\varphi(z)}\psi + \int_t^T -\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)}\psi \, d\tau, \quad f \in F \right\}.$$

Обозначим $\varkappa(z, t) = \frac{h(z, t)}{\varphi(z)}$, $\varkappa(z) \in P[0, T]$, тогда $\varkappa(z, t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$, $\|\varkappa(z)\| = 1$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0, T]$. Из (3.1) видно, что функционал $\varphi(z)$ супердифференцируем и его супердифференциал имеет вид

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \varkappa(z, t)\psi + \int_t^T -\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \varkappa(z, \tau)\psi \, d\tau, \quad f \in F. \quad (3.2)$$

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим случай $z \in \Omega$.

Лемма 2. Если $z \in \Omega$, то функционал $\varphi(z)$ дифференцируем в смысле Дини по любому направлению $v \in P_n[0, T]$ и его D -производная по направлению v в точке z выражается по формуле

$$\varphi'(z, v) = \max_{\|w\| \leq 1} \left[\int_0^T (w(t)\psi, v(t)) dt + \min_{f \in F} \int_0^T \left(\int_t^T -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' w(\tau)\psi d\tau, v(t) \right) dt \right],$$

где $w \in P[0, T]$, $\|w\| \leq 1$.

Доказательство. Поскольку $z \in \Omega$, имеем $\varphi(z) = 0$. Тогда из выражения (2.3) получаем

$$\varphi'(z, v) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\varphi(z + \alpha v) - \varphi(z)}{\alpha} = \|H(z_\alpha)\| = \max_{\|w\| \leq 1} \int_0^T H(z_\alpha, t)w(t) dt.$$

В данном случае $T_+(z) = \emptyset$, поэтому

$$\varphi'(z, v) = \max_{\|w\| \leq 1} \int_{T_0 \cup T_-} w(t) \max_{\bar{w}(t) \in [0, 1]} (\bar{w}(t)H_1(z_\alpha, t)) dt = \max_{w \in W_1} \int_0^T H_1(z_\alpha, t)w(t) dt,$$

где

$$W_1 = \{w \in P[0, T] \mid \|w\| \leq 1, w(t) \geq 0 \forall t \in T_0, w(t) = 0 \forall t \in T_-\}. \quad (3.3)$$

С учетом выражения для H_1 окончательно получаем

$$\varphi'(z, v) = \max_{w \in W_1} \left[\int_0^T (w(t)\psi, v(t)) dt + \min_{f \in F} \int_0^T \left(\int_t^T -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' w(\tau)\psi d\tau, v(t) \right) dt \right]. \quad (3.4)$$

Лемма доказана.

Находя производную функционала $I(z)$ по направлению $v \in P_n[0, T]$, убеждаемся, что он дифференцируем по Гато $I'(z, v) = \int_0^T \left(\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau, v(t) \right) dt$ и его градиент на множестве $P_n[0, T]$ вычисляется по формуле

$$\nabla I(z) = \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau. \quad (3.5)$$

Лемма 3. Если опорная функция $c(F, \psi)$ многозначного отображения $F(x, t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x , тогда

– при $z \notin \Omega$ функционал $\varphi(z)$ дифференцируем по Гато и его градиент на множестве $P_n[0, T]$ находится по формуле

$$\nabla \varphi(z) = \frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi + \int_t^T -\frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)} \frac{\partial c(F(x, \tau), \psi)}{\partial x} d\tau,$$

– при $z \in \Omega$ функционал $\varphi(z)$ субдифференцируем [8] и его субдифференциал в точке z находится по формуле

$$\partial \varphi(z) = \left\{ W \in P_n[0, T] \mid W(t) = w(t)\psi + \int_t^T -w(\tau) \frac{\partial c(F(x, \tau), \psi)}{\partial x} d\tau, w \in W_1 \right\},$$

где множество W_1 определяется формулой (3.3).

Доказательство. По определению опорной функции $c(F, \psi) = \max_{f \in F}(f, \psi)$. Видно, что эта функция субдифференцируема и ее субдифференциал имеет вид

$$\partial c(F, \psi) = \text{co} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \psi \right\}, \quad f \in R, \quad R = \{f \in F \mid c(F, \psi) = (f, \psi)\}.$$

Отсюда следует, что $c(F, \psi)$ дифференцируема по x тогда и только тогда, когда множество \mathbb{R} состоит из единственного элемента, который обозначим f^* . Поэтому в данном случае можно считать, что $c(F, \psi) = (f^*, \psi)$ и выполнены соотношения

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right)' \psi = \frac{\partial (f^*, \psi)}{\partial x} = \frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Пусть $z \notin \Omega$. Из выражения (3.2) получаем, что супердифференциал функционала $\varphi(z)$ состоит из единственного элемента f^* , поэтому $\varphi(z)$ дифференцируем по Гато. Тогда его градиент на множестве $P_n[0, T]$ имеет вид

$$\nabla \varphi(z) = \frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi + \int_t^T -\frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)} \left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right)' \psi d\tau. \quad (3.7)$$

Используя соотношения (3.6), из (3.7) окончательно получаем выражение

$$\nabla \varphi(z) = \frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi + \int_t^T -\frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)} \frac{\partial c(F(x, \tau), \psi)}{\partial x} d\tau,$$

которое доказывает первую часть леммы.

Пусть $z \in \Omega$. Из выражения (3.4) получаем, что производная функционала $\varphi(z)$ по направлению v может быть представлена в виде

$$\varphi'(z, v) = \max_{\|w\| \leq 1} \left[\int_0^T (w(t)\psi, v(t)) dt + \left(\int_t^T -\left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right)' w(\tau)\psi d\tau, v(t) \right) dt \right] = \max_{W \in \partial \varphi(z)} (W, v), \quad (3.8)$$

где

$$\partial \varphi(z) = \left\{ W \in P_n[0, T] \mid W(t) = w(t)\psi + \int_t^T -w(\tau) \left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right)' \psi d\tau, \quad w \in W_1 \right\},$$

а W_1 выписано в (3.3). Используя соотношения (3.6), из (3.8) окончательно получаем выражение

$$\partial \varphi(z) = \left\{ W \in P_n[0, T] \mid W(t) = w(t)\psi + \int_t^T -w(\tau) \frac{\partial c(F(x, \tau), \psi)}{\partial x} d\tau, \quad w \in W_1 \right\}, \quad (3.9)$$

которое доказывает вторую часть леммы.

Лемма доказана.

Заметим, что в данном случае также имеет место равенство

$$\gamma w(t) \frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x} = \frac{\partial c(F(x, t), \gamma w(t)\psi)}{\partial x} \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \gamma > 0. \quad (3.10)$$

4. Необходимые условия минимума

Теорема 1. Пусть $\inf_{z \in \Omega} I(z) = I(z^*) > -\infty$ и найдется такое положительное число $\lambda_0 < \infty$, что $\forall \lambda > \lambda_0$ существует $z(\lambda) \in P_n[0, T]$, для которого $\Phi_\lambda(z(\lambda)) = \inf_{z \in P_n[0, T]} \Phi_\lambda(z)$. Пусть также функционал $I(z)$ является локально липшицевым на множестве Ω_δ/Ω . Тогда функционал (2.4) будет точной штрафной функцией.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать [9], что существуют такие числа $a > 0$, $\delta > 0$, что

$$\varphi^\downarrow(z) = \liminf_{y \rightarrow z} \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{\rho(z, y)} < -a < 0 \quad \forall z \in \Omega_\delta/\Omega. \quad (4.1)$$

Здесь $y \in P_n[0, T]$, $\rho(z, y)$ — метрика на множестве $P_n[0, T]$, которую определим следующим образом: $\rho(z, y) = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t (z(t) - y(t)) dt \right|$.

Положим

$$y(t) = z(t) + \alpha v^*(t), \quad v^*(t) = - \left(\frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi + \int_t^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)} \psi d\tau \right).$$

Тогда с учетом леммы 1 имеем

$$\varphi'(z, v^*) = \min_{f \in F} \int_0^T - \left(\frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi + \int_t^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)} \psi d\tau, \frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi + \int_t^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)} \psi d\tau \right) dt.$$

Покажем, что

$$\frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi + \int_t^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z, \tau)}{\varphi(z)} \psi d\tau \neq \mathbf{0}, \quad f \in F,$$

тождественно на интервале времени $[0, T]$.

Предположим противное. Тогда $\frac{h(z, t)}{\varphi(z)} \psi = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, T]$, что противоречит ограничениям на ψ и $\frac{h(z, t)}{\varphi(z)}$. Пусть $\varphi(y) \rightarrow \varphi(z)$ при $y \rightarrow z$, т. е. существует последовательность $\{z_k\} \in \Omega_\delta/\Omega$ такая, что $\varphi'(z_k, v^*) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, где

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x_k, t)}{\partial x}, \quad f \in F, \quad x_k(t) = x_0 + \int_0^t z_k(\tau) d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{h(z_k, t)}{\varphi(z_k)} \psi + \int_t^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \frac{h(z_k, \tau)}{\varphi(z_k)} \psi d\tau \right\| \rightarrow 0, \quad f \in F, \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\left\| \frac{h(z_k, t)}{\varphi(z_k)} \psi \right\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что опять же противоречит условиям $\|\psi\| = 1$, $\left\| \frac{h(z)}{\varphi(z)} \right\| = 1$. Тогда приходим к заключению, что $\varphi(y) - \varphi(z) = \alpha \varphi'(z, v^*) + o(\alpha) < 0 \quad \forall z \in \Omega_\delta/\Omega$.

Теперь найдем $\rho(z, y) = \alpha \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t v^*(t) dt \right| > 0$. Из последних двух неравенств следует (4.1).

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть также опорная функция многозначного отображения $F(x, t)$ из (1.1) непрерывно дифференцируема по x . Для того чтобы точка $x^* = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$ удовлетворяла включению (1.1) и условию (1.2) и доставляла минимум функционалу (1.3), необходимо, чтобы нашлась такая вектор-функция $\Psi(t)$, что для всех $t \in [0, T]$ выполняются соотношения

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c(F(x^*, t), \Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*, t)}{\partial x}, \quad (4.2)$$

$$(\dot{x}^*, \Psi(t)) - c(F(x^*, t), \Psi(t)) = 0, \quad (4.3)$$

$$\Psi(T) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Доказательство. В теореме 1 было показано, что функционал (2.4) — точная штрафная функция, поэтому существует такое число $\lambda^* > 0$, что $\forall \lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (1.3) при наличии ограничений (1.1), (1.2) эквивалентна задаче безусловной минимизации функционала (2.4).

Положим $\Psi(t) = \lambda w(t)\psi$, где вектор-функция $w(t)$ берется из множества W_1 . Поскольку по лемме 3 при $z \in \Omega$ функционал $\varphi(z)$ субдифференцируем и его субдифференциал выписан в (3.9), функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато и его градиент выписан в (3.5), то из необходимого условия минимума [9] $0_n \in \partial\Phi(z^*)$ имеем с учетом (3.10), что в точке минимума для всех $t \in [0, T]$ должно выполняться условие

$$\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*, \tau)}{\partial x} d\tau + \Psi(t) + \int_t^T -\frac{\partial c(F(x^*, \tau), \Psi(\tau))}{\partial x} d\tau = 0_n, \quad (4.5)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$. Дифференцируя (4.5) на интервале времени $[0, T]$, получаем систему дифференциальных уравнений $\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c(F(x^*, t), \Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*, t)}{\partial x}$ с конечным условием $\Psi(T) = \mathbf{0}$ и приходим к соотношениям (4.2), (4.4).

При $t \in T_0$ из вида функции $l(z, t)$ получаем $(z, \Psi) = c(F, \Psi)$, при $t \in T_-$ $w(t) = 0$, и соотношение (4.3) остается в силе. Таким образом, (4.3) должно иметь место при любом $t \in [0, T]$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 сформулирована для задачи со свободным правым концом. Нетрудно показать, что соотношения (4.2), (4.3) будут иметь место и для задачи с фиксированным правым концом, однако конечное значение $\Psi(T)$ для этой задачи в общем случае будет ненулевым, т. е. здесь (4.4) уже не будет иметь места.

Пользуясь известными условиями минимума в терминах производной по направлению, из леммы 2 получаем, что справедлива

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Для того чтобы точка x^* удовлетворяла включению (1.1), условию (1.2) и доставляла минимум функционалу (1.3), необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} & \max_{\|w\| \leq 1} \left[\int_0^T \left(\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*, \tau)}{\partial x} d\tau + \lambda w(t)\psi, v(t) \right) dt \right. \\ & \left. + \min_{f \in F} \int_0^T \left(\int_t^T -\left(\frac{\partial f(x^*, \tau)}{\partial x} \right)' \lambda w(\tau)\psi d\tau, v(t) \right) dt \right] \geq 0 \quad \forall v \in P_n[0, T]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть $\bar{F} \subset F$ — множество таких $f \in F$, при которых (4.6) имеет место.

Можно показать, что имеет место

Лемма 5. *Соотношение (4.6) эквивалентно условию: при каждом фиксированном $\bar{f} \in \bar{F}$ найдется такая вектор-функция $\bar{w} \in W_1$, что выполняется соотношение*

$$\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*, \tau)}{\partial x} d\tau + \lambda \bar{w}(t) \psi + \int_t^T - \left(\frac{\partial \bar{f}(x^*, \tau)}{\partial x} \right)' \lambda \bar{w}(\tau) \psi d\tau = 0_n \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.7)$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Для того, чтобы точка x^* удовлетворяла включению (1.1), условию (1.2) и доставляла минимум функционалу (1.3), необходимо, чтобы нашлись такие вектор-функции $\bar{f} \in F$ и $\bar{\Psi}(t)$, для которых при всех $t \in [0, T]$ справедливы соотношения*

$$\dot{\bar{\Psi}}(t) = - \left(\frac{\partial \bar{f}(x^*, t)}{\partial x} \right)' \bar{\Psi}(t) + \frac{\partial f_0(x^*, t)}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$(\dot{x}^*, \bar{\Psi}(t)) - c(F(x^*, t), \bar{\Psi}(t)) = 0, \quad (4.9)$$

$$\bar{\Psi}(T) = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Доказательство. В силу леммы 4 для доказательства достаточно показать, что соотношение (4.6) эквивалентно (4.8), (4.10) при некоторых $\bar{f} \in F$ и $\bar{\Psi}(t)$.

По лемме 5 соотношение (4.6) эквивалентно (4.7) при каждом фиксированном $\bar{f} \in \bar{F}$. Дифференцируя (4.7) на промежутке $[0, T]$ и обозначая $\bar{\Psi}(t) = \lambda \bar{w}(t) \psi$, приходим к системе дифференциальных уравнений (4.8) с краевым условием (4.10).

Соотношение (4.9) доказывается так же, как в теореме 2.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 3 сформулирована для задачи со свободным правым концом. Нетрудно показать, что соотношение (4.8) будет иметь место и для задачи с фиксированным правым концом, однако конечное значение $\bar{\Psi}(T)$ для этой задачи в общем случае будет ненулевым, т. е. здесь (4.10) уже не будет иметь места.

5. Пример

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = x_1$, в которой ограничение на управление задается множеством $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid |u_1| \leq 1, u_2 = 0\}$. Пусть заданы начальное положение $x_0 = (0, 0)$ и конечное состояние $x(1) = (-1/2, -1/3)$ системы. Требуется подобрать такое управление $u^* \in U$, при котором функционал $I(x) = \int_0^1 x_2(t) dt$ принимает наименьшее значение.

Систему можно переписать в виде включения $\dot{x} \in F(x)$, где $F(x) = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ x_1 \end{pmatrix}$. Поскольку опорная функция $c(A, b)$ отрезка $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \in [-1, 1]\}$ имеет вид $|b|$, то в данном случае опорная функция многозначного отображения $F(x)$ выражается формулой $c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1 \psi_2$. Видно, что функция $c(F, \psi)$ является непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным и ее градиент выписывается следующим образом: $\frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, 0)$. Для градиента $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ подынтегральной функции f_0 справедливо выражение $\frac{\partial f_0}{\partial x} = (0, 1)$.

Из теоремы 2 с учетом замечания 1 следует, что вектор-функция $\psi(t)$ должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = 1. \quad (5.1)$$

Точно так же получаем, что для $\psi(t)$ для всех t необходимо выполнение соотношений $(\dot{x}, \psi(t)) = u_1\psi_1 + x_1\psi_2 = c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2$. Отсюда для всех t должно выполняться равенство

$$u_1(t)\psi_1(t) = |\psi_1(t)|. \quad (5.2)$$

Из (5.1), (5.2) уже нетрудно получить оптимальное управление

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= -1, & t \in [0, \tau_1), \\ u_1^*(t) &= 1, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u_1^*(t) &= [-1, 1], & t \in [\tau_2, 1], \end{aligned} \quad (5.3)$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -t, & x_2(t) &= -t^2/2, & t \in [0, \tau_1), \\ x_1(t) &= t + S_1, & x_2(t) &= t^2/2 + S_1t + S_2, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ x_1(t) &= -t + 1/2, & x_2(t) &= -t^2/2 + 1/2t - 1/2, & t \in [\tau_2, 1], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\tau_1 = 13/24$, $\tau_2 = 19/24$, $S_1 = -13/12$, $S_2 = 169/576$. Для поиска величин τ_1 , τ_2 , S_1 , S_2 в (5.3), (5.4) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории.

Нетрудно убедиться, что условия (5.1), (5.2) могут быть получены непосредственно из принципа максимума Понтрягина. Здесь же продемонстрирован несколько иной подход, когда осуществляется переход от исходной системы к соответствующему дифференциальному включению, для которого применяются полученные условия оптимальности (теорема 2) для поиска оптимального процесса $(x^*(t), u^*(t))$.

6. Заключение

Таким образом, в данной статье продемонстрировано применение теории точных штрафных функций к задаче оптимального управления дифференциальным включением. Аппарат опорных функций позволяет свести исходную задачу к оптимизационной задаче при наличии ограничений. С помощью точных штрафов эта задача при наличии ограничений сводится к минимизации негладкого функционала $\Phi(z)$ на всем пространстве. При условии непрерывной дифференцируемости опорной функции $c(F(x, t), \psi)$ по вектору фазовых координат этот функционал оказывается субдифференцируемым, что позволяет выписать необходимые условия минимума в терминах субдифференциала, совпадающие с некоторым классическим результатом для этой задачи. В случае недифференцируемости $c(F(x, t), \psi)$ по x найдена D -производная по направлениям функционала $\Phi(z)$, которая позволяет сформулировать необходимые условия минимума. Приведен пример применения теоретических результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 226 с.
3. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 512 с.
4. **Карелин В.В.** Точные штрафы в задаче наблюдения // Вест. СПбГУ. Сер. 10. 2008. Вып. 4. С. 3–7.
5. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
6. **Ерёмин И.И.** Метод “штрафов” в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.

7. **Благодатских В.И.** Принцип максимума для дифференциальных включений // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
8. **Васильев Л.В., Демьянов В.Ф.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
9. **Демьянов В.Ф.** Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

Карелин Владимир Витальевич

Поступила 14.05.2015

канд. физ.-мат. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: vlkarelin@mail.ru

Фоминых Александр Владимирович

аспирант

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: alexfomster@mail.ru

УДК 519.213

ДВУХШАГОВАЯ ЗАДАЧА ХЕДЖИРОВАНИЯ ЕВРОПЕЙСКОГО КОЛЛ-ОПЦИОНА ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ТРАНЗАКЦИЙ**А. И. Кибзун, В. Р. Соболев**

Исследуется двухшаговая задача минимизации средних затрат на хеджирование европейского колл-опциона. Хеджирование осуществляется путем покупки-продажи базового актива. Предполагается, что длительности операций купли-продажи активов на рынке случайны и имеют экспоненциальное распределение. Для решения задачи используется метод динамического программирования. Получено выражение для математического ожидания функции будущих потерь на последнем шаге. Предложен численный алгоритм для поиска оптимальной стратегии на первом шаге. Приводится пример использования алгоритма.

Ключевые слова: европейский опцион, хеджирование опционов, динамическое программирование.

A. I. Kibzun, V. R. Sobol'. A two-step problem of hedging a European call option under a random duration of transactions.

A two-step problem of minimizing average costs of hedging a European call option is studied. The hedging is implemented by buying and selling underlying assets. It is assumed that the durations of asset purchase and sale operations at the market are random and exponentially distributed. The problem is solved by the dynamic programming method. An expression for the mathematical expectation of the function of future losses at the final step is obtained. A numerical algorithm for finding an optimal strategy at the first step is proposed. An example of using the algorithm is given.

Keywords: European option, option hedging, dynamic programming,

Введение

В статье рассматривается задача хеджирования с точки зрения продавца европейского колл-опциона. Опцион, один из производных финансовых инструментов, представляет собою срочный договор, по которому потенциальный покупатель или потенциальный продавец актива (товара, ценной бумаги) получает право совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговоренной цене, называемой ценой поставки, в определенный договором момент в будущем или на протяжении определенного отрезка времени. Указанный в договоре актив называется базовым. Различают опционы на продажу (опционы типа пут) и на покупку (колл). В плане сроков исполнения контракта выделяют европейский, американский и бермудский (квазиамериканский) виды опционов. Европейский опцион может быть исполнен только в последний день своего срока действия (времени жизни), американский опцион — в любой день до истечения срока действия, а бермудский опцион — только в заранее оговоренные в контракте даты до истечения срока действия опциона.

Продавец колл-опциона, получив премию за опцион, принимает на себя риск, связанный с возможным ростом рыночной стоимости базового актива выше уровня цены поставки. Продавец может частично застраховаться от риска, затратив на это часть премии (стоимости опциона). Для этого он формирует инвестиционный портфель, состоящий из данного опциона, других опционов, фьючерсов, облигаций, акций и пр. В простейшем случае портфель состоит из базового актива, оговоренного в контракте. Этим портфелем продавец может управлять так, чтобы доходность портфеля хотя бы частично компенсировала риск опционной позиции. Такая стратегия управления называется хеджированием, а лицо, управляющее портфелем, — хеджером.

В настоящий момент результаты работ, посвященных исследованию задач хеджирования и оценивания опционов, во многом основываются на предположениях модели Блэка — Шоул-

за [1]; в них не учитывается тот факт, что каждая операция по купле-продаже активов занимает определенное время. Предполагается, что при формировании инвестиционного портфеля и управлении им хеджер может совершать сделки мгновенно. Данное предположение приемлемо в случае, когда базовый актив является достаточно ликвидным. Когда же базовый актив обладает низкой ликвидностью, т. е. сделки по покупке и продаже данного актива происходят достаточно редко, необходимо учитывать при управлении хеджирующим портфелем заранее неизвестную длительность операций (транзакций).

Математические модели, описывающие длительности рыночных транзакций, рассмотрены, например, в работах [2;3]. В указанных работах выдвигается предположение, что длительности рыночных транзакций случайны и имеют гамма-распределение, частным случаем которого является экспоненциальное распределение.

Многошаговые модели рынка и задачи хеджирования подробно исследованы в монографии Г. Фельмера и А. Шида [4]. Многошаговая задача хеджирования европейского опциона на неполных рынках исследовалась, например, в работах В. М. Хаметова и О. В. Зверева [5;6]. Стратегия последовательного хеджирования, применимая для опционов и европейского, и американского типов, ранее изучалась в работе [7], однако полученные в статье результаты не удается обобщить для ситуации случайной длительности транзакций.

В данной работе рассмотрена двухшаговая задача хеджирования колл-опциона европейского типа в предположении, что длительность операций купли-продажи базового актива случайна и имеет экспоненциальное распределение.

1. Процедура хеджирования

Пусть цена поставки равна K , а время жизни опциона — T . В соответствии с контрактом хеджер обязан продать держателю опциона V единиц базового актива по цене K , если цена базового актива в момент времени T превышает уровень цены поставки K .

Процесс $S(t)$ ценообразования базового актива определим следующим образом [8]:

$$S(t) = S + \beta t + \sigma W(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, S — стартовая цена базового актива, β — коэффициент линейного сноса, характеризующий общий тренд, а σ — волатильность, характеризующая степень неопределенности будущих цен.

Будем считать, что время τ исполнения операции купли-продажи базового актива случайно и имеет экспоненциальное распределение, параметр которого зависит от объема продаваемых или покупаемых активов, т. е.

$$\tau \sim E\left(-\frac{\lambda}{|u|}\right), \quad \lambda > 0,$$

где u — количество приобретаемых ($u > 0$) или продаваемых ($u < 0$) единиц базового актива, а λ — заданный параметр, характеризующий среднее время покупки или продажи единицы базового актива.

Предположим, что продавец опциона (хеджер) хеджирует контракт (покупает или продает базовый актив) в два этапа: в начальный момент времени $t = 0$ хеджер приобретает u_1 единиц базового актива, а в момент τ_1 ($\tau_1 \sim E\left(-\frac{\lambda}{|u_1|}\right)$) завершения первой покупки покупает еще u_2 единиц базового актива, если контракт еще не истек. Длительность второй операции купли-продажи τ_2 также случайна и имеет экспоненциальное распределение ($\tau_2 \sim E\left(-\frac{\lambda}{|u_2|}\right)$). При этом в случае, когда хеджер в момент T истечения срока жизни опциона не может предоставить необходимое количество единиц V базового актива, он может докупить необходимое количество актива в момент времени T по более высокой цене, равной

$S(T)(1+r)$, где $r > 0$ — надбавка за “срочность” операции. По истечении времени жизни опциона хеджер продает оставшиеся единицы базового актива.

Обозначим потери хеджера как $L(u_1, u_2, T)$. Для описанной выше модели возможны следующие варианты.

1. Время исполнения первой транзакции τ_1 превышает время жизни опциона T и цена базового актива ниже уровня цены поставки, т. е. $S(T) < K$. Опцион остается неисполненным и в момент τ_1 завершения первой транзакции хеджер продает имеющийся объем базового актива, купленный на первом шаге. В этом случае

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) - u_1 S(\tau_1).$$

2. Время исполнения первой транзакции τ_1 превышает время жизни опциона T и цена базового актива выше уровня цены поставки, т. е. $S(T) \geq K$. В этом случае в момент T исполнения опциона хеджер приобретает V единиц базового актива по цене $S(T)(1+r)$ и продает держателю опциона. В момент τ_1 завершения первой транзакции хеджер продает имеющийся объем u_1 базового актива по цене $S(\tau_1)$. При этом

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + V S(T)(1+r) - V K - u_1 S(\tau_1).$$

3. Время исполнения первой транзакции τ_1 не превышает время жизни опциона T , при этом $\tau_1 + \tau_2 > T$, а цена базового актива ниже уровня цены поставки, т. е. $S(T) < K$. В этом случае опцион остается неисполненным, и в момент $\tau_1 + \tau_2$ завершения второй транзакции хеджер продает имеющийся объем базового актива по цене $S(\tau_1 + \tau_2)$. Потери хеджера вычисляются как

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(\tau_1 + \tau_2).$$

4. Время исполнения первой транзакции τ_1 не превышает время жизни опциона T , при этом $\tau_1 + \tau_2 > T$, а цена базового актива выше уровня цены поставки, т. е. $S(T) \geq K$. В момент T исполнения опциона хеджер приобретает недостающий объем базового актива $V - u_1$ по цене $S(T)(1+r)$ и продает держателю опциона по цене поставки K . В момент $\tau_1 + \tau_2$ завершения второй транзакции хеджер продает имеющийся у него объем базового актива u_2 . В этом случае

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + (V - u_1) S(T)(1+r) - V K - u_2 S(\tau_1 + \tau_2).$$

5. Суммарное время исполнения транзакции $\tau_1 + \tau_2$ не превышает время жизни опциона T , и цена базового актива ниже уровня цены поставки, т. е. $S(T) < K$. В этом случае в момент T истечения срока жизни опциона хеджер продает имеющиеся $u_1 + u_2$ единиц базового актива по цене $S(T)$. Тогда потери хеджера определяются как

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(T).$$

6. Суммарное время исполнения транзакции $\tau_1 + \tau_2$ не превышает время жизни опциона T и цена базового актива выше уровня цены поставки, т. е. $S(T) \geq K$. В этом случае в момент T исполнения опциона хеджер приобретает недостающий объем базового актива $V - u_1 - u_2$ по цене $S(T)(1+r)$ и продает держателю опциона по цене поставки K . При этом

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + (V - u_1 - u_2) S(T)(1+r) - V K.$$

В результате получаем, что функция потерь задается соотношением

$$L(u_1, u_2, T) = \begin{cases} u_1 S_0 - u_1 S(\tau_1), & \text{если } \tau_1 > T, S(T) < K; \\ u_1 S_0 + VS(T)(1+r) - VK - u_1 S(\tau_1), & \text{если } \tau_1 > T, S(T) \geq K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2)S(\tau_1 + \tau_2), & \text{если } \tau_1 \leq T, \tau_1 + \tau_2 > T, S(T) < K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - VK \\ + (V - u_1)S(T)(1+r) - u_2 S(\tau_1 + \tau_2), & \text{если } \tau_1 \leq T, \tau_1 + \tau_2 > T, S(T) \geq K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2)S(T), & \text{если } \tau_1 + \tau_2 \leq T, S(T) < K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) \\ + (V - u_1 - u_2)S(T)(1+r) - VK, & \text{если } \tau_1 + \tau_2 \leq T, S(T) \geq K. \end{cases}$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим двухшаговую систему, описывающую динамику изменения портфеля хеджера. Введем вектор состояния системы

$$z_i = \text{col}(L_i, V_i, t_i, S_i), \quad i = 1, 2,$$

где L_i — накопленные потери к началу i -го шага, V_i — количество единиц базового актива к началу i -го шага, S_i — стоимость базового актива к началу i -го шага, а t_i — момент начала i -го шага. Начальное состояние системы задается вектором $z_1 = \text{col}(0, 0, S, 0)$.

Определим модель управления системой. Под управлением на каждом шаге будем понимать количество продаваемых или приобретаемых единиц базового актива. Будем рассматривать управление как функцию текущего состояния системы, т.е. $u_i \triangleq u_i(z_i)$, $i = 1, 2$. Множество U_1 допустимых управлений u_1 на первом шаге определяется следующим образом:

$$U_1 \triangleq \{u_1 : 0 \leq u_1 \leq V\}. \quad (2.1)$$

Множество U_2 допустимых управлений u_2 на втором шаге будет зависеть от состояния системы z_2 :

$$U_2 \triangleq U_2(z_2) = \{u_2 : z_{12} + u_2 \geq 0, z_{12} + u_2 \leq V\}. \quad (2.2)$$

Таким образом, хеджер не может приобрести больше единиц базового актива, чем прописано в контракте, и не может продать больше, чем у него есть к началу второго шага.

Динамику системы будем описывать рекуррентным соотношением:

$$z_{i+1} = f_i(z_i, u_i, X_i), \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

где $X_i \in \mathbb{R}^3$ — вектор случайных параметров, а $f_i(z_i, u_i, X_i)$ — функция перехода на i -м шаге. В качестве первой компоненты вектора X_i возьмем длительность i -го шага, т.е. $X_{i1} = \tau_i$. В качестве второй и третьей компонент возьмем приращения процесса $S(t)$ на отрезках $[t_i; t_i + \tau_i]$ и $[t_i; T]$. Известно [9], что приращение винеровского процесса $W(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $|t_2 - t_1|$, а ковариация сечений $W(t_1)$ и $W(t_2)$ равна $\min\{t_1, t_2\}$. С учетом этого зависимые между собой приращения $S(t_i + \tau_i) - S(t_i)$ и $S(T) - S(t_i)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} X_{i2} &= S(t_i + \tau_i) - S(t_i) = \beta\tau_i + \sigma \left(\xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, \tau_i + t_i - T\}} \right), \\ X_{i3} &= S(T) - S(t_i) = \beta(T - t_i) + \sigma \left(\xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, T - \tau_i - t_i\}} \right), \end{aligned}$$

где $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. В результате получаем, что вектор случайных параметров определяется следующим образом:

$$X_i = \begin{pmatrix} \beta\tau_i + \sigma \left(\xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, \tau_i + t_i - T\}} \right) \\ \beta(T - t_i) + \sigma \left(\xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, T - \tau_i - t_i\}} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В силу независимости величин τ_i , а также независимости величин ξ_i и η_i случайные векторы X_1 и X_2 являются независимыми.

Функция перехода f_i определяется следующим образом:

$$f_i(z_i, u_i, X_i) = \begin{pmatrix} L_i + g_i(z_i, u_i, X_i) \\ V_i + u_i \\ t_i + \tau_i \\ S(t_i + \tau_i) \end{pmatrix} = z_i + \begin{pmatrix} g_i(z_i, u_i, X_i) \\ u_i \\ X_{i1} \\ X_{i2} \end{pmatrix},$$

где $g_1(z_1, u_1, x_1)$ — функция потерь на первом шаге, записанная для реализации x_1 случайного вектора X_1 :

$$g_1(z_1, u_1, x_1) \triangleq \begin{cases} u_1 S_1 - u_1(S_1 + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S_1 + x_{13} < K; \\ u_1 S_1 + V(S_1 + x_{13})(1 + r) - VK - u_1(S_1 + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S_1 + x_{13} \geq K; \\ u_1 S_1, & \text{если } \tau_1 \leq T. \end{cases} \quad (2.5)$$

Функция $g_2(z_2, u_2, x_2)$ потерь на втором шаге, где x_2 — реализация случайного вектора X_2 , будет определяться выражением

$$g_2(z_2, u_2, x_2) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } t_2 > T; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22}), & \text{если } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK, & \text{если } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{23}), & \text{если } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK, & \text{если } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K. \end{cases} \quad (2.6)$$

В качестве целевой функции возьмем суммарные потери при хеджировании $\Phi(z_3) = z_{31} = L_3$. Рассмотрим задачу минимизации математического ожидания потерь

$$\Phi_0(u) = \mathbf{M}[\Phi(z_3)] \rightarrow \min_{u \in U_1 \times U_2}. \quad (2.7)$$

3. Метод динамического программирования

Установим возможность применения метода динамического программирования для решения задачи (2.7). Пусть имеется динамическая система с дискретным временем

$$z_{i+1} = f_i(z_i, u_i, x_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.1)$$

где z_i — вектор состояния системы, u_i — вектор управления на i -м шаге, x_i — вектор случайных параметров. Качество управления системой (3.1) будем оценивать с помощью терминального критерия $\Phi(z_{N+1})$, а оптимальное управление выбирать из условия минимума функционала

$$\Phi_0(u(\cdot)) \triangleq \mathbf{M}[\Phi(z_{N+1})]. \quad (3.2)$$

О п р е д е л е н и е 1. Динамическая система называется марковской, если ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием системы.

О п р е д е л е н и е 2. Управление $u_\varepsilon(\cdot)$ называется ε -оптимальным, если

$$\Phi_0(u_\varepsilon(\cdot)) \leq \begin{cases} \Phi_0^* + \varepsilon & \text{при } \Phi_0^* > -\infty, \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{при } \Phi_0^* = -\infty, \end{cases}$$

где Φ_0^* — оптимальное значение критерия.

Справедливо утверждение, следующее из [10, гл. 8, утверждения § 8.2].

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- (i) $\mathcal{P}\{\Phi(z_{N+1}) > -\infty\} = 1$;
- (ii) динамическая система (3.1) является марковской;
- (iii) $u_i(z_i) \in U_i$, т. е. ведется поиск управления в классе позиционных управлений с геометрическими ограничениями.

Тогда в задаче минимизации функционала (3.2)

$$\Phi_0(u) = \mathbf{M}[\Phi(z_{N+1})] \rightarrow \min_{u \in U}$$

существует измеримая ε -оптимальная стратегия $u_\varepsilon(\cdot) = \text{col}(u_1^\varepsilon(\cdot), \dots, u_N^\varepsilon(\cdot))$, определяемая с помощью алгоритма динамического программирования, т. е.

$$\Phi_i(z_i) = \inf_{u_i \in U_i} \mathbf{M}[\Phi_{i+1}(z_{i+1})|z_i], \quad i = \overline{1, N}; \quad \Phi_{N+1}(z_{N+1}) = \Phi(z_{N+1}).$$

Как было показано ранее, векторы X_1 и X_2 случайных параметров на первом и втором шаге независимы между собой, следовательно, система является марковской. Потери хеджера определяются приращениями винеровского процесса на конечных промежутках времени, поиск управления осуществляется в классе позиционных управлений с геометрическими ограничениями ($u_1 \in U_1, u_2 \in U_2(z_2)$), следовательно, условия теоремы 1 выполнены. Для поиска оптимального управления в задаче (2.7) минимизации математического ожидания суммарных потерь при хеджировании может быть использован метод динамического программирования. Запишем основные соотношения метода динамического программирования:

$$\Phi_i(z_i) = \inf_{u_i \in U_i} \mathbf{M}[\Phi_{i+1}(z_{i+1})|z_i], \quad i = 1, 2; \tag{3.3}$$

$$\Phi_3(z_3) = \Phi(z_3),$$

где $\Phi_i(z_i)$ — функция будущих потерь, т. е. наименьшее значение критерия в (2.7), которое может быть достигнуто при оптимальном управлении системой, начиная с i -го шага из текущего состояния z_i .

4. Математическое ожидание функции будущих потерь

Для решения задачи (3.3) необходимо найти условное математическое ожидание функции будущих потерь на последнем шаге. Это математическое ожидание определяется с помощью следующей теоремы.

Теорема 2. Если динамика изменения рыночной цены базового актива описывается винеровским процессом с линейным сносом (1.1), функция потерь на втором шаге определяется согласно (2.6), а вектор X_2 случайных параметров на втором шаге вычисляется в соответствии с (2.4), то условное математическое ожидание функции будущих потерь на последнем шаге можно выразить как

$$\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = L_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)]$$

$$= L_2 - \frac{\beta}{\lambda} u_2^2 e(u_2, z_2) - u_2 e(u_2, z_2) \frac{\beta}{\lambda} V_2 \varphi(z_2) - u_2 \beta (T - t_2) - u_2 (1 - e(u_2, z_2)) d_2 + d_3, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(z_2) &\triangleq \Phi\left(\frac{K - S_2 - \beta(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right), \quad e(u_2, z_2) \triangleq e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T - t_2)}, \\ m_{23}^+ &\triangleq \beta(T - t_i) + \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}(1 - \varphi(z_2))} e^{-\frac{(K - S_i - \beta(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}, \\ m_{23}^- &\triangleq \beta(T - t_i) - \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}\varphi(z_2)} e^{-\frac{(K - S_i - \beta(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}, \\ d_2 &\triangleq r(S_2 + m_{23}^+)(1 - \varphi(z_2)), \\ d_3 &\triangleq ((V - V_2)(1 + r)(S_2 + m_{23}^+) - VK)(1 - \varphi(z_2)) - V_2(S_2 + m_{23}^-)\varphi(z_2). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2 дано в приложении.

Исследуем свойства условного математического ожидания функции будущих потерь на последнем шаге. Производная математического ожидания $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ по u_2 определяется как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] &= -\frac{2\beta}{\lambda} u_2 e(u_2, z_2) - \beta(T - t_2) e(u_2, z_2) \operatorname{sign}(u_2) \\ &+ e(u_2, z_2) \left(d_2 - \frac{\beta}{\lambda} V_2 \varphi(z_2)\right) + \frac{\lambda}{|u_2|} (T - t_2) e(u_2, z_2) \left(d_2 - \frac{\beta}{\lambda} V_2 \varphi(z_2)\right) - (\beta(T - t_2) + d_2). \end{aligned}$$

При этом производная непрерывна в точке $u_2 = 0$, ее предел вычисляется как

$$\lim_{u_2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = -\beta(T - t_2) - d_2.$$

Нетрудно проверить, что функция $e(u_2, z_2)$ является четной и возрастающей по u_2 при $u_2 > 0$ и убывающей при $u_2 < 0$, а функция $\frac{1}{u_2} e(u_2, z_2)$ является нечетной и убывающей по u_2 при $u_2 > \lambda(T - t_2)$ и $u_2 \in (-\lambda(T - t_2), 0)$, и возрастающей при $u_2 \in (0, \lambda(T - t_2))$ и $u_2 \leq -\lambda(T - t_2)$.

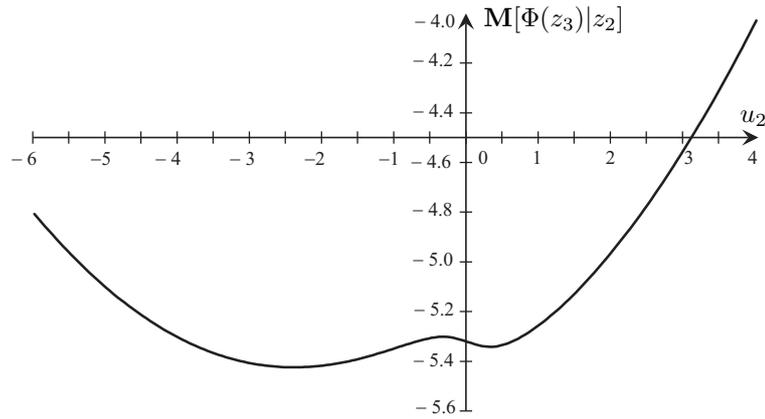
Анализ выражения для математического ожидания $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ функции будущих потерь на последнем шаге и его производной, а также численное моделирование показывают, что математическое ожидание $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ может иметь не более двух локальных минимумов на отрезке $[-V_2, V - V_2]$, расположенных по разные стороны от 0. Проиллюстрируем это на примере. Пусть в момент $t_2 = 1$ начала второго шага цена S_2 базового актива равна 2, при этом хеджер имеет $V_2 = 6$ единиц базового актива из 10 ($V = 10$) необходимых по условию контракта. Пусть также цена поставки K равна 3, время T жизни опциона равно 5, коэффициент β линейного сноса равен -0.01 , коэффициент σ волатильности равен 1, интенсивность торгов λ равна 0.2, а надбавка r за срочные операции равна 0.1. Потери L_2 к началу второго шага без ограничения общности можно считать равными нулю. График зависимости математического ожидания $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$ по u_2 при указанных значениях параметров изображен на рис. 1.

Для поиска ε -оптимальной стратегии u_2^* на втором шаге будем использовать полный перебор по $u_2 \in U_2(z_2)$ с заданным шагом $h > 0$, где $U_2(z_2)$ определяется в соответствии с (2.2). Функция будущих потерь на втором шаге описывается как

$$\Phi_2(z_2) = L_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2^*, x_2)], \quad (4.2)$$

и определяется по формуле (4.1).

Задача минимизации функции будущих потерь на первом шаге является задачей одномерной оптимизации на конечном промежутке. В силу сложной структуры функции потерь

Рис. 1. График зависимости $M[\Phi(z_3)|z_2]$ по u_2 .

и зависимости распределения случайных параметров от стратегии для вычисления математического ожидания при фиксированном значении u_1 будем использовать метод Монте-Карло, а для поиска ε -оптимальной стратегии на первом шаге будем использовать полный перебор по $u_1 \in U_1$ с заданным шагом, где U_1 определяется согласно (2.1). Для поиска ε -оптимальной стратегии u_1^* на первом шаге предложим следующий алгоритм.

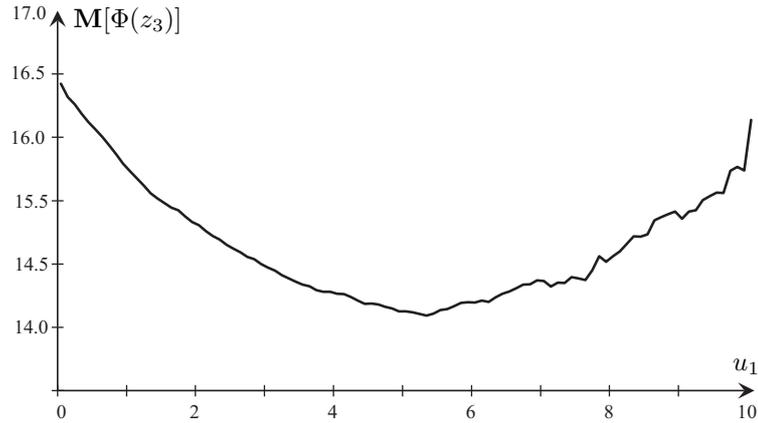
А л г о р и т м.

1. Задать шаг сетки h и требуемое количество реализации N для метода Монте-Карло, положить номер шага i равным 0, $M^* = \infty$ и $u_1^* = 0$.
2. Положить $u_1 = ih$, $M = 0$ и сгенерировать выборку $\{Y_i\}, i = 1 : N$, реализаций случайного вектора X_1 .
3. Для каждой реализации Y_j определить z_2 согласно (2.3) и вычислить $\Phi_2(z_2)$ по формуле (4.2). Присвоить $M = M + \frac{1}{N} (g_1(z_1, ih, Y_j) + \Phi_2(z_2))$, где $g_1(z_1, ih, Y_j)$ определяется согласно (2.5).
4. Если $M < M^*$, то положить $M^* = M$ и $u_1^* = ih$. Перейти к шагу 5.
5. Если $i > \left\lceil \frac{V}{h} \right\rceil$, то завершить работу алгоритма, иначе положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 2.

В результате работы данного алгоритма удастся найти ε -оптимальное управление u_1^* на первом шаге. Величина M^* будет определять значение функции будущих потерь на первом шаге, т.е. математическое ожидание суммарных затрат на хеджирование за два шага при оптимальном управлении на первом шаге.

5. Пример

Приведем результаты работы алгоритма для поиска оптимальной стратегии на первом шаге. Пусть начальная цена S базового актива равна 95 у.е, коэффициент линейного сноса β в процессе ценообразования $S(t)$ равен -0.05 у.е. в день, коэффициент волатильности σ равен 1.5, величина r равна 0.05, а коэффициент λ , характеризующий среднее время покупки/продажи единицы базового актива, также равен 1.5. Пусть согласно контракту хеджер обязуется предоставить по требованию держателя опциона через $T = 20$ дней $V = 10$ единиц базового актива по цене поставки $K = 100$. Будем искать оптимальное управление на первом шаге на отрезке $[0, 10]$ с шагом $h = 0.1$. Математическое ожидание потерь на каждом шаге алгоритма будем оценивать по $N = 10000$ реализаций.

Рис. 2. Зависимость средних потерь $\mathbf{M}[\Phi(z_3)]$ от u_1 .

В результате вычислений получаем, что в начальный момент времени хеджеру необходимо приобрести $u_1^* = 5.4$ единиц базового актива. График зависимости средних потерь от управления на первом шаге представлен на рис. 2.

Стоит обратить внимание на то, что с ростом u_1 увеличивается дисперсия величины суммарных потерь. Следовательно, для оценки средних потерь требуется большее количество реализаций для метода Монте-Карло. Для оптимизации времени расчетов можно предложить использование переменного объема выборки. Например, можно задать минимальный и максимальный объемы выборки N_{\min} и N_{\max} и для каждого значения u_1 на 2-м шаге алгоритма использовать в качестве объема выборки величину

$$N = \frac{V - u_1}{V} N_{\min} + \frac{u_1}{V} N_{\max}.$$

Приложение

Приведем доказательство теоремы 2. Для вычисления математического ожидания функции потерь на последнем шаге необходимы условные математические ожидания приращений X_{i2} и X_{i3} , $i = 1, 2$, процесса ценообразования (1.1) при условии, что в момент истечения срока жизни опциона T цена базового актива $S_i + X_{i3}$ оказалась ниже или выше уровня цены поставки K . Условные математические ожидания величины X_{i3} вычисляются непосредственно как математические ожидания случайной величины, имеющей усеченное нормальное распределение:

$$\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i] = \beta(T - t_i) - \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{K - S_i - \beta(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}\right)} e^{-\frac{(K - S_i - \beta(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i] = \beta(T - t_i) + \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}\left(1 - \Phi\left(\frac{K - S_i - \beta(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}\right)\right)} e^{-\frac{(K - S_i - \beta(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}. \quad (5.2)$$

В силу того что процесс (1.1) является процессом с независимыми приращениями, условные математические ожидания величины X_{i2} вычисляем как

$$\mathbf{M}[X_{i2}|X_{i3} < K - S_i, \tau_i > T - t_i] = \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i] + u_i \frac{\beta}{\lambda}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{M}[X_{i2}|X_{i3} \geq K - S_i, \tau_i > T - t_i] = \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i] + u_i \frac{\beta}{\lambda}. \quad (5.4)$$

Поскольку условные математические ожидания приращений процесса ценообразования нам известны, мы можем найти математическое ожидание функции потерь на последнем шаге. В соответствии с описанной выше моделью получаем $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = \mathbf{M}[z_2 + g_2(z_2, u_2, x_2)] =$

$z_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)]$. Второе слагаемое является математическим ожиданием потерь на последнем шаге при управлении u_2 и вычисляется как полное математическое ожидание

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)] \\ &= \mathbf{M}[u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22}) | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K] \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} \\ & \quad + \mathbf{M}[u_2 S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K] \\ & \times \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\} + \mathbf{M}[u_2 S_2 - (V_1 + u_2)(S_2 + x_{23}) | \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K] \\ & \quad \times \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} + \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\} \\ & \quad \times \mathbf{M}[u_2 S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK | \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K]. \end{aligned}$$

Математическое ожидание в первом слагаемом определяется как

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}[u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22}) | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K] \\ &= u_2 S_2 - (V_2 + u_2) \mathbf{M}[S_2 + x_{22} | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K] \\ &= u_2 S_2 - \beta \frac{u_2(V_2 + u_2)}{\lambda} - (V_2 + u_2)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} < K - S_2]), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом может быть найдено по формуле (5.1).

Математическое ожидание во втором слагаемом вычисляется как

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}[u_2 S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K] \\ &= u_2 S_2 - VK - u_2 \mathbf{M}[S_2 + x_{22} | S_2 + x_{23} \geq K] + (V - V_2)(1 + r) \mathbf{M}[S_2 + x_{23} | S_2 + x_{23} \geq K] \\ &= u_2 S_2 - VK - \beta \frac{u_2^2}{\lambda} + ((V - V_2)(1 + r) - u_2)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} \geq K - S_2]), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяем по формуле (5.2).

Математическое ожидание в третьем слагаемом, учитывая соотношение (5.3), вычисляем как

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}[u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{23}) | \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K] \\ &= u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} < K - S_2]), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяется по (5.1).

Математическое ожидание в четвертом слагаемом, учитывая соотношение (5.4), определяем как

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}[u_2 S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK | \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K] \\ &= u_2 S_2 - VK + (V - V_2 - u_2)(1 + r)(S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} \geq K - S_2]), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяем по формуле (5.2).

Вычисляем вероятность:

в первом слагаемом:

$$p_1 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} = e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)} \Phi\left(\frac{K - S_2 - \beta(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right); \quad (5.9)$$

во втором слагаемом:

$$p_2 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\} = e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)} \left(1 - \Phi\left(\frac{K - S_2 - \beta(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right)\right); \quad (5.10)$$

в третьем слагаемом:

$$p_3 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} = (1 - e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)}) \Phi\left(\frac{K - S_2 - \beta(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right); \quad (5.11)$$

в четвертом слагаемом:

$$p_4 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\} = (1 - e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)}) \left(1 - \Phi\left(\frac{K - S_2 - \beta(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right)\right). \quad (5.12)$$

Таким образом, выражение для математического ожидания функции будущих потерь на втором шаге полностью определено. Используя соотношения (5.5)–(5.12) и введенные в утверждении теоремы обозначения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] &= L_2 + \left(u_2 S_2 - \beta \frac{u_2(V_2 + u_2)}{\lambda} - (V_2 + u_2)(S_2 + m_{23}^-)\right) e(u_2, z_2) \varphi(z_2) \\ &+ \left(u_2 S_2 - VK - \beta \frac{u_2^2}{\lambda} + ((V - V_2)(1 + r) - u_2)(S_2 + m_{23}^+)\right) e(u_2, z_2) (1 - \varphi(z_2)) \\ &\quad + (u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + m_{23}^-)) (1 - e(u_2, z_2)) \varphi(z_2) \\ &\quad + (u_2 S_2 - VK + (V - V_2 - u_2)(1 + r)(S_2 + m_{23}^+)) (1 - e(u_2, z_2)) (1 - \varphi(z_2)) \\ &= L_2 - \frac{\beta}{\lambda} u_2^2 e(u_2, z_2) - u_2 e(u_2, z_2) \frac{\beta}{\lambda} V_2 \varphi(z_2) - u_2 \beta (T - t_2) - u_2 (1 - e(u_2, z_2)) d_2 + d_3. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities // J. Polit. Econ. 1973. Vol. 81, no. 3. P. 637–659.
2. **Zhang M.Y., Russell J., Tsay R.S.** A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data // J. Econometrics. 2001. Vol. 104, no. 1. P. 179–207.
3. **Dufour A., Engle R.F.** The ACD model: Predictability of the time between consecutive trades. Discussion Papers in Finance: 2000-05. California: ISMA Centre, 2000. 58 p. (Business School for Financial Markets).
4. **Фёльмер Г., Шид А.** Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008. 496 с.
5. **Зверев О.В., Хаметов В.М.** Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 1. С. 26–54.
6. **Зверев О.В., Хаметов В.М.** Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование // Проблемы управления. 2014. № 6. С. 31–44.
7. **Кибзун А.И., Соболев В.Р.** Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 17, № 2. С. 179–192.
8. **Bachelier L.** Theorie de la speculation // Annales Scientifiques de l'ecole Normale Suprieure. 1900. Vol. 3. P. 21–86.
9. **Миллер Б.М., Панков А.Р.** Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
10. **Бертсекас Д., Шрив С.** Стохастическое оптимальное управление. М.: Наука, 1985. 280 с.

Кибзун Андрей Иванович

Поступила 13.05.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

e-mail: kibzun@mail.ru

Соболев Виталий Романович

аспирант

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

e-mail: vitsobol@mail.ru

УДК 512.542

К ВОПРОСУ КАМЕРОНА О ТРИВИАЛЬНОСТИ В ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК СТАБИЛИЗАТОРА ДВУХ ТОЧЕК, НОРМАЛЬНОГО В СТАБИЛИЗАТОРЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ

А. В. Коныгин

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. П. Камероном был поставлен вопрос о справедливости в этом случае равенства $G_{x,y} = 1$. Ранее автором было доказано, что если цокль группы G не является степенью исключительной группы лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$, то $G_{x,y} = 1$. В настоящей работе мы доказываем это в случае, когда цокль группы G является степенью исключительной группы лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$.

Ключевые слова: примитивная группа подстановок, регулярная подорбита.

A. V. Konygin. On Cameron's question about the triviality in primitive permutation groups of the stabilizer of two points that is normal in the stabilizer of one of them.

Assume that G is a primitive permutation group on a finite set X , $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, and $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. P. Cameron raised the question about the validity of the equality $G_{x,y} = 1$ in this case. The author proved earlier that, if the socle of G is not a direct power of an exceptional group of Lie type distinct from $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ and $E_8(q)$, then $G_{x,y} = 1$. In the present paper, we prove this in the case when the socle of G is a direct power of an exceptional group of Lie type isomorphic to $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, or $E_7(q)$.

Keywords: primitive permutation group, regular suborbit.

1. Введение

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [10] и [4, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на G_x -орбите $G_x(y)$, содержащей точку y (т.е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т.е. что $|G_x| = |G_x(y)|$? Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [22; 25; 26]).

Ясно, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G , то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Согласно теореме О'Нэна — Скотта (см. [16]) любая конечная примитивная группа подстановок подстановочно изоморфна группе одного из перечисленных ниже типов.

I. Примитивные группы с абелевой регулярной нормальной подгруппой.

II. Примитивные почти простые группы. Напомним, что группа G называется почти простой, если группа G изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(T)$, содержащей $\text{Inn}(T)$, для некоторой конечной простой неабелевой группы T .

III. Прimitивные группы с неабелевым непростым цоколем. Среди групп этого типа различают группы:

III(a) (simple diagonal action). Пусть S_k — симметрическая группа степени $k \geq 2$, T — простая неабелева группа и $W = \{\pi(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in \text{Aut}(T), \pi \in S_k, a_i a_j^{-1} \in \text{Inn}(T), i, j \in \{1, \dots, k\}\} \leq \text{Aut}(T) \text{wr} S_k$. Тогда представление группы W левыми сдвигами на множестве левых смежных классов группы W по подгруппе $W_x = \{\pi(a, \dots, a) \mid a \in \text{Aut}(T), \pi \in S_k\}$ является точным примитивным представлением степени $|T|^{k-1}$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(a), если она изоморфна подгруппе группы W в этом представлении, содержащей $\text{soc}(W)$.

III(b) (product action). Пусть S_m — симметрическая группа степени $m \geq 2$ и H — примитивная группа типа II или III(a) на конечном множестве Y . Положим $W = H \text{wr} S_m$. Группа W естественным образом действует на $X = Y^m$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(b), если она изоморфна подгруппе группы W в этом представлении, содержащей K^m , где $K = \text{soc}(H)$, и G транзитивно переставляет m прямых множителей группы K^m .

III(c) (twisted wreath action). Конечная примитивная группа G имеет тип III(c), если она обладает единственной неабелевой регулярной нормальной подгруппой.

Ранее в работах автора [1–3] было доказано, что если G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , которая является либо группой типа I, III(a) или III(c), либо группой типа II с цоколем, не являющимся исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**. Там же доказано, что если $G \leq H \text{wr} S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H не является исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$, то для группы подстановок G также выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для всех таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен. В настоящей работе рассмотрен случай, когда цоколь группы G является степенью исключительной группы лиева типа, изоморфной $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$. Таким образом, с учетом [1–3], доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X . Предположим, что цоколь группы G не является исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.

Теорема 2. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X . Предположим, что $G \leq H \text{wr} S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H не является исключительной группой лиева типа, изоморфной $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.

Таким образом, для доказательства справедливости свойства **(Pr)** для всех примитивных групп подстановок G на конечном множестве X (и для получения ответа на вопрос П. Камерона) остается рассмотреть случай, когда G — почти простая группа с цоколем, изоморфным $E_8(q)$, или $G \leq H \text{wr} S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H изоморфен $E_8(q)$.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Для произвольной конечной группы G и простого числа p в работе используются следующие стандартные обозначения: $\text{soc}(G)$ — цоколь группы G , $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G , $F^*(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G , $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p -подгруппа группы G , $O_{p'}(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа H группы G

такая, что $|G/H|$ не делится на p . Для групп A и B через $A.B$ будет обозначаться (см. [8]) произвольная группа G с нормальной подгруппой H такой, что $H \cong A$ и $G/H \cong B$. В выражениях вида $A_1.A_2.A_3 \dots A_n$ будем предполагать левую ассоциативность, т. е. $A_1.A_2.A_3 = (A_1.A_2).A_3$ и т. д.

Пусть A и B — группы. Подгруппу D прямого произведения групп A и B назовем *диагональной*, если $A \cap D = B \cap D = 1$ и AB совпадает с DA или DB .

Приведем результаты, которые используются при доказательстве теорем 1 и 2.

Предложение 1 [1, предложение 8]. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $F(G_{x,y}) = 1$. В частности, $F(G_x) \cap G_{x,y} = F(G_y) \cap G_{x,y} = 1$ и $[F(G_x), G_{x,y}] = 1$.

Предложение 2 [1, предложение 9]. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что G_x имеет вид $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы и T — простая неабелева группа. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**.

Предложение 3 [1, предложение 12]. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что G_x имеет вид $A.T^k.B.S$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, $k \geq 2$, $S \in \{A_k, S_k\}$, $S \neq A_2$ и S действует точно на множестве изоморфных T прямых множителей группы $\text{soc}(A.T^k/A)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**.

Предложение 4 [3, лемма 1]. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $Z(G_x) = 1$.

Пусть H — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве Y и $T = \text{soc}(H)$. Будем говорить, что для группы подстановок H выполняется свойство **(Pr+)**, если для произвольных $x \in Y$ и $y \in Y \setminus \{x\}$ из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $F(T_{x,y}) = 1$ следует, что $N_T(T_{x,y}) \neq T_x$. Заметим, что если T действует примитивно на Y (другими словами, если для $x \in Y$ подгруппа T_x группы T является максимальной), то из справедливости для группы подстановок T свойства **(Pr)** следует справедливость для групп подстановок T и H свойства **(Pr+)**.

Свойство **(Pr+)** интересует нас в связи со следующими утверждениями.

Предложение 5 [1, предложение 17]. Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X . Если для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**.

Предложение 6 [1, предложение 18]. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X . Предположим, что $G \leq \text{Hwr}S_m$ — группа типа III(b) и H — примитивная группа подстановок типа II. Если для группы подстановок H выполняется свойство **(Pr+)**, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**.

Предложение 7 [1, предложение 20]. Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X с цоклом T и $x \in X$. Предположим, что T_x имеет вид $A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, а F — простая неабелева группа. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**.

Для формулировки необходимых при доказательстве теорем 1 и 2 результатов потребуются также следующие стандартные определения и обозначения (см., например, [21]). Пусть R — такая простая присоединенная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K ненулевой характеристики p и F — такой эндоморфизм алгебраической группы R ,

что $L = [R^F, R^F]$ является конечной простой исключительной группой лиева типа над полем \mathbb{F}_q , где $q = p^m$ и $R^F = \{g \in R \mid F(g) = g\}$. Пусть Q — конечная группа такая, что $F^*(Q) = L$. Группа $\text{Aut}(L)$ порождается сопряжениями посредством элементов из R^F , а также полевыми и графовыми автоморфизмами группы L , причем все эти автоморфизмы группы L продолжаются до автоморфизмов абстрактной группы R , коммутирующих с F . Таким образом, существует подгруппа \tilde{Q} группы $C_{\text{Aut}(R)}(F)$ такая, что $Q = \tilde{Q}/\langle F \rangle$, и, следовательно, Q действует на множестве всех F -допустимых подмножеств группы R . Через $N_Q(V)$ будем обозначать нормализатор в Q произвольного F -допустимого подмножества V группы R . Если D является F -допустимой замкнутой связной редуктивной подгруппой группы R , содержащей максимальный тор группы R , и $M = N_Q(D)$, то будем говорить, что M — группа максимального ранга в Q . Через $\mathcal{L}(R)$ — будем обозначать алгебру Ли группы R . Диаграммы Дынкина будут иметь стандартный вид (см. [23]).

Пусть X — простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K . Для доминантного веса λ пусть $V_X(\lambda)$ — рациональный неприводимый KX -модуль старшего веса λ и $T_X(\lambda)$ — неразложимый tilting-модуль старшего веса λ . Следуя [19; 23], будем писать λ для обозначения модуля $V_X(\lambda)$ и будем писать $a_1 \dots a_r$ вместо доминантного веса $\sum_{i=1}^r a_i \omega_i$, где ω_i — фундаментальные доминантные веса и a_1, \dots, a_r — неотрицательные целые числа (неоднозначность этих обозначений устраняется контекстом использования). Для KX -модулей M_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, через $M_1 \mid M_2 \mid \dots \mid M_k$ будем обозначать рациональный KX -модуль V , имеющий такой ряд подмодулей $0 = V_k < V_{k-1} < \dots < V_1 < V_0 = V$, что $V_{i-1}/V_i \cong M_i$ для $1 \leq i \leq k$.

Пусть теперь X — полупростая алгебраическая группа и λ, γ, μ — доминантные веса такие, что модули $T_X(\lambda) = \mu \mid \lambda \mid \mu$ и $T_X(\gamma) = \mu \mid \gamma \mid \mu$ унисериальны. Следуя [19], через $\Delta(\lambda; \gamma)$ будем обозначать неразложимый модуль вида $\mu \mid (\lambda \oplus \gamma) \mid \mu$, точное определение которого приводится в [19, разд. 9.1].

Предложение 8 [18, теорема 2]. Пусть $L = O^{p'}(R^F)$ — исключительная группа лиева типа над алгебраически замкнутым полем K ненулевой характеристики p , изоморфная одной из групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$. Предположим, что G — группа со свойством $L \leq G \leq \text{Aut}(L)$ и M — максимальная подгруппа группы G . Тогда либо $F^*(M)$ является простой группой, либо выполняется одно из следующих утверждений.

I. $M = N_G(D^F)$, где $D = D^F$ является либо параболической подгруппой группы R , либо редуктивной подгруппой максимального ранга группы R .

II. $M = N_G(E)$, где E — элементарная абелева группа из [24, теорема 1(II)].

III. $M = C_G(\tau)$, где τ — автоморфизм простого порядка группы L , причем τ является либо полевым автоморфизмом, либо графовым автоморфизмом, либо произведением графового и полевого автоморфизмов группы L .

IV. $F^*(M)$ — группа из [18, табл. 3]:

- $L = E_6^{\epsilon}(q)$, $F^*(M) \cong L_3(q) \times G_2(q)$;
- $L = E_6^{\epsilon}(q)$, $F^*(M) \cong U_3(q) \times G_2(q)$, $q > 2$;
- $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong L_2(q) \times L_2(q)$, $p > 3$;
- $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong L_2(q) \times G_2(q)$, $p > 2$, $q > 3$;
- $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong L_2(q) \times F_4(q)$, $q > 3$;
- $L = E_7(q)$, $F^*(M) \cong G_2(q) \times \text{PSp}_6(q)$.

Предложение 9. Пусть G — транзитивная группа подстановок на конечном множестве X . Тогда $|G_{x,y}| \geq \frac{|G_x|^2}{|G|}$. В частности, если $G_x = A \times B$ и $G_{x,y} = B$, то $|G| \geq |A|^2|B|$.

Доказательство. Имеем $|X| = \frac{|G|}{|G_x|}$, $|G_x(y)| = \frac{|G_x|}{|G_{x,y}|}$ и $|X| \geq |G_x(y)|$. Следовательно, $\frac{|G|}{|G_x|} \geq \frac{|G_x|}{|G_{x,y}|}$.

3. Доказательство теорем 1 и 2

В силу предложений 5 и 6 для доказательства теорем 1 и 2 достаточно показать, что если G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $\text{soc}(G)$ — исключительная группа лиева типа, изоморфная $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$, то для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**.

Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X , $T := \text{soc}(G)$ — исключительная группа лиева типа, изоморфная $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. По предложению 8 либо $F^*(G_x)$ является простой группой, либо для G_x выполняется одно из утверждений I–IV предложения 8.

Если $F^*(G_x)$ является простой группой, то G_x — почти простая группа. Тогда $T_x/\text{soc}(T_x)$ является разрешимой группой и в силу предложения 7 для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**.

Таким образом, не теряя общности далее будем считать, что для G_x выполняется одна из возможностей I–IV предложения 8.

Случай 1. Для G_x выполняется утверждение I предложения 8, т. е. $G_x = N_G(D^F)$, где $D = D^F$ является либо параболической подгруппой группы R , либо редуکتивной подгруппой максимального ранга группы R .

Пусть $D = D^F$ является параболической подгруппой группы R . Тогда G_x — параболическая подгруппа группы R и, следовательно, $C_{G_x}(O_r(G_x)) \leq O_r(G_x)$ для некоторого простого числа r . Предположим, что $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $F(T_{x,y}) = 1$. Поскольку $T_{x,y} \cap O_r(G_x) = 1$, $[O_r(G_x), T_{x,y}] = 1$ и, следовательно, $T_{x,y} \leq C_{G_x}(O_r(G_x)) \leq O_r(G_x)$. Таким образом, $T_{x,y} = 1$ и для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr+)**.

Пусть $D = D^F$ является редуکتивной подгруппой максимального ранга группы R . Все редуکتивные подгруппы максимального ранга конечных исключительных групп лиева типа перечислены в [17, табл. 5.1]. Заметим, что если G содержит графовый автоморфизм, то $T \cong E_6(q)$, $N_{R^F}(D) \cong h.(P\Omega_{10}(q) \times (q-1)/h).h$, где $h = (4, q-1)$, и свойство **(Pr+)** для группы G следует из предложения 7. Поэтому далее без ограничения общности можно предполагать, что $G = R^F$. Тогда $G_x = H^F$, где H — F -инвариантная замкнутая подгруппа, максимальная среди F -инвариантных замкнутых подгрупп группы R , имеющих положительную размерность. Далее в случаях 1.1–1.8 будет показано выполнение свойства **(Pr)** для группы G . С учетом максимальной T_x в T отсюда будет следовать выполнение свойства **(Pr+)** для группы G .

Пусть $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Проверим, что $G_{x,y} = 1$. Поскольку из $G_{x,y} \trianglelefteq G_y$ следует $G_{x,y} = 1$, то далее будем предполагать, что $G_{x,y} \not\trianglelefteq G_y$. Покажем, что это приведет к противоречию.

Случай 1.1. $T \cong E_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong d.(L_2(q) \times L_6^\epsilon(q)).de$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$, $d = (2, q-1)$ и $e = (3, q-\epsilon)$.

Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому имеем $d = 1$ и $p = 2$. Из [23, (1.8)] следует, что $H \cong A_1 \circ A_5$ (A_1, A_5 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $A_5(K)$ соответственно), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет в указанных обозначениях следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\mathcal{L}(A_1) \oplus \mathcal{L}(A_5) \oplus (1 \otimes 00100).$$

Пусть A, B — подгруппы группы G_x такие, что $A \cong L_2(q)$, $B \cong L_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong (A \times B).e$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $\text{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $\text{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\text{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Из [12, разд. 2.11] и [13, теорема 2.3(3)] следует, что неприводимые слагаемые векторного пространства $\mathcal{L}(R)$ как KH -модуля останутся неприводимыми при ограничении на G_x . Так как A сопряжена в G с D , то A_1^F и D имеют эквивалентные K -представления на $\mathcal{L}(R)$.

Поскольку A_1^F действует тривиально на $\mathcal{L}(A_5)$, а D не имеет на $\mathcal{L}(A_1)$ одномерных инвариантных подпространств, то $1 \otimes 00100$ как KD -модуль имеет прямое одномерное слагаемое. В силу [9, теорема 2.1] KD -модуль 00100 имеет двумерное прямое слагаемое, при этом p не делит 2. Противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.2. $T \cong E_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong e.(L_3^\epsilon(q))^3.e^2.S_3$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$ и $e = (3, q - \epsilon)$.

Из [17, пример 1.4] и предложения 3 следует, что для группы подстановок G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.3. $T \cong E_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong f.(L_3(q^2) \times L_3^{-\epsilon}(q)).g.2$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$, $f = (3, q + \epsilon)$ и $g = (3, q^2 - 1)$.

Если $f = 3$, то $Z(G_x) \neq 1$. Поэтому, не теряя общности далее считаем, что $f = 1$, т.е. $(3, q + \epsilon) = 1$. Поскольку из [11] следует, что при $\epsilon = -1$ должно выполняться $(3, q - 1) = 3$, то имеем $\epsilon = 1$, $(3, q + 1) = 1$, $g = (3, q^2 - 1) = (3, q - 1)$ и $G_x \cong (SL_3(q^2) \times SU_3(q)).2$. Следуя [7], рассмотрим представление группы $G \cong E_6(q)$ на 27-мерном пространстве V над \mathbb{F}_q . Согласно [7, (3.3)] существуют 9-мерное подпространство U и 18-мерное подпространство W пространства V и подгруппа $M \cong SU_3(q)$ группы G такие, что $V = U \oplus W$, $U = C_V(M)$, $C_G(M) \cong SL_3(q^2)$ и группа $N_G(W)$ имеет вид $MC_G(M)\langle t \rangle$, где t индуцирует графовый автоморфизм на $C_G(M)$. Если \mathbb{K} — квадратичное расширение поля \mathbb{F}_q , то (см. [7, (3.3)]) подпространство W , рассматриваемое как $\mathbb{K}(MC_G(M))$ -модуль, является \mathbb{K} -тензорным произведением естественных модулей для $M \cong SU_3(q)$ и $C_G(M) \cong SL_3(q^2)$. Из [7, (3.3.4)] следует, что тензорное произведение $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}_q} C_V(M)$ изоморфно как $\mathbb{K}C_G(M)$ -модуль тензорному произведению $N \otimes N^\sigma$, где N — естественный $\mathbb{K}C_G(M)$ -модуль и $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F}_q)$.

Поскольку в группе G имеется один класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных G_x , и никакая не входящая в этот класс максимальная подгруппа группы G не содержит подгрупп, изоморфных G_x (см. [6, разд. 9; 7, (3.3)]), можно считать, что $G_x = N_G(W)$. Положим $A = M$ и $B = C_G(M)$. Тогда $\text{soc}(G_x) = A \times B$. С учетом $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \not\trianglelefteq G_y$ получаем, что $G_{x,y} \in \{A, B\}$ и подгруппа $G_{x,y}$ сопряжена в группе G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку A не содержит подгрупп, изоморфных группе B , подгруппа D сопряжена в группе G с A . Так как A действует тривиально на $U = C_V(M)$, по теореме Крулля — Шмидта (см. [5, (4.15)]) разложение пространства V на неразложимые относительно D подпространства должно содержать не менее 9 одномерных подпространств. Однако легко показать (используя [3, предложение 12]), что V имеет единственное одномерное D -инвариантное подпространство. Противоречие.

Случай 1.4. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong d.(L_2(q) \times P\Omega_{12}^+(q)).d$, где $d = (2, q - 1)$.

Пусть A, B — подгруппы G_x такие, что $A \cong L_2(q)$, $B \cong P\Omega_{12}^+(q)$ и $G_x \cong d.(A \times B).d$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $\text{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $q = 2$ или $\text{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому $\text{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Но тогда получаем противоречие с предложением 9.

Случай 1.5. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong e.(L_3^\epsilon(q) \times L_6^\epsilon(q)).de.2$, где $\epsilon \in \{-1, +1\}$, $e = (3, q - \epsilon)$ и $d = (2, q - 1)$.

Если $e = 3$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому имеем $e = 1$. Из [23, (1.8)] следует, что $H \cong A_2 \circ A_5$ (A_2 и A_5 — полупростые алгебраические группы типов $A_2(K)$ и $A_5(K)$ соответственно), при этом векторное пространство $\mathcal{L}(R)$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\mathcal{L}(A_2) \oplus \mathcal{L}(A_5) \oplus (10 \otimes 01000) \oplus (01 \otimes 00010).$$

Пусть A, B — подгруппы G_x такие, что $A \cong L_3^\epsilon(q)$, $B \cong L_6^\epsilon(q)$ и $G_x \cong (A \times B).d.2$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \not\trianglelefteq G_y$, то $\text{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Из [12, разд. 2.11] и [13, теорема 2.3(3)] следует, что неприводимые слагаемые векторного пространства $\mathcal{L}(R)$ как KH -модуля останутся неприводимыми при ограничении на G_x . Так как A сопряжена в G с D , то A_2^F и D имеют эквивалентные K -представления на $\mathcal{L}(R)$. Поскольку A_2^F действует тривиально на $\mathcal{L}(A_5)$, а D не имеет на $\mathcal{L}(A_2)$ одномерных инвариантных подпространств, $(10 \otimes 01000) \oplus (01 \otimes 00010)$ как KD -модуль имеет прямое одномерное слагаемое. Без ограничения общности будем считать, что $10 \otimes 01000$ как KD -модуль имеет прямое одномерное слагаемое. В силу [9, теорема 2.1] KD -модуль 01000 имеет трехмерное прямое слагаемое, дуальное к слагаемому 10 . Но тогда KD -модуль $10 \otimes 01000$ содержит двумерное неразложимое прямое слагаемое. Противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)$ как KA -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 1.6. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong d^2 \cdot (L_2(q)^3 \times P\Omega_8^+(q)) \cdot d^3 \cdot S_3$, где $d = (2, q - 1)$, а d^2 и d^3 обозначают абелевы группы порядков d^2 и d^3 соответственно.

Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому имеем $d = 1$. Если $F^*(G_{x,y})$ не содержит прямых множителей, изоморфных $L_2(q)$, или содержит прямой множитель, изоморфный $P\Omega_8^+(q)$, то с учетом $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ имеем, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее предполагаем, что $F^*(G_{x,y})$ — прямое произведение групп, изоморфных $L_2(q)$.

Поскольку из [17] следует, что действие G_x сопряжением на прямых множителях вида $L_2(q)$ группы G_x транзитивно, то $F^*(G_{x,y}) \cong L_2(q)^3$ и, следовательно, $P\Omega_8^+(q)$ содержит подгруппу J , изоморфную $L_2(q)^3$. Из [14] следует, что тогда J содержится в подгруппе группы $P\Omega_8^+(q)$ вида $[q^{11}] : (\Omega_4^+(q) \times L_2(q))$ и, следовательно, $C_{P\Omega_8^+(q)}(J) \neq 1$. Противоречие.

Случай 1.7. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong (L_2(q^3) \times {}^3D_4(q)) \cdot 3d$, где $d = (2, q - 1)$.

Пусть A, B — подгруппы G_x такие, что $A \cong L_2(q^3)$, $B \cong {}^3D_4(q)$ и $G_x \cong (A \times B) \cdot 3d$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, $\text{soc}(G_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. В случае, когда $\text{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$, очевидно, что для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Поэтому далее рассмотрим оставшийся случай, когда $\text{soc}(G_{x,y}) = A$ и A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Из [15] следует, что если H — подгруппа B , изоморфная A , то $C_B(H) \neq 1$. Следовательно, $N_G(A)$ не содержится в G_x . Противоречие.

Случай 1.8. $T \cong E_7(q)$ и $G_x \cong d^3 \cdot (L_2(q)^7) \cdot d^4 \cdot L_3(2)$, где $q > 2$, $d = (2, q - 1)$, а d^3 и d^4 обозначают абелевы группы порядков d^3 и d^4 соответственно.

Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и получаем противоречие с предложением 4. Поэтому $d = 1$. Из [17] следует, что $L_3(2)$ действует дважды транзитивно на прямых множителях группы $\text{soc}(G_x)$, изоморфных $L_2(q)$. Поэтому либо $F^*(G_{x,y}) = 1$, либо $F^*(G_{x,y}) \cong L_2(q)^7$. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, для группы G выполняется свойство **(Pr)**.

Случай 2. Для G_x выполняется утверждение II предложения 8.

Имеем $G_x = N_G(E)$, где E — элементарная абелева группа из [24, теорема 1(III)]. В частности, группа G_x имеет вид $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа. Следовательно, по предложению 7 для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 3. Для G_x выполняется утверждение III предложения 8.

Имеем $G_x = C_G(\tau)$, где τ — автоморфизм простого порядка группы $\text{soc}(G)$, причем τ является либо полевым автоморфизмом, либо графовым автоморфизмом, либо произведением графового и полевого автоморфизмов группы $\text{soc}(G)$. Из доказательства [18, лемма 3.1] следует, что в этом случае либо $F^*(G_x)$ является простой группой, либо $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$. Если $F^*(G_x)$ является простой группой, то по предложению 7 для группы G выполняется свойство **(Pr+)**. Если $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$, то $Z(G_x) \neq 1$. Противоречие с предложением 4.

Случай 4. $G = R^F$ и $G_x = H^F$, где H — F -инвариантная замкнутая подгруппа группы R и для G_x выполняется утверждение IV предложения 8, т. е. $F^*(G_x) = A \times B$ и реализуется одна из следующих возможностей:

- а) $T \cong E_6^\pm(q)$, $A \cong L_3(q)$, $B \cong G_2(q)$;
- б) $T \cong E_6^\pm(q)$, $A \cong U_3(q)$, $B \cong G_2(q)$, $q > 2$;

- c) $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(G)$, $B \cong L_2(q)$, $p > 3$;
- d) $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$, $B \cong G_2(q)$, $p > 2$, $q > 3$;
- e) $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$, $B \cong F_4(q)$, $q > 3$;
- f) $T \cong E_7(q)$, $A \cong G_2(q)$, $B \cong PSp_6(q)$.

Предположим, что для группы подстановок G не выполняется свойство $(Pr+)$, т.е. для некоторого $y \in X \setminus \{x\}$ выполняется $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$, $F(T_{x,y}) = 1$ и $N_T(T_{x,y}) = T_x$. Покажем, что это невозможно.

Сначала докажем, что $\text{soc}(T_{x,y}) \in \{A, B\}$. Имеем $T_x \trianglelefteq G_x$ и $G_x/T_x = G_x/(G_x \cap T) \cong G_x T/T = G/T$. Отсюда получаем, что G_x/T_x — разрешимая группа и, следовательно, $\text{soc}(G_x) = A \times B \trianglelefteq T_x$. Поскольку $\text{soc}(G_x) = F^*(G_x)$, то

$$C_{G_x}(\text{soc}(G_x)) \leq \text{soc}(G_x).$$

Таким образом, группа $G_x/\text{soc}(G_x)$ изоморфно вкладывается в группу $\text{Out}(A \times B)$. Следовательно, группа $G_x/\text{soc}(G_x)$ разрешима и, с учетом $\text{soc}(G_x) \leq T_x$, получаем, что T_x имеет вид $(A \times B).H$, где H — разрешимая группа, действующая точно на $A \times B$. Поскольку $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$, отсюда следует, что $\text{soc}(T_{x,y}) \in \{1, A, B, A \times B\}$. Также $T_{x,y} \neq 1$, поэтому $\text{soc}(T_{x,y}) \neq 1$. Предположим, что $\text{soc}(T_{x,y}) = A \times B$. Тогда для $N := \text{soc}(T_{x,y}) \cap \text{soc}(G_y) \trianglelefteq T_{x,y}$ имеем $N \in \{1, A, B, A \times B\}$. Поскольку $\text{soc}(G_x) \neq \text{soc}(G_y)$, $N \neq A \times B$. Но тогда $G_y/\text{soc}(G_y)$ не является разрешимой группой. Противоречие с разрешимостью группы $G_x/\text{soc}(G_x)$. Следовательно, $\text{soc}(T_{x,y}) \in \{A, B\}$.

Покажем, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку $\text{soc}(T_{x,y}) \in \{A, B\}$, то $N \in \{1, \text{soc}(T_{x,y})\}$. Если $N = 1$, то $G_y/\text{soc}(G_y)$ не является разрешимой группой. Противоречие с разрешимостью группы $G_x/\text{soc}(G_x)$. Поэтому $N = \text{soc}(T_{x,y}) \leq \text{soc}(G_y) \cong A \times B$. Кроме того, $\text{soc}(T_{x,y}) \not\leq \text{soc}(G_y)$ (иначе $\text{soc}(T_{x,y}) \leq \langle T_x, G_y \rangle$, противоречие). Ввиду $N_G(\text{soc}(T_{x,y})) \not\leq G_x$ группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$.

Случай 4.1. $T \cong E_6^c(q)$ и либо $A \cong L_3(q)$ и $B \cong G_2(q)$, либо $A \cong U_3(q)$, $B \cong G_2(q)$ и $q > 2$.

Тогда (см. [19]) $H \cong A_2 \circ G_2$, где A_2, G_2 — полупростые алгебраические группы типов $A_2(K)$ и $G_2(K)$ соответственно.

Если $p > 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(11 \otimes 00) \oplus (00 \otimes 01) \oplus (11 \otimes 10),$$

где, согласно [20], $\dim(11) = 8$, $\dim(01) = 14$ и $\dim(10) = 7$. Таким образом, из разложения $\mathcal{L}(R)'$ получаем, что $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет 14 прямых одномерных слагаемых. Поскольку группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$, $\mathcal{L}(R)'$ имеет столько же прямых одномерных слагаемых и как KD -модуль. Противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство $(Pr+)$.

Если $p = 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(11 \otimes 00) \oplus \Delta(11 \otimes 10; 00 \otimes 01),$$

где, согласно [20], $\dim(11) = 7$, $\dim(01) = 7$, $\dim(10) = 7$ и $\Delta(11 \otimes 10; 00 \otimes 01)$ имеет вид $\mu \mid (11 \otimes 10) \oplus (00 \otimes 01) \mid \mu$, где $\dim(\mu) = 7$. Поскольку $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль и как KD -модуль имеет разное количество композиционных факторов размерности 7, получаем противоречие с тем, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Таким образом, для группы G выполняется свойство $(Pr+)$.

Если $p = 2$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(11 \otimes T(10)) \oplus (00 \otimes 01),$$

где, согласно [20], $\dim(11) = 8$, $\dim(01) = 6$ и $\dim(T(10)) = 9$. Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку все композиционные факторы $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуля имеют размерности 1 или 8, получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.2. $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$ и $B \cong L_2(q)$, где $p > 3$.

Из [19] следует, что $H \cong A_1 \circ A_1$, где A_1 — полупростая алгебраическая группа типа $A_1(K)$.

Если $p > 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes 8) \oplus (4 \otimes 6) \oplus (6 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (4 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 2).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет три прямых одномерных слагаемых, и $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет три прямых одномерных слагаемых. Следовательно, некоторый KD -модуль вида $s \otimes t$, где $(s, t) \in \{(2, 8), (4, 6), (6, 4), (2, 4), (4, 2)\}$, имеет прямое одномерное слагаемое, что противоречит [9, теорема 2.1] и [12, разд. 2.11]. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes T(8)) \oplus (4 \otimes 6) \oplus (6 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 2).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет три прямых одномерных слагаемых, и $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет три прямых одномерных слагаемых. Применяя [9, теорема 2.1] и [12, разд. 2.11] к слагаемым $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуля получаем противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 5$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes T(8)) \oplus (4 \otimes T(6)) \oplus (T(6) \otimes 4) \oplus (0 \otimes 2).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Так как $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль не имеет прямых одномерных слагаемых, то и $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль не имеет прямых одномерных слагаемых. Теперь, используя [20] и сравнивая композиционные факторы $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуля и $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуля, получаем противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.3. $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$ и $B \cong G_2(q)$, где $p > 2$ и $q > 3$.

Из [19] следует, что $H \cong A_1 \circ G_2$, где A_1 и G_2 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $G_2(K)$ соответственно.

Если $p > 3$ и $p \neq 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(4 \otimes 10) \oplus (2 \otimes 00) \oplus (2 \otimes 00) \oplus (0 \otimes 01).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет прямое неприводимое 14-мерное слагаемое (подпространство $0 \otimes 01$), и $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20] для подсчета размерностей неразложимых слагаемых в разложении $\mathcal{L}(R)'$

как KA -модуля, получаем противоречие. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 7$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$(4 \otimes 10) \oplus (2 \otimes T(20)) \oplus (0 \otimes 01).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет прямое неприводимое 14-мерное слагаемое, то и $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\Delta(4 \otimes 10; 0 \oplus 01) \oplus (2 \otimes 20) \oplus (2 \otimes 00).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет три прямых неприводимых 27-мерных слагаемых, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет три прямых неприводимых слагаемых размерности 27. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.4. $T \cong E_7(q)$, $A \cong L_2(q)$ и $B \cong F_4(q)$, где $q > 3$.

Из [19] следует, что $H \cong A_1 \circ F_4$, где A_1 и F_4 — полупростые алгебраические группы типов $A_1(K)$ и $F_4(K)$ соответственно.

Если $p \geq 3$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет одно из следующих разложений на неприводимые слагаемые:

$$(2 \otimes 0001) \oplus (2 \otimes 0000) \oplus (0 \otimes 1000)$$

или

$$(2 \otimes T(0001)) \oplus (0 \otimes 1000).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет прямое неприводимое 52-мерное слагаемое, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Если $p = 2$, то из [19, табл. (10.1)] следует, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\Delta(2 \otimes 0001; 0 \otimes 1000) \oplus (2 \otimes 0000).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет композиционный фактор размерности 26, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет композиционный фактор размерности 26. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Случай 4.5. $T \cong E_7(q)$, $A \cong G_2(q)$ и $B \cong PSp_6(q)$.

Из [19] следует, что $H \cong G_2 \circ C_3$, где G_2 и C_3 — полупростые алгебраические группы типов $G_2(K)$ и $C_3(K)$ соответственно. Кроме того, из [19, табл. (10.1)] получаем, что векторное пространство $\mathcal{L}(R)'$, рассматриваемое как KH -модуль, имеет, в зависимости от q , одно из следующих разложений на неприводимые слагаемые:

$$(10 \otimes 010) \oplus (01 \otimes 000) \oplus (00 \otimes 200),$$

или

$$\Delta(10 \otimes 010; 01 \otimes 000) \oplus (00 \otimes 200),$$

или

$$\Delta(10 \otimes 010; 00 \otimes 200) \oplus (01 \otimes 000).$$

Ранее мы показали, что группа $\text{soc}(T_{x,y})$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Поскольку во всех случаях, как показывает непосредственная проверка с использованием [20], $\mathcal{L}(R)'$ как KD -модуль имеет прямое неприводимое 21-мерное слагаемое, и $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуль имеет прямое неприводимое слагаемое такой размерности. Используя [20], получаем противоречие с разложением $\mathcal{L}(R)'$ как KA -модуля. Таким образом, для группы G выполняется свойство **(Pr+)**.

Доказательство теорем 1 и 2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коньгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 387–406.
2. **Коньгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них: случай, когда цоколь есть степень спорадической простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 159–167.
3. **Коньгин А.В.** К вопросу П. Камерона о примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 187–198.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2010. 253 с. URL: <http://math.nsc.ru/alglog/alglogf.html>.
5. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представления конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва: Наука, 1969. 669 с.
6. **Aschbacher M.** The 27-dimensional module for E_6 , I // Invent. Math. 1987. Vol. 89, no. 1. P. 159–195.
7. **Aschbacher M.** The 27-dimensional module for E_6 , III // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 321, no. 1. P. 45–84.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Benson D., Carlson J.** Nilpotent elements in the Green ring // J. Algebra. 1986. Vol. 104, no. 2. P. 329–350.
10. **Cameron P.J.** Suborbits in transitive permutation groups // Combinatorics / eds. M. Hall Jr. and J. H. van Lint (Proc. NATO Advanced Study Inst., Breukelen, 1974). Part 3: Combinatorial group theory. Math. Centre Tracts. No. 57. Amsterdam, 1974. P. 98–129.
11. **Deriziotis D.I., Liebeck M.W.** Centralizers of semisimple elements in finite twisted groups of Lie type // J. London Math. Soc. 1985. Vol. s2-31, iss. 1. P. 48–54.
12. **Humphreys J.E.** Modular representations of finite groups of Lie type Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 206 p.
13. **Hiss G.** Finite groups of Lie type and their representations // Groups St Andrews 2009 in Bath. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Vol. 1. P. 1–40. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 387).
14. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal group $P\Omega_8(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1985. Vol. 110, no. 1. P. 173–242.
15. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the Steinberg triality group ${}^3D_4(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 115, no. 1. P. 182–199.

16. **Liebeck M.W., Praeger Ch.E., Saxl J.** On the O’Nan–Scott theorem for finite primitive permutation groups // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* 1988. Vol. 44, no. 3. P. 389–396.
17. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // *Proc. London Math. Soc. (3).* 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.
18. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // *Geom. Dedicata.* 1990. Vol. 35, no. 1–3. P. 353–387.
19. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups // *Mem. Amer. Math. Soc.* 2004. Vol. 169, no. 802. 227 p.
20. **Lübeck F.** Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic // *LMS J. Comput. Math.* 2001. Vol. 4. P. 135–169.
21. **Malle G., Testerman D.** Linear algebraic groups and finite groups of Lie type. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 309 p.
22. **Reitz H.L.** On primitive groups of odd order // *Amer. J. Math.* 1904. Vol. 26. P. 1–30.
23. **Seitz G.M.** Maximal subgroups of exceptional algebraic groups // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1991. Vol. 90, no. 441. 197 p.
24. The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic / A.M. Cohen [et. al.]. // *Proc. London Mat. Soc. (3).* 1992. Vol. 64. P. 21–48.
25. **Weiss M.J.** On simply transitive groups // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1934. Vol. 40. P. 401–405.
26. **Wielandt H.** Finite permutation groups. New York: Acad. Press, 1964. 114 p.

Кобыгин Антон Владимирович

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: konygin@imm.uran.ru

Поступила 02.03.2015

УДК 512.542.5

О ГЛАВНЫХ ФАКТОРАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ ${}^3D_4(q^3)$ ¹

В. В. Кораблева

Для конечной простой группы скрученного лиева типа 3D_4 уточняется описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал. Доказана теорема, в которой для каждой параболической максимальной подгруппы группы ${}^3D_4(q^3)$ даются фрагменты главных рядов, входящие в унипотентный радикал этой параболической подгруппы. Приводится таблица, в которой указываются порождающие элементы и порядки соответствующих главных факторов.

Ключевые слова: конечная группа лиева типа, параболическая подгруппа, главный фактор, унипотентная подгруппа.

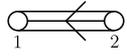
V. V. Korableva. On chief factors of parabolic maximal subgroups of the group ${}^3D_4(q^3)$.

For a finite simple group of twisted Lie type 3D_4 , the description of chief factors of a parabolic maximal subgroup that lie in its unipotent radical is refined. We prove a theorem, in which, for every parabolic maximal subgroup of the group ${}^3D_4(q^3)$, fragments of chief series that lie in the unipotent radical of this parabolic subgroup are given. Generating elements and orders of the corresponding chief factors are presented in a table.

Keywords: finite group of Lie type, parabolic subgroup, chief factor, unipotent subgroup.

Введение

Эта статья является продолжением работ [1–3], в которых было получено уточненное описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал, для всех конечных простых групп нормального лиева типа, за исключением специальных групп, для скрученных классических групп и для группы ${}^2E_6(q^2)$. Группа лиева типа над полем характеристики p называется *специальной*, если $p = 2$ для групп типа B_l , C_l , F_4 и $p \leq 3$ для групп типа G_2 . В настоящей работе для конечной простой группы ${}^3D_4(q^3)$ автор уточняет описание главных факторов каждой параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал. Наша цель — доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть $G = {}^3D_4(q^3)$ — конечная простая скрученная группа лиева типа и P_k — параболическая максимальная подгруппа группы G , полученная удалением k -й вершины диаграммы Дынкина типа G_2 в стандартном упорядочении вершин . Тогда фрагмент главного ряда группы P_k , входящий в ее унипотентный радикал U , имеет вид $U = U_1 > U_2 > U_3 > 1$, где $|U_1/U_2| = q^6$, $|U_2/U_3| = q^3$ и $|U_3| = q^2$ при $k = 1$, и $U = U_1 > U_2 > 1$, где $|U_1/U_2| = q^8$ и $|U_2| = q$ при $k = 2$.

Полезные следствия из доказательства этой теоремы составляют содержание двух таблиц, которые приведены в тексте работы.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Мы сохраняем обозначения и терминологию работы [2]. Напомним необходимые определения и обозначения (см. [4; 5]). Зафиксируем поле K и присоединенную группу Шевалле

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13–01–00469) и лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

$G = G(K)$ над полем K . Пусть Φ — система корней группы G , π — ее множество простых корней, Φ^+ — множество положительных корней в Φ относительно π , $X_\zeta = \{x_\zeta(t) \mid t \in K\}$ — корневая подгруппа G , соответствующая корню $\zeta \in \Phi$. Для любого подмножества J из π обозначим через Φ_J множество корней из Φ , натянутых на J , и положим $\Phi_J^+ = \Phi^+ \cap \Phi_J$. Зафиксируем параболическую подгруппу $P = P_J$, соответствующую подмножеству J из π . Известно разложение Леви подгруппы P : $P = UL$, где $U = \langle X_\zeta \mid \zeta \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+ \rangle$ — унитарный радикал и L — дополнение Леви в P . Для любого $\zeta \in \Phi^+$ имеем $\zeta = \zeta_J + \zeta_{J'}$, где $\zeta_J = \sum_{r \in J} c_r r$ и $\zeta_{J'} = \sum_{r \in \pi \setminus J} d_r r$ ($0 \leq c_r, d_r \in \mathbb{Z}$). Следуя [6], число $level(\zeta) = \sum_{r \in \pi \setminus J} d_r$ назовем *уровнем* корня ζ , а выражение $shape(\zeta) = \zeta_{J'}$ — *шейпом* корня ζ . Для натурального числа j положим $U_j = \langle X_\zeta \mid \zeta \in \Phi^+, level(\zeta) \geq j \rangle$. Фактор-группа U_j/U_{j+1} равна $\prod X_\zeta U_{j+1}/U_{j+1}$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем положительным корням ζ , для которых $level(\zeta) = j$. Для каждого шейпа S корня из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$ уровня j положим $V_S = \prod X_\zeta U_{j+1}/U_{j+1}$, где ζ пробегает множество корней из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$ уровня j и шейпа S . Тогда $U_j/U_{j+1} = \prod V_S$, где S пробегает множество различных шейпов корней уровня j из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$.

Пусть $\overline{G} = G(\overline{GF(p)})$, где $\overline{GF(p)}$ — некоторое алгебраическое замыкание конечного поля простого порядка p . Рассмотрим \overline{G} как алгебраическую группу присоединенного типа, и пусть \overline{G} неспециальна. Автоморфизм поля $\overline{GF(p)}$ может быть задан как отображение $x \mapsto x^{p^a}$ для $x \in \overline{GF(p)}$ и подходящего натурального числа a . Положим $q = p^a$ и обозначим соответствующий полевой автоморфизм группы \overline{G} через q . Обозначим через σ эндоморфизм алгебраической группы \overline{G} с конечным централизатором $\overline{G}_\sigma = \{g \in \overline{G} \mid g^\sigma = g\}$ (образ элемента g при отображении σ обозначаем через g^σ). Известно, что $\sigma = q\tau$, где τ — графовый автоморфизм группы \overline{G} (возможно, тривиальный). Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — подгруппа из \overline{G}_σ , порожденная всеми ее p -элементами. Тогда G является конечной группой лиева типа.

Далее будем различать обозначения подгрупп и элементов алгебраических групп, их отмечаем чертой сверху, а соответствующие им объекты конечных групп пишем без черты. В группе \overline{G} выбираем σ -инвариантную параболическую подгруппу $\overline{P} = \overline{U} \overline{L}$, где \overline{U} — унитарный радикал и \overline{L} — дополнение Леви в \overline{P} соответственно. Тогда $P = G \cap \overline{P}_\sigma$ является параболической подгруппой в группе G с унитарным радикалом $U = \overline{U}_\sigma$ и дополнением Леви $L = G \cap \overline{L}_\sigma$. Положим $L_0 = O^{p'}(L)$.

Пусть корни шейпа S имеют уровень j . Если $\overline{V}_S^\sigma \neq \overline{V}_S$ и $|\tau| = 3$, то $\overline{V}_S^{\sigma^3} = \overline{V}_S$ и σ^3 индуцирует линейное преобразование $GF(q^3)$ -пространства U_j/U_{j+1} . Аддитивная группа $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma \oplus \overline{V}_S^{\sigma^2})_\sigma$ порождается элементами вида $\overline{x}_\zeta(t)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\zeta^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\zeta^{\rho^2}}(t^{q^2})\overline{U}_{j+1}$, где t пробегает поле $GF(q^3)$ и ρ — подстановка системы корней Φ , соответствующая графовому автоморфизму τ . Обозначаем образ корня $\zeta \in \Phi$ при этом отображении через ζ^ρ и образ подмножества M из Φ — через M^ρ . Для корня $\zeta \in \Phi^+ \setminus \Phi_J$ уровня j и для $c, t \in GF(q^3)$ положим $c(\overline{x}_\zeta(t)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\zeta^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\zeta^{\rho^2}}(t^{q^2})\overline{U}_{j+1}) = \overline{x}_\zeta(ct)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\zeta^\rho}(c^q t^q)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\zeta^{\rho^2}}(c^{q^2} t^{q^2})\overline{U}_{j+1}$. Таким образом, группа $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma \oplus \overline{V}_S^{\sigma^2})_\sigma \cong (\overline{V}_S)_{\sigma^3}$ становится $GF(q^3)L$ -модулем.

Как частный случай теоремы 3 из [6] получается следующее

Предложение. Пусть $G = {}^3D_4(q^3)$ — конечная скрученная группа лиева типа, соответствующая эндоморфизму $q\tau$ простой алгебраической группы типа D_4 , $P = UL$ — параболическая подгруппа в G с унитарным радикалом U и дополнением Леви L в P . Тогда факторы нижнего центрального ряда группы U являются прямыми суммами главных факторов группы P , каждый из которых есть $GF(q)L$ -модуль или $GF(q^3)L$ -модуль.

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим систему корней Φ типа D_4 . Пусть p_1, p_2, p_3, p_4 — ее простые корни. Выпишем положительные корни системы Φ : $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4, p_2, p_2 + p_3, p_2 + p_3 + p_4, p_3, p_1 + p_2 + p_4, p_2 + p_4, p_4, p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4$ (см. [7]). Существует подстановка ρ системы Φ ,

индуцированная симметрией диаграммы Дынкина (см. рис. 1). Любая ρ -орбита корня $\zeta \in \Phi$ имеет вид $\{\zeta\}$ или $\{\zeta, \zeta^\rho, \zeta^{\rho^2}\}$. Укажем ρ -орбиты положительных корней: $\{p_1, p_3, p_4\}$, $\{p_1 + p_2, p_2 + p_4, p_2 + p_3\}$, $\{p_1 + p_2 + p_3, p_2 + p_3 + p_4, p_1 + p_2 + p_4\}$, $\{p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4\}$, $\{p_1 + p_2 + p_3 + p_4\}$, $\{p_2\}$.

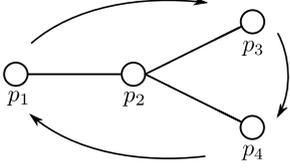


Рис. 1

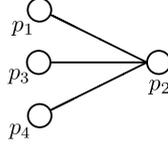


Рис. 2



Рис. 3

Рассмотрим две σ -инвариантные параболические подгруппы в группе \overline{G} , соответствующие подсистемам простых корней $J_1 = \{p_2\}$ и $J_2 = \{p_1, p_3, p_4\}$ (см. рис. 2).

Положим $\Phi^+ \setminus \Phi_{J_1}^+ = M_1 \cup M_1^\rho \cup M_1^{\rho^2} \cup N_1 \cup N_1^\rho \cup N_1^{\rho^2} \cup R_1$, где $M_1 = \{p_1, p_1 + p_2\}$, $M_1^\rho = \{p_3, p_2 + p_3\}$, $M_1^{\rho^2} = \{p_4, p_2 + p_4\}$, $N_1 = \{p_1 + p_2 + p_3\}$, $N_1^\rho = \{p_2 + p_3 + p_4\}$, $N_1^{\rho^2} = \{p_1 + p_2 + p_4\}$ и $R_1 = R_1^\rho = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4, p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4\}$. Корни из множеств $M_1, M_1^\rho, M_1^{\rho^2}, N_1, N_1^\rho, N_1^{\rho^2}$ и R_1 имеют шейки, равные $p_1, p_3, p_4, p_1 + p_3, p_3 + p_4, p_1 + p_4$ и $p_1 + p_3 + p_4$ соответственно. По [6, лемма 4] нижний центральный ряд группы \overline{U} имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > \overline{U}_3 > 1$ и $\overline{U}_1 = \prod \overline{X}_\zeta$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем корням $\zeta \in \Phi^+ \setminus \Phi_{J_1}^+$,

$$\begin{aligned} \overline{U}_1/\overline{U}_2 &= \prod_{\text{level}(\zeta)=1} \overline{X}_\zeta U_2/U_2 = (\overline{X}_{p_1} \overline{X}_{p_1+p_2} \overline{X}_{p_3} \overline{X}_{p_2+p_3} \overline{X}_{p_4} \overline{X}_{p_2+p_4}) U_2/U_2, \\ \overline{U}_2/\overline{U}_3 &= \prod_{\text{level}(\zeta)=2} \overline{X}_\zeta U_3/U_3 = (\overline{X}_{p_1+p_2+p_3} \overline{X}_{p_2+p_3+p_4} \overline{X}_{p_1+p_2+p_4}) U_3/U_3, \\ \overline{U}_3 &= \overline{X}_{p_1+p_2+p_3+p_4} \overline{X}_{p_1+2p_2+p_3+p_4}. \end{aligned}$$

По [6, теорема 2] имеем

$$\overline{U}_1/\overline{U}_2 \cong \overline{V}_{p_1} \oplus \overline{V}_{p_3} \oplus \overline{V}_{p_4}, \quad \overline{U}_2/\overline{U}_3 \cong \overline{V}_{p_1+p_3} \oplus \overline{V}_{p_3+p_4} \oplus \overline{V}_{p_1+p_4}, \quad \overline{U}_3 = \overline{V}_{p_1+p_3+p_4}.$$

Заметим, что $\overline{V}_{p_1}^{\sigma^2} = \overline{V}_{p_3}^\sigma = \overline{V}_{p_4}$, $\overline{V}_{p_1+p_3}^{\sigma^2} = \overline{V}_{p_3+p_4}^\sigma = \overline{V}_{p_1+p_4}$, $\overline{V}_{p_1+p_3+p_4} = \overline{V}_{p_1+p_3+p_4}^\sigma$, поэтому согласно доказательству [6, теорема 3] модули $(\overline{V}_{p_1} \oplus \overline{V}_{p_3} \oplus \overline{V}_{p_4})_\sigma$ и $(\overline{V}_{p_1+p_3} \oplus \overline{V}_{p_3+p_4} \oplus \overline{V}_{p_1+p_4})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q^3)L_0$ -модулями, а модуль $(\overline{V}_{p_1+p_3+p_4})_\sigma$ — абсолютно неприводимым $GF(q)L_0$ -модулем. Аддитивные группы $(\overline{V}_{p_1} \oplus \overline{V}_{p_3} \oplus \overline{V}_{p_4})_\sigma$, $(\overline{V}_{p_1+p_3} \oplus \overline{V}_{p_3+p_4} \oplus \overline{V}_{p_1+p_4})_\sigma$ и $(\overline{V}_{p_1+p_3+p_4})_\sigma$ порождаются элементами вида $\overline{x}_\beta(u)\overline{U}_2 + \overline{x}_{\beta^\rho}(u^q)\overline{U}_2 + \overline{x}_{\beta^{\rho^2}}(u^{q^2})\overline{U}_2$, $\overline{x}_{p_1+p_2+p_3}(u)\overline{U}_3 + \overline{x}_{p_3+p_2+p_4}(u^q)\overline{U}_3 + \overline{x}_{p_1+p_2+p_4}(u^{q^2})\overline{U}_3$ и $\overline{x}_\alpha(t)$ соответственно, где u, t пробегает поле $GF(q^3)$, $t^q = t$, $\beta \in M_1$ и $\alpha \in R_1$.

Множество $\Phi^+ \setminus \Phi_{J_2}^+$ состоит из элементов $p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4, p_2, p_2 + p_3, p_2 + p_3 + p_4, p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4, p_1 + p_2 + p_4, p_2 + p_4$. Корень $p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4$ имеет шейп, равный $2p_2$, а остальные корни из $\Phi^+ \setminus \Phi_{J_2}^+$ — равный p_2 . Нижний центральный ряд группы \overline{U} имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > 1$ и $\overline{U}_1 = \prod \overline{X}_\zeta$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем корням $\zeta \in \Phi^+ \setminus \Phi_{J_2}^+$, а $\overline{U}_2 = \overline{X}_{p_1+2p_2+p_3+p_4}$. Представим множество $\Phi^+ \setminus \Phi_{J_2}^+$ в виде объединения четырех попарно не пересекающихся подмножеств: $M_2 = \{p_2, p_1 + p_2 + p_3 + p_4, p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4\}$, $N_2 = \{p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3\}$, $N_2^\rho = \{p_2 + p_3, p_2 + p_3 + p_4\}$ и $N_2^{\rho^2} = \{p_2 + p_4, p_1 + p_2 + p_4\}$. Множества M_2 и $N_2 \cup N_2^\rho \cup N_2^{\rho^2}$ являются объединениями одноэлементных и трехэлементных ρ -орбит положительных корней соответственно. Имеем $U = \overline{U}_\sigma = \langle x_\alpha(t), x_\beta(u)x_{\beta^\rho}(u^q)x_{\beta^{\rho^2}}(u^{q^2}) \mid \alpha \in M_2, \beta \in N_2, t \in$

$GF(q), u \in GF(q^3)$). Так как $\bar{V}_{p_2}^\sigma = (\bar{U}_1/\bar{U}_2)^\sigma = \bar{V}_{p_2}$ и $\bar{V}_{2p_2}^\sigma = (\bar{U}_2)^\sigma = \bar{V}_{2p_2}$, то согласно доказательству [6, теорема 3] модули $(\bar{V}_{p_2})_\sigma$ и $(\bar{V}_{2p_2})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$ -модулями. Найдем их строение. Аддитивная группа $(\bar{V}_{p_2})_\sigma$ порождается элементами вида $\bar{x}_\alpha(t)\bar{U}_2$ и $\bar{x}_\beta(u)\bar{U}_2 + \bar{x}_{\beta\rho}(u^q)\bar{U}_2 + \bar{x}_{\beta\rho^2}(u^{q^2})\bar{U}_2$, где u, t пробегает поле $GF(q^3)$, $t^q = t$, $\alpha \in M_2 \setminus \{p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4\}$ и $\beta \in N_2$, а $(\bar{V}_{2p_2})_\sigma = \{x_{p_1+2p_2+p_3+p_4}(t) \mid t \in GF(q)\}$. Представим полученные результаты в виде табл. 1. Второй и третий столбцы табл. 1 содержат корни α и β для порождающих элементов неприводимого модуля, указанного в первом столбце.

Система корней Φ типа D_4 разбивается на двенадцать классов вида $\{r, r^\rho, r^{\rho^2}\}$ или $\{r\}$, где $r \in \Phi$, образующих систему корней $\tilde{\Phi}$ типа G_2 (см. [4]). Обозначим эти классы (корни) в $\tilde{\Phi}$ через $\alpha_1\tilde{p}_1 + \alpha_2\tilde{p}_2$ в соответствии с обозначениями системы корней типа G_2 (см. рис. 3). Выпишем положительные корни системы $\tilde{\Phi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \{p_1, p_3, p_4\}, \tilde{p}_2 = \{p_2\}, 2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \{p_1 + p_2 + p_3, p_1 + p_2 + p_4, p_2 + p_3 + p_4\}, \\ \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 &= \{p_1 + p_2, p_2 + p_4, p_2 + p_3\}, 3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 = \{p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4\}, \\ 3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 &= \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4\}. \end{aligned}$$

Корневая подгруппа группы ${}^3D_4(q^3)$ имеет вид $X_\lambda^1 = \{x_\lambda(t) = x_r(t) \mid t = t^q \in GF(q^3)\}$ и порядок q для класса $\lambda = \{r\}$ и вид $X_\mu^1 = \{x_\mu(t) = x_r(t)x_{r^\rho}(t^q)x_{r^{\rho^2}}(t^{q^2}) \mid t \in GF(q^3)\}$ и порядок q^3 для класса $\mu = \{r, r^\rho, r^{\rho^2}\}$. Переписав табл. 1 в терминах системы корней G_2 , мы получим табл. 2. В первом столбце табл. 2 приведены главные факторы $V_S = V_{j\tilde{p}_k}$ для $j \in \{1, 2, 3\}$, входящие в унитарный радикал каждой параболической максимальной подгруппы P_k скрученной группы лиева типа ${}^3D_4(q^3)$. Группа P_k получается удалением k -й вершины диаграммы Дынкина системы корней G_2 , $k \in \{1, 2\}$. Корневые подгруппы X_λ^1 и X_μ^1 параметризуются элементами системы корней типа G_2 , корни λ и μ выписываются во втором и третьем столбцах табл. 2 соответственно. Теперь порядки q^m главных факторов V_S легко вычисляются, запишем m в четвертый столбец.

Теорема доказана.

Т а б л и ц а 1

Неприводимые модули для $O^{p'}((D_4(\overline{GF(p)}))_\sigma)$

	α	β
$(\bar{V}_{p_1} \oplus \bar{V}_{p_3} \oplus \bar{V}_{p_4})_\sigma$	–	$p_1, p_1 + p_2$
$(\bar{V}_{p_1+p_3} \oplus \bar{V}_{p_3+p_4} \oplus \bar{V}_{p_1+p_4})_\sigma$	–	$p_1 + p_2 + p_3$
$(\bar{V}_{p_1+p_3+p_4})_\sigma$	$p_1 + p_2 + p_3 + p_4,$ $p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4$	–
$(\bar{V}_{p_2})_\sigma$	$p_2, p_1 + p_2 + p_3 + p_4$	$p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3$
$(\bar{V}_{2p_2})_\sigma$	$p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4$	–

Т а б л и ц а 2

Главные факторы параболических максимальных подгрупп из ${}^3D_4(q^3)$

V_S	λ	μ	m
$V_{1\tilde{p}_1} = \prod_\mu X_\mu^1 U_2 / U_2$	–	$\tilde{p}_1, \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$	6
$V_{2\tilde{p}_1} = X_\mu^1 U_3 / U_3$	–	$2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$	3
$V_{3\tilde{p}_1} = \prod_\lambda X_\lambda^1$	$3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, 3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2$	–	2
$V_{1\tilde{p}_2} = \prod_{\lambda, \mu} X_\lambda^1 X_\mu^1 U_2 / U_2$	$\tilde{p}_2, 3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$	$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, 2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$	8
$V_{2\tilde{p}_2} = X_\lambda^1$	$3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2$	–	1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 764–782.
2. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^2E_6(q^2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 230–237.
3. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп скрученных классических групп // Мальцевские чтения: тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск, 2014. С. 64.
4. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972. 332 p.
5. **Carter R.W.** Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters. L.: John Wiley and Sons, 1993. 544 p.
6. **Azad H., Barry M., Seitz G.** On the structure of parabolic subgroup // Comm. Algebra. 1990. Vol. 18, no. 2. P. 551–562.
7. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 334 с.

Кораблева Вера Владимировна

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Челябинский государственный университет,

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: vvk@csu.ru

Поступила 3.03.2015

УДК 512.5

О ЗАМКНУТОСТИ КОВРОВ ЛИЕВА ТИПА НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

С. К. Куклина, А. О. Лихачёва, Я. Н. Нужин

Для достаточно широкого класса коммутативных колец доказано существование незамкнутых неприводимых ковров лиева типа, ассоциированных с любой системой корней.

Ключевые слова: группа Шевалле над коммутативным кольцом, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа.

S. K. Kuklina, A. O. Likhacheva, Ya. N. Nuzhin. On closeness of carpets of Lie type over commutative rings.

For a wide class of commutative rings, the existence of non-closed irreducible carpets of Lie type associated with any root system is proved.

Keywords: Chevalley group over a commutative ring, carpet of additive subgroups, carpet subgroup.

1. Введение

Набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ коммутативного кольца K с условиями $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}$ для всех попарно различных i, r, j называется элементарным матричным ковром степени n над кольцом K . Всякий элементарный ковер \mathfrak{A} определяет элементарную ковровую подгруппу $E(\mathfrak{A})$ специальной линейной группы $SL(n, K)$. По определению $E(\mathfrak{A})$ порождается трансвекциями $t_{ij}(u)$, $u \in \mathfrak{A}_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Ковер \mathfrak{A} называется замкнутым, если подгруппа $E(\mathfrak{A})$ не содержит новых трансвекций.

Понятия элементарного матричного ковра и ковровой подгруппы были перенесены разными способами на группы лиева типа и в этом общем случае роль трансвекций играют корневые элементы $x_r(u)$, $r \in \Phi$, $u \in K$, группы Шевалле типа Φ над кольцом K . Мы следуем определениям В. М. Левчука из [1], в которых условия ковровости определяются коммутаторной формулой для корневых элементов. Краткую историю развития и приложений данных понятий можно найти, например, в [2; 3]. Отметим, что по лиевой терминологии элементарный матричный ковер степени n — это ковер типа $\Phi = A_{n-1}$.

Назовем ковер типа Φ неприводимым (соответственно унитарным), если все его аддитивные подгруппы ненулевые (соответственно нулевые все аддитивные подгруппы, индексированные отрицательными корнями). Любой ковер типа Φ над полем является объединением унитарного ковra и определенного числа неприводимых ковров, соответствующих неразложимым подсистемам корней системы Φ [4, лемма 2]. Всякий унитарный ковер замкнут, поэтому первостепенный интерес вызывают неприводимые ковры.

В. А. Койбаев указал пример незамкнутого неприводимого ковra типа A_l над полем рациональных функций [5]. Мы строим примеры незамкнутых неприводимых ковров любого типа Φ над различными коммутативными кольцами. В наших примерах все подковры $\{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 замкнутые, за исключением лишь одного. Поэтому данные примеры являются предельными в связи со следующим известным вопросом В. М. Левчука [6, вопрос 15.46]: *верно ли, что для замкнутости ковra \mathfrak{A} типа Φ над полем K необходима и достаточна замкнутость его подковров $\{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1?*

Основным результатом статьи является

Теорема. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей и в K существуют ненулевой идеал I и аддитивная подгруппа J такие, что $\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J$. Тогда для любой системы корней Φ существует неприводимый незамкнутый ковер типа Φ над K .

2. Определения и обозначения

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l , $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K . Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы, и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

Назовем (элементарным) ковром типа Φ ранга l над K всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi, \quad i, j > 0, \quad (2.1)$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi.$$

Данное определение ковра принадлежит В. М. Левчуку [1]. Всякий ковер \mathfrak{A} типа Φ над K определяет ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle$ группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ обозначает подгруппу, порожденную подмножеством M некоторой группы. Ковер \mathfrak{A} типа Φ над кольцом K называется замкнутым, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. $E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$.

В статье приняты следующие обозначения: \mathbb{Z} — кольцо целых чисел, $A + B$ — подгруппа, порожденная аддитивными подгруппами A, B некоторого кольца, $x^{-1}y^{-1}xy = [x, y]$.

3. Примеры колец, над которыми замкнут любой ковер

При $\Phi = A_{n-1}$ ковер \mathfrak{A} лиева ранга $n - 1$ совпадает с элементарным матричным ковром

$$\{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \quad (3.1)$$

степени n , и в этом частном случае соотношения (2.1) запишутся в более простом виде $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}$ для всех попарно различных i, r, j . Назовем элементарный матричный ковер степени $n \geq 2$ дополняемым до полного матричного ковра

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \quad (3.2)$$

или, кратко, дополняемым, если можно доопределить диагональные множества \mathfrak{A}_{ii} , $1 \leq i \leq n$, так, чтобы $\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}$, $1 \leq i, r, j \leq n$. Хорошо известно, что элементарный матричный ковер (3.1) дополняется до полного ковра (3.2) тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j \quad (3.3)$$

(см., например, [7, с. 25] или [1, лемма 6]). Это дополнение можно получить, положив

$$\mathfrak{A}_{ii} = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

и в этом случае множество матриц вида $e + \sum_{i,j=1}^n \mathfrak{A}_{ij} e_{ij}$ является полугруппой относительно матричного умножения. Здесь e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах — нули. Элементарная матричная ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ по определению порождается трансвекциями $t_{ij}(u) = e + ue_{ij}$, $u \in \mathfrak{A}_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Поэтому любой дополняемый элементарный матричный ковер является замкнутым ковром.

Если все аддитивные подгруппы \mathfrak{A}_{ij} являются идеалами, то включения (3.3) выполняются. Таким образом, справедлива

Лемма. *Любой элементарный матричный ковер идеалов над коммутативным кольцом является замкнутым ковром.*

В кольце целых чисел любая аддитивная подгруппа является идеалом. Поэтому лемма дает

Предложение. *Любой элементарный матричный ковер аддитивных подгрупп над кольцом целых чисел является замкнутым ковром.*

В [4, с. 511] указаны необходимые и достаточные условия замкнутости ковра аддитивных подгрупп типа Φ ранга l над локально конечным полем. Авторы выдвигают следующую гипотезу.

Гипотеза. *Любой неприводимый ковер типа Φ ранга $l \geq 2$ над локально конечным полем является замкнутым ковром.*

Известная теорема Л. Диксона о порождении специальной линейной группы степени 2 над конечным полем двумя трансвекциями показывает, что ограничение $l \geq 2$ в гипотезе является существенным.

4. Доказательство теоремы

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, обладающее ненулевым идеалом I и аддитивной подгруппой J такими, что

$$\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J. \quad (4.1)$$

Для системы корней Φ ранга $l \geq 2$ определим набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\} \quad (4.2)$$

следующим образом. Фиксируем корень $p \in \Phi$ и полагаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_p &= \mathbb{Z} + I, \\ \mathfrak{A}_{-p} &= \mathbb{Z} + I + J, \\ \mathfrak{A}_r &= I, \quad r \neq \pm p. \end{aligned}$$

Покажем, что набор \mathfrak{A} является ковром. Для сокращения записи положим

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Z} + I, \\ B &= \mathbb{Z} + I + J. \end{aligned}$$

Если сумма $r + s$ корней r, s является корнем, то все три корня $r, s, r + s$ лежат в некоторой подсистеме корней Φ_2 ранга 2 системы Φ . Поэтому достаточно проверить условия ковровости для систем корней типа A_2, B_2 и G_2 . Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ_2 .

Для типа A_2 коммутаторная формула имеет вид

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu). \quad (4.3)$$

При $p = a$ формула (4.3) и условие ковровости дают следующие шесть импликаций:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_b &\subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_{a+b} \mathfrak{A}_{-b} &\subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A, \\ \mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{-b} &\subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{a+b} &\subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow BI \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_{-a-b} &\subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow AI \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_{-a-b} \mathfrak{A}_b &\subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow II \subseteq B. \end{aligned}$$

Так как идеал I лежит в пересечении $A \cap B$, то включения, указанные в правых частях этих шести импликаций, выполняются. Для других $p \in \Phi_2$ ситуация подобная. Если $p \notin \Phi_2$, то формула (4.3) и условие ковровости дают импликацию $\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s} \Rightarrow II \subseteq I$, которая справедлива, так как I — идеал.

Для типа B_2 имеются два вида коммутаторной формулы:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u), \quad (4.4)$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu). \quad (4.5)$$

При $p = a$ формула (4.4) дает следующие восемь импликаций:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_b &\subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_a^2 \mathfrak{A}_b &\subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow A^2I \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{-b} &\subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_{-a}^2 \mathfrak{A}_{-b} &\subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow B^2I \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_{a+b} \mathfrak{A}_{-b} &\subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A, \\ \mathfrak{A}_{a+b}^2 \mathfrak{A}_{-b} &\subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow I^2I \subseteq I, \\ \mathfrak{A}_{-a-b} \mathfrak{A}_b &\subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow I \subseteq B, \\ \mathfrak{A}_{-a-b}^2 \mathfrak{A}_b &\subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow I^2I \subseteq I. \end{aligned}$$

При $p = a$ формула (4.5) дает еще четыре импликации:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_{a+b} &\subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow 2AI \subseteq I, \\ 2\mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{a+b} &\subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow 2BI \subseteq I, \\ 2\mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_{-a-b} &\subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow 2AI \subseteq I, \\ 2\mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{-a-b} &\subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow 2BI \subseteq I. \end{aligned}$$

Так же, как и для типа A_2 , включения, указанные в правых частях всех таких импликаций, выполняются в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Случай $p \neq a$ рассматривается аналогично.

Для типа G_2 имеются четыре вида коммутаторной формулы:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \quad (4.6)$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2)x_{3a+b}(\pm 3t^2u), \quad (4.7)$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(\pm 3tu), \quad (4.8)$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(\pm tu). \quad (4.9)$$

Мы не будем подробно выписывать условия ковровости для этого типа. В силу формул (4.6)–(4.9) для подходящих $n, m, c \in \{1, 2, 3\}$ все они имеют вид $cA^n I^m \subseteq X$, $cB^n I^m \subseteq X$ или $cI^n I^m \subseteq X$ (как, впрочем, и для типов A_2 и B_2), где X есть A , B или I . Они выполняются снова только в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Таким образом, набор аддитивных подгрупп \mathfrak{A} является ковром.

Покажем незамкнутость ковра \mathfrak{A} . В силу неравенства (4.1) в кольце K существует элемент t такой, что $t \in \mathfrak{A}_{-p}$, но $t \notin \mathfrak{A}_p$. Так как $1 \in \mathfrak{A}_p \cap \mathfrak{A}_{-p}$, то $n_p = x_p(1)x_{-p}(-1)x_p(1) \in E(\Phi, \mathfrak{A})$. Отсюда $n_p^{-1}x_{-p}(t)n_p = x_p(-t) \in E(\Phi, \mathfrak{A})$ и, следовательно, ковер \mathfrak{A} не является замкнутым.

Итак, теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Тройка $K = F[x]$, $I, J = \mathbb{Z}x$, где $F[x]$ — кольцо многочленов над полем F , I — его идеал, порожденный некоторым многочленом степени не меньше 2, удовлетворяет предположению теоремы. Таким образом, множество колец, удовлетворяющих условию (4.1), не пусто.

З а м е ч а н и е 2. По лемме, за исключением лишь одного подковра $\{\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_{-p}\}$, все другие подковры $\{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 ковры (4.2) являются замкнутыми.

Авторы благодарны профессору В. М. Левчуку за внимание к работе и полезные советы по изложению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левчук В. М.** Параболические подгруппы некоторых АВА-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
2. **Нужин Я. Н.** Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сибирского федерального ун-та. 2011. Т. 4, № 4. С. 527–535.
3. **Койбаев В. А., Нужин Я. Н.** Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 1. С. 75–84.
4. **Левчук В. М.** О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 504–517.
5. **Койбаев В. А.** Элементарные сети в линейных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010. 219 с.
7. **Боревич З. И.** О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1978. Т. 75. С. 22–31.

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Поступила 02.02.15

Куклина Светлана Константиновна
магистрант
Сибирский федеральный университет
e-mail: svetlya4ok-03@mail.ru

Лихачева Алёна Олеговна
магистрант
Сибирский федеральный университет
e-mail: likhacheva.alyona@mail.ru

УДК 512.554

СТРОЕНИЕ КВАЗИПОЛЕЙ МАЛЫХ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ¹

В. М. Левчук, П. К. Штуккерт

Изучаются вопросы строения конечного квазиполя: максимальные подполя, порядки элементов его мультипликативной лупы и гипотеза об однопорочденности лупы конечного полуполя. Исследовано строение полуполей порядка 16, полуполя Кнута — Руа порядка 32, опровергающего гипотезу Венэ, и представителей изотопных классов квазиполей порядков 16 и 32.

Ключевые слова: конечное квазиполе, максимальное подполе, порядок ненулевого элемента, гипотеза об однопорочденности мультипликативной лупы конечного полуполя.

V. M. Levchuk, P. K. Shtukkert. The structure of quasifields of small even orders.

We study the structure of a finite quasifield: maximal subfields, the orders of nonzero elements of its multiplicative loop, and the conjecture that the multiplicative loop of any finite semifield is one-generated. We consider the structure of all semifields of order 16; the Knuth–Rua semifield of order 32, which disproves Wene’s conjecture; and representatives of isotope classes of quasifields of orders 16 and 32.

Keywords: finite quasifield, maximal subfield, order of a nonzero element, conjecture that the multiplicative loop of any finite semifield is one-generated.

Введение

Ослабление свойств коммутативности и ассоциативности полей приводит к понятию полуполя (“квазитело” в терминологии А. Г. Куроша [1, II.6.1]); это кольцо S , в котором ненулевые элементы по умножению образуют лупу S^* . С другой стороны, исследования недезарговых проективных плоскостей трансляций, восходящие к работам О. Веблена – Дж. Веддерберна [2] и Л. Диксона [3] начала 1900-х гг., опираются на более общее понятие квазиполя, ослабляющее также двустороннюю дистрибутивность до односторонней (см. разд. 1). В исследованиях, начиная с середины прошлого века, используются компьютерные вычисления.

Строение даже известных *собственных* (или не являющихся полем) конечных полуполей и квазиполей и их луп ненулевых элементов изучено мало (см. обзор [4]). Более изучены квазиполя с ассоциативными степенями: ассоциативные квазиполя или *почти-поля* [5], альтернативные кольца [1]; на лупы Муфанг теоретико-групповые теоремы переносят М. Либек [6], А. Н. Гришков и А. В. Заварницын [7; 8], С. М. Гагола [9] и др.

Г. Венэ [10] высказал в 1991 г. *гипотезу о правоцикличности конечных полуполей*, т. е. о представимости ненулевых элементов правоупорядоченными степенями одного элемента. На основе перечисления Д. Кнута полуполевых плоскостей порядка 32 [11; 12] И. Руа [13] указал в 2004 г. полуполе порядка 32 (*полуполе Кнута — Руа*), опровергающее гипотезу Венэ, а также изотопное с ним полуполе порядка 2^5 с подполем порядка 4.

Аналогично спектру лупы [14; 15] в разд. 2 введены левый и правый спектры с помощью наименьших лево- и правоупорядоченных степеней элементов, равных единице.

Для конечных полуполей и квазиполей в [14; 15] записаны следующие задачи.

(А) Перечислить максимальные подполя и их порядки.

(Б) Выявить конечные квазиполя S с неоднородной лупой S^* .

Г и п о т е з а. Лупа S^* всякого конечного полуполя S однопорочдена.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00968).

(В) *Определить, какие возможны спектры лупы S^* конечного полуполя и квазиполя.*

Решение задач для полуполя Кнута — Руа \mathfrak{K} порядка 32 дает в разд. 2 теорема 1, выявившая порождаемость лупы \mathfrak{K}^* любым неединичным элементом, ее спектр $\{1, 5, 6, 7, 8, 10\}$, а также правый и левый спектры $\{1, 21\}$. В разд. 4 найдено строение представителей всех изотопных классов собственных квазиполей порядка 32. Их выбираем с помощью регулярных множеств плоскостей трансляций порядка 32, классификация которых завершена в 2011 г. (У. Демпвольф [26] и Р. Рокенфеллер [28]). Ранее [16] был изучен случай представителей, являющихся полуполем (см. теоремы 4 и 5). Теорема 6 посвящена оставшимся случаям.

В разд. 3 задачи решены для всех собственных полуполей порядка 16. Е. Клейнфилд [24] классифицировал их, с точностью до изоморфизмов (предложение 4), разрабатывая алгоритм построения таблицы Кэли лупы. Мы сокращаем его список до 16 полуполей, с точностью до изоморфизмов и антиизоморфизмов, и для каждого указываем явную формулу умножения (теорема 2). Формулы для двух неизотопных полуполей выписал ранее Д. Кнут [12]; таблицы Кэли лупы и формулы в некоторых других случаях см. [15], а также [27]. Результаты о строении полуполей сведены в табл. 4, анонсированную (без правого и левого спектров) в [15].

Собственные квазиполя наименьшего четного порядка 16 образуют семь изотопных классов. Из них пять классов не содержат полуполей; в [15, теоремы 3.1–3.3] выявлено строение их представителей, выбранных с помощью [25]. Его резюмирует теорема 3 в разд. 3; в частности, три из них являются теоретико-множественным объединением семи своих подполей порядка 4.

1. Координатизация плоскостей трансляций квазиполями

По определению полуполе — это (простое) кольцо $S = (S, +, \cdot)$, в котором $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ есть лупа. Напомним, что группоид L с бинарной операцией \cdot называют *квазигруппой*, если при любых $a, b \in L$ каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$ однозначно разрешимо в L , и называют *лупой*, если также существует единица e (нуль, “0”, в аддитивной терминологии) [1; 5]; группа — это ассоциативная лупа. К понятию квазиполя приходят, ослабляя также двустороннюю дистрибутивность до односторонней [17; 18]. Ясно, что левая дистрибутивность $x(y + z) = xy + xz$ ($x, y, z \in S$) дает (при $y = z = 0$) условие $x0 = 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Конечное множество Q с бинарными операциями сложения $+$ и умножения \cdot называют *левым квазиполем*, если выполняются следующие условия: 1) $(Q, +)$ — абелева группа, 2) $Q^* := (Q \setminus \{0\}, \cdot)$ — лупа, 3) выполнен левый дистрибутивный закон, 4) $0x = 0$ ($x \in Q$).

Конечное *правое квазиполе* определяют аналогично с соответствующими изменениями свойств 3) и 4) [18]. Далее говорим “квазиполе” вместо “правое квазиполе”.

З а м е ч а н и е 1. Д. Хьюз и Ф. Пайпер [17] называют $(Q, +, \cdot)$ с произвольным Q и условиями 1)–4) *слабым квазиполем* и *квазиполем* — при дополнительном условии уравнение $ax = bx + c$ однозначно разрешимо при любых $a, b, c \in Q$, $a \neq b$.

Согласно [17, теорема 7.3] конечное слабое квазиполе есть квазиполе.

О п р е д е л е н и е 2. Тройку биективных отображений α, β, γ группоида $(S; \circ)$ на $(V; \cdot)$ называют *изотопизмом*, если $\alpha(x \circ y) = \beta(x) \cdot \gamma(y)$ ($x, y \in S$). *Изотопизмом квазиполей Q и W* (*автотопизмом* при $Q = W$) называют тройку изоморфизмов аддитивной группы $(Q, +)$ на $(W, +)$, если их ограничения на квазигруппе Q^* — ее изотопизмы на W^* .

Построение квазиполей тесно связано с построениями проективных плоскостей трансляций. Согласно [2; 5, § 20.1] проективная плоскость — это множество точек с определенными подмножествами, называемыми прямыми, и следующими свойствами: 1) две различные точки лежат на одной и только одной прямой; 2) две различные прямые пересекаются в единственной точке и 3) существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Биективное отображение точек и прямых одной проективной плоскости соответственно на точки и прямые другой называют *изоморфизмом плоскостей*, если оно сохраняет инцидентность. *Порядком конечной плоскости* называют число n такое, что число точек какой-либо (равносильно [5, теорема 20.1.1], любой) ее прямой равно $n + 1$.

Напомним, что *расщепление группы* — это набор ее подгрупп (компоненты расщепления) с тривиальными попарными пересечениями, дающих в теоретико-множественном объединении всю группу. Абелевой группе G с расщеплением μ сопоставляют аффинную плоскость, точки которой есть элементы группы G , прямые — смежные классы группы G по подгруппам из μ , инцидентность теоретико-множественная. Проективную плоскость получают из аффинной, считая по определению, что смежные классы по одной и той же подгруппе пересекаются (как прямые аффинной плоскости) в одной и той же *особой точке*; множество всех особых точек считают *особой прямой*.

Расщепление μ аддитивной группы $2n$ -мерного пространства V над полем F называют *спредом* (*spread*) в V , если $V = M \oplus N$ для любых различных $M, N \in \mu$. В этом случае согласно Дж. Андрэ [19] компоненты являются n -мерными подпространствами; мы получаем плоскость трансляций $\mu(V)$, считая ее точками векторы из V , прямыми — все смежные классы по компонентам из μ , а инцидентностью — отношение включения. Обратно, всякая плоскость трансляций изоморфна подходящей плоскости $\mu(V)$.

Для построения проективной плоскости трансляций π ранга n над полем F выбирают n -мерное линейное пространство W над F (*координатизирующее множество*), внешнюю прямую сумму $V = W \oplus W = \{(x, y) \mid x, y \in W\}$ двух его копий и спред μ в V , содержащий $V(0) := (W, 0)$ и $V(\infty) := (0, W)$. Тогда оставшиеся компоненты из μ имеют вид $V(\sigma) = \{(v, v^\sigma) \mid v \in W\}$ для подходящих $\sigma \in GL(W)$.

Пусть θ — биективное отображение пространства W в кольцо $M(n, F)$ всех $n \times n$ -матриц над F . Образ $R = \theta(W)$ называют *регулярным множеством*, если

- 1) единичная и нулевая матрицы E и O лежат в R ,
- 2) $R \setminus \{O\}$ и матрицы $\theta(u) - \theta(v)$ лежат в $GL(n, F)$ при любых $u, v \in W$, $u \neq v$.

В этом случае приходим к квази полю $(W, +, \circ)$ с умножением

$$x \circ y := x \cdot \theta(y) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in W). \quad (1.1)$$

Согласно М. Каллахеру [20, теорема 6.1] аффинная плоскость является *трансляционной*, если и только если она координатизируется квазиполем. Соответствующая проективная плоскость трансляций *дезаргова* тогда и только тогда, когда координатизирующее квазиполе есть поле. Когда квазиполе является полуполем, плоскость π называют *полуполевой*. Известно, что это равносильно замкнутости регулярного множества R по сложению.

Предложение 1 (А. Альберт, [21]). *Две полуполевы плоскости изоморфны тогда и только тогда, когда координатизирующие их полуполя изотопны.*

Нам потребуются правое и левое ядра N_r и N_l квазиполя Q , в частности

$$N_r(Q) = \{a \in Q \mid x \circ (y \circ a) = (x \circ y) \circ a, (x + y) \circ a = x \circ a + y \circ a \quad (x, y \in Q)\}.$$

Для любого элемента $x \in Q$ квазиполя $Q = (Q; +, \cdot)$ полагаем

$$0x := 0 = x0, \quad kx := \underbrace{x + x + \dots + x}_{k \text{ раз}} = xk, \quad (-k)x := -(kx) = k(-x) \quad (k \in \mathbb{Z}, k > 0).$$

Ассоциативность сложения и левая дистрибутивность дают

$$(x \cdot te) \cdot (ke) = k((x \cdot te) \cdot e) = (kt)x = x \cdot (te \cdot ke) \quad (k, t \in \mathbb{Z}).$$

Существование простого подполя в конечном квазиполе устанавливает (см. [16, лемма 1]) следующее предложение.

Предложение 2. Пусть Q — левое квазиполе с единицей e . Тогда $\pi : k \rightarrow ke$ ($k \in \mathbb{Z}$) есть гомоморфизм кольца \mathbb{Z} целых чисел в квазиполе Q , причем Q есть правый $\pi(\mathbb{Z})$ -модуль и либо $\pi(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, либо $\pi(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p$ для некоторого простого числа p . Число 0 или p здесь соответственно называют характеристикой квазиполя Q .

Из предложения 2 вытекает

Следствие. Порядок $|Q|$ всякого конечного квазиполя Q является примарным, т. е. равен степени простого числа.

Собственное квазиполе порядка p^2 построил Л. Диксон [3] при любом простом $p > 2$. Квазиполе порядка 4 или 8 всегда есть поле [22]. Известно также

Предложение 3 [11, теорема 6.1 и следствие 8.2.2]. Собственное полуполе порядка p^n (p — простое число) существует тогда и только тогда, когда $n \geq 3$ и $p^n \geq 16$.

2. Порядки элементов и полуполе Кнута — Руа

Произведение с m сомножителями (мультипликативного) группоида называем m -й степенью элемента v (независимо от расстановки скобок), если все сомножители равны v .

О п р е д е л е н и е 3. Порядком $|v|$ элемента v лупы называем наименьшее натуральное число m такое, что существует m -я степень v , равная e ; порядок бесконечен, если такое m не существует. Множество порядков всех элементов лупы назовем ее спектром.

По аналогии со спектром, введенным в [14], определяем правый порядок $|v|_r$ элемента v лупы по наименьшей правоупорядоченной степени v^m , равной e , и правый спектр лупы; аналогично вводим левый порядок $|v|_l$ и левый спектр лупы. Напомним, что согласно [10]

$$v^1 := v, \quad v^{i+1} = v^i \circ v; \quad v^{(1)} = v, \quad v^{(i+1)} = v \circ v^{(i)} \quad (i \geq 1).$$

Конечное полуполе S и лупу S^* называют правоциклическими или правопримитивными, если все элементы лупы S^* есть правоупорядоченные степени фиксированного элемента.

В 1991 г. Г. Венэ [10] высказал гипотезу о правоциклическости любого конечного полуполя. Коммутативное полуполе \mathfrak{K} порядка 32, опровергающее гипотезу Венэ, указал в 2004 г. И. Руа [13], основываясь на координатизирующем полуполе плоскости, построенной Д. Кнудом [11]. Его назовем полуполем Кнута — Руа. В этом разделе доказана следующая теорема.

Теорема 1. В полуполе Кнута — Руа \mathfrak{K} порядка 32 с тождеством $x^{(22)} = x$ лупа \mathfrak{K}^* однопорождена и, более того, порождается любым своим неединичным элементом. Ее правый и левый спектры равны $\{1, 21\}$, а спектр — $\{1, 5, 6, 7, 8, 10\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д. Кнут [11] построил проективные плоскости $\pi(i)$ ($1 \leq i \leq 5$) порядка 32 и показал, что они исчерпывают, с точностью до изоморфизмов, все недезарговы проективные полуполевые плоскости порядка 32. Каждая такая плоскость координатизируется 5-мерным пространством W над \mathbb{Z}_2 . Оно снабжается структурой полуполя $(W, +, \circ)$ порядка 32 с помощью регулярного множества $\theta(W)$, где аддитивное отображение $\theta : W \rightarrow M(5, \mathbb{Z}_2)$ (кольцо 5×5 -матриц над \mathbb{Z}_2) определяет умножение по формуле (1.1). И. Руа [13] использует полуполе порядка 32, соответствующее плоскости $\pi(3)$. Регулярное множество Д. Кнута здесь представляется θ -образом $\theta(W)$, где

$$\theta(x, y, z, w, s) = \begin{pmatrix} x & y & z & w & s \\ s & x + s & y & z & w \\ z & z + w & x + s & y + w + s & z + s \\ w + s & z + w + s & s & x + z + w & y + w \\ y + w + s & y + w & z + w + s & z + s & x + z + s \end{pmatrix}.$$

Тогда умножение \circ полуполя $\mathfrak{R} = (W, +, \circ)$ записывается в виде

$$(u, v, k, l, m) \circ (x, y, z, w, s) = (ux + vs + kz + lw + ls + my + mw + ms, \\ uy + vx + vs + kz + kw + lz + lw + ls + my + mw, uz + vy + kx + ks + ls + mz + mw + ms, \\ uw + vz + ky + kw + ks + lx + lz + lw + mz + ms, \\ us + vw + kz + ks + ly + lw + mx + mz + ms).$$

В частности, \mathfrak{R} — коммутативное полуполе, так что в нем $v^{(i)} = v^{(i)}$ для всех $i \geq 0$. Далее полезна следующая, доказываемая индукцией, лемма.

Лемма 1. Пусть α есть m -я степень элемента v коммутативной лупы. Если v^2 входит в α как подпроизведение не более одного раза, то $\alpha = v^{(m)}$.

В коммутативной лупе правый и левый обратные к ее элементу совпадают, а для элемента порядка 3 равны его квадрату. Квадраты элементов лупы всегда расположены на главной диагонали ее таблицы Кэли.

Теперь легко проверить, что лупа \mathfrak{R}^* не имеет элементов порядка 3. Таблица Кэли лупы \mathfrak{R}^* симметрична относительно главной диагонали (табл. 1). Представим ее блоками, разбив столбцы на 4 группы. (Умножение на единицу $e = (1, 0, 0, 0, 0)$ в таблице опускаем.)

Несложно доказывается, что для любой конечной лупы L выполняются неравенства

$$|v| \leq |v|_l \leq |L|, \quad |v| \leq |v|_r \leq |L| \quad (v \in L).$$

Таблица Кэли показывает, что $x^{(21)} = e$ — тождество лупы \mathfrak{R}^* , как и в [13]. По лемме 1 $x^{(21)} = e$ — также тождество. Более того, $|v|_l = |v|_r = 21$ для каждого элемента $v \neq e$ лупы \mathfrak{R}^* . Следовательно, ее правый и левый спектры совпадают и равны $\{1, 21\}$.

В лупе \mathfrak{R}^* при любом $v \neq e$ элементы $v^2 \cdot v^2$ и $v^{(4)}$ неединичны и различны, так что $|v| > 4$. Отсюда вытекает также максимальность подполя \mathbb{Z}_2e в полуполе \mathfrak{R} .

Т а б л и ц а 1

Таблица Кэли лупы \mathfrak{R}^* полуполя Кнута — Руа

	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111	01000
00001	10111	11100	01011	00111	10000	11011	01100	11000
00010	11100	11011	00111	01010	10110	10001	01101	00001
00011	01011	00111	01100	01101	00110	01010	00001	11001
00100	00111	01010	01101	11001	11110	10011	10100	00010
00101	10000	10110	00110	11110	01110	01000	11000	11010
00110	11011	10001	01010	10011	01000	00010	11001	00011
00111	01100	01101	00001	10100	11000	11001	10101	11011
01000	11000	00001	11001	00010	11010	00011	11011	00100
01001	01111	11101	10010	00101	01010	11000	10111	11100
01010	00100	11010	11110	01000	01100	10010	10110	00101
01011	10011	00110	10101	01111	11100	01001	11010	11101
01100	11111	01011	10100	11011	00100	10000	01111	00110
01101	01000	10111	11111	11100	10100	01011	00011	11110
01110	00011	10000	10011	10001	10010	00001	00010	00111
01111	10100	01100	11000	10110	00010	11010	01110	11111
10001	10110	11110	01000	00011	10101	11101	01011	10000
10010	11101	11001	00100	01110	10011	10111	01010	01001
10011	01010	00101	01111	01001	00011	01100	00110	10001
10100	00110	01000	01110	11101	11011	10101	10011	01010
10101	10001	10100	00101	11010	01011	01110	11111	10010
10110	11010	10011	01001	10111	01101	00100	11110	01011
10111	01101	01111	00010	10000	11101	11111	10010	10011
11000	11001	00011	11010	00110	11111	00101	11100	01100
11001	01110	11111	10001	00001	01111	11110	10000	10100
11010	00101	11000	11101	01100	01001	10100	10001	01101
11011	10010	00100	10110	01011	11001	01111	11101	10101
11100	11110	01001	10111	11111	00001	10110	01000	01110
11101	01001	10101	11100	11000	10001	01101	00100	10110
11110	00010	10010	10000	10101	10111	00111	00101	01111
11111	10101	01110	11011	10010	00111	11100	01001	10111

	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
00001	01111	00100	10011	11111	01000	00011	10100
00010	11101	11010	00110	01011	10111	10000	01100
00011	10010	11110	10101	10100	11111	10011	11000
00100	00101	01000	01111	11011	11100	10001	10110
00101	01010	01100	11100	00100	10100	10010	00010
00110	11000	10010	01001	10000	01011	00001	11010
00111	10111	10110	11010	01111	00011	00010	01110
01000	11100	00101	11101	00110	11110	00111	11111
01001	10011	00001	01110	11001	10110	00100	01011
01010	00001	11111	11011	01101	01001	10111	10011
01011	01110	11011	01000	10010	00001	10100	00111
01100	11001	01101	10010	11101	00010	10110	01001
01101	10110	01001	00001	00010	01010	10101	11101
01110	00100	10111	10100	10110	10101	00110	00101
01111	01011	10011	00111	01001	11101	00101	10001
10001	00110	01110	11000	10011	00101	01101	11011
10010	10100	10000	01101	00111	11010	11110	00011
10011	11011	10100	11110	11000	10010	11101	10111
10100	01100	00010	00100	10111	10001	11111	11001
10101	00011	00110	10111	01000	11001	11100	01101
10110	10001	11000	00010	11100	00110	01111	10101
10111	11110	11100	10001	00011	01110	01100	00001
11000	10101	01111	10110	01010	10011	01001	10000
11001	11010	01011	00101	10101	11011	01010	00100
11010	01000	10101	10000	00001	00100	11001	11100
11011	00111	10001	00011	11110	01100	11010	01000
11100	10000	00111	11001	10001	01111	11000	00110
11101	11111	00011	01010	01110	00111	11011	10010
11110	01101	11101	11111	11010	11000	01000	01010
11111	00010	11001	01100	00101	10000	01011	11110

	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000
00001	10110	11101	01010	00110	10001	11010	01101	11001
00010	11110	11001	00101	01000	10100	10011	01111	00011
00011	01000	00100	01111	01110	00101	01001	00010	11010
00100	00011	01110	01001	11101	11010	10111	10000	00110
00101	10101	10011	00011	11011	01011	01101	11101	11111
00110	11101	10111	01100	10101	01110	00100	11111	00101
00111	01011	01010	00110	10011	11111	11110	10010	11100
01000	10000	01001	10001	01010	10010	01011	10011	01100
01001	00110	10100	11011	01100	00011	10001	11110	10101
01010	01110	10000	10100	00010	00110	11000	11100	01111
01011	11000	01101	11110	00100	10111	00010	10001	10110
01100	10011	00111	11000	10111	01000	11100	00011	01010
01101	00101	11010	10010	10001	11001	00110	01110	10011
01110	01101	11110	11101	11111	11100	01111	01100	01001
01111	11011	00011	10111	11001	01101	10101	00001	10000
10001	00111	01111	11001	10010	00100	01100	11010	00001
10010	01111	01011	10110	11100	00001	00101	11000	11011
10011	11001	10110	11100	11010	10000	11111	10101	00010
10100	10010	11100	11010	01001	01111	00001	00111	11110
10101	00100	00001	10000	01111	11110	11011	01010	00111
10110	01100	00101	11111	00001	11011	10010	01000	11101
10111	11010	11000	10101	00111	01010	01000	00101	00100
11000	00001	11011	00010	11110	00111	11101	00100	10100
11001	10111	00110	01000	11000	10110	00111	01001	01101
11010	11111	00010	00111	10110	10011	01110	01011	10111
11011	01001	11111	01101	10000	00010	10100	00110	01110
11100	00010	10101	01011	00011	11101	01010	10100	10010
11101	10100	01000	00001	00101	01100	10000	11001	01011
11110	11100	01100	01110	01011	01001	11001	11011	10001
11111	01010	10001	00100	01101	11000	00011	10110	01000

	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
00001	01110	00101	10010	11110	01001	00010	10101
00010	11111	11000	00100	01001	10101	10010	01110
00011	10001	11101	10110	10111	11100	10000	11011
00100	00001	01100	01011	11111	11000	10101	10010
00101	01111	01001	11001	00001	10001	10111	00111
00110	11110	10100	01111	10110	01101	00111	11100
00111	10000	10001	11101	01000	00100	00101	01001
01000	10100	01101	10101	01110	10110	01111	10111
01001	11010	01000	00111	10000	11111	01101	00010
01010	01011	10101	10001	00111	00011	11101	11001
01011	00101	10000	00011	11001	01010	11111	01100
01100	10101	00001	11110	10001	01110	11010	00101
01101	11011	00100	01100	01111	00111	11000	10000
01110	01010	11001	11010	11000	11011	01000	01011
01111	00100	11100	01000	00110	10010	01010	11110
10001	10111	11111	01001	00010	10100	11100	01010
10010	00110	00010	11111	10101	01000	01100	10001
10011	01000	00111	01101	01011	00001	01110	00101
10100	11000	10110	10000	00011	00101	01011	01101
10101	10110	10011	00010	11101	01100	01001	11000
10110	00111	01110	10100	01010	10000	11001	00011
10111	01001	01011	00110	10100	11001	11011	10110
11000	01101	10111	01110	10010	01011	10001	01000
11001	00011	10010	11100	01100	00010	10011	11101
11010	10010	01111	01010	11011	11110	00011	00110
11011	11100	01010	11000	00101	10111	00001	10011
11100	01100	11011	00101	01101	10011	00100	11010
11101	00010	11110	10111	10011	11010	00110	01111
11110	10011	00011	00001	00100	00110	10110	10100
11111	11101	00110	10011	11010	01111	10100	00001

Т а б л и ц а 2

Порядки элементов лупы \mathfrak{R}^*

y	(1,0,0,0,0)	(0,0,0,0,1)	(0,0,0,1,0)	(0,0,0,1,1)	(0,0,1,0,0)	(0,0,1,0,1)	(0,0,1,1,0)	(0,0,1,1,1)
y	1	5	7	10	6	7	8	10
y	(0,1,0,0,0)	(0,1,0,0,1)	(0,1,0,1,0)	(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)	(0,1,1,0,1)	(0,1,1,1,0)	(0,1,1,1,1)
y	10	5	8	7	6	5	5	6
y	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,1,0)	(1,0,0,1,1)	(1,0,1,0,0)	(1,0,1,0,1)	(1,0,1,1,0)	(1,0,1,1,1)	(1,1,0,0,0)
y	7	6	8	7	6	10	8	8
y	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,1,0)	(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,0)	(1,1,1,0,1)	(1,1,1,1,0)	(1,1,1,1,1)	
y	7	10	5	7	7	7	7	

Найдем спектр лупы \mathfrak{R}^* . Элементами порядка 5 являются элементы m_i , $1 \leq i \leq 5$:

$$m_1 = (0, 0, 0, 0, 1), \quad m_2 = (0, 1, 0, 0, 1), \quad m_3 = (0, 1, 1, 0, 1), \quad m_4 = (0, 1, 1, 1, 0), \quad m_5 = (1, 1, 0, 1, 1).$$

Действительно, обратный к элементу m_i совпадает с $m_i^2 \cdot m_i^2$. Далее, степени ≤ 5 элементов

$$n_1 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad n_2 = (0, 1, 1, 0, 0), \quad n_3 = (0, 1, 1, 1, 1), \quad n_4 = (1, 0, 0, 1, 0), \quad n_5 = (1, 0, 1, 0, 1)$$

неединичны и, кроме того, $n_j^2 \cdot n_j^4 = e$. Отсюда $|n_j| = 6$ ($1 \leq j \leq 5$).

