РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 21, № 1 2015

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 21 № 1 2015

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 21, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. 316 с.

ISSN 0134–4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.988.68

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ МЕТОДОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ[1]

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

В работе рассматриваются некорректно поставленные задачи локализации по зашумленным данным разрывов первого рода (для функции одной переменной) и линий разрыва (для функции двух переменных). Авторами исследована дискретизация регулярных методов локализации, введены классы корректности и получены оценки точности аппроксимации особенностей и порога разделимости построенных алгоритмов. Показано, что дискретные алгоритмы локализации разрывов первого рода зашумленной функции одной переменной оптимальны по порядку.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, разрыв первого рода, локализация особенностей, регуляризующий алгоритм, дискретизация.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. On discretization of methods for localization of singularities a noisy function.

Ill-posed problems of localizing the singularities of a noisy function of one or two variables are studied. For functions of one variable, singularities are discontinuities of the first kind; for a function of two variables, singularities are lines of discontinuity. The discretization of regular localization methods is investigated. Correctness classes are introduced, and error estimates are obtained for the approximation of singularities and separability threshold of the constructed algorithms. It is shown that discrete algorithms for localizing discontinuities of the first kind of a noisy function of one variable are order-optimal.

Keywords: ill-posed problem, discontinuity of the first kind, localization of singularities, regularizing method, discretization.

Введение

Во многих прикладных областях возникает необходимость локализовать особенности (определить количество и положение) зашумленной функции одной или двух переменных. Изложению алгоритмов локализации особенностей различных типов по зашумленным данным посвящено большое количество литературы. Для функции одной переменной построение практических алгоритмов локализации разрывов первого рода можно найти в [1; 2] (см. также обзор [3]). Для функции двух переменных, например, при обработке изображений, возникает задача локализации линий, в окрестности которых измеряемая функция является гладкой, а в каждой точке линии терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Различные алгоритмы, позволяющие выделять линии разрыва зашумленной функции двух переменных, и примеры их применения можно найти, например, в [4; 5].

Проблема заключается в том, что обычно задача локализации особенностей по зашумленным данным является некорректно поставленной [6–8], поскольку количество и положения особенностей известной зашумленной функции могут как угодно сильно отличаться от искомых количества и положений особенностей точной функции. В работах авторов [3; 11–16] построены регуляризующие методы, которые позволяют определить количество и аппроксимировать положение разрывов первого рода функции одной переменной и линий разрыва функции двух переменных. Методы локализации заключаются в конструировании вспомогательной функции, которая является сверткой зашумленной функции с усредняющей функцией, и в ее исследовании с помощью порогового (корреляционного) метода. При численной реализации метода локализации необходима дискретизация вычисления интеграла свертки и порогового

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629а) и программы президиума РАН “Математическая теория управления”.

метода. Приближенное вычисление интегралов является хорошо разработанной стандартной процедурой. Поэтому для упрощения изложения в статье без дополнительного обсуждения предполагается, что в точках сетки вспомогательная функция вычислена приближенно с заданной точностью.

Основная цель настоящей работы заключается в дискретизации порогового метода исследования вспомогательной функции. Авторами показано, что при согласовании выбора шага сетки с уровнем погрешности задания исходных данных оценки точности аппроксимации особенностей и порога разделимости для дискретного метода имеют тот же порядок, что и для непрерывного метода [14; 15].

В первом разделе рассмотрена задача локализации разрывов первого рода зашумленной функции одной переменной. Второй раздел посвящен задаче локализации линии разрыва зашумленной функции двух переменных.

1. Алгоритмы локализации разрывов первого рода функции одной переменной

Рассмотрим функцию g, имеющую разрывы первого рода в точках $x_k,\ k = 1, 2, \ldots, l,$ вне которых функция достаточно гладкая и имеет соответствующие пределы $g(x_k + 0),\ g(x_k - 0)$. Обозначим скачок функции g в точке x_k через $\Delta_k = g(x_k + 0) - g(x_k - 0)$.

Определим множество MV функций g, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) функция g ограничена на $(-\infty, +\infty)$;

(ii) на любом отрезке $[b, c]$ таком, что интервал (b, c) не содержит точек разрыва, функция g абсолютно непрерывна;

(iii) функция g' почти всюду ограничена на $(-\infty, +\infty)$.

Начнем с постановки задачи локализации разрывов первого рода функции из множества MV. Договоримся везде далее под L_1 и L_2 понимать $L_1(-\infty, +\infty)$ и $L_2(-\infty, +\infty)$. Через $\operatorname{ess\,sup}$ обозначим супремум почти всюду.

Постановка задачи. Пусть функция $g \in MV$. Требуется по функции g^δ и уровню погрешности δ таким, что $\|g - g^\delta\|_{L_2} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать положения разрывов первого рода $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности локализации.

Для получения оценок точности локализации необходима дополнительная априорная информация. Пусть для точной функции g известно:

(**1**) задано число $\Delta^{\min} > 0$ такое, что $\min\{|\Delta_k| \colon k = 1, 2, \ldots, l\} \ge \Delta^{\min}$;

(**2**) задано число $r > 0$ такое, что $\operatorname{ess\,sup}_s |g'(s)| \le r$.

В условии (**2**) число r без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем. Множество функций $g \in MV$, удовлетворяющих условиям (**1**), (**2**), обозначим $\mathfrak{M}_{MV}$.

Методы локализации [11–14] основаны на построении и исследовании вспомогательной функции. Для построения вспомогательной функции в настоящей работе будем использовать усредняющую функцию $\phi(t)$ из множества усредняющих функций ΦF, удовлетворяющих условиям:

(a) $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$; $|\phi'(t)| \le C$, C — константа;

(b) $\sup\limits_{t \in [-1,1]} |\phi(t)| = \phi(0) = 1$;

(c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Методы локализации, использующие усредняющие функции из множества ΦF, конструировались в работах [12–14]. Заметим, что для любой функции $\phi \in \Phi F$ существуют константы $0 < \tau < 1$, $a > 0$ такие, что

$$a \le |\phi(t)| \le 1 \text{ для } t \in [-\tau, \tau]. \tag{1.1}$$

Вспомогательная функция $g^\delta_\lambda(x)$ вычисляется по формуле

$$g^\delta_\lambda(x) = \int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} g^\delta(t)(\phi_\lambda(x-t))'_x dt, \quad \phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{1.2}$$

Каждая усредняющая функция $\phi \in \Phi F$ будет порождать метод локализации разрывов первого рода для рассматриваемой задачи.

Сформулируем лемму 3 из работы [14].

Лемма 1. *Пусть $g \in \mathfrak{M}_{MV}$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi F$. Тогда для любого $\lambda > 0$ существует непрерывная функция g^δ_λ, задаваемая формулой* (1.2)*, для которой в условиях рассматриваемой задачи имеет место представление*

$$g^\delta_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \phi_\lambda(x - x_k) + \alpha_\lambda(x) + \Delta g^\delta_\lambda(x) \tag{1.3}$$

с оценками

$$\sup_x |\alpha_\lambda(x)| \le A_0\lambda, \quad \sup_x |\Delta g^\delta_\lambda(x)| \le A_1\lambda^{-1/2}\delta,$$

где $\alpha_\lambda(x) = \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} g'(t)\phi_\lambda(x-t)dt,\ A_0 = \|\phi\|_{L_1},\ A_1 = \|\phi'\|_{L_2}.$

Без ограничения общности будем считать, что точки разрыва x_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, точной функции g принадлежат известному отрезку $[-d, d]$. Введем параметр $P = a\Delta^{\min}/2$.

Пусть вместо функции g^δ_λ вычисляется ее приближенное значение $\tilde{g}^\delta_\lambda$ в точках равномерной сетки x^i на отрезке $[-d-h, d+h]$ с шагом Δx ($h > 0$ — малый параметр). Значения $\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)$ вычисляются по какой-либо формуле приближенного вычисления интегралов так, что выполняется следующее условие аппроксимации интеграла при вычислении вспомогательной функции:

$$\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i) = g^\delta_\lambda(x^i) + \Delta\tilde{g}(x^i), \quad \text{где} \quad \max_{x^i} |\Delta\tilde{g}(x^i)| \le \frac{P}{8}. \tag{1.4}$$

Необходимой точности можно достичь, уменьшая шаг сетки и/или используя формулу приближенного вычисления интегралов более высокого порядка. Отметим, что сетка x^i, на которой вычисляется функция $\tilde{g}^\delta_\lambda$, может не совпадать с сеткой, которая используется для приближенного вычисления интеграла свертки в (1.2).

Алгоритм локализации особенностей, приведенный ниже, по величинам $\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)$ определяет количество l точек разрыва x_k точной функции g и находит приближения x^δ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$. Алгоритм в своей работе использует параметры $\lambda, \Delta x$, которые будут определены позже. Через $\lceil\cdot\rceil$ обозначим округление до целого в бо́льшую сторону: $\lceil\cdot\rceil = [\,\cdot\,] + 1$, квадратные скобки $[\,\cdot\,]$ здесь означают целую часть числа.

А л г о р и т м Π_Δ. Положим начальное $i := 0,\ m := 0$.
Шаг алгоритма: если $x^i \ge d$, то завершаем процесс;
иначе, если $|\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)| \ge P$, то положим $m := m+1,\ a_m := x^i,\ i := i + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil,\ x^\delta_m := a_m + \lambda/2$;
иначе $i := i + 1$;
повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, алгоритм Π_Δ по значениям $\tilde{g}^\delta_\lambda(x^i)$ определяет величину m, относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x^δ_k для аппроксимации положений особенностей x_k. Заметим, что точка x^δ_k может не быть точкой сетки.

В следующей теореме получены оценки точности локализации точек разрыва x_k величинами x^δ_k. Напомним, что $P = a\Delta^{\min}/2$, $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}$, τ — константа из условия (1.1). Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие числа и функции:

$$D = \Big(\frac{2A_1}{P}\Big)^2, \quad \delta_0 = \frac{P}{2A_1}\Big(\frac{P}{3A_0}\Big)^{1/2},$$

$$\lambda(\delta) = D\delta^2, \quad \Delta x = \tau\lambda(\delta), \quad h(\delta) = 2\lambda(\delta) + \Delta x = \lambda(\delta)(2+\tau).$$

Теорема 1. *Пусть $g \in \mathfrak{M}_{MV}$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi F$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ и выполнении неравенства $\min\limits_{1\le j,k\le l,\ i\ne k} |x_j - x_k| \ge h(\delta)$ для алгоритма Π_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \le (D/2)\delta^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\tilde g_\lambda^\delta(x^i)$ в точках сетки x^i из окрестности точки разрыва x_k таких, что $|x^i - x_k| \le \lambda,\ k = 1,2,\dots,l$. Поскольку $\tau < 1$ и $\Delta x = \tau\lambda(\delta)$, то такие точки x^i имеются. Используя представление (1.3) и условие аппроксимации (1.4), в силу финитности функции ϕ получаем

$$\tilde g_\lambda^\delta(x^i) = \Delta_k \cdot \phi_\lambda(x^i - x_k) + \alpha_\lambda(x^i) + \Delta g_\lambda^\delta(x^i) + \Delta\tilde g(x^i).$$

Для $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ имеем

$$\max_{x^i} \left|\alpha_\lambda(x^i) + \Delta g_\lambda^\delta(x^i) + \Delta\tilde g(x^i)\right| \le A_0\lambda + A_1\delta\lambda^{-1/2} + \frac{P}{8}.$$

Оценим снизу величины $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)|$ для $x^i \in [x_k - \tau\lambda, x_k + \tau\lambda]$. Учитывая условие (1.1) на функцию ϕ, при данном выборе параметров для $k = 1,2,\dots,l$ получаем

$$\max_{x^i\colon |x^i - x_k| \le \tau\lambda} |\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \ge a\Delta^{\min} - \frac{23}{24}P > P. \tag{1.5}$$

Вне множества $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{l} \{x^i\colon |x^i - x_k| \le \lambda\}$ величины $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)|$ оцениваются сверху следующим образом:

$$|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \le A_0\lambda + A_1\delta\lambda^{-1/2} + \frac{P}{8} \le \frac{23}{24}P < P. \tag{1.6}$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. алгоритм Π_Δ должен найти приближение x_k^δ для точек $x_k,\ k = 1,2$. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод Π_Δ должен найти приближение для l точек. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций $g(x)$, для которых выполнено условие разделимости: $x_2 - x_1 \ge h(\delta) = 2\lambda + \Delta x$.

Согласно (1.5) во всех точках сетки x^i таких, что $|x^i - x_k| \le \tau\lambda$, имеем $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| > P$. Поскольку шаг сетки $\Delta x = \tau\lambda$, то для любого k на отрезке $[x_k - \tau\lambda, x_k + \tau\lambda]$ найдется точка сетки $x^i < x_k$. Следуя алгоритму Π_Δ, будем считать x^i первой точкой сетки, в которой $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \ge P$. Так как $x_1 < x_2$, то $x^i < x_1$. Заметим, что x^i необязательно принадлежит отрезку $[x_1 - \tau\lambda, x_1 + \tau\lambda]$, но $|x^i - x_1| \le \lambda$ согласно оценке (1.6). Следовательно, x_1 принадлежит отрезку $[x^i, x^i + \lambda] =: [a_1, a_1 + \lambda]$.

Далее, следуя алгоритму Π_Δ, положим $i := i + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil$, т. е. $x^i = a_1 + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x$. Ясно, что $x^i - x_1 > \lambda$. Покажем, что $x^i < x_2$. Используя условие разделимости, имеем $x_2 - x^i \ge x_2 - a_1 - \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x > x_2 - x_1 - \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x \ge x_2 - x_1 - 2\lambda - \Delta x \ge 0$. Следовательно, $x^i < x_2$. Далее, согласно (1.5) найдется точка сетки x^i такая, что $|\tilde g_\lambda^\delta(x^i)| \ge P$. Согласно (1.6) $x_2 - x^i \le \lambda$, т. е. $x_2 \in [x^i, x^i + \lambda] =: [a_2, a_2 + \lambda]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + \lceil 2\lambda/\Delta x\rceil\Delta x, d]$. Ясно, что он не содержит точек множества Q. Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Поскольку для всех точек $x \in [a_k, a_k + \lambda]$, $k = 1,2$, имеем оценку $|x - x_k| \le \lambda$, то для середины отрезков $x_k^\delta := a_k + \lambda/2$ справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \le \lambda/2$. □

З а м е ч а н и е 1. Если шаг сетки Δx выбрать меньше $\tau\lambda$, это не улучшит оценку точности локализации особенностей, но улучшит разделимость, т. е. уменьшит функцию $h(\delta)$. Выбирать шаг Δx больше $\tau\lambda$ нельзя, поскольку при этом на отрезке $[x_k - \tau\lambda, x_k + \tau\lambda]$, $k = 1,2,\dots,l$, может оказаться меньше двух точек сетки и алгоритм Π_Δ не будет правильно работать.

Для того чтобы показать оптимальность построенного алгоритма локализации, введем необходимые определения [13].

О п р е д е л е н и е 1. Метод, определяющий по функции g^δ и уровню погрешности δ величину l и приближения x_k^δ, $k = 1, 2, \ldots, l$, к положениям особенностей x_k функции g, назовем *методом локализации.*

Нам понадобится дополнительное условие на функцию g:

(**3**) задано положительное число $\hat{h}$ такое, что $\min\limits_{j,k\geq 1,\ j\neq k} |x_j - x_k| \geq \hat{h}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}'_{MV}$ класс функций из $\mathfrak{M}_{MV}$, удовлетворяющих условию (**3**).

Для произвольного метода локализации $\tilde{\Pi}$ на классе функций $\mathfrak{M}'_{MV}$ введем понятия оптимальности и оптимальности по порядку и дадим определения оптимального (оптимального по порядку) метода по точности аппроксимации.

О п р е д е л е н и е 2. Для метода $\tilde{\Pi}$ точность восстановления особенностей на классе $\mathfrak{M}'_{MV}$ определяется величиной

$$\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \equiv \sup_{g\in\mathfrak{M}'_{MV}} \ \sup_{\|g-g^\delta\|_{L_2}\leq\delta} \ \sup_{1\leq k\leq l} |x_k - x_k^\delta|.$$

Величину $\hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) = \min\limits_{\tilde{\Pi}} \tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ назовем *оптимальной точностью* локализации особенностей на классе $\mathfrak{M}'_{MV}$ (минимум берется по всем методам локализации разрывов). Метод $\tilde{\Pi}$ назовем *оптимальным* (*оптимальным по порядку*) на классе $\mathfrak{M}'_{MV}$, если $\hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) = \tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ (существует константа $R > 1$ такая, что $\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \leq R \cdot \hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta)$).

Кроме точности аппроксимации интерес представляет оценка снизу для другой характеристики методов локализации — порога разделимости.

О п р е д е л е н и е 3. Наименьшая функция $\bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$, которую можно поставить в условие $\min\limits_{1\leq j,k\leq l, j\neq k} |x_j - x_k| \geq \bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ так, чтобы метод $\tilde{\Pi}$ позволял локализовать особенности, называется *порогом разделимости метода* $\tilde{\Pi}$ на классе функций $\mathfrak{M}_{MV}$; *порогом разделимости задачи* на классе функций $\mathfrak{M}_{MV}$ называется функция $\hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) = \min\limits_{\tilde{\Pi}} \bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$, где минимум берется по всем методам локализации $\tilde{\Pi}$. Метод $\tilde{\Pi}$ назовем Р-*оптимальным* (Р-*оптимальным по порядку*) на классе $\mathfrak{M}_{MV}$, если $\hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) = \bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$ (существует константа $R > 1$ такая, что $\bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \leq R \cdot \hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta)$).

Из теоремы 1 следует

Следствие 1. *Для алгоритма* Π_Δ *справедливы оценки точности локализации точек разрыва* $\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \Pi_\Delta, \delta) \leq \lambda(\delta)/2 = (D/2)\delta^2$ *и порога разделимости* $\bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \Pi_\Delta, \delta) \leq h(\delta) = D(2 + \tau)\delta^2$.

В работе [12] получены оценки снизу для оптимальной точности и порога разделимости рассматриваемой задачи для случая, когда функция зашумлена в $L_p(-\infty, +\infty)$. Для рассматриваемой в настоящей работе задачи при $p = 2$ имеем

$$\hat{\tau}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) \geq \left(\frac{\delta}{\Delta^{\min}}\right)^2, \quad \hat{h}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) \geq \left(\frac{\delta}{\Delta^{\min}}\right)^2.$$

Ясно, что эти оценки также являются оценками снизу и для алгоритма Π_Δ.

Следствие 2. *Алгоритм* Π_Δ *оптимален по порядку на классе* $\mathfrak{M}'_{MV}$ *и Р-оптимален по порядку на классе* $\mathfrak{M}_{MV}$.

2. Алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, которая имеет конечное число линий разрыва $\Gamma_k, k = 1, 2, \ldots, l$, (см. рис. 1); вне этих линий функция $f(x, y)$ гладкая. Точные условия на линии разрыва и функцию $f(x, y)$ будут приведены ниже.

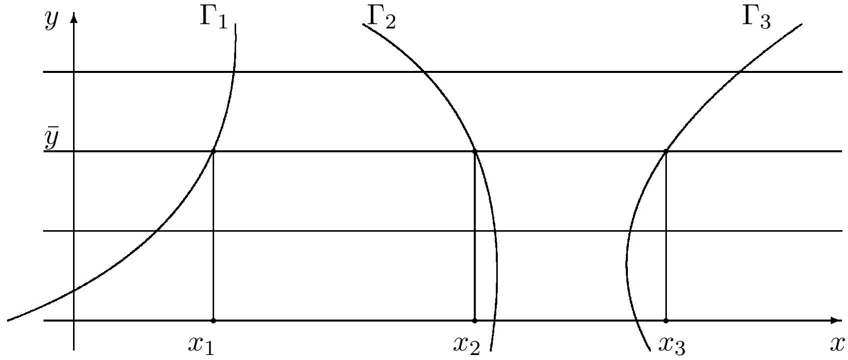


Рис. 1. Локализация линий разрыва функции двух переменных: Γ_k — линии разрыва функции f; x_k — аппроксимируемые величины.

Пусть в полосе $D = \{(x, y)\colon -\infty < x < +\infty, |y - \bar{y}| \le \bar{\delta}\}$ линии $\Gamma_k, k = 1, 2, \ldots, l$, можно задать функциями $x = \gamma_k(y)$. Через x_k обозначены точки пересечения кривых Γ_k с линией $y = \bar{y}\colon x_k = \gamma_k(\bar{y}), k = 1, 2, \ldots, l$. Скачок функции f на линии Γ_k обозначим $\Delta_k(y)$.

Введем множество DMV функций двух переменных, для которых в полосе D выполнены следующие условия:

(1^*) $f(x, y) \in MV$ для почти всех $y :\ |y - \bar{y}| \le \bar{\delta}$; для $(x, y) \notin \Gamma_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, существуют $|f'_x(x, y)| \le r$ и для $(x, y) \in \Gamma_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, существуют $|f'_x(x \pm 0, y)| \le r$ (без ограничения общности можно считать, что $r = 1$);

(1^{**}) для $(x, y) \in \Gamma_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, существуют конечные величины $f(x \pm 0, y)$, и они не равны; скачок $\Delta_k(y)$ функции f на линии Γ_k является непрерывной функцией; заданы положительные константы $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$: $\Delta^{\min} \le \min\limits_{k, |y-\bar{y}| \le \bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \max\limits_{k, |y-\bar{y}| \le \bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \Delta^{\max}$;

(1^{***}) существуют производные $\gamma'_k,\ k = 1, 2, \cdots, l$, и $\max\limits_{k, |y-\bar{y}| \le \bar{\delta}} |\gamma'_k(y)| \le M$.

Постановка задачи. Пусть функция $f \in DMV$. Требуется по функции f^δ и уровню погрешности δ таким, что $\|f - f^\delta\|_{L_2(-\infty,+\infty;-\infty,+\infty)} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности локализации.

Методы локализации в этом случае так же, как и в одномерных задачах, основаны на построении и исследовании вспомогательной функции. Поскольку возмущение $f - f^\delta$ двумерно, то для построения вспомогательной функции нужно проводить усреднение по каждой переменной. Для этого нам понадобятся два класса усредняющих функций. В качестве одного класса усредняющих функций выберем множество ΦF. Введем второе множество усредняющих функций Ψ, которое также состоит из финитных функций $\psi(t),\ t \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

(a') $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$;

(b') $\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(t)dt = 1$;

(c') для $t \notin [-1, 1]$ $\ \psi(t) = 0$; для $t \in [-1, 1]$ $\ \psi(t) \ge 0$.

Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\Big(\frac{t}{\lambda_1}\Big), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\Big(\frac{t}{\lambda_2}\Big), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Ядро усреднения для двумерной функции $f^\delta(x,y)$ возьмем в виде произведения функций $(\phi_{\lambda_1}(x))'\psi_{\lambda_2}(y)$ и положим

$$F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f^\delta(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi\psi_{\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy, \quad x\in(-\infty,+\infty). \tag{2.1}$$

Подход к построению метода локализации и получению оценок в случае двух переменных во многом аналогичен случаю одной переменной. Наша задача состоит в получении для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)$ оценок в окрестности точек x_k и вне окрестностей точек x_k. Следующая лемма является аналогом леммы 3 из работы [15] (отличается оценка в п. (б)).

Положим $K = \lambda_1 + M\lambda_2$, где M — константа из условия (1^{***}). Напомним, что величина $\bar\delta$ входит в определение полосы D.