Аналогично неединичные степени ≤ 6 имеют все элементы:

$$k_1 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad k_2 = (0, 0, 1, 0, 1), \quad k_3 = (0, 1, 0, 1, 1), \quad k_4 = (1, 0, 0, 0, 1), \quad k_5 = (1, 0, 1, 0, 0),$$

$$k_6 = (1, 1, 0, 0, 1), \quad k_7 = (1, 1, 1, 0, 0), \quad k_8 = (1, 1, 1, 0, 1), \quad k_9 = (1, 1, 1, 1, 0), \quad k_{10} = (1, 1, 1, 1, 1),$$

причем хотя бы одно из произведений $k_r^2 \cdot (k_r^2 \cdot k_r^2)$ или $k_r^3 \cdot k_r^3$ совпадает с обратным к элементу k_r ($1 \leq r \leq 10$). Таким образом, порядки этих элементов равны 7.

Аналогичной процедурой находим порядки оставшихся элементов лупы \mathfrak{R}^* .

Сводная табл. 2 показывает, что спектр лупы \mathfrak{R}^* равен $\{1, 5, 6, 7, 8, 10\}$.

Докажем, что лупу \mathfrak{R}^* порождает ее элемент $a_1 = (0, 0, 0, 0, 1)$. Вначале находим

$$a_1^2 = (1, 0, 1, 1, 1) := a_2, \quad a_1^3 = a_1 \cdot a_1^2 = (0, 1, 1, 0, 1) := a_3.$$

Правоупорядоченные j -е степени элемента a_1 , $4 \leq j \leq 21$, дают соответственно элементы

$$a_4 = (1, 0, 1, 1, 1), \quad a_5 = (1, 1, 0, 0, 0), \quad a_6 = (1, 1, 0, 0, 1), \quad a_7 = (0, 1, 1, 1, 0),$$

$$a_8 = (0, 0, 0, 1, 1), \quad a_9 = (0, 1, 0, 1, 1), \quad a_{10} = (1, 0, 0, 1, 1), \quad a_{11} = (0, 1, 0, 1, 0),$$

$$a_{12} = (0, 0, 1, 0, 0), \quad a_{13} = (0, 0, 1, 1, 1), \quad a_{14} = (0, 1, 1, 0, 0), \quad a_{15} = (1, 1, 1, 1, 1),$$

$$a_{16} = (1, 0, 1, 0, 1), \quad a_{17} = (1, 0, 0, 0, 1), \quad a_{18} = (1, 0, 1, 1, 0), \quad a_{19} = (1, 1, 0, 1, 0),$$

$$a_{20} = (0, 0, 1, 0, 1), \quad a_{21} = (1, 0, 0, 0, 0).$$

Используя уже найденные элементы, получаем оставшиеся десять элементов лупы:

$$a_{22} = a_2 \cdot a_4 = (1, 1, 1, 1, 0), \quad a_{23} = a_{22} \cdot a_1 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad a_{24} = a_{22} \cdot a_2 = (1, 1, 0, 1, 1),$$

$$a_{25} = a_{22} \cdot a_4 = (0, 1, 1, 1, 1), \quad a_{26} = a_{23} \cdot a_1 = (1, 1, 1, 0, 0), \quad a_{27} = a_{24} \cdot a_2 = (0, 0, 1, 1, 0),$$

$$a_{28} = a_6 \cdot a_2 = (0, 1, 0, 0, 1), \quad a_{29} = a_3 \cdot a_{10} = (1, 0, 0, 1, 0), \quad a_{30} = a_3 \cdot a_{20} = (1, 0, 1, 0, 0), \\ a_{31} = a_2 \cdot a_{20} = (1, 1, 1, 0, 1).$$

Поэтому все элементы лупы являются различными степенями элемента a_1 , так что одно-порожденность лупы \mathfrak{R}^* доказана. Более сильное утверждение устанавливает

Лемма 2. *Лупа \mathfrak{R}^* порождается любым ее неединичным элементом.*

Доказательство. Лупу \mathfrak{R}^* порождает элемент $b_1 := (0, 0, 0, 0, 1)$ согласно доказанному выше, а также любой из элементов $b_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $b_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $b_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$, поскольку $b_2^2 = b_3^3 = b_1$ и $b_4^{(19)} = b_2$. Далее удастся аналогично выразить найденные элементы b_i правоупорядоченными степенями оставшихся неединичных элементов:

$$b_5^2 = b_6^{(12)} = b_4, \quad b_5 := (0, 0, 1, 1, 0), \quad b_6 := (0, 0, 0, 1, 1); \\ b_7^{(5)} = b_8^2 = b_6, \quad b_7 := (0, 0, 1, 0, 1), \quad b_8 := (1, 1, 0, 0, 1)$$

и т. д. Таким образом, лупа \mathfrak{R}^* полуполя Кнута — Руа порождается всяким своим неединичным элементом. Доказательство леммы и вместе с тем теоремы 1 завершено. \square

3. Полуполя и квазиполя порядка 16

Алгоритм построения полуполей и квазиполей порядка 16 разрабатывал в 1960 г. Е. Клейнфилд [24], рассматривая таблицу Кэли лупы как латинский квадрат. Когда квазиполе имеет ядро порядка 4, ключевой в ней (помимо умножений на элементы ядра) является 4-я строка; для ее выбора и построения латинского 4×15 -прямоугольника существуют 1264 возможности [24, с. 333]. Изоморфными преобразованиями это число удастся уменьшить до 76, построив два класса изотопных попарно неизоморфных собственных квазиполей: один класс из 50 квазиполей T_i , $1 \leq i \leq 50$, включая полуполя T_{24} , T_{25} , T_{35} , T_{45} и T_{50} ; второй изотопный класс составляют 25 квазиполей, не являющиеся полуполями.

Громоздкость вычислений, как отметил Е. Клейнфилд, не позволила перечислить также квазиполя порядка 16 с ядром порядка 2; они классифицированы для случая полуполей.

Предложение 4 (Е. Клейнфилд, [24]). *Собственные полуполя порядка 16 образуют два класса изотопных попарно неизоморфных полуполей. Один из 18 полуполей V_i , $1 \leq i \leq 18$, с ядром порядка 2, а другой из 5 полуполей T_{24} , T_{25} , T_{35} , T_{45} и T_{50} с ядром порядка 4.*

Отсюда и из предложения 1 следует, что число неизоморфных недезарговых полуполевых плоскостей порядка 16 равно двум. Применяя компьютерные вычисления, Д. Кнут [11; 12] подтвердил перечисления из [24] (с оценкой ≤ 6 порядков групп автоморфизмов полуполей) и координатизировал обе плоскости полуполями с явными формулами умножения:

$$(u, v) \circ (x, y) = (ux + \omega v^2 y, vx + u^2 y) \quad (u, v, x, y \in GF(4) = \{0, 1, \omega, \omega^2 = \omega + 1\}), \\ (u, v) \circ (x, y) = (ux + v^2 y, vx + u^2 y + v^2 y^2).$$

Ясно, что кольцо (или квазиполе) $R = (R, +, \cdot)$ антиизоморфно его *противоположному* $R^{op} := (R, +, \circ)$, где $a \circ b = b \cdot a$ ($a, b \in R$), по определению. Сокращая список Клейнфилда, мы классифицируем полуполя порядка 16, с точностью (достаточной для решения вопросов (А)–(В)) до изоморфизмов и антиизоморфизмов, с явными формулами умножения.

Теорема 2. *Всякое собственное полуполе порядка 16 либо антиизоморфно или изоморфно одному из семи полуполей $V_1, V_3, V_4, V_8, V_{11}, V_{15}, T_{25}$, не изоморфных противоположному полу полю, либо изоморфно одному из девяти полуполей $V_2, V_{10}, V_{12}, V_{13}, V_{17}, V_{18}, T_{24}, T_{35}, T_{45}$. Формулы умножения в полуполях определяет табл. 3.*

Т а б л и ц а 3

Формулы умножения в полуполях порядка 16

Полуполе	Произведение $(a, b, c, d) \circ (x, y, z, w)$
$V_1 \simeq V_6^{op}$	$(ax + bw + cz + dy + dz, ay + bx + cy + cz + dy + dw, az + by + bw + cx + cw + dy, aw + bz + cy + cw + dx + dy + dw)$
V_2	$(ax + bw + cz + dy + dz + dw, ay + bx + bw + cw + dy + dz, az + by + bw + cx + cy + cz + dy + dw, aw + bz + cy + cw + dx + dy + dz + dw)$
$V_3 \simeq V_7^{op}$	$(ax + bw + cy + cz + dz, ay + bx + cz + dy + dw, az + by + cx + cy + cw + dw, aw + bz + bw + cy + cw + dx + dy + dz + dw)$
$V_4 \simeq V_5^{op}$	$(ax + bw + cy + cw + dz, ay + bx + bw + cz + cw + dw, az + by + bw + cx + cy + cz + dy, aw + bz + bw + cy + dx + dy + dz + dw)$
$V_8 \simeq V_9^{op}$	$(ax + bw + cz + dy, ay + bx + bw + cy + cw + dz, az + by + bw + cx + cz + cw + dw, aw + bz + bw + cy + dx + dz)$
V_{10}	$(ax + bw + cy + cz + cw + dy + dw, ay + bx + cz + cw + dy + dz, az + by + bw + cx + cz + cw + dy, aw + bz + cy + cw + dx + dz + dw)$
$V_{11} \simeq V_{14}^{op}$	$(ax + bw + cz + dy + dw, ay + bx + bw + cz + cw + dz, az + by + cx + cz + dw, aw + bz + cy + cz + cw + dx + dy + dz)$
V_{12}	$(ax + bw + cz + dy + dw, ay + bx + bw + cy + cz + cw + dz, az + by + bw + cx + cw + dz + dw, aw + bz + bw + cy + dx + dy + dz + dw)$
V_{13}	$(ax + bw + cz + cw + dy + dw, ay + bx + bw + cy + cw + dz, az + by + cx + cy + cz + cw + dw, aw + bz + cy + dy + dz)$
$V_{15} \simeq V_{16}^{op}$	$(ax + bw + cz + cw + dy + dw, ay + bx + cy + cz + cw + dy + dz, az + by + bw + cx + cz + cw + dy, aw + bz + cy + cz + dx + dz + dw)$
V_{17}	$(ax + bw + cz + cw + dy + dw, ay + bx + bw + cy + cw + dz, az + by + bw + cx + cz + dz + dw, aw + bz + bw + cy + dx + dy + dz + dw)$
V_{18}	$(ax + bw + cz + dy + dz, ay + bx + cy + cw + dy + dz + dw, az + by + bw + cx + cy + cz + cw + dy, aw + bz + cy + dx + dy + dz)$
T_{24}	$(ax + by + bz + cy + cw + dw, ay + bx + by + bz + cy + cz + cw + dy + dz, az + by + bz + bw + cx + cw + dy, aw + bz + bw + cy + cz + dx + dw)$
$T_{25} \simeq T_{50}^{op}$	$(ax + by + cz + cw + dw, ay + bx + by + cw + dz, az + bw + cx + cy + cz + cw + dy + dw, aw + bz + bw + cy + cw + dx + dz)$
T_{35}	$(ax + bz + cy + cw + dw, ay + bx + by + cw + dy + dz, az + bw + cx + cy + cw + dy, aw + by + bz + bw + cz + dw)$
T_{45}	$(ax + by + bz + bw + cy + cw + dw, ay + bx + by + bz + bw + cz + cw + dy + dz, az + bz + bw + cx + cy + dy, aw + bz + cy + cz + cw + dw)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Е. Клейнфилд [24] характеризует специальной порождающей последовательностью таблицу Кэли лупы W^* каждого из 76 квазиполей $W = T_j$ с ядром порядка 4 и каждого из 18 полуполей V_i с ядром порядка 2. Построив таблицы Кэли 23 полуполей Клейнфилда, находим (используя общую формулу (1.1)) аддитивные отображения $\theta : W \rightarrow M(4, \mathbb{Z}_2)$ такие, что $R = \theta(W)$ – регулярное множество проективной плоскости ранга 4 над полем \mathbb{Z}_2 . Полуполя Клейнфилда удается восстановить, вместе с формулами умножения, как координатизирующие полуполя таких плоскостей. (Тогда последовательности Клейнфилда легко восстанавливаются.) Ранее авторами [15] формулы умножения были выписаны (помимо двух полуполей Кнута), вместе с таблицами Кэли, для полуполей V_3, V_7, T_{25} и T_{50} .

Строение полуполей порядка 16

Полуполе	$ N_l $	Число подполей порядка 4	Спектр	Правый спектр	Левый спектр
V_1	2	0	$\{1, 4, 5\}$	$\{1, 5, 6, 15\}$	$\{1, 6, 15\}$
V_2	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$
V_3	2	0	$\{1, 4, 5, 6\}$	$\{1, 5, 6, 15\}$	$\{1, 5, 6, 15\}$
V_4	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$
V_8	2	2	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$
V_{10}	2	1	$\{1, 3, 5, 6\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$
V_{11}	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$
V_{12}	2	0	$\{1, 4, 5, 6\}$	$\{1, 5, 6, 15\}$	$\{1, 5, 6, 15\}$
V_{13}	2	4	$\{1, 3, 5\}$	$\{1, 3, 15\}$	$\{1, 3, 15\}$
V_{15}	2	2	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$
V_{17}	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$
V_{18}	2	2	$\{1, 3, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$
T_{24}	4	2	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$
T_{25}	4	2	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5, 6, 15\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$
T_{35}	4	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$	$\{1, 3, 6, 15\}$
T_{45}	4	3	$\{1, 3, 5\}$	$\{1, 3, 5, 15\}$	$\{1, 3, 5, 15\}$

В силу предложения 4 каждое собственное полуполе порядка 16 изоморфно либо одному из 16 полуполей табл. 3, либо противоположному к одному из семи указанных в таблице полуполей полуполу. Формула умножения в произвольном полуполе R позволяет сразу же записать формулу умножения в полуполе R^{op} , причем $(R^{op})^{op} \simeq R$. Все семь случаев, когда $R^{op} \not\cong R$, отражены в табл. 3 явно. Это завершает доказательство теоремы. \square

Теорема 2 анонсирована (без формул) в [15, теорема 2.3]; подробнее см. [27, теорема 2.1.1].

Очевидно, левый и правый спектры любого полуполя совпадают соответственно с правым и левым спектрами противоположного полуполя. Таблицы Кэли и формулы умножения позволяют выявить строение полуполей порядка 16 и доказать, что *лупа ненулевых элементов всякого полуполя порядка 16 однопорождена*. Таблица 4 резюмирует решение вопросов (А)–(В) для полуполей порядка 16, в частности, выявляя их право- и левоцикличность. Она анонсировалась (без правого и левого спектров) ранее в [15, табл. 4].

Число всех недезарговых проективных плоскостей трансляций порядка 16 равно 7, как показали У. Демпвольф и А. Рейфарт [25; 26]. По найденным там же регулярным множествам выбираем представители Q_j , $1 \leq j \leq 5$, изотопных классов квазиполей, не содержащих полуполя. Их строение, выявленное в [16, теорема 2; 15, теоремы 3.1–3.3], резюмирует следующая теорема.

Теорема 3. *Каждое из квазиполей Q_j при $j = 1, 2, 3$ есть теоретико-множественное объединение 7 максимальных подполей порядка 4, спектр лупы Q_j^* совпадает с $\{1, 3\}$ и любой ее элемент лежит в циклической подгруппе порядка 3. В квазиполях Q_j при $j = 4, 5$ любой элемент, не лежащий в подполе порядка 4, порождает лупу Q_j^* и имеет порядок 5, причем в Q_4 ядро есть единственное максимальное подполе порядка 4, а Q_5 имеет 3 максимальных подполя порядка 4 и $|N_l(Q_5)| = 2$.*

4. Полуполя и квазиполя порядка 32

Д. Кнут [11] построил проективные плоскости $\pi(i)$ ($1 \leq i \leq 5$) порядка 32 и показал, что они исчерпывают, с точностью до изоморфизмов, все недезарговы проективные полуполевые плоскости порядка 32. Тем самым собственные полуполя порядка 32 были описаны, с точностью до изотопизмов, как соответствующие координатизирующие полуполя P_j ($1 \leq j \leq 5$). Полуполя порядка 32 классифицировал также Р. Волкер [23].

Очевидно, порядок конечного полуполя равен степеням порядков правого и левого ядра. Поэтому ядра собственных полуполей порядка $32 = 2^5$ совпадают с простым подполем. В полуполе Кнута — Руа в силу теоремы 1 простое подполе — единственное его подполе.

Оказывается, такие полуполя могут содержать подполе порядка 4 (см. также [13].) Выберем представители P_i изотопных классов полуполей порядка 32, построенные на основе регулярных множеств из [26] плоскостей $\pi(i)$, выписанных как в [16].

Строение полуполей P_i выявляют следующие две теоремы.

Теорема 4 [16, теорема 5]. *Каждое полуполе P_i , $1 \leq i \leq 4$, имеет единственное подполе — подполе порядка 2. Лупу P_i^* порождает всякий неединичный элемент, а спектр лупы совпадает с $\{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$ при $i = 3$, с $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$ при $i = 4$ и с $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ при $i = 1, 2$.*

Теорема 5 [16, теорема 4]. *В полуполе P_5 существует подполе H порядка 4, являющееся единственным максимальным подполем. Каждый элемент из $P_5 \setminus H$ порождает лупу P_5^* и имеет порядок > 3 , а спектр лупы совпадает с $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.*

Классификацию проективных плоскостей трансляций порядка 32 завершили в 2011 г. У. Демвольф [26] и Р. Рокенфеллер [28]. С точностью до изоморфизмов, помимо шести полуполевых плоскостей существует точно 3 плоскости трансляций порядка 32, не являющихся полуполевыми. Координатизирующие квазиполя Q_i , $i = 1, 2, 3$, построим на основе регулярных множеств плоскостей из [26]. Вместе с полуполями P_i , $1 \leq i \leq 5$, они исчерпывают все собственные квазиполя порядка 32 с точностью до изотопизмов.

Оказывается, строение квазиполей Q_i , $i = 1, 2, 3$, допускает единообразное описание.

Теорема 6. *В каждом квазиполе Q_i , $i = 1, 2, 3$, простое подполе максимально, лупа Q_i^* является правоциклической, а ее спектр совпадает с $\{1, 4, 5, 6, 7\}$.*

Доказательство. Квазиполя Q_1 , Q_2 и Q_3 построены на основе регулярных множеств плоскостей трансляций с номерами 7, 8 и 9 из [26] соответственно. С их помощью восстанавливаем умножение (1.1) и таблицу Кэли лупы Q_i^* . Для Q_1 получаем регулярное множество

$$\left\{ O, E, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right),$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

и таблицу Кэли лупы Q_1^* (умножение на единичный элемент $(1,0,0,0)$ опускаем).

В квазиполе Q_i , как показывает его таблица Кэли, правоупорядоченные степени элемента $(0,0,0,1,0)$ дают все ненулевые элементы; его правоупорядоченный порядок равен 31. В частности, лупа Q_i^* ($i = 1, 2, 3$) является однопорожжденной и даже правоциклической.

Таблица Кэли показывает также, что все неединичные элементы лупы Q_i^* имеют различные правый и левый обратные элементы и поэтому их порядок больше 3, а квазиполе Q_i не имеет подполей, отличных от простого подполя порядка 2.

Т а б л и ц а 5
Таблица Кэли лупы Q_1^*

	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111	01000
00001	01001	00110	11001	11101	10101	10100	10010	10000
00010	01111	11101	11011	01000	11111	01101	00011	11100
00011	00110	11011	00010	10101	01010	11001	10001	01100
00100	01010	10000	10100	11111	11011	01110	01101	00101
00101	00011	10110	01101	00010	01110	11010	11111	10101
00110	00101	01101	01111	10111	00100	00011	01110	11001
00111	01100	01011	10110	01010	10001	10111	11100	01001
01000	11110	10011	11101	00011	01101	10110	00110	01010
01001	10111	10101	00100	11110	11000	00010	10100	11010
01010	10001	01110	00110	01011	10010	11011	00101	10110
01011	11000	01000	11111	10110	00111	01111	10111	00110
01100	10100	00011	01001	11100	10110	11000	01011	01111
01101	11101	00101	10000	00001	00011	01100	11001	11111
01110	11011	11110	10010	10100	01001	10101	01000	10011
01111	10010	11000	01011	01001	11100	00001	11010	00011
10001	01000	00100	11010	11001	10000	10010	10101	11000
10010	01110	11111	11000	01100	11010	01011	00100	10100
10011	00111	11001	00001	10001	01111	11111	10110	00100
10100	01011	10010	10111	11011	11110	01000	01010	01101
10101	00010	10100	01110	00110	01011	11100	11000	11101
10110	00100	01111	01100	10011	00001	00101	01001	10001
10111	01101	01001	10101	01110	10100	10001	11011	00001
11000	11111	10001	11110	00111	01000	10000	00001	00010
11001	10110	10111	00111	11010	11101	00100	10011	10010
11010	10000	01100	00101	01111	10111	11101	00010	11110
11011	11001	01010	11100	10010	00010	01001	10000	01110
11100	10101	00001	01010	11000	10011	11110	01100	00111
11101	11100	00111	10011	00101	00110	01010	11110	10111
11110	11010	11100	10001	10000	01100	10011	01111	11011
11111	10011	11010	01000	01101	11001	00111	11101	01011

	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
00001	01110	01000	11111	01101	00100	00011	10011
00010	11010	00111	10110	10101	10011	00110	01001
00011	10100	01111	01001	11000	10111	00101	11010
00100	01111	10101	00111	01011	11000	11101	11001
00101	00001	11101	11000	00110	11100	11110	01010
00110	10101	10010	10001	11110	01011	11011	10000
00111	11011	11010	01110	10011	01111	11000	00011
01000	00101	01110	10111	10001	00111	11100	10100
01001	01011	00110	01000	11100	00011	11111	00111
01010	11111	01001	00001	00100	10100	11010	11101
01011	10001	00001	11110	01001	10000	11001	01110
01100	01010	11011	10000	11010	11111	00001	01101
01101	00100	10011	01111	10111	11011	00010	11110
01110	10000	11100	00110	01111	01100	00111	00100
01111	11110	10100	11001	00010	01000	00100	10111
10001	00111	00010	10100	00001	01001	01101	11100
10010	10011	01101	11101	11001	11110	01000	00110
10011	11101	00101	00010	10100	11010	01011	10101
10100	00110	11111	01100	00111	10101	10011	10110
10101	01000	10111	10011	01010	10001	10000	00101
10110	11100	11000	11010	10010	00110	10101	11111
10111	10010	10000	00101	11111	00010	10110	01100
11000	01100	00100	11100	11101	01010	10010	11011
11001	00010	01100	00011	10000	01110	10001	01000
11010	10110	00011	01010	01000	11001	10100	10010
11011	11000	01011	10101	00101	11101	10111	00001
11100	00011	10001	11011	10110	10010	01111	00010
11101	01101	11001	00100	11011	10110	01100	10001
11110	11001	10110	01101	00011	00001	01001	01011
11111	10111	11110	10010	01110	00101	01010	11000

	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000
00001	01111	10001	11000	11011	00010	11100	01010	00111
00010	10010	01110	11001	00101	10100	10001	00001	10111
00011	11101	11111	00001	11110	10110	01101	01011	10000
00100	01000	00010	10001	01100	01001	10011	00110	10110
00101	00111	10011	01001	10111	01011	01111	01100	10001
00110	11010	01100	01000	01001	11101	00010	00111	00001
00111	10101	11101	10000	10010	11111	11110	01101	00110
01000	11111	11011	10101	00010	01100	00001	11000	01011
01001	10000	01010	01101	11001	01110	11101	10010	01100
01010	01101	10101	01100	00111	11000	10000	11001	11100
01011	00010	00100	10100	11100	11010	01100	10011	11011
01100	10111	11001	00100	01110	00101	10010	11110	11101
01101	11000	01000	11100	10101	00111	01110	10100	11010
01110	00101	10111	11101	01011	10001	00011	11111	01010
01111	01010	00110	00101	10000	10011	11111	10101	01101
10001	11110	00011	01011	01111	10111	01010	11101	11111
10010	00011	11100	01010	10001	00001	00111	10110	01111
10011	01100	01101	10010	01010	00011	11011	11100	01000
10100	11001	10000	00010	11000	11100	00101	10001	01110
10101	10110	00001	11010	00011	11110	11001	11011	01001
10110	01011	11110	11011	11101	01000	10100	10000	11001
10111	00100	01111	00011	00110	01010	01000	11010	11110
11000	01110	01001	00110	10110	11001	10111	01111	10011
11001	00001	11000	11110	01101	11011	01011	00101	10100
11010	11100	00111	11111	10011	01101	00110	01110	00100
11011	10011	10110	00111	01000	01111	11010	00100	00011
11100	00110	01011	10111	11010	10000	00100	01001	00101
11101	01001	11010	01111	00001	10010	11000	00011	00010
11110	10100	00101	01110	11111	00100	10101	01000	10010
11111	11011	10100	10110	00100	00110	01001	00010	10101

	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
00001	10111	10110	11110	11010	01011	00101	01100
00010	10000	01010	01100	11110	11000	01011	00100
00011	00111	11100	10010	00100	10011	01110	01000
00100	00011	11110	11010	00001	10010	10111	11100
00101	10100	01000	00100	11011	11001	10010	10000
00110	10011	10100	10110	11111	01010	11100	11000
00111	00100	00010	01000	00101	00001	11001	10100
01000	10010	11001	01111	01001	10000	00100	11010
01001	00101	01111	10001	10011	11011	00001	10110
01010	00010	10011	00011	10111	01000	01111	11110
01011	10101	00101	11101	01101	00011	01010	10010
01100	10001	00111	10101	01000	00010	10011	00110
01101	00110	10001	01011	10010	01001	10110	01010
01110	00001	01101	11001	10110	11010	11000	00010
01111	10110	11011	00111	01100	10001	11101	01110
10001	01110	01100	00101	00110	10110	11011	10011
10010	01001	10000	10111	00010	00101	10101	11011
10011	11110	00110	01001	11000	01110	10000	10111
10100	11010	00100	00001	11101	01111	01001	00011
10101	01101	10010	11111	00111	00100	01100	01111
10110	01010	01110	01101	00011	10111	00010	00111
10111	11101	11000	10011	11001	11100	00111	01011
11000	01011	00011	10100	10101	01101	11010	00101
11001	11100	10101	01010	01111	00110	11111	01001
11010	11011	01001	11000	01011	10101	10001	00001
11011	01100	11111	00110	10001	11110	10100	01101
11100	01000	11101	01110	10100	11111	01101	11001
11101	11111	01011	10000	01110	10100	01000	10101
11110	11000	10111	00010	01010	00111	00110	10001
11111	01111	00001	11100	10000	01100	00011	11101

С учетом табл. 5 в лупе Q_1^* одна из третьих степеней каждого из элементов

$$(0, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0)$$

совпадает с его правым или левым обратным, так что их порядки равны 4. Для элементов

$$(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1)$$

лупа Q_1^* совпадает с левым или правым обратным квадрата элемента и порядки равны 5. Также порядок 5 имеют элементы $(0, 0, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, 1, 0, 0)$, поскольку одна из четвертых степеней каждого из них совпадает с левым или правым обратным квадрата элемента.

Продолжая, найдем 10 элементов порядка 6, единственный элемент $(1, 1, 1, 1, 1)$ наивысшего порядка 7 и вместе с тем спектр лупы Q_1^* (табл. 6).

Аналогично получаем (табл. 7) спектры луп Q_2^* и Q_3^* . (Во всех трех лупах единствен неединичный элемент либо наименьшего, либо наибольшего порядка.) В частности, лупа Q_i^* ($i = 1, 2, 3$) является однопорожденной и даже правоциклической.

Тем самым доказательство теоремы завершается. \square

Согласно [11; 13; 23, с. 802] число собственных полуполей порядка 32, с точностью до изоморфизма, равно 2501. Они образуют 5 изотопных классов: 2 класса по 961 лево- и правоциклических полуполей, 2 класса по 186 аналогичных полуполей и еще по 7 с односторонней циклическостью. Оставшийся класс дают единственное ни лево-, ни правоциклическое полуполе и еще 192 полуполя с различными вариантами циклическости.

Т а б л и ц а 6
Обратные к элементам и спектр лупы Q_1^*

Элемент y	Левый обратный	Правый обратный	Порядок $ y $
(1,0,0,0,0)	(1,0,0,0,0)	(1,0,0,0,0)	1
(0,0,0,0,1)	(1,1,0,1,0)	(0,1,0,0,0)	5
(0,0,0,1,0)	(0,0,1,0,0)	(1,1,0,0,1)	6
(0,0,0,1,1)	(0,1,1,0,1)	(1,1,0,0,0)	6
(0,0,1,0,0)	(1,1,1,1,0)	(0,0,0,1,0)	5
(0,0,1,0,1)	(1,0,0,0,1)	(1,1,1,1,1)	5
(0,0,1,1,0)	(1,1,0,0,0)	(0,1,1,1,1)	4
(0,0,1,1,1)	(1,1,0,1,1)	(1,0,0,1,1)	5
(0,1,0,0,0)	(0,0,0,0,1)	(1,1,1,0,1)	5
(0,1,0,0,1)	(0,1,1,1,0)	(1,0,0,0,1)	4
(0,1,0,1,0)	(1,0,1,1,1)	(1,0,1,1,0)	6
(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)	(0,1,1,0,1)	4
(0,1,1,0,0)	(1,1,0,0,1)	(0,1,0,1,1)	5
(0,1,1,0,1)	(0,1,0,1,1)	(0,0,0,1,1)	4
(0,1,1,1,0)	(1,0,1,0,1)	(0,1,0,0,1)	6
(0,1,1,1,1)	(0,0,1,1,0)	(1,0,1,0,0)	6
(1,0,0,0,1)	(0,1,0,0,1)	(0,0,1,0,1)	5
(1,0,0,1,0)	(1,0,1,0,0)	(1,1,0,1,0)	5
(1,0,0,1,1)	(0,0,1,1,1)	(1,1,1,1,0)	6
(1,0,1,0,0)	(0,1,1,1,1)	(1,0,0,1,0)	6
(1,0,1,0,1)	(1,1,1,0,0)	(0,1,1,1,0)	5
(1,0,1,1,0)	(0,1,0,1,0)	(1,0,1,1,1)	5
(1,0,1,1,1)	(1,0,1,1,0)	(0,1,0,1,0)	5
(1,1,0,0,0)	(0,0,0,1,1)	(0,0,1,1,0)	4
(1,1,0,0,1)	(0,0,0,1,0)	(0,1,1,0,0)	6
(1,1,0,1,0)	(1,0,0,1,0)	(0,0,0,0,1)	6
(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,1)	(0,0,1,1,1)	6
(1,1,1,0,0)	(1,1,1,1,1)	(1,0,1,0,1)	5
(1,1,1,0,1)	(0,1,0,0,0)	(1,1,0,1,1)	5
(1,1,1,1,0)	(1,0,0,1,1)	(0,0,1,0,0)	4
(1,1,1,1,1)	(0,0,1,0,1)	(1,1,1,0,0)	7

Т а б л и ц а 7
Спектры луп Q_2^* и Q_3^*

Элемент y	Порядок $ y $ в Q_2^*	Порядок $ y $ в Q_3^*
(1,0,0,0,0)	1	1
(0,0,0,0,1)	6	5
(0,0,0,1,0)	5	6
(0,0,0,1,1)	5	6
(0,0,1,0,0)	6	6
(0,0,1,0,1)	5	5
(0,0,1,1,0)	5	5
(0,0,1,1,1)	5	5
(0,1,0,0,0)	5	7
(0,1,0,0,1)	6	7
(0,1,0,1,0)	5	5
(0,1,0,1,1)	5	5
(0,1,1,0,0)	5	6
(0,1,1,0,1)	5	6
(0,1,1,1,0)	6	6
(0,1,1,1,1)	6	5
(1,0,0,0,1)	6	5
(1,0,0,1,0)	4	6
(1,0,0,1,1)	5	5
(1,0,1,0,0)	6	7
(1,0,1,0,1)	5	7
(1,0,1,1,0)	5	5
(1,0,1,1,1)	7	6
(1,1,0,0,0)	6	4
(1,1,0,0,1)	6	6
(1,1,0,1,0)	5	7
(1,1,0,1,1)	4	7
(1,1,1,0,0)	6	6
(1,1,1,0,1)	5	5
(1,1,1,1,0)	6	5
(1,1,1,1,1)	5	6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курош А.Г.** Лекции по общей алгебре. СПб: Лань, 2007. 560 с.
2. **Veblen O., MacLagan-Wedderburn J.H.** Non-desarguesian and non-pascalian geometries // Trans. Amer. Math. Soc. 1907. Vol. 8, no. 3. P. 379–388.
3. **Dickson L.E.** Linear algebras in which division is always uniquely possible // Trans. Amer. Math. Soc. 1906. Vol. 7, no. 3. P. 370–390.
4. **Johnson N.L., Jha V., Biliotti M.** Handbook of finite translation planes. London; New York, 2007. 861 p.
5. **Холл М.** Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 460 с.
6. **Liebeck M.** The classification of finite simple Moufang loops // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1987. Vol. 102. P. 33–47.
7. **Grishkov A.N., Zavarnitsine A.V.** Lagrange’s theorem for Moufang loops // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2005. Vol. 139. P. 101–116.
8. **Grishkov A.N., Zavarnitsine A.V.** Sylow’s theorems for Moufang loops // J. Algebra. 2009. Vol. 321, no. 7. P. 1813–1825.
9. **Gagola S. M. III** Hall’s theorem for Moufang loops // J. Algebra. 2010. Vol. 323, no. 12. P. 3252–3262.
10. **Wene G.P.** On the multiplicative structure of finite division rings // Aequationes Math. 1991. Vol. 41, iss. 1. P. 222–233.
11. **Knuth D.E.** Finite semifields and projective planes (PhD dissertation). Pasadena: California Inst. Technology, 1963. 70 p.
12. **Knuth D.E.** Finite semifields and projective planes // J. Algebra. 1965. Vol. 2. P. 182–217.
13. **Rua I.F.** Primitive and non-primitive finite semifields // Commun. Algebra. 2004. Vol. 32, no. 2. P. 793–803.
14. **Levchuk V.M., Panov S.V., Shtukkert P.K.** The structure of finite quasifields and their projective translation planes // Proc. XII Intern. Conf. on Algebra and Number Theory. Tula, 2014. P. 106–108.
15. **Levchuk V.M., Shtukkert P.K.** Problems on structure for quasifields of orders 16 and 32 // J. Sib. Fed. Univ. Ser. Math. Phys. 2014. Vol.7, no. 3. P. 362–372.
16. **Штуккерт П.К.** Квазиполя и проективные плоскости трансляций малых четных порядков // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2014. Т. 7, № 1. С. 144–159.
17. **Hughes D.R., Piper F.C.** Projective planes. New-York: Springer-Verlag, 1973. 291 p.
18. **Lüneburg H.** Translation planes. New-York: Springer-Verlag, 1980. 278 p.
19. **Andre J.** Uber nicht-Desarguesche Ebenen mit transitiver Translationgruppe // Math. Z. 1954. Vol. 60. P. 156–186.
20. **Kallaher M.** Affine planes with transitive collineation groups. New York: North-Holland, 1982. 155 p.
21. **Albert A.A.** Finite division algebras and finite planes // Proc. Sympos. Appl. Math. Providence: Amer. Math. Soc, 1960. Vol. 10. P. 53–70.
22. **Wesson J.R.** On Veblen-Wedderburn systems // Amer. Math. Monthly. 1957. Vol. 64, no. 9. P. 631–635.
23. **Walker R.J.** Determination of division algebras with 32 elements // Proc. Symp. Appl. Math. 1962. Vol. 15. P. 83–85.
24. **Kleinfeld E.** Techniques for enumerating Veblen-Wedderburn systems // J. Assoc. Comput. Mach. 1960. Vol. 7. P. 330–337.
25. **Dempwolff U., Reifart A.** The Classification of the translation planes of order 16, Part I // Geom. Dedic. 1983. Vol. 15. P. 137–153.
26. **Dempwolff U.** Translation Planes of Small Order: [e-resource].
URL: http://www.mathematik.uni-kl.de/~dempw/dempw_Plane.html.

27. **Штуккерт П.К.** Квазиполя и проективные плоскости трансляций малых четных порядков: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Сиб. федер. ун-т. Красноярск, 2014. 83 с.
28. **Rockenfeller R.** Translationsebenen der Ordnung 32 (Diploma Thesis) / FB Mathematik. University of Kaiserslautern. 2011. 93 p.

Левчук Владимир Михайлович
д-р физ.- мат. наук, профессор
зав. кафедрой

Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Поступила 25.02.15

Штуккерт Полина Константиновна

канд. физ.- мат. наук
старший преподаватель

Норильский федеральный университет – Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики
e-mail: Poli422@yandex.ru

УДК 512.556

ПОЛУКОЛЬЦА, БЛИЗКИЕ К РЕГУЛЯРНЫМ, И ИХ ПИРСОВСКИЕ СЛОИ¹**Р. В. Марков, В. В. Чермных**

В работе исследуются пирсовские слои полуколец и свойства, поднимаемые со слоев до исходного полукольца. Объектами исследования являются полукольца с нетривиальной алгеброй идемпотентов, а именно, бирегулярные и риккартовы полукольца с дополнительными условиями. Получены характеристики таких полуколец в терминах свойств их пирсовских слоев и пирсовских пучков.

Ключевые слова: риккартово полукольцо, бирегулярное полукольцо, пирсовский слой, пирсовский пучок полукольца.

R. V. Markov, V. V. Chermnykh. Semirings close to regular and their Pierce stalks.

We investigate Pierce stalks of semirings and the properties of semirings that grow from properties of the stalks. Objects of study are semirings with nontrivial algebra of idempotents, namely, biregular and Rickart semirings with additional conditions. We obtain characterizations of such semirings in terms of the properties of their Pierce stalks and Pierce sheaves.

Keywords: Rickart semiring, biregular semiring, Pierce stalk, Pierce sheaf of semiring.

Р. С. Пирсом [1] для произвольного кольца R с 1 был построен пучок колец на нульмерном компакте $\text{Max } BR$ со слоями R/MR , где M — максимальный идеал булева кольца BR центральных идемпотентов из R . Им же было показано, что произвольное кольцо R с 1 изоморфно кольцу всех глобальных сечений своего пирсовского пучка. Нетривиальный пирсовский пучок существует для колец с богатой алгеброй центральных идемпотентов, и поэтому пирсовские пучки применялись при исследовании регулярных, бирегулярных, заменяемых, чистых колец [1–6]. Беджесс и Стефенсон построили и успешно применяли конструкцию пирсовской цепи идеалов кольца [7; 8]. Поскольку кольцо есть подпрямое произведение своих пирсовских слоев, важной является задача нахождения связей между кольцом и его пирсовскими слоями. В нашей работе решается такая задача для полуколец.

Отметим, что аналоги пирсовских пучков колец были получены и для некоторых других алгебраических систем: ограниченных дистрибутивных решеток, почти-колец, решеточно упорядоченных колец и решеточно упорядоченных абелевых групп, универсальных алгебр [9–12]. Для полуколец конструкция, обобщающая пирсовский пучок колец, была рассмотрена В. В. Чермных [13].

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество S с бинарными операциями $+$ и \cdot называется *полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

- (1) $(S, +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;
- (2) (S, \cdot) — полугруппа с нейтральным элементом 1;
- (3) умножение дистрибутивно относительно сложения:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$$

для любых $a, b, c \in S$;

- (4) $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Полукольцо S называется *коммутативным в нуле (симметрическим в нуле)*, если $ab = 0$ влечет $ba = 0$ ($abc = 0$ влечет $acb = 0$).

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки (проект 1.1375.2014/К).

Левый аннулятор $\text{ann}_l(B) = \{s \in S: sB = 0\}$ множества $B \subseteq S$ является левым идеалом полукольца S ; левый (правый) аннулятор элемента $a \in S$ обозначим через $\text{ann}_l(a)$ ($\text{ann}_r(a)$).

Полукольцо, в котором $a^n = 0$ при любом натуральном n влечет $a = 0$, назовем *полукольцом без нильпотентных элементов*.

Лемма 1. Для полукольца без нильпотентных элементов S справедливы утверждения:

- (1) S — коммутативное в нуле полукольцо;
- (2) $ab = 0$ влечет $asb = 0$ для любого $s \in S$;
- (3) S — симметрическое в нуле полукольцо;
- (4) $\text{ann}_l(a) = \text{ann}_r(a)$ для любого $a \in S$;
- (5) для любого подмножества $B \subseteq S$ множество $\text{ann}_l(B) = \text{ann}_r(B) = \text{ann}_l(SBS) = \text{ann}_r(SBS) = \{s \in S: SBS \cap SsS = 0\}$ является идеалом.

Доказательство. (1) $ab = 0$ влечет $(ba)^2 = 0$, отсюда $ba = 0$.

(2) Если $ab = 0$, то из (1) следует $(asb)^2 = 0$, и тогда $asb = 0$.

(3) Если $abc = 0$, то, применив (2), получаем $acbacb = 0$, отсюда следует $acb = 0$.

(4) следует из (1).

(5) Пусть SBS — идеал, порожденный множеством B , состоящий из всех конечных сумм элементов вида sbt для произвольных $s, t \in S, b \in B$. Положим $D = \{d \in S: SBS \cap SdS = 0\}$. Для любого $d \in D$ выполняется $dB \subseteq SBS \cap SdS = 0$, поэтому $D \subseteq \text{ann}_l(B)$. Аналогично $D \subseteq \text{ann}_r(B)$. По свойствам (1) и (2) $\text{ann}_l(B) = \text{ann}_r(B) \subseteq \text{ann}_l(SBS)$. Очевидно, $\text{ann}_l(SBS) \subseteq \text{ann}_l(B)$. Если $a \in \text{ann}_l(SBS)$, то $(SaS \cap SBS)^2 = 0$ и поэтому $SaS \cap SBS = 0$. Получили $\text{ann}_l(SBS) \subseteq D$. Очевидно, D — идеал. \square

Мультипликативно идемпотентный элемент $e = e^2$ полукольца S договоримся называть *идемпотентом*. Элемент e полукольца S называется *центральным*, если $es = se$ для любого $s \in S$; *дополняемым*, если существует такой $e^\perp \in S$, что $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = e^\perp e = 0$. Заметим, что дополнение к произвольному центральному элементу является центральным дополняемым идемпотентом и определяется однозначно. Обозначим через BS множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S . Непосредственно проверяется, что (BS, \oplus, \cdot) с операцией сложения $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$ и полукольцевым умножением образует булево кольцо. Обозначим через $\text{Max } BS$ пространство всех максимальных идеалов BS , наделенное стоуновской топологией. Напомним, что $\text{Max } BS$ является нульмерным компактом с базой открыто-замкнутых множеств вида $D(e) = \{M \in \text{Max } BS: e \notin M\}$.

Элемент $d \in S$ называется *левым (правым) уравниателем* элементов $a, b \in S$, если $da = db$ ($ad = bd$). Множество всех левых (правых) уравниателей элементов a, b обозначим через $l(a, b)$ ($r(a, b)$). Множество $(a, b)^* = l(a, b) \cap r(a, b)$ всех элементов полукольца, являющихся одновременно и правыми, и левыми уравниателями, есть идеал. Назовем полукольцо S *полукольцом без уравниателей*, если для любой пары различных элементов $a, b \in S$ выполняется $l(a, b) = r(a, b) = 0$.

Введенные определения являются естественными полукольцевыми аналогами понятий делителя нуля и области. Нам потребуются (идейно) похожие обобщения коммутативности и симметричности в нуле.

Полукольцо S называется *симметрическим (слабо симметрическим)*, если для любых $a, b, c, d \in S$ выполняется $abc = abd \Leftrightarrow acb = adb$ ($bc = bd \Leftrightarrow cb = db$).

Очевидно, слабо симметрическое полукольцо является симметрическим, обратное не верно. Симметрическим полукольцом будет, помимо коммутативного, *редуцированное полукольцо*, задаваемое импликацией $a^2 + b^2 = ab + ba \Rightarrow a = b$. Редуцированное полукольцо является полукольцом без нильпотентов.

Лемма 2. Пусть S — слабо симметрическое полукольцо.

- (1) $l(a, b) = r(a, b)$ для любых $a, b \in S$.
- (2) Любой идемпотент из S централен.

Доказательство очевидно. \square

Определение 2. Полукольцо S назовем *риккартовым справа*, если для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент e , что $\text{ann}_r(a) = eS$; полукольцо, являющееся риккартовым справа и слева, назовем *риккартовым*. Слабо симметрическое полукольцо S назовем *строго риккартовым*, если для любых $a, b \in S$ идеал $(a, b)^*$ порождается центральным дополняемым идемпотентом.

Предложение 1. Для полукольца S равносильны условия:

- (1) S — риккартово справа или слева полукольцо, и каждый дополняемый идемпотент централен;
- (2) S — риккартово справа или слева полукольцо без нильпотентных элементов;
- (3) S — риккартово полукольцо без нильпотентных элементов;
- (4) каждый элемент в S является произведением центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля;
- (5) S — полукольцо без нильпотентных элементов, и для любого конечно порожденного идеала из S существует такой центральный дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\text{ann}_l(B) = \text{ann}_r(B) = Se = eS$.

Доказательство. Импликация (3) \Rightarrow (2) очевидна.

(2) \Rightarrow (1). Пусть f — дополняемый идемпотент из S с дополнением f^\perp . Тогда $\text{ann}_r(f^\perp)$ содержит элемент fs для любого $s \in S$. Поскольку S — полукольцо без нильпотентных элементов, то по утверждению (4) леммы 1 $fs \in \text{ann}_l(f^\perp)$, поэтому $fsf^\perp = 0$. Получаем $fsf = fsf + fsf^\perp = fs(f + f^\perp) = fs$. Таким же образом доказывается, что $sf = fsf$ и f — центральный дополняемый идемпотент.

(1) \Rightarrow (4). Пусть S — риккартово справа полукольцо, каждый дополняемый идемпотент которого централен. Покажем, что S — полукольцо без нильпотентных элементов. Действительно, пусть $s^2 = 0$ для некоторого $s \in S$. Тогда $\text{ann}_r(s) = fS$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента f . Получаем $s \in \text{ann}_r(s) = fS$, поэтому $s = fs = sf = 0$. Пусть теперь a — произвольный элемент из S . По утверждению (4) леммы 1 $\text{ann}_l(a) = \text{ann}_r(a) = Se = eS$ для подходящего дополняемого идемпотента $e \in S$, и S риккартово слева. Положим $d = e^\perp a + e$. Тогда $e^\perp d = e^\perp a = e^\perp a + ea = a$. Покажем, что d — неделитель нуля. Пусть $b \in \text{ann}_l(d)$, тогда $0 = bd = be^\perp a + be$, отсюда $0 = e(be^\perp a + be) = be$ и $be^\perp a = 0$. Поскольку $\text{ann}_r(a) = eS$, то $ae = 0$ и $ae^\perp = a$. Получаем $ba = bae^\perp = 0$, следовательно, $b \in \text{ann}_l(a) = Se$. Для некоторого $s \in S$ имеем $b = se = be = 0$. Получили, что $\text{ann}_l(d) = 0$. Так же доказывается, что $\text{ann}_r(d) = 0$.

(4) \Rightarrow (3). Пусть $a = ed$ — ненулевой элемент из S для некоторых $e = e^2$ и неделителя нуля d , и пусть $b \in \text{ann}_l(a)$. Тогда $b = bed = 0$, отсюда $be = 0$. Получаем $b = be + be^\perp = be^\perp \in Se^\perp$. Обратное включение $Se^\perp \subseteq \text{ann}_l(a)$ очевидно, и S риккартово слева. Правая риккартовость доказывается аналогично. Покажем, что S — полукольцо без нильпотентных элементов. Допустим, что $a^n = 0$, тогда $0 = a^n = e^n d^n$ и $0 = e^n d^{n-1} = a^{n-1}$. По индукции получаем $a = 0$.

(5) \Rightarrow (3) следует из утверждения (5) леммы 1, если в качестве B взять главный идеал.

(1) \wedge (3) \Rightarrow (5). Пусть $B = \sum_{i=1}^n Sb_iS$ — конечно порожденный идеал и e_i — такие центральные дополняемые идемпотенты, что $\text{ann}_r(b_i) = e_iS$ для любых $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим центральный дополняемый идемпотент $e = e_1 \cdot \dots \cdot e_n$. Заметим, что по утверждению (3) леммы 1 условие $a \in \text{ann}_r(B)$ равносильно $b_i a = 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$, а это равносильно $a \in \cap_{i=1}^n \text{ann}_r(b_i) = \cap_{i=1}^n e_iS$. Включение $eS \subseteq \cap_{i=1}^n e_iS$ очевидно, покажем обратное включение. Если $x \in \cap_{i=1}^n e_iS$, то $x = e_i s_i = e_i^2 s_i = e_i x$ и e_i являются локальными единицами для элемента x . Также локальной единицей для x будет их произведение, поэтому $x = ex$ и $\cap_{i=1}^n e_iS \subseteq eS$. Получили $\text{ann}_r(B) = eS$. По лемме 1 $\text{ann}_l(B) = \text{ann}_r(B)$. \square

Пусть e, f — различные элементы булева кольца R . Ясно, что из этой пары мы можем выбрать элемент f , допустим, таким образом, что f ненулевой, и мультипликативно замкнутое множество $\{1, f\}$ не содержит e . Тогда идеал M , максимальный среди содержащих e и

не пересекающихся с $\{1, f\}$, является простым. Известно, что простой идеал булева кольца является максимальным. Получили, что различные элементы булева кольца *разделяются некоторым максимальным идеалом*.

Рассмотрим произвольный элемент a риккартова полукольца S без нильпотентных элементов. По предложению 1 a есть произведение центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля. Предположим, что e, f — различные центральные дополняемые идемпотенты из S и $a = ed_1 = fd_2$ для некоторых неделителей нуля d_1, d_2 . Идемпотенты e и f разделяются некоторым идеалом $M \in \text{Max } BS$, пусть $e \in M, f \notin M$. Тогда $0 = e^\perp ed_1 = e^\perp fd_2$, и $e^\perp f \notin M$ в силу простоты максимального идеала. Получили, что d_2 — делитель нуля, противоречие. Таким образом, с каждым элементом a риккартова полукольца S без нильпотентных элементов однозначно связан центральный дополняемый идемпотент e_a и выполняется равенство $a = e_a d$ для некоторого неделителя нуля d . Понятно, что в общем случае d определяется не однозначно.

Для исследования риккартовых и строго риккартовых полуколец нам потребуется конструкция пирсовского пучка полуколец. С терминологией и методами пучковых представлений можно познакомиться в [14; 16] и в иных статьях, указанных в списке литературы.

Пусть S — произвольное полукольцо, M — максимальный идеал булева кольца BS центральных дополняемых идемпотентов. Стандартно проверяется, что отношение

$$a \equiv b(\rho_M) \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp \text{ для некоторого } e \in M$$

является конгруэнцией на полукольце S ; назовем ρ_M *пирсовской конгруэнцией*. Ядром, или классом нуля, пирсовской конгруэнции является идеал $\overline{M} = MS$. Факторполукольцо S/ρ_M по пирсовской конгруэнции называется *пирсовским слоем* полукольца S . Эта терминология идет от конструкции пучка колец с единицей, построенного Р. С. Пирсом [1]. Там же было дано изоморфное представление произвольного кольца с единицей сечениями пирсовского пучка. В дальнейшем пирсовское представление колец было обобщено на полукольца с единицей.

О п р е д е л е н и е 3. Пучок полуколец $(P(S), \text{Max } BS)$ называется *пирсовским пучком полукольца S* , если базисное пространство — максимальный спектр булева кольца центральных дополняемых идемпотентов из S , а накрывающее пространство — дизъюнктивное объединение всех пирсовских слоев полукольца S .

Следующее предложение устанавливает связь между произвольным полукольцом с единицей и его пирсовским пучком.

Предложение 2 [13; 14]. *Произвольное полукольцо S с единицей изоморфно полукольцу всех глобальных сечений своего пирсовского пучка $(P(S), \text{Max } BS)$.*

Сейчас мы приступим к характеристике полуколец свойствами, связанными со свойствами пирсовских пучков, в частности их пирсовских слоев. Перед этим укажем используемые базовые свойства пучковых конструкций.

Глобальное (т. е. определенное на всем базисном пространстве) сечение пирсовского пучка $(P(S), \text{Max } BS)$ по предложению 2 задается некоторым однозначно определенным элементом $a \in S$ и обозначается через \hat{a} . В каждом пирсовском слое S/ρ_M сечение \hat{a} принимает значение $\hat{a}(M) = h_M(a)$ — образ элемента a при естественном эпиморфизме $h_M: S \rightarrow S/\rho_M$. Часто используется такое свойство: множество, на котором совпадают два сечения пучка, открыто. В частности, открытым является *нуль-множество* $z(\hat{a}) = \{M \in \text{Max } BS: \hat{a}(M) = \hat{0}(M)\}$ любого сечения. Понятно, что *носитель* $\text{supp } \hat{a} = \text{Max } BS \setminus z(\hat{a})$ произвольного сечения \hat{a} будет замкнут. Отметим еще одно свойство, используемое ниже. Если U — открыто-замкнутое подмножество базисного пространства пучка, то отображение $\chi_U: \text{Max } BS \rightarrow P(S)$, равное единичному сечению на U и нулевому на его дополнении, является глобальным сечением пучка и носит название *характеристического сечения*.

Предложение 3. Для полукольца S равносильны следующие условия:

- (1) S — полукольцо без нильпотентных элементов;
- (2) все пирсовские слои полукольца S — полукольца без нильпотентных элементов.

Доказательство. Докажем импликацию (1) \Rightarrow (2). Пусть S — полукольцо без нильпотентных элементов. Предположим, что некоторый пирсовский слой S/ρ_M содержит ненулевой нильпотентный элемент, т.е. для некоторого $a \in S$ выполняются $\hat{a}(M) \neq \hat{0}(M)$ и $\hat{a}^n(M) = \hat{0}(M)$ для подходящего натурального n . Поскольку $a \neq 0$, то $a^n \neq 0$ по предложению 2. Пусть $z(\hat{a}^n)$ — нуль-множество сечения \hat{a}^n . По свойствам пучка нуль-множество $z(\hat{a}^n)$ открыто, кроме того, $M \in z(\hat{a}^n)$, поэтому в силу нульмерности $\text{Max } BS$ найдется открыто-замкнутое подмножество $U \subseteq \text{Max } BS$, содержащее точку M . Пусть χ_U — характеристическое сечение множества U . Глобальное сечение

$$\varphi = \hat{a} \cdot \chi_U = \begin{cases} \hat{a} & \text{на } U \\ \hat{0} & \text{на } \text{Max } BS \setminus U \end{cases}$$

является ненулевым нильпотентным элементом полукольца всех глобальных сечений. По предложению 2 полукольцо глобальных сечений изоморфно S , поэтому и в S нашелся ненулевой нильпотентный элемент; противоречие показывает, что пирсовские слои — полукольца без нильпотентных элементов.

Докажем импликацию (2) \Rightarrow (1). Пусть все пирсовские слои полукольца S — полукольца без нильпотентов. Предположим, что в S есть нильпотент $a \neq 0$ такой, что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда в некотором пирсовском слое S/ρ_M выполняется $\hat{a}(M) \neq \hat{0}(M)$ и $\hat{a}^n(M) = \hat{0}(M)$. \square

О п р е д е л е н и е 4. Пучок (P, S) называется *хаусдорфовым*, если накрывающее пространство P является хаусдорфовым пространством; *полухаусдорфовым*, если любые две различные точки из P , одна из которых принадлежит образу нулевого сечения, имеют непересекающиеся открытые окрестности.

Характеризация хаусдорфовых пучков хорошо известна (см., например, [15, с. 14]); естественным образом получается аналог для полухаусдорфова пучка [14, лемма 5.2.4].

Лемма 3. Справедливы утверждения:

- (1) (P, X) хаусдорфов $\Leftrightarrow X$ — хаусдорфово пространство, и множество, на котором совпадают два произвольных сечения пучка P , открыто-замкнуто;
- (2) (P, X) полухаусдорфов $\Leftrightarrow X$ — хаусдорфово пространство, и нуль-множество произвольного сечения пучка P открыто-замкнуто.

Теорема 1. Для полукольца S равносильны условия:

- (1) S строго риккартово;
- (2) пирсовский пучок полукольца S хаусдорфов, и все его слои являются слабо симметрическими полукольцами без уравнителей.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2). Пусть $\hat{a}(M)\hat{s}(M) = \hat{b}(M)\hat{s}(M)$ для произвольных $a, b, s \in S$ и $M \in \text{Max } BS$. Допустим, что $\hat{s}(M) \neq \hat{0}(M)$. Сечения $\hat{a}\hat{s}$ и $\hat{b}\hat{s}$ совпадают на некоторой открыто-замкнутой окрестности U точки M в силу нульмерности $\text{Max } BS$. Рассмотрим характеристическое сечение χ_U , и пусть $\hat{e} = \chi_U$ для некоторого $e \in BS$. Очевидно, выполняются соотношения

$$ase = bse \text{ и } aes = bes.$$

Пусть f — центральный дополняемый идемпотент, порождающий $(ae, be)^*$. В силу слабой симметричности $s \in (ae, be)^*$, поэтому $s = sf$. Заметим, что \hat{f} в каждом слое принимает либо нулевое, либо единичное значение и так как $\hat{0}(M) \neq \hat{s}(M) = \hat{s}(M)\hat{f}(M)$, то $\hat{f}(M) = \hat{1}(M)$. Учитывая, что $f \in (ae, be)^*$, получаем

$$\hat{a}(M) = \hat{a}(M)\hat{e}(M)\hat{f}(M) = \hat{b}(M)\hat{e}(M)\hat{f}(M) = \hat{b}(M),$$

и слой в точке M — полукольцо без уравнивателей.

Покажем хаусдорфовость пирсовского пучка строго риккартова полукольца S . Пусть V — множество всех точек из $\text{Max } BS$, в которых совпадают сечения \hat{a} и \hat{b} для произвольных $a, b \in S$, и пусть $g \in BS$ порождает $(a, b)^*$. В силу отсутствия уравнивателей в пирсовских слоях пучка для любого $d \in (a, b)^*$ носитель $\text{supp } \hat{d}$ лежит в V , в частности $\text{supp } \hat{g} \subseteq V$. Рассмотрим произвольную точку $M \in V$. Изоморфность пирсовского представления позволяет отождествить сечения пучка с соответствующими элементами полукольца S . Поэтому найдется элемент $g_M \in BS \setminus M$ такой, что $ag_M = bg_M$. Поскольку $g_M \in (a, b)^*$, то $M \in \text{supp } \hat{g}_M \subseteq \text{supp } \hat{g}$, следовательно, $U \subseteq \text{supp } \hat{g}$. Получили, что $U = \text{supp } \hat{g}$ — открыто-замкнутое множество и по лемме 3 пучок хаусдорфов.

Осталось показать, что произвольный пирсовский слой полукольца S является слабо симметрическим полукольцом. Пусть $\hat{a}(M)\hat{s}(M) = \hat{b}(M)\hat{s}(M)$. Найдется открыто-замкнутая окрестность U точки M , на которой совпадают сечения $\hat{a}s$ и $\hat{b}s$. Пусть χ_U — характеристическое сечение, e — соответствующий этому сечению элемент из S . Тогда $\hat{a}s\hat{e} = \hat{b}s\hat{e}$, откуда $ase = bse$. Полукольцо S слабо симметрическое, поэтому $sea = seb$. Наконец, учитывая, что $\hat{a}(M) = \hat{b}(M)$, получаем $\hat{s}(M)\hat{a}(M) = \hat{s}(M)\hat{b}(M)$.

(2) \Rightarrow (1). Пусть пирсовский пучок полукольца S хаусдорфов. По лемме 3 для любых $a, b \in S$ множество U , на котором совпадают сечения \hat{a} и \hat{b} хаусдорфова пучка, открыто-замкнуто. Рассмотрим характеристическое сечение χ_U , равное единичному сечению на U . Пусть $f \in SB$ — соответствующий центральный дополняемый идемпотент $f \in S$. Очевидно, $f \in (a, b)^*$. Для произвольного элемента $r \in (a, b)^*$ получаем $\hat{a}\hat{r} = \hat{b}\hat{r}$. Если $\hat{a}(M) \neq \hat{b}(M)$ в некоторой точке $M \in \text{Max } BS$, то $\hat{r}(M) = \hat{0}(M)$, так как слои являются полукольцами без уравнивателей. Получаем, что носитель $\text{supp } \hat{r}$ лежит в U . Поэтому $r = fr$ и центральный дополняемый идемпотент f порождает идеал $(a, b)^*$. \square

Следствие. Пусть S — строго риккартово полукольцо. Тогда

- 1) элемент $d \in S$ в точности является неуравнителем, если сечение \hat{d} в каждом пирсовском слое полукольца S принимает ненулевое значение;
- 2) множества уравнивателей и делителей нуля полукольца S совпадают;
- 3) произвольный элемент S есть произведение центрального дополняемого идемпотента и неуравнителя;
- 4) S является риккартовым полукольцом без нильпотентных элементов; обратное не верно.

Доказательство. 1) По теореме 1 пирсовский пучок полукольца S хаусдорфов, а его слои — полукольца без уравнивателей. Пусть $ad = bd$ для различных $a, b \in S$. Тогда хотя бы в одном слое сечения \hat{a} и \hat{b} принимают различные значения, и \hat{d} в этом слое обязано равняться нулю. Обратное, пусть $z(\hat{d})$ непусто и \hat{e} — характеристическое сечение, совпадающее с единичным на $z(\hat{d})$. Тогда $ed = 0$ и элемент d является делителем нуля, поэтому — уравнивателем.

Утверждение 2) следует из того, что каждый неделитель нуля, как и неуравнитель, в любом пирсовском слое отличен от нуля.

3) Пусть a — произвольный элемент полукольца S . Нуль-множество $z(\hat{a})$ открыто-замкнуто, поэтому рассмотрим глобальные сечения

$$\hat{e} = \begin{cases} \hat{0} & \text{на } z(\hat{a}) \\ \hat{1} & \text{на } \text{Max } BS \setminus z(\hat{a}) \end{cases} \quad \text{и} \quad \hat{d} = \begin{cases} \hat{1} & \text{на } z(\hat{a}) \\ \hat{a} & \text{на } \text{Max } BS \setminus z(\hat{a}). \end{cases}$$

Легко проверить, что $\hat{a} = \hat{e}\hat{d}$, сечение \hat{d} отлично от нуля в каждом слое, а \hat{e} — центральный дополняемый идемпотент. Получили, что $a = ed$ для $e \in BS$ и неуравнителя d .

4) Первое утверждение следует из 2), 3) и предложения 1. Рассмотрим $L = \{0, a, 1\}$ — трехэлементную цепь. Понятно, что L является риккартовым полукольцом без нильпотентных элементов. Идеал $(a, 1)^* = \{0, a\}$ не порождается центральным дополняемым идемпотентом, поэтому L не будет строго риккартовым. \square

Предложение 4. Для полукольца S равносильны условия:

- (1) S — риккартово полукольцо без нильпотентов;
- (2) пирсовский пучок полукольца S полухаусдорфов, и все его слои являются полукольцами без делителей нуля;
- (3) все пирсовские слои полукольца S — полукольца без делителей нуля, и для любого $a \in S$ подмножество $D(\text{ann}_l(a) \cap BS)$ открыто-замкнуто в $\text{Max } BS$.

Доказательство. Импликации (1) \Rightarrow (2) и (2) \Rightarrow (1) получаются из доказательства теоремы 1, если положить $b = 0$. Отметим, что отсутствие нильпотентных элементов в S следует из предложения 3, поскольку пирсовские слои являются полукольцами без делителей нуля и, следовательно, без нильпотентных элементов. \square

Равносильность (2) \Leftrightarrow (3) вытекает из леммы 3 и следующего утверждения.

Лемма 4. Пусть пирсовские слои полукольца S — полукольца без делителей нуля. Тогда для любого элемента $a \in S$ выполняется равенство $z(\hat{a}) = D(\text{ann}_l(a) \cap BS)$.

Доказательство. Обозначим $A = \text{ann}_l(a) \cap BS$. Пусть $M \in D(A)$, тогда найдется такой $f \in BS \setminus M$, что $fa = 0$. Поскольку $\hat{f}(M) = \hat{1}(M)$, то $\hat{a}(M) = \hat{0}(M)$. Поэтому $M \in z(\hat{a})$ и $D(A) \subseteq z(\hat{a})$. Обратно, пусть $M \in z(\hat{a})$. В силу нульмерности $\text{Max } BS$ существует открыто-замкнутая окрестность U точки M , на которой \hat{a} равно нулю. Пусть \hat{f} — характеристическое сечение множества U . Получаем, что $\hat{f}(M) = \hat{1}(M)$, $f \in BS \setminus M$ и $fa = 0$. Следовательно, $M \in D(A)$ и, окончательно, $D(A) = z(\hat{a})$. \square

Определение 5. Полукольцо S называется *бирегулярным*, если каждый главный идеал из S порождается центральным дополняемым идемпотентом.

Напомним, что полукольцо S называется *простым*, если нулевой идеал является наибольшим собственным идеалом в S . Характеризация бирегулярных колец в терминах слоев была получена еще в пионерской работе Р. С. Пирса [1, р. 45]. При доказательстве существенно использовались топологические свойства сечений и пучка. С чисто алгебраическим доказательством этого результата авторы познакомились в монографии А. А. Туганбаева [2, 13.31]. Сейчас мы получим обобщение результата для бирегулярных полуколец; доказательство основано на свойствах решетки регулярных идеалов полукольца.

Определение 6. Идеал, порождаемый центральными дополняемыми идемпотентами, назовем *регулярным*.

Для каждого регулярного идеала A полукольца S отношение

$$a \equiv b(\rho_A) \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp \text{ для некоторого } e \in A \cap \text{Max } BS$$

является конгруэнцией на полукольце S ; назовем ρ_A *A-регулярной* конгруэнцией. Легко видеть, что ρ_M — пирсовская конгруэнция на полукольце S — это в точности M -регулярная конгруэнция для максимального собственного регулярного идеала M .

Теорема 2. Полукольцо S бирегулярно тогда и только тогда, когда все пирсовские слои полукольца S — простые полукольца.

Доказательство. Пусть $h: S \rightarrow S/\rho_M$ — естественный эпиморфизм на пирсовский слой бирегулярного полукольца S . Заметим, что для произвольного $m \in M$ найдется такой центральный дополняемый идемпотент f , что $m = fs$ для некоторого $s \in S$. Тогда $mf^\perp = 0$, $m \equiv 0(\rho_M)$, следовательно, $h(M) = h(0)$. Покажем, что ненулевой элемент пирсовского слоя S/ρ_M порождает весь слой. Пусть $h(a) \neq h(0)$, $a \in S$, и A — идеал полукольца S , порожденный элементом a . Полукольцо S бирегулярно, поэтому $A = eS$ для некоторого $e \in BS$, а $h(A)$ порождается элементом $h(a)$. Понятно, что e не лежит в M , поэтому $M + A = S$. Тогда $h(A) = h(M) + h(A) = h(S)$, и пирсовский слой S/ρ_M — простое полукольцо.

Обратно, пусть пирсовские слои полукольца S — простые полукольца. Предположим, что S не бирегулярно. Тогда найдется главный идеал $A = SaS$, не порождаемый центральным дополняемым идемпотентом. Рассмотрим множество E таких собственных регулярных идеалов B , что естественный образ идеала A в полукольце S/ρ_B (ρ_B — B -регулярная конгруэнция) не порождается образом центрального дополняемого идемпотента из S . Ясно, что нулевой идеал принадлежит E . Покажем, что объединение любой возрастающей цепи идеалов $\{P_i\}$ из E принадлежит множеству E . Идеал $P = \cup P_i$ является собственным регулярным идеалом, через h и h_i обозначим естественные гомоморфизмы в S/ρ_P и S/ρ_{P_i} соответственно. Допустим, что $h(A)$ порождается центральным дополняемым идемпотентом $h(e)$, где $e \in BS$. Тогда $h(e) = h(s_1)h(a)h(t_1) + \dots + h(s_k)h(a)h(t_k)$ и $h(a) = h(e)h(s)$ для подходящих $s, s_i, t_i \in S$. Получаем $e \equiv \sum_{i=1}^k s_i a t_i (\rho_P)$ и $a \equiv es (\rho_P)$, откуда $ef^\perp = (\sum_{i=1}^k s_i a t_i) f^\perp$ и $ag^\perp = esg^\perp$ для некоторых $f, g \in P \cap BS$. Существует такой $P_j \in \{P_i\}$, что $f, g \in P_j$, поэтому $h_j(e) = h_j(\sum_{i=1}^k s_i a t_i)$ и $h_j(a) = h_j(e)h_j(s)$, поскольку $h_j(f^\perp) = h_j(g^\perp) = h_j(1)$. Отсюда вытекает, что $h_j(A)$ порождается $h_j(e)$, противоречие. По лемме Цорна множество E содержит максимальный элемент M . Рассмотрим два случая, когда M — максимальный собственный регулярный идеал полукольца S и когда M — собственный идеал, не являющийся максимальным.

Первый случай. Тогда S/ρ_M — пирсовский слой, $h_M(A)$ — ненулевой идеал в простом полукольце S/ρ_M , поэтому $h_M(A) = h_M(S)$. Получили, что $h_M(A)$ порождается $h_M(1)$, противоречие.

Второй случай. Если M не является максимальным регулярным идеалом, то несложно показать, что найдется такой центральный дополняемый идемпотент e , что $M_1 = M + eS$ и $M + e^\perp S$ — собственные регулярные идеалы, строго содержащие M . Обозначим через $h: S \rightarrow S/\rho_M$ и $h_1: S \rightarrow S/\rho_{M_1}$ естественные гомоморфизмы. Поскольку $M_1 \notin E$, то $h_1(A)$ порождается $h_1(f)$ для некоторого $f \in BS$. Пусть $x \in A$, тогда $x \equiv fs (\rho_{M_1})$. Существует такой центральный дополняемый идемпотент v из M_1 , что $xv^\perp = fsv^\perp$. Отсюда получаем

$$xv^\perp + xv + fsv = fsv^\perp + xv + fsv, \quad x + fsv = fs + xv.$$

Элементы fsv, xv лежат в M_1 , поэтому $fsv = m_1 + es_1, xv = m_2 + es_2$ для некоторых $m_1, m_2 \in M, s_1, s_2 \in S$. Из $x + m_1 + es_1 = fs + m_2 + es_2$ получаем $h(x) + h(es_1) = h(fs) + h(es_2)$, откуда $h(xe^\perp) = h(e^\perp fs)$. Подобные рассуждения для идеала $M + e^\perp S$ приводят к равенству $h(xe) = h(egt)$ для некоторых $g \in BS$ и $t \in S$. Тогда $h(x) = h(xe^\perp) + h(xe) = h(e^\perp fs + egt)$. Непосредственно проверяется, что $w = e^\perp f + eg$ является центральным дополняемым идемпотентом (с дополнением $w^\perp = e^\perp f^\perp + eg^\perp$). Кроме того, $e^\perp f = e^\perp w$ и $eg = ew$, поэтому $h(x) = h(e^\perp fs + egt) = h(e^\perp ws + ewt) \in h(w)h(S)$ и $h(A) \subseteq h(w)h(S)$. Осталось показать, что $h(w) \in h(A)$. Имеем $f \equiv u (\rho_{M_1})$ для некоторого элемента $u \in A$. Тогда $ft^\perp = ut^\perp$ для подходящего $t = m + es \in (M + eS) \cap BS$. Получаем $f = ut^\perp + ft = ut^\perp + f(m + es)$, откуда $e^\perp f = e^\perp ut^\perp + e^\perp fm$ и $h(e^\perp f) = h(e^\perp t^\perp u) \in h(A)$. Аналогично доказывается, что $h(eg) \in h(A)$, откуда $h(w) = h(e^\perp f) + h(eg) \in h(A)$. Следовательно, $h(A)$ порождается образом центрального дополняемого идемпотента $h(w)$, противоречие. \square

Теорема 3. Для полукольца S равносильны условия:

- (1) S — бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов;
- (2) все пирсовские слои полукольца S — простые полукольца без делителей нуля.

Доказательство. Импликация (2) \Rightarrow (1) следует из предложения 3 и теоремы 2.

(1) \Rightarrow (2). Достаточно показать, что в простом полукольце без нильпотентных элементов нет делителей нуля, и воспользоваться предложением 3 и теоремой 2. Пусть $a, b \neq 0, ab = 0$. Тогда $a \in ann_l(b)$ и по утверждению (5) леммы 1 $ann_l(b)$ является ненулевым идеалом. Полукольцо S простое, поэтому $ann_l(b) = S$, откуда $1 \in ann_l(b)$ и $b = 1b = 0$, противоречие. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pierce R.S.** Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 70. P. 1–112.
2. **Туганбаев А.А.** Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.
3. **Тюкавкин Д.В.** Пирсовские пучки для колец с инволюцией. М.: Изд-во МГУ, 1982. Деп. ВИНТИ № 4346-82. 64 с.
4. **Carson A.B.** Representation of regular rings of finite index // J. Algebra. 1976. Vol. 39, no. 2. P. 512–526.
5. **Dauns J., Hofmann K.H.** The representation of biregular rings by sheaves // Math. Z. 1966. Vol. 91, no. 2. P. 103–123.
6. **Burgess W.D., Stephenson W.** Rings all of whose Pierce stalks are local // Canad. Math. Bull. Vol. 22, no. 2. 1979. P. 159–164.
7. **Burgess W.D., Stephenson W.** Pierce sheaves of non-commutative rings // Comm. Algebra. 1976. Vol. 39. P. 512–526.
8. **Burgess W.D., Stephenson W.** An analogue of the Pierce sheaf for non-commutative rings // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6, no. 9. P. 863–886.
9. **Cignoli R.** The lattice of global sections of sheaves of chains over Boolean spaces // Algebra Universalis. 1978. Vol. 8, no. 3. P. 357–373.
10. **Comer S.D.** Representation by algebras of sections over Boolean spaces // Pacific. Math. 1971. Vol. 38. P. 29–38.
11. **Georgescu G.** Pierce representations of distributive lattices // Kobe J. Math. 1993. Vol. 10, no. 1. P. 1–11.
12. **Keimel K.** The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves. Berlin: Springer, 1971. P. 1–98. (Lect. Notes Math.; vol. 248.)
13. **Чермных В.В.** Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186.
14. **Чермных В.В.** Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 3. С. 111–227.
15. **Бредон Г.** Теория пучков. М.: Наука, 1988. 312 с.
16. **Вечтомов Е.М.** Функциональные представления колец. М.: Изд-во МПГУ, 1993. 190 с.

Марков Роман Владимирович

Поступила 30.10.2014

младший науч. сотрудник

Вятский государственный гуманитарный университет

e-mail: markovrv@ya.ru

Чермных Василий Владимирович

д-р физ.-мат. наук, профессор

старший науч. сотрудник

Вятский государственный гуманитарный университет

e-mail: vv146@mail.ru

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, МИНИМАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТОГО СПЕКТРА¹

Н. В. Маслова

Пусть G — конечная группа. Множество всех простых делителей порядка группы G называется ее простым спектром и обозначается через $\pi(G)$. Группа G называется минимальной относительно простого спектра, если $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной подгруппы H из G . Доказывается, что каждая конечная группа, минимальная относительно простого спектра, все неабелевы композиционные факторы которой изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, порождается двумя сопряженными элементами. Тем самым расширяется полученный ранее аналогичный результат для конечных групп, все максимальные подгруппы которых холловы. Кроме того, исследуется нормальное строение конечной группы, минимальной относительно простого спектра и имеющей неабелев композиционный фактор, порядок которого делится ровно на 3 различных простых числа.

Ключевые слова: конечная группа, порождаемость парой сопряженных элементов, простой спектр, минимальная относительно простого спектра группа, максимальная подгруппа, композиционный фактор.

N. V. Maslova On the finite prime spectrum minimal groups.

Let G be a finite group. The set of all prime divisors of the order of G is called the prime spectrum of G and is denoted by $\pi(G)$. A group G is called prime spectrum minimal if $\pi(G) \neq \pi(H)$ for any proper subgroup H of G . We prove that every prime spectrum minimal group all whose non-abelian composition factors are isomorphic to the groups from the set $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$ is generated by two conjugate elements. Thus, we expand the correspondent result for finite groups with Hall maximal subgroups. Moreover, we study the normal structure of a finite prime spectrum minimal group which has a simple non-abelian composition factor whose order is divisible by 3 different primes only.

Keywords: finite group, generation by a pair of conjugate elements, prime spectrum, prime spectrum minimal group, maximal subgroup, composition factor.

1. Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин “группа” в значении “конечная группа”.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [1; 7; 8].

Наибольшая целая степень простого числа p , делящая натуральное число j , называется p -частью числа j и обозначается через j_p .

Пусть G — группа. Множество всех простых делителей порядка группы G называется *простым спектром группы G* и обозначается через $\pi(G)$. Группа G называется n -примарной, если $|\pi(G)| = n$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, не принадлежащих π . Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество всех его простых делителей. Заметим, что в этих обозначениях $\pi(|G|) = \pi(G)$ для конечной группы G .

Подгруппа H конечной группы G называется π -холловой подгруппой, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Холлова подгруппа — это π -холлова подгруппа для некоторого множества π

¹Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина “Династия”, Комплексной программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 15-16-1-5), проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006) (теорема 1) и Российского научного фонда (проект 14-11-00061) (теорема 2).

простых чисел. Будем говорить, что G — группа с холловыми максимальными подгруппами, если каждая максимальная подгруппа группы G является холловой.

Через $S(G)$ обозначается разрешимый радикал группы G (ее наибольшая разрешимая нормальная подгруппа), через $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G (пересечение всех ее максимальных подгрупп), а через $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p -подгруппа группы G .

П. Шумяцкий записал в “Коуровскую тетрадь” следующую гипотезу [2, проблема 17.125].

Гипотеза 1. В группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b \rangle)$.

Группу G назовем *минимальной относительно простого спектра*, если $\pi(H) \neq \pi(G)$ для любой собственной (равносильно, для любой максимальной) подгруппы H в G .

Можно показать (см. [5, лемма 5]), что гипотеза 1 эквивалентна следующей гипотезе.

Гипотеза 2. Любая группа, минимальная относительно простого спектра, порождается двумя сопряженными элементами.

В [5] было получено частичное подтверждение гипотезы 2. Более точно, наряду с классом групп, минимальных относительно простого спектра, был рассмотрен класс всех групп с холловыми максимальными подгруппами. Этот класс является собственным подклассом класса групп, минимальных относительно простого спектра, и любая разрешимая группа является группой с холловыми максимальными подгруппами тогда и только тогда, когда она минимальна относительно простого спектра [5, лемма 6]. В [5] было показано, что любая группа с холловыми максимальными подгруппами порождается парой сопряженных элементов.

Отметим, что доказать справедливость гипотезы 2 для групп с холловыми максимальными подгруппами удалось благодаря тому, что в работе [3] было показано, что неабелевы композиционные факторы таких групп изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, а в работе [4] получено полное описание нормального строения таких групп.

Отметим, что существуют группы, минимальные относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, не являющиеся, однако, группами с холловыми максимальными подгруппами (см. лемму 1). В настоящей работе мы доказываем следующую теорему, расширяющую основной результат работы [5].

Теорема 1. Пусть G — конечная группа, минимальная относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которой изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Тогда группа G порождается двумя сопряженными элементами.

Отметим, что этот результат получен снова благодаря использованию информации о нормальном строении групп, минимальных относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Поэтому проблема исследования нормального строения групп, минимальных относительно простого спектра, представляется естественной и интересной.

Доказана следующая

Теорема 2. Пусть G — конечная группа, имеющая в качестве неабелева композиционного фактора 3-примарную конечную простую группу S . Тогда верно одно из утверждений:

(i) $S \in \{A_6, PSU_3(3), PSU_4(2)\}$ и группа G не минимальна относительно простого спектра.

(ii) $S \in \{A_5, PSL_2(7), PSL_3(3)\}$ и группа G минимальна относительно простого спектра тогда и только тогда, когда G обладает нормальным рядом

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = \{1\}$$

таким, что

(1) при $i \geq 1$ группа G_i/G_{i+1} является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе группы G , и G/G_i действует неприводимо на G_i/G_{i+1} ;

(2) G_1 — холлова подгруппа в G_0 , и либо факторгруппа $\bar{G} = G_0/G_1$ изоморфна одной из простых групп A_5 или $PSL_3(3)$, либо $O_3(\bar{G}) = \Phi(\bar{G})$ и $\bar{G}/\Phi(\bar{G}) \cong PSL_2(7)$.

В частности, если $S \cong PSL_2(7)$, то группа G минимальна относительно простого спектра тогда и только тогда, когда G является группой с холловыми максимальными подгруппами.

(iii) $S \cong PSL_2(8)$ и если группа G минимальна относительно простого спектра, то ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группам из множества $\{S\} \cup \{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod{3}\}$.

(iv) $S \cong PSL_2(17)$ и если группа G минимальна относительно простого спектра, то ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группам из множества $\{S\} \cup \{Sz(2^w)\}$.

Кроме того, в случаях (iii) и (iv) выполняются следующие утверждения:

(а) для любой простой группы R из множества $\{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod{3}\}$ и $\{Sz(2^w)\}$ соответственно найдется минимальная относительно простого спектра группа G , имеющая неабелевы композиционные факторы, изоморфные S и R ;

(б) для любого натурального числа t найдутся группы R_1, \dots, R_m из множества $\{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod{3}\}$ и $\{Sz(2^w)\}$ соответственно и минимальная относительно простого спектра группа G , имеющая неабелевы композиционные факторы, изоморфные S, R_1, \dots, R_m .

2. Группы, минимальные относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$

Целью настоящего раздела является доказательство теоремы 1.

Сначала покажем непустоту класса групп, минимальных относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, не являющихся, однако, группами с холловыми максимальными подгруппами.

В соответствии с определением В. Гашюца [11], группа F называется p -фраттиниевым расширением группы G с ядром N , если $G \cong F/N$ для некоторой нормальной p -подгруппы $N \trianglelefteq F$ такой, что $N \leq \Phi(F)$. Если при этом ядро N является элементарной абелевой p -группой, то группа F называется p -элементарным фраттиниевым расширением группы G .

Лемма 1. *Существует 5-элементарное фраттинево расширение G группы $PSL_2(11)$ с ядром порядка 5^{11} . Группа G минимальна относительно простого спектра, но не является группой с холловыми максимальными подгруппами.*

Доказательство. Согласно [9] существует абсолютно неприводимый $\mathbb{F}_5PSL_2(11)$ -модуль степени 11 с нетривиальной второй группой когомологий, откуда ввиду [15, теорема I.17.2] следует, что существует нерасщепляемое расширение G группы $PSL_2(11)$ с элементарным абелевым ядром L порядка 5^{11} , где факторгруппа G/L действует на L неприводимо.

Заметим, что $L = \Phi(G)$. Действительно, пусть M — максимальная подгруппа группы G , не содержащая L . Тогда $G = LM$ и, поскольку подгруппа $L \cap M$ является G -инвариантной и факторгруппа G/L действует на L неприводимо, имеем $L \cap M = 1$. Противоречие с нерасщепляемостью расширения G над L . Обратное включение очевидно. Таким образом, группа G является 5-элементарным фраттинево расширением группы $PSL_2(11)$ с ядром порядка 5^{11} .

Используя описание максимальных подгрупп группы $PSL_2(11)$ (см. [8]), видим, что если M — максимальная подгруппа группы G , то $\pi(|G : M|) \setminus \pi(|M|)$ непусто, однако полный прообраз в G подгруппы из $PSL_2(11)$, изоморфной D_{12} , не является холловой подгруппой в G . Таким образом, группа G минимальна относительно простого спектра, но не является группой с холловыми максимальными подгруппами.

Лемма доказана.

Приведем несколько вспомогательных результатов о строении групп, минимальных относительно простого спектра.

Лемма 2 [5, лемма 4]. *Класс групп, минимальных относительно простого спектра, замкнут относительно взятия гомоморфных образов.*

Лемма 3. *Пусть S — простая неабелева группа такая, что $\pi(S) = \pi(\text{Aut}(S))$, G — группа, минимальная относительно простого спектра, такая, что $A = L_1 \times \dots \times L_n$ — минимальная неединичная нормальная подгруппа в G , где $L_i \cong S$ для всех i . Если факторгруппа G/A разрешима, то она тривиальна.*

Доказательство следует из доказательства [4, лемма 21].

Как известно, любой главный фактор группы является прямым произведением изоморфных простых групп. Мы скажем, что главный фактор K/L группы имеет композиционный тип S , если группа K/L изоморфна прямому произведению изоморфных копий простой группы S .

Лемма 4. *Пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра. Тогда*

- (1) G имеет не более одного неабелева главного фактора данного композиционного типа;
- (2) если X_1 и X_2 — два неизоморфных неабелевых композиционных фактора группы G , то $|\pi(X_1) \setminus \pi(X_2)| \geq 2$ и $|\pi(X_2) \setminus \pi(X_1)| \geq 2$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из [6, лемма 9].

Допустим, что утверждение (2) не верно, и группа G , минимальная относительно простого спектра, обладает главным рядом

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_n = \{1\}$$

таким, что главный фактор G_{i-1}/G_i имеет композиционный тип X_1 , а главный фактор G_{j-1}/G_j , где $i < j$, имеет композиционный тип X_2 .

Ввиду леммы 2 можно считать, что $G_j = 1$, т.е. $j = n$.

Пусть для краткости $\pi_{1,2} = \pi(X_1) \setminus \pi(X_2)$, $\pi_{2,1} = \pi(X_2) \setminus \pi(X_1)$, $X = G_{i-1}$, $Y = G_i$ и $H = G_{j-1}$. Тогда H — минимальная нормальная подгруппа в группе G , H неабелева, а факторгруппа $\bar{X} := X/Y$ — минимальная нормальная подгруппа в группе $\bar{G} := G/Y$.

Предположим, что $|\pi_{2,1}| \leq 1$. Пусть

$$p \in \begin{cases} \pi_{2,1}, & \text{если } \pi_{2,1} \neq \emptyset; \\ \pi(H), & \text{если } \pi_{2,1} = \emptyset. \end{cases}$$

Возьмем в H силовскую p -подгруппу P и рассмотрим ее нормализатор $N_G(P)$. Заметим, что $\pi(G) = \pi(G/H) \cup \pi(H) = \pi(G/H) \cup \pi(X/Y) \cup \pi_{2,1} = \pi(G/H) \cup \pi_{2,1}$. Ввиду аргумента Фраттини $G = HN_G(P)$, откуда

$$\pi(G) = \pi(G/H) \cup \pi_{2,1} = \pi(HN_G(P)/H) \cup \pi_{2,1} = \pi(N_G(P)/N_H(P)) \cup \pi_{2,1} \subseteq \pi(N_G(P))$$

и, следовательно, $N_G(P) = G$, т.е. $1 \neq P \trianglelefteq G$. Но $P \neq H$, так как H — прямое произведение неабелевых простых групп. Противоречие с тем, что H — минимальная нормальная подгруппа в G .

Предположим, что $|\pi_{1,2}| \leq 1$. Пусть

$$p \in \begin{cases} \pi_{1,2}, & \text{если } \pi_{1,2} \neq \emptyset; \\ \pi(X/Y), & \text{если } \pi_{1,2} = \emptyset. \end{cases}$$

Рассмотрим в группе \bar{X} силовскую p -подгруппу P . Заметим, что $N_{\bar{G}}(P)$ — собственная подгруппа в \bar{G} . Ввиду аргумента Фраттини $\bar{G} = \bar{X}N_{\bar{G}}(P)$. Поэтому $|\bar{G} : N_{\bar{G}}(P)| = |\bar{X} : N_{\bar{X}}(P)|$, следовательно, $\pi(|\bar{G} : N_{\bar{G}}(P)|) \subset \pi(H)$. Рассмотрим полный прообраз M в группе G подгруппы $N_{\bar{G}}(P)$. Поскольку $|G : M| = |\bar{G} : N_{\bar{G}}(P)|$ и $H \leq M$, имеем $\pi(M) = \pi(G)$. Противоречие с минимальностью группы G относительно простого спектра.

Лемма доказана.

Лемма 5 [5, предложение 5]. *Любая простая группа порождается двумя своими сопряженными элементами.*

Лемма 6 [5, предложение 6]. *Пусть \mathfrak{Z} — замкнутый относительно взятия гомоморфных образов подкласс класса групп, минимальных относительно простого спектра. Допустим, что существует группа $G \in \mathfrak{Z}$, не порождающаяся никакой парой своих сопряженных элементов. Будем считать при этом, что группа G имеет наименьший возможный порядок. Тогда $S(G) = 1$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которой изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Предположим, что G не порождается никакой парой своих сопряженных элементов.

Поскольку ввиду леммы 6 разрешимая группа, минимальная относительно простого спектра, порождается парой своих сопряженных элементов, группа G неразрешима.

Ввиду [8] имеем $\pi(PSL_2(7)) = \{2, 3, 7\}$, $\pi(PSL_2(11)) = \{2, 3, 5, 11\}$ и $\pi(PSL_5(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$. Таким образом, $|\pi(PSL_2(11)) \setminus \pi(PSL_5(2))| = 1 < 2$, $|\pi(PSL_2(7)) \setminus \pi(PSL_2(11))| = 1 < 2$ и $|\pi(PSL_2(7)) \setminus \pi(PSL_5(2))| = 0 < 2$, поэтому ввиду п. (2) леммы 4 группа G содержит ровно один неабелев главный фактор.

Пусть A — минимальная неединичная нормальная подгруппа в факторгруппе $G/S(G)$. Поскольку $\pi(PSL_2(7)) = \pi(\text{Aut}(PSL_2(7)))$, $\pi(PSL_2(11)) = \pi(\text{Aut}(PSL_2(11)))$ и $\pi(PSL_5(2)) = \pi(\text{Aut}(PSL_5(2)))$, ввиду леммы 3 имеем, что факторгруппа G/A тривиальна. Отсюда ввиду леммы 2 немедленно получаем, что факторгруппа $G/S(G)$ проста.

Будем считать, что группа G имеет наименьший возможный порядок. Заметим, что ввиду леммы 2 класс минимальных относительно простого спектра групп, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, замкнут относительно взятия факторгрупп. Поэтому ввиду леммы 6 группа G проста, что противоречит лемме 5.

Теорема 1 доказана.

3. Нормальное строение группы, минимальной относительно простого спектра и имеющей 3-примарный неабелев композиционный фактор

Целью настоящего раздела является доказательство теоремы 2.

Сначала приведем несколько вспомогательных результатов. Нам понадобится следующее теоретико-числовое утверждение.

Лемма 7 (теорема Герона [12]). *Пусть p и q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a и b . Тогда $(p^a, q^b) \in \{(3^2, 2^3), (2^a, q), (p, 2^b)\}$, где a — простое число и b — степень числа 2.*

Пусть G — группа, $A = L_1 \times \dots \times L_n$ — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа в G , $L_i \cong S$, где S — простая группа, и $X \leq S$. Группа G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{L_1, \dots, L_n\}$. Можно считать, что $L_1 = S$. Так как G действует транзитивно на Ω , имеем $n = |G : N_G(S)|$. Зафиксируем некоторую полную систему $\mathbf{B} = \{g_1, \dots, g_n\}$

представителей правых смежных классов группы G по подгруппе $N_G(S)$. Тогда подгруппы S^{g_i} попарно различны, и мы, не уменьшая общности, можем считать, что $L_i = S^{g_i}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Для любой подгруппы $X \leq S$ положим $X_i = X^{g_i}$ и $Y(G, A, S, X, \mathbf{B}) = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$.

Лемма 8. Пусть S — простая неабелева группа, содержащая подгруппу X такую, что класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $\text{Aut}(S)$ и существует простое число $r \in \pi(S)$ такое, что $\pi(|S : X|) \subseteq \pi(X) \cup \{r\}$, и пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра, обладающая нормальным рядом

$$G \geq T > Z \geq \{1\}$$

таким, что $T/Z = L_1 \times \dots \times L_n$ — минимальная неединичная нормальная подгруппа в G/Z , где $L_1 \cong S$. Тогда порядок $|Z|$ и индекс $|G : T|$ не делятся на r .

Доказательство. Рассмотрим факторгруппу G/Z , которая ввиду леммы 2 минимальна относительно простого спектра и обладает минимальной неединичной нормальной подгруппой $T/Z = L_1 \times \dots \times L_n$. Тогда факторгруппа G/Z находится в условиях [6, лемма 4], откуда немедленно получаем, что индекс $|G : T|$ не делится на r .

Как и в доказательстве [6, лемма 4], построим подгруппу $\bar{Y} = Y(G/Z, T/Z, S, X, \mathbf{B})$ группы G/Z , которая определена по тем же правилам, что и перед настоящей леммой, и заметим, что $N_{G/Z}(\bar{Y})$ — собственная подгруппа в G/Z , $\pi(X) \subset \pi(N_{G/Z}(\bar{Y}))$ и $\pi(|G/Z : \bar{Y}|) \subset \pi(S)$. Теперь легко понять, что если r делит порядок $|Z|$, то полный прообраз Y в G подгруппы \bar{Y} является собственной подгруппой в G и $\pi(Y) = \pi(G)$. Получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть G — группа и K — холлова разрешимая нормальная подгруппа в G . Тогда группа G минимальна относительно простого спектра, если и только если G обладает нормальным рядом

$$G = G_0 \geq G_1 = K \geq \dots \geq G_n = 1$$

таким, что выполняются следующие условия:

- (1) факторгруппа G_0/G_1 тривиальна или минимальна относительно простого спектра;
- (2) при $i \geq 1$ группа G_i/G_{i+1} является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе группы G , и G/G_i действует неприводимо на G_i/G_{i+1} .

Доказательство. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Условие (1) следует из леммы 2. Докажем п. (2).

Рассмотрим в G минимальную неединичную нормальную подгруппу P , содержащуюся в K . Так как K разрешима, P является элементарной абелевой p -группой для некоторого $p \in \pi(G)$. Рассмотрим факторгруппу $\bar{G} = G/P$ и докажем, что она является p' -группой.

Пусть p делит $|\bar{G}|$. Ввиду холловости подгруппы K имеем, что p делит $|\bar{K}|$. Поскольку \bar{K} разрешима, по теореме Холла — Чунихина в \bar{K} существует холлова p' -подгруппа T , и все такие подгруппы сопряжены в \bar{K} . Ввиду аргумента Фраттини имеем, что $\bar{G} = \bar{K}N_{\bar{G}}(T)$, поэтому $|\bar{G} : N_{\bar{G}}(T)| = |\bar{K} : N_{\bar{K}}(T)| = p^\alpha$ для некоторого целого неотрицательного числа α .

Пусть N — полный прообраз в G факторгруппы $N_{\bar{G}}(T)$. Тогда p делит $|N|$ и $|G : N| = p^\alpha$, откуда $\pi(N) = \pi(G)$. Значит, $N = G$, т. е. $T \leq \bar{G}$.

Пусть R — полный прообраз T в G . Тогда $R \leq G$ и P — холлова подгруппа в R . По теореме Шура — Цассенхауза $R = P \rtimes T_1$, где $T_1 \leq R$ и $T_1 \cong T$. Заметим, что T_1 является холловой p' -подгруппой в R и R разрешима. Поэтому ввиду теоремы Холла — Чунихина и аргумента Фраттини имеем $G = RN_G(T_1)$, откуда $|G : N_G(T_1)| = |R : N_R(T_1)|$ является степенью числа p . Заметим, что p делит $|N_G(T_1)|$, поэтому $\pi(N_G(T_1)) = \pi(G)$. Значит, $N_G(T_1) = G$, т. е. $T_1 \leq \bar{G}$.

Рассмотрим факторгруппу $\tilde{G} = G/T_1$. Заметим, что факторгруппа \tilde{K} является p -группой. Ввиду холловости подгруппы \tilde{K} из теоремы Шура — Цассенхауза следует, что $\tilde{G} = \tilde{K} \rtimes S$, где

$S \cong \tilde{G}/\tilde{K}$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{P} \cdot S$. Заметим, что $\pi(\tilde{P} \cdot S) = \pi(\tilde{G})$. Отсюда $|G|_p = |\tilde{G}|_p = |\tilde{P}| = |P|$, что и требовалось доказать.

Применение индукции по $|\pi(K)|$ завершает доказательство п. (2).

Пусть теперь группа G обладает нормальным рядом

$$G = G_0 > G_1 = K \geq \dots \geq G_n = 1$$

таким, что выполняются условия (1) и (2).

Докажем индукцией по n , что группа G минимальна относительно простого спектра. База индукции при $n = 1$ тривиальна.

Предположим теперь, что лемма справедлива для всех $m \leq n-1$, и рассмотрим в группе G нормальный ряд

$$G = G_0 \geq G_{n-1} > G_n = 1$$

и максимальную в G подгруппу M . Докажем, что $\pi(M) \neq \pi(G)$. Если $G_{n-1} \leq M$, то $\pi(M) = \pi(M/G_{n-1}) \cup \pi(G_{n-1})$ и, поскольку факторгруппа G/G_{n-1} минимальна относительно простого спектра, имеем $\pi(M) \neq \pi(G)$.

Предположим, что $G_{n-1} \not\leq M$. Ввиду максимальнойности M имеем $G = MG_{n-1}$. Так как группа G_{n-1} абелева и $M \cap G_{n-1} \trianglelefteq M$, имеем, что $M \cap G_{n-1} \trianglelefteq G$. Таким образом, поскольку G/G_{n-1} действует неприводимо на G_{n-1} , имеем, что $M \cap G_{n-1} = \{1\}$, т. е. $\pi(G_{n-1}) \not\subseteq \pi(M)$.

Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть G — группа, минимальная относительно простого спектра, такая, что $G/S(G) \cong PSL_2(7)$, 3 делит $|S(G)|$ и A — 3'-холлова подгруппа в $S(G)$. Тогда $A \triangleleft G$.

Доказательство. Данная лемма обобщает [4, лемма 24] и доказывается аналогично.

Лемма 11. Пусть S — неабелева простая группа. Тогда

(1) порядок S делится на 6 или на 10;

(2) порядок S не делится на 3, если и только если S изоморфна группе $Sz(q)$ для $q > 2$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из описания минимальных неабелевых простых групп [17, следствие 1].

Утверждение (2) следует из классификации конечных простых групп (см., например, [13]).

Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть L_1, L_2, \dots, L_k — простые группы такие, что для любой максимальной подгруппы M_i группы L_i существует простое число $p_i \in \pi(L_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} \pi(L_j)$ такое, что p_i не делит порядок $|M_i|$. Тогда группа $G = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_k$ минимальна относительно простого спектра.

Доказательство. Пусть M — максимальная подгруппа в G . Тогда существует i такое, что $L_i \not\leq M$. Следовательно, $G = ML_i$, откуда с применением соответствующей теоремы о гомоморфизме получаем, что $|G : M| = |L_i : L_i \cap M|$ и

$$|M| = |G|/|L_i : L_i \cap M| = |G : L_i| \cdot |L_i \cap M|.$$

Пусть M_i — максимальная подгруппа из L_i , содержащая $M \cap L_i$. Тогда порядок $|M|$ делит $|G : L_i| \cdot |M_i|$, и существует простое число $p_i \in \pi(L_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} \pi(L_j)$ такое, что p_i не делит порядок $|M_i|$. Таким образом, p_i не делит порядок $|M|$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть G — группа, имеющая в качестве неабелева композиционного фактора 3-примарную конечную простую группу S . Тогда группа G обладает главным рядом

$$G \geq T > Z \geq \{1\}$$

таким, что T/Z — главный фактор композиционного типа S .

Хорошо известно, что конечные простые неабелевы 3-примарные группы исчерпываются группами из следующего списка: $A_5, PSL_2(7), PSL_2(8), A_6, PSL_2(7), PSL_3(3), PSU_3(3), PSU_4(2)$ (см., например, [14]). Далее все сведения о подгрупповом строении этих групп взяты из [8].

Если $S \in \{A_6, PSU_3(3), PSU_4(2)\}$, то п. (i) заключения теоремы 2 следует из [6, теорема 1].

Лемма 13. *Если $S \in \{A_5, PSL_2(7), PSL_3(3)\}$ и группа G минимальна относительно простого спектра, то $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$.*

Доказательство. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Тогда ввиду п. (1) леммы 4 группа G имеет не более одного неабелева главного фактора композиционного типа S . Докажем сначала, что группа G не содержит неабелевых композиционных факторов, не изоморфных S .

Пусть $S \cong A_5$. Тогда $\pi(S) = \{2, 3, 5\}$. Ввиду п. (2) леммы 4, если группа G содержит неабелев композиционный фактор R , не изоморфный S , то $|\pi(S) \setminus \pi(R)| \geq 2$, что противоречит п. (1) леммы 11. Поэтому группы Z и G/T разрешимы.

Если $S \in \{PSL_2(7), PSL_3(3)\}$, то S содержит подгруппу X такую, что класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $\text{Aut}(S)$ и $\pi(|S : X|) \subseteq \pi(|X|) \cup \{2\}$, поэтому ввиду леммы 8 порядок $|Z|$ и индекс $|G : T|$ не делятся на 2. Таким образом, ввиду теоремы Фейта — Томпсона группы Z и G/T разрешимы.

Поскольку при $S \in \{A_5, PSL_2(7), PSL_3(3)\}$ имеем $\pi(S) = \pi(\text{Aut}(S))$, факторгруппа G/Z находится в условиях леммы 3, таким образом, факторгруппа G/T тривиальна, откуда немедленно следует, что $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 14. *Если $S \cong PSL_2(7)$, то выполняется п. (ii) заключения теоремы 2.*

Доказательство. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду леммы 13 имеем $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$. Рассмотрим 3'-холлову подгруппу A в $S(G)$. Ввиду леммы 10 имеем $A \trianglelefteq G$. Заметим, что индексы максимальных подгрупп группы $PSL_2(7)$ в точности исчерпываются числами из множества $\{7, 8\}$, поэтому порядок $|S(G)|$ не делится на 2 и на 7; таким образом, A — холлова подгруппа в G .

Факторгруппа $\bar{G} := G/A$ содержит нормальную (возможно, тривиальную) 3-подгруппу $\bar{Z} = Z/A = S(G)/A$. Докажем, что $\bar{Z} = \Phi(\bar{G})$. Включение $\Phi(\bar{G}) \leq \bar{Z}$ очевидно. Проверим обратное включение. Действительно, пусть существует максимальная подгруппа \bar{M} группы \bar{G} такая, что $\bar{Z} \not\leq \bar{M}$. Тогда $\bar{G} = \bar{M}\bar{Z}$, и с использованием соответствующей теоремы о гомоморфизме получаем, что $|\bar{G} : \bar{M}| = |\bar{Z} : (\bar{Z} \cap \bar{M})|$. Отсюда индекс $|\bar{G} : \bar{M}|$ делит $|\bar{Z}|_3$, поэтому $\pi(\bar{M}) \supseteq \pi(|\bar{G}|/|\bar{Z}|_3) = \{2, 3, 7\} = \pi(\bar{G})$. Противоречие с минимальностью группы \bar{G} относительно простого спектра.

Итак, $\bar{Z} = \Phi(\bar{G})$ и $\bar{G}/\bar{Z} \cong PSL_2(7)$, поэтому ввиду [4, предложение 2(1)] группа \bar{G} является группой с холловыми максимальными подгруппами.

Поскольку A — холлова разрешимая нормальная подгруппа в G , ввиду леммы 9 группа G обладает нормальным рядом

$$G = G_0 > G_1 = A \geq \dots \geq G_n = 1$$

таким, что выполняются следующие условия:

- (1) для факторгруппы $\bar{G} = G_0/G_1 = G/A$ имеем $\Phi(\bar{G}) = O_3(\bar{G})$ и $\bar{G}/\Phi(\bar{G}) \cong PSL_2(7)$;

(2) при $i \geq 1$ группа G_i/G_{i+1} является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе группы G , и G/G_i действует неприводимо на G_i/G_{i+1} .

В частности, ввиду [4, теорема 1] G — группа с холловыми максимальными подгруппами.

Обратно, при $S \cong PSL_2(7)$ группа G , обладающая нормальным рядом, указанным в п. (ii) заключения теоремы 2, ввиду [4, теорема 1] является группой с холловыми максимальными подгруппами, в частности, минимальна относительно простого спектра.

Таким образом, выполняется п. (ii) заключения теоремы 2.

Лемма доказана.

Лемма 15. Если $S \cong A_5$ или $S \cong PSL_3(3)$, то выполняется п. (ii) заключения теоремы 2.

Доказательство. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду леммы 13 имеем $G/Z \cong S$ и $Z = S(G)$. Заметим, что для любого $p \in \pi(S)$ существует максимальная подгруппа Q группы S такая, что $\{p\} = \pi(S) \setminus \pi(Q)$. Поэтому $S(G)$ — холлова подгруппа в G . Применение леммы 9 завершает доказательство.

Обратное утверждение непосредственно следует из леммы 9 и минимальности относительно простого спектра группы S .

Лемма доказана.

Лемма 16. Если $S \cong PSL_2(8)$, то выполняется п. (iii) заключения теоремы 2.

Доказательство. Заметим, что $\pi(S) = \{2, 3, 7\}$. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду п. (2) леммы 4, если группа G содержит неабелев композиционный фактор R , не изоморфный S , то $|\pi(S) \setminus \pi(R)| \geq 2$. Из теоремы Фейта — Томпсона следует, что 3 и 7 не делят порядок $|R|$, отсюда и из п. (2) леммы 11 следует, что $R \in \{Sz(2^w) \mid w \equiv \pm 1 \pmod{3}\}$.

Лемма доказана.

Лемма 17. Если $S \cong PSL_2(17)$, то выполняется п. (iv) заключения теоремы 2.

Доказательство. Заметим, что $\pi(S) = \{2, 3, 17\}$. Пусть группа G минимальна относительно простого спектра. Ввиду п. (2) леммы 4, если группа G содержит неабелев композиционный фактор R , не изоморфный S , то $|\pi(S) \setminus \pi(R)| \geq 2$. Из теоремы Фейта — Томпсона следует, что 3 и 17 не делят порядок $|R|$, отсюда и из п. (2) леммы 11 следует, что $R \in \{Sz(2^w)\}$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 завершает следующая серия примеров. Для их построения нам понадобится вспомогательная информация о группах Судзуки. Группы $Sz(q)$ минимальны относительно простого спектра ввиду [16, следствие 5, табл. 10.7]. Все максимальные подгруппы группы $Sz(q)$, где $q = 2^w \geq 8$ и w нечетно, известны и приведены в таблице ниже (см., например, [10, табл. 8.16]), и $|Sz(q)| = q^2(q^2 + 1)(q - 1)$.

Структура подгруппы T	$ T $	Примечания	$ Sz(q) : T $
$[q^2] \cdot (q - 1)$	$q^2(q - 1)$	Параболическая	$q^2 + 1$
$D_{2(q-1)}$	$2(q - 1)$		$q^2(q^2 + 1)/2$
$[q + (2q)^{1/2} + 1] \cdot 4$	$4(q + (2q)^{1/2} + 1)$		$\frac{q^2(q^2 + 1)(q - 1)}{4(q + (2q)^{1/2} + 1)}$
$[q - (2q)^{1/2} + 1] \cdot 4$	$4(q - (2q)^{1/2} + 1)$		$\frac{q^2(q^2 + 1)(q - 1)}{4(q - (2q)^{1/2} + 1)}$
${}^2B_2(q_0)$	$q_0^2(q_0 - 1)(q_0^2 + 1)$	$q = q_0^r, q_0 \geq 8, r$ простое	$\frac{q^2(q^2 + 1)(q - 1)}{q_0^2(q_0^2 + 1)(q_0 - 1)}$

Лемма 18. Пусть $S = PSL_2(8)$ и $R = Sz(2^w)$, где $1 < w \equiv \pm 1 \pmod{3}$. Тогда группа $S \times R$ минимальна относительно простого спектра.

Доказательство. Заметим, что $(2^i - 1, 7) = (2^i - 1, 2^3 - 1) = 2^{(i,3)} - 1$ и $(2^{2i} + 1, 7)$ делит $(2^{4i} - 1, 2^3 - 1) = 2^{(4i,3)} - 1$; таким образом, 7 не делит $|R|$ при $w \equiv \pm 1 \pmod{3}$. Значит, $\pi(R) \cap \pi(S) = \{2\}$. Легко понять, что индекс никакой собственной подгруппы из R и никакой собственной подгруппы из S не является степенью числа 2. Применение леммы 12 завершает доказательство.

Лемма доказана.

Лемма 19. Пусть $S = PSL_2(17)$ и $R = Sz(2^w)$, где $w > 1$. Тогда группа $S \times R$ минимальна относительно простого спектра.

Доказательство. Заметим, что при нечетном i имеем: $(2^i - 1, 2^4 + 1)$ делит $(2^i - 1, 2^8 - 1) = 2^{(i,8)} - 1 = 1$ (т.е. $(2^i - 1, 2^4 + 1) = 1$) и $(2^{2i} + 1, 17)$ делит $(2^{4i} - 1, 2^8 - 1) = 2^{(4i,8)} - 1 = 15$ (т.е. $(2^{2i} + 1, 17) = 1$); таким образом, 17 не делит $|R|$ при любом w . Значит, $\pi(R) \cap \pi(S) = \{2\}$. Легко понять, что индекс никакой собственной подгруппы из R и никакой собственной подгруппы из S не является степенью числа 2. Применение леммы 12 завершает доказательство.

Лемма доказана.

Лемма 20. Пусть t — натуральное число, $S \in \{PSL_2(8), PSL_2(17)\}$, p_1, p_2, \dots, p_m — простые числа, большие 3, и $R_i = Sz(2^{p_i})$ для $1 \leq i \leq m$. Тогда группа $S \times R_1 \times \dots \times R_m$ минимальна относительно простого спектра.

Доказательство. Используя алгоритм Евклида, легко показать, что выполняются следующие равенства:

$$(2^{p_i} - 1, 2^{p_j} - 1) = 2^{(p_i, p_j)} - 1 = 1 \text{ и } (2^{2p_i} - 1, 2^{2p_j} - 1) = 2^{(2p_i, 2p_j)} - 1 = 2^2 - 1 = 3.$$

Кроме того, $(2^{2p_i} - 1, 2^{2p_j} + 1)$ делит $(2^{2p_i} - 1, 2^{4p_j} - 1) = 2^{(2p_i, 4p_j)} - 1 = 2^2 - 1 = 3$, однако $2^{2p_j} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$, откуда $(2^{2p_i} - 1, 2^{2p_j} + 1) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} (2^{2p_i} + 1, 2^{2p_j} + 1) &= \frac{1}{3}((2^{2p_i} + 1)(2^{2p_i} - 1), (2^{2p_j} + 1)(2^{2p_j} - 1)) \\ &= \frac{1}{3}((2^{4p_i} - 1), (2^{4p_j} - 1)) = \frac{1}{3}(2^{(4p_i, 4p_j)} - 1) = 5. \end{aligned}$$

Таким образом, $\pi(R_i) \cap \pi(R_j) = \{2, 5\}$ и $\pi(R_i) \cap \pi(S) = \{2\}$. Заметим, что $(2^{p_i} - 1, 2^{2p_i} + 1) = 1$, число 5 не делит $2^{p_i} - 1$, при $p_i \geq 3$ число $2^{2p_i} + 1$ не является степенью числа 5 ввиду леммы 7 и $(q + (2q)^{1/2} + 1)(q - (2q)^{1/2} + 1) = q^2 + 1$.

Теперь из таблицы легко видеть, что для любой максимальной подгруппы M_i группы R_i найдется простое число $p \in \pi(R_i) \setminus \{2, 5\}$ такое, что p не делит порядок $|M_i|$. Применение леммы 12 завершает доказательство.

Лемма доказана.

Теорема 2 следует из [6, теорема 1] и лемм 14–20.

Автор выражает глубокую признательность А. С. Кондратьеву за полезные консультации, а также за замечания, позволившие улучшить первоначальный текст работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2010. 253 с. URL: <http://math.nsc.ru/alglog/alglogf.html>.
3. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
4. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, в которых все максимальные подгруппы холловы // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.

5. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Порождаемость конечной группы с холловыми максимальными подгруппами парой сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 199–206.
6. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О неабелевых композиционных факторах конечной группы, минимальной относительно простого спектра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 155–166.
7. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. Atlas of finite group representations / Robert Wilson [et. al.].
URL: <http://brauer.maths.gmul.ac.uk/Atlas/>.
10. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
11. **Gaschütz W.** Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden // Math. Z. 1954. Bd. 60, H. 3. S. 274–286.
12. **Gerono G. C.** Note sur la resolution en nombres entiers et positifs de l'equation $x^m = y^n - 1$ // Nouv. Ann. Math (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
13. **Gorenstein D.**, Finite simple groups. An introduction to their classification. N. Y.: Plenum Publ. Corp., 1982. 334 p.
14. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
15. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
16. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** Transitive subgroups of primitive permutation groups // J. Algebra. 2000. Vol. 234, no. 2. P. 291–361.
17. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437.

Маслова Наталья Владимировна

канд. физ.-мат. наук

старший научн. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: butterson@mail.ru

Поступила 14.04.2015

УДК 519.17

О РАСШИРЕНИЯХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 4¹

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $\leq t$ для данного натурального числа t . Ранее эта задача была решена для $t = 3$. В предыдущей работе первого автора начата программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением r , где $3 < r \leq 4$. В указанной работе получена редукция к локально исключительным графам. В данной работе найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 4. Кроме того, доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — исключительные непсевдогеометрические сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4, имеет степень, не большую 729.

Ключевые слова: спектр графа, сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On extensions of strongly regular graphs with eigenvalue 4.

J. Koolen posed the problem of studying distance regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue $\leq t$ for a given positive integer t . This problem was solved earlier for $t = 3$. A program of studying distance regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue r , $3 < r \leq 4$, was started by the first author in his preceding paper. In this paper, a reduction to local exceptional graphs is performed.

In the present work we find parameters of exceptional strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 4. In addition, we prove that a distance regular graph in which neighborhoods of vertices are exceptional nonpseudogeometric strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 4 has degree at most 729.

Keywords: graph spectrum, strongly regular graph, distance regular graph.

1. Введение и предварительные результаты

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k , если степень любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ) , если он содержит v вершин, регулярен степени k , каждое его ребро лежит в λ треугольниках и $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2.

Связный граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным графом* с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$, если для любого целого i ($0 \leq i \leq d$) и для любых вершин $u, w \in \Gamma$, находящихся на расстоянии i друг от друга, выполняются равенства $|\Gamma_{i+1}(u) \cap [w]| = b_i$ и $|\Gamma_{i-1}(u) \cap [w]| = c_i$. Очевидно, что дистанционно регулярный граф вполне регулярен с параметрами $k = b_0, \lambda = k - b_1 - 1, \mu = c_2$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых \mathcal{L} называется *α -частичной геометрией порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит точно $s+1$ точку, каждая

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 14-11-00061).

точка лежит точно на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a, l) \in P \times \mathcal{L}$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$ или pG_α). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s, t)$. *Точечный граф* геометрии определяется на множестве точек P ; две точки смежны, если они лежат на одной прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t + 1)$ и неглавными собственными значениями $s - \alpha$, $-(t + 1)$. Сильно регулярный граф, параметры которого можно представить в таком виде для некоторых натуральных чисел α, s, t , называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $\leq t$ для данного натурального числа t . Ранее эта задача была решена для $t = 3$ (см. [1–3]). В работе [4] начата программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением r , где $3 < r \leq 4$. Там была получена редукция к локально исключительным графам.

Предложение 1 [4, теорема]. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t , $3 < t \leq 4$, u — вершина графа Γ . Тогда $[u]$ — исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением 4 или верно одно из следующих утверждений:

- (1) $[u]$ — объединение изолированных 5-клик;
- (2) $[u]$ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-4}(s, s-4)$ и либо
 - (i) Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(112, 36, 10, 12)$, $(135, 64, 28, 32)$, или $(357, 256, 180, 192)$ и $s = 5, 7$ или 15 соответственно, либо
 - (ii) $s = 5$ и Γ — граф Джонсона $J(12, 6)$ или его стандартное частное;
- (3) $[u]$ — дополнение псевдогеометрического графа для $pG_5(s, 4)$, Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(156, 30, 4, 6)$, $(190, 99, 48, 55)$, $(210, 99, 48, 45)$, $(1248, 1044, 868, 900)$ и $s = 5, 10, 10, 35$ соответственно или $s = 10$ и Γ — граф Тэйлора;
- (4) $[u]$ — граф в половинном случае с параметрами $(4l + 1, 2l, l - 1, l)$, $l \in \{13, 15, 16, 18, 20\}$ и Γ — граф Тэйлора.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин являются исключительными непсевдогеометрическими сильно регулярными графами с неглавным собственным значением 4. Если u — вершина графа Γ , то верно одно из утверждений:

- (1) $[u]$ имеет параметры $(27, 16, 10, 8)$, $(63, 32, 16, 16)$, $(135, 64, 28, 32)$, $(189, 88, 37, 44)$, $(243, 112, 46, 56)$, $(279, 128, 52, 64)$ или $(351, 160, 64, 80)$ и Γ является графом Тэйлора;
- (2) $[u]$ имеет параметры $(85, 14, 3, 2)$ и либо Γ имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, либо $\mu \in \{5, 7, 10\}$ или $[u]$ имеет параметры $(169, 56, 15, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$;
- (3) $[u]$ имеет параметры $(204, 28, 2, 4)$ и $\mu \in \{5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 42, 50\}$ или $[u]$ имеет параметры $(232, 33, 2, 5)$ и $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$;
- (4) $[u]$ имеет параметры $(243, 22, 1, 2)$ и $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$ или $[u]$ имеет параметры $(289, 72, 11, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$;
- (5) $[u]$ имеет параметры $(325, 54, 3, 10)$ и $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$ или $[u]$ имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$ и $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$;
- (6) $[u]$ имеет параметры $(352, 36, 0, 4)$ и $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$ или $[u]$ имеет параметры $(378, 52, 1, 8)$ и $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$;

(7) $[u]$ имеет параметры $(441, 88, 7, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$, или $[u]$ имеет параметры $(505, 84, 3, 16)$ и Γ имеет массив пересечений $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$, или $[u]$ имеет параметры $(625, 104, 3, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$;

(8) $[u]$ имеет параметры $(676, 108, 2, 20)$ и $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$ или $[u]$ имеет параметры $(729, 112, 1, 20)$ и $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$.

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями $\theta_1 = 4, \theta_2$, Δ — регулярный подграф из Γ степени μ на w вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $(\mu - 4)v/(k - 4) \leq w \leq (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$;
- (2) если X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ , $x_i = |X_i|$, то $x_0 \cdot w \leq (v - x_0)(v - w)(4 - \theta_2)^2/(2k - 4 - \theta_2)^2$;
- (3) если $x_0 = w$, то $w \leq v(4 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$.

Доказательство. Из [5] имеем $\theta_2 \leq \mu - (k - \mu)w/(v - w) \leq 4$, поэтому $(\mu - 4)(v - w) \leq (k - \mu)w \leq (\mu - \theta_2)(v - w)$. Отсюда $(\mu - 4)v/(k - 4) \leq w \leq (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ , $x_i = |X_i|$. Тогда по [6, предложение 4.6.1] $x_0 \cdot w \leq (v - x_0)(v - w)(4 - \theta_2)^2/(2k - 4 - \theta_2)^2$.

Если $x_0 = w$, то $w(2k - 4 - \theta_2) \leq (v - w)(4 - \theta_2)$ и $w \leq v(4 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$.

Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями $\theta_1 = 4, \theta_2$, u, w — вершины из Γ с $d(u, w) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \leq \mu \leq (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$;
- (2) если X_i — множество вершин из $[w] - [u]$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$, то $x_0 \cdot \mu \leq (v' - x_0)(v' - \mu)(4 - \theta_2)^2/(2k' - 4 - \theta_2)^2$;
- (3) если $x_0 = \mu$, то $\mu \leq v'(4 - \theta_2)/(2k' - 2\theta_2)$.

Доказательство. Все утверждения следуют из леммы 1.1, примененной к подграфу $\Delta = [u] \cap [w]$ из $[w]$.

Лемма доказана.

Лемма 1.3 [7, теорема 20]. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и степени $k > 2$. Если $k_2 \leq 3k/2$ (равносильно $c_2 \geq 2b_1/3$), то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $d = 3$ и Γ — двудольный граф или граф Тэйлора;
- (2) Γ — граф Джонсона $J(7, 3)$ или 4-куб.

Лемма 1.4. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями $4, -t$. Если $\theta_0 = k > \theta_1 > \dots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ , то $\theta_1 \leq b_1/(t - 1) - 1$ и $\theta_d \geq -b_1/5 - 1$.

Доказательство. По теореме Тервиллигера [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $-t \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $4 \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Поэтому $\theta_1 \leq b_1/(t - 1) - 1$ и $\theta_d \geq -b_1/5 - 1$.

Лемма доказана.

2. Исключительные графы с собственным значением 4

В этом разделе найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 4 (теорема 2 — для псевдогеометрических графов и теорема 3 — для оставшихся графов).

Сильно регулярный граф Γ с неглавным собственным значением $m - 1$ назовем *исключительным*, если он не принадлежит следующему списку:

- (1) объединение изолированных m -клик;
- (2) псевдогеометрический граф для $pG_t(t + m - 1, t)$;
- (3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_m(s, m - 1)$;
- (4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu + 1, 2\mu, \mu - 1, \mu), \sqrt{4\mu + 1} = m - 1$.

Отметим, что в числе найденных параметров исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 4 имеется 515 наборов параметров, из них 164 отвечают псевдогеометрическим графам.

Теорема 2. Пусть Γ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-4}(s, t)$. Тогда параметры (s, t) лежат в одном из следующих списков:

- (1) (5, 3), (5, 5), (5, 7), (5, 10), (5, 15), (5, 19), (5, 20), (5, 25), (6, 1), (6, 5), (6, 7), (6, 9), (6, 10), (6, 15), (6, 16), (6, 23), (6, 25), (6, 30), (6, 37), (7, 9), (7, 15), (7, 27), (7, 30), (7, 51), (7, 75);
- (2) (8, 3), (8, 7), (8, 10), (8, 13), (8, 15), (8, 19), (8, 25), (8, 31), (8, 35), (8, 40), (8, 55), (8, 67), (8, 85), (8, 115), (9, 4), (9, 7), (9, 10), (9, 13), (9, 15), (9, 19), (9, 25), (9, 31), (9, 35), (9, 40), (9, 55), (9, 67), (9, 85), (9, 115), (9, 175);
- (3) (10, 15), (10, 39), (10, 45), (10, 105), (11, 28), (11, 35), (11, 105), (12, 34), (12, 60), (12, 190), (13, 99), (13, 135), (14, 9), (14, 15), (14, 16), (14, 23), (14, 25), (14, 30), (14, 37), (14, 55), (14, 65), (14, 79), (14, 100), (14, 135), (14, 205), (15, 55), (15, 187), (16, 63), (16, 75), (16, 165);
- (4) (18, 175), (19, 33), (19, 75), (19, 90), (19, 147), (20, 100), (21, 51), (22, 225), (23, 133), (24, 19), (24, 35), (24, 45), (24, 55), (24, 70), (24, 95), (24, 115), (24, 145), (24, 195), (24, 295), (26, 55), (27, 115), (27, 184), (28, 198), (31, 243), (32, 91), (32, 105), (32, 259);
- (5) (33, 435), (34, 63), (34, 114), (34, 135), (34, 165), (35, 310), (36, 328), (38, 255), (39, 91), (39, 203), (39, 385), (40, 405), (43, 468), (44, 94), (44, 160), (44, 490), (47, 559), (48, 275), (48, 583), (49, 135), (49, 387), (51, 235), (51, 658), (52, 684), (54, 175), (54, 325);
- (6) (59, 231), (64, 99), (64, 255), (64, 315), (64, 411), (69, 156), (69, 455), (74, 217), (74, 735), (84, 352), (90, 645), (99, 171), (104, 275), (104, 450), (104, 775), (114, 869), (114, 1375), (119, 667), (120, 435), (134, 598), (139, 1107), (144, 343), (144, 1155), (174, 1445), (184, 846), (189, 1591), (194, 1159).

Теорема 3. Пусть Γ — исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением 4. Если Γ не является псевдогеометрическим графом, то его параметры лежат в одном из следующих списков:

- (1) (27, 16, 10, 8), (49, 32, 21, 20), (57, 42, 31, 30), (64, 36, 20, 20), (85, 14, 3, 2), (85, 64, 48, 48), (96, 76, 60, 60), (100, 44, 18, 20), (105, 64, 38, 40), (115, 96, 80, 80), (120, 34, 8, 10), (120, 84, 58, 60), (121, 48, 17, 20), (133, 32, 6, 8), (133, 88, 57, 60), (136, 60, 24, 28), (144, 52, 16, 20), (162, 112, 76, 80), (169, 56, 15, 20), (175, 144, 118, 120), (183, 52, 11, 16), (190, 84, 33, 40), (190, 144, 108, 112), (204, 28, 2, 4), (209, 156, 115, 120);
- (2) (216, 172, 136, 140), (217, 128, 72, 80), (225, 64, 13, 20), (232, 33, 2, 5), (235, 192, 156, 160), (243, 22, 1, 2), (243, 220, 199, 200), (244, 108, 42, 52), (256, 68, 12, 20), (280, 124, 48, 60), (285, 64, 8, 16), (286, 95, 24, 35), (289, 72, 11, 20), (297, 256, 220, 224), (300, 104, 28, 40), (300, 184, 108, 120), (320, 132, 46, 60), (324, 68, 7, 16), (324, 76, 10, 20), (325, 54, 3, 10), (325, 264, 213, 220), (342, 308, 277, 280), (343, 228, 147, 160), (352, 26, 0, 2), (352, 36, 0, 4), (352, 156, 60, 76), (352, 312, 276, 280);

(3) (361, 80, 9, 20), (364, 88, 12, 24), (364, 242, 156, 170), (375, 154, 53, 70), (375, 204, 103, 120), (378, 52, 1, 8), (391, 140, 39, 56), (391, 208, 102, 120), (392, 46, 0, 6), (392, 340, 294, 300), (400, 84, 8, 20), (441, 88, 7, 20), (441, 256, 140, 160), (456, 130, 24, 42), (456, 280, 164, 184), (460, 204, 78, 100), (475, 384, 308, 320), (484, 92, 6, 20), (495, 304, 178, 200), (497, 186, 55, 78), (497, 256, 120, 144), (505, 84, 3, 16), (507, 368, 262, 280), (511, 442, 381, 390), (512, 292, 156, 180), (529, 96, 5, 20), (540, 154, 28, 50), (540, 484, 433, 440), (540, 490, 444, 450), (552, 76, 0, 12);

(4) (568, 252, 96, 124), (595, 144, 18, 40), (595, 396, 255, 280), (625, 104, 3, 20), (630, 544, 468, 480), (630, 592, 556, 560), (637, 576, 520, 528), (640, 284, 108, 140), (649, 576, 510, 520), (657, 256, 80, 112), (657, 328, 147, 180), (664, 170, 24, 50), (665, 384, 208, 240), (667, 96, 0, 16), (676, 108, 2, 20), (676, 225, 54, 85), (704, 228, 52, 84), (715, 224, 48, 80), (729, 112, 1, 20), (729, 208, 37, 68), (729, 448, 262, 296), (730, 324, 123, 160), (731, 480, 304, 336), (760, 264, 68, 104), (760, 414, 208, 246);

(5) (768, 708, 652, 660), (784, 116, 0, 20), (784, 522, 336, 370), (800, 204, 28, 60), (800, 564, 388, 420), (837, 760, 689, 700), (847, 576, 380, 416), (847, 752, 666, 680), (875, 304, 78, 120), (924, 312, 76, 120), (925, 374, 123, 170), (925, 448, 192, 240), (925, 704, 528, 560), (931, 480, 224, 272), (976, 858, 752, 770), (1000, 444, 168, 220), (1008, 532, 256, 308), (1026, 400, 124, 176), (1027, 342, 81, 130), (1027, 576, 300, 352), (1045, 384, 108, 160), (1080, 364, 88, 140), (1080, 664, 388, 440), (1105, 1024, 948, 960), (1140, 469, 158, 217), (1140, 544, 228, 288), (1156, 480, 164, 224), (1156, 616, 300, 360), (1156, 1092, 1031, 1040), (1176, 550, 224, 286);

(6) (1189, 1152, 1116, 1120), (1197, 460, 139, 200), (1210, 884, 633, 680), (1216, 540, 204, 268), (1225, 704, 378, 440), (1275, 784, 458, 520), (1276, 816, 500, 560), (1288, 858, 552, 610), (1296, 740, 394, 460), (1331, 532, 171, 240), (1365, 704, 328, 400), (1365, 992, 706, 760), (1431, 1276, 1135, 1160), (1445, 684, 283, 360), (1450, 1104, 828, 880), (1463, 612, 211, 288), (1463, 688, 282, 360), (1513, 1428, 1347, 1360), (1519, 1012, 651, 720), (1521, 1408, 1302, 1320), (1540, 684, 258, 340), (1540, 1368, 1212, 1240), (1540, 1404, 1278, 1300), (1548, 952, 556, 632), (1587, 832, 396, 480), (1596, 1276, 1010, 1060), (1616, 1140, 784, 852), (1680, 1012, 576, 660);

(7) (1681, 1152, 766, 840), (1701, 1600, 1504, 1520), (1716, 840, 364, 456), (1750, 704, 228, 320), (1805, 1144, 693, 780), (1863, 1568, 1312, 1360), (1937, 1792, 1656, 1680), (1944, 1876, 1810, 1820), (1958, 1236, 745, 840), (2002, 851, 300, 407), (2002, 928, 372, 480), (2009, 1152, 616, 720), (2015, 1824, 1648, 1680), (2025, 1104, 553, 660), (2025, 1408, 952, 1040), (2058, 935, 364, 475), (2058, 1936, 1820, 1840), (2080, 924, 348, 460), (2080, 1694, 1368, 1430), (2080, 1764, 1488, 1540), (2080, 1980, 1884, 1900), (2133, 1066, 475, 590), (2185, 1638, 1207, 1290), (2201, 2112, 2026, 2040), (2205, 1824, 1498, 1560), (2226, 1600, 1124, 1216), (2295, 1984, 1708, 1760), (2380, 1404, 778, 900), (2450, 1264, 588, 720);

(8) (2466, 1972, 1561, 1640), (2500, 1904, 1428, 1520), (2523, 1222, 521, 658), (2584, 2132, 1746, 1820), (2640, 1624, 948, 1080), (2738, 1632, 916, 1056), (2745, 2688, 2632, 2640), (2809, 1488, 717, 868), (2835, 2704, 2578, 2600), (2883, 2112, 1516, 1632), (2905, 1664, 888, 1040), (2916, 1540, 739, 896), (2924, 1738, 972, 1122), (2976, 2856, 2740, 2760), (3025, 1764, 963, 1120), (3025, 2304, 1728, 1840), (3025, 2688, 2382, 2440), (3081, 1408, 552, 720), (3136, 2090, 1344, 1490), (3174, 2672, 2236, 2320), (3240, 1804, 928, 1100), (3249, 2436, 1795, 1920), (3256, 2380, 1704, 1836), (3267, 2116, 1315, 1472), (3336, 2668, 2112, 2220), (3380, 2604, 1978, 2100), (3403, 1890, 969, 1150), (3565, 2304, 1428, 1600), (3589, 3496, 3405, 3420), (3718, 3540, 3369, 3400), (3741, 2240, 1264, 1456);

(9) (3875, 2980, 2259, 2400), (4000, 2604, 1628, 1820), (4005, 2496, 1480, 1680), (4048, 3876, 3710, 3740), (4200, 2964, 2038, 2220), (4200, 3952, 3716, 3760), (4332, 4260, 4189, 4200), (4545, 3124, 2083, 2288), (4557, 4288, 4032, 4080), (4720, 4004, 3378, 3500), (4860, 3784, 2908, 3080), (5041, 3696, 2655, 2860), (5076, 4060, 3214, 3380), (5104, 4536, 4020, 4120), (5125, 3904, 2928, 3120), (5292, 4576, 3940, 4064), (5336, 3960, 2884, 3096), (5365, 5184, 5008, 5040), (5551, 4736, 4020, 4160), (5577, 4216, 3135, 3348), (5590, 4347, 3336, 3535), (5671, 4032, 2796, 3040), (5832, 5593, 5362, 5405), (6069, 5920, 5774, 5800), (6137, 4602, 3391, 3630);

(10) (6232, 5580, 4984, 5100), (6241, 5376, 4610, 4760), (6292, 5592, 4956, 5080), (6392, 5478, 4672, 4830), (6480, 5890, 5344, 5450), (6670, 6384, 6108, 6160), (6727, 6080, 5484, 5600), (6732, 5512, 4476, 4680), (6816, 5452, 4316, 4540), (6903, 5152, 3776, 4048), (7290, 6304, 5428, 5600), (7315, 5724,

4423, 4680), (7372, 7182, 6996, 7030), (7750, 6804, 5953, 6120), (7777, 7680, 7584, 7600), (7840, 6164, 4788, 5060), (7889, 6528, 5362, 5592), (7965, 7744, 7528, 7568), (8668, 7490, 6444, 6650), (8905, 8064, 7288, 7440), (8955, 7744, 6668, 6880), (9045, 7106, 5515, 5830), (9559, 8496, 7530, 7720), (9856, 9636, 9420, 9460), (10660, 10336, 10020, 10080), (10759, 10560, 10364, 10400), (10935, 9940, 9019, 9200), (11340, 9384, 7708, 8040);

(11) (11584, 9828, 8292, 8596), (11661, 10560, 9544, 9744), (11845, 10304, 8928, 9200), (11881, 10032, 8421, 8740), (12615, 11024, 9598, 9880), (12825, 12544, 12268, 12320), (12986, 11872, 10836, 11040), (13225, 11136, 9320, 9680), (13300, 11594, 10068, 10370), (13366, 11088, 9132, 9520), (13377, 11176, 9275, 9652), (13482, 12688, 11932, 12080), (14399, 13248, 12172, 12384), (14553, 13696, 12880, 13040), (15052, 13148, 11442, 11780), (15842, 13888, 12132, 12480), (16281, 14080, 12124, 12512), (16731, 14980, 13379, 13696), (17227, 15840, 14544, 14800), (17408, 16900, 16404, 16500), (17545, 16592, 15681, 15860), (18620, 17028, 15547, 15840), (21120, 19012, 17076, 17460), (21204, 18928, 16852, 17264), (21568, 19908, 18352, 18660);

(12) (22100, 19404, 16978, 17460), (23409, 20608, 18082, 18584), (23409, 21280, 19309, 19700), (24565, 22784, 21108, 21440), (24753, 21760, 19064, 19600), (25480, 22572, 19936, 20460), (25480, 23244, 21168, 21580), (27000, 25004, 23128, 23500), (27405, 25792, 24256, 24560), (27840, 26404, 25028, 25300), (29403, 27328, 25372, 25760), (29575, 26784, 24208, 24720), (30430, 28224, 26148, 26560), (31487, 28938, 26557, 27030), (32046, 30160, 28364, 28720), (35344, 32340, 29544, 30100), (37024, 35260, 33564, 33900), (39432, 36680, 34084, 34600), (41250, 38779, 36428, 36895), (43616, 40612, 37776, 38340), (48514, 45216, 42100, 42720), (49011, 45760, 42684, 43296), (51120, 48484, 45958, 46460), (53075, 49504, 46128, 46800), (60401, 57600, 54904, 55440), (60502, 57620, 54849, 55400);

(13) (64533, 60736, 57120, 57840), (73125, 71104, 69128, 69520), (73440, 69874, 66448, 67130), (76000, 71064, 66388, 67320), (77315, 72384, 67708, 68640), (80601, 75392, 70456, 71440), (81125, 76704, 72478, 73320), (82369, 79872, 77436, 77920), (87451, 83952, 80566, 81240), (99705, 94864, 90213, 91140), (111476, 107016, 102700, 103560), (113400, 110044, 106768, 107420), (116699, 112480, 108384, 109200), (133570, 129204, 124953, 125800), (154575, 150304, 146128, 146960), (169128, 162652, 156376, 157628), (212832, 205492, 198356, 199780), (225885, 218304, 210928, 212400), (235586, 228960, 222484, 223776), (314116, 304440, 295004, 296888), (317628, 309880, 302284, 303800), (328560, 320276, 312160, 313780), (404587, 394212, 384051, 386080), (485815, 473774, 461973, 464330).

Отметим также, что в ходе вычислений возникали параметры (57, 42, 31, 30), (1189, 1152, 1116, 1120), (3159, 1408, 532, 704). Однако графы с такими параметрами не существуют.

Следствие 1. Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны. Тогда их параметры не принадлежат нп. (7)–(13) заключения теоремы 3.

Множество параметров сильно регулярного графа со спектром $k^1, (n-5)^f, -5^{v-f-1}$ назовем *исключительным*, если $\mu \notin \{20, 25\}$ и выполнены следующие ограничения из [9]:

- (1) условие Крейна: $\mu(n-20) \leq 4(n-5)(n+20)$;
- (2) абсолютная граница: $v \leq f(f+3)/2$ ($v \leq f(f+1)/2$, если $\mu(n-20) \neq 4(n-5)(n+20)$);
- (3) μ -граница: $\mu \leq 5^3 \cdot 7$ (в случае равенства имеем $n = 20 \cdot 9$);
- (4) граница для числа 3-лап: $n \leq 10(\mu+1) + 4$.

Доказательство теорем 2 и 3 осуществляется с помощью компьютерных вычислений. Задается максимальное значение $\mu = 875$. Ему отвечает $n = 180$. Проверяется допустимость полученных параметров.

Шаг алгоритма. Если $\mu = 0$, то останавливаем работу, в противном случае уменьшаем значение μ на 1. Находим максимальное $n = 10(\mu+1) + 4$. Ищем допустимые параметры. Если $\mu + n - 10 > 0$, то уменьшаем n на 1, в противном случае переходим к следующему шагу. \square

Доказательство следствия 1.

Пусть до конца раздела Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — исключительные графы с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями 4, θ_2 . Тогда $\mu \leq b_1 = v' - k' - 1$.

Лемма 2.1. *Параметры (v', k', λ', μ') не принадлежат пп. (8)–(13) заключения теоремы 3.*

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат одному из пп. (8)–(13) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \leq \mu \leq v' - k' - 1$ граф Γ имеет параметры (3081, 1408, 552, 720). В этом случае $v' - k' - 1 = 1672$ и $\mu \leq 1672$. Далее, $716 \cdot 3081/1404 \leq \mu$, поэтому $1571 \leq \mu \leq 1672$ и μ делит $3081 \cdot 1672$. Отсюда $\mu = 1672$ и Γ — граф Тэйлора. Противоречие с тем, что в графе Тэйлора верно равенство $k' = 2\mu'$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (7) заключения теоремы 3, то верно одно из утверждений:*

- (1) окрестности вершин имеют параметры (1750, 704, 228, 320) и $\mu = 875$;
- (2) окрестности вершин имеют параметры (2002, 851, 300, 407) и $\mu \in \{1001, 1012\}$;
- (3) окрестности вершин имеют параметры (2058, 935, 364, 475) и $\mu \in \{1071, 1078\}$;
- (4) окрестности вершин имеют параметры (2080, 924, 348, 460) и $\mu \in \{1040, 1050, 1056, 1092, 1100, 1120, 1144\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (7) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \leq \mu \leq v' - k' - 1$ леммы 1.2 граф Γ имеет параметры (1750, 704, 228, 320), (2002, 851, 300, 407), (2002, 928, 372, 480), (2058, 935, 364, 475) или (2080, 924, 348, 460). Так как $k' \neq 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров (1750, 704, 228, 320) имеем $\theta_2 = -96$, $v' - k' - 1 = 1045$ и $\mu \leq 1045$. Далее, $316 \cdot 1750/700 \leq \mu \leq 416 \cdot 1750/800$, поэтому $790 \leq \mu \leq 910$ и μ делит $1750 \cdot 1045$. Отсюда $\mu = 875$.

В случае параметров (2002, 851, 300, 407) имеем $\theta_2 = -111$, $v' - k' - 1 = 1150$ и $\mu \leq 1150$. Далее, $403 \cdot 2002/847 \leq \mu \leq 518 \cdot 2002/962$, поэтому $953 \leq \mu \leq 1078$ и μ делит $2002 \cdot 1150$. Отсюда $\mu \in \{1001, 1012\}$.

В случае параметров (2002, 928, 372, 480) имеем $v' - k' - 1 = 1073$ и $\mu \leq 1073$. Далее, $476 \cdot 2002/924 \leq \mu$, поэтому $1032 \leq \mu < 1073$ и μ не делит $2002 \cdot 1073$.

В случае параметров (2080, 924, 348, 460) имеем $\theta_2 = -116$, $v' - k' - 1 = 1155$ и $\mu \leq 1155$. Далее, $456 \cdot 2080/920 \leq \mu \leq 576 \cdot 2080/1040$, поэтому $1031 \leq \mu \leq 1152$ и μ делит $2080 \cdot 1155$. Отсюда $\mu \in \{1040, 1050, 1056, 1092, 1100, 1120, 1144\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Графы из заключения леммы 2.2 не существуют.*

Доказательство. В случае параметров (1750, 704, 228, 320) и $\mu = 875$ имеем $b_1 = 1045$, $k_2 = 2090$ и $\theta_2 = -96$, поэтому $875x_0 \leq (1750 - x_0)875 \cdot 100^2/1500^2$ и $226x_0 \leq 1750$. Отсюда $x_0 \leq 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2090 \cdot 7$, но не меньше $875k_3$. Значит, $k_3 \leq 16$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 15 и указанное число ребер не меньше $1735k_3$. Поэтому $k_3 \leq 8$. Если w_1, w_2 — различные вершины из Γ_3 , то $|\Gamma_2 \cap [w_i]| \geq 1743$, поэтому $[w_1] \cap [w_2]$ содержит не менее $2 \cdot 1743 - 2090 = 1396$ вершин из Γ_2 , противоречие. В случае $k_3 = 1$ антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами (1921, 1750, 1579, 1750), противоречие.

В случае параметров (2002, 851, 300, 407) и $\mu = 1001$ имеем $b_1 = 1150$, $k_2 = 2300$ и $\theta_2 = -111$, поэтому $1001x_0 \leq (2002 - x_0)1001 \cdot 115^2/1809^2$ и $(1809^2 + 115^2)x_0 \leq 2002 \cdot 115^2$. Отсюда $x_0 \leq 8$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2300 \cdot 8$, но не меньше $1001k_3$. Значит, $k_3 \leq 18$, степень

вершины в графе Γ_3 не больше 17 и указанное число ребер не меньше $1735k_3$. Поэтому $k_3 \leq 9$. Если w_1, w_2 — различные вершины из Γ_3 , то $|\Gamma_2 \cap [w_i]| \geq 1994$, поэтому $[w_1] \cap [w_2]$ содержит не менее $2 \cdot 1994 - 2300 = 1688$ вершин из Γ_2 , противоречие. В случае $k_3 = 1$ антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(2152, 2002, 1852, 2002)$, противоречие. Аналогичное противоречие получится в случаях $\mu \in \{1012, 1100\}$.

В случае параметров $(2058, 935, 364, 475)$ и $\mu = 1071$ имеем $b_1 = 1122, k_2 = 2156$ и $\theta_2 = -115$, поэтому $1071x_0 \leq (2058 - x_0)987 \cdot 119^2/1981^2$ и $(3 \cdot 283^2 + 47 \cdot 17)x_0 \leq 2058 \cdot 47 \cdot 17$. Отсюда $x_0 \leq 6$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2156 \cdot 6$, но не меньше $1071k_3$. Значит, $k_3 \leq 12$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 11 и указанное число ребер не меньше $2047k_3$. Поэтому $k_3 \leq 6$. Если $w \in \Gamma_3, y \in \Gamma_2 \cap \Gamma_2(w)$, то $[y]$ содержит по 1071 вершин из $[u]$ и из $[w]$, противоречие. Аналогичное противоречие получится в случае $\mu = 1078$.

В случае параметров $(2080, 924, 348, 460)$ и $\mu = 1040$ имеем $b_1 = 1155, k_2 = 2310$ и $\theta_2 = -116$, поэтому $1040x_0 \leq (2080 - x_0)1040 \cdot 120^2/1960^2$ и $(49^2 + 3^2)x_0 \leq 2080 \cdot 3^2$. Отсюда $x_0 \leq 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $2310 \cdot 7$, но не меньше $1040k_3$. Значит, $k_3 \leq 15$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 14 и указанное число ребер не меньше $2066k_3$. Поэтому $k_3 \leq 7$. Если w_1, w_2 — различные вершины из Γ_3 , то $|\Gamma_2 \cap [w_i]| \geq 2074$, поэтому $[w_1] \cap [w_2]$ содержит не менее $2 \cdot 2074 - 2310 = 1838$ вершин из Γ_2 , противоречие. В случае $k_3 = 1$ антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(2196, 2080, 1964, 2080)$, противоречие. Аналогичное противоречие получится в случаях $\mu \in \{1050, 1056, 1092, 1100, 1120, 1144\}$.

Лемма 2.3 и следствие 1 доказаны.