Лемма 2. *Пусть $f \in DMV$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\lambda_2 \le \bar\delta$ в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения*:

(а) *если выполнено условие $|x - x_k| \ge K, k = 1,2,\dots,l$, то для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)$, определенной* (2.1), *имеет место оценка*

$$|F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)| \le A_0\lambda_1 + \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}},$$

где $A_0 = \|\phi\|_{L_1}, A_1 = \|\phi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$;

(б) *если $\min\limits_{k\ne j}|x_j - x_k| \ge K$, то для всех $k = 1,2,\dots,l$ для $|x - x_k| \le \tau\lambda_1$ имеет место оценка*

$$|F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x)| \ge a\Delta^{\min} - A_0\lambda_1 - \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - \frac{A_2\lambda_2}{\lambda_1},$$

где $A_2 = CM\Delta^{\max}\int_{-1}^{1}|t|\psi(t)dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\lambda_2 \le \bar\delta$ гарантирует, что пределы интегрирования в (2.1) не выйдут из полосы D. Обозначим $\Delta f = f^\delta - f$. Тогда

$$F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi\psi_{\lambda_2}(\bar y - y)dy$$

$$+ \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} \Delta f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi\psi_{\lambda_2}(\bar y - y)dy. \tag{2.2}$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Коши — Буняковского и перехода от функций ϕ'_{λ_1}, ψ_{λ_2} к функциям ϕ', ψ.

$$\left|\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} \Delta f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi\psi_{\lambda_2}(\bar y - y)dy\right|$$

$$\le \|\phi'_{\lambda_1}\|_{L_2}\|\psi_{\lambda_2}\|_{L_2}\left(\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}(\Delta f(\xi,y))^2\,d\xi dy\right)^{1/2} \le \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}.$$

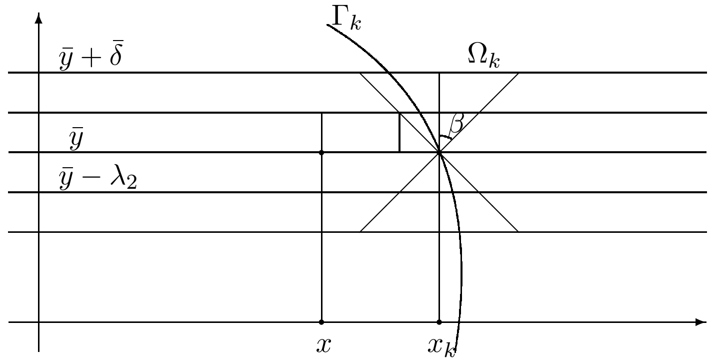


Рис. 2. Условие разделимости: Γ_k — линия разрыва функции f; $x_k - x$ — минимальное расстояние, при котором область интегрирования не пересекается с линией Γ_k; Ω_k — конус с вершиной в точке $(x_k, \bar y)$ и углом β.

Проверим, что для $|y-\bar y| \le \lambda_2$ при условии $|x-x_k| \ge K$ выполнено неравенство $|x-\gamma_k(y)| \ge \lambda_1, k = 1, 2, \cdots, l$. Обозначим через β угол, тангенс которого равен M (см. рис. 2). Ясно, что кривая Γ_k в полосе D не выходит за пределы области Ω_k, где Ω_k — это конус с вершиной в точке $(x_k, \bar y)$, как это показано на рис. 2. Нам нужно, чтобы при $|y - \bar y| \le \lambda_2$ расстояние от прямой x до области Ω_k было не меньше λ_1. Это достигается при условии $|x - x_k| \ge K = \lambda_1 + M\lambda_2$.

Ясно, что для $x = x_j$ при условии $\min\limits_{k\neq j} |x_j - x_k| \ge K$ имеем $|x_j - \gamma_k(y)| \ge \lambda_1, k \neq j$.

Следовательно, в п. (а) формулировки леммы в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов. Поскольку $K > \tau\lambda_1$, то в п. (б) в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k. Получим оценки для первого слагаемого в правой части (2.2) в том и в другом случае.

Рассмотрим случай (а). Перейдем от двойного интеграла в первом слагаемом в правой части (2.2) к повторному и для внутреннего интеграла применим лемму 1. Поскольку в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов, то получаем оценку

$$\left| \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi, y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi \right) \psi_{\lambda_2}(\bar y - y) dy \right|$$

$$= \left| \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi, y)\phi_{\lambda_1}(x-\xi) d\xi \right) \psi_{\lambda_2}(\bar y - y) dy \right|$$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in D} |f'_x| \|\phi\|_{L_1} \lambda_1 \int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(\bar y - y) dy.$$

Поскольку $\displaystyle\int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(y)dy = 1$, то непосредственно получаем требуемую оценку.

Рассмотрим случай (б). Поскольку в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k, то, применяя лемму 1 для внутреннего интеграла в первом слагаемом (2.2), имеем равенство

$$\int\limits_{\bar y-\lambda_2}^{\bar y+\lambda_2} \left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi, y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_\xi d\xi \right) \psi_{\lambda_2}(\bar y - y) dy$$

$$= \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy + \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi,y)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi \right) \psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy. \quad (2.3)$$

Второй интеграл был рассмотрен выше при доказательстве случая (a). Используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (2.3) можно представить в виде

$$\int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy$$

$$= \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-x_k)\psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy + \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(x_k-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy, \quad (2.4)$$

$\theta \in (x-x_k, x-\gamma_k(y))$. Поскольку функция $\Delta_k(y)$ непрерывна, то, в силу (1^{**}), она сохраняет знак для всех y таких, что $|y-\bar{y}| \le \lambda_2$. Тогда в силу условий (b') и (c') на функцию ψ для первого слагаемого в правой части (2.4) имеем оценку

$$\left| \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(x-x_k)\psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy \right| \ge \Delta^{\min} a \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy = \Delta^{\min} a.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.4). Поскольку $x_k = \gamma_k(\bar{y})$, то $|x_k - \gamma_k(y)| \le M|\bar{y}-y|$. Используя условие (a) на функцию ϕ и замену переменных $\bar{y}-y = t/\lambda_2$, для второго слагаемого в правой части (2.4) получаем

$$\left| \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} \Delta_k(y)\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(x_k-\gamma_k(y))\psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy \right| \le \frac{CM\Delta^{\max}}{\lambda_1} \int\limits_{\bar{y}-\lambda_2}^{\bar{y}+\lambda_2} |\bar{y}-y|\psi_{\lambda_2}(\bar{y}-y)dy \le A_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

□

Без ограничения общности считаем, что точки x_k, $k=1,2,\dots,l$, принадлежат отрезку $[-d,d]$. Введем параметр $P = a\Delta^{\min}/2$. Считаем, что вместо функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}$ вычисляется ее приближенное значение $\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}$ в точках равномерной сетки x^i на отрезке $[-d-h, d+h]$ с шагом Δx (h — малый параметр). Предполагаем, что выполнено следующее условие аппроксимации интеграла при вычислении вспомогательной функции:

$$\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) = F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i) + \Delta\widetilde{F}(x^i), \quad \text{где} \quad \max_{x^i} |\Delta\widetilde{F}(x^i)| \le \frac{P}{8}. \quad (2.5)$$

Приведенный ниже алгоритм локализации по величинам $\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)$ определяет количество l точек x_k и находит приближения x^δ_k, $k=1,2,\dots,l$. Алгоритм в своей работе использует параметры λ_1, λ_2 и Δx, которые будут определены позже.

А л г о р и т м ΠD_Δ. Положим начальное $i:=0$, $m:=0$.
Шаг алгоритма: если $x^i \ge d$, то завершаем процесс;
иначе, если $|\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)| \ge P$, то положим $m{:=}m{+}1$, $a_m{:=}x^i$, $i{:=}i{+}\lceil 2K/\Delta x\rceil$, $x^\delta_m{:=}a_m{+}K/2$;
иначе $i := i+1$;
повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, алгоритм ΠD_Δ по значениям $\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)$ вычисляет величину m, относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x^δ_k для аппроксимации положений особенностей x_k. Как и в алгоритме Π_Δ, точка x^δ_k может не быть точкой сетки.

Напомним, что $K = \lambda_1 + M\lambda_2$, $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_2 = CM\Delta^{\max}\displaystyle\int_{-1}^{1}|t|\psi(t)dt$. Рассмотрим случай $M > 0$. (Если это не так, т. е. линии Γ_k, $k = 1, 2, \dots, l$, являются прямыми, ортогональными оси абсцисс, то все равно можно считать $M > 0$, если загрубить оценку в условии (1^{***}).)

Введем константы

$$\omega = \Big(\frac{P}{4A_2}\Big)^{1/2}, \quad D = \frac{4A_1}{\omega P}\big(1 + M\omega^2\big), \quad \delta_0 = \min\Big\{\frac{\bar{\delta}\omega P}{4A_1}, \ \frac{P^2\omega}{24A_0A_1}\Big\}$$

и функции

$$\lambda_1(\delta) = \frac{4A_1}{\omega P}\delta, \quad \lambda_2(\delta) = \omega^2\lambda_1(\delta), \quad \Delta x = \tau\lambda_1, \quad h(\delta) = 2K + \Delta x.$$

Заметим, что $K = D\delta$.

Теорема 2. *Пусть $f \in DMV$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ и выполнении условия $\min\limits_{1\le k,j\le l,\ k\ne j}|x_k - x_j| \ge h(\delta)$ для алгоритма ΠD_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^\delta| \le (D/2)\delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценки из леммы 2 и условие аппроксимации (2.5) при данном выборе параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ позволяют получить оценки для величин $|\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^i)|$, аналогичные оценкам (1.5), (1.6) из доказательства теоремы 1. Дальнейшее доказательство абсолютно аналогично доказательству теоремы 1. □

З а м е ч а н и е 2. Если шаг сетки Δx выбрать меньше $\tau\lambda_1$, это не улучшит оценку точности, но улучшит разделимость, т. е. уменьшит функцию $h(\delta)$. Выбирать шаг Δx больше $\tau\lambda_1$ нельзя, поскольку при этом на отрезке $[x_k - \tau\lambda_1, x_k + \tau\lambda_1]$, $k = 1, 2, \dots, l$, может оказаться меньше двух точек сетки и алгоритм ΠD_Δ не будет правильно работать.

З а м е ч а н и е 3. В случае, когда Γ_k, $k = 1, 2, \dots, l$, являются прямыми, ортогональными оси абсцисс, т. е. в условии (1^{***}) $M = 0$, теорему 2 можно усилить. Выберем параметры алгоритма следующим образом:

$$D = \Big(\frac{2A_1}{P\bar{\delta}^{1/2}}\Big)^2, \quad \delta_0 = \Big(\frac{P\bar{\delta}}{3A_0}\Big)^{1/2}\frac{P}{2A_1}, \quad \lambda_1(\delta) = D\delta^2, \quad \lambda_2 = \bar{\delta},$$

$$K = \lambda_1, \quad \Delta x = \tau\lambda_1, \quad h(\delta) = 2K + \Delta x = (2 + \tau)D\delta^2.$$

Пусть также $f \in DMV$ и зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при выборе параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \bar{\delta}$ и выполнении условия $\min\limits_{1\le k,j\le l,\ k\ne j}|x_k - x_j| \ge h(\delta)$ для алгоритма ΠD_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^\delta| \le (D/2)\delta^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Don't shed tears over breaks / G. Winkler, O. Wittich, V Liebsher, A Kempe // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 2005. Bd. 107, no. 2. S. 57–87.
2. **Сизиков В.С.** Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
3. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О новом классе некорректно поставленных задач // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 24–42. (Математика. Механика. Информатика; вып. 11.)
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов М.: Мир, 2005. 671 с.
5. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Под ред. Я.А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
6. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.

7. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
8. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 c.
9. **Oudshoorn C.G.M.** Asymptotically minimax estimation of a function with jumps // Bernoulli. 1998. Vol. 4, no. 1. P. 15–33.
10. **Коростелев А.П.** О минимаксном оценивании разрывного сигнала // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, вып. 4. С. 796–799.
11. **Антонова Т.В.** Новые методы локализации разрывов зашумленной функции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 375–386.
12. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.
13. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 56–68.
14. **Ageev A.L., Antonova T.V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21, no. 2. P. 177–191.
15. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
16. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Поступила 05.12.2014

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.958

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ВДОЛЬ ТВЕРДЫХ СТЕНОК

М. А. Артемов, Е. С. Барановский

Изучаются граничные задачи, описывающие движение полимерных жидкостей с проскальзыванием вдоль твердых стенок области течения. В качестве условия проскальзывания используется нелинейное условие Навье. Доказано существование слабых стационарных решений краевой задачи в модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров. Доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений Осколкова. Установлены оценки норм решений.

Ключевые слова: модель движения водных растворов полимеров, уравнения Осколкова, условие проскальзывания, краевые задачи, слабые решения

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii. Boundary value problems for motion equations of polymeric fluids with nonlinear slip condition on solid walls.

We study boundary value problems describing flows of polymeric fluids with slip on solid walls of the flow domain. We use the nonlinear Navier slip condition. The existence of stationary weak solutions is proved for a boundary value problem in the model of motion of low-concentration aqueous polymer solutions. The global solvability of an initial boundary value problem for Oskolkov's system is also proved. Estimates for the norms of solutions are obtained.

Keywords: motion model for aqueous polymer solutions, Oskolkov's system, slip boundary condition, boundary value problems, weak solutions.

Введение

Для описания динамики слабоконцентрированных водных растворов полимеров может быть использована система [1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \tag{0.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial t} + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}, \tag{0.2}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0, \tag{0.3}$$

где n — размерность пространства, $x_1, \ldots, x_n$ — пространственные координаты, t — время, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ — скорость, $p = p(t, \boldsymbol{x})$ — давление, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ — известная плотность внешних сил, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{x})$ — девиатор тензора напряжений, $\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}$ — вектор с координатами

$$(\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma})_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k},$$

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформации,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = [\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T]/2,$$

ν — коэффициент вязкости, $\varkappa$ — коэффициент, характеризующий релаксационные свойства среды, $\nu, \varkappa > 0$.

Отметим, что в предельном случае, когда $\varkappa = 0$, уравнения (0.1)–(0.3) переходят в хорошо известную систему Навье — Стокса.

При изучении модели (0.1)–(0.3) часто используется упрощенный вариант реологического соотношения (0.2)

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial t}. \tag{0.4}$$

Комбинируя (0.1) и (0.4), получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \frac{\nu}{2} \Delta \boldsymbol{v} - \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \boldsymbol{f}. \tag{0.5}$$

Уравнения (0.5), (0.3) называют *уравнениями Осколкова.* Используются также названия *модель Фойгта* и *модель Кельвина — Фойгта.*

Уравнения модели движения растворов полимеров изучали многие авторы. Прежде всего следует отметить работы А. П. Осколкова [2–4], в которых исследуются условия разрешимости краевых и начально-краевых задач для различных модификаций модели. Случай слабосжимаемой полимерной жидкости рассмотрен в статье [5]. Задача о разрушении решений системы уравнений Осколкова исследована в [6]. В работе [7] получен ряд точных решений начально-краевых задач, описывающих течения полимерных жидкостей с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных.

В перечисленных выше работах используются однородные краевые условия, т. е. рассматривается ситуация, когда частицы жидкости прилипают к неподвижным стенкам сосуда, в котором происходит течение. Однако в некоторых задачах граничное поле скоростей нельзя считать нулевым. Например, в задачах граничного управления течением полимерных жидкостей [8] используются неоднородные краевые условия типа Дирихле; более сложные неоднородные краевые условия возникают при изучении течений *с проскальзыванием вдоль границы.*

Важность учета эффекта проскальзывания при моделировании течений полимерных сред хорошо известна (см., например, статьи [9–11] и приведенную там литературу). Известно также, что проскальзывание частиц среды может происходить по-разному. Подробное обсуждение основных граничных условий, которые используются в механике жидкостей, приводится в обзоре [11]. В настоящей работе мы остановимся на следующем варианте проскальзывания:

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ на } \Gamma, \tag{0.6}$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|)\boldsymbol{v}_\tau = -(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\tau \ \text{ на } \Gamma, \tag{0.7}$$

где Γ — граница области течения, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ, $\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{n}$ в $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$ — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{v}$, λ — коэффициент проскальзывания, $\lambda : \Gamma \times [0, \infty) \to [0, \infty)$.

Соотношения (0.6), (0.7) — это нелинейный вариант *условия проскальзывания Навье* [11]. Краевые и начально-краевые задачи для уравнений Навье — Стокса с условиями типа Навье рассматриваются во многих работах (см, например, [12–15]).

Отметим результаты двух работ, в которых изучаются начально-краевые задачи с проскальзыванием для модели движения растворов полимеров. В [16] доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи в случае двух пространственных переменных при нестандартном *условии проскальзывания частиц и вихрей.* В [17, гл. 3] установлено существование решений задачи оптимального управления течением фойгтовской жидкости в ограниченной области при линейном условии проскальзывания Навье на границе.

Опишем теперь кратко задачи, которые рассматриваются в предлагаемой работе, и полученные результаты.

В разд. 1 изучается стационарный вариант уравнений модели (0.1)–(0.3) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, при краевых условиях (0.6), (0.7). Основной результат — теорема о существовании слабых решений и некоторых их свойствах (теорема 1).

Заметим, что в уравнения движения водных растворов полимеров входят члены, содержащие производные скорости $\boldsymbol{v}$ до третьего порядка включительно, а априорная оценка имеется только для функции $\boldsymbol{v}$ и ее производных первого порядка. Поэтому для доказательства разрешимости краевой задачи нельзя использовать стандартную схему метода Галеркина. Прием, который применяется в таких ситуациях, основан на решении регуляризованной задачи с дополнительными членами, содержащими малый числовой параметр, и последующем предельном переходе к исходной модели (см., например, [3]). Однако при неоднородных краевых условиях предельный переход осложняется из-за появления (при интегрировании по частям) в уравнениях новых дополнительных членов, величины которых не стремятся к нулю. Поэтому для доказательства теоремы 1 нами предложен другой подход, основанный на выборе специальной полной системы функций в используемых функциональных пространствах (см. разд. 1, лемма).

В разд. 2 рассматривается начально-краевая задача для уравнений Осколкова с краевыми условиями проскальзывания (0.6), (0.7). Установлена глобальная (по времени) разрешимость задачи в слабой постановке и получены оценки решения (теорема 2). Для доказательства существования решения используется метод Фаэдо — Галеркина. Для приближенных решений удается получить более сильные, чем в случае уравнений Навье — Стокса, априорные оценки. Это связано с наличием в системе Осколкова нестационарных членов, учитывающих релаксационные свойства среды. На основе полученных оценок и обобщенной теоремы Арцела — Асколи [18] доказана сходимость приближенных решений к слабому решению исходной задачи и установлена непрерывная зависимость нормы слабого решения $\|\boldsymbol{v}(t,\cdot)\|_{L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)}$ от времени.

1. Краевая задача, описывающая стационарное течение раствора полимеров при условии проскальзывания вдоль твердых стенок

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с локально-липшицевой границей Γ. Рассмотрим систему уравнений, описывающую стационарные течения полимерных растворов в области Ω:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \operatorname{Div}\Big(\nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\Big) + \nabla p = \boldsymbol{f} \ \text{ в } \Omega. \tag{1.1}$$

Предположим, что выполнены условие несжимаемости (0.3), условие непротекания (0.6) и краевое условие

$$\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|)\boldsymbol{v}_\tau = -\Big(\Big[\nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\Big]\mathbf{n}\Big)_\tau \ \text{ на } \Gamma. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) получается в результате подстановки тензора $\boldsymbol{\sigma}$, определенного по формуле (0.2), в соотношение (0.7).

Задачу (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) мы будем изучать в слабой постановке.

Сначала введем необходимые обозначения и функциональные пространства.

Условимся использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $H^m(\Omega, \mathbb{R}^n) = W_2^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ для пространств Лебега и Соболева функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ будем обозначать с помощью круглых скобок $(\cdot,\cdot)$.

Напомним, что сужение функции $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ на Γ определяется по формуле $\boldsymbol{v}|_\Gamma = \gamma_\Gamma \boldsymbol{v}$, где γ_Γ — оператор следа (см., например, [19]).

Пусть

$$\mathcal{X}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{\boldsymbol{v} \in C^\infty\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n\right) : \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$

Определим пространство $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ как замыкание множества $\mathcal{X}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ в пространстве $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Предположим, что функция $\lambda : \Gamma \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ непрерывна и существуют константы $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ такие, что

$$\lambda_0 \leq \lambda(\boldsymbol{x}, \xi) \leq \lambda_1, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \quad \xi \in [0, \infty).$$

Определим скалярное произведение в $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ с помощью формулы

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)} = \nu\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}), \mathbf{D}(\boldsymbol{w})\big) + \lambda_0 \int\limits_\Gamma \boldsymbol{v}_\tau \cdot \boldsymbol{w}_\tau \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{1.3}$$

Для обоснования корректности (1.3) приведем следующий вариант неравенства Корна [20]:

$$\|\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n})} + \|\gamma_\Gamma \boldsymbol{v}\|^2_{L_2(\Gamma,\mathbb{R}^n)} \geq C\|\boldsymbol{v}\|^2_{H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)}, \ \ \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Ясно, что норма, соответствующая скалярному произведению (1.3), эквивалентна норме, индуцированной из $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Пусть $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 1. *Слабым решением* задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) назовем функцию $\boldsymbol{v} \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$, для которой справедливо равенство

$$-\sum_{i=1}^n \Big(v_i \boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\Big) + \nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})\big) - \varkappa \sum_{i=1}^n \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i}\Big)$$
$$+ \int\limits_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|)\boldsymbol{v}_\tau \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau \, d\Gamma = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}) \tag{1.4}$$

при любой функции $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{X}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

З а м е ч а н и е. При определении слабых решений мы используем стандартный для задач "с проскальзыванием" подход (ср., например, с [17; 20; 21]). Поясним, как возникает тождество (1.4).

Пусть пара $(\boldsymbol{v}, p)$ — классическое решение задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) и

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial x_i}. \tag{1.5}$$

Перепишем равенство (1.1) в виде

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} + \nabla p = \boldsymbol{f}. \tag{1.6}$$

Умножим скалярно в L_2 равенство (1.6) на функцию $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{X}(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{i=1}^n \Big(v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}, \boldsymbol{\psi}\Big) - (\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\psi}) + (\nabla p, \boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}). \tag{1.7}$$

Преобразуем по правилу интегрирования по частям члены из левой части (1.7):

$$-\sum_{i=1}^n \Big(v_i \boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\Big) + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - \int\limits_\Gamma (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\Gamma = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}). \tag{1.8}$$

Используя свойство симметричности матрицы $\boldsymbol{\sigma}$, получаем

$$(\boldsymbol{\sigma}, \nabla \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{2} \big(\boldsymbol{\sigma}^T, (\nabla \boldsymbol{\psi})^T\big) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \boldsymbol{\psi}) + \frac{1}{2} \big(\boldsymbol{\sigma}, (\nabla \boldsymbol{\psi})^T\big) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}))\,. \tag{1.9}$$

Так как $\boldsymbol{\psi}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0$, то
$$\int\limits_\Gamma (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\psi}\, d\Gamma = \int\limits_\Gamma (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\tau \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau\, d\Gamma. \tag{1.10}$$
Принимая во внимание (1.2), (1.5), (1.9) и (1.10), из соотношения (1.8) получаем (1.4).

Для доказательства разрешимости задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) нам понадобится следующее утверждение.

Пусть E, F — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathcal{X}$ — линейное многообразие в пространстве F. Предположим, что F непрерывно вложено в E. Определим пространство X как замыкание $\mathcal{X}$ в пространстве E, а пространство Y — как замыкание $\mathcal{X}$ в F.

Пусть X_1 — гильбертово пространство такое, что вложение $X \subset X_1$ компактно.

Пространство, сопряженное с Y, обозначим Y^*. Значение функционала $q \in Y^*$ на элементе $u \in Y$ обозначим через $\langle q, u\rangle$.

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\boldsymbol{A} : X \to Y^*$ и нелинейный оператор $\boldsymbol{K}$: $X_1 \times X \to Y^*$.