3. Расширения исключительных графов, пп. (5), (6)

В этом разделе получена следующая теорема.

Теорема 4. Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп. (5), (6) заключения теоремы 3, и — вершина графа Γ . Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры $(784, 116, 0, 20)$ и $\mu \in \{112, 116, 161, 184, 196, 203, 232\}$, или $[u]$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ и $\mu \in \{224, 238, 250, 272, 280\}$, или $[u]$ имеет параметры $(875, 304, 78, 120)$ и $\mu \in \{350, 375, 399\}$;

(2) $[u]$ имеет параметры $(924, 312, 76, 120)$ и $\mu \in \{364, 429\}$ или $[u]$ имеет параметры $(1000, 444, 168, 220)$ и $\mu = 500$;

(3) $[u]$ имеет параметры $(1026, 400, 124, 176)$ и $\mu \in \{450, 475, 513\}$ или $[u]$ имеет параметры $(1027, 342, 81, 130)$ и $\mu \in \{468, 474\}$;

(4) $[u]$ имеет параметры $(1045, 384, 108, 160)$ и $\mu \in \{475, 484\}$ или $[u]$ имеет параметры $(1080, 364, 88, 140)$ и $\mu \in \{429, 440, 450, 468, 495\}$;

(5) $[u]$ имеет параметры $(1140, 469, 158, 217)$ и $\mu \in \{536, 570, 600\}$ или $[u]$ имеет параметры $(1156, 480, 164, 224)$ и $\mu \in \{540, 578, 612\}$;

(6) $[u]$ имеет параметры $(1197, 460, 139, 200)$ и $\mu \in \{532, 552\}$, или $[u]$ имеет параметры $(1216, 540, 204, 268)$ и $\mu \in \{600, 608\}$, или $[u]$ имеет параметры $(1331, 532, 171, 240)$ и $\mu = 627$;

(7) $[u]$ имеет параметры $(1463, 612, 211, 288)$ и $\mu = 770$ или $[u]$ имеет параметры $(1540, 684, 258, 340)$ и $\mu \in \{770, 798, 825, 836\}$.

Следствие 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из условия теоремы 4, и — вершина графа Γ . Тогда $[u]$ имеет параметры $(784, 116, 0, 20)$.

До конца раздела предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , удовлетворяющий условию теоремы 4, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями $\theta_1 = 4, \theta_2$. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $\Gamma_i = \Gamma_i(u), k_i = |\Gamma_i|$.

Лемма 3.1. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (6) заключения теоремы 3, и — вершина графа Γ . Тогда верно одно из утверждений:

- (1) $[u]$ имеет параметры $(1197, 460, 139, 200)$ и $\mu \in \{532, 552\}$;
- (2) $[u]$ имеет параметры $(1331, 532, 171, 240)$ и $\mu = 627$;
- (3) $[u]$ имеет параметры $(1463, 612, 211, 288)$ и $\mu = 770$;
- (4) $[u]$ имеет параметры $(1216, 540, 204, 268)$ и $\mu \in \{600, 608\}$;
- (5) $[u]$ имеет параметры $(1540, 684, 258, 340)$ и $\mu \in \{770, 798, 825, 836\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (6) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \leq \mu \leq (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$ и $\mu \leq v' - k' - 1$ граф Γ имеет параметры $(1197, 460, 139, 200)$, $(1331, 532, 171, 240)$, $(1463, 612, 211, 288)$, $(1463, 688, 282, 360)$, $(1540, 684, 258, 340)$. Так как в графе Тэйлора имеем $k' = 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров $(1197, 460, 139, 200)$ имеем $\theta_2 = -65$, $v' - k' - 1 = 736$ и $\mu \leq 736$. Далее, $196 \cdot 1197/456 \leq \mu \leq 265 \cdot 1197/525$, поэтому $515 \leq \mu \leq 604$ и μ делит $kb_1 = 1197 \cdot 736$. Отсюда $\mu \in \{532, 552\}$.

В случае параметров $(1216, 540, 204, 268)$ имеем $\theta_2 = -68$, $v' - k' - 1 = 675$ и $\mu \leq 675$. Далее, $264 \cdot 1216/536 \leq \mu \leq 336 \cdot 1216/608$, поэтому $599 \leq \mu \leq 672$ и μ делит $kb_1 = 1216 \cdot 675$. Отсюда $\mu \in \{600, 608\}$.

В случае параметров $(1331, 532, 171, 240)$ имеем $\theta_2 = -73$, $v' - k' - 1 = 798$ и $\mu \leq 798$. Далее, $236 \cdot 1331/528 \leq \mu \leq 313 \cdot 1331/605$, поэтому $595 \leq \mu \leq 688$ и μ делит $kb_1 = 1331 \cdot 798$. Отсюда $\mu = 627$.

В случае параметров $(1445, 684, 283, 360)$ имеем $v' - k' - 1 = 760$ и $\mu < 760$. Далее, $356 \cdot 1445/680 \leq \mu$, поэтому $757 \leq \mu < 760$ и μ делит $kb_1 = 1445 \cdot 760$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

В случае параметров $(1463, 612, 211, 288)$ имеем $\theta_2 = -81$, $v' - k' - 1 = 850$ и $\mu \leq 850$. Далее, $284 \cdot 1463/608 \leq \mu \leq 369 \cdot 1463/693$, поэтому $684 \leq \mu \leq 779$ и μ делит $kb_1 = 1463 \cdot 850$. Отсюда $\mu = 770$.

В случае параметров $(1463, 688, 282, 360)$ имеем $v' - k' - 1 = 774$ и $\mu < 774$. Далее, $356 \cdot 1463/684 \leq \mu$, поэтому $762 \leq \mu < 774$ и μ делит $1463 \cdot 774$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

В случае параметров $(1540, 684, 258, 340)$ имеем $\theta_2 = -86$, $v' - k' - 1 = 855$ и $\mu < 855$. Далее, $336 \cdot 1540/680 \leq \mu \leq 426 \cdot 1540/770$, поэтому $761 \leq \mu \leq 852$ и μ делит $1540 \cdot 855$. Отсюда $\mu \in \{770, 798, 825, 836\}$.

Лемма доказана.

Для любого графа Γ из заключения леммы 3.1 имеем $\mu > 2b_1/3$ и ввиду леммы 1.3 Γ не является дистанционно регулярным графом.

Лемма 3.2. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (5) заключения теоремы 3, и — вершина графа Γ . Тогда верно одно из утверждений:

- (1) $[u]$ имеет параметры $(784, 116, 0, 20)$ и $\mu \in \{112, 116, 161, 184, 196, 203, 232\}$ или $[u]$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ и $\mu \in \{224, 238, 250, 272, 280\}$;
- (2) $[u]$ имеет параметры $(875, 304, 78, 120)$ и $\mu \in \{350, 375, 399\}$ или $[u]$ имеет параметры $(924, 312, 76, 120)$ и $\mu \in \{364, 429\}$;
- (3) $[u]$ имеет параметры $(1000, 444, 168, 220)$ и $\mu = 500$;
- (4) $[u]$ имеет параметры $(1026, 400, 124, 176)$ и $\mu \in \{450, 475, 513\}$ или $[u]$ имеет параметры $(1027, 342, 81, 130)$ и $\mu \in \{468, 474\}$;
- (5) $[u]$ имеет параметры $(1045, 384, 108, 160)$ и $\mu \in \{475, 484\}$ или $[u]$ имеет параметры $(1080, 364, 88, 140)$ и $\mu \in \{429, 440, 450, 468, 495\}$;
- (6) $[u]$ имеет параметры $(1140, 469, 158, 217)$ и $\mu \in \{536, 570, 600\}$ или $[u]$ имеет параметры $(1156, 480, 164, 224)$ и $\mu \in \{540, 578, 612\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (5) заключения теоремы 3. С учетом неравенств $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \leq \mu \leq (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$ и $\mu \leq v' - k' - 1$ граф Γ имеет параметры $(784, 116, 0, 20)$, $(800, 204, 28, 60)$, $(875, 304, 78, 120)$, $(924, 312, 76, 120)$, $(925, 374, 123, 170)$, $(1000, 444, 168, 220)$, $(1026, 400, 124, 176)$, $(1027, 342, 81, 130)$, $(1045, 384, 108, 160)$, $(1080, 364, 88, 140)$, $(1140, 469, 158, 217)$, $(1156, 480, 164, 224)$ и $(1176, 550, 224, 286)$. Так как в графе Тэйлора имеем $k' = 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров $(784, 116, 0, 20)$ имеем $\theta_2 = -24$, $v' - k' - 1 = 667$ и $\mu < 667$. Далее, $16 \cdot 784/112 \leq \mu \leq 44 \cdot 784/140$, поэтому $112 \leq \mu \leq 246$ и μ делит $kb_1 = 784 \cdot 667$. Отсюда $\mu \in \{112, 116, 161, 184, 196, 203, 232\}$.

В случае параметров $(800, 204, 28, 60)$ имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 595$ и $\mu < 595$. Далее, $56 \cdot 800/200 \leq \mu \leq 96 \cdot 800/240$, поэтому $224 \leq \mu \leq 320$ и μ делит $kb_1 = 800 \cdot 595$. Отсюда $\mu \in \{224, 238, 250, 272, 280\}$.

В случае параметров $(875, 304, 78, 120)$ имеем $\theta_2 = -46$, $v' - k' - 1 = 570$ и $\mu < 570$. Далее, $116 \cdot 875/300 \leq \mu \leq 166 \cdot 875/350$, поэтому $339 \leq \mu \leq 415$ и μ делит $kb_1 = 875 \cdot 570$. Отсюда $\mu \in \{350, 375, 399\}$.

В случае параметров $(924, 312, 76, 120)$ имеем $\theta_2 = -48$, $v' - k' - 1 = 611$ и $\mu < 611$. Далее, $116 \cdot 924/308 \leq \mu \leq 168 \cdot 924/360$, поэтому $348 \leq \mu \leq 431$ и μ делит $kb_1 = 924 \cdot 611$. Отсюда $\mu \in \{364, 429\}$.

В случае параметров $(925, 374, 123, 170)$ имеем $\theta_2 = -51$, $v' - k' - 1 = 550$ и $\mu < 550$. Далее, $166 \cdot 925/370 \leq \mu \leq 221 \cdot 925/425$, поэтому $415 \leq \mu \leq 481$ и μ делит $kb_1 = 925 \cdot 550$. Подходящих значений μ нет.

В случае параметров $(1000, 444, 168, 220)$ имеем $\theta_2 = -56$, $v' - k' - 1 = 555$ и $\mu < 555$. Далее, $216 \cdot 1000/440 \leq \mu \leq 276 \cdot 1000/500$, поэтому $491 \leq \mu \leq 552$ и μ делит $kb_1 = 1000 \cdot 555$. Отсюда $\mu = 500$.

В случае параметров $(1026, 400, 124, 176)$ имеем $\theta_2 = -56$, $v' - k' - 1 = 625$ и $\mu < 625$. Далее, $172 \cdot 1026/396 \leq \mu \leq 232 \cdot 1026/456$, поэтому $446 \leq \mu \leq 522$ и μ делит $kb_1 = 1026 \cdot 625$. Отсюда $\mu \in \{450, 475, 513\}$.

В случае параметров $(1027, 342, 81, 130)$ имеем $\theta_2 = -53$, $v' - k' - 1 = 684$ и $\mu < 684$. Далее, $126 \cdot 1027/338 \leq \mu \leq 183 \cdot 1027/395$, поэтому $383 \leq \mu \leq 475$ и μ делит $kb_1 = 1027 \cdot 684$. Отсюда $\mu \in \{468, 474\}$.

В случае параметров $(1045, 384, 108, 160)$ имеем $\theta_2 = -56$, $v' - k' - 1 = 660$ и $\mu < 660$. Далее, $156 \cdot 1045/380 \leq \mu \leq 216 \cdot 1045/440$, поэтому $429 \leq \mu \leq 513$ и μ делит $kb_1 = 1045 \cdot 660$. Отсюда $\mu \in \{475, 484\}$.

В случае параметров $(1080, 364, 88, 140)$ имеем $\theta_2 = -56$, $v' - k' - 1 = 715$ и $\mu < 715$. Далее, $136 \cdot 1080/360 \leq \mu \leq 196 \cdot 1080/420$, поэтому $408 \leq \mu \leq 504$ и μ делит $kb_1 = 1080 \cdot 715$. Отсюда $\mu \in \{429, 440, 450, 468, 495\}$.

В случае параметров $(1140, 469, 158, 217)$ имеем $\theta_2 = -63$, $v' - k' - 1 = 670$ и $\mu < 670$. Далее, $213 \cdot 1140/465 \leq \mu \leq 280 \cdot 1140/532$, поэтому $523 \leq \mu \leq 600$ и μ делит $kb_1 = 1140 \cdot 670$. Отсюда $\mu \in \{536, 570, 600\}$.

В случае параметров $(1156, 480, 164, 224)$ имеем $\theta_2 = -64$, $v' - k' - 1 = 675$ и $\mu < 675$. Далее, $220 \cdot 1156/476 \leq \mu \leq 288 \cdot 1156/544$, поэтому $535 \leq \mu \leq 612$ и μ делит $kb_1 = 1156 \cdot 675$. Отсюда $\mu \in \{540, 578, 612\}$.

В случае параметров $(1176, 550, 224, 286)$ имеем $v' - k' - 1 = 625$ и $\mu < 625$. Далее, $282 \cdot 1176/546 \leq \mu$, поэтому $608 \leq \mu < 625$ и μ делит $kb_1 = 1176 \cdot 625$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

Лемма 3.2 и теорема 4 доказаны.

Если Γ — дистанционно регулярный граф из заключения леммы 3.2, то в силу неравенства $\mu < 2b_1/3$ окрестности вершин в Γ имеют параметры $(784, 116, 0, 20)$, $(800, 204, 28, 60)$, $(875, 304, 78, 120)$, $(924, 312, 76, 120)$ или $(1080, 364, 88, 140)$.

Лемма 3.3. *Если Γ — дистанционно регулярный граф из заключения теоремы 4, то окрестности вершин в Γ имеют параметры $(784, 116, 0, 20)$.*

Доказательство. В случае параметров $(875, 304, 78, 120)$ и $\mu = 350$ имеем $b_1 = 570$, $k_2 = 1425$ и $\theta_2 = -46$, поэтому $350x_0 \leq (875 - x_0)525 \cdot 50^2 / 650^2$ и $(2 \cdot 13^2 + 3)x_0 \leq 875 \cdot 3$. Отсюда $x_0 \leq 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $1425 \cdot 7$, но не меньше $350k_3$. Значит, $k_3 \leq 28$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 27 и указанное число ребер не меньше $848k_3$. Поэтому $k_3 \leq 10$. Если z_1, z_2 — различные вершины из Γ_3 , то $|\Gamma_2 \cap [z_i]| \geq 866$, поэтому $[z_1] \cap [z_2]$ содержит не менее $2 \cdot 866 - 1425 = 307$ вершин, но не более 350 вершин из Γ_2 . В случае $k_3 > 2$ для третьей вершины z_3 из Γ_3 подграф $\Gamma_2 \cap [z_3]$ содержит не более 364 вершин из $[z_1]$, $[z_2]$ и не более 43 вершин вне $[z_1] \cup [z_2]$, противоречие. В случае $k_3 = 1$ для антиподальных вершин u, u^* подграф $\Gamma - (u^\perp \cup (u^*)^\perp)$ содержит 550 вершин, поэтому антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $((1151, 875, 654, 700))$, противоречие. Итак, $k_3 = 2$. Положим $\Gamma_3(u) = \{z_1, z_2\}$, $\Gamma_3(z_1) = \{u, w_1\}$ и $\Gamma_3(z_2) = \{u, w_2\}$.

Если вершины z_1, z_2 не смежны, то Γ_2 содержит 350 вершин из $[z_1] \cap [z_2]$, по 525 вершин из $[z_1] - [z_2]$, $[z_2] - [z_1]$ и 25 вершин вне $[z_1] \cup [z_2]$. Противоречие с тем, что $\Gamma_2 \cap [w_1]$ содержит не более 25 вершин вне $[z_1] \cup [z_2]$ и не более 350 вершин из $[z_2]$. Если вершины z_1, z_2 смежны, то Γ_2 содержит 304 вершины из $[z_1] \cap [z_2]$ и по 570 вершин из $[z_1] - [z_2]$, $[z_2] - [z_1]$, противоречие.

Случаи параметров $(924, 312, 76, 120)$ и $(1080, 364, 88, 140)$ рассматриваются аналогично.

В случае параметров $(800, 204, 28, 60)$ верно равенство $b_1 = 595$ и по лемме 3.2 имеем $\mu \in \{238, 250, 272, 280\}$, соответственно b_2 не больше 1, 2, 11, 11. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 16$ и $\theta_d \geq -120$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu = 280$ и b_2 делится на 8, противоречие с тем, что $\theta_1 > 22$.

Лемма 3.3 и следствие 2 доказаны.

4. О расширениях исключительных графов, пп. (3), (4)

В этом разделе получена следующая теорема.

Теорема 5. Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп. (3), (4) заключения теоремы 3, u — вершина графа Γ . Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры $(361, 80, 9, 20)$ и $\mu = 95$ или $[u]$ имеет параметры $(364, 88, 12, 24)$ и $\mu \in \{100, 110, 130\}$, или $[u]$ имеет параметры $(378, 52, 1, 8)$ и $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$, или $[u]$ имеет параметры $(391, 140, 39, 56)$, и $\mu = 170$, или $[u]$ имеет параметры $(392, 46, 0, 6)$ и $\mu \in \{23, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 46, 49, 56, 60, 69, 70, 84, 92, 98, 105\}$;

(2) $[u]$ имеет параметры $(400, 84, 8, 20)$ и $\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$, или $[u]$ имеет параметры $(441, 88, 7, 20)$ и $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$, или $[u]$ имеет параметры $(456, 130, 24, 42)$ и $\mu \in \{150, 152, 156\}$, или $[u]$ имеет параметры $(484, 92, 6, 20)$ и $\mu \in \{92, 121\}$, или $[u]$ имеет параметры $(505, 84, 3, 16)$ и $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$;

(3) $[u]$ имеет параметры $(529, 96, 5, 20)$ и $\mu \in \{108, 138, 144\}$, или $[u]$ имеет параметры $(540, 154, 28, 50)$ и $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$, или $[u]$ имеет параметры $(552, 76, 0, 12)$ и $\mu \in \{69, 75, 76, 92, 95, 100, 114, 115, 120, 138, 150, 152\}$, или $[u]$ имеет параметры $(595, 144, 18, 40)$ и $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$;

(4) $[u]$ имеет параметры $(595, 144, 18, 40)$ и $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$, или $[u]$ имеет параметры $(625, 104, 3, 20)$ и $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$, или $[u]$ имеет параметры $(664, 170, 24, 50)$ и $\mu = 232$, или $[u]$ имеет параметры $(667, 96, 0, 16)$ и $\mu \in \{95, 114, 115, 138, 145, 174, 190\}$;

(5) $[u]$ имеет параметры $(676, 108, 2, 20)$ и $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$, или $[u]$ имеет параметры $(676, 225, 54, 85)$ и $\mu = 300$, или $[u]$ имеет параметры $(704, 228, 52, 84)$ и $\mu = 304$, или $[u]$ имеет параметры $(715, 224, 48, 80)$ и $\mu \in \{275, 286\}$, или $[u]$ имеет параметры $(729, 112, 1, 20)$ и $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$, или $[u]$ имеет параметры $(729, 208, 37, 68)$ и $\mu \in \{260, 270\}$, или $[u]$ имеет параметры $(760, 264, 68, 104)$ и $\mu \in \{330, 342\}$.

Следствие 3. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп. (3), (4) заключения теоремы 3, u — вершина графа Γ . Тогда $[u]$ имеет параметры $(378, 52, 1, 8)$, $(391, 140, 39, 56)$, $(400, 84, 8, 20)$, $(441, 88, 7, 20)$, $(505, 84, 3, 16)$, $(540, 154, 28, 50)$, $(595, 144, 18, 40)$, $(625, 104, 3, 20)$, $(676, 108, 2, 20)$ или $(729, 112, 1, 20)$.

Пусть до конца раздела Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы, параметры (v', k', λ', μ') которых лежат в списках из условия теоремы 5. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $\Gamma_i = \Gamma_i(u)$, $k_i = |\Gamma_i|$.

Лемма 4.1. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (3) заключения теоремы 3, u — вершина графа Γ . Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры $(361, 80, 9, 20)$ и $\mu = 95$, или $[u]$ имеет параметры $(364, 88, 12, 24)$ и $\mu \in \{100, 110, 130\}$, или $[u]$ имеет параметры $(378, 52, 1, 8)$ и $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$, или $[u]$ имеет параметры $(391, 140, 39, 56)$ и $\mu = 170$, или $[u]$ имеет параметры $(392, 46, 0, 6)$ и $\mu \in \{23, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 46, 49, 56, 60, 69, 70, 84, 92, 98, 105\}$;

(2) $[u]$ имеет параметры $(400, 84, 8, 20)$ и $\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$, или $[u]$ имеет параметры $(441, 88, 7, 20)$ и $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$, или $[u]$ имеет параметры $(456, 130, 24, 42)$ и $\mu \in \{150, 152, 156\}$, или $[u]$ имеет параметры $(484, 92, 6, 20)$ и $\mu \in \{92, 121\}$, или $[u]$ имеет параметры $(505, 84, 3, 16)$ и $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$;

(3) $[u]$ имеет параметры $(529, 96, 5, 20)$ и $\mu \in \{108, 138, 144\}$, или $[u]$ имеет параметры $(540, 154, 28, 50)$ и $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$, или $[u]$ имеет параметры $(552, 76, 0, 12)$ и $\mu \in \{69, 75, 76, 92, 95, 100, 114, 115, 120, 138, 150, 152\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (3) заключения теоремы 3. С учетом неравенств из леммы 1.2 и $\mu \leq v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры $(361, 80, 9, 20)$, $(364, 88, 12, 24)$, $(375, 154, 53, 70)$, $(378, 52, 1, 8)$, $(391, 140, 39, 56)$, $(392, 46, 0, 6)$, $(400, 84, 8, 20)$, $(441, 88, 7, 20)$, $(456, 130, 24, 42)$, $(460, 204, 78, 100)$, $(484, 92, 6, 20)$, $(497, 186, 55, 78)$, $(505, 84, 3, 16)$, $(512, 292, 156, 180)$, $(529, 96, 5, 20)$, $(540, 154, 28, 50)$ или $(552, 76, 0, 12)$. Так как в графе Тэйлора имеем $k' = 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров $(361, 80, 9, 20)$ имеем $\theta_2 = -15$, $v' - k' - 1 = 280$ и $\mu < 280$. Далее, $16 \cdot 361/76 < \mu < 35 \cdot 361/95$, поэтому $77 \leq \mu \leq 132$ и μ делит $kb_1 = 361 \cdot 280$. Отсюда $\mu = 95$ и $x_0 \leq 10$.

В случае параметров $(364, 88, 12, 24)$ имеем $\theta_2 = -16$, $v' - k' - 1 = 275$ и $\mu < 275$. Далее, $20 \cdot 364/84 < \mu < 40 \cdot 364/104$, поэтому $87 \leq \mu \leq 139$ и μ делит $kb_1 = 364 \cdot 275$. Отсюда $\mu \in \{91, 100, 110, 130\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 6, 8, 4.

В случае параметров $(375, 154, 53, 70)$ имеем $\theta_2 = -21$, $v' - k' - 1 = 220$ и $\mu < 220$. Далее, $66 \cdot 375/150 < \mu < 91 \cdot 375/175$, поэтому $166 \leq \mu \leq 194$ и μ делит $kb_1 = 375 \cdot 220$. Подходящих значений μ нет, противоречие.

В случае параметров $(378, 52, 1, 8)$ имеем $\theta_2 = -11$, $v' - k' - 1 = 325$ и $\mu < 325$. Далее, $4 \cdot 378/48 < \mu < 19 \cdot 378/63$, поэтому $32 \leq \mu \leq 113$ и μ делит $kb_1 = 378 \cdot 325$. Отсюда $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$ и соответственно x_0 не больше 5, 16, 20, 24, 28, 30, 29, 29, 28, 25, 24, 17, 16, 6.

В случае параметров $(391, 140, 39, 56)$ имеем $\theta_2 = -21$, $v' - k' - 1 = 250$ и $\mu < 250$. Далее, $52 \cdot 391/136 < \mu < 77 \cdot 391/161$, поэтому $150 \leq \mu \leq 186$ и μ делит $kb_1 = 391 \cdot 250$. Отсюда $\mu = 170$ и $x_0 \leq 2$.

В случае параметров $(392, 46, 0, 6)$ имеем $\theta_2 = -10$, $v' - k' - 1 = 345$ и $\mu < 345$. Далее, $2 \cdot 392/42 < \mu < 16 \cdot 392/56$, поэтому $19 \leq \mu \leq 111$ и μ делит $kb_1 = 392 \cdot 345$. Отсюда $\mu \in \{20, 21, 23, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 46, 49, 56, 60, 69, 70, 84, 92, 98, 105\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0, 8, 14, 28, 32, 38, 42, 42, 43, 42, 40, 38, 33, 32, 22, 16, 11, 6.

В случае параметров $(400, 84, 8, 20)$ имеем $\theta_2 = -16$, $v' - k' - 1 = 315$ и $\mu < 315$. Далее, $16 \cdot 400/80 < \mu < 36 \cdot 400/100$, поэтому $81 \leq \mu \leq 143$ и μ делит $kb_1 = 400 \cdot 315$. Отсюда

$\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 6, 11, 12, 12, 10, 8, 8, 2.

В случае параметров (441, 88, 7, 20) имеем $\theta_2 = -17$, $v' - k' - 1 = 352$ и $\mu < 352$. Далее, $16 \cdot 441/84 < \mu < 37 \cdot 441/105$, поэтому $85 \leq \mu \leq 155$ и μ делит $kb_1 = 441 \cdot 352$. Отсюда $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 8, 10, 10, 14, 12, 10, 5, 4.

В случае параметров (456, 130, 24, 42) имеем $\theta_2 = -22$, $v' - k' - 1 = 325$ и $\mu < 325$. Далее, $38 \cdot 456/126 < \mu < 64 \cdot 456/152$, поэтому $138 \leq \mu \leq 191$ и μ делит $kb_1 = 456 \cdot 325$. Отсюда $\mu \in \{150, 152, 156, 190\}$ и соответственно x_0 не больше 2, 3, 5, 0.

В случае параметров (460, 204, 78, 100) имеем $\theta_2 = -26$, $v' - k' - 1 = 255$ и $\mu < 255$. Далее, $96 \cdot 460/200 < \mu < 126 \cdot 460/230$, поэтому $221 \leq \mu \leq 251$ и μ делит $kb_1 = 460 \cdot 255$. Отсюда $\mu = 230$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров (484, 92, 6, 20) имеем $\theta_2 = -18$, $v' - k' - 1 = 391$ и $\mu < 391$. Далее, $16 \cdot 484/88 < \mu < 38 \cdot 484/110$, поэтому $89 \leq \mu \leq 167$ и μ делит $kb_1 = 484 \cdot 391$. Отсюда $\mu \in \{92, 121\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 16.

В случае параметров (497, 186, 55, 78) имеем $\theta_2 = -27$, $v' - k' - 1 = 310$ и $\mu < 310$. Далее, $74 \cdot 497/182 < \mu < 105 \cdot 497/213$, поэтому $203 \leq \mu \leq 244$ и μ делит $kb_1 = 497 \cdot 310$. Отсюда $\mu = 217$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров (505, 84, 3, 16) имеем $\theta_2 = -17$, $v' - k' - 1 = 420$ и $\mu < 420$. Далее, $12 \cdot 505/80 < \mu < 33 \cdot 505/101$, поэтому $76 \leq \mu \leq 164$ и μ делит $kb_1 = 505 \cdot 420$. Отсюда $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$ и соответственно x_0 не больше 8, 20, 20, 21, 13, 8.

В случае параметров (529, 96, 5, 20) имеем $\theta_2 = -19$, $v' - k' - 1 = 432$ и $\mu < 432$. Далее, $16 \cdot 529/92 < \mu < 39 \cdot 529/115$, поэтому $93 \leq \mu \leq 179$ и μ делит $kb_1 = 529 \cdot 432$. Отсюда $\mu \in \{108, 138, 144\}$ и соответственно x_0 не больше 12, 17, 16.

В случае параметров (540, 154, 28, 50) имеем $\theta_2 = -26$, $v' - k' - 1 = 385$ и $\mu < 385$. Далее, $46 \cdot 540/150 < \mu < 76 \cdot 540/180$, поэтому $166 \leq \mu \leq 227$ и μ делит $kb_1 = 540 \cdot 385$. Отсюда $\mu \in \{175, 180, 189, 198, 210, 220, 225\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 2, 5, 6, 5, 2, 1.

В случае параметров (552, 76, 0, 12) имеем $\theta_2 = -16$, $v' - k' - 1 = 475$ и $\mu < 475$. Далее, $8 \cdot 552/72 < \mu < 28 \cdot 552/92$, поэтому $62 \leq \mu \leq 167$ и μ делит $kb_1 = 552 \cdot 475$. Отсюда $\mu \in \{69, 75, 76, 92, 95, 100, 114, 115, 120, 138, 150, 152\}$ и соответственно x_0 не больше 12, 20, 21, 30, 31, 32, 29, 29, 27, 19, 12, 10.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (4) заключения теоремы 3, и — вершина графа Γ . Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры (595, 144, 18, 40) и $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$, или $[u]$ имеет параметры (625, 104, 3, 20) и $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$, или $[u]$ имеет параметры (664, 170, 24, 50) и $\mu = 232$, или $[u]$ имеет параметры (667, 96, 0, 16) и $\mu \in \{95, 114, 115, 138, 145, 174, 190\}$;

(2) $[u]$ имеет параметры (676, 108, 2, 20) и $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$, или $[u]$ имеет параметры (676, 225, 54, 85) и $\mu = 300$, или $[u]$ имеет параметры (704, 228, 52, 84) и $\mu = 304$, или $[u]$ имеет параметры (715, 224, 48, 80) и $\mu \in \{275, 286\}$, или $[u]$ имеет параметры (729, 112, 1, 20) и $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$, или $[u]$ имеет параметры (729, 208, 37, 68) и $\mu \in \{260, 270\}$, или $[u]$ имеет параметры (760, 264, 68, 104) и $\mu \in \{330, 342\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (4) заключения теоремы 3. С учетом неравенств из леммы 1.2 и $\mu \leq v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры (568, 252, 96, 124), (595, 144, 18, 40), (625, 104, 3, 20), (640, 284, 108, 140), (657, 256, 80, 112), (664, 170, 24, 50), (667, 96, 0, 16), (676, 108, 2, 20), (676, 225, 54, 85), (704, 228, 52, 84), (715, 224, 48, 80), (729, 112, 1, 20), (729, 208, 37, 68), (730, 324, 123, 160) или (760, 264, 68, 104). Так как в графе Тэйлора имеем $k' = 2\mu'$, то Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

В случае параметров (568, 252, 96, 124) имеем $\theta_2 = -32$, $v' - k' - 1 = 315$ и $\mu < 315$. Далее, $120 \cdot 568/248 < \mu < 156 \cdot 568/284$, поэтому $275 \leq \mu \leq 311$ и μ делит $kb_1 = 568 \cdot 315$. Отсюда

$\mu \in \{280, 284\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0.

В случае параметров (595, 144, 18, 40) имеем $\theta_2 = -26$, $v' - k' - 1 = 450$ и $\mu < 450$. Далее, $36 \cdot 595/140 < \mu < 66 \cdot 595/170$, поэтому $154 \leq \mu \leq 230$ и μ делит $kb_1 = 595 \cdot 450$. Отсюда $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$ и соответственно x_0 не больше 6, 8, 7, 2.

В случае параметров (625, 104, 3, 20) имеем $\theta_2 = -21$, $v' - k' - 1 = 520$ и $\mu < 520$. Далее, $16 \cdot 625/100 < \mu < 41 \cdot 625/125$, поэтому $101 \leq \mu \leq 204$ и μ делит $kb_1 = 625 \cdot 520$. Отсюда $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 20, 22, 2.

В случае параметров (640, 284, 108, 140) имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 355$ и $\mu < 355$. Далее, $136 \cdot 640/280 < \mu < 176 \cdot 640/320$, поэтому $311 \leq \mu \leq 351$ и μ делит $kb_1 = 640 \cdot 355$. Отсюда $\mu = 320$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров (657, 256, 80, 112) имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 400$ и $\mu < 400$. Далее, $108 \cdot 657/252 < \mu < 148 \cdot 657/292$, поэтому $282 \leq \mu \leq 332$ и μ делит $kb_1 = 657 \cdot 400$. Отсюда $\mu \in \{292, 300\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0.

В случае параметров (664, 170, 24, 50) имеем $\theta_2 = -30$, $v' - k' - 1 = 493$ и $\mu < 493$. Далее, $46 \cdot 664/166 < \mu < 80 \cdot 664/200$, поэтому $185 \leq \mu \leq 265$ и μ делит $kb_1 = 664 \cdot 493$. Отсюда $\mu = 232$ и x_0 не больше 9.

В случае параметров (667, 96, 0, 16) имеем $\theta_2 = -20$, $v' - k' - 1 = 570$ и $\mu < 570$. Далее, $12 \cdot 667/92 < \mu < 36 \cdot 667/116$, поэтому $88 \leq \mu \leq 206$ и μ делит $667 \cdot 570$. Отсюда $\mu \in \{95, 114, 115, 138, 145, 174, 190\}$ и соответственно x_0 не больше 9, 27, 28, 31, 30, 19, 10.

В случае параметров (676, 108, 2, 20) имеем $\theta_2 = -22$, $v' - k' - 1 = 567$ и $\mu < 567$. Далее, $16 \cdot 676/104 < \mu < 42 \cdot 676/130$, поэтому $105 \leq \mu \leq 218$ и μ делит $676 \cdot 567$. Отсюда $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 12, 19, 26, 25, 23, 19, 16.

В случае параметров (676, 225, 54, 85) имеем $\theta_2 = -35$, $v' - k' - 1 = 450$ и $\mu < 450$. Далее, $81 \cdot 676/221 < \mu < 120 \cdot 676/260$, поэтому $248 \leq \mu \leq 311$ и μ делит $676 \cdot 450$. Отсюда $\mu \in \{260, 300\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 3.

В случае параметров (704, 228, 52, 84) имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 475$ и $\mu < 475$. Далее, $80 \cdot 704/224 < \mu < 120 \cdot 704/264$, поэтому $252 \leq \mu \leq 319$ и μ делит $704 \cdot 475$. Отсюда $\mu \in \{275, 304\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 3.

В случае параметров (715, 224, 48, 80) имеем $\theta_2 = -36$, $v' - k' - 1 = 490$ и $\mu < 490$. Далее, $76 \cdot 715/220 < \mu < 116 \cdot 715/260$, поэтому $248 \leq \mu \leq 318$ и μ делит $715 \cdot 490$. Отсюда $\mu \in \{275, 286\}$ и соответственно x_0 не больше 4, 6.

В случае параметров (729, 112, 1, 20) имеем $\theta_2 = -23$, $v' - k' - 1 = 616$ и $\mu < 616$. Далее, $16 \cdot 729/108 < \mu < 43 \cdot 729/135$, поэтому $109 \leq \mu \leq 232$ и μ делит $729 \cdot 616$. Отсюда $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$ и соответственно x_0 не больше 18, 22, 29, 29, 28, 22, 18, 9.

В случае параметров (729, 208, 37, 68) имеем $\theta_2 = -35$, $v' - k' - 1 = 520$ и $\mu < 520$. Далее, $64 \cdot 729/204 < \mu < 103 \cdot 729/243$, поэтому $229 \leq \mu \leq 308$ и μ делит $729 \cdot 520$. Отсюда $\mu \in \{234, 243, 260, 270\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0, 7, 8.

В случае параметров (730, 324, 123, 160) имеем $\theta_2 = -41$, $v' - k' - 1 = 405$ и $\mu < 405$. Далее, $156 \cdot 730/320 \leq \mu \leq 201 \cdot 730/365$, поэтому $356 \leq \mu \leq 401$ и μ делит $730 \cdot 405$. Отсюда $\mu = 365$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров (760, 264, 68, 104) имеем $\theta_2 = -40$, $v' - k' - 1 = 495$ и $\mu < 495$. Далее, $100 \cdot 760/260 < \mu < 144 \cdot 760/304$, поэтому $293 \leq \mu \leq 359$ и μ делит $760 \cdot 495$. Отсюда $\mu \in \{300, 330, 342\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 4, 4.

Лемма 4.2 и теорема 5 доказаны.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 3. Если окрестности вершин в Γ имеют параметры (392, 46, 0, 6), (552, 76, 0, 12), (667, 96, 0, 16) или (784, 116, 0, 20), то ввиду [10] Γ не является дистанционно регулярным графом. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из условия теоремы 5. В случае параметров (361, 80, 9, 20) имеем $\mu = 95$ и $b_2 \leq 10$, противоречие с тем, что b_2 делится на 19. В случае параметров (364, 88, 12, 24) имеем $\mu \in \{100, 110, 130\}$, соответственно b_2 не больше

6, 8, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 52/3$ и $\theta_d \geq -56$. Так как b_1b_2 делится на μ , то $\mu = 100$, $k_2 = 91 \cdot 11$ и $b_2 = 4$, противоречие с тем, что $\theta_1 > 19$.

В случае параметров (391, 140, 39, 56) имеем $\mu = 170$ и $b_0 \leq 2$, противоречие с тем, что b_2 делится на 17. В случае параметров (456, 130, 24, 42) имеем $\mu \in \{150, 152, 156\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 3, 5. Противоречие с тем, что $b_1 = 325$ и b_1b_2 делится на μ . В случае параметров (484, 92, 6, 20) имеем $\mu \in \{92, 121\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 16. Противоречие с тем, что $b_1 = 391$ и b_1b_2 делится на μ . В случае параметров (529, 96, 5, 20) имеем $\mu \in \{108, 138, 144\}$ и соответственно b_2 не больше 12, 17, 16. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 23$ и $\theta_d \geq -86, 4$. Так как b_1b_2 делится на μ , то $\mu \in \{108, 144\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. В случае параметров (540, 154, 28, 50) имеем $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 5, 6, 5, 2, 1. Противоречие с тем, что $b_1 = 385$ и b_1b_2 не делится на μ .

В случае параметров (664, 170, 24, 50) имеем $b_1 = 493$, $\mu = 232$ и b_2 не больше 9. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 16$ и $\theta_d \geq -99, 6$. Далее, $b_2 = 8$, противоречие с тем, что $\theta_1 > 22$.

В случае параметров (676, 225, 54, 85) имеем $\mu = 300$ и $b_2 \leq 3$. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 208/17 = 12 + 4/17$ и $\theta_d \geq -91$. Далее, $b_1 = 450$, b_1b_2 делится на μ , поэтому $b_2 = 2$, $k_2 = 338 \cdot 3 = 13^2 \cdot 6$ и $c_3 = 676$. Противоречие с тем, что некоторое собственное значение графа имеет нецелую кратность.

В случае параметров (704, 228, 52, 84) имеем $\mu = 304$ и b_2 не больше 3. Далее, $b_1 = 475$, b_1b_2 делится на μ , поэтому b_2 делится на 16, противоречие.

В случае параметров (715, 224, 48, 80) имеем $\mu \in \{275, 286\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 6. Далее, $b_1 = 490$, b_1b_2 делится на μ , поэтому b_2 делится на 55, 143 соответственно, противоречие.

В случае параметров (729, 208, 37, 68) имеем $\mu \in \{260, 270\}$ и соответственно b_2 не больше 7, 8. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 520/34 = 14 + 12/17$ и $\theta_d \geq -105$. Далее, $b_1 = 520$, b_1b_2 делится на μ , поэтому $\mu = 260$, $b_2 \leq 7$, $k_2 = 729 \cdot 2$ и $c_3 \geq 260 - 7 + 210 = 463$. Отсюда $c_3 \in \{486, 729\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров (760, 264, 68, 104) имеем $\mu \in \{330, 342\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 4. Далее, $b_1 = 495$, b_1b_2 делится на μ , поэтому $\mu = 330$, $b_2 = 2, 4$, $k_2 = 380 \cdot 3$ и $c_3 \geq 330 - 4 + 266 = 592$. Отсюда $c_3 = 760$ и допустимых массивов пересечений нет.

Следствие 3 доказано.

5. Расширения исключительных графов, пп. (1), (2)

В этом разделе получена следующая теорема.

Теорема 6. Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами из пп. (1), (2) заключения теоремы 3, и — вершина графа Γ . Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры (27, 16, 10, 8), (63, 32, 16, 16), (135, 64, 28, 32), (189, 88, 37, 44), (243, 112, 46, 56), (279, 128, 52, 64) или (351, 160, 64, 80) и Γ является графом Тэйлора;

(2) $[u]$ имеет параметры (28, 12, 6, 4) и $\mu \in \{5, 6, 7\}$, или $[u]$ имеет параметры (85, 14, 3, 2) и $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$, или $[u]$ имеет параметры (112, 36, 10, 12) и $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$, или $[u]$ имеет параметры (120, 34, 8, 10) и $\mu \in \{30, 34, 40\}$;

(3) $[u]$ имеет параметры (133, 32, 6, 8) и $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$, или $[u]$ имеет параметры (144, 52, 16, 20) и $\mu \in \{52, 56, 63\}$, или $[u]$ имеет параметры (154, 48, 12, 16) и $\mu \in \{49, 55\}$, или $[u]$ имеет параметры (169, 56, 15, 20) и $\mu = 56$;

(4) $[u]$ имеет параметры (176, 70, 24, 30) и $\mu \in \{77, 80\}$, или $[u]$ имеет параметры (183, 52, 11, 16) и $\mu \in \{61, 65\}$, или $[u]$ имеет параметры (190, 84, 33, 40) и $\mu = 95$, или $[u]$ имеет параметры (196, 60, 14, 20) и $\mu \in \{60, 63, 70\}$, или $[u]$ имеет параметры (204, 28, 2, 4) и $\mu \in \{6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$;

(5) $[u]$ имеет параметры $(217, 66, 15, 22)$ и $\mu \in \{70, 75\}$, или $[u]$ имеет параметры $(225, 64, 13, 20)$ и $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$, или $[u]$ имеет параметры $(232, 33, 2, 5)$ и $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$, или $[u]$ имеет параметры $(243, 22, 1, 2)$ и $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$;

(6) $[u]$ имеет параметры $(256, 68, 12, 20)$ и $\mu \in \{68, 88\}$, или $[u]$ имеет параметры и $\mu = 232$, или $[u]$ имеет параметры $(285, 64, 8, 16)$ и $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$, или $[u]$ имеет параметры $(286, 95, 24, 35)$ и $\mu = 110$, или $[u]$ имеет параметры $(289, 72, 11, 20)$ и $\mu \in \{72, 102, 108\}$;

(7) $[u]$ имеет параметры $(300, 104, 28, 40)$ и $\mu \in \{117, 125, 130\}$, или $[u]$ имеет параметры $(320, 132, 46, 60)$ и $\mu = 160$, или $[u]$ имеет параметры $(322, 96, 20, 32)$ и $\mu \in \{105, 115, 126\}$, или $[u]$ имеет параметры $(324, 68, 7, 16)$ и $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$, или $[u]$ имеет параметры $(324, 76, 10, 20)$ и $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$;

(8) $[u]$ имеет параметры $(325, 54, 3, 10)$ и $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$, или $[u]$ имеет параметры $(343, 102, 21, 34)$ и $\mu \in \{120, 140\}$, или $[u]$ имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$ и $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$, или $[u]$ имеет параметры $(352, 36, 0, 4)$ и $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$.

Лемма 5.1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин d_1, \dots, d_N . Тогда $(v - N) - (kN - 2M) + (\lambda M + \mu \binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} = x_0 + \sum_{i=3}^N \binom{i-1}{2} x_i$, где $x_i = x_i(\Delta)$.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$, и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta, b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства

$v - N = \sum x_i, kN - 2M = \sum i x_i$ и $\lambda M + \mu \binom{N}{2} - M - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} = \sum \binom{i}{2} x_i$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое.

Лемма доказана.

Пусть до конца раздела Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы, параметры (v', k', λ', μ') которых лежат в списках из условия теоремы 6. Зафиксируем вершины $u, w \in \Gamma$ с $d(u, w) = 2$ и пусть X_i — множество вершин из $[w] - [u]$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$. Выберем вершину $z \in X_0$ и положим $y_i = |X_i \cap [z]|$. Кроме обычных уравнений для x_i , имеем $\sum y_i = k', \sum i y_i = \mu', 0 \leq y_i \leq x_i, 0 \leq y_0 \leq x_0 - 1$. С помощью методов линейного программирования получены оценки сверху для x_0 . Положим $\Gamma_i = \Gamma_i(u), k_i = |\Gamma_i|$.

Лемма 5.2. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (1) заключения теоремы 3. Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры $(27, 16, 10, 8), (63, 32, 16, 16), (135, 64, 28, 32)$ или $(189, 88, 37, 44)$ и Γ является графом Тэйлора;

(2) $[u]$ имеет параметры $(28, 12, 6, 4)$ и $\mu \in \{5, 6, 7\}$, или $[u]$ имеет параметры $(85, 14, 3, 2)$ и $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$, или $[u]$ имеет параметры $(112, 36, 10, 12)$ и $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$, или $[u]$ имеет параметры $(120, 34, 8, 10)$ и $\mu \in \{30, 34, 40\}$;

(3) $[u]$ имеет параметры $(133, 32, 6, 8)$ и $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$, или $[u]$ имеет параметры $(144, 52, 16, 20)$ и $\mu \in \{52, 56, 63\}$, или $[u]$ имеет параметры $(154, 48, 12, 16)$ и $\mu \in \{49, 55\}$, или $[u]$ имеет параметры $(169, 56, 15, 20)$ и $\mu = 56$;

(4) $[u]$ имеет параметры $(176, 70, 24, 30)$ и $\mu \in \{77, 80\}$, или $[u]$ имеет параметры $(183, 52, 11, 16)$ и $\mu \in \{61, 65\}$, или $[u]$ имеет параметры $(190, 84, 33, 40)$ и $\mu = 95$, или $[u]$ имеет параметры $(196, 60, 14, 20)$ и $\mu \in \{60, 63, 70\}$, или $[u]$ имеет параметры $(204, 28, 2, 4)$ и $\mu \in \{6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (1) заключения теоремы 3. В случае параметров $(27, 16, 10, 8), (63, 32, 16, 16), (135, 64, 28, 32)$ или $(189, 88, 37, 44)$

Γ является графом Тэйлора. В оставшихся случаях Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

С учетом неравенств из утверждения (1) леммы 1.2 и $\mu < v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры (27, 16, 10, 8), (28, 12, 6, 4), (63, 32, 16, 16), (85, 14, 3, 2), (96, 20, 4, 4), (100, 44, 18, 20), (112, 36, 10, 12), (120, 34, 8, 10), (133, 32, 6, 8), (136, 60, 24, 28), (144, 52, 16, 20), (154, 48, 12, 16), (156, 30, 4, 6), (169, 56, 15, 20), (176, 70, 24, 30), (183, 52, 11, 16), (190, 84, 33, 40), (196, 60, 14, 20) или (204, 28, 2, 4).

В случае параметров (28, 12, 6, 4) имеем $\theta_2 = -2$, $b_1 = 15$. Ввиду леммы 1.2 имеем $0 \cdot 28/8 < \mu < 6 \cdot 28/14$. Поскольку μ делит $kb_1 = 28 \cdot 15$, то $\mu \in \{5, 6, 7, 10\}$ и соответственно x_0 не больше 6, 6, 4, 0.

В случае параметров (85, 14, 3, 2) имеем $\theta_2 = -3$, $b_1 = 70$. Ввиду леммы 1.2 имеем $-2 \cdot 85/10 < \mu < 5 \cdot 85/17$. Поскольку μ делит $kb_1 = 85 \cdot 70$, то $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$ и соответственно x_0 не больше 40, 36, 25, 17, 11.

В случае параметров (100, 44, 18, 20) имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 55$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 100/40 < \mu < 26 \cdot 100/50$. Поскольку μ делит $kb_1 = 100 \cdot 55$, то $\mu \in \{44, 50\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 1. В последнем случае число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше 125, но не меньше $44k_3$. Поэтому $k_3 \leq 2$ и указанное число ребер не меньше $99k_3$. Отсюда $k_3 = 1$ и Γ разбивается антиподальными классами порядка 2. Противоречие с тем, что число вершин в Γ нечетно.

В случае параметров (112, 36, 10, 12) имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 75$. Ввиду леммы 1.2 имеем $8 \cdot 112/32 < \mu < 18 \cdot 112/42$. Поскольку μ делит $kb_1 = 112 \cdot 75$, то $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 3, 3, 2.

В случае параметров (120, 34, 8, 10) имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = v' - k' - 1 = 85$. Ввиду леммы 1.2 имеем $6 \cdot 120/30 < \mu < 16 \cdot 120/40$. Поскольку μ делит $kb_1 = 120 \cdot 85$, то $\mu \in \{25, 30, 34, 40\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 5, 5, 4.

В случае параметров (133, 32, 6, 8) имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 100$. Ввиду леммы 1.2 имеем $4 \cdot 133/28 < \mu < 14 \cdot 133/38$. Поскольку μ делит $kb_1 = 133 \cdot 100$, то $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 7, 9, 7, 6.

В случае параметров (136, 60, 24, 28) имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 75$. Ввиду леммы 1.2 имеем $24 \cdot 136/56 < \mu < 36 \cdot 136/68$. Поскольку μ делит $kb_1 = 136 \cdot 75$, то $\mu \in \{60, 68\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0.

В случае параметров (144, 52, 16, 20) имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 91$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 144/48 < \mu < 28 \cdot 144/60$. Поскольку μ делит $kb_1 = 144 \cdot 91$, то $\mu \in \{52, 56, 63\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 2, 1.

В случае параметров (154, 48, 12, 16) имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 105$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 154/44 < \mu < 24 \cdot 154/56$. Поскольку μ делит $kb_1 = 154 \cdot 105$, то $\mu \in \{49, 55\}$ и соответственно x_0 не больше 3, 3.

В случае параметров (169, 56, 15, 20) имеем $\theta_2 = -9$, $b_1 = 112$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 169/52 < \mu < 29 \cdot 169/65$. Поскольку μ делит $kb_1 = 169 \cdot 112$, то $\mu = 56$ и x_0 не больше 1.

В случае параметров (176, 70, 24, 30) имеем $\theta_2 = -10$, $b_1 = 105$. Ввиду леммы 1.2 имеем $26 \cdot 176/66 < \mu < 40 \cdot 176/80$. Поскольку μ делит $kb_1 = 176 \cdot 105$, то $\mu \in \{70, 77, 80\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 1, 1.

В случае параметров (183, 52, 11, 16) имеем $\theta_2 = -9$, $b_1 = 130$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 183/48 < \mu < 25 \cdot 183/61$. Поскольку μ делит $kb_1 = 183 \cdot 130$, то $\mu \in \{61, 65\}$ и соответственно x_0 не больше 4, 4.

В случае параметров (190, 84, 33, 40) имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 105$. Ввиду леммы 1.2 имеем $36 \cdot 190/80 < \mu < 51 \cdot 190/95$. Поскольку μ делит $kb_1 = 190 \cdot 105$, то $\mu = 95$ и x_0 не больше 1.

В случае параметров (196, 60, 14, 20) имеем $\theta_2 = -10$, $b_1 = 135$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 196/56 \leq \mu \leq 30 \cdot 196/70$. Поскольку μ делит $kb_1 = 196 \cdot 135$, то $\mu \in \{60, 63, 70\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 3, 4.

В случае параметров (204, 28, 2, 4) имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 175$. Ввиду леммы 1.2 имеем

$0 \cdot 204/24 \leq \mu \leq 10 \cdot 204/34$. Поскольку μ делит $kb_1 = 204 \cdot 175$, то $\mu \in \{5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 54, 43, 34, 48, 30, 39, 39, 37, 36, 34, 30, 30, 24, 24, 18, 9, 8.

Лемма доказана.

Лемма 5.3. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (2) заключения теоремы 3. Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры (243, 112, 46, 56), (279, 128, 52, 64) или (351, 160, 64, 80) и Γ является графом Тэйлора;

(2) $[u]$ имеет параметры (217, 66, 15, 22) и $\mu \in \{70, 75\}$, или $[u]$ имеет параметры (225, 64, 13, 20) и $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$, или $[u]$ имеет параметры (232, 33, 2, 5) и $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$, или $[u]$ имеет параметры (243, 22, 1, 2) и $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$;

(3) $[u]$ имеет параметры (256, 68, 12, 20) и $\mu \in \{68, 88\}$, или $[u]$ имеет параметры u $\mu = 232$, или $[u]$ имеет параметры (285, 64, 8, 16) и $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$, или $[u]$ имеет параметры (286, 95, 24, 35) и $\mu = 110$, или $[u]$ имеет параметры (289, 72, 11, 20) и $\mu \in \{72, 102, 108\}$;

(4) $[u]$ имеет параметры (300, 104, 28, 40) и $\mu \in \{117, 125, 130\}$, или $[u]$ имеет параметры (320, 132, 46, 60) и $\mu = 160$, или $[u]$ имеет параметры (322, 96, 20, 32) и $\mu \in \{105, 115, 126\}$, или $[u]$ имеет параметры (324, 68, 7, 16) и $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$, или $[u]$ имеет параметры (324, 76, 10, 20) и $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$;

(5) $[u]$ имеет параметры (325, 54, 3, 10) и $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$ или $[u]$ имеет параметры (343, 102, 21, 34) и $\mu \in \{120, 140\}$, или $[u]$ имеет параметры (352, 26, 0, 2) и $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$, или $[u]$ имеет параметры (352, 36, 0, 4) и $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (2) заключения теоремы 3. В случае параметров (243, 112, 46, 56), (279, 128, 52, 64) или (351, 160, 64, 80) Γ является графом Тэйлора. В оставшихся случаях Γ не является графом Тэйлора и $\mu < v' - k' - 1$.

С учетом неравенств из утверждения (1) леммы 1.2 и $\mu < v' - k' - 1$ граф $[u]$ имеет параметры (216, 40, 4, 8), (217, 66, 15, 22), (225, 64, 13, 20), (232, 33, 2, 5), (243, 22, 1, 2), (244, 108, 42, 52), (256, 68, 12, 20), (279, 128, 52, 64), (280, 124, 48, 60), (285, 64, 8, 16), (286, 95, 24, 35), (289, 72, 11, 20), (300, 104, 28, 40), (306, 55, 4, 11), (320, 132, 46, 60), (322, 96, 20, 32), (324, 68, 7, 16), (324, 76, 10, 20), (325, 54, 3, 10), (343, 102, 21, 34), (352, 26, 0, 2), (352, 36, 0, 4), (352, 156, 60, 76) или (352, 180, 84, 100).

В случае параметров (217, 66, 15, 22) имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 150$. Ввиду леммы 1.2 имеем $18 \cdot 217/62 < \mu < 33 \cdot 217/77$. Поскольку μ делит $kb_1 = 217 \cdot 150$, то $\mu \in \{70, 75\}$ и соответственно x_0 не больше 2, 4.

В случае параметров (225, 64, 13, 20) имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 160$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 225/60 < \mu < 31 \cdot 225/75$. Поскольку μ делит $kb_1 = 225 \cdot 160$, то $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$ и соответственно x_0 не больше 4, 5, 4, 1.

В случае параметров (232, 33, 2, 5) имеем $\theta_2 = -7$, $b_1 = 198$. Ввиду леммы 1.2 $1 \cdot 232/29 < \mu < 12 \cdot 232/40$ или $8^* \leq \mu \leq 69$. Поскольку μ делит $kb_1 = 232 \cdot 198$, то $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 0, 4, 24, 28, 30, 32, 30, 28, 21, 18, 10, 2.

В случае параметров (243, 22, 1, 2) имеем $\theta_2 = -5$, $b_1 = 220$. Ввиду леммы 1.2 имеем $-2 \cdot 243/18 < \mu < 7 \cdot 243/27$. Поскольку μ делит $kb_1 = 243 \cdot 220$, то $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$ и соответственно x_0 не больше 163, 148, 135, 108, 103, 100, 99, 88, 75, 69, 67, 54, 48, 45, 37, 25, 24, 11, 9, 3.

В случае параметров (244, 108, 42, 52) имеем $\theta_2 = -14$, $b_1 = 135$. Ввиду леммы 1.2 имеем $48 \cdot 244/104 < \mu < 66 \cdot 244/122$. Поскольку μ делит $kb_1 = 244 \cdot 135$, то $\mu = 122$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров (256, 68, 12, 20) имеем $\theta_2 = -12$, $b_1 = v' - k' - 1 = 187$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 256/64 < \mu < 32 \cdot 256/80$. Поскольку μ делит $kb_1 = 256 \cdot 187$, то $\mu \in \{68, 88\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 5.

В случае параметров (279, 128, 52, 64) имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 150$. Ввиду леммы 1.2 имеем $60 \cdot 279/124 < \mu < 80 \cdot 279/144$, противоречие.

В случае параметров (280, 124, 48, 60) имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 155$. Ввиду леммы 1.2 имеем $56 \cdot 280/120 < \mu < 76 \cdot 280/140$. Поскольку μ делит $kb_1 = 280 \cdot 155$, то $\mu = 140$ и $x_0 = 0$.

В случае параметров (285, 64, 8, 16) имеем $\theta_2 = -12$, $b_1 = 220$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 285/60 < \mu < 28 \cdot 285/76$. Поскольку μ делит $kb_1 = 285 \cdot 220$, то $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 6, 9, 9, 5, 2.

В случае параметров (286, 95, 24, 35) имеем $\theta_2 = -15$, $b_1 = 190$. Ввиду леммы 1.2 имеем $31 \cdot 286/91 < \mu < 50 \cdot 286/110$. Поскольку μ делит $kb_1 = 286 \cdot 190$, то $\mu = 110$ и $x_0 \leq 2$.

В случае параметров (289, 72, 11, 20) имеем $\theta_2 = -13$, $b_1 = 216$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 289/68 < \mu < 33 \cdot 289/85$. Поскольку μ делит $kb_1 = 289 \cdot 216$, то $\mu \in \{72, 102, 108\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 4, 1.

В случае параметров (300, 104, 28, 40) имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 195$. Ввиду леммы 1.2 имеем $36 \cdot 300/100 < \mu < 56 \cdot 300/120$. Поскольку μ делит $kb_1 = 300 \cdot 195$, то $\mu \in \{117, 125, 130\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 3, 2.

В случае параметров (320, 132, 46, 60) имеем $\theta_2 = -18$, $b_1 = 187$. Ввиду леммы 1.2 имеем $56 \cdot 320/128 < \mu < 78 \cdot 320/150$. Поскольку μ делит $kb_1 = 320 \cdot 187$, то $\mu = 160$ и $x_0 \leq 1$.

В случае параметров (322, 96, 20, 32) имеем $\theta_2 = -16$, $b_1 = 225$. Ввиду леммы 1.2 имеем $28 \cdot 322/92 < \mu < 48 \cdot 322/112$. Поскольку μ делит $kb_1 = 322 \cdot 225$, то $\mu \in \{105, 115, 126\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 4, 4.

В случае параметров (324, 68, 7, 16) имеем $\theta_2 = -13$, $b_1 = 255$. Ввиду леммы 1.2 имеем $12 \cdot 324/64 < \mu < 29 \cdot 324/81$. Поскольку μ делит $kb_1 = 324 \cdot 255$, то $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$ и соответственно x_0 не больше 5, 11, 11, 11, 7, 4.

В случае параметров (324, 76, 10, 20) имеем $\theta_2 = -14$, $b_1 = 247$. Ввиду леммы 1.2 имеем $16 \cdot 324/72 < \mu < 34 \cdot 324/90$. Поскольку μ делит $kb_1 = 324 \cdot 247$, то $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$ и соответственно x_0 не больше 1, 2, 5, 6, 4, 2.

В случае параметров (325, 54, 3, 10) имеем $\theta_2 = -11$, $b_1 = 270$. Ввиду леммы 1.2 имеем $6 \cdot 325/50 < \mu < 21 \cdot 325/65$. $39^* \leq \mu \leq 105^*$. Поскольку μ делит $kb_1 = 325 \cdot 270$, то $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$ и соответственно x_0 не больше 9, 14, 17, 19, 17, 15, 9.

В случае параметров (343, 102, 21, 34) имеем $\theta_2 = -17$, $b_1 = 240$. Ввиду леммы 1.2 имеем $30 \cdot 343/98 < \mu < 51 \cdot 343/119$. Поскольку μ делит $kb_1 = 343 \cdot 240$, то $\mu \in \{112, 120, 140\}$ и соответственно x_0 не больше 0, 4, 2.

В случае параметров (352, 26, 0, 2) имеем $\theta_2 = -6$, $b_1 = 325$. Ввиду леммы 1.2 имеем $-2 \cdot 352/22 < \mu < 8 \cdot 352/32$. Поскольку μ делит $kb_1 = 352 \cdot 325$, то $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$ и соответственно x_0 не больше 252, 232, 184, 162, 154, 144, 144, 118, 110, 102, 100, 85, 72, 61, 52, 50, 44, 30, 9.

В случае параметров (352, 36, 0, 4) имеем $\theta_2 = -8$, $b_1 = 315$. Ввиду леммы 1.2 имеем $0 \cdot 352/32 < \mu < 12 \cdot 352/44$. Поскольку μ делит $kb_1 = 352 \cdot 315$, то $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$ и соответственно x_0 не больше 88, 62, 55, 52, 58, 67, 80, 70, 65, 65, 66, 72, 62, 62, 64, 61, 58, 56, 56, 52, 49, 49, 48, 40, 40, 34, 32, 29, 25, 24, 18, 16, 11, 8, 5.

В случае параметров (352, 156, 60, 76) имеем $\theta_2 = -20$, $b_1 = 195$. Ввиду леммы 1.2 имеем $72 \cdot 352/152 < \mu < 96 \cdot 352/176$. Поскольку μ делит $kb_1 = 352 \cdot 195$, то $\mu = 176$ и $x_0 = 0$.

Лемма 5.3 и теорема 5 доказаны.

6. Доказательство основной теоремы

В этом разделе доказана теорема 1.

Пусть до конца раздела Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d > 2$, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами (v', k', λ', μ') из заключения теоремы 3 и $k' \neq 2\mu'$. Пусть $\theta_0 = k > \theta_1 > \dots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ .

Лемма 6.1. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (1) заключения теоремы 3. Тогда верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры $(85, 14, 3, 2)$ и либо Γ имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, либо $\mu \in \{5, 7, 10\}$;

(2) $[u]$ имеет параметры $(169, 56, 15, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$ или $[u]$ имеет параметры $(204, 28, 2, 4)$ и $\mu \in \{5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 42, 50\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (1) заключения теоремы 3.

В случае параметров $(28, 12, 6, 4)$ имеем $\mu \in \{5, 6, 7\}$ и x_0 не больше 6, 6, 4 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 14$ и $\theta_d \geq -4$. Если $\mu = 5$, то Γ — граф Тервиллигера, противоречие. Если $\mu = 6$, то $k_2 = 70$ и $b_2 \leq 6$ четно. В этом случае допустимых массивов пересечений нет. Если $\mu = 7$, то b_2 делится на 7, противоречие.

В случае параметров $(85, 14, 3, 2)$ имеем $\mu \in \{5, 7, 10, 14, 17\}$ и b_2 не больше 40, 36, 25, 17, 11 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 34$ и $\theta_d \geq -15$. Если $\mu = 17$, то b_2 делится на 17, противоречие. Если $\mu = 14$, то $k_2 = 85 \cdot 5$, a_2 четно и $b_2 \leq 17$ нечетно. Так как $b_2 \leq 17 < 3c_2/2$, то $d \leq 4$. Если $d = 3$, то Γ имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$. Пусть $d = 4$. Так как $b_2 \in \{15, 16, 17\}$ и $b_2 b_3$ делится на 14, то $b_2 = 16$, $b_3 = 7$, $k_3 = 85 \cdot 80/c_3$, $k_4 = 85 \cdot 80 \cdot 7/(c_3 c_4)$ и $c_3 \in \{34, 40, 50, 68\}$. С другой стороны, по лемме 1.2 имеем $7c_3 \leq 78(85 - c_3)^2/27^2$, поэтому $c_3 \leq 36$. Итак, $c_3 = 34$ и $c_4 \in \{50, 56, 70\}$. В любом случае $\theta_1 > 46$, противоречие.

В случае параметров $(112, 36, 10, 12)$ имеем $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$ и b_2 не больше 1, 3, 3, 2 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 74$ и $\theta_d \geq -16$. Если $\mu = 30$, то b_2 четно, если $\mu = 35$, то b_2 делится на 7, если $\mu = 40$, то b_2 делится на 8, а если $\mu = 42$, то b_2 делится на 14. В любом случае имеем противоречие.

В случае параметров $(120, 34, 8, 10)$ имеем $\mu \in \{30, 34, 40\}$ и b_2 не больше 5, 5, 4 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 16$ и $\theta_d \geq -18$. Если $\mu = 30$, то b_2 делится на 6, если $\mu = 34$, то b_2 делится на 2, а если $\mu = 40$, то b_2 делится на 8. Значит, $\mu = 34$, $b_2 \in \{2, 4\}$, $k_2 = 300$ и допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(133, 32, 6, 8)$ имеем $\mu \in \{20, 25, 28, 35, 38\}$ и b_2 не больше 1, 7, 9, 7, 6 соответственно. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 19$ и $\theta_d \geq -21$. Если $\mu = 28$, то b_2 делится на 7, если $\mu = 35$, то b_2 делится на 7, а если $\mu = 38$, то b_2 делится на 19. В случае $\mu = 28$ имеем $b_2 = 7$, $k_2 = 19 \cdot 25$ и $c_3 \in \{95, 133\}$. В случае $\mu = 35$ имеем $b_2 = 7$, $k_2 = 19 \cdot 20$ и $c_3 \in \{95, 133\}$. Если $\mu = 20$, то $b_2 = 1$, $k_2 = 19 \cdot 35$ и $c_3 \in \{95, 133\}$. Если $\mu = 25$, то $b_2 \leq 7$, $k_2 = 19 \cdot 28$ и либо $\theta_1 > 19$, либо $c_3 = 133$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(144, 52, 16, 20)$ имеем $\mu \in \{52, 56, 63\}$ и x_0 не больше 1, 2, 1 соответственно. Если $\mu = 52$, то b_2 делится на 4, если $\mu = 56$, то b_2 делится на 8, а если $\mu = 63$, то b_2 делится на 9. В любом случае имеем противоречие. В случае параметров $(154, 48, 12, 16)$ имеем $\mu \in \{49, 55\}$ и b_2 не больше 3, 3 соответственно. Если $\mu = 49$, то b_2 делится на 7, если $\mu = 55$, то b_2 делится на 11. В любом случае имеем противоречие.

В случае параметров $(169, 56, 15, 20)$ имеем $\mu = 56$, $b_2 = 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$.

В случае параметров $(176, 70, 24, 30)$ имеем $\mu \in \{77, 80\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 1. Противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на μ .

В случае параметров $(183, 52, 11, 16)$ имеем $\mu \in \{61, 65\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 4. Так как $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu = 65$, $k_2 = 183 \cdot 2$ и $c_3 = 126, 183$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. В случае параметров $(190, 84, 33, 40)$ имеем $\mu = 95$ и $b_2 = 1$, противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на 95.

В случае параметров $(196, 60, 14, 20)$ имеем $\mu \in \{60, 63, 70\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 3, 4. Далее, $b_1 = 135$ и $b_1 b_2$ не делится на μ , противоречие.

В случае параметров $(204, 28, 2, 4)$ имеем $\mu \in \{6, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 30, 34, 35, 42, 50, 51\}$ и соответственно x_0 не больше 54, 43, 34, 48, 30, 39, 39, 37, 36, 34, 30, 30, 24, 24, 18, 9, 8. Так как $b_1 = 175$ и $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu \neq 34, 51$.

Лемма доказана.

Лемма 6.2. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (2) заключения теоремы 3. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) $[u]$ имеет параметры $(232, 33, 2, 5)$ и $\mu \in \{9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 29, 33, 36, 44, 48, 58, 66\}$;
- (2) $[u]$ имеет параметры $(243, 22, 1, 2)$ и $\mu \in \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 27, 30, 33, 36, 44, 45, 54, 55, 60\}$;
- (3) $[u]$ имеет параметры $(289, 72, 11, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$;
- (4) $[u]$ имеет параметры $(325, 54, 3, 10)$ и $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$;
- (5) $[u]$ имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$ и $\mu \in \{4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 26, 32, 40, 44, 50, 52, 55, 65, 80\}$;
- (6) $[u]$ имеет параметры $(352, 36, 0, 4)$ и $\mu \in \{8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 77, 80, 84, 88, 90\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (2) заключения теоремы 3.

В случае параметров $(217, 66, 15, 22)$ имеем $\mu \in \{70, 75\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 14$ и $\theta_d \geq -31$. Так как $b_1 = 150$ и $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu = 75$, $k_2 = 217 \cdot 2$ и $c_3 \geq 75 - 4 + 68 = 139$. Отсюда $c_3 \in \{186, 217\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(225, 64, 13, 20)$ имеем $\mu \in \{72, 75, 80, 90\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 5, 4, 1. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 15$ и $\theta_d \geq -33$. Так как $b_1 = 160$ и $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu = 80$, $k_2 = 225 \cdot 2$ и $c_3 \geq 80 - 4 + 66 = 142$. Отсюда $c_3 \in \{150, 180, 200, 225\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(256, 68, 12, 20)$ имеем $\mu \in \{68, 88\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 5. Противоречие с тем, что $b_1 = 187$ и $b_1 b_2$ не делится на μ .

В случае параметров $(285, 64, 8, 16)$ имеем $\mu \in \{60, 66, 75, 76, 95, 100\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 6, 9, 9, 5, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 19$ и $\theta_d \geq -45$. Так как $b_1 = 220$ и $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu = 66$, $k_2 = 95 \cdot 10$ и $c_3 \geq 66 - 6 + 66 = 126$. Отсюда $c_3 \in \{190, 285\}$, а также $c_3 \in \{150, 228\}$ при $b_2 = 6$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(286, 95, 24, 35)$ имеем $\mu = 110$ и $b_2 \leq 2$. Противоречие с тем, что $b_1 = 190$ и $b_1 b_2$ не делится на μ . В случае параметров $(289, 72, 11, 20)$ имеем $\mu \in \{72, 102, 108\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 4, 1. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 17$ и $\theta_d \geq -44, 2$. Так как $b_1 = 216$ и $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu \neq 102$. Если $\mu = 72$, то Γ имеет массив пересечений $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$. Если $\mu = 108$, то допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(300, 104, 28, 40)$ имеем $\mu \in \{117, 125, 130\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 3, 2. Противоречие с тем, что $b_1 = 195$ и $b_1 b_2$ не делится на μ . В случае параметров $(320, 132, 46, 60)$ имеем $b_1 = 187$, $\mu = 160$ и $b_2 \leq 1$, противоречие. В случае параметров $(322, 96, 20, 32)$ имеем $b_1 = 225$, $\mu \in \{105, 115, 126\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 4, 4. Противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на μ .

В случае параметров $(324, 68, 7, 16)$ имеем $b_1 = 255$, $\mu \in \{68, 81, 85, 90, 102, 108\}$ и соответственно b_2 не больше 5, 11, 11, 11, 7, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 20, 25$ и $\theta_d \geq -52$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu \in \{68, 85, 90, 102\}$. Если $\mu = 68$, то $b_2 = 4$, $k_2 = 81 \cdot 15$, $c_3 \geq 68 - 4 + 70 = 134$ и $c_3 \in \{135, 162, 180, 243, 270, 324\}$. Если $\mu = 85$, то $b_2 \leq 11$, $k_2 = 324 \cdot 3$. Если $\mu = 90$, то $b_2 = 6$, $k_2 = 54 \cdot 17$. Если $\mu = 102$, то $b_2 = 2, 4, 6$, $k_2 = 162 \cdot 5$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(324, 76, 10, 20)$ имеем $b_1 = 247 = 19 \cdot 13$, $\mu \in \{76, 78, 81, 108, 114, 117\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 2, 5, 6, 4, 2. Противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на μ . В случае параметров $(343, 102, 21, 34)$ имеем $b_1 = 240$, $\mu \in \{120, 140\}$ и соответственно b_2 не больше 4, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 13$ и $\theta_d \geq -49$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu = 120$, $k_2 = 324 \cdot 2$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Лемма доказана.

Лемма 6.3. Пусть параметры (v', k', λ', μ') выбраны в п. (3) заключения теоремы 3. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) $[u]$ имеет параметры $(378, 52, 1, 8)$ и $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$;
- (2) $[u]$ имеет параметры $(441, 88, 7, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$, или $[u]$ имеет параметры $(505, 84, 3, 16)$ и Γ имеет массив пересечений $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$, или $[u]$ имеет параметры $(625, 104, 3, 20)$ и Γ имеет массив пересечений $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$;
- (3) $[u]$ имеет параметры $(676, 108, 2, 20)$ и $\mu \in \{108, 117, 126, 156, 162, 169, 182, 189\}$;
- (4) $[u]$ имеет параметры $(729, 112, 1, 20)$ и $\mu \in \{126, 132, 154, 162, 168, 189, 198, 216, 231\}$.

Доказательство. Пусть параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (3) заключения теоремы 3.

В случае параметров $(378, 52, 1, 8)$ имеем $b_1 = 325$, $\mu \in \{35, 39, 42, 45, 50, 54, 63, 65, 70, 75, 78, 90, 91, 105\}$ и соответственно b_2 не больше 5, 16, 20, 24, 28, 30, 29, 29, 28, 25, 24, 17, 16, 6.

В случае параметров $(391, 140, 39, 56)$ имеем $b_1 = 250$, $\mu = 170$ и $b_2 \leq 2$. Противоречие с тем, что $b_1 b_2$ не делится на μ .

В случае параметров $(400, 84, 8, 20)$ имеем $b_1 = 315 = 5 \cdot 63$, $\mu \in \{84, 90, 100, 105, 112, 120, 125, 126, 140\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 6, 11, 12, 12, 10, 8, 8, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 20$ и $\theta_d \geq -64$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu \in \{90, 105, 120, 126\}$. Если $\mu = 90$, то $b_2 = 2, 4, 6$, $k_2 = 40 \cdot 35$ и $c_3 \geq 90 - 6 + 86 = 170$. Если $\mu = 105$, то $b_2 \leq 12$, $k_2 = 400 \cdot 3$, $c_3 \geq 105 - 12 + 86 = 179$. Если $\mu = 120$, то $b_2 = 8$, $k_2 = 50 \cdot 21$, $c_3 \geq 120 - 8 + 86 = 198$. Если $\mu = 126$, то $b_2 = 2, 4, 6, 8$, $k_2 = 200 \cdot 5$, $c_3 \geq 126 - 8 + 86 = 204$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(441, 88, 7, 20)$ имеем $b_1 = 352$, $\mu \in \{88, 96, 98, 99, 112, 126, 132, 144, 147, 154\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 8, 10, 10, 14, 12, 10, 5, 4. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 21$ и $\theta_d \geq -71, 4$. Так как $b_1 b_2$ делится на μ , то $\mu \in \{88, 96, 112, 132, 144\}$. Если $\mu = 88$, то $b_2 = 1$, $k_2 = 441 \cdot 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$.

Если $\mu = 96$, то $b_2 = 3, 6$, $k_2 = 147 \cdot 11$, $c_3 \geq 96 - 6 + 90 = 180$. Если $\mu = 112$, то $b_2 = 7, 14$, $k_2 = 63 \cdot 22$, $c_3 \geq 112 - 14 + 90 = 188$. Если $\mu = 132$, то $b_2 = 3, 6, 9, 12$, $k_2 = 147 \cdot 8$, $c_3 \geq 132 - 12 + 90 = 210$. Если $\mu = 144$, то $b_2 = 9$, $k_2 = 49 \cdot 22$, $c_3 \geq 144 - 9 + 90 = 225$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(505, 84, 3, 16)$ имеем $b_1 = 420$, $\mu \in \{84, 100, 101, 105, 140, 150\}$ и соответственно b_2 не больше 8, 20, 20, 21, 13, 8. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 25, 25$ и $\theta_d \geq -85$. Если $\mu = 84$, то $b_2 \leq 8$, $k_2 = 505 \cdot 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$.

Если $\mu = 100$, то $b_2 = 5, 10, 15, 20$, $k_2 = 101 \cdot 21$, $c_3 \geq 100 - 20 + 86 = 166$. Если $\mu = 101$, то b_2 делится на 101, противоречие. Если $\mu = 105$, то $b_2 \leq 21$, $k_2 = 505 \cdot 4$, $c_3 \geq 105 - 21 + 86 = 170$. Если $\mu = 140$, то $b_2 \leq 13$, $k_2 = 505 \cdot 3$, $c_3 \geq 140 - 13 + 86 = 213$. Если $\mu = 150$, то $b_2 = 5$, $k_2 = 101 \cdot 14$, $c_3 \geq 150 - 5 + 86 = 233$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(529, 96, 5, 20)$ имеем $b_1 = 432 = 9 \cdot 48$, $\mu \in \{108, 138, 144\}$ и соответственно b_2 не больше 12, 17, 16. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 23$ и $\theta_d \geq -87, 4$. Если $\mu = 108$, то $b_2 \leq 12$, $k_2 = 529 \cdot 4$ и $c_3 \geq 108 - 12 + 98 = 194$. Если $\mu = 138$, то b_2 делится на 23, противоречие. Если $\mu = 144$, то $b_2 \leq 16$, $k_2 = 529 \cdot 3$ и $c_3 \geq 144 - 16 + 98 = 226$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(540, 154, 28, 50)$ имеем $b_1 = 385$, $\mu \in \{180, 189, 198, 210, 220, 225\}$ и соответственно b_2 не больше 2, 5, 6, 5, 2, 1. Если $\mu = 180$, или $\mu = 189$, или $\mu = 198$, то b_2

делится на 9, противоречие. Если $\mu = 210$, то b_2 делится на 6, противоречие. Если $\mu = 220$, то b_2 делится на 6, противоречие. Если $\mu = 225$, то b_2 делится на 9, противоречие.

В случае параметров $(595, 144, 18, 40)$ имеем $b_1 = 450$, $\mu \in \{170, 175, 210, 225\}$ и соответственно b_2 не больше 6, 8, 7, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 17$ и $\theta_d \geq -91$. Если $\mu = 170$, то b_2 делится на 17, противоречие. Если $\mu = 175$, то $b_2 = 7$, $k_2 = 85 \cdot 18$ и $c_3 \geq 175 - 7 + 146 = 314$. Если $\mu = 210$, то $b_2 = 7$, $k_2 = 85 \cdot 15$ и $c_3 \geq 210 - 7 + 146 = 349$. Если $\mu = 225$, то $b_2 \leq 2$, $k_2 = 595 \cdot 2$ и $c_3 \geq 225 - 2 + 146 = 369$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

В случае параметров $(625, 104, 3, 20)$ имеем $b_1 = 520$, $\mu \in \{104, 125, 130, 200\}$ и соответственно b_2 не больше 1, 20, 22, 2. По лемме 1.4 имеем $\theta_1 \leq 25$ и $\theta_d \geq -105$. Если $\mu = 104$, то $b_2 = 1$, $k_2 = 625 \cdot 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$.

Если $\mu = 125$, то b_2 делится на 25, противоречие. Если $\mu = 130$, то $b_2 \leq 22$, $k_2 = 625 \cdot 4$ и $c_3 \geq 130 - 22 + 106 = 214$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Если $\mu = 200$, то b_2 делится на 5, противоречие.

Лемма 6.3 и теорема 1 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширения // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 501–504.
2. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** О локально псевдо- $GQ(4, t)$ -графах // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 6. С. 637–641.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 396–400.
4. **Махнев А.А.** Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения // Изв. Гомел. гос. у-та. 2014. № 3 (84). С. 84–85. (Естеств. науки).
5. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs (course notes) [e-resource]. URL: <http://homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipm/>.
7. **Koolen J.H., Park J.** Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory. Ser. A. 2012. Vol. 119. P. 546–555.
8. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
9. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33, iss. 1. P. 392–400.
10. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** О расширениях сильно регулярных графов без треугольников с собственным значением 4 // Междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рождения Д. А. Супруненко: тез. докл. Минск, 2015.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отд.

Поступила 17.01.2015

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

УДК 512.542

О p -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С НОРМАЛЬНЫМИ СОМНОЖИТЕЛЯМИ

В. С. Монахов, И. К. Чирик

Получены “ p -аналоги” известных признаков сверхразрешимости конечной группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B . Найдены новые достаточные условия сверхразрешимости конечной группы при более жестких условиях, чем сверхразрешимость нормальных сомножителей.

Ключевые слова: конечная группа, p -сверхразрешимая группа, p -разрешимая группа, MNP-группа, t -группа.

V. S. Monakhov, I. K. Chirik. On the p -supersolvability of a finite factorizable group with normal factors.

We obtain “ p -analogs” of known criteria for the supersolvability of a finite group $G = AB$ with normal supersolvable subgroups A and B . In addition, new sufficient conditions for the supersolvability of a finite group are found under stronger conditions than the supersolvability of normal factors.

Keywords: finite group, p -supersolvable group, p -solvable group, MNP-group, t -group.

Посвящается В. В. Кабанову в связи с 70-летием!

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1; 2].

В 1953 г. Хушперт [3] показал, что группа, являющаяся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, в общем случае не является сверхразрешимой. Соответствующие примеры известны [1, с. 159-160]. Поэтому для получения сверхразрешимости группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B необходимы дополнительные ограничения.

В 1957 г. Бэр [4, с. 186] установил сверхразрешимость группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что ее коммутант G' — нильпотентная подгруппа.

П р и м е р [4, с. 186]. Пусть $E_{p^2} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — элементарная абелева группа порядка p^2 , простое число $p \not\equiv 1 \pmod{4}$,

$$D = \langle c, d \mid c^4 = d^2 = 1, c^d = c^3 \rangle$$

— диэдральная группа порядка 8, которая действует на E_{p^2} следующим образом:

$$a^c = b^{-1}, \quad b^c = a, \quad a^d = b, \quad b^d = a.$$

Пусть $G = [E_{p^2}]D_8$ — подгруппа из голоморфа E_{p^2} . Подгруппы

$$A = [E_{p^2}](\langle c^2 \rangle \times \langle d \rangle), \quad B = [E_{p^2}](\langle c^2 \rangle \times \langle cd \rangle)$$

сверхразрешимы, нормальны и $G = AB$. Поскольку $a^{c^2} = a^{-1}$, то коммутант $G' = [E_{p^2}]\langle c^2 \rangle$ нильпотентен. Поэтому группа G несверхразрешима.

Результат Бэра развили А. Ф. Васильев и Т. И. Васильева в 1997 г. Они установили [5, следствие 3] сверхразрешимость группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что в G существует нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в G/W все силовские подгруппы абелевы.

В 1971 г. в работе Фризен [6] установлена сверхразрешимость группы $G = AB$ при условии, что A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы взаимно простых индексов.

В настоящей работе получены “ p -аналоги” этих результатов. Кроме того, получены новые признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ при более жестких условиях, чем сверхразрешимость нормальных сомножителей A и B .

Пусть p — простое число. Группа называется p -разрешимой, если порядки ее главных факторов либо являются степенью p , либо не делятся на p . Группа называется p -сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов либо равны p , либо не делятся на p . Через $p\mathfrak{S}$ обозначим класс всех p -разрешимых, а через $p\mathfrak{U}$ класс всех p -сверхразрешимых групп. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной. Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = [A]B$.

Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; Z_m и E_{p^t} — циклическая и элементарная абелева группы порядков m и p^t соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ — наибольшие нормальные в G p - и p' -подгруппы соответственно; $r_p(G)$ и $l_p(G)$ — p -ранг и p -длина p -разрешимой группы G соответственно, а $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G .

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [2, VI.9]. 1) Класс $p\mathfrak{U}$ — наследственная насыщенная формация.

2) Каждая минимальная нормальная подгруппа p -сверхразрешимой группы является либо p' -подгруппой, либо подгруппой порядка p . В частности, p -ранг p -сверхразрешимой группы равен 1.

3) Пусть N — нормальная в G подгруппа и $G/N \in p\mathfrak{U}$. Если N циклическая или $N \in \{Z(G), O_{p'}(G), \Phi(G)\}$, то $G \in p\mathfrak{U}$.

Лемма 2 [2, VI.1]. 1) Класс $p\mathfrak{S}$ — наследственная радикальная насыщенная формация.

2) Если N — нормальная в группе G подгруппа, $N \in p\mathfrak{S}$ и $G/N \in p\mathfrak{S}$, то $G \in p\mathfrak{S}$.

3) Каждая минимальная нормальная в p -разрешимой группе G подгруппа является либо p' -подгруппой, либо элементарной абелевой p -подгруппой.

Лемма 3. Пусть G — p -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если $G \neq 1$, то $1 \neq O_p(G)O_{p'}(G) = O_p(G) \times O_{p'}(G) = O_{p,p'}(G) \cap O_{p',p}(G)$;
- 2) $C_G(O_p(G) \times O_{p'}(G)) \subseteq O_p(G) \times O_{p'}(G)$;
- 3) $O_{p'}(G/\Phi(G)) = O_{p'}(G)\Phi(G)/\Phi(G)$ и $O_p(G/\Phi(G)) = O_p(G)\Phi(G)/\Phi(G)$;
- 4) $C_G(O_{p,p'}(G)) \subseteq O_{p,p'}(G)$ и $C_G(O_{p',p}(G)) \subseteq O_{p',p}(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) В неединичной p -разрешимой группе по лемме 2 минимальные нормальные подгруппы являются p' -подгруппами или элементарными абелевыми p -подгруппами, поэтому $O_p(G)O_{p'}(G) \neq 1$. Так как $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ — две нормальные в G подгруппы взаимно простых порядков, то $O_p(G)O_{p'}(G) = O_p(G) \times O_{p'}(G)$. Понятно, что

$$O_p(G) \times O_{p'}(G) \subseteq O_{p,p'}(G) \cap O_{p',p}(G).$$

Если $X = O_{p,p'}(G) \cap O_{p',p}(G)$, то X — нормальная в G p -разложимая подгруппа, поэтому $X \subseteq O_p(G) \times O_{p'}(G)$. В итоге имеем равенство

$$O_p(G) \times O_{p'}(G) = O_{p,p'}(G) \cap O_{p',p}(G).$$

2) Пусть $O_p(G) \times O_{p'}(G) = K$, $C_G(K) = C$. Предположим, что $CK/K \neq 1$, и пусть L/K — минимальная нормальная в G/K подгруппа, содержащаяся в CK/K . По тождеству Дедекинда $L = (L \cap C)K$.

Допустим, что L/K — p -подгруппа. Тогда $L = L_p K$ для силовской p -подгруппы L_p из L . Из равенства $L = (L \cap C)K$ ввиду [2, VI.4.7] получаем, что $L_p = PK_p$, где P — силовская p -подгруппа из $L \cap C$, а K_p — силовская p -подгруппа из K . Но теперь $L = PK$, поэтому P нормальна в $L \cap C$, а $L \cap C$ нормальна в G . Отсюда следует, что

$$P \subseteq O_p(L \cap C) \subseteq O_p(G) \subseteq K, \quad L = K,$$

противоречие.

Пусть теперь L/K — p' -подгруппа. Тогда $L = L_{p'}K$ для p' -холловой подгруппы $L_{p'}$ из L . Из равенства $L = (L \cap C)K$ ввиду [2, VI.4.6] получаем, что $L_{p'} = TK_{p'}$, где T — p' -холлова подгруппа из $L \cap C$, а $K_{p'}$ — p' -холлова подгруппа из K . Но теперь $L = TK$, поэтому T нормальна в $L \cap C$, а $L \cap C$ нормальна в G . Отсюда следует, что

$$T \subseteq O_{p'}(L \cap C) \subseteq O_{p'}(G) \subseteq K, \quad L = K,$$

противоречие.

Поэтому допущение неверно и $CK/K = 1$, т. е. $C \subseteq K$. Утверждение 2) доказано.

3) Ясно, что $O_{p'}(G)\Phi(G)/\Phi(G) \subseteq O_{p'}(G/\Phi(G))$. Проверим обратное включение. Пусть $O_{p'}(G/\Phi(G)) = H/\Phi(G)$. Тогда $H = H_{p'}\Phi(G)$ для p' -холловой подгруппы $H_{p'}$ из H . По лемме Фраттини $G = N_G(H_{p'})\Phi(G) = N_G(H_{p'})$, т. е. $H_{p'}$ нормальна в G . Теперь

$$H_{p'} \subseteq O_{p'}(G), \quad O_{p'}(G/\Phi(G)) = H/\Phi(G) \subseteq O_{p'}(G)\Phi(G)/\Phi(G).$$

В итоге имеет требуемое равенство.

Аналогично проверяется, что $O_p(G/\Phi(G)) = O_p(G)\Phi(G)/\Phi(G)$.

4) См. [7, IX.1.3].

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть G — p -сверхразрешимая группа, P — силовская p -подгруппа в G , H — p' -холлова подгруппа в G . Если $O_{p'}(G) = 1$, то

- 1) подгруппа P нормальна в G и $F(G) = P$;
- 2) если $\Phi(G) = 1$, то $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_t$, где P_i — нормальная в G подгруппа простого порядка для каждого i ; в частности, подгруппа P элементарная абелева;
- 3) подгруппа H абелева экспоненты, делящей $p-1$;
- 4) группа G сверхразрешима.

Доказательство. 1) Согласно утверждению 2) леммы 1 $r_p(G) = 1$. Так как $l_p(G) \leq r_p(G)$ [2, VI.6.6] и $O_{p'}(G) = 1$, то подгруппа P нормальна в G . Понятно, что $F(G) = P$.

2) Пусть $\Phi(G) = 1$. В этом случае подгруппа Фиттинга $F(G)$ является прямым произведением абелевых минимальных нормальных в G подгрупп [1, 4.24]. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то все прямые сомножители будут подгруппами порядка p .

3) Коммутант G' является p -нильпотентной подгруппой [2, VI.9.1; 8, 2.1.6, с. 70]. Поскольку $O_{p'}(G') \subseteq O_{p'}(G) = 1$, то G' — p -подгруппа и H абелева.

По утверждению 3) леммы 3 $O_{p'}(G/\Phi(G)) = 1$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $\Phi(G)$ — p -группа и по индукции $H\Phi(G)/\Phi(G) \simeq H$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Далее считаем, что $\Phi(G) = 1$. Из утверждения 2) доказываемой леммы следует, что

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n,$$

где все подгруппы P_i нормальны в группе G и $|P_i| = p$.

Фактор-группа $G/C_G(P_i)$ изоморфна некоторой подгруппе из группы $\text{Aut}(P_i)$, поэтому $G/C_G(P_i)$ — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$. Ясно, что

$$\bigcap_{i=1}^n C_G(P_i) = C_G(P).$$

Поскольку $O_{p'}(G) = 1$ и P абелева, то $C_G(P) = P$ по утверждению 2) леммы 3. Но группа $G/\bigcap_{i=1}^n C_G(P_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения

$$G/C_G(P_1) \times \dots \times G/C_G(P_n),$$

поэтому $H \simeq G/P$ будет абелевой группой экспоненты, делящей $p - 1$.

4) Используя индукцию по порядку группы G , можно считать ввиду утверждения 3) леммы 3, что $\Phi(G) = 1$, поэтому P элементарная абелева. Из утверждения 2) следует, что

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n,$$

все подгруппы P_i нормальны в группе G и $|P_i| = p$. Ясно, что $P = F(G)$ и нормальный ряд

$$1 \subseteq P_1 \subseteq P_1 \times P_2 \subseteq \dots < P_1 \times \dots \times P_i \subseteq \dots \subseteq P = F(G)$$

состоит из нормальных в G подгрупп таких, что факторы

$$(P_1 \times \dots \times P_i)/(P_1 \times \dots \times P_{i-1})$$

имеют простые порядки. По [2, VI.9.9] группа G сверхразрешима.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Предположим, что p -разрешимая группа G не принадлежит $p\mathfrak{A}$, но $G/K \in p\mathfrak{A}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;
- 2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$;
- 3) G — примитивная группа; $G = [N]M$, где M — максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;
- 4) N — элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$;
- 5) если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Доказательство. 1) Пусть N — нормальная в G неединичная подгруппа и

$$N \in \{Z(G), O_{p'}(G), \Phi(G)\}.$$

По условию $G/N \in p\mathfrak{A}$. Из утверждения 3) леммы 1 следует, что $G \in p\mathfrak{A}$, противоречие. Поэтому

$$Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1.$$

2) Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 , то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию

$$G/N_1 \in p\mathfrak{A}, G/N_2 \in p\mathfrak{A},$$

а поскольку $p\mathfrak{A}$ — формация, то

$$G \simeq G/(N_1 \cap N_2) \in p\mathfrak{A},$$

противоречие. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N . В p -разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа является либо p' -подгруппой, либо абелевой p -подгруппой. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то N будет p -подгруппой. В группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает с произведением всех абелевых минимальных нормальных подгрупп [1, теорема 4.24], поэтому

$$N = F(G) = O_p(G).$$

Из [9, лемма 2] получаем, что $N = C_G(N)$.

3) Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M , не содержащая подгруппу N . Ясно, что $G = MN$. Если $\text{Core}_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что

$$N \subseteq \text{Core}_G M, \quad G = MN = M,$$

противоречие. Поэтому $\text{Core}_G M = 1$ и G — примитивная группа с примитиватором M . Из того, что N — минимальная нормальная в G подгруппа и $G = NM$ следует, что $N \cap M = 1$ и $G = [N]M$.

4) Поскольку G — p -разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то N — элементарная абелева подгруппа порядка p^n и $n > 1$ по утверждению 3) леммы 1.

5) Предположим, что подгруппа M абелева. Так как N — минимальная нормальная в G подгруппа, то M действует неприводимо на N . По [10, лемма 4.1] подгруппа M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если группа G является p -сверхразрешимой для любого $p \in \pi(G)$, то G — сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G и $r \in \pi(N)$. Так как G является r -сверхразрешимой, то $|N| = r$. По индукции фактор-группа G/N сверхразрешима. Следовательно, G — сверхразрешимая группа.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) $G' = [A, B]A'B'$;
- 2) если $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то $G' = A'B'$.

Доказательство. 1) Пусть x и y — произвольные элементы группы G . Тогда

$$x = ab, \quad y = cd, \quad a, c \in A, \quad b, d \in B.$$

Для коммутаторов известны следующие тождества [1, лемма 4.1]:

$$[uv, w] = [u, w]^v[v, w]; \quad [u, vw] = [u, w][u, v]^w.$$

Применим эти тождества при вычислении $[x, y]$:

$$[x, y] = [ab, cd] = [a, cd]^b[b, cd] = ([a, d][a, c]^d)^b([b, d][b, c]^d).$$

Ясно, что

$$[a, d] \in [A, B], \quad [a, c] \in A', \quad [b, d] \in B', \quad [b, c] \in [B, A].$$

Поскольку подгруппы A , B , A' , B' и $[A, B] = [B, A]$ нормальны в G , то $[x, y] \in [A, B]A'B'$ и $G' = [A, B]A'B'$.

2) Если $|G : A| = n$, $|G : B| = m$, то $g^n \in A$ и $g^m \in B$ для любого элемента $g \in G$. По условию n и m — взаимно простые числа, значит существуют целые числа k и l такие, что $1 = nk + ml$. Теперь

$$g = g^{nk+ml} = (g^n)^k (g^m)^l = (g^m)^l (g^n)^k,$$

т. е. каждый элемент g из группы G можно записать в виде $g = ab = ba$, где $a \in A$ и $b \in B$.

Пусть теперь $x \in A$, $y \in B$ — произвольные элементы и $y^{-1}x = ab = ba$, где $a \in A$ и $b \in B$. Тогда

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}aby = ax^{-1}[x^{-1}, a][b^{-1}, y^{-1}]yb,$$

где $[x^{-1}, a] \in A'$, $[b^{-1}, y^{-1}] \in B'$. Полагая $w = ax^{-1}[x^{-1}, a][b^{-1}, y^{-1}]xa^{-1}$, получим, что $w \in A'B'$ и $[x, y] = waxy^{-1}yb$. Так как

$$(x^{-1}y) = (y^{-1}x)^{-1} = (ab)^{-1} = (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$

то $[x, y] = waxy^{-1}yb = waa^{-1}b^{-1}b = w \in A'B'$.

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть A и B — неединичные p -сверхразрешимые нормальные подгруппы группы G . Через P обозначим силовскую p -подгруппу группы G , и пусть H и K — p' -холловы подгруппы из A и B соответственно такие, что $HK = KH$. Предположим, что $G = AB$ и $O_{p'}(G) = 1$. Если G примитивна, то справедливы следующие утверждения:

- 1) $A = [P]H$, где $P = F(G) = O_p(G)$ — минимальная нормальная в G подгруппа, H — абелева подгруппа экспоненты, делящей $p - 1$;
- 2) $B = [P]K$, где K — абелева подгруппа экспоненты, делящей $p - 1$;
- 3) $HK = KH$ — нильпотентная p' -холлова подгруппа группы G , подгруппы H и K нормальны в HK ;
- 4) HK — максимальная в G подгруппа и $\text{Core}_G(HK) = 1$;
- 5) A и B сверхразрешимы.

Доказательство. В силу [2, VI.4.6] подгруппы H и K существуют и $HK = KH$ является p' -холловой подгруппой группы G .

1)–2) Пусть P_1 — силовская p -подгруппа в A . Так как A нормальна в G , то $O_{p'}(A) \subseteq O_{p'}(G) = 1$ и $A = [P_1]H$, подгруппа H абелева экспоненты, делящей $p - 1$ по лемме 4. Поскольку $A \neq 1$, то $P_1 \neq 1$ и P_1 нормальна в G . По условию группа G примитивна, поэтому $\Phi(G) = 1$ и $F(G)$ — единственная в G минимальная нормальная подгруппа [1, 4.40]. Значит, $P_1 = F(G) = O_p(G)$. Так как группа G p -разрешима и $O_{p'}(G) = 1$, то $C_G(P_1) = P_1$ по лемме 3.

Пусть P_2 — силовская p -подгруппа в B . Поскольку B нормальна в G , то $O_{p'}(B) \subseteq O_{p'}(G) = 1$ и $B = [P_2]K$, подгруппа K абелева экспоненты, делящей $p - 1$ по лемме 4. Так как $B \neq 1$, то $P_2 \neq 1$ и P_2 нормальна в G . По условию группа G примитивна, поэтому $\Phi(G) = 1$ и $F(G)$ — единственная в G минимальная нормальная подгруппа [1, 4.40]. Значит $P_2 = F(G) = O_p(G) = P_1 = C_G(P_1)$. Так как P_1P_2 — силовская p -подгруппа группы G , то $P_1 = P_2 = P$ [2, VI.4.6].

3) Так как $H = A \cap HK$ и A нормальна в G , то H нормальна в HK . Аналогично, $K = B \cap HK$ нормальна в HK . Поэтому HK нильпотентна.

4) Поскольку P — минимальная нормальная в G подгруппа и $G = [P](HK)$, то HK максимальна в G . Равенство $\text{Core}_G(HK) = 1$ следует из того, что G примитивна.

5) A и B — сверхразрешимые подгруппы по лемме 4.

Лемма доказана.

Пусть $s\mathfrak{A}$ — формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда $s\mathfrak{A}$ -кордикал $G^{s\mathfrak{A}}$ группы G является наименьшей нормальной в G подгруппой такой, что все силовские подгруппы в фактор-группе $G/G^{s\mathfrak{A}}$ абелевы. В терминологии [5] подгруппа $G^{s\mathfrak{A}}$ — обобщенный коммутант группы G . Как обычно, G' — коммутант группы G . Понятно, что $G^{s\mathfrak{A}} \subseteq G'$ в любой группе G . Для нильпотентной группы G выполняется равенство $G^{s\mathfrak{A}} = G'$.

Лемма 9. Если G — разрешимая примитивная группа с нильпотентным примитиватором, то $G^{s^{\aleph_1}} = G'$.

Доказательство. Пусть $G = [N]M$ — разрешимая примитивная группа с нильпотентным примитиватором M . Так как N — единственная минимальная нормальная в G подгруппа, то $N \subseteq G^{s^{\aleph_1}} \subseteq G'$. Поскольку $G/N \simeq M$ нильпотентна, то $(G/N)^{s^{\aleph_1}} = (G/N)'$. По свойствам корадикалов

$$(G/N)^{s^{\aleph_1}} = G^{s^{\aleph_1}}/N, \quad (G/N)' = G'/N, \quad G^{s^{\aleph_1}} = G'.$$

Лемма доказана.

2. Признаки p -сверхразрешимости группы

Теорема 1. Пусть A и B — нормальные p -сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если существует p -нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в G/W все силовские подгруппы абелевы, то G p -сверхразрешима.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Ясно, что группа G является p -разрешимой, подгруппы A и B неединичны и их порядки делятся на p . Пусть N — неединичная нормальная в G подгруппа. Тогда

$$G/N = (AN/N) \cdot (BN/N), \quad AN/N \simeq A/A \cap N, \quad BN/N \simeq B/B \cap N,$$

$$WN/N \simeq W/W \cap N, \quad (G/N)/(WN/N) \simeq G/WN \simeq (G/W)/(WN/W),$$

подгруппы AN/N и BN/N нормальны в G/N и p -сверхразрешимы, подгруппа WN/N нормальна в G/N и p -нильпотентна, и в фактор-группе $(G/N)/(WN/N)$ все силовские подгруппы абелевы. Поэтому условия теоремы наследуются каждой фактор-группой, и группа G/N p -сверхразрешима по индукции. Из леммы 5 получаем, что группа G примитивна,

$$O_{p'}(G) = Z(G) = \Phi(G) = 1, \quad F(G) = O_p(G) = C_G(O_p(G)) \simeq E_{p^n}, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

и $O_p(G)$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Теперь можно применить лемму 8, сохраняя все ее обозначения. В частности, p' -холлова подгруппа HK в группе G по этой лемме нильпотентна и является максимальной в G подгруппой с единичным ядром. По лемме 9 $G^{s^{\aleph_1}} = G'$.

По условию существует p -нильпотентная подгруппа W такая, что все силовские подгруппы в G/W абелевы. Поскольку

$$O_{p'}(W) \subseteq O_{p'}(G) = 1,$$

то W — p -группа и $W = P = F(G)$. Теперь нильпотентная p' -холлова подгруппа HK группы G будет абелевой максимальной подгруппой. По лемме 5 подгруппа HK циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|HK|}$. Из того, что H и K — подгруппы экспоненты, делящей $p-1$, следует, что порядок HK делит $p-1$. Но теперь $n = 1$, противоречие с (1).

Теорема доказана.

Полагая в теореме $W = G'$, получаем

Следствие 1.1. Пусть A и B — нормальные p -сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если коммутант G' p -нильпотентен, то G p -сверхразрешима. \square

Следствие 1.2. Пусть A и B — нормальные p -сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G p -сверхразрешима.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G . Ввиду леммы 7 коммутант G' равен $A'B'$. Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что $A' = A_p$, $B' = B_p$ и $G' — p -группа. Теперь группа G p -сверхразрешима по следствию 1.1. $\square$$

Следствие 1.3. Пусть A и B — нормальные p -сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если в $A \cap B$ силовская p -подгруппа циклическая, то G p -сверхразрешима.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G . Как и при доказательстве теоремы, получаем, что $F(G) = G_p \subseteq A \cap B$. Теперь подгруппа $F(G)$ циклическая и группа G p -сверхразрешима по лемме 1. \square

Следствие 1.4. Пусть A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если A холлова, то G сверхразрешима.

Доказательство. Из равенства $G = AB$ следует, что $|G : B| = |A : A \cap B|$. Поэтому $|G : B|$ делит $|A|$. Так как подгруппа A холлова, то $(|G : A|, |A|) = 1$. Теперь индексы $|G : A|$ и $|G : B|$ взаимно просты, и группа G будет p -сверхразрешимой по следствию 1.2 для каждого $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G сверхразрешима. \square

Из теоремы 1 вытекают также результаты работ [4–6]. Сформулируем эти утверждения.

Следствие 1.5. Пусть A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима [4; 11, теорема 1.1.13].
- 2) Если $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G сверхразрешима [6; 11, теорема 4.3.4].
- 3) Если группа G является расширением нильпотентной группы с помощью группы, у которой все силовские подгруппы абелевы, то G сверхразрешима [5, следствие 3].

Доказательство. Так как подгруппы A и B сверхразрешимы, то они p -сверхразрешимы для каждого $p \in \pi(G)$.

1) Если коммутант G' нильпотентен, то он будет p -нильпотентен для каждого $p \in \pi(G)$ и группа G будет p -сверхразрешима по следствию 1.1. Теперь по лемме 6 группа G сверхразрешима.

2) Пусть $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда G будет p -сверхразрешимой по следствию 1.2 для каждого $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G сверхразрешима.

3) Пусть W — нормальная в G подгруппа и все силовские в фактор-группе G/W абелевы. По теореме 1 группа G будет p -сверхразрешимой для каждого $p \in \pi(G)$. По лемме 6 группа G сверхразрешима. \square

3. Два признака сверхразрешимости группы

В 1980 г. в работе Сринивасан [12] установлена сверхразрешимость группы при условии, что любая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы нормальна в группе. Статья [12] нашла отклик во многих работах (см., например, [13–17]). Группы, в которых любая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы нормальна во всей группе, Уолл [18] предложил называть MNP-группами. Необходимые свойства этих групп перечислены в следующей лемме.

Лемма 10 [12; 18]. Пусть G — MNP-группа. Тогда:

- 1) каждая силовская подгруппа из G нормальна в G или циклическая;
- 2) G сверхразрешима;
- 3) если U — холлова подгруппа в G , то U — MNP-группа; если K — нормальная подгруппа в G , то G/K — MNP-группа;
- 4) группа $G = [V]\langle x \rangle$, где
 - 4.1) V — нормальная в G нильпотентная холлова подгруппа;
 - 4.2) образующие элементы силовских подгрупп из $\langle x \rangle$ индуцируют степенные автоморфизмы на V , порядки которых делят простые числа.

Теорема 2. Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Если A — MNP-группа, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что группа G несверхразрешима. По лемме 6 существует $p \in \pi(G)$ такое, что G не p -сверхразрешима. Ввиду леммы 10 подгруппа A сверхразрешима, а значит, и p -сверхразрешима. Так как условия теоремы наследуют все факторгруппы группы G , то $O_{p'}(G) = 1$, группа G примитивна по лемме 5 и применима лемма 8. Сохраним все обозначения этих лемм.

Так как $A = [P]H$ и $P = C_G(P)$, то по утверждению 4.2) леммы 10 подгруппа H циклическая порядка, свободного от квадратов. Подгруппа H нормальна в нильпотентной подгруппе HK , где $B = [P]K$ и K абелева. Поэтому H содержится в центре подгруппы HK и HK абелева. Из того, что H и K — подгруппы экспоненты, делящей $p - 1$, следует, что порядок HK делит $p - 1$. Теперь подгруппа HK циклическая, и P имеет простой порядок по утверждению 5) леммы 5. Значит, группа G p -сверхразрешима по лемме 1, противоречие.

Теорема доказана.

Каждая нильпотентная группа является MNP-группой. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 2.1. Пусть A и B — нормальные в G подгруппы и $G = AB$. Если A нильпотентна, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.

Следствие 2.2. Пусть $G = A_1 A_2 \dots A_n$, где A_i нормальна в G для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Если A_j — MNP-группа для каждого $j = 2, 3, \dots, n$ и подгруппа A_1 сверхразрешима, то группа G сверхразрешима.

Доказательство. По теореме 2 подгруппа $A_1 A_2$ сверхразрешима, затем $A_1 A_2 A_3 = (A_1 A_2) A_3$ сверхразрешима, и т. д. Через конечное число шагов получаем, что группа G сверхразрешима. \square

Группа, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна, называется t -группой. Строение разрешимых t -групп изучил Гашюц [19], в частности, разрешимые t -группы сверхразрешимы

Теорема 3. Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Если A — разрешимая t -группа, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что группа G несверхразрешима. По лемме 6 существует $p \in \pi(G)$ такое, что G не p -сверхразрешима. Ввиду [19] подгруппа A сверхразрешима, а значит, и p -сверхразрешима. Так как условия теоремы наследуют все факторгруппы группы G , то $O_{p'}(G) = 1$, группа G примитивна по лемме 5 и применима лемма 8. Сохраним все обозначения этих лемм.

Так как $B = [P]K$ сверхразрешима и $O_{p'}(B) \subseteq O_{p'}(G) = 1$, то в P существует подгруппа P_1 простого порядка p , нормальная в B . Подгруппа P_1 субнормальна в $A = [P]H$, а A является t -группой. Значит, P_1 нормальна в A , поэтому P_1 нормальна в G . Так как P — минимальная нормальная в G подгруппа, то $P_1 = P$ и G p -сверхразрешима по утверждению 2) леммы 1, противоречие.

Теорема доказана.

Аналогично следствию 2.1 доказывается

Следствие 3.1. Пусть $G = A_1 A_2 \dots A_n$, где A_i нормальна в G для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Если A_j — разрешимая t -группа для каждого $j = 2, 3, \dots, n$ и подгруппа A_1 сверхразрешима, то группа G сверхразрешима.

Следствие 3.2. Пусть A и B — нормальные подгруппы группы и $G = AB$. Если все силовские подгруппы в A циклические, а B сверхразрешима, то G сверхразрешима.

Доказательство. По [20, лемма 1.4] подгруппа A является t -группой и G сверхразрешима по теореме 3.

З а м е ч а н и е 1. Обозначим через $\text{MNP}(G)$ произведение всех MNP-подгрупп, нормальных в G . По следствию 2.2 подгруппа $\text{MNP}(G)$ сверхразрешима. Поскольку каждая нильпотентная группа является MNP-группой, то $\text{MNP}(G)$ содержит подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G . Если G разрешима, то $C_G(\text{MNP}(G)) \leq Z(F(G)) \leq \text{MNP}(G)$.

З а м е ч а н и е 2. Обозначим через $\text{T}(G)$ произведение всех t-подгрупп, нормальных в G . По следствию 3.1 подгруппа $\text{T}(G)$ сверхразрешима. Если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \leq \text{T}(G)$. Поэтому $C_G(\text{T}(G)) \leq Z(F(G)) \leq \text{T}(G)$ в разрешимой группе G с $\Phi(G) = 1$.

Эти два замечания позволяют в любой разрешимой группе наряду с подгруппой Фиттинга использовать нормальные сверхразрешимые подгруппы $\text{MNP}(G)$ и $\text{T}(G)$.

4. Факторизация минимальной не p -сверхразрешимой группы

Несверхразрешимая группа, все собственные подгруппы которой сверхразрешимы, называется минимальной несверхразрешимой группой.

В 2012 г. Го Вэньбинь и А. С. Кондратьев [21] показали, что минимальная несверхразрешимая группа G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп в точности тогда, когда $G/F(G)$ — примарная минимальная неабелева группа. Это результат они распространили [22, теорема В] на минимальную не p -сверхразрешимую группу $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B .

Мы изучим подобную факторизацию с p -сверхразрешимыми подгруппами A и B .

Минимальные несверхразрешимые группы описаны в [23–26]. Если G — группа, то $G^{\mathfrak{M}}$ — сверхразрешимый корадикал, т. е. наименьшая нормальная в G подгруппа со сверхразрешимой фактор-группой $G/G^{\mathfrak{M}}$.

Лемма 11. Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа, $\Phi(G) = 1$ и $P = G^{\mathfrak{M}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) группа G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$ [23, теорема 22];
- 2) подгруппа P является силовской p -подгруппой для некоторого $p \in \pi(G)$ и минимальной нормальной в G подгруппой порядка $> p$ [24, теорема 1 (a)];
- 3) p' -холова подгруппа T группы G примарная циклическая или минимальная неабелева группа [24, теорема 2 (b)];
- 4) если $|\pi(T)| = 2$, то T — нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами [25].

Из этой леммы вытекает

Лемма 12. Группа G является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой с нециклическими силовскими подгруппами тогда и только тогда, когда G — минимальная несверхразрешимая группа G , у которой фактор-группа $G/F(G)$ — примарная минимальная неабелева группа.

Приведем другое доказательство результата [21].

Теорема 4. Если G — минимальная несверхразрешимая группа и G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, то G — бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами.

Обратно, если G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами, то G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = [P]T$ — минимальная несверхразрешимая группа и G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Подгруппа P

нециклическая по лемме 11. По [2, VI.4.7] можно считать, что $P = (P \cap A)(P \cap B)$. Предположим, что $\Phi(G) = 1$. Тогда P — минимальная нормальная в G подгруппа по лемме 11. Поэтому $P \subseteq A \cap B$. Теперь $A = [P](A \cap T)$, $B = [P](B \cap T)$ и можно считать, что $T = (A \cap T)(B \cap T)$. Так как A и B нормальны в G , то $A \cap T$ нормальна в T , $B \cap T$ нормальна в T .

Если $|\pi(T)| = 2$, то $T = [R]Q$, где R и Q — циклические силовские r - и q -подгруппы по лемме 11. Так как примарная циклическая группа не факторизуется собственными подгруппами, то можно считать, что $(A \cap T) = R$, $(B \cap T) = Q$. Но теперь $Q = B \cap T$ нормальна в T , что невозможно, поскольку T нециклическая.

Пусть $|\pi(T)| = 1$. Тогда T нециклическая.

Если $\Phi(G) \neq 1$, то для фактор-группы $G/\Phi(G)$ утверждение справедливо. Поэтому $G/\Phi(G)$ — бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами. Следовательно, G — бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами.

Обратно, пусть $G = [P]T$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами. Тогда в T существуют две различные максимальные подгруппы T_1 и T_2 . Ясно, что $G = ([P]T_1)([P]T_2)$, где $[P]T_1$ и $[P]T_2$ — нормальные в G сверхразрешимые подгруппы.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если G — минимальная не p -сверхразрешимая группа и G является произведением двух нормальных p -сверхразрешимых подгрупп, то $G/O_{p'}(G)$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами.*

Обратно, если G — группа и $G/O_{p'}(G)$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами, то G является произведением двух нормальных p -сверхразрешимых подгрупп.

Доказательство. Пусть G — минимальная не p -сверхразрешимая группа, $G = AB$, где A и B — нормальные p -сверхразрешимые подгруппы. Применим индукцию по порядку группы. Так как $G/O_{p'}(G)$ не p -сверхразрешима, то можно считать, что $O_{p'}(G) = 1$. Поскольку A и B — нормальные в G подгруппы, то $O_{p'}(A) = O_{p'}(B) = 1$. Из леммы 4 получаем, что подгруппы A и B сверхразрешимы, группа G p -замкнута, а p' -холловы подгруппы в A и в B абелевы. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то $F(G) = P$, где P — силовская p -подгруппа группы G . Поскольку фактор-группа G/P нильпотентна, то группа G q -сверхразрешима для всех $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. По лемме 6 каждая собственная в G подгруппа сверхразрешима. Теперь из теоремы 4 следует, что G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами.

Обратно, пусть $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами. Из теоремы 4 следует, что $\bar{G} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, где \bar{A} и \bar{B} — нормальные в \bar{G} сверхразрешимые подгруппы. Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $\bar{A} = A/O_{p'}(G)$ и $\bar{B} = B/O_{p'}(G)$. Тогда A и B — p -сверхразрешимые нормальные в G подгруппы и $G = AB$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
2. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin etc.: Springer. 1967. 793 S.
3. **Huppert B.** Monomiale darstellung endlicher gruppen // Nagoya Math. J. 1953. Vol. 3. P. 93–94.
4. **Vaer R.** Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115–187.
5. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И.** О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. № 11(426). С. 10–14.
6. **Friese D.** Products of normal supersolvable subgroups. Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 30, № 1. P. 46–48.

7. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin etc.: Springer, 1982. 531 p.
8. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.** Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010. 334 p. (De Gruyter Expositions in Mathematics; vol. 53.)
9. **Монахов В.С., Шпырко О.А.** О нильпотентной π -длине максимальных подгрупп конечных π -разрешимых групп // Вестн. МГУ им. М.В. Ломоносова. Математика. Механика. 2009. Том 6. С. 3–8.
10. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
11. Between nilpotent and solvable / H. G. Bray [et al.]. Passaic: Polygonal Publ. House, 1982. 231 p.
12. **Srinivasan S.** Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups // Israel J. Math. 1980. Vol. 35. P. 210–214.
13. **Asaad M., Ramadan M., Shaalan A.** Influence of π -quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of fitting subgroup of a finite group // Arch. Math. 1991. Vol. 56. P. 521–527.
14. **Asaad M., Heliel A.A.** On S -quasinormal embedded subgroups of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2001. Vol. 165. P. 129–135.
15. **Ballester-Bolinches A.** Permutably embedded subgroups of finite soluble groups // Arch. Math. 1995. Vol. 65. P. 1–7.
16. **Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M.C.** Sufficient conditions for supersolvability of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 1998. Vol. 127. P. 113–118.
17. **Monakhov V.S., Trofimuk A.A.** Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups // J. Group Theory. 2014. Vol. 17, № 5. P. 889–895.
18. **Wall G.L.** Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal // Israel J. Math. 1982. Vol. 43. P. 166–168.
19. **Gaschutz W.** Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist // J. Reine Angew. Math. 1957. Vol. 198. P. 87–92.
20. **Лемешев И.В., Монахов В.С.** Признаки разрешимости конечных групп с ограничениями на кофакторы максимальных подгрупп // Проблемы физики, математики и техники. 2012. № 2(11). С. 88–94.
21. **Guo W., Kondrat'ev A.S.** New examples of finite non-supersolvable groups factored by two normal supersolvable subgroups // Internat. Conf. "Mal'tsev meeting": collect. abstr. / Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University. Novosibirsk, 2012. P. 95.
22. **Guo W., Kondratiev A.S.** Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups // Commun. Math. Stat. 2015. Vol. 3. P. 285–290.
23. **Huppert B.** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
24. **Doerk K.** Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd. 91. S. 198–205.
25. **Нарбецкий В.Т.** О конечных минимальных несверхразрешимых группах // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 104–108.
26. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.** On minimal non-supersoluble groups // Rev. Math. Iberoamericana. 2007. Vol. 23, № 1. P. 127–142.

Монахов Виктор Степанович

Поступила 29.12.2014

д-р физ.-мат. наук, профессор

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Чирик Ирина Константиновна

преподаватель

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь

e-mail: chyrykira@mail.ru

УДК 519.16 + 519.85

PTAS ДЛЯ ЗАДАЧИ Min- k -SCCP В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФИКСИРОВАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ¹

Е. Д. Незнахина

Изучается задача Min- k -SCCP о разбиении полного взвешенного графа на k вершинно-непересекающихся циклов минимального суммарного веса. Данная задача является обобщением известной задачи коммивояжера (TSP) и частным случаем классической задачи маршрутизации транспорта (VRP). Известно, что задача Min- k -SCCP в общем случае NP -трудна в сильном смысле и сохраняет свойство труднорешаемости даже в геометрической постановке. Для евклидовой задачи Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d при $k = O(\log n)$ построена полиномиальная приближенная схема, обобщающая подход, предложенный для решения задачи Min-2-SCCP на плоскости. Для произвольного $c > 1$ она находит $(1 + 1/c)$ -приближенное решение задачи за время $O(n^{O(d)}(\log n)^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$.

Ключевые слова: цикловое покрытие размера k , задача коммивояжера (TSP), NP -трудная задача, полиномиальная приближенная схема (PTAS).

E. D. Neznakhina. A PTAS for the Min- k -SCCP in a Euclidean space of arbitrary fixed dimension.

We study the Min- k -SCCP on a partition of a complete weighted digraph into k vertex-disjoint cycles of minimum total weight. This problem is a generalization of the known traveling salesman problem (TSP) and a special case of the classical vehicle routing problem (VRP). It is known that the problem Min- k -SCCP is strongly NP -hard and preserves its intractability even in the geometric statement. For the Euclidean Min- k -SCCP in \mathbb{R}^d with $k = O(\log n)$, we construct a polynomial-time approximation scheme, which generalizes the approach proposed earlier for the planar Min-2-SCCP. For any fixed $c > 1$ the scheme finds a $(1 + 1/c)$ -approximate solution in $O(n^{O(d)}(\log n)^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$ time.

Keywords: cycle covering of size k , traveling salesman problem (TSP), NP -hard problem, polynomial-time approximation scheme (PTAS).

Введение

В классической постановке задачи коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) в качестве входных данных задан полный реберно взвешенный граф, требуется найти минимальный по весу гамильтонов цикл. Задача коммивояжера занимает особое место в комбинаторной оптимизации и исследовании операций и принадлежит к числу типовых NP -трудных задач [1].

В 70-е годы был получен ряд результатов, связанных с исследованием вычислительной сложности задач, возникающих в таких областях, как теория графов, математическое программирование, комбинаторная оптимизация, математическая логика и т. д. Р. Карп обосновал NP -полноту серии задач, в том числе задачи распознавания в графе гамильтонова цикла, путем сведения к ним проблемы выполнимости булевых форм [2]. Неаппроксимируемость задачи коммивояжера в классической постановке была доказана в работе [3].

Исследование частных случаев задачи коммивояжера представляется важным с точки зрения практических приложений. Отдельный интерес представляют два подкласса задачи TSP: Metric TSP и Euclidean TSP. Эти подклассы отличаются входными данными: в первом случае задан неориентированный граф, веса ребер которого удовлетворяют неравенству треугольника; во втором случае предполагается, что вершины графа являются точками в \mathbb{R}^d , а веса ребер определяются попарными расстояниями между ними.

¹Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

Задача коммивояжера является NP -трудной даже в евклидовой постановке [4], следовательно, точные решения задач Metric TSP и Euclidean TSP не могут быть найдены за полиномиальное время в предположении $P \neq NP$. Для указанных подклассов разработаны эффективные приближенные алгоритмы. Для задачи Metric TSP известен 2-приближенный алгоритм [5] и 3/2-приближенный алгоритм Н. Кристофидеса [6]. Тем не менее Metric TSP не обладает полиномиальной аппроксимационной схемой, если $P \neq NP$ [7], а оценка порога эффективной аппроксимируемости данной задачи остается одним из важных открытых вопросов в исследовании задачи коммивояжера. Для Euclidean TSP на плоскости Дж. Митчелл разработал полиномиальную приближенную схему [8]. Задача коммивояжера в евклидовой постановке в пространстве произвольной фиксированной размерности обладает асимптотически точным алгоритмом [9] и полиномиальной приближенной схемой, предложенной С. Аророй [10]. Заметим, что алгоритмы Дж. Митчелла и С. Ароры были разработаны практически одновременно и независимо, однако подход Митчелла не удалось обобщить на случай \mathbb{R}^d .

Предметом исследования настоящей работы является задача о минимальном по весу цикловом покрытии графа (Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem, Min- k -SCCP) [11; 12], являющаяся естественным обобщением задачи коммивояжера.

В задаче Min- k -SCCP задан полный реберно взвешенный орграф $G = (V, E, w)$ на n вершинах, весовая функция $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ определяется матрицей $W = (w_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq n$); требуется найти k вершинно-непересекающихся контуров $\{C_1, \dots, C_k\}$ наименьшего суммарного веса, посещающих в совокупности все вершины графа. Задача Min- k -SCCP NP -трудна в сильном смысле, метрическая и евклидова постановки данной задачи имеют аналогичный статус вычислительной сложности [11]. В работе [13] для Metric Min- k -SCCP предложен эффективный 2-приближенный алгоритм, оценка приближения является асимптотически достижимой. Для Euclidean Min- k -SCCP на плоскости при фиксированном значении параметра $k = 2$ построена полиномиальная приближенная схема [11], развивающая подход С. Ароры [10].

В данной статье рассматривается евклидова постановка задачи Min- k -SCCP и предполагается, что граф G является неориентированным, а веса ребер совпадают с расстояниями между соответствующими вершинами, являющимися точками в \mathbb{R}^d . В работе приведено обобщение полиномиальной приближенной схемы для Euclidean Min-2-SCCP на плоскости на случай произвольных фиксированных значений параметра k и размерности пространства.

1. Описание алгоритма полиномиальной приближенной схемы для задачи Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d

О п р е д е л е н и е 1. *Полиномиальной приближенной схемой* (Polynomial-Time Approximation Scheme, PTAS) для задачи комбинаторной оптимизации называется семейство алгоритмов, содержащее для каждого фиксированного $\epsilon > 1$ приближенный алгоритм, решающий данную задачу с гарантированной точностью $(1 + 1/\epsilon)$ за время, ограниченное сверху некоторым полиномом от длины записи ее исходных данных (при этом порядок и коэффициенты полинома могут, вообще говоря, зависеть от ϵ).

Общая схема алгоритма развивает подход, предложенный в [11] для решения задачи Min-2-SCCP на плоскости, и состоит из пяти основных частей.

1. Декомпозиция задачи на m ($m \leq k$) независимых подзадач о цикловом покрытии графа и получение оценки сверху для длин сторон гиперкубов, объемлющих вершины графов, разделяющих данные подзадачи, с помощью функции, которая выражает линейную зависимость от веса OPT оптимального циклового покрытия размера k .

2. Доказательство утверждения о том, что произвольной постановке задачи Euclidean Min- k -SCCP и каждому значению параметра ϵ за полиномиальное время может быть сопоставлена округленная постановка так, что произвольный $(1 + 1/\epsilon)$ -приближенный алгоритм для округленной постановки задачи индуцирует $(1 + c_1/\epsilon)$ -приближенный алгоритм для исходной задачи

(для некоторого независимого значения $c_1 > 1$).

3. Построение рекурсивного разбиения объемлющего гиперкуба, содержащего вершины графа, задающего округленную постановку задачи Euclidean Min- k -SCCP.

4. Доказательство теоремы, утверждающей, что с вероятностью, не меньшей $1/2$, в рамках выбранной вероятностной модели существует $(1 + 1/c)$ -оптимальный набор маршрутов специального вида, именуемый цикловым (m, r, k) -покрытием графа G . Понятие циклового (m, r, k) -покрытия графа введено в [11].

5. Построение $(1 + 1/c)$ -оптимального циклового (m, r, k) -покрытия графа с помощью метода динамического программирования и стандартной схемы дерандомизации.

Пункты 1, 4 и 5 являются ключевыми, утверждение п. 2 — это простое следствие леммы из [11], метод реализации п. 3 совпадает с соответствующим подходом, предложенным для решения задачи Euclidean TSP в \mathbb{R}^d [10].

2. PTAS для задачи Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d

2.1. Декомпозиция евклидовой задачи о цикловом покрытии графа

Как известно, диаметр D множества и радиус R описанного вокруг него шара в евклидовом пространстве размерности d связаны между собой неравенством Юнга [14]

$$\frac{1}{2}D \leq R \leq \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{1/2} D. \quad (1)$$

Построим минимальный остовный лес из k деревьев (k -MSF) T_1, T_2, \dots, T_k , воспользовавшись простой модификацией алгоритма Борувки — Краскала [5], предложенной в [11].

Введем ряд обозначений:

D_i — диаметр множества вершин, входящих в дерево T_i , $i \in \mathbb{N}_k = \{1, \dots, k\}$;

D — максимальное значение D_i ($i \in \mathbb{N}_k$);

R_i — радиус описанной вокруг T_i сферы;

R — максимальное значение R_i ($i \in \mathbb{N}_k$).

Рассмотрим вспомогательный полный граф $G_T = (V_T, E_T)$, в котором деревья k -MSF образуют множество вершин V_T , а веса ребер определяются функцией $\rho: V_T \times V_T \rightarrow \mathbb{R}$. Значение $\rho(T_i, T_j)$ равно расстоянию между центрами сфер, описанных вокруг деревьев T_i и T_j , где $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_k$.

Построим разбиение множества вершин G_T на m ($m \leq k$) кластеров методом ближайшего соседа [15;16] с пороговым значением расстояния между кластерами $(2k+1)R$, вычислительная сложность процедуры составит $O(k^3)$. Для каждого построенного кластера объединим множества вершин всех деревьев, вошедших в данный кластер, и обозначим эти множества S_i ; таким образом получим кластеризацию S_1, S_2, \dots, S_m вершин исходного графа G . Под диаметром кластера будем понимать максимальное расстояние между входящими в него вершинами.

Утверждение 1. *Любой маршрут, входящий в оптимальное цикловое покрытие размера k для графа G , проходит через вершины, соответствующие только одному из кластеров S_1, S_2, \dots, S_m . Кроме того, диаметры кластеров ограничены сверху и выполняется неравенство*

$$\max_{i \in \mathbb{N}_m} D_{S_i} \leq \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)OPT. \quad (2)$$

Доказательство. Предположим от противного, что один из k маршрутов циклового покрытия наименьшего веса содержит вершины как из S_i , так и из S_j , где $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_m$.

Обозначим этот маршрут через P . По предположению P содержит хотя бы два ребра, соединяющих вершины из разных кластеров, суммарная длина которых по условию больше $2(2k-1)R$.

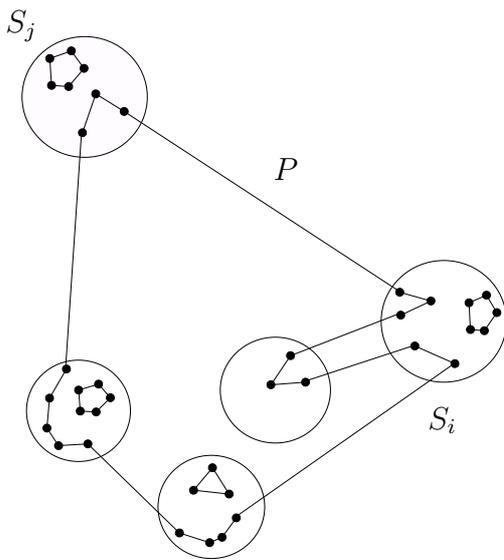


Рис. 1. В P чередуются вершины из разных сфер, $k = 5$.

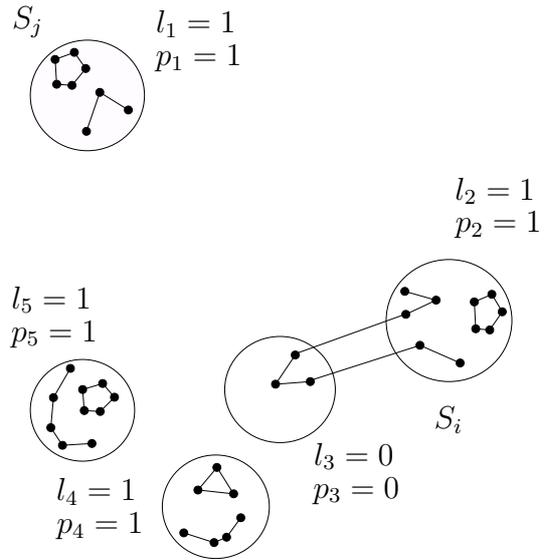


Рис. 2. Разбиение P на фрагменты.

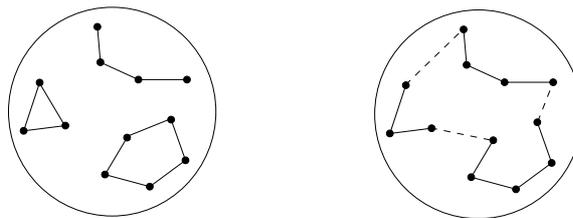


Рис. 3. Замыкание фрагмента P и 2-х циклов в один маршрут ($l_i = 2$, $p_i = 1$).

В маршруте P могут чередоваться вершины из разных сфер (рис. 1). Пусть $\{u, v\}$ — произвольное ребро, входящее в P , такое, что $u \in S_i$, $v \in S_j$. Зафиксировав порядок обхода вершин маршрута P : $u \rightarrow u_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow v$, построим разбиение P на фрагменты таким образом, чтобы каждой сфере соответствовал фрагмент P между первой и последней посещенными внутри данной сферы вершинами, и удалим ребра маршрута P , соединяющие вершины из различных фрагментов (рис. 2).

Поставим в соответствие сфере, описанной вокруг дерева T_i , числа l_i ($0 \leq l_i \leq k - 1$) и p_i ($0 \leq p_i \leq 1$), равные числу циклов и количеству фрагментов маршрута P , отнесенных данной сфере (рис. 2). Если цикл соединяет вершины из нескольких деревьев и пересекает соответствующие описанные сферы, то сопоставим его одной из этих сфер, выбранной произвольным образом. По построению верны следующие соотношения

$$\sum_{i=1}^k l_i = k - 1 \quad \text{и} \quad 2 \leq \sum_{i=1}^k p_i \leq k. \quad (3)$$

Пусть q — это количество сфер, для которых $l_i + p_i = 0$. Рассмотрим два случая: $q = 0$ и $q \geq 1$. В первом случае построим цикловое покрытие размера k следующим образом. Для i -й сферы объединим в один цикл l_i соответствующих замкнутых маршрутов и фрагмент P с помощью добавления не более, чем $(l_i + p_i)$ новых ребер внутри данной сферы, вес каждого из которых не превосходит $2R$ (рис. 3). Выполним указанное преобразование для каждой

из k сфер, при этом стоимость циклового покрытия увеличится не более, чем на

$$2R \sum_{i=1}^k (l_i + p_i) \leq 2(2k - 1)R$$

в силу соотношений (3), в то время как суммарный вес удаленных ребер превышает эту величину. Таким образом, в предположении $q = 0$ обосновано существование циклового покрытия размера k для графа G , вес которого строго меньше веса первоначального решения.

Во втором случае $q \geq 1$, и следовательно $(k - q)$ сферам, для каждой из которых $l_i + p_i > 0$, соответствуют $(k - 1)$ цикл и не менее двух фрагментов P . Заметим, что одной сфере не может быть отнесено более одного фрагмента P . Тогда не менее $(q + 1)$ цикла распределено по сферам, в которых уже содержится цикл либо фрагмент P . Исключим q циклов из рассмотрения таким образом, чтобы количество сфер, для которых $l_i + p_i = 0$, не изменилось. Получим, что $(k - q)$ сферам приписаны $(k - q - 1)$ цикл и фрагменты P . Справедливы следующие соотношения:

$$l_i + p_i > 0, \quad i = 1, \dots, k - q,$$

$$\sum_{i=1}^{k-q} l_i = k - q - 1 \quad \text{и} \quad 2 \leq \sum_{i=1}^{k-q} p_i \leq k - q. \quad (4)$$

Для указанных $(k - q)$ сфер выполним преобразование, аналогичное проведенному в первом случае. Для каждой сферы объединим в один цикл сопоставленные ей замкнутые маршруты и фрагмент P с помощью добавления не более, чем $(l_i + p_i)$ новых ребер внутри данной сферы (рис. 3). Таким образом, мы построим цикловое покрытие размера $(k - q)$ с помощью модификации, увеличивающей вес циклового покрытия не более, чем на

$$2R \sum_{i=1}^{k-q} (l_i + p_i) \leq 2(2k - 2q - 1)R,$$

в силу соотношений (4). Добавим к полученному цикловому покрытию q циклов, ранее исключенных из преобразования, и получим цикловое покрытие размера k , вес которого также строго меньше веса исходного покрытия.

Тем самым обосновано существование k -циклового покрытия, вес которого строго меньше веса исходного решения, что противоречит предположению об оптимальности последнего.

Оценим диаметр полученных кластеров. В пространстве \mathbb{R}^d диаметр кластера будет наибольшим, если центры сфер, описанных вокруг деревьев k -MSF и образующих данный кластер, лежат на одной прямой. Любой кластер из разбиения множества вершин V исходного графа G содержит не более k сфер, поэтому выполняется неравенство

$$\max_{i \in \mathbb{N}_m} D_{S_i} \leq (k - 1)(2k + 1)R + 2R.$$

Применяя неравенство (1) и учитывая очевидную двустороннюю оценку $D \leq MSF \leq OPT$ для веса минимального остовного леса $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$, получаем

$$R \leq \left(\frac{d}{2d + 2}\right)^{1/2} D \leq \left(\frac{d}{2d + 2}\right)^{1/2} OPT.$$

Отсюда верна оценка

$$\max_{i \in \mathbb{N}_m} D_{S_i} \leq \left(\frac{d}{2d + 2}\right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)OPT.$$

Утверждение доказано.

Таким образом, если $m = k$, то задача Euclidean Min- k -SCCP разбивается на k независимых подзадач TSP. В частности, PTAS для задачи Euclidean Min- k -SCCP может быть построена комбинацией PTAS для этих подзадач.

Однако, если количество построенных кластеров строго меньше k , то необходимо перебрать все возможные случаи распределения k циклов по m кластерам, для каждого случая решить m независимых подзадач о цикловом покрытии и выбрать оптимальное решение. Количество таких случаев совпадает с числом композиций k длины m и равно биномиальному коэффициенту из $(k - 1)$ по $(m - 1)$ [17].

Остановимся на рассмотрении частного случая задачи Euclidean Min- k -SCCP, для которого $m = 1$, так как он является наихудшим с точки зрения вычислительной сложности.

2.2. Округленная постановка задачи

Для полноты изложения приведем определение округленной задачи Euclidean Min- k -SCCP, принятое в [10; 11].

О п р е д е л е н и е 2. *Округленной* называется постановка задачи Euclidean Min- k -SCCP, для которой выполняются следующие ограничения: все вершины графа имеют целочисленные координаты и вес любого ребра e_{ij} больше или равен 4.

Чтобы получить округленную постановку задачи, необходимо и достаточно провести следующие преобразования.

1. Положим

$$L = \left(\frac{d}{2d + 2} \right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)MSF \leq \left(\frac{d}{2d + 2} \right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)OPT$$

и построим объемлющий вершины графа G гиперкуб \mathcal{S} со стороной L . Исходная постановка задачи Euclidean Min- k -SCCP удовлетворяет неравенству (2), следовательно, такое построение возможно.

2. Построим внутри \mathcal{S} ортогональную решетку с расстоянием между гиперплоскостями $L/8cn\sqrt{d}$ и переместим вершины заданного графа в ближайшие к ним узлы решетки. Расстояние между любыми двумя вершинами увеличится при этом не более чем на $L/4cn$, соответственно вес циклового покрытия размера k изменится не более чем на $L/4c$.

3. Изменим расстояние между гиперплоскостями решетки, умножив все координаты на $32cn\sqrt{d}/L$. Тогда минимальное расстояние между вершинами станет равно 4, а длина стороны объемлющего гиперкуба — $O(cn\sqrt{d})$.

4. Поместим начало координат в одном из углов \mathcal{S} и расположим координатные оси таким образом, чтобы ребра гиперкуба принадлежали осям и все вершины графа имели неотрицательные координаты.

Достаточность построения PTAS для округленной Euclidean Min- k -SCCP непосредственно следует из леммы, доказанной в [11], одна из эквивалентных формулировок которой приведена ниже.

Лемма. *Пусть округленная задача Euclidean Min- k -SCCP получена из исходной постановки задачи Euclidean Min- k -SCCP с помощью преобразований, увеличивающих вес произвольного циклового покрытия размера k не более чем на $O(OPT/c)$. Тогда PTAS для округленной Euclidean Min- k -SCCP индуцирует PTAS для общей задачи Euclidean Min- k -SCCP.*

Далее опишем построение PTAS для округленной задачи Euclidean Min- k -SCCP.

2.3. Рекурсивное разбиение объемлющего гиперкуба \mathcal{S}

Построим геометрическое разбиение задачи с помощью структуры данных 2^d -дерево, аналогичной 4-дереву, использованному в случае плоскости [10; 11].

Длину стороны L объемлющего гиперкуба \mathcal{S} примем равной наименьшей подходящей степени двойки. Организуем процедуру построения 2^d -дерева следующим образом: \mathcal{S} — корень дерева, каждый гиперкуб, включая корневой, делим на 2^d равных дочерних гиперкуба. Повторяем данную процедуру рекурсивно до тех пор, пока не получим гиперкубы, содержащие не

более одной вершины исходной задачи. Договоримся считать, что \mathcal{S} принадлежит уровню 0, 2^d его дочерних гиперкуба — уровню 1 и так далее. Заметим, что построенное дерево содержит $O(2^d n)$ листьев, $O(\log L) = O(\log(cn\sqrt{d}))$ уровней, и соответственно количество узлов 2^d -дерева можно оценить сверху как $O(2^d n \log(cn\sqrt{d}))$.

Зададимся значением параметра $m \in \mathbb{N}$ и поставим в соответствие каждой $(d - 1)$ -мерной грани узла дерева ортогональную сетку из $m + 2^{d-1}$ порталов. Заметим, что в отличие от случая плоскости не каждое натуральное число является допустимым значением параметра m .

Утверждение 2. *Расстояние между ближайшими порталами на грани узла i -го уровня 2^d -дерева равно $O(L/2^i m^{1/(d-1)})$.*

Доказательство. Для построения ортогональной сетки на грани d -мерного куба необходимо $(m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1}$ порталов, где $m_1 \in \mathbb{N}$ — это количество порталов на ребре гиперкуба (рис. 4).

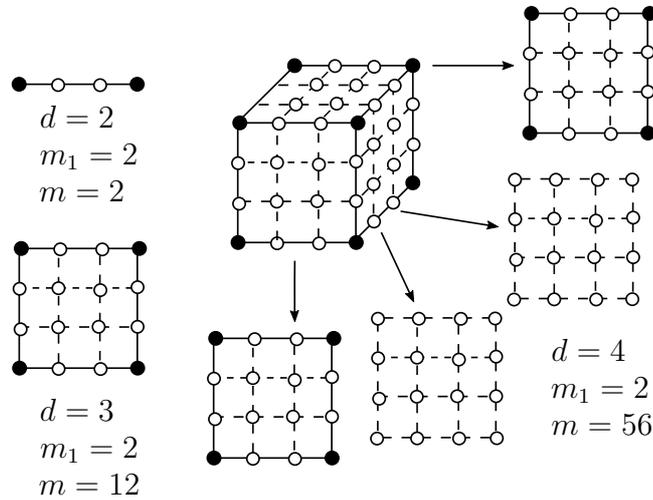


Рис. 4. Пример построения ортогональной сетки порталов при $d = 2, 3, 4$.

Длина стороны гиперкуба i -го уровня равна $L/2^i$ по построению, отсюда расстояние между соседними порталами на грани данного узла вычисляется как $L/2^i(m_1 + 1)$.

Покажем, что верно неравенство

$$\frac{L}{2^i(m_1 + 1)} \leq \frac{3}{2} \frac{L}{2^i m^{1/(d-1)}};$$

это эквивалентно

$$m_1 + 1 \geq \frac{2}{3} ((m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1})^{1/(d-1)}.$$

При стремлении d к бесконечности значение выражения $((m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1})^{1/(d-1)}$ асимптотически стремится снизу к величине $m_1 + 2$, поэтому

$$\frac{m_1 + 1}{((m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1})^{1/(d-1)}} \geq \frac{m_1 + 1}{m_1 + 2} \geq \frac{2}{3}.$$

Таким образом, если гиперкуб в 2^d -дереве имеет уровень i , то расстояние между ближайшими порталами можно оценить как $O(L/2^i m^{1/(d-1)})$.

Утверждение доказано.

Понятия центральной точки и дерева с циклическим сдвигом, определенные для решения задачи Euclidean Min-2-SCCP на плоскости, легко переносятся на случай произвольной фиксированной размерности пространства.

Назовем *центральной* d -мерную точку, все координаты которой равны $L/2$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{N}_L$; 2^d -деревом $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ назовем 2^d -дерево, для которого точка $((L/2 + a_1) \bmod L, (L/2 + a_2) \bmod L, \dots, (L/2 + a_d) \bmod L)$ является центральной.

Гиперкубы, принадлежащие произвольному уровню $i \geq 1$ дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$, как и его центральная точка, подвергаются циклическому сдвигу по каждой из d координатных осей, при этом положение \mathcal{S} и координаты вершин графа G остаются неизменными.

По аналогии со случаем $d = 2$ будем называть m -регулярным множеством порталов и обозначать $P(a_1, a_2, \dots, a_d; m)$ объединение разбиений порталами $(d - 1)$ -мерных граней всех узлов 2^d -дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ (за исключением \mathcal{S}).

2.4. Теорема существования

Обоснуем в этом разделе существование циклового покрытия размера k для заданного графа G , обладающего рядом свойств.

Обозначим через $V(C)$ множество вершин произвольного цикла C в графе G ($V(C) \subseteq V$). Сопоставим C (m, r) -аппроксимацию, т.е. замкнутую ломаную $l(C)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- (i) множество вершин $l(C)$ является подмножеством $V(C) \cup P(a_1, a_2, \dots, a_d; m)$;
- (ii) ломаная $l(C)$ обходит вершины $V(C)$ в порядке, задаваемом маршрутом C ;
- (iii) $l(C)$ пересекает каждую грань произвольного узла дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ не более r раз ($r \in \mathbb{N}$), причем исключительно в точках множества $P(a_1, a_2, \dots, a_d; m)$.

Приведем одну из эквивалентных формулировок теоремы 5 из [10].

Теорема 1 (Structure Theorem for Euclidean TSP in \mathbb{R}^d). Пусть постановка округленной задачи TSP в \mathbb{R}^d задается полным евклидовым графом G , длина стороны объемлющего гиперкуба \mathcal{S} которого равна L , и задана константа $c > 0$. Пусть дискретные случайные величины a_1, a_2, \dots, a_d распределены равномерно и независимо на множестве \mathbb{N}_L .

Тогда для любого $\eta \in (0, 1)$ найдутся $D_1, D_2 > 0$ такие, что при $r = \lceil (D_1 \sqrt{dc})^{d-1} \rceil$, $m = \lceil (D_2 dc \log L)^{d-1} \rceil$ для произвольного простого цикла C в графе G веса $W(C)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, существует (m, r) -аппроксимация $l(C)$, вес которой не превосходит $(1 + 1/c)W(C)$.

О п р е д е л е н и е 4 [11]. Пусть $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ — произвольное цикловое покрытие размера k графа G , $l(C_i)$ — (m, r) -аппроксимация цикла C_i . Множество $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \{l(C_1), \dots, l(C_k)\}$ назовем *цикловым (m, r, k) -покрытием* графа G .

Обобщим результат теоремы 3 из [11] на случай задачи Euclidean Min- k -SCCP в пространстве произвольной фиксированной размерности и докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $c > 0$ — произвольная постоянная, L — размер объемлющего гиперкуба \mathcal{S} для округленной постановки задачи Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d . Дискретные случайные величины a_1, a_2, \dots, a_d распределены равномерно и независимо на множестве \mathbb{N}_L . Тогда при $m = (O(dc \log L))^{d-1}$ и $r = (O(\sqrt{dc}))^{d-1}$ с вероятностью, не меньшей $1/2$, существует цикловое (m, r, k) -покрытие стоимости, не превышающей $(1 + 1/c)OPT$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, C_2^*, \dots, C_k^*\}$ — цикловое покрытие размера k наименьшего веса как решение рассматриваемой округленной постановки задачи Euclidean Min- k -SCCP. Как обычно, обозначим вес \mathcal{C}^* через OPT , т.е. $\sum_{i=1}^k W(C_i^*) = OPT$.

Воспользуемся теоремой 1: при $\eta = 1/2k$ для каждого цикла C_i^* с вероятностью, не меньшей $1 - 1/2k$, существует (m, r) -аппроксимация $l(C_i^*)$ веса

$$W(l(C_i^*)) \leq (1 + 1/c)W(C_i^*). \quad (5)$$

Значения параметров m и r удовлетворяют оценкам $(O(dc \log L))^{d-1}$ и $(O(\sqrt{dc}))^{d-1}$ соответственно.

В силу равномерности распределения случайных величин a_1, a_2, \dots, a_d вероятность объединения обратных событий, состоящих в отсутствии для цикла C_i^* (m, r)-аппроксимации $l(C_i^*)$, вес которой удовлетворяет (5), ограничена сверху $1/2$. Таким образом, с вероятностью, не меньшей $1/2$, существует такое цикловое (m, r, k) -покрытие $\{l(C_1^*), l(C_2^*), \dots, l(C_k^*)\}$, что

$$\sum_{i=1}^k W(l(C_i^*)) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) \sum_{i=1}^k W(C_i^*) = \left(1 + \frac{1}{c}\right) OPT.$$

Теорема доказана.

2.5. Замечания к процедуре динамического программирования

Процедура поиска циклового (m, r, k) -покрытия $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ наименьшего веса в задаче Euclidean Min- k -SCSP основана на методе динамического программирования и развивает подход, предложенный в [10; 11]. Время работы алгоритма составит $O(n(\log n)^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$.

Внутренняя подзадача для узла 2^d -дерева S состоит в поиске части циклового (m, r, k) -покрытия, целиком находящейся внутри S и посещающей все расположенные в нем вершины исходного графа, минимальной стоимости.

В начале процедуры динамического программирования рассматриваются листья 2^d -дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$. Пусть S — произвольный лист дерева. По построению S содержит не более одной вершины исходного графа G , и соответствующая подзадача может быть решена прямым перебором за $O(2dr)$ операций.