Лемма. *Пусть выполнены условия*:

(i) $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geq C\|\boldsymbol{v}\|_X^2$ *для любого элемента* $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$,

(ii) $\langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{v}\rangle \geq 0$ *для любого элемента* $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$,

(iii) *для любых последовательностей* $\{\boldsymbol{u}^m\} \subset X_1$, $\{\boldsymbol{v}^m\} \subset X$ *таких, что* $\boldsymbol{u}^m \to \boldsymbol{u}^0$ *в* X_1, $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}^0$ *слабо в* X, *и любого* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{X}$ *выполнено*
$$\langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{\varphi}\rangle \to \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^0], \boldsymbol{\varphi}\rangle.$$
Тогда для любого $\boldsymbol{f} \in Y^*$ *уравнение*
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{f} \tag{1.11}$$
имеет по крайней мере одно решение $\boldsymbol{v}_* \in X$ *в шаре* $\{\boldsymbol{v} \in X : \|\boldsymbol{v}\|_X \leq \|\boldsymbol{f}\|_{Y^*}/C\}$.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{\chi}^j\}_{j=1}^\infty$ — всюду плотное множество в пространстве X, а $\{\boldsymbol{\gamma}^j\}_{j=1}^\infty$ — всюду плотное множество в Y. Рассмотрим систему векторов
$$\boldsymbol{\varphi}^{11},\ \boldsymbol{\psi}^{11},\ \boldsymbol{\varphi}^{21},\ \boldsymbol{\psi}^{21},\ \boldsymbol{\varphi}^{22},\ \boldsymbol{\psi}^{22},\ \boldsymbol{\varphi}^{31},\ \boldsymbol{\psi}^{31}, \ldots \tag{1.12}$$
такую, что $\boldsymbol{\varphi}^{ij}$, $\boldsymbol{\psi}^{ij} \in \mathcal{X}$ и
$$\|\boldsymbol{\varphi}^{ij} - \boldsymbol{\chi}^j\|_X \leq \frac{1}{i},\ \|\boldsymbol{\psi}^{ij} - \boldsymbol{\gamma}^j\|_Y \leq \frac{1}{i}.$$
Ясно, что система (1.12) является полной как в пространстве X, так и в пространстве Y. Исключим из этой системы все те элементы, каждый из которых может быть представлен как линейная комбинация предшествующих элементов. В результате получим линейно независимую систему векторов, которая также, как и исходная система, является полной и в пространстве X, и пространстве Y. Применим к полученной системе процесс ортогонализации в пространстве X. В результате построим $\{\boldsymbol{\omega}^j\}$ — ортогональный нормированный базис в X с элементами $\boldsymbol{\omega}^j \in \mathcal{X}$. Разумеется, система $\{\boldsymbol{\omega}^j\}$ не обязана быть ортогональным нормированным базисом в Y, однако эта система полна в Y.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующую «конечномерную» задачу: требуется найти вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ такой, что
$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{\omega}^j\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{\omega}^j\rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}^j\rangle,\ j = 1, \ldots, m, \tag{1.13}$$
$$\boldsymbol{v}^m = \sum_{j=1}^m \alpha_j \boldsymbol{\omega}^j. \tag{1.14}$$

Рассмотрим отображение $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, заданное по правилу $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{\omega}^j\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{\omega}^j\rangle$. Принимая во внимание (i), (ii), получаем

$$\big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}\big) = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v}^m], \boldsymbol{v}^m\rangle \ge C\|\boldsymbol{v}^m\|_X^2 = C\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbb{R}^m}^2,$$

т. е. оператор $\boldsymbol{F}$ является коэрцитивным. В этом случае (см. [22, гл. III, §2]) для любого вектора $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$ уравнение $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{h}$ имеет по крайней мере одно решение. Следовательно, задача (1.13), (1.14) разрешима.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ — решение (1.13), (1.14). Оценим величину $\|\boldsymbol{v}^m\|_X$. Умножим j-е уравнение (1.13) на α_j и просуммируем полученные равенства по j от 1 до m. С учетом свойств (i), (ii) получаем оценку

$$\|\boldsymbol{v}^m\|_X \le \|\boldsymbol{f}\|_{Y^*}/C. \tag{1.15}$$

Так как нормы $\|\boldsymbol{v}^m\|_X$ равномерно ограничены по m, то существует элемент $\boldsymbol{v}_* \in X$ такой, что $\boldsymbol{v}^{m_j} \to \boldsymbol{v}_*$ слабо в X для некоторой подпоследовательности $\{m_j\}$. Для простоты будем считать, что $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}_*$ слабо в X при $m \to \infty$. В силу компактности вложения $X \subset X_1$ имеет место сходимость $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}_*$ в X_1.

Свойство (iii) позволяет осуществить предельный переход (при $m \to \infty$) в равенстве (1.13):

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{\omega}^j\rangle + \langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{v}_*], \boldsymbol{\omega}^j\rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}^j\rangle \tag{1.16}$$

для любого $j \in \mathbb{N}$. Так как система $\{\boldsymbol{\omega}^j\}$ является полной в Y, то равенство (1.16) останется справедливым, если заменить в нем $\boldsymbol{\omega}^j$ на произвольный элемент $\boldsymbol{\omega} \in Y$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{v}_*$ — решение (1.11).

Из слабой сходимости $\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}_*$ в пространстве X и оценки (1.15) следует, что

$$\|\boldsymbol{v}_*\|_X \le \|\boldsymbol{f}\|_{Y^*}/C.$$

Лемма доказана.

Сформулируем теперь основной результат данного раздела.

Теорема 1. 1) *Задача* (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) *имеет по крайней мере одно слабое решение* $\boldsymbol{v}$, *удовлетворяющее оценке*

$$\nu\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n})} + \lambda_0\,\|\boldsymbol{v}_\tau\|^2_{L_2(\Gamma,\mathbb{R}^n)} \le C\|\boldsymbol{f}\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{R}^n)},$$

где C — константа.

2) *Множество слабых решений задачи* (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) *секвенциально слабо замкнуто в пространстве* $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства 1) применим лемму. Положим

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad X = X(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad E = H^1(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad F = H^3(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad X_1 = L_4(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Пространство Y определим как замыкание $\mathcal{X}$ в пространстве F.

Рассмотрим операторы $\boldsymbol{A} : X \to Y^*$, $\boldsymbol{K} : X_1 \times X \to Y^*$:

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}\rangle = \nu\,(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})) + \lambda_0 \int\limits_\Gamma \boldsymbol{v}_\tau \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau\, d\Gamma,$$

$$\langle \boldsymbol{K}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{\psi}\rangle = -\sum_{i=1}^n \Big(u_i\boldsymbol{v}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\Big) - \varkappa\sum_{i=1}^n \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), u_i\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i}\Big) + \int\limits_\Gamma [\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|) - \lambda_0]\boldsymbol{v}_\tau \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau\, d\Gamma.$$

Нетрудно убедиться, что для операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}$ выполнены условия (i)–(iii) леммы. Отсюда и следует утверждение 1).

Докажем теперь 2). Пусть $\{\boldsymbol{v}^j\}$ — последовательность слабых решений задачи (1.1), (0.3), (0.6), (1.2) и $\boldsymbol{v}^j \to \boldsymbol{v}^0$ слабо в $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Покажем, что $\boldsymbol{v}^0$ — слабое решение.

Согласно теоремам вложения соболевских пространств (см, например, [23]), пространство $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ компактно вложено в $L_4(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\boldsymbol{v}^j \to \boldsymbol{v}^0$ сильно в $L_4(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(v_i^j \boldsymbol{v}^j, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \Big) \to \sum_{i=1}^{n} \Big(v_i^0 \boldsymbol{v}^0, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \Big),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^j), v_i^j \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i} \Big) \to \sum_{i=1}^{n} \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0), v_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i} \Big)$$

для любой функции $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{X}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ при $j \to \infty$.

Используя свойство компактности оператора $\gamma_\Gamma : X(\Omega, \mathbb{R}^n) \to L_2(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ и теорему М.А. Красносельского об операторе суперпозиции (см. [24]), нетрудно установить, что

$$\int_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau^j|) \boldsymbol{v}_\tau^j \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau \, d\Gamma \to \int_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau^0|) \boldsymbol{v}_\tau^0 \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau \, d\Gamma.$$

В равенстве (1.4) заменим $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{v}^j$ и перейдем к пределу при $j \to \infty$:

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(v_i^0 \boldsymbol{v}^0, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \right) + \nu \left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}) \right) - \varkappa \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0), v_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})}{\partial x_i} \right)$$

$$+ \int_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau^0|) \boldsymbol{v}_\tau^0 \cdot \boldsymbol{\psi}_\tau \, d\Gamma = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}).$$

Таким образом, функция $\boldsymbol{v}^0$ — слабое решение, что и требовалось установить.

Теорема 1 полностью доказана.

2. Начально-краевая задача, описывающая нестационарные течения полимерных жидкостей при условии проскальзывания вдоль границы

Рассмотрим теперь нестационарную систему уравнений (0.5), (0.3) в цилиндре $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$, с условием непротекания (0.6), краевым условием

$$\lambda(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{v}_\tau|) \boldsymbol{v}_\tau = -\Big(\Big[\nu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \varkappa \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\partial t} \Big] \mathbf{n} \Big)_\tau \quad \text{на } \Gamma \tag{2.1}$$

и начальным условием

$$\boldsymbol{v}(0, \cdot) = \boldsymbol{u}. \tag{2.2}$$

Отметим, что краевое условие (2.1) следует из соотношений (0.4), (0.7).

Мы будем использовать стандартные обозначения $C([0,T], E)$, $C^1([0,T], E)$, $L_q(0,T; E)$ для пространств непрерывных, C^1-гладких и интегрируемых в степени q функций $\boldsymbol{v} : [0, T] \to E$, где E — некоторое банахово пространство.

Предположим, что $\boldsymbol{f} \in L_\infty\big([0,T]; L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)\big)$, $\boldsymbol{u} \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 2. *Слабым решением* задачи (0.5), (0.3), (0.6), (2.1), (2.2) назовем функцию $\boldsymbol{v} \in L_2\big(0, T; X(\Omega, \mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,T], L_4(\Omega, \mathbb{R}^n)\big)$ такую, что $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{u}$ и

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\psi}) - \sum_{i=1}^{n} \Big(v_i(t) \boldsymbol{v}(t), \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_i} \Big) + \nu \left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}(t)), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}) \right) + \varkappa \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}(t)), \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}) \right)$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau(t,\boldsymbol{x})|)\boldsymbol{v}_\tau\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau\,d\Gamma=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi})\ \forall\boldsymbol{\psi}\in\mathcal{X}(\Omega,\mathbb{R}^n)$$

в смысле распределений на $(0,T)$.

З а м е ч а н и е. В этом разделе для вычисления скалярного произведения функций пространства $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$ мы будем использовать формулу (ср. с формулой (1.3))

$$[[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]]_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}=\varkappa\big(\mathbf{D}\,(\boldsymbol{v})\,,\mathbf{D}\,(\boldsymbol{w})\big)+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}).$$

Такой выбор скалярного произведения упрощает вывод оценок нестационарных решений (см. доказательство теоремы 2).

Согласно [20, гл. 1, теорема 2.2], норма, соответствующая $[[\cdot,\cdot]]_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}$, эквивалентна норме, индуцированной из пространства $H^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. *Начально-краевая задача* (0.5)*,* (0.3)*,* (0.6)*,* (2.1)*,* (2.2) *имеет по крайней мере одно слабое решение* $\boldsymbol{v}$*, удовлетворяющее оценкам*

$$\max_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le C\exp(T)\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\|\boldsymbol{f}\|^2_{L_2(0,T;[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*)}\right),\tag{2.3}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{L_2(0,T;X(\Omega,\mathbb{R}^n))}\le T\exp(T)\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\|\boldsymbol{f}\|^2_{L_2(0,T;[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*)}\right),\tag{2.4}$$

где C *— константа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\boldsymbol{\psi}^j\}$ — ортогональный нормированный базис в $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем $m\in\mathbb{N}$. Будем искать приближенные решения вида

$$\boldsymbol{v}^m(t,\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^m\alpha_{mj}(t)\boldsymbol{\psi}^j(\boldsymbol{x}),\tag{2.5}$$

где $\alpha_{mj}:[0,T]\to\mathbb{R}$ — неизвестные функции.

Рассмотрим задачу: требуется найти вектор-функцию $\boldsymbol{\alpha}_m(t)=(\alpha_{m1}(t),\ldots,\alpha_{mm}(t))$ такую, что

$$\big([\boldsymbol{v}^m(t)]',\boldsymbol{\psi}^k\big)-\sum_{i=1}^n\left(v_i^m(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^k}{\partial x_i}\right)+\nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\big)+\varkappa\big(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\big)$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}^m_\tau(t,\boldsymbol{x})|)\boldsymbol{v}^m_\tau(t)\cdot\boldsymbol{\psi}^k_\tau\,d\Gamma=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}^k),\quad k=1,\ldots,m,\tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{v}^m(0,\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^m(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\psi}^j)_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\boldsymbol{\psi}^j(\boldsymbol{x}).\tag{2.7}$$

Ясно, что (2.6), (2.7) — это задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Прежде всего установим априорные оценки решений (2.6), (2.7).

Предположим, что вектор-функция $(\alpha_{m1}(t),\ldots,\alpha_{mm}(t))$ удовлетворяет (2.6), (2.7), а функция $\boldsymbol{v}^m$ определена равенством (2.5). Умножим (2.6) на $\alpha_{mk}(t)$ и просуммируем полученные уравнения по k от 1 до m. С учетом соотношения

$$\sum_{i=1}^n\left(v_i^m(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial\boldsymbol{v}^m(t)}{\partial x_i}\right)=0$$

получаем

$$\big([\boldsymbol{v}^m(t)]',\boldsymbol{v}^m(t)\big)+\nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t))\big)+\varkappa\left(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m)\right)$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}^m_\tau(t,\boldsymbol{x})|)\|\boldsymbol{v}^m_\tau(t,\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma=\big(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}^m(t)\big).\tag{2.8}$$

Равенство (2.8) перепишем в виде

$$[[(\boldsymbol{v}^m(t))',\boldsymbol{v}^m(t)]]_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\nu\big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t))\big)$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}^m_\tau(t,\boldsymbol{x})|)\|\boldsymbol{v}^m_\tau(t,\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma=\big(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}^m(t)\big).$$

Отсюда находим, что $\dfrac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le 2\,|\big(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}^m(t)\big)|$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*}+\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}.\tag{2.9}$$

Интегрируя (2.9) в пределах от 0 до t и применяя лемму Гронуолла, получаем

$$\|\boldsymbol{v}^m(t)\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le\exp(T)\Bigg(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\int\limits_0^T\|\boldsymbol{f}(\tau)\|^2_{[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*}\,d\tau\Bigg).\tag{2.10}$$

Из (2.10), (2.5) следует, что

$$\max_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^m\alpha^2_{mj}(t)\le\exp(T)\Bigg(\|\boldsymbol{u}\|^2_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}+\int_0^T\|\boldsymbol{f}(\tau)\|^2_{[X(\Omega,\mathbb{R}^n)]^*}\,d\tau\Bigg).\tag{2.11}$$

Оценка (2.11) показывает, что задача (2.6), (2.7) разрешима на отрезке $[0,T]$.

Обоснуем теперь возможность предельного перехода в (2.6), (2.7) при $m\to\infty$.

Умножим (2.6) на $\alpha'_{mk}(t)$ и просуммируем полученные уравнения по k от 1 до m:

$$\big([\boldsymbol{v}^m(t)]',[\boldsymbol{v}^m(t)]'\big)-\sum_{i=1}^n\Big(v^m_i(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial[\boldsymbol{v}^m(t)]'}{\partial x_i}\Big)+\nu\left(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]')\right)$$

$$+\varkappa\left(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]')\right)+\int\limits_{\Gamma}\lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}^m_\tau(t,\boldsymbol{x})|)\boldsymbol{v}^m_\tau(t)\cdot[\boldsymbol{v}^m_\tau(t)]'\,d\Gamma=(\boldsymbol{f}(t),[\boldsymbol{v}^m(t)]').\tag{2.12}$$

Используя неравенство Коши и (2.10), из соотношения (2.12) можно вывести оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\|[\boldsymbol{v}^m(t)]'\|_{X(\Omega,\mathbb{R}^n)}\le C_0\tag{2.13}$$

с мажорантой C_0, зависящей от параметров модели и не зависящей от m.

Из оценок (2.10), (2.13) вытекает, что последовательность $\boldsymbol{v}^m$ ограничена в пространстве $C^1\big([0,T],X(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$.

Из компактности вложения $X(\Omega,\mathbb{R}^n)\subset L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)$ и обобщенной теоремы Арцела — Асколи [18] следует, что вложение $C^1\big([0,T],X(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)\subset C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$ компактно. Поэтому множество $\{\boldsymbol{v}^m\colon m\in\mathbb{N}\}$ относительно компактно в пространстве $C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$, и, следовательно, существует функция $\boldsymbol{v}^0\in C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$ такая, что

$$\boldsymbol{v}^{m_j}\to\boldsymbol{v}^0\ \text{ сильно в } C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big)$$

для некоторой подпоследовательности m_j. Для простоты будем полагать, что

$$\boldsymbol{v}^m\to\boldsymbol{v}^0\ \text{ сильно в } C\big([0,T],L_4(\Omega,\mathbb{R}^n)\big).\tag{2.14}$$

В силу оценки (2.10) имеет место также сходимость

$$\boldsymbol{v}^m \to \boldsymbol{v}^0 \ \text{ слабо в } L_2\big(0,T;X(\Omega,\mathbb{R}^n)\big). \tag{2.15}$$

Пусть $\eta(t)$ — гладкая скалярная функция с носителем в $(0,T)$. Умножим скалярно в $L_2(0,T)$ равенство (2.6) на функцию $\eta(t)$:

$$\int_0^T \Big([\boldsymbol{v}^m(t)]',\boldsymbol{\psi}^k\Big)\,\eta(t)\,dt - \int_0^T \sum_{i=1}^n \Big(v_i^m(t)\boldsymbol{v}^m(t),\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^k}{\partial x_i}\Big)\eta(t)\,dt + \nu\int_0^T \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^m(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta(t)\,dt$$

$$+\int_0^T \varkappa\Big(\boldsymbol{D}([\boldsymbol{v}^m(t)]'),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta(t)\,dt + \int_0^T\Big(\int_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau^m(t,\boldsymbol{x})|)\,\boldsymbol{v}_\tau^m(t)\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau^k\,d\Gamma\Big)\eta(t)\,dt$$

$$=\int_0^T(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}^k)\eta(t)\,dt. \tag{2.16}$$

Преобразуем по правилу интегрирования по частям первое и четвертое слагаемое из левой части (2.16) и перейдем к пределу при $m\to\infty$. С учетом (2.14), (2.15) получаем

$$-\int_0^T \Big(\boldsymbol{v}^0(t),\boldsymbol{\psi}^k\Big)\,\eta'(t)\,dt - \int_0^T \sum_{i=1}^n \Big(v_i^0(t)\boldsymbol{v}^0(t),\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^k}{\partial x_i}\Big)\eta(t)\,dt + \nu\int_0^T \Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta(t)\,dt$$

$$-\int_0^T \varkappa\Big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^0(t)),\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^k)\Big)\,\eta'(t)\,dt + \int_0^T\Big(\int_\Gamma \lambda(\boldsymbol{x},|\boldsymbol{v}_\tau^0(t,\boldsymbol{x})|)\,\boldsymbol{v}_\tau^0(t)\cdot\boldsymbol{\psi}_\tau^k\,d\Gamma\Big)\eta(t)\,dt$$

$$=\int_0^T(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}^k)\eta(t)\,dt \tag{2.17}$$

для произвольного $k\in\mathbb{N}$. Поскольку $\{\boldsymbol{\psi}^j\}$ — базис в пространстве $X(\Omega,\mathbb{R}^n)$, равенство (2.17) останется справедливым, если заменить в нем $\boldsymbol{\psi}^k$ на произвольный элемент $\boldsymbol{\psi}\in X(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $\boldsymbol{v}^0$ — слабое решение задачи (0.5), (0.3), (0.6), (2.1), (2.2).

Оценки решения (2.3), (2.4) следуют из (2.10). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Павловский В.А.** К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 809–812.
2. **Осколков А.П.** О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. науч. семинара ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 98–136. (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 7.)
3. **Осколков А.П.** О нестационарных течениях вязко-упругих жидкостей // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 159. С. 103–131. (Краевые задачи математической физики, 12.)
4. **Осколков А.П.** Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164. (Краевые задачи математической физики, 13.)
5. **Свиридюк Г.А.** Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62–70.
6. **Корпусов М.О., Свешников А.Г.** О разрушении решения системы уравнений Осколкова // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 4. С. 83–108.

7. **Барановский Е.С.** Исследование математических моделей, описывающих течения жидкости Фойгта с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2011. № 1. С.77–93.
8. **Барановский Е.С.** Задача оптимального граничного управления для уравнений движения полимерных растворов // Мат. тр. 2013. Т. 16, № 2. С. 13–27.
9. **Denn M.** Extrusion instabilities and wall slip // Annu. Rev. Fluid Mech. 2001. Vol. 33. P. 265–287.
10. **Hayat T., Masood Khan, Ayub M.** On non-linear flows with slip boundary condition // Z. Angew. Math. Phys. 2005. Vol. 56. P. 1012–1029.
11. **Раджагопал К.Р.** О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 2. С. 111–121.
12. **Farwig R.** Stationary solutions of compressible Navier–Stokes equations with slip boundary condition // Comm. Partial Diff. Eq. 1989. Vol. 14, iss. 11. P. 1579–1606.
13. **Tani A., Itoh S., Tanaka N.** The initial value problem for the Navier–Stokes equations with general slip boundary condition // Adv. Math. Sci. Appl. 1994. Vol. 4. P. 51–69.
14. **Itoh Sh., Tanaka N., Tani A.** Steady solution and its stability for Navier–Stokes equations with general Navier slip boundary condition // J. Math. Sci. 2009. Vol. 159, no. 4. P. 5–130.
15. **Masmoudi N., Rousset F.** Uniform regularity for the Navier–Stokes equation with Navier boundary condition // Arch. Rational Mech. Anal. 2012. Vol. 203, no. 2. P. 529–575.
16. **Ладыженская О.А.** О глобальной однозначной разрешимости двумерных задач для водных растворов полимеров // Зап. науч. семинара ПОМИ. 1997. Т. 243. С. 138–153. (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 28.)
17. **Кузьмин М.Ю.** О краевых задачах некоторых моделей гидродинамики с условиями проскальзывания на границе: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2007. 106 с.
18. **Simon J.** Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1986. Vol. 146, no. 1. P. 65–96.
19. **Galdi G.P.** An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Steady-state problems. New York: Springer, 2011. 1018 p.
20. **Литвинов В.Г.** Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 376 с.
21. **Барановский Е.С.** Задача оптимального управления стационарным течением среды Джеффриса при условии проскальзывания на границе // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 18–27.
22. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
23. **Adams R.A., Fournier J.J.F.** Sobolev spaces. Amsterdam: Elsevier, 2003. 320 p.
24. **Скрыпник И.В.** Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1991. 448 с.

Артемов Михаил Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Воронежский государственный университет
e-mail: artemov_m_a@mail.ru

Поступила 16.04.2014

Барановский Евгений Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
доцент
Воронежский государственный университет
e-mail: esbaranovskii@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ π-ЗАМКНУТЫ. I [1]

В. А. Белоногов

Изучаются конечные простые неабелевы группы G, которые при некотором множестве простых чисел π имеют лишь π-замкнутые максимальные подгруппы, хотя сами не являются π-замкнутыми (свойство $(*)$ для (G,π)). В статье найден некоторый список $\mathcal{L}$ конечных простых групп, в котором содержится любая группа G с указанным выше свойством (для некоторого π), и доказывается, что $2 \notin \pi$ для любой пары (G,π) с этим свойством (теорема 1). Кроме того, для каждой спорадической простой группы G из $\mathcal{L}$ указаны все множества π простых чисел такие, что пара (G,π) имеет свойство $(*)$ (теорема 2). Доказательство использует результаты автора о контроле простого спектра конечных простых групп.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, π-замкнутая группа, максимальная подгруппа, контроль простого спектра группы.