Рассмотрим случай, когда S не является листом дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$. Обозначим через S^1, \dots, S^{2^d} его дочерние гиперкубы, для которых предполагаем решенными внутренние подзадачи. Построим решение для S рекуррентно, считая выполненным условие, что ответ состоит из отрезков (m, r) -аппроксимаций $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$.

Для оценки трудоемкости процедуры динамического программирования сохраним обозначение, введенное в [11]: \mathfrak{P} — семейство всевозможных мультимножеств P , состоящих не более чем из $2dr$ порталов, расположенных на внутренних относительно S гранях дочерних гиперкубов S^1, \dots, S^{2^d} . По построению на каждой такой грани расположено $m + 2^{d-1}$ портала, и в силу ограничений, накладываемых на цикловое покрытие, грань может быть пересечена не более r раз. Получим, что $|\mathfrak{P}| = O((m + 2^{d-1})^{2dr})$.

Для произвольного мультимножества $P \in \mathfrak{P}$ существует $O((dr)^{2dr})$ способов назначить каждому portalу ломаную, соответствующую одной из k (m, r) -аппроксимаций, и $O((2dr)!)^k$ вариантов разбиения мультимножества на упорядоченные пары.

Трудоемкость подзадачи, соответствующей S , может быть оценена сверху величиной

$$O((m + 2^{d-1})^{2dr} (dr)^{2dr} (2dr)!).$$

Задача поиска циклового (m, r, k) -покрытия минимального веса эквивалентна решению подзадачи для объемлющего гиперкуба S .

Оценим сверху число подзадач для вывода общей трудоемкости процедуры динамического программирования. Заметим, что каждому узлу 2^d -дерева S соответствует $O((m + 2^{d-1})^{2dr})$ способов выбора мультимножества P порталов на $(d-1)$ -мерных гранях S .

Каждому такому мультимножеству соответствует $O((2dr)!)$ способов разбиения его на упорядоченные пары, и каждому такому разбиению — $O(k^{dr})$ способов распределения этих пар между маршрутами $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$. Принимая во внимание, что общее число узлов дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ составляет $O(2^d n \log(cn\sqrt{d}))$, получаем искомую оценку трудоемкости процедуры для произвольной фиксированной центральной точки (a_1, a_2, \dots, a_d) :

$$O(2^d n \log(cn\sqrt{d}) \times (m + 2^{d-1})^{4dr} ((2dr)!)^2 (dr)^{2dr} \times k^{dr}). \quad (6)$$

Переменные d и c не являются частью входа задачи Euclidean Min- k -SCCP. При значениях параметров $m = (O(dc \log(cn\sqrt{d})))^{d-1}$ и $r = (O(\sqrt{dc}))^{d-1}$, а также, с учетом того, что количество способов распределения k циклов по m кластерам равно $O(2^k)$, оценка (6) эквивалентна

$$O(n(k \log n)^{(O(\sqrt{dc}))^{d-1}} 2^k).$$

З а м е ч а н и е. Вычислительная сложность стандартной схемы дерандомизации, связанной с полным перебором сдвигов 2^d -дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$, составляет $O(n^d)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Задача Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d обладает полиномиальной приближенной схемой трудоемкости*

$$O(n^{d+1}(k \log n)^{(O(\sqrt{dc}))^{d-1}} 2^k). \quad (7)$$

При $d = 2$ вычислительная сложность PTAS, построенной для задачи Euclidean Min- k -SCCP, совпадает с трудоемкостью PTAS, построенной в [11] для задачи Euclidean Min-2-SCCP, и отличается от нее, как следует из соотношения (7), постоянным множителем $2^k k^{O(c)}$.

Следствие. *Задача Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d с условием, что k является частью входа, обладает полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n^{O(d)}(\log n)^{(O(\sqrt{dc}))^{d-1}})$ для $k = O(\log n)$.*

Заключение

В работе удалось распространить результат, полученный для задачи Euclidean Min-2-SCCP на плоскости, обосновав полиномиальную приближенную схему для произвольных фиксированных значений параметра k и размерности пространства d . Предложенный алгоритм также является PTAS в случае, если параметр k является частью входа задачи Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d , при $k = O(\log n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. **Karp R.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computations: Proc. Sympos. / eds. R. E. Miller and J. W. Thatcher. New York: Plenum Press, 1972. P. 85–103. (The IBM Research Symposia Series).
3. **Sahni S., Gonzales T.** P -complete approximation problems // J. Assoc. Comput. Mach. 1976. Vol. 23, no. 3. P. 555–565.
4. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP -complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4, no. 3. P. 237–244.
5. Introduction to Algorithms / T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein. Cambridge; London: MIT Press, 1990. 1292 p.
6. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Proc. of Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity. New York: Academic Press, 1976. P. 441.
7. Proof verification and interactability of approximation problems / S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan, M. Szegedy // Proc. of the 33rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 1992. P. 13–22.
8. **Mitchell J.** Guillotine subdivisions approximate polygonal subdivisions: A simple polynomial-time approximation scheme for geometric TSP, k -MST, and related problems // SIAM J. Comp. 1999. Vol. 28, no. 4. P. 1298–1309.
9. **Гимади Э.Х., Перепелица В.А.** Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Вып. 12. Новосибирск, 1974. С. 35–45.

10. **Arora S.** Polynomial-time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
11. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** Полиномиальная приближенная схема для евклидовой задачи о цикловом покрытии графа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 297–311.
12. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** Аппроксимируемость задачи о минимальном по весу цикловом покрытии графа // Докл. АН. 2015. Т. 461, № 6. С. 644–649.
13. **Khachay M., Neznakhina K.** Approximation of Euclidean k -size cycle cover problem // Croat. Oper. Res. Rev. 2014. Vol. 5, no. 2. P. 177–188.
14. **Jung H.** Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst // J. Reine Angew. Math. 1901. Vol. 123. P. 241–257.
15. **Sneath P.** Computers in taxonomy // J. Gen. Microbiol. 1957. Vol. 17. P. 201–226.
16. **Gower J., Ross G.** Minimum spanning trees and single linkage cluster analysis // Appl. Statist. 1969. Vol. 18. P. 54–64.
17. **Эндрюс Г.** Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.

Незнахина Екатерина Дмитриевна
аспирант, математик

Поступила 13.05.2015

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: eneznakhina@yandex.ru

УДК 519.658.4

**ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ
ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹****Л. Д. Попов, В. Д. Скарин**

Предложен новый подход к оптимальной лексикографической коррекции несобственных задач линейного программирования. В основе подхода лежит многоступенчатая регуляризация классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным. Регуляризованная функция может быть положена в основу формирования новых схем двойственности для задач такого типа. Приведены теоремы сходимости и численной устойчивости метода, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения.

Ключевые слова: линейное программирование, двойственность, несобственные задачи, обобщенные решения, регуляризация, методы штрафных функций.

L. D. Popov, V. D. Skarin. Lexicographic regularization and duality for improper linear programming problems.

A new approach to the optimal lexicographic correction of improper linear programming problems is proposed. The approach is based on the multistep regularization of the classical Lagrange function with respect to primal and dual variables simultaneously. The regularized function can be used as a basis for generating new duality schemes for problems of this kind. Theorems on the convergence and numerical stability of the method are presented, and an informal interpretation of the obtained generalized solution is given.

Keywords: linear programming, duality, improper problems, generalized solutions, regularization, penalty methods.

Введение

Несобственными называют [1; 2] задачи линейного и выпуклого программирования (ЛП и ВП), для которых нарушены основные соотношения двойственности, а именно одновременная разрешимость прямой и двойственной задач и совпадение их оптимальных значений. Для задачи ЛП несобственность означает просто несовместность системы ее ограничений и (или) несовместность системы ограничений двойственной задачи. На практике свойство несобственности может возникать как результат неточного задания исходных данных задачи, рассогласования ее ресурсных ограничений и целей, структурных искажений модели и даже быть адекватным отражением реальных противоречий моделируемого объекта.

Несобственная задача (НЗ) не имеет решения в обычном понимании этого термина. Поэтому она необходимо должна быть подвергнута некоторой коррекции или, иначе, структурному или информационному преобразованию, которое приводило бы ее к разрешимому виду. Естественно, что это преобразование должно удовлетворять некоторым объективным критериям качества (например, вносимые с его помощью изменения должны быть минимально необходимыми для обеспечения свойств разрешимости) и проводиться посредством формальных математических методов.

Теоретической базой методов оптимальной коррекции НЗ ЛП являются оригинальные схемы формирования двойственности, предложенные И. И. Ереминым [1–3]. В основе этих схем лежат такие модификации классической функции Лагранжа, которые обладают седловыми точками независимо от разрешимости или неразрешимости исходной задачи. Возникающие при этом стандартные минимаксные задачи всегда разрешимы и играют роль содержательных аппроксимаций для исходной пары взаимодвойственных противоречивых задач, а компоненты их седловых точек (при определенном законе изменения входящих в них числовых

¹Исследования поддержаны Российским научным фондом (грант №14-11-00109).

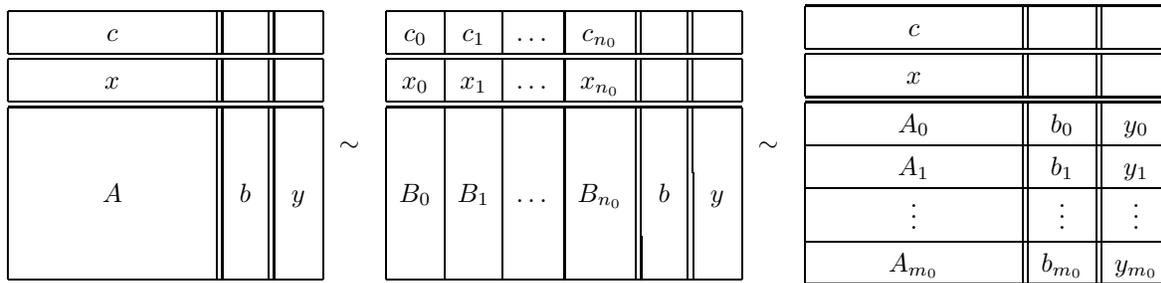


Схема 1. Разбиение исходных данных задач P и D на блоки.

параметров) сходятся к конкретным величинам, которые могут быть интерпретированы как обобщенные решения исходных несобственных постановок.

Идеи, использованные в [1–3] для построения модифицированных функций Лагранжа, не являются единственно возможными. Подобные модификации можно также строить, используя общий метод регуляризации Тихонова [4; 5]. Первые шаги в этом направлении были сделаны в [6–8]. В данной работе этот подход получает дальнейшее развитие, что позволяет перейти от обычной коррекции исходных данных НЗ ЛП к их коррекции в лексикографической постановке с улучшением вычислительных свойств предлагаемых алгоритмов.

1. Двойственность для несобственных задач линейного программирования на основе симметричной регуляризации функции Лагранжа

Рассмотрим пару взаимодвойственных задач ЛП

$$P: \min \{(c, x) : Ax = b, x \geq 0\}, \quad D: \max \{(b, y) : A^T y \leq c\},$$

где векторы $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b, y \in \mathbb{R}^m$, A — $(m \times n)$ -матрица полного строчного ранга, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение векторов. Будем считать, что априори неизвестно, разрешимы задачи P и D или они являются несобственными.

Как известно, разрешимость задач P и D тесно связана с наличием у их функции Лагранжа $L(x, y) = (c, x) - (y, Ax - b)$ седловых точек относительно области $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ — неотрицательный ортант пространства \mathbb{R}^n . Если хотя бы одно из допустимых множеств задач P и D пусто, то функция $L(x, y)$ не может иметь седловых точек.

Этого недостатка лишена функция Лагранжа, регуляризованная одновременно по прямым и двойственным переменным:

$$L(x, y; \sigma) = (c, x) - (y, Ax - b) + \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 - \frac{\beta}{2} \|y\|^2; \quad (1)$$

здесь $\sigma = [\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Эта функция исследовалась в работах [6; 8]. В частности, было показано, что она порождает пару двойственных задач ВП:

$$P_\sigma : \min_{x \geq 0} \max_y L(x, y; \sigma) = \min_{x \geq 0} \varphi_\sigma(x), \quad \text{где} \quad \varphi_\sigma(x) = (c, x) + \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2\beta} \|Ax - b\|^2,$$

$$D_\sigma : \max_y \min_{x \geq 0} L(x, y; \sigma) = \max_y \psi_\sigma(y), \quad \text{где} \quad \psi_\sigma(y) = (b, y) - \frac{\beta}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{2\alpha} \|(A^T y - c)^+\|^2;$$

выше $(\cdot)^+$ — операция проектирования вектора на неотрицательный ортант.

Задачи P_σ и D_σ всегда разрешимы и имеют равные оптимальные значения для любого $\sigma > 0$. Их единственные оптимальные векторы x^σ и y^σ в паре образуют (также единственную) седловую точку $[x^\sigma, y^\sigma]$ функции $L(x, y; \sigma)$ относительно области $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m$.

Решениям x^σ и y^σ пары двойственных задач P_σ и D_σ можно придать следующую содержательную интерпретацию. Введем расширенные множества

$$X(\Delta b) = \{x: Ax = b + \Delta b, x \geq 0\} \quad \text{и} \quad Y(\Delta c) = \{y: A^T y \leq c + \Delta c\}$$

и определим минимальные по норме векторы коррекции

$$\widehat{\Delta b} = \arg \min\{\|\Delta b\|: X(\Delta b) \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad \widehat{\Delta c} = \arg \min\{\|\Delta c\|: Y(\Delta c) \neq \emptyset\}.$$

Тогда, как показано в [6; 8], имеют место сходимости

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \alpha x^\sigma = \widehat{\Delta c}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} (-\beta y^\sigma) = \widehat{\Delta b}. \quad (2)$$

Заметим, что в собственном случае векторы $\widehat{\Delta b}$ и $\widehat{\Delta c}$ равны нулю.

Таким образом, с помощью векторов x^σ и y^σ реализуется оптимальная коррекция несобственных задач P и D по правым частям их несовместных систем ограничений. Векторы $\widehat{\Delta b}$ и $\widehat{\Delta c}$ определяют так называемую *симметрическую* [2] коррекцию НЗ ЛП, при которой задачи P и D заменяются разрешимыми задачами

$$\widehat{P}: \min\{(c + \widehat{\Delta c}, x): Ax = b + \widehat{\Delta b}, x \geq 0\}, \quad \widehat{D}: \max\{(b + \widehat{\Delta b}, y): A^T y \leq c + \widehat{\Delta c}\},$$

также являющимися взаимодвойственными.

В данной работе этот подход будет обобщен и расширен следующим образом.

Вслед за [1; 2] разобьем матрицу ограничений задач P и D на ряд горизонтальных и вертикальных полос $A = [A_0^T | A_1^T | \dots | A_{m_0}^T]^T = [B_0 | B_1 | \dots | B_{n_0}]$ так, как это проиллюстрировано схемой 1. Соответственно векторы c , b , x и y получают представление в виде композиции векторов $c = [c_0, c_1, \dots, c_{n_0}]$, $b = [b_0, b_1, \dots, b_{m_0}]$, $x = [x_0, x_1, \dots, x_{n_0}]$ и $y = [y_0, y_1, \dots, y_{m_0}]$. Такое разбиение позволяет учесть возможное ранжирование противоречивых ограничений исходных задач по степени важности (приоритетности) их выполнения.

По аналогии с (1) введем в рассмотрение функцию Лагранжа, симметрично регуляризованную по прямым и двойственным переменным в соответствии с приведенным выше разбиением:

$$\mathcal{L}(x, y; \sigma) = \sum_{t=0}^{n_0} (c_t, x_t) - \sum_{s=0}^{m_0} (y_s, A_s x - b_s) + \sum_{t=0}^{n_0} \frac{\alpha_t}{2} \|x_t\|^2 - \sum_{s=0}^{m_0} \frac{\beta_s}{2} \|y_s\|^2, \quad (3)$$

где $\sigma = [\alpha, \beta]$, $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_0}] > 0$ и $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m_0}] > 0$.

Подобно тому как функция (1) порождает задачи P_σ и D_σ , функция (3) порождает свою пару минимаксных задач

$$\mathcal{P}_\sigma: \min_{x \geq 0} \max_y \mathcal{L}(x, y; \sigma) = \min_{x \geq 0} \Phi_\sigma(x), \quad \text{где} \quad \Phi_\sigma(x) = (c, x) + \sum_{t=0}^{n_0} \frac{\alpha_t}{2} \|x_t\|^2 + \sum_{s=0}^{m_0} \frac{1}{2\beta_s} \|A_s x - b_s\|^2,$$

$$\mathcal{D}_\sigma: \max_y \min_{x \geq 0} \mathcal{L}(x, y; \sigma) = \max_y \Psi_\sigma(y), \quad \text{где} \quad \Psi_\sigma(y) = (b, y) - \sum_{s=0}^{m_0} \frac{\beta_s}{2} \|y_s\|^2 - \sum_{t=0}^{n_0} \frac{1}{2\alpha_t} \|(B_t^T y - c_t)^+\|^2.$$

Вид функций $\Phi_\sigma(x)$ и $\Psi_\sigma(y)$ определяется из тех же соображений, что и в [6; 8].

Теорема 1. *Независимо от того, разрешимы или нет задачи P и D , задачи \mathcal{P}_σ и \mathcal{D}_σ для любого набора параметров $\sigma > 0$ разрешимы в единственных точках x^σ и y^σ соответственно и $\Phi_\sigma(x^\sigma) = \Psi_\sigma(y^\sigma) = \mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma; \sigma)$.*

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из общих теорем о минимаксе для выпукло-вогнутых функций (см., например, [9]).

Для описания аппроксимационных свойств предлагаемого подхода к двойственности рассмотрим следующие аналоги задач \hat{P} и \hat{D} :

$$P(\Delta b, \Delta c): \min \left\{ \sum_{t=0}^{n_0} (c_t + \Delta c_t, x_t): A_s x = b_s + \Delta b_s, s = 0, 1, \dots, m_0; x \geq 0 \right\},$$

$$D(\Delta b, \Delta c): \max \left\{ \sum_{s=0}^{m_0} (b_s + \Delta b_s, y_s): B_t^T y \leq c_t + \Delta c_t, t = 0, 1, \dots, n_0 \right\}.$$

Теорема 2. Решения x^σ и y^σ задач \mathcal{P}_σ и \mathcal{D}_σ являются одновременно решениями задач $P(\Delta b, \Delta c)$ и $D(\Delta b, \Delta c)$ при $\Delta c_t = \alpha_t x_t^\sigma$ ($t = 0, 1, \dots, n_0$), $\Delta b_s = -\beta_s y_s^\sigma$ ($s = 0, 1, \dots, m_0$).

Доказательство. Для седловой точки $[x^\sigma, y^\sigma]$ выпукло-вогнутой функции (3) относительно области $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m$ выполняются стандартные условия Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_t} \mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma; \sigma) &= c_t - B_t^T y^\sigma + \alpha_t x_t^\sigma \geq 0 \quad (t = 0, 1, \dots, n_0), \\ \nabla_{y_s} \mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma; \sigma) &= b_s - A_s x^\sigma - \beta_s y_s^\sigma = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, m_0), \\ x_t^\sigma &\geq 0, \quad (x_t^\sigma, \nabla_{x_t} \mathcal{L}(x^\sigma, y^\sigma; \sigma)) = 0 \quad (t = 0, 1, \dots, n_0). \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что векторы x^σ и y^σ являются допустимыми соответственно для задач $P(\Delta c, \Delta b)$ и $D(\Delta c, \Delta b)$ при $\Delta c_t = \alpha_t x_t^\sigma$ ($t = 0, 1, \dots, n_0$), $\Delta b_s = -\beta_s y_s^\sigma$ ($s = 0, 1, \dots, m_0$) и для них выполнены условия дополняющей нежесткости. Следовательно, x^σ и y^σ оптимальны для этих задач.

Теорема доказана.

2. Лексикографическая коррекция несобственных задач линейного программирования 1-го рода

Перейдем к детальному исследованию аппроксимационных свойств новых схем формирования двойственности для НЗ ЛП. Для векторов коррекции, введенных в теореме 2, будут выявлены такие их свойства, которые являются обобщением утверждений (2), на более общую, лексикографическую, формулировку задачи оптимальной коррекции. Исследование будет ограничено случаем несобственности 1-го рода (т.е. неразрешимыми задачами, которые могут быть приведены к разрешимому виду путем коррекции правых частей своих ограничений). Это, с одной стороны, позволит сделать все рассуждения более прозрачными, а с другой — не сильно стеснит широту исследования, поскольку несобственность 2-го рода (т.е. задачи с неограниченной целевой функцией на непустом допустимом множестве) является дуальным отражением несобственности 1-го рода. К тому же задачи с противоречивыми ограничениями достаточно часто встречаются в приложениях и имеют хорошую интерпретацию. Что касается несобственности 3-го рода, т.е. когда одновременно противоречивы системы ограничений прямой и двойственной задач, то такие ситуации относительно редки и достаточно специфичны (в частности, известно, что свойство несобственности в этом случае неустойчиво к малым колебаниям коэффициентов матрицы A).

2.1. Постановка задачи

Пусть в схеме присутствует только горизонтальное разбиение исходных данных задач P и D . Соответственно прямая задача может быть записана в виде

$$P: \min\{(c, x): A_s x = b_s \ (s = 0, 1, \dots, m_0), x \geq 0\}, \quad (4)$$

а двойственная к ней, как

$$D: \max \left\{ \sum_{s=0}^{m_0} (b_s, y_s) : \sum_{s=0}^{m_0} A_s^T y_s \leq c \right\}.$$

Всюду ниже будет считаться выполненным условие непустоты допустимой области двойственной задачи

$$Y_D = \left\{ y = [y_0, y_1, \dots, y_{m_0}] : \sum_{s=0}^{m_0} A_s^T y_s \leq c \right\} \neq \emptyset. \quad (5)$$

Это условие гарантирует, что задача (4) может оказаться либо разрешимой (при совместности ее ограничений), либо несобственной, но только 1-го рода (если ее ограничения противоречивы), так как в этом случае она может быть приведена к разрешимому виду путем коррекции правых частей своих ограничений.

Сформулируем задачу лексикографической [10;11] коррекции задачи (4) как задачу индуктивного построения конечной последовательности непустых выпуклых замкнутых множеств

$$X_0 = \text{Arg min} \{ \|A_0 x - b_0\|^2 : x \geq 0 \}, \quad X_1 = \text{Arg min} \{ \|A_1 x - b_1\|^2 : x \in X_0 \}, \dots, \\ X_{m_0} = \text{Arg min} \{ \|A_{m_0} x - b_{m_0}\|^2 : x \in X_{m_0-1} \}, \quad (6)$$

последнее из которых и будет замещать собой пустую допустимую область задачи P . Соответственно сама задача P будет заменена на

$$\hat{P}: \min \{ (c, x) : x \in X_{m_0} \}. \quad (7)$$

Построение множеств (6) эквивалентно последовательному решению серии задач поиска евклидовых проекций векторов b_0, b_1, \dots, b_{m_0} на выпуклые замкнутые множества

$$U_0 = \{ u : u = A_0 x, x \geq 0 \}, \quad U_1 = \{ u : u = A_1 x, x \in X_0 \}, \dots, \quad U_{m_0} = \{ u : u = A_{m_0} x, x \in X_{m_0-1} \}.$$

Следовательно, найдутся единственные векторы

$$\hat{u}_0 = \pi_{U_0}(b_0) - b_0, \quad \hat{u}_1 = \pi_{U_1}(b_1) - b_1, \dots, \quad \hat{u}_{m_0} = \pi_{U_{m_0}}(b_{m_0}) - b_{m_0} \quad (8)$$

такие, что множества (6) можно представить в виде

$$X_0 = \{ x : A_0 x - b_0 = \hat{u}_0, x \geq 0 \}, \quad X_1 = \{ x : A_1 x - b_1 = \hat{u}_1, x \in X_0 \}, \dots, \\ X_{m_0} = \{ x : A_{m_0} x - b_{m_0} = \hat{u}_{m_0}, x \in X_{m_0-1} \};$$

здесь $\pi_B(\cdot)$ — оператор проектирования на B .

В частности, заключительное множество серии определяется как

$$X_{m_0} = \{ x \geq 0 : A_0 x - b_0 = \hat{u}_0, A_1 x - b_1 = \hat{u}_1, \dots, A_{m_0} x - b_{m_0} = \hat{u}_{m_0} \},$$

в силу чего задача (7) может рассматриваться как задача, получающаяся из исходной путем корректировки правых частей ее ограничений-равенств, т.е. как задача, аппроксимирующая исходную несобственную постановку в смысле работы [2]. Соответственно ее минимальное по норме решение \hat{x} можно рассматривать в качестве обобщенного решения исходной несобственной постановки. При этом в собственном случае все $\hat{u}_s = 0$, X_{m_0} совпадают с допустимой областью исходной задачи, \hat{x} является ее нормальным решением.

Векторы $\hat{u}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{m_0}$ и обобщенное решение \hat{x} будем искать при помощи функции (3). Применительно к задаче (4) она примет вид

$$\hat{\mathcal{L}}(x, y; \sigma) = (c, x) - \sum_{s=0}^{m_0} (y_s, A_s x - b_s) + \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 - \frac{\beta_0}{2} \|y_0\|^2 - \frac{\beta_1}{2} \|y_1\|^2 - \dots - \frac{\beta_{m_0}}{2} \|y_{m_0}\|^2,$$

где $\sigma = [\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m_0}]$ — набор положительных параметров регуляризации. Соответственно несколько изменится и вид целевых функций $\Phi_\sigma(x)$ и $\Psi_\sigma(y)$ в задачах \mathcal{P}_σ и \mathcal{D}_σ . В частности, $\Phi_\sigma(x)$ заменим на

$$\widehat{\Phi}_\sigma(x) = (c, x) + \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \sum_{s=0}^{m_0} \frac{1}{2\beta_s} \|A_s x - b_s\|^2.$$

Предметом дальнейшего исследования станет прямая задача \mathcal{P}_σ , т. е. задача

$$\min_{x \geq 0} \widehat{\Phi}_\sigma(x), \quad (9)$$

а целью — нахождение условий на параметры регуляризации σ , которые гарантировали бы сходимость ее решения x^σ к нормальному решению \widehat{x} аппроксимирующей задачи (7).

2.2. Вспомогательные построения и оценки

Пусть имеется параметрическое семейство выпуклых полиэдральных множеств вида

$$Z(u) = \{z \in \mathbb{R}^s : Mz = u, z \geq 0\},$$

где матрица M размера $r \times s$ фиксирована и имеет полный строчный ранг, $u \in \mathbb{R}^r$ — параметр.

Лемма 1. При любом фиксированном z_0 отображение $\eta: u \rightarrow \pi_{Z(u)}(z_0)$ непрерывно на множестве $\Omega = \{u: Z(u) \neq \emptyset\}$.

Доказательство. В самом деле, вектор $z_u = \pi_{Z(u)}(z_0)$ является оптимальным вектором задачи квадратичного программирования $\min\{\|z - z_0\|^2 : Mz = u, z \geq 0\}$ с сильно выпуклой целевой функцией. Как показано, например, в [12], оптимальный вектор такой задачи непрерывно зависит от правых частей ее ограничений.

Обратимся теперь к задаче ЛП (7), заменив в ней фиксированные правые части ограничений на параметры

$$\min\{(c, x) : A_0 x - b_0 = u_0, A_1 x - b_1 = u_1, \dots, A_{m_0} x - b_{m_0} = u_{m_0}, x \geq 0\}. \quad (10)$$

В силу условия (5) функция оптимума этой задачи $v_0(\cdot)$ выпукла и кусочно-линейна на выпуклом многогранном множестве Ω_0 всех таких наборов $u = [u_0, u_1, \dots, u_{m_0}]$, которые обеспечивают совместность ее ограничений. При этом оптимальный вектор коррекции $\widehat{u} = [\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_{m_0}]$, определяемый соотношениями (8), (7), лежит в Ω_0 и $v_0(\widehat{u}) = (c, \widehat{x})$.

Пусть $\widehat{x}(u)$ — минимальное по норме решение задачи (10).

Лемма 2. Отображение $\eta: u \rightarrow \widehat{x}(u)$ непрерывно на Ω_0 .

Доказательство. Обсуждаемое отображение является суперпозицией двух отображений. Первое из этих отображений переводит исходный вектор $u \in \Omega_0$ в “расширенный” вектор $w = [v_0(u), u]$, второе переводит вектор w в минимальный по норме элемент оптимального множества задачи (10), которое можно представить в виде

$$\widehat{X}(u) = \{x : (c, x) = v_0(u), A_0 x - b_0 = u_0, A_1 x - b_1 = u_1, \dots, A_{m_0} x - b_{m_0} = u_{m_0}, x \geq 0\}.$$

Непрерывность первого отображения следует из непрерывности функции $v_0(\cdot)$, второго — из леммы 1. В итоге отображение η также оказывается непрерывным.

Лемма доказана.

Далее обратимся к задачам (6), также заменяя в них фиксированные правые части ограничений на параметры

$$\min\{\|A_i x - b_i\|^2 : A_0 x - b_0 = u_0, A_1 x - b_1 = u_1, \dots, A_{i-1} x - b_{i-1} = u_{i-1}, x \geq 0\}. \quad (11)$$

Известно [12; 13], что функции оптимума $v_i(u)$ этих задач конечны, непрерывны и выпуклы на множествах всех таких векторов $u = [u_0, u_1, \dots, u_{i-1}]$, которые обеспечивают совместность их ограничений. Для простоты обозначений будем считать, что функции $v_i(\cdot)$ зависят от всего набора векторов u_s . Это позволит сохранить для их области определения единое обозначение Ω_0 . Как и ранее, оптимальный вектор коррекции $\hat{u} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{m_0}] \in \Omega_0$ и $v_i(\hat{u}) = \|\hat{u}_i\|^2$ при $i = 1, \dots, m_0$.

Хотя задачи (11) нелинейны, их оптимальные множества $\hat{X}_i(u)$, как уже отмечалось выше, полиэдральны и описываются системами неравенств и уравнений вида

$$\hat{X}_i(u) = \{x: A_0x - b_0 = u_0, A_1x - b_1 = u_1, \dots, A_{i-1}x - b_{i-1} = u_{i-1}, A_ix - b_i = \hat{u}_i(u), x \geq 0\},$$

где $\hat{u}_i(u) = \pi_{Z_i(u)}(b_i) - b_i$, $Z_i(u) = \{z: z = A_ix, x \in X_i(u)\}$, $X_i(u)$ — допустимое множество задачи (11).

Пусть $\hat{x}(u; i)$ — минимальное по норме решение задачи (11). По аналогии с леммой 2 можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 3. Каждое из отображений $\eta_i: u \rightarrow \hat{x}(u; i)$, $i = 1, \dots, m_0$, непрерывно на Ω_0 .

Доказательство. Каждое из обсуждаемых отображений является суперпозицией пяти непрерывных отображений. Первое из них переводит исходный вектор $u \in \Omega_0$ в выпуклое полиэдральное множество $X_i(u)$, второе переводит $X_i(u)$ в выпуклое полиэдральное множество $Z_i(u)$, третье переводит $Z_i(u)$ в $\hat{u}_i(u) = \pi_{Z_i(u)}(b_i) - b_i$, четвертое переводит $\hat{u}_i(u)$ в $\hat{X}_i(u)$ и пятое переводит $\hat{X}_i(u)$ в вектор $\hat{x}(u; i)$. Непрерывность первого, третьего, четвертого и пятого отображений следует из леммы 1, второго — из его линейности.

Лемма доказана.

Вернемся к задаче (10). Оценим значение ее целевой функции в произвольной точке $x \geq 0$.

Лемма 4. Пусть \hat{x} — решение задачи (7). Существует такая константа N_0 , что при всех $x \geq 0$ выполняется неравенство

$$(c, \hat{x} - x) \leq N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|A_sx - b_s - \hat{u}_s\|.$$

Доказательство. В самом деле, поскольку задача (7) разрешима, то разрешима и задача, двойственная к ней:

$$\hat{D}: \max \left\{ \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{u}_s, y_s) : \sum_{s=0}^{m_0} A_s^T y_s \leq c, y = [y_0, y_1, \dots, y_{m_0}] \right\}.$$

Пусть $\hat{y} = [\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{m_0}]$ — ее минимальный по норме оптимальный вектор. Поскольку всякий оптимальный вектор двойственной задачи ЛП является субградиентом функции оптимума прямой задачи, то $v_0(u) \geq v_0(\hat{u}) + \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, u_s - \hat{u}_s)$. Но вектор x удовлетворяет ограничениям задачи (10) при $u_s(x) = A_sx - b_s$ ($s = 0, \dots, m_0$). Следовательно,

$$(c, x) \geq v_0(u(x)) \geq v_0(\hat{u}) + \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, A_sx - b_s - \hat{u}_s) \geq (c, \hat{x}) - N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|A_sx - b_s - \hat{u}_s\|,$$

где $N_0 = \max_s \|\hat{y}_s\|$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Наконец, рассмотрим задачи ЛП вида

$$\min \{(A_ix - b_i, \hat{u}_i) : A_0x - b_0 = u_0, A_1x - b_1 = u_1, \dots, A_{i-1}x - b_{i-1} = u_{i-1}, x \geq 0\}. \quad (12)$$

Эти задачи получаются из задач (11) путем линеаризации последних в точке \hat{x} . Функции оптимума $w_i(u)$ этих задач (которые для простоты обозначений также будем считать зависящими от полного набора векторов u_s) являются выпуклыми и кусочно-линейными на Ω_0 . При этом, как и ранее, $\hat{u} = [\hat{u}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{m_0}] \in \Omega_0$ и $w_i(\hat{u}) = \|\hat{u}_i\|^2$ при $i = 1, \dots, m_0$.

Приведем оценку снизу для целевой функции задачи (12) в произвольной точке $x \geq 0$.

Лемма 5. *Константу N_0 из предыдущей леммы можно сделать настолько большой, что при всех $x \geq 0$ и всех $i = 1, \dots, m_0$ будут выполнены также неравенства*

$$\|\hat{u}_i\|^2 - (A_i x - b_i, \hat{u}_i) \leq N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|A_s x - b_s - \hat{u}_s\|.$$

Доказательство данной леммы дословно следует схеме, использованной при доказательстве леммы 4.

В заключении раздела оценим поведение отклонений $\|A_i x - b_i - \hat{u}_i\|$.

Лемма 6. *Пусть константа N_0 определена в предыдущей лемме. Тогда при всех $x \geq 0$ и всех $i = 1, \dots, m_0$ выполнены неравенства*

$$\|A_i x - b_i - \hat{u}_i\|^2 \leq \|A_i x - b_i\|^2 - \|\hat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|A_s x - b_s - \hat{u}_s\|.$$

Доказательство. Достаточно проследить следующую цепочку соотношений со ссылкой на лемму 5:

$$\|A_i x - b_i - \hat{u}_i\|^2 = \|A_i x - b_i\|^2 + \|\hat{u}_i\|^2 - 2(A_i x - b_i, \hat{u}_i) \leq \|A_i x - b_i\|^2 - \|\hat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|A_s x - b_s - \hat{u}_s\|.$$

Лемма доказана.

Подчеркнем, что здесь отклонения для систем уравнений с большими индексами оценены через такие же отклонения для систем уравнений с меньшими индексами.

2.3. Сходимость по ограничениям

Всюду ниже будем предполагать, что параметры регуляризации $\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ являются бесконечно малыми положительными величинами и

$$\gamma_s = \beta_{s-1}/\beta_s \rightarrow 0 \quad (0 < s \leq m_0). \quad (13)$$

Для удобства дальнейшего изучения промасштабируем целевую функцию задачи (9):

$$\tilde{\Phi}_\omega(x) = 2\beta_0 \hat{\Phi}_\sigma(x) = \|A_0 x - b_0\|^2 + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|A_s x - b_s\|^2 + \omega_{m_0+1}(c, x) + \omega_{m_0+2} \|x\|^2;$$

здесь введены новые параметры $\omega_1 = \beta_0/\beta_1, \omega_2 = \beta_0/\beta_2, \dots, \omega_{m_0} = \beta_0/\beta_{m_0}, \omega_{m_0+1} = 2\beta_0, \omega_{m_0+2} = \alpha\beta_0$. В силу условий (13) они также являются бесконечно малыми положительными величинами и

$$\omega_s/\omega_{s-1} \rightarrow 0 \quad (s = 2, 3, \dots, m_0 + 2). \quad (14)$$

Сосредоточимся на анализе свойств последовательности x^σ решений задач (9). Покажем вначале, что $\|A_s x^\sigma - b_s - \hat{u}_s\| \rightarrow 0$ ($0 \leq s \leq m$), где \hat{u}_s взяты из (8), (7). Для этого воспользуемся методом математической индукции. Базой этой индукции служит следующая лемма.

Лемма 7. Пусть параметры регуляризации $\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие (13). Тогда оптимальный вектор x^σ задачи (9) удовлетворяет соотношению

$$\delta_0(\sigma) = \|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Выпишем несколько вспомогательных неравенств. Во-первых, вектор $b_0 + \hat{u}$ является евклидовой проекцией вектора b_0 на выпуклое замкнутое множество $U_0 = \{u: u = A_0 x, x \geq 0\}$, в силу чего

$$\|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\|^2 \leq \|A_0 x^\sigma - b_0\|^2 - \|\hat{u}_0\|^2.$$

Во-вторых, по определению $\tilde{\Phi}_\omega(x^\sigma) = \min_{x \geq 0} \tilde{\Phi}_\omega(x) \leq \tilde{\Phi}_\omega(\hat{x})$, откуда вытекает неравенство

$$\|A_0 x^\sigma - b_0\|^2 - \|\hat{u}_0\|^2 \leq \omega_{m_0+1}((c, \hat{x}) - (c, x^\sigma)) + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\hat{u}_s\|^2 - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|A_s x^\sigma - b_s\|^2 + \omega_{m_0+2} \|\hat{x}\|^2.$$

В-третьих, по лемме 4

$$\omega_{m_0+1}((c, \hat{x}) - (c, x^\sigma)) \leq \omega_{m_0+1} N_0 \left(\|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|A_s x^\sigma - b_s\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|\hat{u}_s\| \right).$$

В-четвертых, выделяя полные квадраты, получаем

$$\begin{aligned} & \omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \|A_s x^\sigma - b_s\| - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|A_s x^\sigma - b_s\|^2 \\ &= \omega_{m_0+1} \left[N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} - \sum_{s=1}^{m_0} \left(\sqrt{\frac{\omega_s}{\omega_{m_0+1}}} \|A_s x^\sigma - b_s\| - N_0 \sqrt{\frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}} \right)^2 \right] \leq \omega_{m_0+1} N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}. \end{aligned} \quad (15)$$

Складывая эти четыре неравенства, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\|^2 \\ & \leq \omega_{m_0+1} N_0 \|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\| + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\hat{u}_s\|^2 + \omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \left(\|\hat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \right) + \omega_{m_0+2} \|\hat{x}\|^2. \end{aligned}$$

В силу условий (13), (14) найдется такая константа N_1 , что три последних слагаемых выше могут быть оценены как

$$\sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\hat{u}_s\|^2 + \omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \left(\|\hat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \right) + \omega_{m_0+2} \|\hat{x}\|^2 \leq N_1 \omega_1.$$

Поэтому $\|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\|^2 \leq \omega_{m_0+1} N_0 \|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\| + N_1 \omega_1$ и, следовательно, найдется такая константа N_2 , что

$$\delta_0(\sigma) = \|A_0 x^\sigma - b_0 - \hat{u}_0\| \leq \frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2} \right)^2 + N_1 \omega_1} \leq N_2 \sqrt{\omega_1} \rightarrow 0.$$

Здесь мы также воспользовались условиями (13), (14).

Лемма доказана.

Перейдем к обоснованию шага индукции.

Лемма 8. Пусть выполнены предположения предыдущей леммы и оптимальный вектор x^σ задачи (9) удовлетворяет соотношениям

$$\delta_s(\sigma) = \|A_s x^\sigma - b_s - \hat{u}_s\| \rightarrow 0 \quad (s = 0, 1, \dots, k < m_0 - 1). \quad (16)$$

Тогда $\delta_{k+1}(\sigma) = \|A_{k+1} x^\sigma - b_{k+1} - \hat{u}_{k+1}\| \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $\hat{x}(u^\sigma; k+1)$ — минимальное по норме решение задачи (11) с номером $i = k+1$, отвечающее правым частям $u_s = u_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s$ ($s = 0, 1, \dots, m_0$). Фактически это решение зависит только от первых k блоков вектора u^σ . По предположению индукции эти компоненты сходятся к соответствующим компонентам вектора \hat{u} , что по лемме 3 обеспечивает равномерную по σ ограниченность векторов $\hat{x}(u^\sigma; k+1)$ и в силу непрерывности функции оптимума $v_{k+1}(\cdot)$ сходимость $\tau_{k+1}(\sigma) := v_{k+1}(u^\sigma) - \|\hat{u}_{k+1}\|^2 \rightarrow 0$.

Далее, как и при доказательстве предыдущей леммы, выпишем ряд неравенств. Во-первых, в соответствии с леммой 6 и условиями (16)

$$\begin{aligned} \|A_{k+1} x^\sigma - b_{k+1} - \hat{u}_{k+1}\|^2 &\leq \|A_{k+1} x^\sigma - b_{k+1}\|^2 - \|\hat{u}_{k+1}\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^k \|A_s x^\sigma - b_s - \hat{u}_s\| \\ &= \|A_{k+1} x^\sigma - b_{k+1}\|^2 - \|\hat{u}_{k+1}\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^k \delta_s(\sigma). \end{aligned}$$

Во-вторых, по определению $\tilde{\Phi}_\omega(x^\sigma) = \min_{x \geq 0} \tilde{\Phi}_\omega(x) \leq \tilde{\Phi}_\omega(\hat{x}(u^\sigma; k+1))$, откуда, с учетом совпадения первых $k+1$ слагаемых у $\tilde{\Phi}_\omega(x^\sigma)$ и $\tilde{\Phi}_\omega(\hat{x}(u^\sigma; k+1))$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|A_{k+1} x^\sigma - b_{k+1}\|^2 &\leq v_{k+1}(u^\sigma) + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} ((c, \hat{x}(u^\sigma; k+1)) - (c, x^\sigma)) \\ &+ \frac{\omega_{m_0+2}}{\omega_{k+1}} (\|\hat{x}(u^\sigma; k+1)\|^2 - \|x^\sigma\|^2) + \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s \hat{x}(u^\sigma; k+1) - b_s\|^2 - \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s x^\sigma - b_s\|^2. \end{aligned}$$

В-третьих, по лемме 4

$$\frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} ((c, \hat{x}) - (c, x^\sigma)) \leq \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \left(\sum_{s=0}^{k+1} \delta_s(\sigma) + \sum_{s=k+2}^{m_0} (\|A_s x^\sigma - b_s\| + \|\hat{u}_s\|) \right).$$

В-четвертых, по полной аналогии с (15)

$$\frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \sum_{s=k+2}^{m_0} \|A_s x^\sigma - b_s\| - \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s x^\sigma - b_s\|^2 \leq \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0^2 \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}.$$

Складывая эти четыре неравенства, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|A_{k+1} x^\sigma - b_{k+1} - \hat{u}_{k+1}\|^2 &\leq \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \|A_{k+1} x^\sigma - b_{k+1} - \hat{u}_{k+1}\| + v_{k+1}(u^\sigma) - \|\hat{u}_{k+1}\|^2 \\ &+ N_0 \left(2 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} \right) \sum_{s=0}^k \delta_s(\sigma) + \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s \hat{x}(u^\sigma; k+1) - b_s\|^2 \\ &+ \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \sum_{s=k+2}^{m_0} \left(\|\hat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Раньше уже отмечалось, что в силу предположений индукции и непрерывности функции $v_{k+1}(\cdot)$ имеет место сходимость $\tau_{k+1}(\sigma) = v_{k+1}(u^\sigma) - \|\widehat{u}_{k+1}\|^2 \rightarrow 0$. Кроме того, в силу условий (14) и равномерной по x^σ ограниченности векторов $\widehat{x}(u^\sigma; k+1)$ найдутся такие константы N_3, N_4, N_5 , что

$$N_0 \left(2 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} \right) \leq N_3, \quad \sum_{s=k+2}^{m_0} \frac{\omega_s}{\omega_{k+1}} \|A_s \widehat{x}(u^\sigma; k+1) - b_s\|^2 \leq \frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} N_4,$$

$$N_0 \sum_{s=k+2}^{m_0} \left(\|\widehat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \right) \leq N_5.$$

Следовательно, оценку (17) можно переписать как

$$\|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\|^2 \leq \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| + \tau_{k+1}(\sigma)$$

$$+ N_3 \sum_{s=0}^k \delta_s(\sigma) + \frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} N_4 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_5 \leq \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_0 \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| + \theta_{k+1}(\sigma), \quad (18)$$

где

$$\theta_{k+1}(\sigma) = \tau_{k+1}(\sigma) + N_3 \sum_{s=0}^k \delta_s(\sigma) + \frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} N_4 + \frac{\omega_{m_0+1}}{\omega_{k+1}} N_5 \rightarrow 0.$$

Неравенство (18) является квадратным относительно $\|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\|$. Решая его и учитывая условия (14), убеждаемся в существовании такой константы N_6 , что

$$\delta_{k+1} = \|A_{k+1}x^\sigma - b_{k+1} - \widehat{u}_{k+1}\| \leq \frac{N_0 \omega_{m_0+1}}{2\omega_{k+1}} + \sqrt{\left(\frac{N_0 \omega_{m_0+1}}{2\omega_{k+1}} \right)^2 + \theta_{k+1}(\sigma)} \leq N_6 \sqrt{\theta_{k+1}(\sigma)} \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Леммы 7, 8 показывают, что оптимальный вектор x^σ задачи (9) удовлетворяет соотношениям $\delta_s(\sigma) = \|A_s x^\sigma - b_s - \widehat{u}_s\| \rightarrow 0$ ($0 \leq s < m_0$).

Осталось оценить величину $\|A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\|$.

Лемма 9. Пусть выполнены предположения предыдущей леммы. Тогда оптимальный вектор x^σ задачи (9) удовлетворяет соотношению $\delta_{m_0}(\sigma) = \|A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\| \rightarrow 0$.

Доказательство. Достаточно повторить выкладки из доказательства предыдущей леммы применительно к индексу $k = m - 1$, опуская при этом те суммы, у которых нижний индекс суммирования превосходит верхний (этих сумм в рассматриваемом случае просто нет). В результате получим аналог неравенства (17) в виде

$$\|A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\|^2 \leq \frac{N_0 \omega_{m_0+1}}{2\omega_{m_0}} \|A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\| + \theta_{m_0}(\sigma),$$

где в силу леммы 8 и непрерывности функции оптимума $v_{m_0}(\cdot)$

$$\theta_{m_0}(\sigma) = v_{m_0}(u^\sigma) - \|\widehat{u}_{m_0}\|^2 + N_3 \sum_{s=0}^{m_0-1} \delta_s(\sigma) \rightarrow 0.$$

Решая это квадратное неравенство относительно $\|A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\|$, получаем искомое

$$\delta_{m_0} = \|A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0} - \widehat{u}_{m_0}\| \leq N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{2\omega_{m_0}} + \sqrt{\left(\frac{N_0 \omega_{m_0+1}}{2\omega_{m_0}} \right)^2 + \theta_{m_0}(\sigma)} \leq N_6 \sqrt{\theta_{m_0}(\sigma)} \rightarrow 0.$$

Доказательство завершено.

Две последние леммы (с учетом леммы Хоффмана [14]) позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть параметры регуляризации $\alpha, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие (13). Тогда оптимальный вектор x^σ задачи (9) удовлетворяет соотношению $\rho(x^\sigma, X_{m_0}) \rightarrow 0$.

Таким образом, последовательность $\{x^\sigma\}$ является обобщенным допустимым планом лексикографически оптимально скорректированной задачи (7).

2.4. Сходимость к нормальному решению

Исследуем поведение величин (c, x^σ) .

Лемма 10. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда оптимальный вектор x^σ задачи (9) удовлетворяет соотношению $(c, x^\sigma - \hat{x}) \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $\hat{x}(u^\sigma)$ — минимальное по норме решение задачи (10), отвечающее правым частям $u_s = u_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s$ ($s = 0, 1, \dots, m_0$). Поскольку вектор x^σ допустим для задачи (11) с теми же самыми правыми частями ограничений, то $(c, x^\sigma) \geq v_0(u^\sigma)$. Вместе с тем $\tilde{\Phi}_\omega(x^\sigma) = \min_{x \geq 0} \tilde{\Phi}_\omega(x) \leq \tilde{\Phi}_\omega(\hat{x}(u^\sigma))$, откуда, с учетом того что первые $m+1$ слагаемых у $\tilde{\Phi}_\omega(x^\sigma)$ и $\tilde{\Phi}_\omega(\hat{x}(u^\sigma))$ одинаковы, получаем

$$0 \leq (c, x^\sigma) - v_0(u^\sigma) \leq \frac{\omega_{m_0+2}}{\omega_{m_0+1}} (\|\hat{x}(u^\sigma)\|^2 - \|x^\sigma\|^2). \quad (19)$$

Осталось перейти к пределу в левой и правой частях этого соотношения и учесть теорему 3, равномерную ограниченность решений $\hat{x}(u^\sigma)$, непрерывность функции оптимума $v_0(\cdot)$ и условия на параметры регуляризации (14).

Лемма доказана.

В завершение анализа предложенной схемы регуляризации покажем сходимость оптимальных векторов задачи (9) к нормальному решению задачи (7).

Лемма 11. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда оптимальный вектор x^σ задачи (9) сходится к \hat{x} — нормальному решению задачи (7).

Доказательство. В самом деле, поскольку уже доказано, что $(c, x^\sigma) \rightarrow (c, \hat{x})$ и $u_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s \rightarrow \hat{u}_s$ ($s = 0, 1, \dots, m_0$), то по лемме Хоффмана $\rho(x^\sigma, \hat{X}_{m_0}) \rightarrow 0$, где \hat{X}_{m_0} — оптимальное множество задачи (7). Вместе с тем из (19) и леммы 2 имеем $\|x^\sigma\| \leq \|\hat{x}(u^\sigma)\| \rightarrow \|\hat{x}\|$, что возможно, только если $x^\sigma \rightarrow \hat{x}$.

Доказательство завершено.

Соединяя воедино утверждения теорем 1–3 и лемм 10, 11, можно сформулировать итоговое утверждение раздела.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $[x^\sigma, y^\sigma]$ — седловая точка симметрично регуляризованной функции Лагранжа (3) относительно области $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m$. Тогда вектор x^σ является решением задачи (9) и выполняются соотношения:

$$x^\sigma \rightarrow \hat{x}, \quad -\beta_s y_s^\sigma = A_s x^\sigma - b_s = u_s^\sigma \rightarrow \hat{u}_s \quad (s = 0, 1, \dots, m_0),$$

где \hat{x} — нормальное решение задачи (7), векторы \hat{u}_s — из соотношений (7), (8).

3. Заключение

Предложен и исследован новый подход к лексикографической коррекции несобственных задач линейного программирования. В основе подхода лежит многоступенчатая симметричная регуляризация классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным. Получающаяся функция может быть положена в основу формирования новых схем двойственности для задач такого типа. Приведены условия сходимости метода, дана содержательная интерпретация получаемого решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Еремин И.И.** Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 180 с.
4. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
5. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. **Скарин В.Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
7. **Попов Л.Д.** Линейная коррекция несобственных минимаксных выпукло-вогнутых задач по максимумному критерию // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 9. С. 1100–1110.
8. **Скарин В.Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
9. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
10. **Еремин И.И.** О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 124–129.
11. **Федоров В.В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
12. **Guddat J.** Stability in convex quadratic programming // Mathematische Operationsforschung und Statistik. 1976. Vol. 8. P. 223–245.
13. **Dorn W.S.** Duality in quadratic programming // Buart. Appl. Math. 1960. № 18. P. 407–413.
14. **Hoffman A.J.** On approximate solutions of systems of linear inequalities // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1952. Vol. 49. P. 263–265.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 11.03.2015

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: skavd@imm.uran.ru

УДК 517.977.1

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ
ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ¹****В. Л. Розенберг**

Задача гарантирующего позиционного управления в условиях неполной информации рассматривается для линейного стохастического дифференциального уравнения (СДУ) с позиций подхода метода программных пакетов, разработанного ранее для наведения линейной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на выпуклое целевое множество. Постановка предполагает формирование управляющей детерминированной программы, которая обеспечивает (независимо от реализовавшегося начального состояния из заданного конечного набора) в терминальный момент времени наличие предписанных свойств решения, являющегося случайным процессом, при наблюдении линейного сигнала о некотором количестве реализаций. С помощью уравнений метода моментов задача для СДУ сводится к эквивалентной задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Выписываются условия разрешимости рассматриваемых задач.

Ключевые слова: задача наведения, гарантирующее позиционное управление, линейное стохастическое дифференциальное уравнение.

V. L. Rozenberg. A control problem under incomplete information for a linear stochastic differential equation.

A problem of guaranteed closed-loop control under incomplete information is considered for a linear stochastic differential equation (SDE) from the viewpoint of the method of open-loop control packages worked out earlier for the guidance of a linear control system of ordinary differential equations (ODEs) to a convex target set. The problem consists in designing a deterministic open-loop control providing (irrespective of a realized initial state from a given finite set) prescribed properties of the solution (being a random process) at a terminal point in time. It is assumed that a linear signal on some number of realizations is observed. By the equations of the method of moments, the problem for the SDE is reduced to an equivalent problem for systems of ODEs describing the mathematical expectation and covariance matrix of the original process. Solvability conditions for the problems in question are written.

Keywords: guidance problem, guaranteed closed-loop control, linear stochastic differential equation.

Введение

Проблема построения оптимальных стратегий гарантирующего управления с обратной связью в условиях неопределенности является одной из наиболее актуальных и востребованных в математической теории управления и ее приложениях. В настоящей работе, следующей в русле теории позиционного управления, развитой Н. Н. Красовским, его коллегами и учениками [1–3], к решению задачи наведения для линейного СДУ применяется подход, основанный на так называемом методе программных пакетов, восходящем к технике неупреждающих стратегий из теории дифференциальных игр [4]. Суть метода, апробированного на задачах наведения при неполной информации для линейных управляемых систем ОДУ, состоит в сведении задач гарантирующего управления, поставленных в классе позиционных стратегий, к эквивалентным им задачам в классе пакетов программ, представляющих собой семейства программных управлений, параметризованные допустимыми начальными состояниями и обладающие свойством неупреждаемости по отношению к динамике наблюдений [5–7].

Данная работа посвящена изучению задачи наведения (с вероятностью, близкой к единице) траектории движения линейного СДУ на некоторое целевое множество. Постановка

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

предполагает формирование управляющей детерминированной программы, которая обеспечивает (независимо от реализовавшегося начального состояния из заданного конечного набора) в терминальный момент времени наличие предписанных свойств решения, являющегося случайным процессом, при наблюдении линейного сигнала о некотором количестве его реализаций. Подобные задачи возникают в практических ситуациях, когда возможно наблюдение за большим количеством однотипных объектов, описываемых стохастической динамикой. С помощью уравнений метода моментов [8] задача для СДУ сводится к эквивалентной задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. К полученным системам применяется техника метода программных пакетов, разработанная в [5–7].

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 формулируется основная задача о гарантирующем позиционном управлении для линейного СДУ в условиях дефицита информации. В разд. 2 описывается процедура сведения исходной задачи к двум вспомогательным задачам наведения для ОДУ и устанавливается эквивалентность задач для СДУ и ОДУ. В разд. 3 дается краткая сводка результатов, полученных ранее в рамках метода программных пакетов для ОДУ. В разд. 4 анализируются необходимые статистические оценки. В разд. 5 приводятся основные результаты статьи: критерий разрешимости исходной задачи и утверждение, связывающее точность наведения и количество доступных измерению траекторий исходного процесса. Отметим, что идейно близкая к предложенной в работе процедура сведения задачи для линейного СДУ к соответствующей задаче для ОДУ была использована, в частности, в [9] для решения задачи динамической реконструкции неизвестного возмущения, характеризующего уровень случайных помех, на основе измерений реализаций фазового вектора СДУ.

1. Постановка задачи

Рассматривается система линейных СДУ следующего вида:

$$dx(t, \omega) = (A(t)x(t, \omega) + B_1(t)u_1(t) + f(t)) dt + B_2(t)U_2(t) d\xi(t, \omega), \quad x(t_0, \omega) = x_0. \quad (1.1)$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ (все векторы считаем столбцами); $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t, \omega)$ — стандартный винеровский процесс (т.е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{k \times k}$)); $f(t)$ — непрерывная вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^n ; $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_1(t) = \{b_{1ij}(t)\}$ и $B_2(t) = \{b_{2ij}(t)\}$ — непрерывные матричные функции размерности $n \times n$, $n \times r$ и $n \times k$, соответственно.

В системе действуют два управления: вектор $u_1(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{1r}(t)) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_{21}(t), u_{22}(t), \dots, u_{2k}(t)\} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, которые измеримы по Лебегу на T и принимают значения из заданных мгновенных ресурсов управления S_{u_1} и S_{u_2} , являющихся выпуклыми компактами в соответствующих пространствах. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса. Поскольку $U_2 d\xi = (u_{21} d\xi_1, u_{22} d\xi_2, \dots, u_{2k} d\xi_k)$, то можно считать, что вектор $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k})$ характеризует диффузию процесса (амплитуду случайных помех).

Начальное состояние x_0 принадлежит конечному множеству допустимых начальных состояний X_0 , которое состоит из распределенных по нормальному закону случайных величин с числовыми параметрами (m_0, D_0) , где $m_0 = Mx_0$ — математическое ожидание, $m_0 \in \mathcal{M}_0 = \{m_0^1, m_0^2, \dots, m_0^{n_1}\}$, $D_0 = M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^*$ — ковариационная матрица (звездочка означает транспонирование), $D_0 \in \mathcal{D}_0 = \{D_0^1, D_0^2, \dots, D_0^{n_2}\}$. Таким образом, множество X_0 содержит $n_1 n_2$ элементов. Отметим, что если $0 \in \mathcal{D}_0$, то в X_0 входят и неслучайные векторы. Полагаем, что начальное состояние системы содержится в X_0 , но является неизвестным.

Уравнение (1.1) является символической записью следующего интегрального тождества:

$$x(t, \omega) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s, \omega) + B_1(s)u_1(s) + f(s)) ds + \int_{t_0}^t B_2(s)U_2(s) d\xi(s, \omega). \quad (1.2)$$

Последний интеграл в правой части равенства (1.2) является стохастическим и понимается в смысле Ито. Для любого $\omega \in \Omega$ сформулированная задача Коши имеет единственное решение и определяет соответствующую реализацию случайного процесса $x(t, \omega)$, $t \in T$. Решение уравнения (1.1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий интегральному тождеству (1.2) при любом t с вероятностью 1. При предположениях, сделанных выше, существует единственное решение, которое является нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [10].

Отметим, что уравнения типа (1.1), (1.2) описывают простейшие линеаризованные модели, например изменения численности многовидовой биологической популяции в стохастической среде, динамики цен на товарных рынках при влиянии случайных факторов или движения частиц в некотором поле.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. Пусть заданы выпуклые замкнутые целевые множества $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и непрерывная матричная функция наблюдения $Q(t)$ размерности $q \times n$. В каждый момент времени возможно поступление информации о некотором количестве N реализаций случайного процесса $x(t)$ (будем опускать символ ω в случаях, если речь идет о процессе, а не о его реализации), причем измерению доступен сигнал

$$y(t) = Q(t)x(t). \quad (1.3)$$

Полагаем, что для конечного набора некоторых заданных моментов времени $\tau_i \in T$, $i \in [1 : l]$, строятся оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$ такие, что

$$P\left(\max_{i \in [1:l]} \{\|m_i^N - m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^n}, \|D_i^N - D(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n \times n}}\} \leq h(N)\right) = 1 - g(N), \quad (1.4)$$

причем $h(N)$ и $g(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Ниже будет показано, что стандартные процедуры построения оценок m_i^N и D_i^N допускают модификации, обеспечивающие выполнение соотношения (1.4) и указанных сходимостей (аналогичная процедура была предложена в [9]).

З а д а ч а 1 гарантированного позиционного ε -наведения состоит в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую программу управления $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$, которая, каково бы ни было начальное состояние x_0 из множества X_0 , гарантирует предписанные свойства процесса x в конечный момент ϑ , а именно попадание математического ожидания $m(\vartheta)$ и ковариационной матрицы $D(\vartheta)$ в ε -окрестности целевых множеств \mathcal{M} и \mathcal{D} . В процессе движения искомая программа формируется позиционно (по принципу обратной связи) на основе информации о сигнале $y(t)$. В силу специфики оценки (1.4) следует требовать, чтобы вероятность искомого события была близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованных с N параметрах алгоритма.

2. Редукция исходной задачи

Сведем сформулированную выше задачу наведения для СДУ к двум задачам для систем ОДУ. В силу линейности исходной системы математическое ожидание $m(t)$ зависит только от $u_1(t)$; его динамика описывается уравнением

$$\dot{m}(t) = A(t)m(t) + B_1(t)u_1(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad m(t_0) = m_0 \in \mathcal{M}_0. \quad (2.1)$$

Полагаем, что измерению доступны N ($N > 1$) траекторий $x^r(t)$, $r \in [1 : N]$ исходного СДУ, тогда, по условию задачи наведения, известны значения сигнала (1.3) $y^r(t) = Q(t)x^r(t)$.

Сигнал о траектории уравнения (2.1) обозначим через $y_m(t) = Q_m(t)m(t)$; его оценку, формируемую из информации об y^r , $r \in [1 : N]$, — через $y_m^N(t)$. Последняя конструируется следующим образом:

$$y_m^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N y^r(t) = Q(t)m^N(t), \quad m^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x^r(t). \quad (2.2)$$

Очевидно, $Q_m(t) = Q(t)$ и для конечного набора моментов времени $\tau_i \in T$, $i \in [1 : l]$, с учетом соотношения (1.4) выполняется

$$P(\forall i \in [1 : l] \ \|y_m^N(\tau_i) - y_m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^q} \leq C_1 h(N)) = 1 - g(N), \quad (2.3)$$

где константа C_1 может быть выписана явно. Напомним, что \mathcal{M} — целевое множество для траектории уравнения (2.1).

Ковариационная матрица $D(t)$ зависит только от $U_2(t)$; ее динамика описывается с помощью так называемого уравнения метода моментов [8] в следующем виде:

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t) + D(t)A^*(t) + B_2(t)U_2(t)U_2^*(t)B_2^*(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad D(t_0) = D_0 \in \mathcal{D}_0. \quad (2.4)$$

В данном случае матричное уравнение (2.4) удобно переписать в виде более традиционно для рассматриваемой задачи векторного уравнения, размерность которого, с учетом симметричности матрицы $D(t)$, определяется как $n_d = (n^2 + n)/2$. Введем вектор $d(t) = \{d_s(t)\}$, $s \in [1 : n_d]$, координаты которого находятся по элементам матрицы $D(t) = \{d_{ij}(t)\}$, $i, j \in [1 : n]$:

$$d_s(t) = d_{ij}(t), \quad i \leq j, \quad s = (n - i/2)(i - 1) + j. \quad (2.5)$$

Фактически вектор $d(t)$ состоит из последовательно записанных и пронумерованных элементов матрицы $D(t)$, взятых построчно, начиная с элемента, расположенного на главной диагонали. Выполняя стандартные матричные операции, по $A(t)$ и $B_2(t)$ формируем непрерывные матрицы $\bar{A}(t): T \rightarrow \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ и $\bar{B}(t): T \rightarrow \mathbb{R}^{n_d \times k}$, посредством которых система (2.4) переписывается в виде

$$\dot{d}(t) = \bar{A}(t)d(t) + \bar{B}(t)v(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad d(t_0) = d_0 \in \mathcal{D}_0. \quad (2.6)$$

Начальное состояние d_0 получено по D_0 , обозначение для множества \mathcal{D}_0 не меняем. Произведение диагональных матриц $U_2(t)U_2^*(t)$ приводит к появлению управляющего вектора $v(t) = (u_{21}^2(t), u_{22}^2(t), \dots, u_{2k}^2(t))$, элементы которого для всех $t \in T$ принимают значения из некоторого выпуклого компакта $S_v \in \mathbb{R}^k$.

Сигнал о траектории уравнения (2.6) обозначим через $y_d(t) = Q_d(t)d(t)$; его оценку, формируемую из информации об y^r , $r \in [1 : N]$, — через $y_d^N(t)$. Последняя конструируется из следующего соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (y^r(t) - y_m^N(t))(y^r(t) - y_m^N(t))^* \\ &= Q(t) \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (x^r(t) - m^N(t))(x^r(t) - m^N(t))^* Q^*(t) = Q(t)D^N(t)Q^*(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $D^N(t)$ — стандартная оценка ковариационной матрицы $D(t)$ при неизвестном (оцениваемом через $m^N(t)$) математическом ожидании $m(t)$. Посредством учитывающих симметричность матрицы (2.7) алгебраических преобразований (опустим их ввиду громоздкости выкладок) выражение $Q(t)D^N(t)Q^*(t)$ трансформируется в $y_d^N(t) = Q_d(t)d^N(t)$, где $Q_d(t)$ — непрерывная

матрица размерности $n_q \times n_d$, $n_q = (q^2 + q)/2$, $d^N(t)$ — вектор размерности n_d , извлеченный из $D^N(t)$ по правилу (2.5). Очевидно, для конечного набора моментов времени $\tau_i \in T$, $i \in [1 : l]$, выполняется соотношение типа (1.4):

$$P(\forall i \in [1 : l] \quad \|y_d^N(\tau_i) - y_d(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n_d}} \leq C_2 h(N)) = 1 - g(N), \quad (2.8)$$

где константа C_2 может быть выписана явно. Будем обозначать целевое множество для траектории уравнения (2.6) прежним символом \mathcal{D} .

Таким образом, исходная задача 1 гарантированного позиционного ε -наведения для СДУ может быть переформулирована следующим образом.

Задача 2. Требуется по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такие программы управления $u_1(\cdot)$ уравнением (2.1) и $v(\cdot)$ уравнением (2.6), что, каковы бы ни были начальные состояния m_0 из множества \mathcal{M}_0 и d_0 из множества \mathcal{D}_0 , траектории (2.1) и (2.6) в конечный момент ϑ попадают с вероятностью, близкой к 1, в ε -окрестности целевых множеств \mathcal{M} и \mathcal{D} соответственно.

Искомые программы формируются на основе оценок сигналов y_m и y_d , удовлетворяющих соотношениям (2.3) и (2.8), и фактически определяют управления в СДУ (1.1). Зависимость количества необходимых для оценивания траекторий N от величины ε будет приведена ниже. Из процедуры построения задачи 2 следует

Теорема 1. *Задача 1 и задача 2 эквивалентны.*

Таким образом, для решения задачи 1 следует установить условия совместной разрешимости задач ε -наведения для ОДУ (2.1) и (2.6), т. е. условия разрешимости задачи 2, а также определить вид согласования параметров N и ε .

3. Метод программных пакетов: краткая сводка результатов для ОДУ

Кратко изложим суть подхода А. В. Кряжимского и Ю. С. Осипова к решению задачи позиционного наведения при дефиците информации для линейного ОДУ [5–7].

Рассматривается динамическая управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \quad (3.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ (P — выпуклый компакт), $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $f(\cdot)$ — непрерывные матричные функции размерности $n \times n$, $n \times m$ и $n \times 1$ соответственно, X_0 — конечное множество возможных начальных состояний. Истинное начальное состояние системы считается неизвестным. Заданы выпуклое замкнутое целевое множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывная матричная функция наблюдения $Q(t)$ размерности $q \times n$.

Задача гарантированного позиционного ε -наведения состоит в формировании по сигналу $y(t) = Q(t)x(t)$ программы управления, гарантирующей для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ попадание состояния $x(\vartheta)$ системы в конечный момент ϑ в ε -окрестность целевого множества \mathcal{M} . Поиск решения осуществляется в классе позиционных стратегий управления с памятью, коррекция значений программы $u(\cdot)$ происходит в заранее заданные моменты. В работе [6] устанавливается эквивалентность сформулированной задачи позиционного управления так называемой задаче пакетного наведения; терминология последней и условия разрешимости обсуждаются в [7].

Рассматривается однородная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0 \in X_0;$$

ее фундаментальная матрица обозначается через $F(\cdot, \cdot)$. Для каждого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ *однородным сигналом*, соответствующим x_0 , называется функция

$g_{x_0}(t) = Q(t)F(t, t_0)x_0, t \in [t_0, \vartheta]$. Вводится множество всех допустимых начальных состояний x_0 , соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени τ : $X_0(\tau|g(\cdot)) = \{x_0 \in X_0: g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0, \tau]} = g(\cdot)|_{[t_0, \tau]}\}$, где $g(\cdot)|_{[t_0, \tau]}$ — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[t_0, \tau]$.

Пакетом программ называется семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$, удовлетворяющее условию неупреждаемости: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$. Пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является наводящим, если для любого $x_0 \in X_0$ движение из x_0 , соответствующее $u_{x_0}(\cdot)$, в момент ϑ попадает в точности на целевое множество \mathcal{M} . Если существует наводящий пакет программ, то считаем, что разрешима идеализированная задача пакетного наведения [5; 6], соответствующая исходной задаче гарантирующего позиционного управления. Отметим, что в этих задачах предполагается, что сигнал известен точно.

Пусть G — множество всех однородных сигналов (их количество не превышает числа элементов множества X_0). Вводится множество $G_0(g(\cdot))$ однородных сигналов, совпадающих с некоторым $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности начального момента t_0 . Первым моментом расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$ называется момент

$$\tau_1(g(\cdot)) = \max \left\{ \tau \in [t_0, \vartheta]: \max_{g'(\cdot) \in G_0(g(\cdot))} \max_{t \in [t_0, \tau]} \|g'(t) - g(t)\|_{\mathbb{R}^q} = 0 \right\}.$$

Если $\tau_1(g(\cdot)) < \vartheta$, то по аналогии с $G_0(g(\cdot))$ вводится множество $G_1(g(\cdot))$ всех однородных сигналов из $G_0(g(\cdot))$, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности момента расслоения $\tau_1(g(\cdot))$. Фактически разность $G_0(g(\cdot)) \setminus G_1(g(\cdot))$ информирует о количестве сигналов, переставших совпадать с $g(\cdot)$ после $\tau_1(g(\cdot))$. По аналогии с $\tau_1(g(\cdot))$ определяется второй момент расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$ и т. д. Наконец, вводится множество всех моментов расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$: $T(g(\cdot)) = \{\tau_j(g(\cdot)): j = 1, \dots, k_g\}$, $k_g \geq 1$, $\tau_{k_g}(g(\cdot)) = \vartheta$. Затем определяется упорядоченное по возрастанию множество всех моментов расслоения всех однородных сигналов (в [7] показано, что это и есть возможные моменты переключения “идеальной” наводящей программы): $T = \bigcup_{g(\cdot) \in G} T(g(\cdot))$, $T = \{\tau_1, \dots, \tau_K\}$, $K \leq \sum_{g(\cdot) \in G} k_{g(\cdot)}$ — количество элементов множества T . Очевидно, множества $T(g(\cdot))$ и T конечны ввиду конечности множеств X_0 и G . Для каждого $k = 1, \dots, K$ множество $\mathcal{X}_0(\tau_k) = \{X_0(\tau_k|g(\cdot)): g(\cdot) \in G\}$ называется кластерной позицией в момент τ_k , а каждый его элемент X_{0k} — кластером начальных состояний в этот момент.

Описанные конструкции используются для характеристики пакетов программ. Далее, в [7] через введение вспомогательной расширенной задачи программного наведения для системы, состоящей из экземпляров системы (3.1), параметризованных допустимыми начальными состояниями, получен критерий разрешимости исходной задачи, сводящийся к решению конечномерной оптимизационной задачи. Сформулируем основной результат [7], по возможности не прибегая к терминологии расширенной задачи.

Теорема 2 [7, теорема 2]. *Задача пакетного наведения для системы (3.1) разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} & \sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}} \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) \leq 0, \\ \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) = & \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t_0)x_0 \rangle + \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} B^*(s)F^*(\vartheta, s)l_{x_0} | P \right) ds \\ & + \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle \sum_{x_0 \in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta, s)f(s) \right\rangle ds - \sum_{x_0 \in X_0} \rho^+(l_{x_0} | \mathcal{M}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ — параметризованное допустимыми начальными состояниями семейство векторов из \mathbb{R}^n (количество векторов совпадает с числом элементов X_0); \mathcal{S} — множество се-

мейств $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ таких, что $\sum_{x_0 \in X_0} \|l_{x_0}\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 1$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве; $\rho^-(\cdot|P)$ — нижняя опорная функция множества P и $\rho^+(\cdot|\mathcal{M})$ — верхняя опорная функция множества \mathcal{M} .

4. Свойства статистических оценок

Лемма. Для конечного набора некоторых моментов времени $\tau_i \in T$, $i \in [1 : l]$, стандартные оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$, построенные по N ($N > 1$) реализациям $x^1(\tau_i), x^2(\tau_i), \dots, x^N(\tau_i)$ случайных величин $x(\tau_i)$ по следующим правилам [11]:

$$m_i^N = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x^r(\tau_i), \quad (4.1)$$

$$D_i^N = \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (x^r(\tau_i) - m_i^N)(x^r(\tau_i) - m_i^N)^*, \quad (4.2)$$

обеспечивают выполнение свойства (1.4) (следовательно, (2.3) и (2.8)).

Доказательство. Приведем доказательство леммы для случая $n = 1$ (рассуждения для $n > 1$ аналогичны, однако формулы слишком громоздки). В этом случае скалярная величина $x(\tau_i)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m(\tau_i)$ и дисперсией $D(\tau_i)$. Рассмотрим оценку (4.1). Покажем, что она обладает следующим свойством:

$$P(\forall i \in [1 : l] |m_i^N - m(\tau_i)| \leq h_m(N)) = 1 - g_m(N); \quad h_m(N), g_m(N) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Сначала докажем, что

$$\forall i \in [1 : l] P(|m_i^N - m(\tau_i)| \leq h_m(N)) = 1 - f_m(N); \quad f_m(N) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Как известно [11], случайная величина $\xi = (m_i^N - m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N}$ имеет t -распределение (Стьюдента) с $N - 1$ степенями свободы, которое при $N > 30$ близко к стандартному нормальному закону $N(0, 1)$. Наша цель — модифицировать процедуру оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии таким образом, чтобы выполнялось соотношение (4.4).

Рассмотрим следующее выражение при $0 < \gamma < 1/2$:

$$\begin{aligned} P\left(-N^\gamma \leq (m_i^N - m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N} \leq N^\gamma\right) &= P\left(-N^\gamma\sqrt{D_i^N/N} \leq m_i^N - m(\tau_i) \leq N^\gamma\sqrt{D_i^N/N}\right) \\ &= P\left(|m_i^N - m(\tau_i)| \leq N^\gamma\sqrt{D_i^N/N}\right) = 1 - f_m(N). \end{aligned}$$

Можно считать, что в (4.4) $h_m(N) = C_1 N^{\gamma-1/2}$ (здесь и ниже через C_i обозначаем вспомогательные константы, которые могут быть выписаны явно). С другой стороны,

$$\begin{aligned} P\left(-N^\gamma \leq (m_i^N - m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N} \leq N^\gamma\right) &= 2(F_{t,N-1}(N^\gamma) - F_{t,N-1}(0)) = 2F_{t,N-1}(N^\gamma) - 1 \\ &= 2(F_{t,N-1}(N^\gamma) - \Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N})) + 2\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}) - 1 \\ &\geq 2\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}) - 1 - 2|F_{t,N-1}(N^\gamma) - \Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N})| \\ &= 1 - 2(1 - \Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N})) - 2|F_{t,N-1}(N^\gamma) - \Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N})|. \end{aligned}$$

Здесь $F_{t,N-1}(x)$ — функция вероятности t -распределения с $N - 1$ степенями свободы, $F_{t,N-1}(0) = 1/2$; $\Phi(x)$ — функция нормального распределения, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x 1/\sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} dy$.

Используем неравенство, уточняющее близость функций $F_{t,N-1}(x)$ и $\Phi(x)$ при больших N , в виде [12]

$$|F_{t,N-1}(x) - \Phi(x\sqrt{1-2/N})| \leq C_2/N, \quad (4.5)$$

а также асимптотику нормального распределения при $x \rightarrow \infty$ в виде [11]

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + o\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x}\right). \quad (4.6)$$

Получаем

$$P(-N^\gamma \leq (m_i^N - m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N} \leq N^\gamma) \geq 1 - 2C_2/N - C_3e^{-N^{2\gamma}/2}/N^\gamma + o(e^{-N^{2\gamma}/2}/N^\gamma).$$

Поскольку асимптотика нормального распределения (4.6) подавляется погрешностью нормальной аппроксимации (4.5), то можно принять (см. (4.4)), что $f_m(N) \leq C_4/N$. Свойство (4.4) выполняется. Обозначим

$$A_{mi} = \{|m_i^N - m(\tau_i)| \leq h_m(N)\}, \quad P(A_{mi}) = 1 - f_m(N) \quad \forall i \in [1 : l].$$

Далее,

$$\begin{aligned} & P(\forall i \in [1 : l] |m_i^N - m(\tau_i)| \leq h_m(N)) = P(A_{m1}A_{m2} \dots A_{ml}) \\ & = P(A_{m1})P(A_{m2}|A_{m1})P(A_{m3}|A_{m1}A_{m2}) \dots P\left(A_{ml} \mid \prod_{k=1}^{l-1} A_{mk}\right) \geq (1 - f_m(N))^l \geq (1 - lf_m(N)). \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство опирается на предположение о том, что все условные вероятности не меньше соответствующих безусловных ввиду непрерывности траекторий рассматриваемого процесса, а последнее следует из малости $f_m(N)$. Очевидно, можно считать, что в (4.3) $g_m(N) = lf_m(N) = lC_4/N$.

Доказательство соответствующего свойства оценки (4.2), а именно

$$P(\forall i \in [1 : l] |D_i^N - D(\tau_i)| \leq h_d(N)) = 1 - g_d(N); \quad h_d(N), g_d(N) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

повторяет, с незначительными изменениями, доказательство аналогичного утверждения из [9], где показано, что $h_d(N) = C_5N^{\gamma-1/2}$, $g_d(N) = lC_6N^{-1/2-3\gamma}$.

Сопоставляя (4.3) и (4.7), заключаем, что в соотношениях (1.4), (2.3) и (2.8) можно рассматривать единые параметры

$$h(N) = C_hN^{\gamma-1/2}, \quad g(N) = C_gN^{\max\{-1, -1/2-3\gamma\}}, \quad (4.8)$$

где C_h, C_g — константы, которые могут быть выписаны явно. Например, выбирая значение $\gamma = 1/6$, получим $h(N) = C_hN^{-1/3}$, $g(N) = C_g/N$.

5. Критерий разрешимости задач 1 и 2. Условия согласования параметров

Дополнительно определим несколько понятий для ОДУ (2.1) и (2.6) на основе материала разд. 3. Пусть $G^1 = \{g^1(\cdot)\}$ и $G^2 = \{g^2(\cdot)\}$ — множества всех однородных сигналов для (2.1) и (2.6) соответственно. Множества всех моментов расслоения всех однородных сигналов для (2.1) и (2.6) обозначим через $T^1 = \{\tau_1^1, \dots, \tau_{K_1}^1\}$ и $T^2 = \{\tau_1^2, \dots, \tau_{K_2}^2\}$; кластерные позиции и кластеры начальных состояний в моменты τ_k^1 и τ_k^2 соответственно — через $M_0(\tau_k^1)$ и M_{0k} , $D_0(\tau_k^2)$ и D_{0k} . Напомним, что по определению последний момент расслоения всегда совпадает с ϑ : $\tau_{K_1}^1 = \tau_{K_2}^2 = \vartheta$. Для упрощения изложения считаем $\tau_0^1 = \tau_0^2 = t_0$ (t_0 не является моментом расслоения). Введем множества пар однородных сигналов, разделяемых (в смысле определенных разд. 3) в моменты τ_k^1 , $k \in [0 : K_1 - 1]$ и τ_k^2 , $k \in [0 : K_2 - 1]$: $G_k^{1*} = \{(g_i^1(\tau_k^1), g_j^1(\tau_k^1))\}$,

$G_k^{2*} = \{(g_i^2(\tau_k^2), g_j^2(\tau_k^2))\}$, $i \neq j$. Момент из промежутка $(\tau_k^1, \tau_k^1 + C\varepsilon]$ ($\tau_k^1 + C\varepsilon < \tau_{k+1}^1$, смысл константы C уточняется ниже), в который различимы все пары из G_k^{1*} , обозначим через τ_k^{1*} и будем называть моментом различения всех разделяемых в момент τ_k^{1*} сигналов. Аналогично определяем момент различения τ_k^{2*} . Очевидно, можно считать, что для всех $\tau_k^{1*} \in T^1$, $k \in [0 : K_1 - 1]$ и $\tau_k^{2*} \in T^2$, $k \in [0 : K_2 - 1]$ соответствующие им моменты τ_k^{1*} и τ_k^{2*} определяются однозначно; в эти моменты значения сигналов во всех парах из G_k^{1*} и G_k^{2*} различны. Действительно, если предположить, что через какое-то время после разделения сигналы снова совпадают (что определяется видом матрицы наблюдения Q), то из конечности числа сигналов, их непрерывности и определения моментов расслоения следует существование минимального момента из $(\tau_k^1, \tau_k^1 + C\varepsilon]$ ($(\tau_k^2, \tau_k^2 + C\varepsilon]$), до которого не совпадают сигналы в любой паре из G_k^{1*} (G_k^{2*}) соответственно. Множество всех таких моментов различения для (2.1) и (2.6)

$$T^* = T^{1*} \cup T^{2*}, \quad T^{1*} = \{\tau_0^{1*}, \dots, \tau_{K_1-1}^{1*}\}, \quad T^{2*} = \{\tau_0^{2*}, \dots, \tau_{K_2-1}^{2*}\} \quad (5.1)$$

определяет как упоминавшееся выше множество из l ($l < K_1 + K_2$) моментов, когда измеряются N траекторий исходного процесса, так и множество возможных моментов переключения позиционного управления. Отметим, что случай $T^* = \emptyset$ имеет место, только если все сигналы совпадают на всем промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Сформулируем согласно (3.2) условия разрешимости задачи наведения для (2.1):

$$\begin{aligned} \sup_{(l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \in \mathcal{S}_1} \gamma_1((l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}) &\leq 0, \\ \gamma_1((l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}) &= \sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \langle l_{m_0}, F_1(\vartheta, t_0) m_0 \rangle + \sum_{k=1}^{K_1} \int_{\tau_{k-1}^1}^{\tau_k^1} \sum_{M_{0k} \in \mathcal{M}_0(\tau_k^1)} \rho^- \left(\sum_{m_0 \in M_{0k}} B_1^*(s) F_1^*(\vartheta, s) l_{m_0} | S_{u1} \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle \sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} l_{m_0}, F_1(\vartheta, s) f(s) \right\rangle ds - \sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \rho^+(l_{m_0} | \mathcal{M}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

и условия разрешимости задачи наведения для (2.6):

$$\begin{aligned} \sup_{(l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \in \mathcal{S}_2} \gamma_2((l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}) &\leq 0, \quad \gamma_2((l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}) = \sum_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \langle l_{d_0}, F_2(\vartheta, t_0) d_0 \rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K_2} \int_{\tau_{k-1}^2}^{\tau_k^2} \sum_{D_{0k} \in \mathcal{D}_0(\tau_k^2)} \rho^- \left(\sum_{d_0 \in D_{0k}} \bar{B}^*(s) F_2^*(\vartheta, s) l_{d_0} | S_v \right) ds - \sum_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \rho^+(l_{d_0} | \mathcal{D}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $(l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}$, $(l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}$ — параметризованные соответствующими начальными состояниями семейства векторов; \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 — множества семейств $(l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}$, $\sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \|l_{m_0}\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 1$ и $(l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}$, $\sum_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \|l_{d_0}\|_{\mathbb{R}^{n_d}}^2 = 1$; $F_1(\cdot, \cdot)$ и $F_2(\cdot, \cdot)$ — фундаментальные матрицы систем (2.1) и (2.6). Докажем следующее утверждение, фактически являющееся основным результатом работы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5.2) и (5.3), информация об N траекториях СДУ (1.1) поступает в моменты, составляющие множество T^* (5.1), константы C_h , C_g и γ взяты из леммы (см. (4.8)) и

$$N > (2C_h/\rho(\varepsilon))^{2/(1-2\gamma)}, \quad (5.4)$$

$$\rho(\varepsilon) = \min \left\{ \min_{\tau_k^{1*} \in T^{1*}, (g_i^1, g_j^1) \in G_k^{1*}} \|g_i^1(\tau_k^{1*}) - g_j^1(\tau_k^{1*})\|_{\mathbb{R}^q}, \min_{\tau_k^{2*} \in T^{2*}, (g_i^2, g_j^2) \in G_k^{2*}} \|g_i^2(\tau_k^{2*}) - g_j^2(\tau_k^{2*})\|_{\mathbb{R}^{n_q}} \right\}.$$

Тогда с вероятностью $1 - C_g N^{\max\{-1, -1/2-3\gamma\}}$ задача 1 ε -наведения разрешима и ε -наводящий программный пакет реализуем.

Доказательство. Выполнение условий (5.2) и (5.3) обеспечивает разрешимость идеализированных задач пакетного наведения, соответствующих задачам гарантирующего позиционного управления, составляющих задачу 2. Таким образом, существуют $(u_{1m_0}^*(\cdot))_{m_0 \in \mathcal{M}_0}$ и $(v_{d_0}^*(\cdot))_{d_0 \in \mathcal{D}_0}$ — параметризованные начальными состояниями пакеты программ, решающие идеализированные задачи пакетного наведения для систем (2.1) и (2.6). Решение задач гарантированного ε -наведения предполагает возможность синтеза по $u_{1m_0}^*$ и $v_{d_0}^*$ соответствующих позиционных управлений, приводящих в ε -окрестности целевых множеств \mathcal{M} и \mathcal{D} , на основе поступающей информации об оценках (2.2) и (2.7), построенных по реализациям сигнала (1.3). Тем самым согласно теореме 1 будет построен ε -наводящий программный пакет, решающий задачу 1 для системы (1.1).

Уточним сказанное на примере системы (2.1), которая стартует в момент t_0 из некоторого неизвестного начального состояния $\hat{m}_0 \in \mathcal{M}_0$, наводящую программу для которого обозначим через $u_{1\hat{m}_0}^*(\cdot)$. Пусть T^{1*} содержит более одного момента различения. Позиционное управление $\hat{u}_1^*(\cdot)$ конструируем следующим образом. До начала движения принимаем решение применять в (2.1) тестовое управление $\hat{u}_1^*(t) = \hat{u}_{10}^* \in S_{u1}$, $t \in [t_0, \tau_0^{1*}]$. В момент начального различения сигналов τ_0^{1*} измеряем N траекторий (1.1) и по ним строим оценку $y_m^N(\tau_0^{1*})$ реализовавшегося сигнала $y_m(\tau_0^{1*}) = Q_m(\tau_0^{1*})m(\tau_0^{1*})$. Используя формулу Коши, выражаем однородный сигнал

$$Q_m(\tau_0^{1*})F_1(\tau_0^{1*}, t_0)\hat{m}_0 = y_m(\tau_0^{1*}) - Q_m(\tau_0^{1*}) \int_{t_0}^{\tau_0^{1*}} F_1(\tau_0^{1*}, \tau)(B_1(\tau)\hat{u}_{10}^* + f(\tau)) d\tau.$$

Теперь по оценке $y_m^N(\tau_0^{1*})$ определим кластер начальных состояний M_{0k} , содержащий \hat{m}_0 . Принимая во внимание (2.3) и (4.8), имеем $\|y_m^N(\tau_0^{1*}) - y_m(\tau_0^{1*})\|_{\mathbb{R}^q} \leq h(N)$. Тогда, если

$$h(N) < \rho_0^1(\varepsilon)/2 = \min_{(g_i^1, g_j^1) \in G_0^{1*}} \|g_i^1(\tau_0^{1*}) - g_j^1(\tau_0^{1*})\|_{\mathbb{R}^q}/2, \quad (5.5)$$

то кластер $M_{01} = \{m_0 \in \mathcal{M}_0 : g_{m_0}(\cdot)|_{[t_0, \tau_1^1]} = g_{\hat{m}_0}(\cdot)|_{[t_0, \tau_1^1]}\}$ однозначно определяется (поскольку до момента τ_1^1 никаких расслоений однородного сигнала нет). Следовательно, в каждый момент $t \in [\tau_0^{1*}, \tau_1^{1*}]$ будем применять управление $u_{1M_{01}}^*(t)$ из пакета $(u_{1m_0}^*(\cdot))_{m_0 \in \mathcal{M}_0}$, соответствующее кластеру M_{01} , т. е. фактически управление $u_{1\hat{m}_0}^*(t)$. Аналогичную процедуру применяем для всех моментов различения сигналов τ_k^{1*} . Очевидно, построенное таким образом управление $\hat{u}_1^*(t)$ отличается от наводящей программы $u_{1\hat{m}_0}^*(t)$ только максимум на K_1 отрезках, каждый из которых имеет длину не более $C\varepsilon$. Обозначим через $m^*(\cdot)$ и $\hat{m}^*(\cdot)$ решения (2.1) для начального состояния \hat{m}_0 , соответствующие управлениям $u_{1\hat{m}_0}^*(t)$ и $\hat{u}_1^*(t)$. Отметим, что $m^*(\vartheta) \in \mathcal{M}$. Учитывая ограниченность всех функций и управления в (2.1), оценим величину

$$\|\hat{m}^*(\vartheta) - m^*(\vartheta)\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int_{t_0}^{\vartheta} F_1(\vartheta, \tau)B_1(\tau)(\hat{u}_1^*(\tau) - u_{1\hat{m}_0}^*(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \overline{K}C\varepsilon,$$

где константа \overline{K} может быть выписана явно. Отсюда, выбирая $C < 1/\overline{K}$, гарантируем $\|\hat{m}^*(\vartheta) - m^*(\vartheta)\| < \varepsilon$, т. е. попадание $\hat{m}^*(\vartheta)$ в ε -окрестность целевого множества \mathcal{M} .

Для системы (2.6) все рассуждения аналогичны. Вид функции $\rho(\varepsilon)$ (входящие в нее минимумы существуют ввиду конечности всех задействованных множеств) объясняется необходимостью требовать оценку типа (5.5) для каждого $\tau_k^* \in T^*$. Таким образом, получаем $h(N) < \rho(\varepsilon)/2$. Отсюда и из (4.8) следует соотношение (5.4), связывающее N и ε . Наконец, в силу (4.8) вся совокупность действий, описанных выше, включая ε -наведение решений (2.1) и (2.6), следовательно и (1.1), выполняется с вероятностью $1 - C_g N^{\max\{-1, -1/2-3\gamma\}}$, стремящейся к 1 при $N \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer Verlag, 1988. 517 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
6. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
7. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
8. **Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.** Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978. 272 с.
9. **Розенберг В.Л.** Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 76–87.
10. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
11. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.
12. **Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N.** Continuous univariate distributions. New York: John Wiley & Sons, 1995. Vol. 2. 2nd edition. 717 p.

Розенберг Валерий Львович

канд. физ.-мат. наук

старший научн. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: rozen@imm.uran.ru

Поступила 12.05.2015.

УДК 512.54+519.17

**КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА СИММЕТРИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ ЛОКАЛЬНО
КОНЕЧНОГО ДЕРЕВА ПОСРЕДСТВОМ КОНЕЧНОГО ГРАФА¹****В. И. Трофимов**

Доказывается конечность числа симметрических расширений локально конечного дерева посредством конечного графа. Более того, доказывается конечность числа попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений локально конечного дерева посредством конечного графа.

Ключевые слова: дерево, симметрическое расширение посредством конечного графа.

V. I. Trofimov. The finiteness of the number of symmetrical extensions of a locally finite tree by a finite graph.

We prove that there are only finitely many symmetrical extensions of a locally finite tree by a finite graph. Moreover, we prove that there are only finitely many pairwise nonequivalent realizations of symmetrical extensions of a locally finite tree by a finite graph.

Keywords: tree, symmetrical extension by a finite graph.

1. Введение

Используемая в настоящей работе терминология совпадает с терминологией, используемой в [1]. В частности, под графом всюду далее понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер.

Напомним (см. [2; 1]), что связный граф Σ называется *симметрическим расширением* графа Γ посредством графа Δ , если найдутся такие вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Σ и ее система импримитивности σ , что, во-первых, существует изоморфизм φ графа Σ/σ на граф Γ и, во-вторых, подграф графа Σ , порожденный блоком σ , изоморфен Δ (ясно, что различные блоки σ порождают изоморфные подграфы). Четверку $(\Sigma, G, \sigma, \varphi)$ с указанными компонентами мы будем при этом называть *реализацией симметрического расширения* графа Γ посредством графа Δ . Ясно, что если существует симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ , то графы Γ и Δ допускают вершинно-транзитивные группы автоморфизмов, причем граф Γ связан.

Известно (см. [2; 3]), что существуют локально конечные (т. е. с конечными валентностями вершин) графы Γ , допускающие бесконечно много симметрических расширений посредством одного и того же конечного графа Δ . Однако вопрос о конечности числа симметрических расширений заданного локально конечного графа Γ посредством заданного конечного графа Δ открыт даже для многих бесконечных графов Γ весьма простого вида (см. [2]).

В [4] автором был анонсирован следующий результат.

Теорема 1. Пусть Γ — локально конечное дерево и Δ — конечный граф. Тогда имеется лишь конечное число симметрических расширений Γ посредством Δ .

Теорема 1 доказывается несложно, но не является очевидной (как может показаться на первый взгляд). Она является непосредственным следствием формулируемой и доказываемой

¹Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 15-16-1-5) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

ниже теоремы 2. Напомним (см. [1]), что реализации $(\Sigma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\Sigma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ называются *эквивалентными*, если найдется изоморфизм графа Σ_1 на граф Σ_2 , переводящий σ_1 в σ_2 . Про любой изоморфизм с этим свойством говорят, что он *осуществляет эквивалентность* реализаций $(\Sigma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\Sigma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений Γ посредством Δ .

Теорема 2. Пусть Γ — локально конечное дерево и Δ — конечный граф. Тогда имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ .

З а м е ч а н и е 1. Из приводимого далее доказательства теоремы 2 несложно получить верхнюю оценку для числа попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений дерева Γ посредством графа Δ .

З а м е ч а н и е 2. Метод доказательства теоремы 2 может быть адаптирован для получения аналога теоремы 2 для графов Γ несколько более общего вида, чем локально конечные деревья.

З а м е ч а н и е 3. Используя [5, предложение 3], легко доказать, что для каждого регулярного дерева T валентности > 1 и каждого конечного вершинно-симметрического графа Δ с $|V(\Delta)| > 1$ имеется бесконечно много попарно не являющихся строго эквивалентными реализаций симметрических расширений T посредством Δ . (Определение отношения строгой эквивалентности на реализациях симметрических расширений графов см. в [5, разд. 3].)

Как уже было указано, в настоящей работе мы придерживаемся терминологии работы [1]. Кроме того, для связного графа Γ через $d_\Gamma(\cdot, \cdot)$ обозначается обычная метрика на $V(\Gamma)$, а для обозначения графического равенства слов W_1, W_2 (над некоторым алфавитом) используется запись $W_1 \equiv W_2$.

2. Доказательство теоремы 2

Как было замечено выше, в условиях теоремы 2 из существования симметрического расширения Γ посредством Δ следует, что Γ — регулярное дерево. Поэтому, не теряя общности, будем предполагать, что Γ — регулярное дерево некоторой (конечной) валентности $d > 1$.

Пусть $\{(\Sigma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i) : i \in I\}$ — некоторая система представителей (всех) классов эквивалентных между собой реализаций симметрических расширений дерева Γ посредством графа Δ . Мы покажем, что множество I конечно (более того, приводимое доказательство будет давать верхнюю оценку для $|I|$), и тем самым докажем теорему 2.

Пусть i — произвольный элемент множества I . Группа G_i индуцирует вершинно-транзитивную группу $\bar{G}_i := G_i^{\sigma_i}$ автоморфизмов регулярного дерева $T_i := \Sigma_i/\sigma_i$ валентности d .

Зафиксируем некоторую вершину v_i дерева T_i . Пусть $\{O_{i,j}^+, O_{i,j}^- : 1 \leq j \leq m_i\}$ — множество всех тех орбит стабилизатора вершины v_i в группе \bar{G}_i на множестве $T_i(v_i)$ (т. е. на множестве смежных с v_i вершин дерева T_i), которые не являются самоспаренными в \bar{G}_i . Здесь для каждого $1 \leq j \leq m_i$ через $O_{i,j}^-$ обозначена спаренная с $O_{i,j}^+$ в \bar{G}_i орбита, причем предполагается, что $|O_{i,j}^+| \geq |O_{i,j}^-|$. Пусть, кроме того, $\{O_{i,j} : 1 \leq j \leq n_i\}$ — множество всех тех орбит стабилизатора вершины v_i в группе \bar{G}_i на множестве $T_i(v_i)$, которые являются самоспаренными в \bar{G}_i . Можно предполагать, что $|O_{i,j_1}^+| \geq |O_{i,j_2}^+|$ при $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq m_i$ и что $|O_{i,j_1}^-| \geq |O_{i,j_2}^-|$ при $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq m_i$ и $|O_{i,j_1}^+| = |O_{i,j_2}^+|$. Вместе с тем можно предполагать, что $|O_{i,j_1}| \geq |O_{i,j_2}|$ при $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n_i$. Ясно, что

$$\sum_{1 \leq j \leq m_i} (|O_{i,j}^+| + |O_{i,j}^-|) + \sum_{1 \leq j \leq n_i} |O_{i,j}| = d.$$

Пусть j — произвольное целое положительное число, не превосходящее m_i , и пусть

$$O_{i,j}^+ = \{u_{i,j,1}^+, \dots, u_{i,j,l_{i,j}^+}^+\},$$

$$O_{i,j}^- = \{u_{i,j,1}^-, \dots, u_{i,j,l_{i,j}^-}^-\},$$

где, см. выше, $l_{i,j}^+ \geq l_{i,j}^-$. Для каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}^-$ зафиксируем в группе \bar{G}_i такой элемент $a_{i,j,k}$, что $a_{i,j,k}(u_{i,j,k}^-) = v_i$ и $a_{i,j,k}(v_i) = u_{i,j,k}^+$. Кроме того, для каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}^+ - l_{i,j}^-$ зафиксируем в группе \bar{G}_i такой элемент $b_{i,j,k}$, что $b_{i,j,k}(v_i) = u_{i,j,l_{i,j}^-+k}^+$.

Далее, пусть j — произвольное целое положительное число, не превосходящее n_i , и пусть

$$O_{i,j} = \{u_{i,j,1}, \dots, u_{i,j,l_{i,j}}\}.$$

Для каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}$ зафиксируем в группе \bar{G}_i такой элемент $c_{i,j,k}$, что $c_{i,j,k}(u_{i,j,k}) = v_i$ и $c_{i,j,k}(v_i) = u_{i,j,k}$.

Обозначим через \mathcal{W}_i множество всех слов (включая пустое слово нулевой длины) над алфавитом

$$\begin{aligned} M_i := & \{a_{i,j,k}, a_{i,j,k}^{-1} : 1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^-\} \cup \\ & \{b_{i,j,k} : 1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^+ - l_{i,j}^-\} \cup \\ & \{c_{i,j,k} : 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}\}, \end{aligned}$$

не содержащих подслов $a_{i,j,k}a_{i,j,k}^{-1}$, $a_{i,j,k}^{-1}a_{i,j,k}$ для $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^-$ и подслов $c_{i,j,k}c_{i,j,k}$ для $1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}$. Каждому слову W над алфавитом M_i естественным образом сопоставляется элемент группы \bar{G}_i (соответствующее W произведение элементов из M_i , рассматриваемых как элементы группы \bar{G}_i ; пустому слову сопоставляется единица группы \bar{G}_i), который мы, полагаясь на контекст, будем также обозначать через W . Отметим, что $T_i(v_i) = \{x(v_i) : x \in M_i\}$, причем для каждой вершины $v' \in T_i(v_i)$ существует единственный элемент $x \in M_i$ со свойством $x(v_i) = v'$.

Имеется своего рода естественная биекция η множества всех слов над алфавитом M_i на множество всех путей дерева T_i с началом v_i . (Путь дерева T_i мы определяем как такую последовательность его вершин (u_0, \dots, u_q) , где q — какое-либо целое неотрицательное число (называемое длиной пути), что $\{u_r, u_{r+1}\} \in E(T_i)$ для всех $0 \leq r < q$.) Эта биекция сопоставляет пустому слову путь (v_i) и сопоставляет произвольному слову $x_1 \dots x_q$ длины $q \geq 1$ (здесь $x_1, \dots, x_q \in M_i$) путь $(u_0 = v_i, u_1, \dots, u_q)$, где $u_r = x_1 \dots x_r(v_i)$ для каждого $1 \leq r \leq q$. Обратное отображение η^{-1} сопоставляет пути (v_i) пустое слово и сопоставляет произвольному пути $(u_0 = v_i, u_1, \dots, u_q)$ длины $q \geq 1$ слово $x_1 \dots x_q$, где $x_1, \dots, x_q \in M_i$ определяются следующим образом: x_1 есть единственный элемент из M_i со свойством $x_1(v_i) = u_1$; если для некоторого целого $1 < r \leq q$ уже определены x_1, \dots, x_{r-1} , причем $u_{r-1} = x_1 \dots x_{r-1}(v_i)$, то x_r есть элемент из M_i со свойством $u_r = x_1 \dots x_r(v_i)$, что однозначно определяет x_r в силу $u_r \in T_i(u_{r-1}) = T_i(x_1 \dots x_{r-1}(v_i)) = x_1 \dots x_{r-1}(T_i(v_i))$. Отметим, что каждое слово W над алфавитом M_i биекцией η отображается в путь, длина которого равна длине слова W . Кроме того, если слово W_1 над алфавитом M_i имеет в качестве начала слово W_2 (т. е. $W_1 \equiv W_2W_3$ для некоторого слова W_3), то путь $\eta(W_2)$ является началом пути $\eta(W_1)$.

Нетрудно убедиться, что ограничение η на множество \mathcal{W}_i есть биекция множества \mathcal{W}_i на множество геодезических путей дерева T_i с началом v_i . (Путь дерева T_i называется геодезическим путем или геодезической, если его длина равна расстоянию между его начальной и конечной вершинами в дереве T_i .) Действительно, если W — слово над алфавитом M_i , то $\eta(W)$ не является геодезической дерева T_i тогда и только тогда, когда W имеет вид $x_1 \dots x_q$, где $q \geq 2$ и $x_1, \dots, x_q \in M_i$, причем $x_{r-1}x_r(v_i) = v_i$ для некоторого $1 < r \leq q$. Но по выбору M_i равенство $xu(v_i)$ для $x, u \in M_i$ эквивалентно тому, что либо $x = a_{i,j,k}$ и $u = a_{i,j,k}^{-1}$ для некоторых $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^-$, либо $x = a_{i,j,k}^{-1}$ и $u = a_{i,j,k}$ для некоторых $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^-$, либо $x = c_{i,j,k}$ и $u = c_{i,j,k}$ для некоторых $1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}$. Таким образом, для слова W над алфавитом M_i путь $\eta(W)$ не является геодезической дерева T_i тогда и только тогда, когда $W \notin \mathcal{W}_i$, что доказывает требуемое.

Пусть γ — биекция множества вершин дерева T_i на множество геодезических дерева T_i с началом v_i , отображающая каждую вершину w дерева T_i в (единственную) геодезическую дерева T_i с началом v_i и концом w . Для произвольной вершины w дерева T_i положим

$$W_w := \eta^{-1}(\gamma(w)).$$

В дальнейшем нам потребуется лишь следующее непосредственно вытекающее из вышеизложенного утверждение относительно так определенной биекции $w \mapsto W_w$ множества вершин дерева T_i на множество слов \mathcal{W}_i .

Лемма 1. Пусть $i \in I$. Определенная выше биекция $w \mapsto W_w$ множества вершин дерева T_i на множество слов \mathcal{W}_i обладает следующими свойствами:

- (1) $W_w(v_i) = w$ для всех $w \in V(T_i)$;
- (2) для $w_1, w_2 \in V(T_i)$ условие $W_{w_2} \equiv W_{w_1}x$, где $x \in M_i$, эквивалентно тому, что $\{w_1, w_2\} \in E(T_i)$ и $d_{T_i}(v_i, w_2) = d_{T_i}(v_i, w_1) + 1$.

Из леммы 1 легко вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. Пусть $i', i'' \in I$ таковы, что

- (1) $m_{i'} = m_{i''}$ и $l_{i',j}^+ = l_{i'',j}^+, l_{i',j}^- = l_{i'',j}^-$ для каждого $1 \leq j \leq m_{i'}$;
- (2) $n_{i'} = n_{i''}$ и $l_{i',j} = l_{i'',j}$ для каждого $1 \leq j \leq n_{i'}$.

Для произвольного слова $W \in \mathcal{W}_{i'}$ обозначим через W^* слово из $\mathcal{W}_{i''}$, получающееся из W заменой в нем каждого $a_{i',j,k}$, где $1 \leq j \leq m_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}^-$, на $a_{i'',j,k}$, каждого $a_{i',j,k}^{-1}$, где $1 \leq j \leq m_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}^-$, на $a_{i'',j,k}^{-1}$, каждого $b_{i',j,k}$, где $1 \leq j \leq m_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}^+ - l_{i',j}^-$, на $b_{i'',j,k}$ и, наконец, каждого $c_{i',j,k}$, где $1 \leq j \leq n_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}$, на $c_{i'',j,k}$. Тогда отображение

$$\varphi_{i',i''} : V(T_{i'}) \rightarrow V(T_{i''}), \quad \varphi_{i',i''}(w) = W_w^*(v_{i''}) \text{ для } w \in V(T_{i'}),$$

есть изоморфизм дерева $T_{i'}$ на дерево $T_{i''}$.

Пусть вновь i — произвольный элемент множества I . Для каждого $1 \leq j \leq m_i$ и каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}^-$ зафиксируем в группе G_i такой элемент $\tilde{a}_{i,j,k}$, что $(\tilde{a}_{i,j,k})^{\sigma_i} = a_{i,j,k}$. Далее, для каждого $1 \leq j \leq m_i$ и каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}^+ - l_{i,j}^-$ зафиксируем в группе G_i такой элемент $\tilde{b}_{i,j,k}$, что $(\tilde{b}_{i,j,k})^{\sigma_i} = b_{i,j,k}$. Наконец, для каждого $1 \leq j \leq n_i$ и каждого $1 \leq k \leq l_{i,j}$ зафиксируем в группе G_i такой элемент $\tilde{c}_{i,j,k}$, что $(\tilde{c}_{i,j,k})^{\sigma_i} = c_{i,j,k}$. Для произвольного слова W над алфавитом M_i обозначим через \tilde{W} слово над алфавитом

$$\begin{aligned} & \{\tilde{a}_{i,j,k}, \tilde{a}_{i,j,k}^{-1} : 1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^-\} \cup \\ & \{\tilde{b}_{i,j,k} : 1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^+ - l_{i,j}^-\} \cup \\ & \{\tilde{c}_{i,j,k} : 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}\}, \end{aligned}$$

получающееся из W заменой в нем каждого $a_{i,j,k}$, где $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^-$, на $\tilde{a}_{i,j,k}$, каждого $a_{i,j,k}^{-1}$, где $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^-$, на $\tilde{a}_{i,j,k}^{-1}$, каждого $b_{i,j,k}$, где $1 \leq j \leq m_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}^+ - l_{i,j}^-$, на $\tilde{b}_{i,j,k}$ и, наконец, каждого $c_{i,j,k}$, где $1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k \leq l_{i,j}$, на $\tilde{c}_{i,j,k}$. Если W — слово над алфавитом M_i , то подобно тому, как слову W естественным образом сопоставляется элемент группы \tilde{G}_i , слову \tilde{W} естественным образом сопоставляется элемент группы G_i (соответствующее \tilde{W} произведение элементов), который мы, полагаясь на контекст, будем также обозначать через \tilde{W} .

Если число элементов в множестве I конечно, но достаточно велико, или, тем более, если множество I бесконечно, найдутся различные $i', i'' \in I$, для которых справедливы следующие утверждения:

- 1) $m_{i'} = m_{i''}$ и $l_{i',j}^+ = l_{i'',j}^+, l_{i',j}^- = l_{i'',j}^-$ для каждого $1 \leq j \leq m_{i'}$;
- 2) $n_{i'} = n_{i''}$ и $l_{i',j} = l_{i'',j}$ для каждого $1 \leq j \leq n_{i'}$;

3) имеется изоморфизм ψ подграфа графа $\Sigma_{i'}$, порожденного множеством вершин $\{x \in V(\Sigma_{i'}) : x^{\sigma_{i'}} \in \{v_{i'}\} \cup T_{i'}(v_{i'})\}$, на подграф графа $\Sigma_{i''}$, порожденный множеством вершин $\{x \in V(\Sigma_{i''}) : x^{\sigma_{i''}} \in \{v_{i''}\} \cup T_{i''}(v_{i''})\}$, такой, что если $y \in V(\Sigma_{i'})$ и $y^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$ (и следовательно, $(\psi(y))^{\sigma_{i''}} = v_{i''}$), то

$$\psi(\tilde{a}_{i',j,k}(y)) = \tilde{a}_{i'',j,k}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \leq j \leq m_{i'} \text{ и каждого } 1 \leq k \leq l_{i',j}^-,$$

$$\psi(\tilde{a}_{i',j,k}^{-1}(y)) = \tilde{a}_{i'',j,k}^{-1}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \leq j \leq m_{i'} \text{ и каждого } 1 \leq k \leq l_{i',j}^-,$$

$$\psi(\tilde{b}_{i',j,k}(y)) = \tilde{b}_{i'',j,k}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \leq j \leq m_{i'} \text{ и каждого } 1 \leq k \leq l_{i',j}^+ - l_{i',j}^-,$$

$$\psi(\tilde{c}_{i',j,k}(y)) = \tilde{c}_{i'',j,k}(\psi(y)) \text{ для каждого } 1 \leq j \leq n_{i'} \text{ и каждого } 1 \leq k \leq l_{i',j}.$$

Мы покажем, однако, что из 1)–3) следует эквивалентность реализаций $(\Sigma_{i'}, G_{i'}, \sigma_{i'}, \varphi_{i'})$ и $(\Sigma_{i''}, G_{i''}, \sigma_{i''}, \varphi_{i''})$ симметрических расширений Γ посредством Δ . Тем самым теорема 2 будет доказана (и более того, будет получена верхняя оценка для числа $|I|$).

В силу 1) и 2) имеется биекция множества $\mathcal{W}_{i'}$ на множество $\mathcal{W}_{i''}$, которая сопоставляет произвольному слову $W \in \mathcal{W}_{i'}$ слово W^* , получающееся из W заменой в нем каждого $a_{i',j,k}$ ($1 \leq j \leq m_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}^-$) на $a_{i'',j,k}$, каждого $a_{i',j,k}^{-1}$ ($1 \leq j \leq m_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}^-$) на $a_{i'',j,k}^{-1}$, каждого $b_{i',j,k}$ ($1 \leq j \leq m_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}^+ - l_{i',j}^-$) на $b_{i'',j,k}$, каждого $c_{i',j,k}$ ($1 \leq j \leq n_{i'}, 1 \leq k \leq l_{i',j}$) на $c_{i'',j,k}$.

Согласно лемме 1 для произвольной вершины z графа $\Sigma_{i'}$ имеем $(W_{z^{\sigma_{i'}}})^{-1}(z^{\sigma_{i'}}) = v_{i'}$ и, следовательно, $((\widetilde{W_{z^{\sigma_{i'}}})}^{-1}(z))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$. Определим отображение $\varphi : V(\Sigma_{i'}) \rightarrow V(\Sigma_{i''})$, полагая для произвольной вершины z графа $\Sigma_{i'}$

$$\varphi(z) := \widetilde{W_{z^{\sigma_{i'}}}^*}(\psi((\widetilde{W_{z^{\sigma_{i'}}})}^{-1}(z))). \quad (2.1)$$

Мы покажем, что отображение φ осуществляет эквивалентность реализаций $(\Sigma_{i'}, G_{i'}, \sigma_{i'}, \varphi_{i'})$ и $(\Sigma_{i''}, G_{i''}, \sigma_{i''}, \varphi_{i''})$ симметрических расширений Γ посредством Δ .

Легко видеть, что ограничение φ на произвольный блок $z^{\sigma_{i'}} \in \sigma_{i'}$ (здесь $z \in V(\Sigma_{i'})$) есть его биекция на блок $W_{z^{\sigma_{i'}}}^*(\psi((\widetilde{W_{z^{\sigma_{i'}}})}^{-1}(z^{\sigma_{i'}}))) = W_{z^{\sigma_{i'}}}^*(v_{i''}) \in \sigma_{i''}$. С учетом леммы 2 отсюда следует, что φ есть биекция $V(\Sigma_{i'})$ на $V(\Sigma_{i''})$, отображающая $\sigma_{i'}$ на $\sigma_{i''}$ и индуцирующая изоморфизм $\varphi_{i',i''}$ (см. лемму 2) дерева $T_{i'} = \Sigma_{i'}/\sigma_{i'}$ на дерево $T_{i''} = \Sigma_{i''}/\sigma_{i''}$.

Пусть z_1, z_2 — произвольные вершины графа $\Sigma_{i'}$. Для завершения доказательства теоремы 2 остается показать, что $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$ тогда и только тогда, когда $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$. Поскольку φ индуцирует изоморфизм дерева $T_{i'}$ на дерево $T_{i''}$, при этом достаточно рассмотреть случай, когда $z_1^{\sigma_{i'}} = z_2^{\sigma_{i'}}$ или $\{z_1^{\sigma_{i'}}, z_2^{\sigma_{i'}}\} \in E(T_{i'})$.

Предположим, что $z_1^{\sigma_{i'}} = z_2^{\sigma_{i'}}$. Включение $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$ эквивалентно включению

$$\{(\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1), (\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2)\} \in E(\Sigma_{i'}),$$

которое в силу 3) и равенств $((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1))^{\sigma_{i'}} = ((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$ эквивалентно, в свою очередь, включению

$$\{\psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1)), \psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2))\} \in E(\Sigma_{i''}).$$

Отсюда согласно (2.1) следует, что (при $z_1^{\sigma_{i'}} = z_2^{\sigma_{i'}}$) включение $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$ эквивалентно включению $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$.

Предположим, что $\{z_1^{\sigma_{i'}}, z_2^{\sigma_{i'}}\} \in E(T_{i'})$ и, для определенности, $d_{T_{i'}}(v_{i'}, z_1^{\sigma_{i'}}) < d_{T_{i'}}(v_{i'}, z_2^{\sigma_{i'}})$. Тогда по лемме 1 имеем $W_{z_2^{\sigma_{i'}}} \equiv W_{z_1^{\sigma_{i'}}}x$, где $x \in M_{i'}$. Поэтому с учетом (2.1) включение $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$ эквивалентно включению

$$\{\psi((\widetilde{W_{z_1^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_1)), \tilde{x}^*(\psi((\widetilde{W_{z_2^{\sigma_{i'}}}})^{-1}(z_2)))\} \in E(\Sigma_{i''}).$$

Но $((\widetilde{W}_{z_2}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$, что согласно 3) и $W_{z_2}^{\sigma_{i'}} \equiv W_{z_1}^{\sigma_{i'}}$ х влечет

$$\widetilde{x}^*(\psi((\widetilde{W}_{z_2}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2))) = \psi(\widetilde{x}((\widetilde{W}_{z_2}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2))) = \psi(\widetilde{x}((\widetilde{x})^{-1}(\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2))) = \psi((\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2)).$$

Таким образом, включение $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$ эквивалентно включению

$$\{\psi((\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_1)), \psi((\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2))\} \in E(\Sigma_{i''}).$$

Поскольку $((\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_1))^{\sigma_{i'}} = v_{i'}$ и $((\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2))^{\sigma_{i'}} \in T_{i'}(v_{i'})$, отсюда согласно 3) следует, что включение $\{\varphi(z_1), \varphi(z_2)\} \in E(\Sigma_{i''})$ эквивалентно включению

$$\{(\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_1), (\widetilde{W}_{z_1}^{\sigma_{i'}})^{-1}(z_2)\} \in E(\Sigma_{i'}),$$

т. е. эквивалентно включению $\{z_1, z_2\} \in E(\Sigma_{i'})$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимов В.И.** Конечность числа симметрических 2-расширений d -мерной решетки и сходных с ней графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 290–303.
2. **Trofimov V.I.** Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 316–320.
3. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** Симметрические расширения графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 175–206.
4. **Трофимов В.И.** О симметрических расширениях деревьев посредством конечных графов // Междунар. конф. “Алгебра и линейная оптимизация”, посвященная 100-летию С.Н. Черникова: тез. докл. Екатеринбург, 2012. С. 159.
5. **Трофимов В.И.** Несколько замечаний о симметрических расширениях графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 284–292.

Трофимов Владимир Иванович

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: trofimov@imm.uran.ru

Поступила 1.06.2015

УДК 519.16 + 519.85

**ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ С ЛИНЕЙНОЙ ТРУДОЕМКОСТЬЮ
ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБХОДА МЕГАПОЛИСОВ¹****А. Г. Ченцов, М. Ю. Хачай, Д. М. Хачай**

Исследуется задача обхода мегаполисов с фиксированным числом “входов” и специальным образом заданными отношениями предшествования, являющаяся естественным обобщением классической задачи коммивояжера (TSP). Для поиска оптимального решения задачи приводится схема динамического программирования, эквивалентная методу поиска кратчайшего пути в подходящем бесконтурном ориентированном взвешенном графе. Обосновываются условия, при которых трудоемкость алгоритма полиномиально, в частности, линейно зависит от числа мегаполисов.

Ключевые слова: задача коммивояжера (TSP), *NP*-трудная задача, динамическое программирование, отношения предшествования.

A. G. Chentsov, D. M. Khachai, M. Yu. Khachai. An exact algorithm with linear complexity for a problem of visiting megalopolises.

A problem of visiting megalopolises with a fixed number of “entrances” and precedence relations defined in a special way is studied. The problem is a natural generalization of the classical traveling salesman problem. For finding an optimal solution we give a dynamic programming scheme, which is equivalent to a method of finding a shortest path in an appropriate acyclic oriented weighted graph. We justify conditions under which the complexity of the algorithm depends on the number of megalopolises polynomially, in particular, linearly.

Keywords: traveling salesman problem, *NP*-hard problem, dynamic programming, precedence relations.

Введение

В различных прикладных задачах возникает необходимость в использовании математических моделей, предусматривающих маршрутизацию, посещения конечной системы мегаполисов при условиях предшествования. Последние могут быть связаны с ограничениями технологического характера и являются по смыслу условиями на маршрут “в целом”. Кроме того, нередко возникает потребность в оценивании перемещений между мегаполисами и работ в пределах данных мегаполисов с учетом возможной зависимости от списка заданий (в одних случаях речь идет об уже выполненных заданиях, а в других — о тех, что еще предстоит выполнить).

Так, в частности, в известной задаче о демонтаже оборудования АЭС, выводимого из эксплуатации (см., например, [1]), упомянутая особенность функции стоимости имеет следующий вид: исполнитель в каждый момент времени подвергается радиационному воздействию тех и только тех фрагментов оборудования, которые на данный момент еще не демонтированы.

В другой инженерной задаче, связанной с маршрутизацией перемещений инструмента при высокоточной листовой резке на станках с числовым программным управлением (ЧПУ), напротив, по соображениям, связанным с введением штрафов за несоблюдение технологических ограничений (жесткости листа), имеет смысл использовать функции стоимости, допускающие зависимость от уже выполненных заданий. Отметим, что при должной формализации оба упомянутых варианта, связанных с усложнением функции стоимости, можно объединить, что и было сделано в [2–4] и ряде других работ. Важно отметить, что в этих исследованиях доминирующую роль играют не вполне традиционные для дискретной оптимизации осложнения, связанные с вопросами качественного характера (большое число разнородных ограничений, усложненные функции стоимости и др.).

¹Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

В то же время и для вышеупомянутых постановок сохраняют свое значение трудности, связанные с вычислительной реализацией. Все исследуемые нами задачи имеют в качестве прототипа известную труднорешаемую задачу коммивояжера (TSP) [5; 6], вопросам проектирования и обоснования точных и приближенных алгоритмов для которой, а также для ее обобщений, посвящено большое количество работ (см., например, [7–11]).

Отметим однако, что упомянутые ранее ограничения предшествования могут сыграть и положительную роль, исключая из рассмотрения значительное число вариантов. Такой подход был предложен и развит в работах [2–4] для процедур типа динамического программирования (ДП); отметим в этой связи применение аппарата ДП для решения TSP в [12; 13]. Упомянутая экономия вычислений реализуется на этапе построения функции Беллмана: построение всего массива значений последней подменяется построением системы слоев (существенных фрагментов). Уравнение Беллмана порождает при этом рекуррентную процедуру, финалом которой является определение глобального экстремума. При этом слои функции Беллмана имеют каждый своей областью определения соответствующий слой пространства позиций. Последнее при наличии условий предшествования оказывается, однако, существенно менее “широким” множеством в сравнении с общим случаем, что и обеспечивает необходимую экономию как числа вычислительных операций, так и объема используемой памяти.

В настоящей работе получена новая оценка трудоемкости алгоритма динамического программирования для одного частного случая задачи обхода мегаполисов, характеризуемого специальным видом ограничений предшествования и восходящего к весьма актуальной инженерной проблеме. Речь идет об оптимизации маршрута при листовой резке на станках с ЧПУ в режиме холостого хода. Предполагается завершённой процедура раскроя, а контуры вырезаемых деталей снабжаются эквидистантами, позволяющими осуществлять резку с некоторым припуском. В реальных задачах возле эквидистант располагаются пары близких точек (врезки и выключения инструмента), образующие в своей совокупности непустые конечные множества, именуемые мегаполисами. Структуру последних на уровне рассматриваемой модели упрощаем, имея в виду близость самих “парных” точек и их близость к эквидистанте. С учетом последнего обстоятельства осуществляем всякий раз “слияние” упомянутых парных точек и отвечающей данной паре точки на эквидистанте, определяющей начало и конец реза. В результате мы приходим к модели, в рамках которой требуется посетить какую-либо одну точку мегаполиса. При этом, конечно, мы не учитываем время, затрачиваемое на резку соответствующих контуров, поскольку оно остается одним и тем же для всех маршрутов, а, стало быть, может быть исключено из математической постановки экстремальной задачи. При этом все перемещения между “укрупненными” упомянутым способом точками осуществляются в режиме холостого хода, т. е. с выключенным инструментом. Разумеется, данная модель вкладывается и в более общую постановку [2–4] посредством применения диагональных отношений, характеризующих возможные варианты внутренних работ. В модели, применяемой ниже, стоимости данных работ зануляются, что соответствует предположению о близости “парных” точек и отвечающих им точек на эквидистанте.

В данной работе мы приводим оценки трудоемкости алгоритма точного решения задачи обхода мегаполисов для специального семейства ограничений, опираясь на аналогичные результаты, полученные ранее в работах [14; 15] для классической задачи коммивояжера.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую частную постановку задачи оптимальной маршрутизации (рис. 1). Дано: конечные дизъюнктные множества M_1, \dots, M_n , называемые далее *мегаполисами*, и стартовая точка x_0 , не принадлежащая ни одному из них. Без ограничения общности, полагаем множества M_j равномошными и определяемыми равенствами

$$M_j = \{g_{j1}, \dots, g_{jp}\}.$$

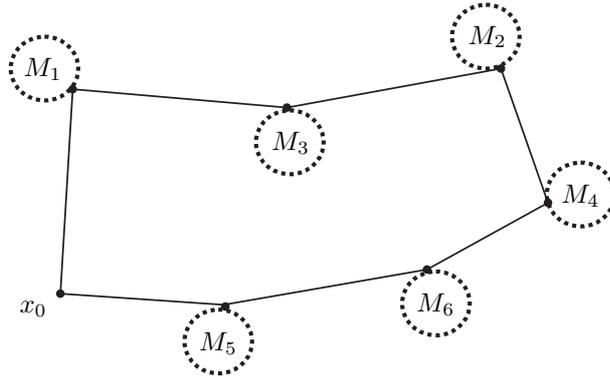


Рис. 1. Пример постановки с ограничениями предшествования (7).

Заданы стоимости $\hat{c}(x_0, g_{j\tau})$ и $\check{c}(g_{j\tau}, x_0)$ перемещения из точки x_0 в каждую из точек $g_{j\tau}$ (и обратно), стоимости перемещения $c(g_{l\sigma}, g_{j\tau})$ для произвольных $j, l \in \mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$, $j \neq l$ и $\sigma, \tau \in \mathbb{N}_p$, а также стоимости посещения мегаполисов (внутренних работ) $c'(g_{j\tau})$.

Требуется найти перестановку $\pi: \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$, задающую порядок посещения мегаполисов, называемую далее *маршрутом*, и конечную последовательность $g_{\pi(1)\tau(1)}, \dots, g_{\pi(n)\tau(n)}$, именуемую *трассой* так, чтобы

$$\hat{c}(x_0, g_{\pi(1)\tau(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} (c'(g_{\pi(i)\tau(i)}) + c(g_{\pi(i)\tau(i)}, g_{\pi(i+1)\tau(i+1)})) + \check{c}(g_{\pi(n)\tau(n)}, x_0) \rightarrow \min. \quad (1)$$

Традиционный подход к решению задачи (1) восходит к работам [12; 13] и связан с использованием той или иной схемы динамического программирования. Пусть оптимальная трасса, выйдя из точки x_0 , посетив за первые $i - 1$ шагов мегаполисы с номерами из подмножества $J \subset \mathbb{N}_n$, в i -й позиции посещает мегаполис M_j в точке $g_{j\tau(i)} \in M_j$. Обозначим стоимость этой части трассы через $C(J, i, j, g_{j\tau(i)})$.

Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$C(\emptyset, 1, j, g_{j\tau(1)}) = \hat{c}(x_0, g_{j\tau(1)}), \quad (2)$$

$$C(J, i, j, g_{j\tau(i)}) = \min_{l \in J} \min_{g_{l\tau(i-1)} \in M_l} \{C(J \setminus \{l\}, i-1, l, g_{l\tau(i-1)}) + c(g_{l\tau(i-1)}, g_{j\tau(i)}) + c'(g_{j\tau(i)})\}, \quad (3)$$

причем оптимальное значение задачи (1) может быть вычислено по формуле

$$C^* = \min_{j \in \mathbb{N}_n} (C(\mathbb{N}_n \setminus \{j\}, n, j, g_{j\tau(n)}) + \check{c}(g_{j\tau(n)}, x_0)). \quad (4)$$

Отметим, что рассматриваемая в данной работе “прямая” схема динамического программирования, вообще говоря, отличается от исследованной в работах [1–4].

Рекуррентная процедура (2)–(4) допускает эквивалентную формулировку в терминах теории графов. В самом деле, пользуясь известным подходом, сопоставим исходной задаче задачу поиска кратчайшего s - t пути в подходящем реберно-взвешенном $(n + 2)$ -дольном ориентированном графе $G^*[p] = (V^*[p], A^*[p], w^*[p])$. Через $V_i^*[p]$ обозначим подмножество вершин, составляющих i -ю долю, задаваемое равенствами

$$V_0^*[p] = \{s\}, \quad V_{n+1}^*[p] = \{t\},$$

$$V_i^*[p] = \{(J, i, j, \tau) : j \in \mathbb{N}_n \setminus J, g_{j\tau} \in M_j, J \subset \mathbb{N}_n, |J| = i - 1\} \quad (i \in \mathbb{N}_n).$$

При этом вершины s и t соответствуют стартовой точке x_0 , а произвольная вершина (J, i, j, τ) соответствует части трассы длины i , посещающей мегаполисы с номерами из множества $J \cup \{j\}$, последним среди которых — мегаполис M_j (в точке $g_{j\tau}$).

Смежными в графе $G^*[p]$ являются лишь вершины последовательных долей $V_i^*[p]$ и $V_{i+1}^*[p]$. Дуги $G^*[p]$ соединяют вершину s с произвольной вершиной доли $V_1^*[p]$, произвольную вершину доли $V_n^*[p]$ — с вершиной t , а также произвольные вершины (J, i, l, σ) и $(J', i + 1, j, \tau)$, удовлетворяющие условиям

$$|J| = i - 1, \quad J' = J \cup \{l\}, \quad j \notin J', \quad \sigma, \tau \in \mathbb{N}_p. \quad (5)$$

Множество дуг, соединяющих вершины, принадлежащие $V_i^*[p]$ и $V_{i+1}^*[p]$, договоримся обозначать через $A_{i,i+1}^*[p]$.

Весы дуг определяются соотношениями

$$w^*[p](s, (\emptyset, 1, j, \tau)) = \hat{c}(x_0, g_{j\tau}), \quad w^*[p]((\mathbb{N}_n \setminus \{j\}, n, j, \tau), t) = \check{c}(g_{j\tau}, x_0),$$

$$w^*[p]((J, i, l, \sigma), (J', i + 1, j, \tau)) = c(g_{l\sigma}, g_{j\tau}) + c'(g_{j\tau}).$$

Нетрудно убедиться в том, что множество допустимых трасс в задаче (1) взаимно однозначно отображается на множество s – t путей в графе $G^*[p]$. Как следствие, кратчайшей трассе (оптимальному решению задачи (1)) соответствует s – t путь наименьшего веса. Более того, схема (2)–(4) эквивалентна модификации известного алгоритма Форда–Беллмана для поиска кратчайшего пути в бесконтурной сети (см., например, [16]), обладающего трудоемкостью $O(|A^*|)$.

Универсальность описанного подхода к поиску точного решения неоднократно отмечалась ранее (см., например, [17]). Нетрудно видеть, что величины $\hat{c}(x_0, g_{j\tau})$, $\check{c}(g_{j\tau}, x_0)$, $c(g_{l\sigma}, g_{j\tau})$ и $c'(g_{j\tau})$ могут, вообще говоря, зависеть от целого ряда дополнительных параметров, среди которых списки посещенных (или непосещенных) к данному моменту мегаполисов. При этом и схема метода, задаваемая формулами (2)–(4), и сведение к задаче поиска кратчайшего s – t пути остаются неизменными. В дальнейшем для упрощения записи договоримся эти дополнительные параметры опускать.

К сожалению, число дуг в орграфе $G^*[p]$ в общем случае экспоненциально растет с ростом числа мегаполисов n , что влечет экспоненциальную же оценку трудоемкости метода динамического программирования для задачи (1) в общей постановке. В самом деле, для произвольного $n \geq 2$

$$|V^*[p]| > |V_2^*[p] \cup \dots \cup V_n^*[p]| \geq pn2^{n-2}.$$

При этом входящая степень произвольной вершины $(J, m, j, \tau) \in V_m^*[p]$ при $m \geq 2$ удовлетворяет соотношению $\deg^-(J, m, j, \tau) = (m - 1)p \geq p$. Таким образом, для числа дуг графа $G^*[p]$ справедлива нижняя оценка² $|A^*[p]| = \Omega(np^2 2^n)$.

Тем не менее, введение в условие задачи дополнительных ограничений, например, ограничений предшествования на множестве мегаполисов, может существенно снизить суммарную трудоемкость процедуры поиска оптимального решения (см., например, [19; 20]). Ниже мы воспользуемся подходом, предложенным в работах [14; 15] для описания подкласса задачи обхода мегаполисов, для которого схема (2)–(4) обладает линейной по n трудоемкостью.

2. Ограничения предшествования

Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}_n$ на множестве мегаполисов $\{M_1, \dots, M_n\}$ заданы дополнительные ограничения предшествования: перестановка $\pi: \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$ является допустимым порядком обхода мегаполисов (маршрутом), если

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n (j \geq i + k) \Rightarrow (\pi(i) < \pi(j)). \quad (6)$$

²Заметим, что из результатов [18] следует справедливость и верхней оценки $|A^*[p]| = O(n^2 p^2 2^n)$.

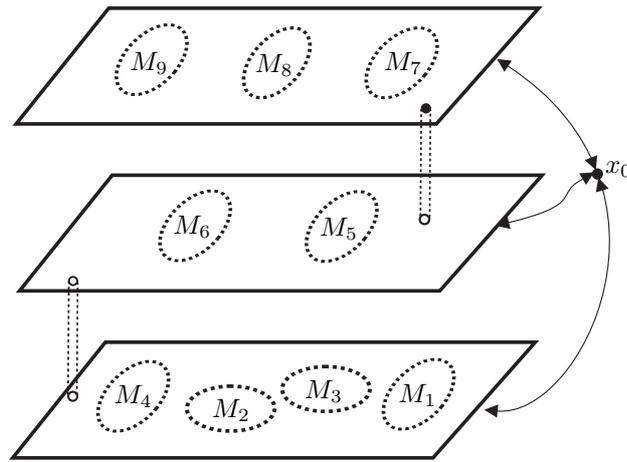


Рис. 2. Пример постановки с ограничениями предшествования (7).

Структура введенной системы ограничений существенно определяется значением параметра k . В самом деле, при $k = 1$ единственным допустимым маршрутом, очевидно, является тождественная перестановка $\pi(i) = i$, в то время, как при $k \geq n - 1$, любая перестановка допустима.

Ограничения (6) могут быть существенно ослаблены. Например, мы можем отказаться от равномерности в ограничениях, предположив для каждого i наличие собственного параметра $k(i)$ такого, что

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n \ (j \geq i + k(i)) \Rightarrow (\pi(i) < \pi(j)). \quad (7)$$

Очевидно, при $k(i) \equiv k$ ограничения (7) эквивалентны ограничениям (6).

Введенные ограничения предшествования на первый взгляд могут показаться излишне абстрактными. Приведем пример задачи обхода мегаполисов, отягощенной ограничениями вида (7), близкой по постановке к реальным задачам, решаемым на практике.

Допустим, исследуемая постановка (рис. 2) требует поиска наиболее экономичного плана работ, связанных с посещением семи помещений (мегаполисов), находящихся на трех уровнях обслуживаемого здания. В начальной позиции исполнитель находится в стартовой точке x_0 , из которой он может быть доставлен на любой уровень с одинаковой пренебрежимо малой стоимостью. После проведения всех работ (но не ранее) исполнитель возвращается в стартовую точку с произвольного уровня. Особенность постановки состоит в том, что перемещения между уровнями могут быть произведены исключительно по лифтовым шахтам, отмеченным на рисунке, и стоимость каждого такого перемещения существенно превышает стоимость перемещений внутри уровня. В данной ситуации маршруты, начинающиеся и (или) заканчивающиеся на втором уровне, естественным образом доминируются маршрутами, начинающимися и заканчивающимися на первом или третьем уровнях, и могут быть исключены из рассмотрения. Данный факт может быть формализован в виде специфических ограничений предшествования вида (7), в которых

$$k(i) = \begin{cases} 5 - i, & \text{если } 1 \leq i \leq 4, \\ 7 - i, & \text{если } 5 \leq i \leq 6, \\ 10 - i, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что введение таких дополнительных ограничений фактически позволяет свести решение исходной задачи к решению семейства подзадач меньшей размерности.

Ниже мы обсудим модификацию стандартной схемы динамического программирования, позволяющую эффективно находить точное решение задачи (1), отягощенной дополнительными ограничениями предшествования вида (6) или (7).

3. Структура графа $G^*[p]$

Убедимся в том, что при произвольном $p \geq 1$ и фиксированных значениях параметров k или $k(i)$ структура графа $G^*[p]$ определяется структурой графа $G^*[1]$, соответствующего постановке задачи обхода одноточечных мегаполисов, эквивалентной классической задаче коммивояжера с ограничениями предшествования. Поскольку вид произвольной вершины графа $G^*[1]$, принадлежащей доле $V_i^*[1]$, однозначно определяется значениями первых трех параметров, договоримся обозначать каждую такую вершину через (J, i, j) .

Предложение 1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$V_i^*[p] = V_i^*[1] \times \mathbb{N}_p \quad (i \in \mathbb{N}_n), \quad (8)$$

$$A_{0,1}^*[p] = A_{0,1}^*[1] \times \mathbb{N}_p, \quad A_{n,n+1}^*[p] = A_{n,n+1}^*[1] \times \mathbb{N}_p, \quad (9)$$

$$A_{i,i+1}^*[p] = A_{i,i+1}^*[1] \times \mathbb{N}_p^2 \quad (i \in \mathbb{N}_{n-1}). \quad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задавшись произвольным $p > 1$ и одним из ограничений предшествования, (6) или (7), рассмотрим отображение $\Gamma: V^*[p] \rightarrow V^*[1]$, задаваемое соотношениями

$$\Gamma(s) = s, \quad \Gamma(t) = t, \quad \Gamma((J, i, j, g_{j\tau})) = (J, i, j).$$

Поскольку смежность вершин в графе $G^*[p]$ при произвольном p определяется соотношением (5), отображение Γ является гомоморфизмом. Более того, вершины $(J, i, l, g_{l\sigma})$ и $(J \cup \{l\}, i + 1, j, g_{j\tau})$ смежны тогда и только тогда, когда смежны вершины (J, i, l) и $(J \cup \{l\}, i + 1, j)$ в графе $G^*[1]$. По построению

$$\Gamma^{-1}((J, i, j)) = \{(J, i, j, g_{j1}), \dots, (J, i, j, g_{jp})\},$$

что влечет справедливость соотношений (8)–(10).

Предложение доказано.

Следствие 1. *Справедлива оценка $|A^*[p]| \leq |A^*[1]| p^2$.*

Справедливость последующих утверждений непосредственно следует из следствия 1 и свойств графа $G^*[1]$, обоснованных в работе [14].

4. Оценка трудоемкости схемы (2)–(4) при условии (6)

Пусть задача (1) отягощена ограничениями предшествования (6). Покажем, что в этом случае трудоемкость схемы динамического программирования (2)–(4), применяемой для поиска ее решения, линейно зависит от числа мегаполисов n .

Предложение 2 [14]. *Для произвольного маршрута π и $i, j \in \mathbb{N}_n$ таких, что $i = \pi(j)$, справедливы соотношения*

$$j - k + 1 \leq i \leq j + k - 1, \quad i - k + 1 \leq j \leq i + k - 1.$$

Таким образом, в любом допустимом маршруте мегаполис M_j может занимать лишь одну из $2k - 1$ допустимых позиций, равно как и позицию i может занимать лишь один из $2k - 1$ мегаполисов. Поскольку число мегаполисов, которые могут занимать в допустимом маршруте заданную позицию i , зависит исключительно от значения параметра k (а не от n , как в общем случае), структура графа состояний $G^*[p]$ существенно упрощается.

Введем обозначения

$$S^-(\pi, i) = \{l \in \mathbb{N}_n: l \geq i, \pi(l) \leq i - 1\}, \quad S^+(\pi, i) = \{h \in \mathbb{N}_n: h \leq i - 1, \pi(h) \geq i\}.$$

Предложение 3 [14]. Для произвольного допустимого маршрута π и произвольной позиции $i \in \mathbb{N}_n$ справедливо соотношение

$$|S^-(\pi, i)| = |S^+(\pi, i)| \leq k/2.$$

Каждое множество J , используемое при описании вершин доли $V_i^*[p]$, может быть однозначно описано в терминах подмножеств $S^-(\pi, i)$ и $S^+(\pi, i)$:

$$J = \mathbb{N}_{i-1} \setminus S^+(\pi, i) \cup S^-(\pi, i).$$

Предложение 4 [14]. Для произвольного $k \in \mathbb{N}_n$ $|A^*[1]| \leq n k^2 2^{k-2}$.

Непосредственным следствием предложения 4 и следствия 1, а также оценки трудоемкости алгоритма поиска кратчайшего s - t пути в бесконтурной сети является следующее утверждение.

Следствие 2. Для произвольных $k \in \mathbb{N}_n$ и p трудоемкость схемы (2)–(4) составляет $O(n p^2 k^2 2^{k-2})$.

Заметим, что полученная оценка полиномиальна как по n , так и по p (и экспоненциальна по k). Оценка сохраняет полиномиальность по n при $p = O(\text{poly}(n))$ и $k = O(\text{poly}(\log n))$.

5. Случай более общих ограничений предшествования

Пусть задача (1) отягощена ограничениями предшествования (7), имеющими более общую природу, нежели ограничения, рассмотренные в предыдущем разделе. Введем обозначение: $k^*(i) = \max\{k(j) : i - k(j) + 1 \leq j \leq i\}$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5 [14]. Для произвольных значений $k(i) \in \mathbb{N}_n$

$$|A^*[1]| \leq \sum_{i=1}^n k^*(i)(k^*(i) + 1)2^{k^*(i)-2}.$$

Применяя, как и в предыдущем разделе, результат, обоснованный в следствии 1, получаем окончательную оценку.

Следствие 3. Трудоемкость схемы динамического программирования, применяемой для нахождения точного решения задачи (1) с ограничениями предшествования (7), составляет

$$O(p^2 \sum_{i=1}^n k^*(i)(k^*(i) + 1)2^{k^*(i)-2}).$$

Заметим, что полученная оценка путем некоторого огрубления может быть сведена к оценке, представленной в следствии 2. Достаточно ввести обозначение $k = \max k^*(i)$. Видно, что в этом случае оценка сохраняет линейный порядок роста по n и квадратичный по p , будучи экспоненциальной по k .

Заключение

В настоящей работе обоснована эффективность схемы динамического программирования для решения задачи оптимального обхода мегаполисов при дополнительных ограничениях предшествования. Показано, что если эти ограничения имеют вид (6) или (7), то получаемый в результате алгоритм позволяет находить точное решение задачи за время, ограниченное сверху линейной функцией от числа мегаполисов n и квадрата их мощности p^2 (при произвольных

фиксированных значениях параметров ограничений предшествования k или $k(i)$). Показано, что найденные оценки трудоемкости алгоритма остаются справедливыми даже при условии, когда функции стоимости зависят от списков посещенных или непосещенных мегаполисов.

Отметим, что в общем случае задачи обхода мегаполисов обсуждаемый в работе алгоритм, конечно же, не является полиномиальным. Более того, из полученных в работе результатов следует, что в общем случае обхода мегаполисов даже задача нахождения маршрута, удовлетворяющего совместно с оптимальным маршрутом ограничению (6) или (7) для каких-либо k , $k^*(i) = O(\text{poly}(\log n))$ NP -трудна.

Тем не менее, обсуждаемые в работе алгоритмы могут использоваться при построения эффективных эвристик для поиска и оценки приближенных решений задачи обхода мегаполисов в общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / В.В. Коробкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, А.Г. Ченцов. М.: Новые технологии, 2012. 234 с.
2. **Ченцов А.Г.** К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестн. Удмурт. ун-та. 2013. Вып. 1. С. 59–82. (Математика, механика, компьютер. науки).
3. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Ченцов П.А.** Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации // Проблемы управления. 2013. № 5. С. 12–21.
4. **Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. Вып. 4. С. 170–190.
5. **Karp R.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computations: Proc. Sympos. / eds. R. E. Miller, J. W. Thatcher. New York: Plenum, 1972. P. 85–103.
6. **Garey M., Johnson D.** Computers and intractability: a guide to the theory of NP -completeness. San Francisco: W. H. Freeman and Co, 1979. 339 p. (A Ser. of Books in the Mathematical Sciences.)
7. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Proc. of a Symposium on new directions and recent results in algorithms and complexity. New York: Academic Press, 1976. P. 441.
8. **Arora S.** Polynomial-time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, № 5. P. 753–782.
9. **Гимади Э.Х., Перепелица В.А.** Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1974. Вып. 12. С. 35–45.
10. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** Аппроксимируемость задачи о минимальном по весу цикловом покрытии графа // Докл. РАН. 2015. Т. 461, № 6. С. 644–649.
11. **Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д.** PTAS для задачи Min-k-SCCP в евклидовом пространстве произвольной фиксированной размерности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 297–311.
12. **Bellman R.** Dynamic programming treatment of the traveling salesman problem // J. Assoc. Comput. Mach. 1962. Vol. 9. P. 61–63.
13. **Held M., Karp R.** A dynamic programming approach to sequencing problems // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1962. Vol. 10, no. 1. P. 196–210.
14. **Balas E.** New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems // Ann. Oper. Res. 1999. Vol. 86. P. 529–558.
15. **Balas E., Simonetti N.** Linear time dynamic-programming algorithms for new classes of restricted TSPs: a computational study // INFORMS J. Comput. 2001. Vol. 13, no. 1. P. 56–75.
16. Introduction to algorithms / eds. T. Cormen [et al.]. 3 ed. Boston: MIT Press, 2009. 1312 p.
17. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные методы // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 10. С. 3–29.
18. The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization / eds. E.L. Lawler [et al.]. New York: John Wiley & Sons, 1985. 476 p.

19. **Steiner G.** On the complexity of dynamic programming for sequencing problems with precedence constraints // Ann. Oper. Res. 1990. Vol. 26, no. 1-4. P. 103–123.
20. Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера, осложненной внутренними работами / А.М. Григорьев, Е.Е. Иванко, С.Т. Князев, А.Г. Ченцов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 7. С. 14–21.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН

Поступила 11.05.2015

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Хачай Даниил Михайлович
студент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: daniil.khachay@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. I	3
Г. А. Амирханова, А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко. Об одной обратной задаче линейного программирования	13
А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова. Многокритериальная краевая задача в динамике	20
В. А. Баранский, Т. А. Королева, Т. А. Сеньчонок. О решетке разбиений натурального числа	30
С. И. Бастраков, Н. Ю. Золотых. Удаление неравенств из фасетного описания многогранника	37
В. А. Белоногов. О полупропорциональных столбцах таблицы характеров групп $Sp_4(q)$ и $PSp_4(q)$ при нечетном q	46
И. Н. Белоусов. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39,36,1;1,2,39\}$	54
В. В. Беляев. Классы сопряженных элементов в группах финитарных подстановок	63
Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров. Определяемость хьюиттовских пространств решетками подалгебр полуполей непрерывных положительных функций с тах-сложением	78
Э. Х. Гимади, И. А. Рыков. Асимптотически точный подход к приближенному решению некоторых задач покрытия графа несмежными циклами	89
А. В. Долгушев, А. В. Кельманов, В. В. Шенмайер. Полиномиальная аппроксимационная схема для одной задачи разбиения конечного множества на два кластера	100
В. И. Ерохин. О некоторых достаточных условиях разрешимости и неразрешимости задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования	110
В. Г. Жадан. Об одном варианте симплекс-метода для линейной задачи полуопределенного программирования	117
В. И. Зенков. О пересечениях абелевых и нильпотентных подгрупп в конечных группах. I	128
М. Р. Зиновьева, А. С. Кондратьев. Конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами	132
И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин, В. Б. Костоусов, Е. К. Костоусова, А. Б. Ложников, В. И. Починский. Об оптимальном межорбитальном переходе в нормальном поле тяготения	142

В. В. Карелин, А. В. Фоминых. Точные штрафы в задаче построения оптимального решения дифференциального включения.....	153
А. И. Кибзун, В. Р. Соболев. Двухшаговая задача хеджирования европейского коллопциона при случайной длительности транзакций	164
А. В. Коныгин. К вопросу Камерона о тривиальности в примитивных группах подстановок стабилизатора двух точек, нормального в стабилизаторе одной из них ..	175
В. В. Кораблева. О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^3D_4(q^3)$	187
С. К. Куклина, А. О. Лихачёва, Я. Н. Нужин. О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами.....	192
В. М. Левчук, П. К. Штуккерт. Строение квазиполей малых четных порядков	197
Р. В. Марков, В. В. Чермных. Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои	213
Н. В. Маслова. О конечных группах, минимальных относительно простого спектра..	222
А. А. Махнев, Д. В. Падучих. О расширениях сильно регулярных графов с собственным значением 4.....	233
В. С. Монахов, И. К. Чирик. О p -сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями	256
Е. Д. Незнахина. PTAS для задачи Min-k-SCCP в евклидовом пространстве произвольной фиксированной размерности.....	268
Л. Д. Попов, В. Д. Скарин. Лексикографическая регуляризация и двойственность для несобственных задач линейного программирования	279
В. Л. Розенберг. Об одной задаче управления при дефиците информации для линейного стохастического дифференциального уравнения	292
В. И. Трофимов. Конечность числа симметрических расширений локально конечного дерева посредством конечного графа.....	303
А. Г. Ченцов, М. Ю. Хачай, Д. М. Хачай. Точный алгоритм с линейной трудоемкостью для одной задачи обхода мегаполисов	309

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21

№ 3

2015

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Н. М. Юркова

Тех-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 27.08.15. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37,2. Уч.-изд. л. 32,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226