V. A. Belonogov. Finite simple groups in which all maximal subgroups are π-closed. I.

Finite simple nonabelian groups G that are not π-closed for some set of primes π but have π-closed maximal subgroups (property $(*)$ for (G,π)) are studied. We give a list $\mathcal{L}$ of finite simple groups that contains any group G with the above property (for some π). It is proved that $2 \notin \pi$ for any pair (G,π) with property $(*)$ (Theorem 1). In addition, we specify for any sporadic simple group G from $\mathcal{L}$ all sets of primes π such that the pair (G,π) has property $(*)$ (Theorem 2). The proof uses the author's results on the control of prime spectra of finite simple groups.

Keywords: finite group, simple group, π-closed group, maximal subgroup, control of prime spectrum of a group.

Введение

Одно из важных направлений в развитии теории конечных групп составляют исследования групп G, все собственные подгруппы которых обладают некоторым теоретико-групповым свойством Σ, в то время как сама группа G свойством Σ не обладает. Такие группы G называют *минимальными не Σ-группами.* Начало этому направлению положила работа Г. Миллера и Х. Морено 1903 г. [1], в которой было определено строение конечных минимальных не абелевых групп. Эти группы называются *группами Миллера — Морено.* Второй очень важный шаг в этом направлении был сделан О. Ю. Шмидтом в работе 1924 г. [2], где получено описание конечных минимальных не нильпотентных групп. Такие группы называются в настоящее время *группами Шмидта.* Ещё можно упомянуть работы Б. Хупперта [3], К. Дёрка [4], А. И. Старостина [5], Л. А. Шеметкова [6, гл. VI] и многие другие.

Пусть π — произвольное множество простых чисел. Очень широкими обобщениями понятия нильпотентной группы являются понятие *π-разложимой* (или (π,π')-разложимой) группы, т. е. группы, являющейся прямым произведением π-группы и π'-группы, и понятие *π-замкнутой* группы, т. е. группы, имеющей нормальную π-холлову подгруппу. Из [7, теорема 1] и [8, теорема] следует описание конечных не π-разложимых групп, все собственные подгруппы которых π-разложимы. Оказалось, что множество всех таких групп совпадает с множеством всех групп Шмидта. Новое доказательство этого факта получено в [9, предложение 1]).

Следующим естественным шагом в этом направлении является изучение пар (G,π) таких, что

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469) и Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5).

(∗) *G есть конечная не π-замкнутая группа, все собственные подгруппы которой π-замкнуты.*

Поскольку подгруппы π-замкнутой группы π-замкнуты, то, формулируя эту задачу, в (∗) вместо "собственные", можно написать "максимальные".

Как показано в [10, теорема 1′], справедливо следующее (отмеченное без доказательства в [7, конец § 1]) предложение.

Предложение 1. Для любых G и π со свойством (∗) либо $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, либо G — группа Шмидта.

В частности, конечная разрешимая не π-замкнутая группа, все максимальные подгруппы которой π-замкнуты, является группой Шмидта (при любом заданном π).

Согласно предложению 1 отмеченная выше задача описания пар (G, π) со свойством (∗) практически сводится к случаю простых неабелевых групп G.

В настоящей статье получены следующие две теоремы. Доказательство теоремы 1 использует классификацию конечных простых групп [11].

Теорема 1. *Пусть G — конечная простая группа и π — множество простых чисел. Предположим, что группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты. Тогда*

(I) $2 \notin \pi$;

(II) *G есть группа одного из следующих типов* (*всюду q есть степень некоторого простого числа*):

(1) $G \simeq A_p$, *где p — простое число и* $p \geq 5$;
(2) $G \simeq PSL_2(q)$, *где* $q > 5$;
(3) $G \simeq PSL_r(q)$, *где r — нечётное простое число*;
(4) $G \simeq PSU_r(q)$, *где r — нечётное простое число*;
(5) $G \simeq Sz(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(6) $G \simeq {}^2G_2(q)$, *где* $q = 3^{2n+1} \geq 27$;
(7) $G \simeq {}^3D_4(q)$;
(8) $G \simeq {}^2F_4(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(9) $G \simeq E_8(q)$;
(10) *G изоморфна одной из групп* $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi'_{24}$ *и* F_2.

В частности, согласно утверждению (I), если в конечной простой неабелевой группе G все максимальные подгруппы π-замкнуты и $2 \in \pi$, то G есть π-группа.

Дальнейшей естественной задачей является определение для каждой группы G из пунктов (1)–(10) множества всех множеств π, для которых выполнено условие теоремы 1. Здесь мы приведём её решение лишь для групп пункта (10).

Теорема 2. *Пусть G — конечная спорадическая простая группа и π — подмножество из $\pi(G)$. Следующие утверждения равносильны*:

(A) *группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты*;
(B) *выполнено одно из условий*:
(1) $G \simeq M_{23}$ *и* $\pi = \{23\}$;
(2) $G \simeq J_1$ *и* $\pi = \{19\}$;
(3) $G \simeq J_4$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{29, 43\}$;
(4) $G \simeq Ly$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$;
(5) $G \simeq Fi'_{24}$ *и* $\pi = \{29\}$;
(6) $G \simeq F_2$ *и* $\pi = \{47\}$.

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие. *Пусть G — конечная спорадическая простая группа и p — простое число, делящее $|G|$. Следующие утверждения равносильны*:

(A) *все максимальные подгруппы группы G p-замкнуты*;
(B) *выполнено одно из условий*:

(1) $G \simeq M_{23}$ *и* $p = 23$;
(2) $G \simeq J_1$ *и* $p = 19$;
(3) $G \simeq J_4$ *и* $p \in \{29, 43\}$;
(4) $G \simeq Ly$ *и* $p \in \{37, 67\}$;
(5) $G \simeq Fi'_{24}$ *и* $p = 29$;
(6) $G \simeq F_2$ *и* $p = 47$.

Метод доказательства теоремы 1 основан на результатах статьи автора [9] (см. предложения 1.1–1.3 ниже), где используется введённое в ней понятие контроля простого спектра группы.

Пусть G — конечная группа. Множество $\pi(G)$ всех простых делителей её порядка будем называть (следуя фольклору) *простым спектром* группы G. Скажем, что секции $H_1, \ldots, H_m$ группы G *контролируют простой спектр группы* G (или *контролируют* $\pi(G)$), если

$$\pi(H_1) \cup \ldots \cup \pi(H_m) = \pi(G).$$

В этой ситуации можно сказать также, что множество $\{H_1, \ldots, H_m\}$ *контролирует* $\pi(G)$.

Доказательство теорем 1 и 2 во многом подобно доказательству, применённому автором в недавней работе [12] при описании конечных групп, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы, т.е. конечных групп, каждая максимальная подгруппа которых либо π-разложима, либо является группой Шмидта.

Используемые далее обозначения в основном стандартны (см., например, [13–16]). В частности, *секция* группы G есть гомоморфный образ некоторой её подгруппы; *собственная секция* группы G есть секция группы G, отличная от G; если π есть множество простых чисел, то π' есть множество всех простых чисел, не содержащихся в π; π-холлова подгруппа группы G — это π-подгруппа из G, индекс которой в G есть π'-число (т.е. не делится на простые числа из π); группа, имеющая нормальную π-холлову подгруппу, называется π-замкнутой. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n.

Используются также следующие несколько видоизменённые обозначения из Атласа [16, с. XX]. Запись $G \doteq A.B$ (читается “G имеет тип $A.B$” или “G есть группа типа $A.B$”) означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т.е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ (в частности, в настоящей статье) или знак : (в Атласе [16] и многих других работах). Запись $G \doteq A_1.A_2. \ldots .A_n$ при $n \geq 3$ означает, что $G \doteq (\ldots((A_1.A_2).A_3). \ldots .A_{n-1}).A_n$ и при любом $i \leq n$ группа G имеет нормальную подгруппу $N_i \doteq A_1.A_2. \ldots .A_i$.

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [17].

1. Предварительные результаты

Далее мы будем использовать следующие результаты из [9, теоремы 1–3] о контроле простого спектра конечной простой группы.

Предложение 1.1 [9, теорема 1]. *Пусть G — конечная знакопеременная или классическая простая группа. Тогда существует пара секций X и Y собственных подгрупп из G такая, что $\pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$ (допускается равенство $X = Y$). Более того, секции X и Y можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой, группой Фробениуса или (в одном случае) диэдральной группой. Ниже указаны примеры таких секций X, Y в G:*

(1) *если $G \simeq A_n$, где $n \geq 5$, то*

(а) *при непростом n $X = Y \simeq A_{n-1}$;*

(б) *при простом n $X \simeq A_{n-1}$ и $Y \simeq N_G(P) \doteq P \leftthreetimes Z_{(n-1)/2}$, где $|P| = n$ (группа Фробениуса);*

(2) *если* $G \simeq PSL_n(q)$, *где* $n \geq 2$ *и* $(n,q) \notin \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,9),(4,2)\}$, *то*

(а) *при* $n = 2$ $X \simeq D_{2(q+1)/(2,q+1)}$, $Y \doteq Z_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/(2,q-1)}$ (*группа Фробениуса*);

(б) *при непростом* $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_m(q^r)$, *где* $n = mr$ *и* r — *простое число*;

(в) *при простом* $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$ *и* $Y \doteq Z_{t/(t,q-1)} \leftthreetimes Z_n$, *где* $t = (q^n-1)/(q-1)$ (*группа Фробениуса*);

(3) *если* $G \simeq PSU_n(q)$, *где* $n \geq 3$ *и* $(n,q) \neq (3,2)$, *то*

(а) *при чётном* n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_{n/2}(q^2)$;

(б) *при нечётном непростом* n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_m(q^r)$, *где* $n = mr$ *и* r — *простое число*;

(в) *при нечётном простом* n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \doteq Z_{t/(t,q+1)} \leftthreetimes Z_n$, *где* $t = (q^n+1)/(q+1)$ (*группа Фробениуса*);

(4) *если* $G \simeq PSp_{2n}(q)$, *где* $n \geq 2$ *и* $(n,q) \neq (2,2)$, *то*
$X \simeq PSp_{2n-2}(q)$ *и* $Y \simeq PSp_2(q^n)$;
при $n = 2$ $\pi(G) = \pi(Y)$;

(5) *если* $G \simeq P\Omega_{2n+1}(q)$, *где* $n \geq 3$ *и* q *нечётно, то*
$X \simeq P\Omega^+_{2n}(q)$ *и* $Y \simeq P\Omega^-_{2n}(q)$;
при чётном n $\pi(G) = \pi(Y)$;

(6) *если* $G \simeq P\Omega^+_{2n}(q)$, *где* $n \geq 4$, *то* $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$ *и* $Y \simeq PSL_n(q)$;
при чётном n $\pi(G) = \pi(X)$;

(7) *если* $G \simeq P\Omega^-_{2n}(q)$, *где* $n \geq 4$, *то*

(а) *при нечётном* n $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_n(q)$;

(б) *при чётном* $n = 2m$ $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq P\Omega^-_{2m}(q^2)$.

Предложение 1.2 [9, теорема 2]. *Пусть* G — *конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда существует пятёрка секций* X, Y, Z, V, W *собственных подгрупп группы* G (*среди которых могут быть равные*) *такая, что* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$. *Более того, эти секции можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой или группой Фробениуса. Ниже указаны примеры таких секций в* G:

(1) *если* $G \simeq Sz(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ (*все — группы Фробениуса*); $c(G) = 3$;

(2) *если* $G \simeq G_2(q)$ *с* $q > 2$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq SL_3(q)$ *и* $Y \simeq SU_3(q)$; $c(G) = 2$ *при* $q > 3$ *и* $c(G_2(3)) = 1$;

(3) *если* $G \simeq {}^2G_2(q)$ *с* $q = 3^{2n+1} \geq 27$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq PSL_2(q)$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ (Y, Z — *группы Фробениуса*); $c(G) = 3$;

(4) *если* $G \simeq {}^3D_4(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq SL_2(q^3)$ (*или* $G_2(q)$) *и* $Y \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$ (*группа Фробениуса*); $c(G) = 2$;

(5) *если* $G \simeq F_4(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq \Omega_9(q)$ *и* $Y \simeq {}^3D_4(q)$;

(6) *если* $G \simeq {}^2F_4(q)$ *с* $q = 2^{2n+1} \geq 8$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, *где* $X \simeq Sz(q)$ (*или* $Sp_4(q)$), $Y \simeq SU_3(q)$, $Z \doteq Z_{q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ *и* $V \doteq Z_{q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ (Z, V — *группы Фробениуса*); $c(G) = 4$;

(6a) *если* $G \simeq {}^2F_4(2)'$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq PSL_2(25)$;

(7) *если* $G = E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSL_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^+_{10}(q)$;

(8) *если* $G \simeq {}^2E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^-_{10}(q)$;

(9) *если* $G \simeq E_7(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq E_6(q)$, $Y \simeq {}^2E_6(q)$, $Z \simeq PSL_2(q^7)$;

(10) *если* $G \simeq E_8(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, *где* $X \simeq E_7(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^4)$, $Z \simeq PSU_5(q^2)$, $V \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{30}$ *и* $W \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{30}$, *где* $a = q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1$ *и* $b = q^8-q^7+q^5-q^4+q^3-q+1$ (V, W — *группы Фробениуса*).

Предложение 1.3 [9, теорема 3]. *Пусть G — спорадическая простая группа. Тогда справедливы следующие утверждения, где X, Y, Z, V, W есть некоторые секции собственных подгрупп группы G:*

(1) *если $G \simeq M_{11}$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq PSL_2(11)$;*

(2) *если $G \simeq M_{12}$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{11}$;*

(3) *если $G \simeq M_{22}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(11)$ и $Y \simeq A_7$;*

(4) *если $G \simeq M_{23}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq M_{22}$ (или A_7) и $Y \doteq Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$ (группа Фробениуса);*

(5) *если $G \simeq M_{24}$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{23}$;*

(6) *если $G \simeq J_1$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq PSL_2(11)$, $Y \doteq Z_7 \leftthreetimes Z_6$ и $Z \doteq Z_{19} \leftthreetimes Z_6$ (Y и Z — группы Фробениуса);*

(7) *если $G \simeq J_2$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(7)$ и $Y \simeq A_5$;*

(8) *если $G \simeq J_3$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(17)$ и $Y \simeq PSL_2(19)$;*

(9) *если $G \simeq J_4$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, где $X \simeq L_2(23)$ (или M_{24}), $Y \simeq PSL_2(32)$ (или $PSL_5(2)$), $Z \simeq PSU_3(11)$, $V \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$ и $W \doteq Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$ (V и W — группы Фробениуса);*

(10) *если $G \simeq HS$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{22}$;*

(11) *если $G \simeq He$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSp_4(4)$ и $Y \simeq A_7$;*

(12) *если $G \simeq Mc$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{22}$;*

(13) *если $G \simeq Suz$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq G_2(4)$, $Y \simeq M_{11}$ (или $Z_{11} \leftthreetimes Z_{10}$);*

(14) *если $G \simeq Ly$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq G_2(5)$, $Y \doteq Z_{37} \leftthreetimes Z_{18}$ и $Z \doteq Z_{67} \leftthreetimes Z_{22}$ (Y и Z — группы Фробениуса);*

(15) *если $G \simeq Ru$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_2(29)$ и $Y \simeq Sz(8)$;*

(16) *если $G \simeq O'N$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq J_1$ и $Y \simeq PSL_2(31)$;*

(17) *если $G \simeq Co_3$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{23}$;*

(18) *если $G \simeq Co_2$, то $\pi(G) = \pi(X)$, где $X \simeq M_{23}$;*

(19) *если $G \simeq Co_1$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq Co_2$ и $Y \simeq Suz$;*

(20) *если $G \simeq Fi_{22}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq M_{22}$ и $Y \simeq \Omega_7(3)$;*

(21) *если $G \simeq Fi_{23}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq Fi_{22}$, $Y \simeq Sp_8(2)$ и $Z \simeq M_{23}$;*

(22) *если $G \simeq Fi'_{24}$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq Fi_{23}$ и $Y \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{14}$ (группа Фробениуса);*

(23) *если $G \simeq F_5\,(= HN)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq A_{12}$ и $Y \simeq PSU_3(8)$;*

(24) *если $G \simeq F_3\,(= Th)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq PSL_5(2)$, $Y \simeq PSL_2(19)$ и $Z \simeq PSL_3(3)$;*

(25) *если $G \simeq F_2\,(= B)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq Fi_{23}$, $Y \simeq F_3$, $Z \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$ (группа Фробениуса);*

(26) *если $G \simeq F_1\,(= M)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, где $X \simeq F_2$, $Y \simeq PSL_2(59)$, $Z \simeq PSL_2(71)$, $V \simeq \Omega_8^-(3)$ (или $V \doteq Z_{41} \leftthreetimes Z_{40}$ (группа Фробениуса)).*

В каждом из утверждений (1)–(26) *выбрано минимальное число секций собственных подгрупп группы G, контролирующих её простой спектр, и каждая из этих секций является либо простой неабелевой группой, либо группой Фробениуса.*

Из [18, табл. 8.1] и [13, лемма 15.1.1] непосредственно вытекает следующее утверждение (в каждом из пунктов (1)–(8) после слова "если" записано необходимое и достаточное условие существования указанной максимальной подгруппы, под *классом* понимается класс сопряжённых подгрупп в G).

Предложение 1.4. *Пусть $G = PSL_2(q)$, где $q = p^f$, p — простое число, $f \in \mathbb{N}$, и $d := (2, q-1)$. Тогда любая максимальная подгруппа группы G имеет строение, указанное в следующем списке:*

(1) *$E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$ — группа Фробениуса (существует при всех q, 1 класс);*

(2) *$D_{2(q-1)/d}$, если $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$ (1 класс);*

(3) $D_{2(q+1)/d}$, *если* $q \notin \{7, 9\}$ (1 *класс*);

(4) $PSL_2(q_0)$, *если* $q = q_0^r$, *где* $q_0 \mid q$, $q_0 \neq 2$, r — *простое, и* r *нечётно при нечётном* q (1 *класс при каждом* r);

(5) $PGL_2(q_0)$, *если* q *нечётно и* $q = q_0^2$, $q_0 \mid q$ (2 *класса*);

(6) S_4, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod 8$ (2 *класса*);

(7) A_4, *если* $q = p \equiv \pm 3, 5, \pm 13 \pmod{40}$ (1 *класс*);

(8) A_5, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ *или* $q = p^2$, *где* $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$ (2 *класса*).

Заметим, что в случаях (5)–(8) число q нечётно.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — конечная простая неабелева группа, причём для некоторого множества π простых чисел все максимальные подгруппы группы G π-замкнуты, а сама группа G не является π-замкнутой. Зафиксируем некоторое такое множество π.

Понятно, что

$$\text{все собственные секции группы } G\ \pi\text{-замкнуты.} \tag{2.1}$$

Поэтому справедлива

Лемма 2.1. *Пусть K — собственная секция группы G. Если K не имеет неединичных нормальных π-холловых подгрупп, то $\pi(K) \subseteq \pi'$. В частности, простые неабелевы собственные секции группы G либо все являются π-группами (если $2 \in \pi$), либо все являются π'-группами (если $2 \in \pi'$).*

Согласно классификации конечных простых групп [11] G есть либо знакопеременная группа, либо группа лиева типа, либо спорадическая группа. Контроль простого спектра этих групп описан в предложениях 1.1–1.3.

Случай 1. Предположим сначала, что G есть знакопеременная или классическая простая группа. Тогда согласно предложению 1.1 группа G имеет секции X и Y такие, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, причём секция X — простая неабелева или диэдральная группа, а секция Y — простая неабелева группа или группа Фробениуса. Если секции X и Y обе простые, то $2 \in \pi(X) \cap \pi(Y)$, и тогда по лемме 2.1 множество $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$ содержится либо в π, либо в π', что противоречит не π-замкнутости группы G. Внимательный просмотр пунктов предложения 1.1 показывает, что в большинстве случаев, а именно, во всех, кроме случаев (1б), (2а), (2в), (3в), X и Y обе являются простыми группами.

Таким образом, согласно лемме 2.1 (независимо от того, $2 \in \pi$ или $2 \in \pi'$) G есть группа лишь одного из типов (1б), (2а), (2в), (3в) предложения 1.1, и, следовательно,

$$\text{в случае 1 для } G \text{ выполнено одно из условий (1)–(4) теоремы 1.} \tag{2.2}$$

Покажем, что для каждой группы G из (2.2) должно быть $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq A_p$ при простом $p \geq 5$ (тип (1б): $\pi(G) = \pi(A_{p-1}) \cup \pi(Z_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2})$). Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда из π-замкнутости подгруппы A_{p-1} (по (2.1)) следует, что $\pi \supseteq \pi(A_{p-1}) = \pi((p-1)!)$. В частности, $\pi \supseteq \pi((p-1)/2)$. Но отсюда и из того факта, что подгруппа $Z_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2}$ (π-замкнутая по (2.1)), будучи группой Фробениуса, не имеет нормальной подгруппы порядка $(p-1)/2$, следует, снова по (2.1), что $\pi(Z_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2}) \subseteq \pi$. А тогда $\pi(G) = \pi(A_{p-1}) \cup \pi(Z_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2}) \subseteq \pi$, и, следовательно, G π-замкнута. Но это противоречиво. Значит, здесь $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq PSL_2(q)$ (тип (2а) предложения 1.1). Предположим, что $2 \in \pi$. Рассмотрим в G подгруппы $D_- \doteq D_{2(q-1)/d}$, $D_+ \doteq D_{2(q+1)/d}$ ($d = (2, q-1) = (2, q+1)$) и $B \doteq E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$ (при $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$ их существование следует из предложения 1.4, а в противном случае проверяется непосредственно). Поскольку диэдральные группы D_- и D_+ не имеют собственных холловых нормальных подгрупп чётного порядка, то по (2.1) $\pi \supseteq \pi(q-1) \cup \pi(q+1)$. А так как группа Фробениуса B не имеет собственных холловых нормальных подгрупп порядка, делящегося на π-число $(q-1)/d$, то по (2.1) $\pi \supseteq \pi(B) \supseteq \{q\}$. Таким образом, $\pi \supseteq \pi(q-1) \cup \pi(q+1) \cup \{q\} = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq PSL_r(q)$ с простым $r \geq 3$ (тип (2в): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_{r-1}(q)$, $Y \simeq Z_s \leftthreetimes Z_r$, $\pi(s) = \pi((q^r-1)/(q-1)))$. Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда по (2.1) $\pi \supseteq \pi(X) \ni r$ (так как r делит $q(q^{r-1}-1)$ по теореме Ферма). Но из $r \in \pi$ и π-замкнутости подгруппы Фробениуса Y следует, что $\pi \supseteq \pi(Y)$. Но теперь $\pi \supseteq \pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq PSU_r(q)$ с простым $r \geq 3$ (тип (3в): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSU_{r-1}(q)$, $Y \simeq Z_s \leftthreetimes Z_r$ с $\pi(s) = \pi((q^r+1)/(q+1)))$. Поскольку $|X|$ делится на $q^{r-1} - (-1)^{r-1} = q^{r-1} - 1$ и на q, то $r \mid |X|$ по теореме Ферма. Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда $\pi \supseteq \pi(X) \ni r$. Но из $r \in \pi$ и π-замкнутости подгруппы Фробениуса Y (по (2.1)) следует, что $\pi \supseteq \pi(Y)$. Но теперь $\pi \supseteq \pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Случай 2. Предположим теперь, что G — исключительная простая группа лиева типа. Для каждой такой группы G предложение 1.2 указывает некоторое множество $\mathcal{K}(G)$ собственных секций X, Y, … группы G такое, что $\pi(G) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}(G)} \pi(K)$. Обратимся к предложению 1.2. Мы видим, что в любом из пунктов (2), (5), (6а), (7), (8), (9) каждая из секций $K \in \mathcal{K}(G)$ есть простая неабелева группа. Но в этих случаях по (2.1) $\pi \supseteq \pi(G)$ в противоречие с не π-замкнутостью группы G. Следовательно, G есть группа одного из типов (1), (3), (4), (6) и (10) этого предложения, и, значит,

$$\text{в случае 2 для } G \text{ выполнено одно из условий (5)–(9) теоремы 1.} \tag{2.3}$$

Покажем, что в каждом условии из (2.3) должно быть $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq Sz(q)$, $q = 2^{2n+1}$ (тип (1) предложения 1.2: $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ (все — группы Фробениуса)). Предположим, что $2 \in \pi$. Так как Y и Z имеют чётные порядки и не имеют собственных холловых нормальных подгрупп чётного порядка, то должно быть $\pi \supseteq \pi(Y) \cup \pi(Z)$ (помним, что по условию Y и Z π-замкнуты). Далее, так как G содержит подгруппу, изоморфную $D_{2(q-1)}$ [15, теорема 4.1], то ввиду подобных аргументов $\pi \supseteq \pi(q-1)$. Наконец, так как X имеет нееденичные $\pi(q-1)$-элементы, но не имеет собственной холловой нормальной $\pi(q-1)$-подгруппы, то $\pi \supseteq \pi(X)$. В итоге получаем, что $\pi \supseteq \pi(G)$, а это противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1} \geq 27$ (тип (3): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq PSL_2(q)$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ (Y, Z — группы Фробениуса)). Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда, очевидно, $\pi \supseteq \pi(X)$, а так как Y и Z имеют чётные порядки, но не имеют собственных нормальных подгрупп чётного порядка, то $\pi \supseteq \pi(Y) \cup \pi(Z)$. Следовательно, $\pi \supseteq \pi(G)$, что противоречиво. Значит, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq {}^3D_4(q)$, $q = 3^{2n+1} \geq 27$ (тип (4): $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq SL_2(q^3)$ и $Y \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$ (группа Фробениуса)). Предположим, что $2 \in \pi$. Тогда, как и выше, получаем $\pi \supseteq \pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Пусть $G \simeq {}^2F_4(q)$ с $q = 2^{2n+1} \geq 8$ (тип (6)), где $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, $X \simeq Sz(q)$, $Y \simeq SU_3(q)$, $Z \doteq Z_{q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ и $V \doteq Z_{q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ (Z, V — группы Фробениуса). Если $2 \in \pi$, то, подобно предыдущему, получаем $\pi \supseteq \pi(G)$, что противоречиво.

Пусть $G \simeq E_8(q)$ (тип (10)), где $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, $X \simeq E_7(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^4)$, $Z \simeq PSU_5(q^2)$, $V \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{30}$ и $W \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{30}$, где $a = q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1$ и $b = q^8-q^7+q^5-q^4+q^3-q+1$ (V, W — группы Фробениуса). Если $2 \in \pi$, то, подобно предыдущему, получаем $\pi \supseteq \pi(G)$, что противоречиво. Следовательно, $2 \in \pi'$.

Случай 3. Предположим, наконец, что G — спорадическая простая группа. В каждом из пунктов (1)–(26) предложения 1.3 указано множество $\mathcal{K}(G)$ секций группы G, контролирующее $\pi(G)$. В большинстве случаев, а именно, за исключением шести пунктов (4), (6), (9), (14), (22) и (25), оно состоит из простых групп, что противоречит лемме 2.1. Следовательно, G —

группа одного из этих шести пунктов, а значит,

$$\text{в случае 3 для } G \text{ выполнено условие (10) теоремы 1.} \tag{2.4}$$

Противоречивость условия $2 \in \pi$ в этом случае доказывается с помощью предложения 1.3, по существу так же, как и в других случаях (мы опускаем здесь эти простые выкладки).

Совокупность утверждений (2.2)–(2.4) доказывает утверждение (II) теоремы 1. Утверждение (I) доказано по частям в случаях 1–3. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — спорадическая простая группа и π — подмножество из $\pi(G)$. Учитывая теорему 1, мы можем считать, что G изоморфна одной из групп $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi_{24}'$ и F_2 и $2 \in \pi'$. В каждом из следующих пунктов **1–6** мы рассматриваем эти группы G отдельно и в каждом случае доказываем равносильность для G и π условий (A) и (B) теоремы 2.

Списки максимальных подгрупп групп G имеются (например) в [15]. Любой такой список $\mathcal{M}(G)$ содержит по одному представителю от каждого класса сопряжённых максимальных подгрупп. Для каждой группы G условимся указывать в $\mathcal{M}(G)$ лишь типы подгрупп.

1. Пусть $G \simeq M_{23}$. Тогда $|G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$, и по [15, табл. 5.1]

$$\mathcal{M}(G) = \{M_{22},\ PSL_3(4) \leftthreetimes Z_2,\ E_{16} \leftthreetimes (Z_3 \times A_5) \leftthreetimes Z_2,\ E_{16} \leftthreetimes A_7,\ A_8,\ M_{11},\ Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть (для G и π) выполнено условие (A). Так как $M_{22} \in \mathcal{M}(G)$, то по лемме 2.1 $\pi' \supseteq \pi(M_{22}) = \pi(G) \setminus \{23\}$. Поэтому $\pi = \{23\}$ и верно утверждение $(B)(1)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(1)$ теоремы 2, т. е. $\pi = \{23\}$. Снова рассмотрим $\mathcal{M}(G)$. Мы видим, что M_{23} имеет 23-замкнутую максимальную подгруппу $M \doteq Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$, а любая не сопряжённая с ней максимальная подгруппа из M_{23} имеет порядок, не делящийся на 23. Таким образом, все максимальные подгруппы группы G 23-замкнуты и верно (A).

2. Пусть $G \simeq J_1$. Тогда $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$, и по [15, табл. 5.11]

$$\mathcal{M}(G) = \{PSL_2(11),\ Z_2 \times A_5,\ Z_{11} \leftthreetimes Z_{10},\ D_6 \times D_{10},\ E_8 \leftthreetimes Z_7 \leftthreetimes Z_3,\ Z_7 \leftthreetimes Z_6,\ Z_{19} \leftthreetimes Z_6\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). По лемме 2.1 $\pi' \supseteq \pi(PSL_2(11)) = \{2, 3, 5, 11\} = \pi(G) \setminus \{7, 19\}$. Поскольку $C_G(Z_7) = Z_7$ (см. [16, с. 36]), то подгруппа $E_8 \leftthreetimes Z_7$ не 7-замкнута. Следовательно, $\pi' \supseteq \pi(G) \setminus \{19\}$ и $\pi = \{19\}$. Таким образом, верно утверждение $(B)(2)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение (B) теоремы 2, т. е. $\pi = \{19\}$. Мы видим, что G имеет 19-замкнутую максимальную подгруппу типа $Z_{19} \leftthreetimes Z_6$, а остальные подгруппы в $\mathcal{M}(G)$ являются $19'$-группами. Таким образом, верно утверждение (A) теоремы 2.

3. Пусть $G \simeq J_4$. Тогда $|G| = 2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$, и по [15, табл. 5.11]

$$\mathcal{M}(G) = \{E_{2^{11}} \leftthreetimes M_{24},\ A.Z_3 \leftthreetimes M_{22} \leftthreetimes Z_2\,(|A| = 2^{13}),\ E_{2^{10}} \leftthreetimes GL_5(2),\ B.(S_5 \times GL_3(2)\,(|B| = 2^{15}),$$
$$PSU_3(11) \leftthreetimes Z_2,\ M_{22} \leftthreetimes Z_2,\ C \leftthreetimes (Z_5 \times 2S_4)\,(|C| = 11^3),\ PSL_2(32) \leftthreetimes Z_5,$$
$$PSL_2(23) \leftthreetimes Z_2,\ PSU_3(3),\ Z_{29} \leftthreetimes Z_{28},\ Z_{43} \leftthreetimes Z_{14},\ Z_{37} \leftthreetimes Z_{12}\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). Как видно, в списке $\mathcal{M}(G)$ имеются лишь 4 группы, содержащие неединичные нормальные подгруппы нечётного порядка: $C \leftthreetimes (Z_5 \times 2S_4)$ с $|C| = 11^3$, $Z_{37} \leftthreetimes Z_{12}$, $Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$, $Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$. Простые спектры остальных максимальных подгрупп войдут по лемме 2.1 в π' и составят $\pi(G) \setminus \{29, 43\}$ ($11 \cdot 37$ делит $|PSU_3(11)|$). Таким образом, $\pi \in \{\{29\}, \{43\}, \{29, 43\}\}$, и верно утверждение $(B)(3)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(3)$ теоремы 2, т. е. $\varnothing \neq \pi \subseteq \{29, 43\}$. Как легко проверить, в множестве $\mathcal{M}(G)$ единственными подгруппами, порядок которых делится на 29 или на 43, являются две группы $Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$ и $Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$. Следовательно, каждая подгруппа группы G является 29-замкнутой, 43-замкнутой и $\{29, 43\}$-замкнутой. В любом случае каждая подгруппа группы G является π-замкнутой, и верно утверждение (A) теоремы 2.

4. Пусть $G \simeq Ly$. Тогда $|G| = 2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$, и по [15, табл. 5.11]

$$\mathcal{M}(G) = \{G_2(5),\ Z_3.McL \leftthreetimes Z_2,\ E_{5^3}.SL_3(5),\ Z_2.A_{11},\ A \leftthreetimes 4S_6\,(|A| = 5^5),$$

$$E_{3^5} \leftthreetimes (Z_2 \times M_{11}),\ B \leftthreetimes 2A_5.D_8\,(|B| = 3^6),\ Z_{67} \leftthreetimes Z_{22}\ Z_{37} \leftthreetimes Z_{18}\}.$$

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). По лемме 2.1 $\pi' \supseteq (\pi(G_2(5)) \cup \pi(A_{11})) = \pi(G) \setminus \{37, 67\}$. Следовательно, $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$, т. е. $\pi \in \{\{37\}, \{67\}, \{37, 67\}\}$, и верно утверждение $(B)(4)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(4)$ теоремы 2, т. е. $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$. Как легко проверить, в множестве $\mathcal{M}(G)$ единственными подгруппами, порядок которых делится на 37 или на 67, являются две группы $Z_{67} \leftthreetimes Z_{22}$ и $Z_{37} \leftthreetimes Z_{18}$. Следовательно, каждая подгруппа группы G является 37-замкнутой, 67-замкнутой и $\{37, 67\}$-замкнутой. В любом случае каждая подгруппа группы G является π-замкнутой, и верно утверждение (A) теоремы 2.

5. Пусть $G \simeq Fi'_{24}$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\} = \pi(Fi_{23}) \cup \{29\}$. Список $\mathcal{M}(G)$ максимальных подгрупп группы G, состоящий из 25 подгрупп, имеется в [15, табл. 5.5]; к нему мы и отсылаем читателя.

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). Так как $Fi_{23} \in \mathcal{M}(G)$ и $\pi(G) = \pi(Fi_{23}) \cup \{29\}$, то по лемме 2.1 должно быть $\pi = \{29\}$, т. е. верно утверждение $(B)(5)$.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(5)$ теоремы 2, т. е. $\pi = \{29\}$. Несложно проверить, что в $\mathcal{M}(G)$ имеется точно одна подгруппа, а именно, $Z_{29} \leftthreetimes Z_{14}$, порядок которой делится на 29. Следовательно, все максимальные подгруппы в G 29-замкнуты, т. е. верно утверждение (A) теоремы 2.

6. Пусть $G \simeq F_2$. Тогда $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}$. Список $\mathcal{M}(G)$ максимальных подгрупп группы G, состоящий из 29 подгрупп, имеется в [15, табл. 5.7].

$(A) \Rightarrow (B)$. Пусть выполнено условие (A). В списке $\mathcal{M}(G)$ нас интересуют только группы M, имеющие нормальную подгруппу K нечётного порядка. Оказывается, что для всех таких M либо соответствующая подгруппа K есть p-группа при $p \in \{3, 5\}$, либо $M \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$. Ясно, что $\{3, 5\} \subseteq \pi'$ из-за наличия в G подгруппы Fi_{23} (ввиду леммы 2.1). Таким образом, если пара (G, π) имеет свойство $(*)$, то должно быть $\pi = \{47\}$. Таким образом, верно утверждение $(B)(6)$ теоремы 2.

$(B) \Rightarrow (A)$. Пусть верно утверждение $(B)(6)$ теоремы 2, т. е. $\pi = \{47\}$. Составив список простых спектров подгрупп, входящих в $\mathcal{M}(G)$, мы увидим, что имеется лишь одна подгруппа, порядок которой делится на 47, а именно, 47-замкнутая подгруппа $M \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$. Следовательно, все максимальные подгруппы в G 47-замкнуты, т. е. верно утверждение (A) теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miller G. A., Moreno H.** Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. No. 4. P. 398–404.
2. **Шмидт О. Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3–4. С. 366–372.
3. **Huppert B.** Normalteiler and maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. No. 60. P. 409–434.
4. **Doerk K.** Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. No. 91. P. 198–205.
5. **Старостин А. И.** О минимальных группах, не обладающих данным свойством // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 33–37.
6. **Шеметков Л. А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

7. **Белоногов В. А.** О конечных группах, насыщенных (π, π')-разложимыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 3. С. 494–506.
8. **Arad Z., Chillag D.** A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. Vol. 87, no. 2. P. 472–482.
9. **Белоногов В. А.** О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.
10. **Белоногов В. А.** О конечных группах, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты // Междунар. шк.-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В.В. Кабанова: тез. докл. Нальчик: Изд-во Кабард.-Балкар. гос. ун-та, 2014. С. 6–9.
11. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1994. 179 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, no. 1.)
12. **Белоногов В. А.** Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 29–43.
13. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper & Row, 1968. 542 p.
14. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 805 S.
15. **Wilson R. A.** The finite simple groups. London: Springer-Verlag, 2009. 313 p.
16. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norten, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 285 p.
17. **Belonogov V. A.** Finite groups in which all maximal subgroups are π-closed // Мальцевские чтения: тез. докл. / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2014. С. 86.
18. **Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups // Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 452 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407.)

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 01.09.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.17

СИЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ 2-СХЕМ[1]

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Сильно α-однородное частичное пространство прямых порядка (s,t) называется α-частичной геометрией. Если $\alpha = t+1$, то геометрия является двойственной 2-схемой. Локально треугольные и локально Грассмановы графы отвечают треугольным расширениям некоторых двойственных 2-схем, класс сильно однородных квазибиплоскостей совпадает с классом сильно однородных расширений двойственных 2-схем. В работе изучаются сильно однородные расширения двойственных 2-схем.

Ключевые слова: частичная геометрия, однородные расширения, 2-схемы.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Strongly uniform extensions of dual 2-designs.

A strongly α-uniform partial space of lines of order (s,t) is called an α-partial geometry. If $\alpha = t+1$, then the geometry is called a dual 2-design. Locally triangular and locally Grassman graphs correspond to triangular extensions of certain dual 2-designs, and the class of strongly uniform quasi-biplanes coincides with the class of strongly uniform extensions of dual 2-designs. We study strongly uniform extensions of dual 2-designs.

Keywords: partial geometry, uniform extensions, 2-designs.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, через $\Gamma_i(a)$ — подграф из Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Γ называется *сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках и $|[a]\cap[b]| = \mu$ для любых двух несмежных вершин a, b.

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядка $m_1,\ldots,m_n$. Если $m_1 = \cdots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a,b\}, \{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Граф на множестве вершин $X\times Y$ называется $m\times n$*-решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1,y_1), (x_2,y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем F_q. Граф, вершинами которого являются m-мерные подпространства из V и вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $\dim(x\cap y) = m-1$, называется *графом Грассмана* $J_q(n,m)$. Пусть $\mathcal{F}$ — класс графов. Граф Γ называется локально $\mathcal{F}$-графом, если $[a]\in\mathcal{F}$ для любой вершины a из Γ.

Геометрия G ранга 2 — это система инцидентности с множеством точек X и множеством блоков $\mathcal{B}$, не имеющая кратных блоков. При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек, и инцидентность становится обычным включением. Две точки из X называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке. *Точечный граф* геометрии G — это граф на множестве точек X, в котором две точки смежны, если они различны и

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00061) (теорема 1), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.A03.21.0006 (теорема 2).

коллинеарны. Аналогично определяется блочный граф. Геометрия G называется *связной*, если связен ее точечный граф. Геометрия называется *треугольной*, если любые три ее попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке.

Для $a \in X$ *вычетом* G_a в точке a называется геометрия с множеством точек X_a, отличных от a и коллинеарных с a, и с множеством блоков $\mathcal{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathcal{B}\}$. Для блока B *вычетом* G_B в блоке называется геометрия с множеством точек $X_B = X - B$ и множеством блоков $\mathcal{B}_B = \{A \in \mathcal{B} \mid A \cap B = \varnothing\}$.

Пусть $a \in X, B \in \mathcal{B}$ и $a \notin B$ (пара (a, B) называется *антифлагом*). Число точек из B, коллинеарных с a, обозначим через $f(a, B)$. Геометрия G называется *β-однородной*, если $f(a, B) = 0$ или β для любого антифлага (a, B); G называется *сильно β-однородной*, если $f(a, B) = \beta$ для любого антифлага (a, B). Если любые два блока из $\mathcal{B}$ пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков называется *множеством прямых* и обозначается $\mathcal{L}$; геометрия $(P, \mathcal{L})$ называется *частичным пространством прямых*. Частичное пространство прямых имеет порядок (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точек и каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой.

Сильно α-однородное частичное пространство прямых порядка (s, t) называется *α-частичной геометрией* и обозначается $pG_\alpha(s, t)$. Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Если $\alpha = t$, то геометрия оказывается *сетью*. Если же $\alpha = t+1$, то геометрия является *двойственной 2-схемой Штейнера* (далее двойственной 2-схемой). Геометрия $pG_{s+1}(s, s)$ называется *проективной плоскостью порядка s*. Множество точек S проективной плоскости $pG_{s+1}(s, s)$ называется *n-дугой*, если $|S| = n$ и S пересекает любую прямую не более чем по двум точкам. *Гиперовалом* проективной плоскости порядка s называется $(s + 2)$-дуга.

Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Геометрия G называется *расширением* α-частичных геометрий, если она связна, и вычет в каждой точке является $pG_\alpha(s, t)$ для подходящих (s, t) (обозначение EpG_α). По связности порядок геометрии (s, t) не зависит от выбора вычета, и такое расширение можно обозначить $EpG_\alpha(s, t)$. Геометрия EpG_α треугольна тогда и только тогда, когда она $(\alpha + 1)$-однородна.

Геометрия $G = (P, \mathcal{B})$ называется *квазибиплоскостью* с параметрами (V, K, Λ), если $|P| = V$, $|B| = K$ для любого блока $B \in \mathcal{B}$, любая точка содержится ровно в R блоках, любые две точки содержатся ровно в 0 или Λ блоках, любые два блока пересекаются ровно в 0 или 2 точках и найдется пара непересекающихся блоков. Заметим, что $R = K\Lambda - K - \Lambda + 2$ (см. лемму 1.1). Если $\Lambda = 2$, то геометрия называется *полубиплоскостью*. Заметим, что квазибиплоскость является сильно β-однородной тогда и только тогда, когда для любого антифлага (a, B) найдется ровно $\alpha = \Lambda\beta/2$ блоков, содержащих a и пересекающих B.

Изучение однородных расширений двойственных 2-схем начато Хьюзом в [1]. Заметим, что класс сильно однородных расширений двойственных 2-схем совпадает с классом сильно однородных полубиплоскостей (см. лемму 1.1). Из [2, теорема 1.7.1] следует, что двудольный дистанционно регулярный граф диаметра 4 имеет $c_2 = 2$ тогда и только тогда, когда он является графом инцидентности сильно однородной полубиплоскости. Классификация сильно регулярных локально треугольных графов [3, предложение 1] дает классификацию сильно 3-однородных расширений $pG_2(K, 1)$ и двудольных дистанционно регулярных графов диаметра 4 с $c_2 = 2$ и $c_3 = 3$.

Предложение 1 [3, предложение 1]. *Пусть Γ является сильно регулярным локально $T(n)$ графом, $n \geq 4$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n = 4$, $\Gamma = K_{4\times 2}$;

(2) $n = 5$, Γ *— граф Клебша*;

(3) $n = 8$, Γ *— половинный граф свернутого* 8*-куба с параметрами* $(64, 28, 12, 12)$;

(4) $n = 10$, Γ *— половинный граф свернутого* 10*-куба с параметрами* $(256, 45, 16, 6)$;

(5) $n = 24$, Γ — *половинный граф ректаграфа, отвечающего графу смежных классов расширенного бинарного кода Голея с параметрами* $(2^{11}, 276, 44, 36)$.

Примеры из пунктов (1), (3) и (5) отвечают сильно 3-однородным полубиплоскостям с блочным графом, являющимся псевдогеометрическим для $pG_3(n-1, (n-2)/2)$.

В данной работе изучаются сильно однородные расширения двойственных 2-схем.

Пусть S является двойственной 2-$(v, k, 1)$ схемой с $r = (v-1)/(k-1)$ прямыми, проходящими через точку и с $b = vr/k$ прямыми. Тогда S является частичной геометрией $pG_k(r-1, k-1)$ с b точками и v прямыми.

П р и м е р 1. Выясним, какие частичные геометрии отвечают известным 2-схемам Штейнера:

(1) унитали порядка $q > 1$ (т. е. 2-$(q^3+1, q+1, 1)$ схеме) отвечает $pG_{q+1}(q^2-1, q)$;

(2) если π — проективная плоскость четного порядка q, содержащая гиперовал C, то геометрия с множеством точек, не лежащих в C, и с множеством блоков, состоящим из $q(q-1)/2$ прямых, не пересекающих C, является двойственной к 2-$(q(q-1)/2, q/2, 1)$ схеме и отвечает $pG_{q/2}(q, q/2-1)$;

(3) схема точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$ имеет параметры 2-$(q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$ и отвечает $pG_{q+1}(q^{n-1} + \ldots + q, q)$;

(4) схема точек и прямых аффинного пространства $AG(n, q)$ имеет параметры 2-$(q^n, q, 1)$ и отвечает $pG_q(q^{n-1} + \ldots + q, q-1)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ *является сильно* β*-однородной квазибиплоскостью с параметрами* (V, K, m). *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $\mathcal{D}$ — *сильно* β*-однородное расширение двойственной* 2*-схемы* $pG_m(K-2, m-1)$, $K = xm+2$ *для некоторого натурального числа* x, *точечный граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\beta(xm+1, xm-x)$, *а блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{\beta m/2}((xm+1)(m-1), xm/2)$;

(2) *если* $K = m+2$, *то* $\beta = m+1$, Γ *является полным многодольным графом* $K_{(m+2)\times m}$ *и в случае* $m > 2$ *для любого блока* B *вычет геометрии* $\mathcal{D}_B$ *является сильно* $(m+1)$*-однородной квазибиплоскостью с параметрами* $((m-1)(m+2), m+2, m/2)$, *а ее блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m(m+1)/4}((m+1)(m-2)/2, m/2)$;

(3) *если* $K = 2m+2$, *то* $R = 2m^2 - m$, $\mathcal{D}$ *является расширением геометрии* $pG_m(2m, m-1)$, Γ — *псевдогеометрический граф для геометрии* $pG_\beta(2m+1, 2m-2)$, $\beta(4m-\beta)$ *делит* $2(m^2-1)(4m^2-1)$, β *делит* $2(m-1)(2m+1)$ *и*

(*i*) *если* $\beta = m+1$, *то вычет геометрии* $\mathcal{D}$ *в любой точке совпадает с геометрией прямых и точек* $PG(3, 2)$, Γ *является графом знакопеременных форм* $\mathrm{Alt}(4, 2)$, *а блочный граф является сильно регулярным с параметрами* $(120, 56, 28, 24)$,

(*ii*) *если* $m+2 \le \beta \le m+3$, *то либо* $\beta = 2m-2$, *либо* $\beta = m+3$, Γ *является псевдогеометрическим графом для сети* $pG_{m+3}(2m+1, m+3)$, *а блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m^2-m}((2m+1)(m-1), m)$ *и* $m = 7$ *или* 17;

(*iii*) *если* $2m-2 \le \beta \le 2m$, *то* $\beta = 2m-2$, Γ *является псевдогеометрическим графом для сети* $pG_{2m-2}(2m+1, 2m-2)$, *а блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m^2-m}((2m+1)(m-1), m)$;

(*iv*) *если* $\beta = 2m+1$, *то* Γ — *полный многодольный граф* $K_{(2m+2)\times(2m-1)}$, *а блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m(2m+1)/2}((2m+1)(m-1), m)$.

Если $m = 2^n$, то по [4] существует сильно $(m+1)$-однородная квазибиплоскость с параметрами $(m(m+2), m+2, m)$ такая, что ее вычет в любом блоке является сильно $(m+1)$-однородной квазибиплоскостью с параметрами $((m-1)(m+2), m+2, m/2)$, а дополнительный граф для ее блочного графа является частичной геометрией $pG_{(m-2)/2}(m-1, (m-2)(m+1)/2)$, в которой окрестность любой точки — псевдогеометрический граф для $pG_{(m-4)/2}(m-2, (m+1)(m-4)/4)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *в случае унитали порядка $q > 1$ (т. е. 2-$(q^3+1, q+1, 1)$ схемы) имеем*

(*i*) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2-1, q)$, $K = q^2+1$ и $R = q^3+1$;*

(*ii*) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2, q^2-q)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{(q+1)\beta/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно, β делит $6q^3$ и $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ делит $q^2(q^2+1)(q^2-q)(q^2-q+1)$;*

(*iii*) *параметр β не равен $q+2$, и, если $q^2-1 \le \beta \le q^2+1$, то $\beta = q^2$, Γ является полным многодольным графом $K_{(q^2+1)\times(q^2-q+1)}$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{q^2(q+1)/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно;*

(*iv*) *если $q = 3$, то β равно 6 или 9;*

(2) *в случае схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$ (т. е. 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$ схемы) имеем $n = 2m+1$ и*

(*i*) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(s, q)$ и $s = q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q$;*

(*ii*) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1, q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta(q+1)/2}(q(q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+1), (q^{2m}+q^{2m-1}+\ldots+q)/2)$, $(q+1)\beta$ делит $s(s+1)(s+2)(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2)$ и $\beta(2q^{2m}+2q^{2m-1}+\ldots+2-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)(s-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)(s+1-q^{2m-1}-q^{2m-3}-\ldots-q)$;*

(*iii*) *если $\beta = q+2$, то $q = 2$, $m = 1$ и Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$; если $\beta = s+1$, то Γ является полным многодольным графом $K_{(s+2)\times(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2+1)}$; если же $s-3 \le \beta \le s$, то $\beta = q+2$;*

(*iv*) *если $m = 1$, то для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2+q, q)$, граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2+q+1, q^2)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta(q+1)/2}(q^3+q^2+q, (q^2+q)/2)$; в случае $q = 2$ имеем $\beta = 4$, а в случае $q = 4$ граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(21, 16)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{5\beta/2}(84, 10)$ и $\beta = 14$ или 16;*

(3) *в случае схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n, q)$ (т. е. 2-$(q^n, q, 1)$ схемы) имеем*

(*i*) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_q(s, q-1)$, $s = q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q$, либо q четно, либо $n-1$ и β четны;*

(*ii*) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(s+1, q^{n-1}-1)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta q/2}((s+1)(q-1), s/2)$, и $\beta(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+2q^3+q^2+2q+2-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)q(q^{2m-1}+\ldots+q^3+q+1)$;*

(*iii*) *если $\beta = q+1$, то q нечетно, для любой вершины $a \in \Gamma$ каждый μ-подграф из $\Gamma(a)$ является $q \times q$-решеткой и $(q+1)(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2)$ делит $(s+1)(s+2)q^{n-1}(q^{n-1}-1)$.*

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если геометрия $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является квазибиплоскостью с параметрами (V, K, Λ), то для любой точки a вычет геометрии $\mathcal{D}_a$ является двойственной 2-схемой $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$ и $R = K\Lambda - K - \Lambda + 2$;*

(2) *геометрия $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородной квазибиплоскостью с параметрами (V, K, Λ) тогда и только тогда, когда $(X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородным расширением частичной геометрии $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{D}$ является квазибиплоскостью с параметрами (V, K, Λ). Покажем, что для любой точки $a \in X$ вычет $\mathcal{D}_a = (X_a, \mathcal{B}_a)$ является частичной геометрией $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$. Прежде всего любые два блока из $\mathcal{B}_a$ пересекаются в единственной точке, и $\mathcal{B}_a$ является множеством прямых. Далее, любая точка из X_a лежит на Λ прямых, и каждая прямая имеет $K-1$ точек. Наконец, для каждого антифлага (b, L) геометрии $(X_a, \mathcal{B}_a)$ ровно Λ блоков содержат a, b, и все эти блоки пересекают L. Утверждение (1) доказано.

Необходимость утверждения (2) следует из утверждения (1). *Достаточность*. Пусть $(X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородным расширением частичной геометрии $pG_\Lambda(K-2, \Lambda-1)$. Тогда каждая точка принадлежит ровно $R = \Lambda(1+(K-2)(\Lambda-1)/\Lambda)$ блокам и каждый блок содержит ровно K точек. Далее, любые две точки принадлежат 0 или Λ блокам, и любые два блока пересекаются по 0 или 2 точкам. Лемма доказана.

В [5] было замечено, что сильно регулярный граф с $k = 2\mu$ и целыми собственными значениями является псевдогеометрическим графом для $pG_x(2x, y)$, а дополнительный к нему граф является псевдогеометрическим для $pG_y(2y, x)$. Более того, если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$, $s > \alpha$ и α делит st, то дополнительный граф к Γ также является псевдогеометрическим.

Лемма 1.2. *Пусть граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\alpha(s, t)$, $s > \alpha$ и α делит st. Тогда дополнительный граф Δ является псевдогеометрическим для $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что собственные значения Γ равны $s-\alpha$ и $-(t+1)$, поэтому собственные значения Δ равны t и $-(s-\alpha+1)$, поэтому Δ может быть псевдогеометрическим для $pG_\beta(t+\beta, s-\alpha)$. Теперь степень вершины в графе Δ равна $(t+\beta)(s-\alpha+1) = k(k-\lambda-1)/\mu = s(st-\alpha t+t)/\alpha$ и $\beta = st/\alpha - t$.

Наконец, число вершин в $pG_\alpha(s, t)$ равно числу вершин в $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathcal{D}$ является β-однородным расширением $pG_\alpha(s, t)$. Тогда точечный граф геометрии $\mathcal{D}$ является реберно регулярным с $\lambda = s+st(\beta-1)/\alpha$ и $\alpha\beta$ делит $st(s+1)(s+2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. леммы 2.1 и 2.2 из [6].

Лемма 1.4 [7, теорема 3.3]. *Пусть $\mathbf{S}$ является s-однородной геометрией $EpG_\alpha(s, t)$, $\overline{\Gamma}$ — дополнение точечного графа $\mathbf{S}$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *$s = 2$, $\alpha = 1$, и имеется точно 7 геометрий: две сильно однородные с параметрами точечных графов $(16, 9, 4, 6)$ и $(28, 15, 6, 10)$, еще две геометрии с сильно регулярными точечными графами, имеющими параметры $(36, 15, 6, 6)$ и $(64, 27, 10, 12)$, а также три геометрии (по одной для $t = 1, 2, 4$), точечные графы которых являются графами Тэйлора;*

(2) *$\mathbf{S}$ является геометрией $EpG_2(s, 1)$, $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с $\lambda = 0$, $\mu = 2$, и $\mathbf{S}$ — геометрия вершин и клик Γ, соответствующих $\bar{\Gamma}(a)$ для вершины $a \in \bar{\Gamma}$;*

(3) *$\mathbf{S}$ сильно s-однородна, и либо $t = \alpha$ и $\bar{\Gamma}$ является квадратной решеткой на $(s+2)^2$ вершинах, либо $t = 2\alpha$, $s \leq (2\alpha-1)(\alpha+1)^2$, $s+\alpha+1$ делит $2s(s+1)(2\alpha+1)$ и $\bar{\Gamma}$ является треугольным графом на $(s+2)(2s+3)$ вершинах.*

Лемма 1.5. *Пусть Γ является связным графом и окрестности вершин в Γ изоморфны графу Грассмана $J_q(n, 2)$. Тогда $q = 2$ и связная компонента любого μ-подграфа из Γ является дополнительным графом к 4×4-решетке или графом Джонсона $J(6, 3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что связная компонента Δ любого μ-подграфа из Γ является локально $(q+1)\times(q+1)$-графом. По теореме 3 из [8] имеем $q = 2$ и Δ — дополнительный граф к 4×4 решетке или граф Джонсона $J(6, 3)$. Лемма доказана.

2. Сильно однородные квазиплоскости

В леммах 2.1–2.3 предполагается, что $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ является сильно β-однородной квазиплоскостью с параметрами (V, K, m).

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) $K = mx + 2$, $R = m^2x - mx + m$;
(2) *точечный граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\beta(mx + 1, xm - x)$;
(3) *блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{\beta m/2}((xm + 1)(m - 1), xm/2)$;
(4) $\beta(2mx + 2 - x - \beta)$ *делит* $(mx + 1)(mx + 2)(m - 1)(xm - x + 1)$.

Доказательство. По [7, теорема 3.1] точечный граф Γ сильно β-однородной геометрии $EpG_\alpha(s, t)$ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(s + 1, st/\alpha)$. Отсюда $K - 2 = mx$ для некоторого натурального числа x и $R = m^2x - mx + m$. Утверждения (1) и (2) доказаны.

В [4] доказано, что блочный граф сильно β-однородной квазиплоскости с параметрами (V, K, Λ) является сильно регулярным с параметрами $(b, R(K - 1)/\Lambda, K(\alpha - 1)/2 + R - \alpha - 1, K\alpha/2)$, где $\alpha = \beta\Lambda/2$ и $b = R(K - 1)(R - \Lambda)/(2\alpha) + R$. Отсюда блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{\beta m/2}((xm + 1)(m - 1), xm/2)$. Утверждение (3) доказано.

Последнее утверждение следует теперь из условия целочисленности для точечного графа частичной геометрии $pG_{\beta m/2}((xm+1)(m-1), xm/2)$. Условие целочисленности для точечного графа квазиплоскости является следствием условия целочисленности для блочного графа. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $K = m+2$. *Тогда* $\beta = m+1$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) *точечный граф квазиплоскости является полным многодольным графом* $K_{(m+2)\times m}$, *а блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m(m+1)/2}(m^2 - 1, m/2)$;

(2) *если* $m > 2$, *то для любого блока* B *вычет геометрии* $\mathcal{D}_B$ *является сильно* $(m + 1)$-*однородной квазиплоскостью с параметрами* $((m - 1)(m + 2), m + 2, m/2)$, *а ее блочный граф является псевдогеометрическим для* $pG_{m(m+1)/4}((m - 2)(m + 1)/2, m/2)$, *в частности,* m *делится на* 4.

Доказательство. Пусть $K = m+2$. Из лемм 1.1, 2.1 следует, что точечный граф Γ квазиплоскости — псевдогеометрический граф для $pG_\beta(m + 1, m - 1)$, являющийся сильно β-однородным расширением $pG_m(m, m - 1)$. В этом случае $\beta = m + 1$, геометрия является треугольной, и Γ — полный многодольный граф $K_{(m+2)\times m}$.

Далее, $R = m^2$, и блочный граф является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_{m(m+1)/2}(m^2 - 1, m/2)$, m четно. Утверждение (1) доказано.

Пусть $m > 2$ и B — блок. Тогда вычетная геометрия $\mathcal{D}_B$ имеет множество точек $X_B = X - B$ и множество блоков $\mathcal{B}_B = \{A \in \mathcal{B}, A \cap B = \varnothing\}$. Ясно, что каждый блок из $\mathcal{B}_B$ имеет K точек и каждая точка из $X - B$ лежит в $R - \alpha$ блоках из $\mathcal{B}_B$, $\alpha = m(m + 1)/2$. Любые два блока из $\mathcal{B}_B$ пересекаются по 0 или 2 точкам. Пусть a, b — две точки из X_B. Если a, b несмежны в Γ, то они не лежат в общем блоке. Если же a, b смежны в Γ, то блок B имеет m вершин $c_1, \ldots, c_m$ из $\Gamma(a) \cap \Gamma(b)$. Так как $\mathcal{D}$ является треугольным расширением, то тройка a, b, c_i лежит в единственном общем блоке. Поэтому точки a, b лежат ровно в $m/2$ блоках, пересекающих B, и a, b коллинеарны в $\mathcal{D}_B$. Отсюда $\mathcal{D}_B$ является сильно $(m + 1)$-однородной квазиплоскостью с параметрами $((m - 1)(m + 2), m + 2, m/2)$. По лемме 2.1, примененной к этой квазиплоскости, ее блочный граф сильно регулярен с параметрами $(m(m - 1)^2/2, (m + 1)(m^2 - 4)/4, (m - 3)(m + 4)^2/8 + 4, (m^2 + m)(m + 2)/8)$, поэтому является псевдогеометрическим для $pG_{m(m+1)/4}((m - 2)(m + 1)/2, m/2)$, в частности, m делится на 4. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $K = 2m + 2$. *Тогда* $R = 2m^2 - m$, $\mathcal{D}$ *является расширением геометрии* $pG_m(2m, m - 1)$, *точечный граф* Γ — *псевдогеометрический граф для* $pG_\beta(2m + 1, 2m - 2)$,

$\beta(4m-\beta)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$, β делит $2(m-1)(2m+1)$, блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m\beta/2}((2m+1)(m-1),m)$ и выполняются следующие утверждения:

(1) *если $\beta=m+1$, то вычет геометрии $\mathcal{D}$ в любой точке совпадает с геометрией прямых и точек $PG(3,2)$, Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$ и блочный граф сильно регулярен с параметрами $(120,56,28,24)$;*

(2) *если $2m-2\le\beta\le 2m$, то $\beta=2m-2$ и Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{2m-2}(2m+1,2m-2)$;*

(3) *если $m+2\le\beta\le m+3$, то либо $\beta=2m-2$, либо $\beta=m+3$, Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{m+3}(2m+1,m+3)$ и $m=7$ или 17;*

(4) *если $\beta=2m+1$, то Γ — полный многодольный граф $K_{(2m+2)\times(2m-1)}$.*

Доказательство. Пусть $K=2m+2$. По лемме 2.1 имеем $R=2m^2-m$, $\mathcal{D}$ является расширением геометрии $pG_m(2m,m-1)$, ее точечный граф является псевдогеометрическим для $pG_\beta(2m+1,2m-2)$, и $\beta(4m-\beta)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$. Заметим, что если m четно, то β нечетно. По прямоугольному соотношению β делит $2(m-1)(2m+1)$.

Блочный граф является сильно регулярным с параметрами $(b,(m+1)(2m+1)(m-1),m(m\beta-2)/2+2m^2-m-2,m\beta(m+1)/2)$, $b=(\beta+2(m-1)(2m+1))(2m^2-m)/\beta$ и собственными значениями $2m^2-m-1-m\beta/2$, -$(m+1)$. Значит, β делит $6(m-1)(2m+1)$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{m\beta/2}((2m+1)(m-1),m)$.

Если $\beta=m+1$, то $3m-1$ делит $2(m-1)(4m^2-1)$, поэтому $3m-1$ делит 20. Отсюда $m=2,3$ или 7. Но в последнем случае число блоков b не является целым. В случае $m=2$ граф Γ является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_3(5,2)$, и окрестности вершин в Γ являются треугольными графами $T(6)$. Противоречие с тем, что тогда μ-подграфы из Γ являются локально четырехугольными графами. Итак, $m=3$, Γ является псевдогеометрическим для сети $pG_4(7,4)$, и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_6(14,3)$, т.е. сильно регулярным с параметрами $(120,56,28,24)$. По теореме Хьюза [7, теорема 3.12] для треугольного расширения двойственной 2-$(v,3,1)$ схемы вычет в каждой точке является геометрией точек и прямых $PG(n,2)$. Поэтому в Γ окрестности вершин изоморфны графу Грассмана $J_2(4,2)$, и по теореме 1 из [5] Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$. Утверждение (1) доказано.

Если $\beta=2m$, то $4m^2$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$, противоречие. Если $\beta=2m-1$, то $2m-1$ делит 8, противоречие. Если $\beta=2m-2$, то Γ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{2m-2}(2m+1,2m-2)$. Утверждение (2) доказано.

Если $\beta=m+2$, то $(m+2)(3m-2)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$. Так как $(m+2,m^2-1)$ делит 3 и $(m+2,4m^2-1)$ делит 15, то $m+2$ делит 90. Далее, $(3m-2,m^2-1)$ делит 5, и $(3m-2,4m^2-1)$ делит 7, поэтому $3m-2$ делит 70. Отсюда $m\in\{3,4\}$. В случае $m=3$ число $\beta=5$ не делит $6(m-1)(2m+1)$. Значит, $m=4$ и $\beta=6=2m-2$.

Если $\beta=m+3$, то $(m+3)(3m-3)$ делит $2(m^2-1)(4m^2-1)$. Так как $(m+3,m-1)$ делит 4 и $(m+3,2m+1)$ делит 5, то $m+3$ делит 40. Если $m+3=8$, то $\beta=2m-2$. Если же $\beta<2m-2$, то $m+3=10,20$ или 40. В случае $m=40$ нарушается условие целочисленности для блочного графа. Утверждение (3) доказано.

Если $\beta=2m+1$, то по лемме 2.1 Γ является полным многодольным графом $K_{(2m+2)\times(2m-1)}$. Лемма доказана.

Из лемм 2.1–2.3 следует теорема 1.

Заметим, что существуют допустимые параметры m,β с $m+3<\beta<2m-2$, например $(m,\beta)=(17,28)$ или (127,140).

3. Расширения известных двойственных 2-схем

Ввиду предложения 1 для точечного графа Γ сильно 3-однородного расширения частичной геометрии $pG_2(s,1)$ либо $s=2$ и $\Gamma=K_{4\times2}$, либо $s=6$, Γ — половинный граф свернутого 8-куба с параметрами $(64, 28, 12, 12)$, либо $s = 22$, Γ — половинный граф ректаграфа, отвечающего графу смежных классов расширенного бинарного кода Голея с параметрами $(2^{11}, 276, 44, 36)$.

В этом разделе доказана теорема 2.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы, отвечающей унитали. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2-1, q)$, $K = q^2+1$ и $R = q^3+1$;*

(2) *точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2, q^2-q)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{(q+1)\beta/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно, β делит $6q^3$ и $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ делит $q^2(q^2+1)(q^2-q)(q^2-q+1)$;*

(3) *параметр β не равен $q+2$, и если $q^2-1 \le \beta \le q^2+1$, то $\beta = q^2$, Γ является полным многодольным графом $K_{(q^2+1)\times(q^2-q+1)}$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{q^2(q+1)/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно;*

(4) *если $q = 3$, то β равно 6 или 9.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы, отвечающей унитали. Тогда для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2-1, q)$, $K = q^2+1$ и $R = q^3+1$. Утверждение (1) доказано.

Далее, точечный граф Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\beta(q^2, q^2-q)$. По лемме 2.1 блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{(q+1)\beta/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, и q нечетно. По лемме 1.3 $\beta(q+1)$ делит $q^3(q^2-1)(q+1)$, и по условию целочисленности $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ делит $q^3(q^2+1)(q^2-q+1)$. По прямоугольному соотношению для точечного графа β делит $q^3(q-1)(q^2+1)$, по прямоугольному соотношению для блочного графа β делит $q^3(q-1)(q^3+1)$. Таким образом, β делит $6q^3$.

Заметим, что $q+2 \le \beta \le q^2$. Если $\beta = q+2$, то $q+2$ делит 3, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Если $\beta = q^2$, то условие целочисленности выполняется, Γ является полным многодольным графом $K_{(q^2+1)\times(q^2-q+1)}$ и блочный граф является псевдогеометрическим для $pG_{q^2(q+1)/2}(q^3, (q^2-1)/2)$, q нечетно.

Если $\beta = q^2-1$, то $\beta(2q^2-q+1-\beta)$ не делит $q^2(q^2+1)(q^2-q)(q^2-q+1)$. Утверждение (3) доказано.

Пусть $q = 3$. Тогда для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_4(8, 3)$, граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(9, 6)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{2\beta}(27, 4)$ и $\beta = 6$ или 9. Если $\beta = 6$, то по лемме 1.2 дополнительный граф для блочного графа — псевдогеометрический граф для $pG_5(9, 15)$. Лемма доказана.

П р и м е р 2. Пусть q — степень простого числа, W — $3 \times (s+1)$-матрица над F_q такая, что любые ее три столбца линейно независимы (столбцы W образуют дугу в проективной плоскости $PG(2, q)$). Пусть точками геометрии $\mathbf{S}$ являются пары (i, x), где i — номер столбца W, $x \in F_q$, а блоками — векторы из пространства, порожденного строками W; пара (i, x) инцидентна блоку w, если i-я координата w равна x.

Тогда $\mathbf{S}$ является треугольным расширением двойственной сети $pG_s(s, q-1)$. Это пример Хобарта — Хьюза.

Заметим, что требуемая дуга существует, если $q \ge s$ для четного q и $q \ge s+1$ для нечетного q. В частности, существуют треугольные расширения $pG_q(q, q)$ для нечетного q и $pG_q(q, q-1)$ — для четного q.

Случай, когда $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы, отвечающей гиперовалу проективной плоскости, рассмотрен в лемме 2.3 (в этом случае для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q/2}(q, q/2-1)$, $K = q+2$ и $R = q(q-1)/2$).

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n, q)$. Тогда $n = 2m+1$, и выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любой точки* a *вычет* $\mathcal{D}_a$ *является частичной геометрией* $pG_{q+1}(s,q)$ *и* $s = q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q$;

(2) *точечный граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\beta(q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + 1, q^{2m} + q^{2m-2} + \ldots + q^2)$, *блочный граф — псевдогеометрический граф для* $pG_{\beta(q+1)/2}(q(q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + 1), (q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q)/2)$, $(q+1)\beta$ *делит* $s(s+1)(s+2)(q^{2m} + q^{2m-2} + \ldots + q^2)$ *и* $\beta(2q^{2m} + 2q^{2m-1} + \ldots + 2 - q^{2m-1} - q^{2m-3} - \ldots - q - \beta)$ *делит* $(s+1)(s+2)(s - q^{2m-1} - q^{2m-3} - \ldots - q)(s + 1 - q^{2m-1} - q^{2m-3} - \ldots - q)$;

(3) *если* $\beta = q+2$, *то* $q = 2$, $m = 1$ *и* Γ *является графом знакопеременных форм* $\mathrm{Alt}(4,2)$, *если* $\beta = s+1$, *то* Γ *является полным многодольным графом* $K_{(s+2)\times(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2+1)}$, *если же* $s - 3 \le \beta \le s+1$, *то* $\beta = q+2$;

(4) *если* $m = 1$, *то для любой точки* a *вычет* $\mathcal{D}_a$ *является частичной геометрией* $pG_{q+1}(q^2+q, q)$, *граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\beta(q^2+q+1, q^2)$, *блочный граф — псевдогеометрический граф для* $pG_{\beta(q+1)/2}(q^3 + q^2 + q, (q^2+q)/2)$; *в случае* $q = 2$ *имеем* $\beta = 4$, *а в случае* $q = 4$ *граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\beta(21,16)$, *блочный граф — псевдогеометрический граф для* $pG_{5\beta/2}(84,10)$ *и* $\beta = 14$ *или* 16.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$. Так как $K-2$ делится на $\Lambda = q+1$, то $n = 2m+1$.

Для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(s,q)$, где $s = q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q$. Утверждение (1) доказано.

По лемме 2.1 точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + 1, q^{2m} + q^{2m-2} + \ldots + q^2)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{\beta(q+1)/2}(q(q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + 1), (q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q)/2)$, и, если β нечетно, то $q+1$ четно.

По лемме 1.3 число $(q+1)\beta$ делит $s(s+1)(s+2)q$, а по условию целочисленности $\beta(2q^{2m} + 2q^{2m-1} + \ldots + 2 - q^{2m-1} - q^{2m-3} - \ldots - q - \beta)$ делит $(s+1)(s+2)(s - q^{2m-1} - q^{2m-3} - \ldots - q)(s + 1 - q^{2m-1} - q^{2m-3} - \ldots - q)$. Утверждение (2) доказано.

Заметим, что $q + 2 \le \beta \le s+1$. Если $\beta = q+2$, то по лемме 1.5 имеем $q = 2$, и $2m+1$ не меньше числа связных компонент μ-подграфа, умноженного на 4. Поэтому $m = 1$, $\mu = 4(4+1)$, и по теореме 1 из [5] Γ является графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$.

Если $\beta = s+1$, то Γ является графом $K_{(s+2)\times(q^{2m}+q^{2m-2}+\ldots+q^2+1)}$.

Если $\beta = s$, то по лемме 1.4 либо $s = 2$, либо геометрия $\mathcal{D}$ является расширением $pG_\alpha(s,t)$ и $t = \alpha$ или 2α, противоречие с утверждением (1).

Если $\beta = s-1$, то по утверждению (2) $s - 1 = q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q - 1$ делит $6q$, противоречие.

Если $\beta = s-2$, то по утверждению (2) $s - 2 = q^{2m} + q^{2m-1} + \ldots + q - 2$ делит $24q$, поэтому $q = 2$, $m = 1$ и $s = 6$. Но в этом случае $\beta = q+2$, и выполняется утверждение (3).

Если $m = 1$, то для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_{q+1}(q^2+q, q)$, граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(q^2+q+1, q^2)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{\beta(q+1)/2}(q^3 + q^2 + q, (q^2+q)/2)$. В случае $q = 2$ граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(7,4)$ и $\beta = 4$. В случае $q = 4$ граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(21,16)$, блочный граф — псевдогеометрический граф для $pG_{5\beta/2}(84,10)$ и $\beta = 14$ или 16. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathcal{D}$ *является расширением двойственной 2-схемы, отвечающей точкам и прямым аффинного пространства* $AG(n,q)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *для любой точки* a *вычет* $\mathcal{D}_a$ *является частичной геометрией* $pG_q(s, q-1)$, $s = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q$, *либо* q *четно, либо* $n-1$ *и* β *четны*;

(2) *точечный граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\beta(s+1, q^{n-1}-1)$, *блочный граф — псевдогеометрический для* $pG_{\beta q/2}((s+1)(q-1), s/2)$, *и* $\beta(2q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 2q^3 + q^2 + 2q + 2 - \beta)$ *делит* $(s+1)(s+2)q(q^{2m-1} + \ldots + q^3 + q + 1)$;

(3) *если* $\beta = q+1$, *то* q *нечетно, для любой вершины* $a \in \Gamma$ *каждый* μ*-подграф из* $\Gamma(a)$ *является* $q \times q$*-решеткой, и* $(q+1)(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2)$ *делит* $(s+1)(s+2)q^{n-1}(q^{n-1}-1)$;

(4) *если* $n=4$, *то* $2q+1$ *делит* $65(3,q-1)$ *и* $q \in \{2,7,19\}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ является сильно β-однородным расширением двойственной 2-схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$. Тогда для любой точки a вычет $\mathcal{D}_a$ является частичной геометрией $pG_q(s,q-1)$, $s = q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q$. Утверждение (1) доказано.

По лемме 2.1 точечный граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\beta(s+1,q^{n-1}-1)$, блочный граф — псевдогеометрическим для $pG_{\beta q/2}((s+1)(q-1),s/2)$, поэтому либо q четно, либо $n-1$ и β четны.

По лемме 1.3 $q\beta$ делит $s(s+1)(s+2)(q-1)$, а по условию целочисленности $\beta(2s+2-s/q-\beta)$ делит $(s+1)(s+2)(q-1)q^{n-1}$. Утверждение (2) доказано.

Заметим, что $q+1 \le \beta \le s+1$. Если $\beta = q+1$, то каждый μ-подграф из $\Gamma(a)$ отвечает паре непересекающихся прямых L, M пространства $AG(n,q)$. Для любой точки x прямой L найдется единственная прямая, проходящая через x и пересекающая M. Поэтому каждый μ-подграф из $\Gamma(a)$ является $q \times q$-решеткой. Далее, $q(q+1)$ делит $s(s+1)(s+2)(q-1)$, а по условию целочисленности $(q+1)(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2)$ делит $(s+1)(s+2)q^{n-1}(q-1)$. В случае четного n на $q+1$ делится $s+1$, а в случае нечетного n имеем $q=2$. Если $n=2$, то $s=q$, блочный граф — псевдогеометрический для $pG_{(q+1)q/2}(q^2-1,q/2)$, поэтому q четно. Если $n=3$, то $s=q^2+q=6$, точечный граф Γ — псевдогеометрический для $pG_3(7,3)$.

Положим $d = (2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1)$. Тогда

$$d = (2q^{n-3}+q^{n-4}+\ldots+q+1, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1) = (q^{n-1}-q-1, q^2+q-1),$$

поэтому

$$d = (q^{n-2}-q-2, q^2+q-1) = (q^{n-3}-2q-3, q^2+q-1) = \ldots\ .$$

Если $n=4$, то $d = (q^2-q-2, q^2+q-1) = (2q+1, q^2+q-1) = (2q+1, q+3)$ делит 5. Если $n=5$, то $d = (q^2-2q-3, q^2+q-1) = (3q+2, q^2+q-1) = (2q+5, 3q+2)$ делит 11.

Положим $e = (2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+2)$. Тогда

$$e = (2q^{n-3}+q^{n-4}+\ldots+q+1, q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+2) = (q^{n-1}-q-2, q^{n-1}-q^{n-2}+2),$$

поэтому

$$d = (q^{n-1}-q-2, q^{n-2}-q-4) = (q^{n-2}-q-4, q^2+3q-2) = (3q^{n-3}-q-4, q^2+3q-2) = \ldots\ .$$

Если $n=4$, то $e = (q^2-q-4, q^2+3q-2) = (4q+2, q^2-q-4) = (4q+2, 6q+16)$ делит 26.

Заметим, что $(2q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2, q-1) = (n-1,q-1)$. Если $n=4$, то $2q+1$ делит $65(3,q-1)$ и $q \in \{2,7,19\}$. Лемма и теорема 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hughes D.R.** Extended partial geometries: dual 2-design // Europ. J. Combin. 1990. Vol. 11, no. 5. P. 459–472.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
3. **Махнев А.А.** О графах с μ-подграфами, изоморфными $K_{u\times 2}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7, № 2. С. 169–178.
4. **Huang T.** On quasi-semisymmetric designs // Finite Geometry and Combin.: Third Intern. Conf. at Deinze. Belgium, 1997. P. 1–3.
5. **Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с $k = 2\mu$ и их расширениях // Сиб. мат. журнал. 2002. Т. 43, № 3. С. 609–619.

6. **Hobart S.A., Hughes D.R.** EpGs with minimal μ, II // Geom. Dedicata. 1992. Vol. 42, no. 2. P. 129–138.
7. **Махнев А.А.** Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, вып. 5(329). С. 25–76.
8. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Характеризация графов знакопеременных и квадратичных форм как накрытий локально грассмановых графов // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 1. С. 20–24.

Махнев Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 14.11.2014

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: i_belousov@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.62

К ЗАДАЧЕ СОПРОВОЖДЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА НАБЛЮДАТЕЛЯМИ[1]

В. И. Бердышев

Рассматриваются экстремальные задачи, связанные с сопровождением движущегося объекта наблюдателями. Обсуждается тактика движения аппарата с учетом его видимости со стороны наблюдателей. Даны характеристические свойства оптимальных траекторий.

Ключевые слова: задача сопровождения, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. On the problem of tracking a moving object by observers.

Extremal problems concerned with tracking a moving object by observers are considered. The motion tactic of the vehicle with account taken of its visibility by the observers is discussed. Characteristic properties of optimal trajectories are given.

Keywords: tracking problem, moving object, observer.

Введение

Пусть $X = \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, $G \subset X$ — фиксированное ограниченное множество, являющееся замыканием открытого множества $\overset{\circ}{G}$, дополнение до которого линейно связно (т. е. любые две его точки можно соединить спрямляемой кривой, принадлежащей этому дополнению). Множество $\overset{\circ}{G}$ препятствует видимости и движению. В X движутся точки t и f, t — объект, f — наблюдатель, $t \notin G$, $f \notin \overset{\circ}{G}$. Точки t и f видимы одна для другой, если отрезок $[t, f]$ не пересекается с $\overset{\circ}{G}$.

Дадим краткую формулировку задачи. В [1] рассмотрен вариант задачи сопровождения. Здесь, в отличие от [1], предполагается, что наблюдатель ограничен в передвижении: объект способен поразить наблюдателя посредством миниобъекта, который может двигаться равномерно и прямолинейно. Для каждого положения t объекта наблюдатель вынужден выбирать свою позицию f в безопасной для себя зоне $S(t)$. Описание безопасной зоны дается ниже. Задача объекта — перейти из начальной точки t_* в конечную точку t^*, $t_* \neq t^*$, $t^* \notin G$, $t_* \notin G$, двигаясь внутри заданной линейно связной области Y, $Y \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$, минимизируя на траектории максимум видимости со стороны наблюдателя (множество Y (коридор) представляет собой окрестность заданной "базовой" траектории $\mathcal{T}$, не пересекающуюся с G). Основное внимание уделяется случаю, когда множество G является телесным многогранником с конечным числом граней и задействовано несколько наблюдателей, которые могут занять исходные позиции в вершинах этого многогранника.

Введем следующие обозначения:

$v(t) = \{x \in X : [t, x] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing\}$ — множество точек, видимых из точки t. Ясно, что $v(t)$ замкнуто;

$N(t)$ — множество невидимых точек;

$s(t) = N(t) \setminus G$ — множество затененных (множеством G) точек пространства;

[1]Приведенные в статье результаты (исключая предложение 1) получены за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

$\overline{s}(t)$ — его замыкание;

k — отношение максимальной скорости движения наблюдателя к скорости движения миниобъекта (предполагается, что $k < 1$);

$\mathbb{T}$ — совокупность непрерывных траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau)\colon 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\} \subset Y,$$

не имеющих точек самопересечения;

$\rho(t, M) = \inf\{\|t - m\|\colon m \in M\},\ M \subset X$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма;

$d(t, m)$ — нижняя грань длин спрямляемых кривых, соединяющих t и m и не пересекающихся с $\overset{\circ}{G}$;

$d(t, M) = \inf\{d(t, m)\colon m \in M\},\ M \subset X$;

$\mathcal{P}_M(f) = \{m \in M\colon d(f, M) = d(f, m)\}$ — проекция точки f на множество M;

$$r(t, f) = \frac{\rho(t, N(f))^p}{\|t - f\|^q}, \quad p, q \ge 0, \tag{0.1}$$

— функция видимости объекта t из точки f (см. [2]). Показатель q определяется в зависимости от оптической проницаемости среды.

Заметим, что

$$\rho(t, N(f)) = \inf\{r :\ K_r(t, f) \bigcap G \ne \varnothing\},$$

где

$$K_r(t, f) = \operatorname{conv}\{V_r(t) \bigcup f\},$$

а conv означает выпуклую оболочку множества.

1. О тактике движения наблюдателя

Позицию f наблюдателя назовем безопасной, если

$$d(f, s(t)) \le kd(t, \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(f)). \tag{1.1}$$

Находясь в позиции f, удовлетворяющей условию (1.1), наблюдатель в случае опасности имеет возможность укрыться в теневой области $s(t)$, двигаясь по непрерывной спрямляемой кривой.

Из множества безопасных для наблюдателя f позиций при заданной позиции объекта t выделим множество позиций $S(t)$, близких к t. Сперва докажем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $t \notin G,\ s^* \in \overline{s}(t)$ — ближайшая к t точка из $\overline{s}(t)$, т. е. $d(t, s^*) = d(t, \overline{s}(t))$, тогда $d(t, s^*) = \|t - s^*\|$ и $[t, s^*] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s \in \overline{s}(t)$, $\gamma(s, t)$ — кратчайшая кривая, соединяющая точки s и t, $\gamma(s, t) \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$. Поскольку $t \notin G$, то конечный участок кривой $\gamma(s, t)$, содержащей точку t, является, очевидно, прямолинейным отрезком. Пусть $[g, t] \subset \gamma(s, t)$ — максимальный из таких отрезков. Ясно, что $g \in G$. Покажем, что каждая точка q кривой $\gamma(s, g)$ принадлежит множеству $\overline{s}(t)$. Кривая $\gamma(s, g)$ не содержит точек из множества $v(t)$. В противном случае $\gamma(s, t)$ не была бы кратчайшей. Поэтому для любой точки $q \in \gamma(s, g)$ отрезок $[q, t]$ пересекается с множеством $\overset{\circ}{G}$. Любая точка $q \in \gamma(s, g)$ либо не принадлежит множеству G, либо является его граничной точкой. В первом случае $q \in s(t)$, поскольку q невидима из точки t. Пусть $q \in \gamma[s, g]$ — граничная точка множества G. Тогда существует последовательность точек $q_k \notin G$, сходящаяся к q. Эта последовательность не содержит подпоследовательности видимых из t точек, иначе мы бы имели включение $q \in v(t)$. Если q_k невидима, то $q_k \in s(t)$, так как $q_k \notin G$. Следовательно, q есть предел точек из $s(t)$, т.е. $q \in \overline{s}(t)$ и, в частности, $g \in \overline{s}(t)$, $g = s^*$. Доказательство завершено. $\square$

Итак, для поиска точки из $\overline{s}(t)$, ближайшей по расстоянию d к объекту t, надо найти кратчайший не пересекающийся с $\overset{\circ}{G}$ прямолинейный отрезок, соединяющий t и множество $\overline{s}(t)$. В общем случае эта задача имеет неединственное решение.

Задача наблюдателя двоякая: сократить расстояние до объекта, увеличивая его видимость (0.1), и остаться в безопасной зоне.

Наблюдатель, чтобы решать свою первую задачу, сперва занимает позицию $s^* = s^*(t)$ — одну из ближайших к t из замыкания $\overline{s}(t)$ затененной области, а затем для решения второй задачи он выбирает позицию $f \notin \overset{\circ}{G}$, удовлетворяющую условию

$$d(f, s^*) \leq k\|t - s^*\|.$$

Поскольку

$$d(f, s(t)) \leq d(f, s^*), \quad \|t - s^*\| \leq d(t, \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(f)),$$

то (см. (1.1)) выбранная позиция f является безопасной.

Множество таких позиций f обозначается через $S(t)$. Легко видеть, что $S(t)$ принадлежит евклидовому шару $V_c(s^*)$ с центром s^* радиуса $c = k\|t - s^*\|$. Радиус c евклидова шара, содержащего множество $S(t)$, в общем случае нельзя уменьшить. Очевидно (см. предложение 1), что

$$\rho(t, S(t)) = d(t, S(t)) \geq \rho(t, V_c(s^*)) = (1 - k)\|t - s^*\| = (1 - k)d(t, s^*). \tag{1.2}$$

Из определения величины $r(t, f)$ нетрудно вывести, что справедлива

Лемма 1. *Если $f \in \overset{\circ}{V}_c (s^*) \backslash G$, точка $f_0 \in [f, t]$ такова, что*

$$\|s^* - f_0\| = c, \quad f_0 \notin G, \quad \text{то} \;\; r(t, f_0) \geq r(t, f).$$

Из леммы 1 следует, что величина $r(t, f)$ не убывает в направлении вектора $\overrightarrow{ff_0}$.

Предложение 2. *Пусть $t \notin G$, $s^* \in \overline{s}(t)$ — ближайшая к t точка из $\overline{s}(t)$, $\rho < \rho(t, G)$, $s \in [s^*, t]$ и $0 < \|s - s^*\| < \|t - s^*\| - \rho$. В любой окрестности точки s найдется точка f, для которой $r(t, f) > 0$.*

Доказательство. Точка s не является внутренней для множества G, поэтому в любой ее окрестности найдется точка f, не принадлежащая множеству $\overset{\circ}{G}$, и некоторая ее окрестность $\overset{\circ}{V}_\varepsilon (f)$ не пересекается с G. Эту точку f можно выбрать так, что конус

$$\operatorname{conv}\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon (f) \bigcup t \right) \tag{1.3}$$

не пересекается с множеством $\overset{\circ}{G}$. Допустим противное, что для любой f такой, что $\overset{\circ}{V}_\varepsilon (f) \bigcap G = \varnothing$, $\varepsilon = \varepsilon_f > 0$, есть точка $s_f \in \operatorname{conv}(\overset{\circ}{V}_\varepsilon (f)) \bigcup G$. Любая точка $x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon (f)$ такая, что $s_f \in [t, x]$, затенена точкой s_f. Следовательно, точка s является пределом последовательности затененных точек, $s \in \overline{s}(t)$. Но $\|t - s\| < \|t - s^*\|$, что противоречит условию $\|t - s^*\| = \rho(t, \overline{s}(t))$. Завершая доказательство предложения, приведем оценку снизу для величины $r(t, f)$. Пусть K — пересечение конуса (1.3) с шаром $V_\rho(t)$, и пусть $K(f, t) = \operatorname{conv}(K \bigcup f)$. Нетрудно проверить, что

$$r(t, r) \geq \max\{r \colon V_r(t) \subset K(f, t)\} = \frac{\varepsilon\rho}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\sqrt{\|f - t\|^2 - \varepsilon^2} - \rho^2)^2}}. \qquad \square$$

В условиях ограниченной возможности влияния на величину знаменателя в (0.1) наблюдатель заинтересован в решении задачи

$$R(t) = \max\{\rho(t, N(f))\colon f \in S(t)\}. \tag{1.4}$$

В [2] приведена формула для производной по направлению величины $\rho(t, N(f))$, которую можно использовать для поиска максимума (1.4) градиентным методом. Предложение 2 дает возможность осуществить такой поиск.

Во многих случаях, в частности в случае многогранного множества G, задача (1.4) решается легко. Так, для множества G из $\mathbb{R}^2$

$$G = \{(x, y)\colon\ -2 \le x \le 0,\ 1 \le y \le 2\},$$

точки $t = (0, 0),\ k = 1/4,\ b = 1,\ a = (0, 1)$ будем иметь: $s^* = (0, 2)$, максимум (1.4) достигается для $f,\ \|s^* - f\| = 1/2$ с максимальной величиной синуса угла $\angle aft$ с вершиной в точке f.

В отличие от наблюдателя, объект может увеличивать знаменатель $\|t - f\|$ для уменьшения функции видимости $r(t, f)$. Ввиду (1.2) и предложения 1 ему следует увеличивать величину

$$\rho(t, s(t)) = \|f - s^*(t)\|, \quad \text{где} \quad s^*(t) \in \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t).$$

2. Метод перевала

Задача поиска траектории, оптимальной для объекта, принимает вид

$$\inf_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \sup_{t \in \mathcal{T}} \frac{R(t)}{\rho(t, s(t))}. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$F(t) = R(t)\rho(t, s(t))^{-1},$$

$$L_e = \{y \in Y:\ F(y) \le e\} \quad (e \ge 0),$$

$L_e(t)$ — максимальное по включению линейно связное подмножество из L_e, содержащее точку t, и

$$\widetilde{e} = e(t_*, t^*) = \min\big(e \ge \max\{F(t_*), F(t^*)\},\ L_e(t_*) \bigcap L_e(t^*) \ne \varnothing\big).$$

Любая непрерывная кривая $\mathcal{T} = \mathcal{T}(t_*, t^*)$, принадлежащая множеству

$$\big(L_{\widetilde{e}}(t_*) \bigcap L_{\widetilde{e}}(t^*)\big)$$

и содержащая точки t_* и t^*, является решением задачи (2.1).

Простые примеры показывают, что функция $d(t, s(t))$ и, значит, $F(t)$, вообще говоря, не являются непрерывными.

П р и м е р 1. Пусть $G = \{(x, y)\colon |x| \le 1,\ |y| \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат с вершинами a_i. Для любой точки $t \notin G$ ближайшей точкой из множества $\overline{s}(t)$ может быть только одна из вершин. Дополнение $\mathbb{R}^2 \backslash G$ разбивается на четыре несвязных области Q_i, каждая из которых составлена из четырех областей, расположенных симметрично относительно одной из диагоналей квадрата, так, что для любой точки $t \in Q_i$ ближайшей точкой из $\overline{s}(t)$ является вершина a_i. Нетрудно видеть, что график функции $\rho(t, s(t))$ представляет собой объединение конических поверхностей с вершинами a_i. Эта функция разрывна, и все точки разрыва лежат на продолжении сторон квадрата.

3. Случай многогранного множества G

Поиск оптимальной траектории в (2.1) методом перевала — трудная задача. Она упрощается, если множество G является телесным, может быть, несвязным многогранником (замыканием открытого многогранника с конечным числом граней).

Далее рассматривается задача

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}}\min_{t\in\mathcal{T}} d(t,s(t)), \tag{3.1}$$

являющаяся частным случаем задачи для (0.1) при $p=0,\ q=1$.

Определение 1. Точка $a\in G$ называется угловой (вершиной), если существуют $\varepsilon>0$ и гиперплоскость L такие, что $L\bigcap(V_\varepsilon(a)\bigcap G)=a$ и множество $V_\varepsilon(a)\bigcap G$ расположено по одну сторону относительно L.

Далее считаем, что любая вершина многогранника G такова, что множество $V_\varepsilon(a)\bigcap G$ выпукло для некоторого $\varepsilon>0$.

Обозначим через A множество угловых точек множества G.

В случае $X=\mathbb{R}^2$ угловая точка является вершиной угла раствора, меньшего π. Угол при вершине a будем обозначать через $\angle a$, а вертикальный по отношению к $\angle a$ угол — через

$$a\angle=\bigl\{\lambda(a-x)\colon x\in V_\varepsilon(a)\bigcap G,\ \lambda>0\bigr\}+a,$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Для $a\in A$ будем обозначать

$$\widetilde{T}(a)=\{t\in v(a)\colon a\in\overline{s}(t)\}\quad\text{и}\quad T(a)=\{t\in v(a)\colon a\in\mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t)\}$$

— множество точек t из $\widetilde{T}(a)$, для которых a является ближайшей точкой из $\overline{s}(t)$.

Установим явное выражение для множества $T(a)$. Пусть $a\in A$. Легко видеть, что

$$\widetilde{T}(a)=X\backslash\bigl[(\angle a)\bigcup(a\angle)\bigcup N(a)\bigr].$$

Здесь следует подчеркнуть, что видимые из a точки t (т. е. $a\in v(t)$), принадлежащие вертикальному углу $a\angle$, не содержатся в множестве $\widetilde{T}(a)$. Для любого $a'\in A$ возьмем элемент $\varphi=\varphi_{a'}$ из X такой, что

$$\|\varphi\|=1,\quad \Bigl\langle\varphi_{a'},\frac{a'-a}{\|a'-a\|}\Bigr\rangle=1,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, тогда

$$T(a)\subset\widetilde{T}(a)\backslash\Bigl[t\in\widetilde{T}(a')\colon\langle\varphi_{a'},t\rangle>\Bigl\langle\varphi_{a'},\frac{a'+a}{2}\Bigr\rangle\Bigr],$$

поскольку расстояние точек t вычитаемого множества до a' меньше, чем до точки a. Более того, легко видеть, что

$$T(a)=\widetilde{T}(a)\backslash\bigcup_{a'\in(A\backslash a)}\Bigl[t\in\widetilde{T}(a')\colon\langle\varphi_{a'},t\rangle>\Bigl\langle\varphi_{a'},\frac{a'+a}{2}\Bigr\rangle\Bigr]. \tag{3.2}$$

Из формулы (3.2) следует

Предложение 3. *Множество $T(a)$ для любой $a\in A$ является многогранником, грани которого могут лежать либо на $bd(\angle a)\bigcup bd(a\angle)$, либо на гиперплоскости $H(a,a')$, содержащей точку $(a+a')/2$ и ортогональной отрезку $[a,a']$, для некоторой вершины $a'\in A$.*

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $X = \mathbb{R}^2$. Справедливы следующие утверждения:*

— для любой точки $a \in A$ множество $T(a)$ является многоугольником, необязательно связным,

— $\bigcup\limits_{a \in A} T(a) = X \setminus \overset{\circ}{G}$,

— $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing$ *для любых* $a, a' \in A$, $a' \neq a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $t \notin G$ множество видимых из t точек множества G, т. е. $v(t) \bigcap G$, представляет собой кусочно линейную кривую без самопересечений. Возьмем ее связную компоненту. Ввиду связности множества $X \backslash G$ исключен случай, когда эта компонента разбивает пространство на внешнюю часть и внутреннюю, содержащую точку t. Пусть g — конечная точка этой связной компоненты. Легко убедиться, что на луче с началом t, содержащем точку g, имеется угловая точка a множества G, являющаяся предельной для затененных точек, т. е. $a \in \overline{s}(t)$. Отсюда следует, что для некоторой угловой точки $a' \in G$, может быть, для $a' = a$, выполняется включение $t \in T(a')$. Итак,

$$(X \backslash G) \subset \bigcup_{a \in A} T(a).$$

Имеем также, что

$$\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing \quad \forall\, a, a' \in A.$$

В самом деле, если $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') \neq \varnothing$, то для любых t и t' из множества $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a')$ верны равенства

$$\|t - a\| = \|t - a'\|, \quad \|t' - a\| = \|t' - a'\|,$$

в частности, они выполняются для точки t и точки $t' \in [a, t]$, близкой к t, что невозможно. □

В случае пространства $X = \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ второе утверждение теоремы может нарушаться.

П р и м е р 2. Из точек внутренней полости множества $G \subset \mathbb{R}^3$, где

$$G = \Big\{(x, y, z)\colon\ \frac{1}{2} \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 1,\ |z| \leq 1\Big\},$$

не видно ни одной угловой точки этого множества.

Доказательство же первого и третьего утверждений остается без изменений. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда*

— множество $T(a)$ является многогранником для любой $a \in A$,

— $\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing$ *для любых* $a, a' \in A$, $a \neq a'$.

Отметим, что множество

$$T_0 = (X \setminus \overset{\circ}{G}) \setminus \bigcup_{a \in A} \overset{\circ}{T}(a) \tag{3.3}$$

также является многогранником. Как показывает пример, оно может быть непустым в случае $X = \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$.

Для любого t существует точка $s^* = s^*(t) \in \overline{s}(t)$, ближайшая к t, т. е.

$$\rho(t, s(t)) = \|t - s^*(t)\|, \quad t \in T(s^*). \tag{3.4}$$

Очевидно, что точка $s^*(t)$ не может быть внутренней для грани размерности $n - 1$ многогранника G. Так, в случае пространства $X = \mathbb{R}^2$ точка s^* является вершиной. В случае же пространства $X=\mathbb{R}^n$ точка t может оказаться в множестве T_0 и точка s^*, реализующая равенство (3.4), принадлежит некоторой грани размерности $k,\ 1\le k\le n-1$ (см. приведенный выше пример).

Далее будем исходить из того, что в задаче сопровождения участвуют несколько наблюдателей. Естественно предположить, что предпочтительным местоположением наблюдателя является одна из вершин многогранника G, поскольку вершина обеспечивает лучший обзор близлежащей местности и у наблюдателя больше возможностей укрыться от миниобъекта в затененной области. При этом предположении задача (3.1) принимает вид

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}}\ \min_{t\in\mathcal{T}\setminus T_0}\rho(t,s(t)). \tag{3.5}$$

Наряду с (3.5) представляет интерес задача максимизации интегрального функционала. Для траектории

$$\mathcal{T}=\{t(\tau),\ 0\le\tau\le 1\}\in\mathbb{T}$$

обозначим

$$\Delta=\Delta_{\mathcal{T}}=\{\tau\in[0,1]\colon t(\tau)\in T_0\}.$$

Упомянутая выше задача ставится следующим образом:

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}^*}\int\limits_{[0,1]\setminus\Delta_\tau}\rho(t(\tau),s(t(\tau)))\,d\tau, \tag{3.6}$$

где $\mathbb{T}^*$ — специальный класс траекторий из $\mathbb{T}$ с заданной последовательностью посещения множеств $T(a)$.

Далее ограничимся случаем $X=\mathbb{R}^2$. Ради простоты будем предполагать, что "коридор" $Y,\ Y\bigcap\overset{\circ}{G}\neq\varnothing$, внутри которого должен двигаться объект t, является односвязным телесным многогранником (окрестностью заданной базовой траектории), точки $t_*,\ t^*$ принадлежат его границе и движение объекта осуществляется от t_* к t^*. Границу bdY многоугольника Y разобьем на две части — левую Y_l и правую Y_r (по отношению к объекту, начинающему движение от t_* к t^* по базовой траектории, содержащейся в Y). Обозначим

$$A_Y=\bigl\{a\in A\colon T(a)\bigcap\overset{\circ}{Y}\neq\varnothing\bigr\}.$$

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2. *Если $\widehat{t}\in\widetilde{T}(a)$, то существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого $t\in V_\varepsilon(\widehat{t})\bigcap\overset{\circ}{V}_{\|\widehat{t}-a\|}(a)$ выполняется неравенство*

$$\rho(t,s(t))<\|\widehat{t}-a\|.$$

Из теоремы 1 следует, что "коридор" Y заполнен связными компонентами множеств вида $T(a)\bigcap Y\ (a\in A_Y)$.

Пусть траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ максимизирует величину $\min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}}\rho(t,s(t))$, т. е.

$$\max_{\mathcal{T}}\min_{t\in\mathcal{T}}\rho(t,s(t))=\min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}}\rho(t,s(t)),$$

и точка $\widehat{t}\in\widehat{\mathcal{T}}$ такова, что

$$\rho(\widehat{t},s(\widehat{t}))=\min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}}\rho(t,s(t)). \tag{3.7}$$

Существует точка $\widehat{a}\in A$, для которой

$$\widehat{t}\in T(\widehat{a})\ \text{ и }\ \rho(\widehat{t},s(\widehat{t}))=\|\widehat{t}-\widehat{a}\|,\quad\text{т. е. }\ \widehat{a}\in\mathcal{P}_{\overline{s}(\widehat{t})}(\widehat{t}).$$

Предложение 4. *Если* $\widehat{t} \in (bdY)\bigcap T(\widehat{a})$, $[\widehat{t},\widehat{a}]\bigcap \overset{\circ}{Y} \neq \varnothing$, *то точка* $\widehat{t}$ *является точкой локального минимума функции* $\|\widehat{a}-g\|$ *от* g, $g \in Y_r$.

Если эта точка $\widehat{t}$ *принадлежит множеству* $\overset{\circ}{Y}$, *то* $P_{\overline{s}(\widehat{t})}(\widehat{t}) = \{\widehat{a}, 2\widehat{t}-\widehat{a}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим первое утверждение. Если $\widehat{t}$ не является точкой локального минимума функции $\|\widehat{a}-g\|$ переменного $g \in Y_r$, то в любой ε-окрестности точки $\widehat{t}$ найдется точка $y_\varepsilon \in Y_r$, для которой $\|\widehat{a}-y_\varepsilon\| < \|\widehat{a}-\widehat{t}\|$. Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ должна пересечь отрезок $[\widehat{a},y_\varepsilon]$ и для точки $t_\varepsilon = [\widehat{a},y_\varepsilon]\bigcap\widehat{\mathcal{T}}$ по лемме 2 будет выполняться неравенство $\rho(t_\varepsilon, s(t_\varepsilon)) \le \|t_\varepsilon-\widehat{a}\| < \|\widehat{t}-\widehat{a}\|$, противоречащее равенству (3.7) и выбору вершины $\widehat{a}$.

Проверим справедливость второго утверждения. Обозначим $\widehat{a}_0 = 2\widehat{t}-\widehat{a}$, $\widehat{P} = P_{\overline{s}(\widehat{t})}(\widehat{t})$. Допустим, что $\widehat{a}_0 \notin \widehat{P}$. Построим траекторию $\mathcal{T}_\varepsilon$, изменив траекторию $\widehat{\mathcal{T}}$ в ε-окрестности точки $\widehat{t}$ так, чтобы $\mathcal{T}_\varepsilon$ прошла через точку $t_\varepsilon = \widehat{t}-\varepsilon(\widehat{a}-\widehat{t})$. Тогда будем иметь неравенство

$$\rho(t_\varepsilon, s(t_\varepsilon)) \le \|t_\varepsilon-\widehat{a}\| < \|\widehat{t}-\widehat{a}\|,$$

которое противоречит свойству экстремальности (3.7) траектории $\widehat{\mathcal{T}}$. Теперь предположим, что кроме точек $\widehat{a},\widehat{a}_0$ есть еще точка a, принадлежащая проекции $\widehat{P}$. Для определенности будем считать, что $[\widehat{a},\widehat{t}]\bigcap Y_l \neq 0$ и, значит, $[\widehat{a}_0,\widehat{t}]\bigcap Y_r \neq \varnothing$. Определим точку t_ε следующим образом:

$$t_\varepsilon = \widehat{t} + \varepsilon\frac{a+\widehat{a}_0-2\widehat{t}}{2}, \quad \text{если} \quad [a,\widehat{t}]\bigcap Y_l \neq \varnothing.$$

$$t_\varepsilon = \widehat{t} + \varepsilon\frac{a+\widehat{a}-2\widehat{t}}{2}, \quad \text{если} \quad [a,\widehat{t}]\bigcap Y_r \neq \varnothing,$$

Тогда будем иметь $\|a-t_\varepsilon\| = \|\widehat{a}_0-t_\varepsilon\| < \|\widehat{a}-\widehat{t}\|$ в первом случае и $\|\widehat{a}-t_\varepsilon\| = \|a-t_\varepsilon\| < \|\widehat{a}-\widehat{t}\|$ во втором случае. Построив траекторию $\mathcal{T}_\varepsilon$, изменив исходную траекторию $\widehat{\mathcal{T}}$ в ε-окрестности точки $\widehat{t}$ так, чтобы траектория $\mathcal{T}_\varepsilon$ содержала точку t_ε, получим противоречие с условием (3.7) экстремальности траектории $\widehat{\mathcal{T}}$. Предложение установлено. □

О п р е д е л е н и е 2. Отрезок назовем разделяющим (точки t_*, t^*), если любая траектория из $\mathbb{T}$ пересекается с ним и его пересечение с $\overset{\circ}{Y}$ — связный интервал.

Для поиска траектории, доставляющей максимум (3.5), рассмотрим множество разделяющих отрезков трех видов:

$$W = \Big\{[a,a'] : \ a \in A, \ a' \in A, \ a \in \widetilde{T}(a'), \ a' \in \widetilde{T}(a), \ \frac{a+a'}{2} \in Y\Big\},$$

$$W_l = \Big\{[a,y_l] : \ a \in A, \ y_l \in Y_l, \ [a,y_l]\bigcap Y_r \neq \varnothing, \ y_l \in \widetilde{T}(a)\bigcap \mathcal{P}_{Y_l}(a)\Big\},$$

$$W_r = \Big\{[a,y_r] : \ a \in A, \ y_r \in Y_r, \ [a,y_r]\bigcap Y_l \neq \varnothing, \ y_r \in \widetilde{T}(a)\bigcap \mathcal{P}_{Y_r}(a)\Big\}.$$

Обозначим

$$M = \min\Big\{\min_W \frac{\|a-a'\|}{2}, \ \min_{W_l}\|a-y_l\|, \ \min_{W_r}\|a-y_r\|\Big\}. \tag{3.8}$$

Из предложения 4 следует

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\max_{\mathcal{T}} \min_{t\in\mathcal{T}} \rho(t,s(t)) = M.$$

Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ *является экстремальной в задаче* (3.7) *тогда и только тогда, когда*

$$\rho(t,s(t)) \ge M \quad \forall\, t \in \widehat{\mathcal{T}}$$

и для отрезков из W, W_l, W_r, *доставляющих минимум* (3.8), *выполняются включения*

$$\frac{a+a'}{2} \in \widehat{\mathcal{T}}, \quad y_l \in \widehat{\mathcal{T}}, \quad y_r \in \widehat{\mathcal{T}}.$$

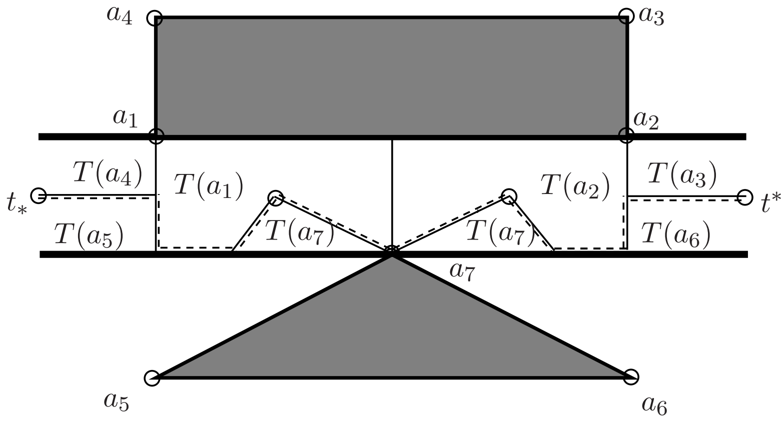


Рисунок.

Перейдем к задаче (3.6) максимизации интегрального функционала. Ясно, что без дополнительных ограничений на класс $\mathbb{T}$ траекторий величина (3.6) не ограничена.

Как отмечалось, "коридор" заполнен связными компонентами B множеств вида $T(a)\bigcap Y$ $(a \in A_Y)$. Каждая из них является многогранником. Совокупность этих компонент обозначим через $\mathcal{N} = \{B\}$. Естественно потребовать, чтобы часть траектории $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, попавшая в компоненту $B \subset T(a)\bigcap Y$, располагалась по возможности дальше от вершины a, что фактически однозначно определяет траекторию на B.

Второе требование — порядок посещения траекторией компонент B. Введем на $\mathcal{N}$ частичный порядок по величине расстояния $d(t_*, B)$, здесь $d(t_*, x)$ означает минимум длин кривых, содержащихся в Y и соединяющих точку t^* с $x \in B$. Построим всевозможные связные строго возрастающие цепочки

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}, \quad t_* \in B_1, \quad t^* \in B_N, \quad d(t_*, B_i) < d(t_*, B_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad (3.9)$$

где номер N зависит от цепочки. Будем рассматривать только такие траектории $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{T}$, которые посещают множества из цепочки по очереди, в соответствии с введенным порядком.

На каждой компоненте $B = B(a) \subset T(a) \cap Y$ $(B \in \mathcal{N})$ выделим "дальнюю" от вершины a часть $\gamma = (bdB)^* = (bdB)^*(a)$ границы bdB компоненты B следующим образом.

Найдем угол с вершиной a наименьшего раствора, содержащий компоненту $B(a)$. Две точки на сторонах этого угла, наиболее удаленные от a, разбивают bdB на две части: ближнюю к a и дальнюю от вершины a часть $\gamma_B = (bdB)^*$.

Для каждой цепочки $\mathcal{B}$ (3.9) траектория $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ строится из фрагментов "дальних" границ $\gamma_i = (bdB_i)^*$ $(B_i \subset T(a),\ a = a(B_i))$ с весом

$$q_i = \int\limits_{\gamma_i} \|t - a(B_i)\|\, dt \qquad (3.10)$$

и при необходимости из отрезков, принадлежащих $bd(a\angle)$ (см. предложение 3) с нулевым весом. Вес $Q_{\mathcal{B}}$ траектории $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ определяется как сумма весов q_i.

При введенных требованиях на класс траекторий $\mathcal{T}$ из $\mathbb{T}$ задача (3.6) сводится к задаче

$$\max_{\mathcal{B}} Q_{\mathcal{B}}$$

поиска оптимального пути на направленном графе, вершинами которого являются множества $B \in \mathcal{N}$ с весом (3.10), а пути определяются цепочками (3.9).

В приведенном примере (см. рисунок выше) множество G составлено из прямоугольника с вершинами $a_1, \ldots, a_4$ и треугольника с вершинами a_5, a_6, a_7, "коридор" Y — полоса, ограниченная горизонтальными прямыми, разделяющая прямоугольник и треугольник. Траектория, обозначенная пунктирной линией, является оптимальной для обеих задач (3.1), (3.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Объект и наблюдатель. Задача сопровождения // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 7–19.
2. **Бердышев В.И.** Характеристики видимости движущейся точки // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 5. С. 588–590.

Бердышев Виталий Иванович
академик
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 09.10.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.928:517.984

О СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА В КРУГЕ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ НА МАЛОМ УЧАСТКЕ ГРАНИЦЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Р. Р. Гадыльшин, С. В. Репьевский, Е. А. Шишкина

Рассмотрена краевая задача на собственные значения для отрицательного оператора Лапласа в круге с граничным условием Неймана почти на всей окружности за исключением малой дуги, длина которой стремится к нулю и на которой выставлено граничное условие Дирихле. Построены полные асимптотики по параметру (длине малой дуги) собственного значения такой задачи, сходящегося к двукратному собственному значению предельной задачи Неймана.

Ключевые слова: оператор Лапласа, сингулярное возмущение, малый параметр, собственное значение, асимптотика.

R. R. Gadyl'shin, S. V. Rep'evskii, E. A. Shishkina. On an eigenvalue for the Laplace operator in a disk with Dirichlet boundary condition on a small part of the boundary in a critical case.

A boundary-value problem of finding eigenvalues is considered for the negative Laplace operator in a disk with Neumann boundary condition on almost all circle except for a small arc of vanishing length, where the Dirichlet boundary condition is imposed. Complete asymptotic expansions with respect to a parameter (the length of the small arc) are constructed for an eigenvalue of this problem; the eigenvalue converges to a double eigenvalue of the Neumann problem.

Keywords: Laplace operator, singular perturbation, small parameter, eigenvalue, asymptotics.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Обозначим через Ω круг единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть x_0 — точка с декартовыми координатами $(1,0)$, (r,φ) — полярные координаты. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x\in\partial\Omega\colon \varepsilon a<\varphi<\varepsilon b\}$, где $0<\varepsilon\ll 1$; $\Gamma_\varepsilon := \partial\Omega\backslash\overline{\gamma_\varepsilon}$. Из [1] следует, что при $\varepsilon\to 0$ собственные значения краевой задачи

$$-\Delta\psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon\psi^\varepsilon,\quad x\in\Omega,\quad \psi^\varepsilon=0,\quad x\in\gamma_\varepsilon,\quad \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial r}=0,\quad x\in\Gamma_\varepsilon \tag{1.1}$$

сходятся к собственным значениям краевой задачи

$$-\Delta\psi_0=\lambda_0\psi_0,\quad x\in\Omega,\quad \frac{\partial\psi_0}{\partial r}=0,\quad x\in\partial\Omega \tag{1.2}$$

с учетом совокупной кратности. В свою очередь, хорошо известно, что задача (1.2) имеет либо простые собственные значения, совпадающие с квадратами нулей производной функции Бесселя нулевого порядка $\mathcal{J}_0$, либо двукратные собственные значения, совпадающие с квадратами нулей производной функции Бесселя m-го порядка $\mathcal{J}_m$, $m\geqslant 1$.

[1]Работа первого автора выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России. Второй автор поддержан РФФИ (проект 14-01-00322). Работа третьего автора поддержана РФФИ (проект 15-01-07920).

В работе методом согласования асимптотических разложений [2–4] получено асимптотическое разложение по малому параметру ε собственного значения краевой задачи (1.1), сходящегося к двукратному собственному значению краевой задачи (1.2), а именно доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть λ_0 — двукратное собственное значение предельной краевой задачи* (1.2), *являющееся квадратом нуля производной функции Бесселя $\mathcal{J}_m$. Тогда существует собственное значение λ^ε краевой задачи* (1.1), *которое имеет асимптотику*

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \varepsilon^i \ln^k \varepsilon \, \lambda_{i+2,k}, \tag{1.3}$$

$$\lambda_{2k+2,k} = (-1)^k \frac{\lambda_0 m^2}{(\lambda_0 - m^2)} \frac{(b-a)^{2k+2}(\lambda_0+8)^k}{4^{2k+1}}, \quad k \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Структура работы следующая. Во втором разделе представлены предварительные сведения и вспомогательные утверждения. Главные члены (1.4) асимптотического разложения (1.3) выводятся в третьем разделе. В четвертом разделе строится полная формальная асимптотика (1.3) собственного значения. И, наконец, в пятом, заключительном, разделе, дается обоснование построенного разложения, что и завершает доказательство теоремы 1.1.

Следует заметить, что асимптотики собственных значений для лапласиана с аналогичной сменой типа граничного условия в более простом случае, когда область имеет выпрямленный участок границы, на котором и проводится смена типа граничного условия, исследовались в [5]. Для круга же в [6] была построена двучленная асимптотика минимального значения в случае, когда, наоборот, на большей части границы было выставлено граничное условие Дирихле, а на малой — Неймана. Отметим также, что задачи со сменной типа граничных условий на малых частях границ, число которых стремится к бесконечности при стремлении к нулю длины каждого участка, исследовались в [7; 8] методами усреднения [9–11].

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

В окрестности точки x_0 введем новые переменные $y_1 = \varphi$, $y_2 = 1 - r$, где, напомним, (r, φ) — полярные координаты для переменной $x = (x_1, x_2)$. Замены переменных $y(x)$ и $x(y)$ будут использоваться только в окрестности точек $x = x_0$ и $y = 0$, соответственно, где они взаимно однозначны. В переменной $y = (y_1, y_2)$ оператор Δ приобретает вид

$$\Delta = \Delta_y + \sum_{k=-1}^{\infty} L_k^y, \quad L_k^y := -y_2^{k+1} \frac{\partial}{\partial y_2} + (k+3) y_2^{k+2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \tag{2.1}$$

где Δ_y означает оператор Лапласа по переменной y. В дальнейшем операторы (2.1) будут рассматриваться и в переменных $\xi = \varepsilon^{-1} y = (\xi_1, \xi_2)$. В этом случае мы будем использовать обозначения Δ_ξ и L_k^ξ.

Всюду далее через $P_n(y)$, $P_n^{(i)}(y)$ будем обозначать однородные полиномы степени n, а через $Z_n(y)$, $Z_n^{(i)}(y)$ — однородные гармонические полиномы степени n. Очевидно, что любой гармонический полином $Z_n(y)$ представим в виде $Z_n(y) = \alpha X_n(y) + \beta Y_n(y)$, где $Y_n(y) = \tau^n \sin n\theta$, $X_n(y) = \tau^n \cos n\theta$, τ, θ – полярные координаты для переменных y, а α и β – некоторые постоянные.

Лемма 2.1. *Пусть $k \geqslant 0$, j — целое, $M = (j+2)(j+2+2k)$. Тогда уравнение $\Delta_y U = \tau^j Z_k$ имеет решение $U(y) = p\,\tau^{j+2} Z_k(y)$, где p — некоторое число, если $M \neq 0$, и $U(y) = (2j+4+2k)^{-1} \tau^{j+2} Z_k(y) \ln \tau$, если $M = 0$.*

Для $j \geqslant 0$ уравнение $\Delta_y U = \tau^j Z_k \ln \tau$ имеет решение $U(y) = \tau^{j+2} Z_k(y)(p \ln \tau + q)$, где p, q — некоторые числа.

Лемма 2.2. *Для любого $P_j(y)$ справедливо равенство*

$$P_j(y) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \tau^{2s} Z_{j-2s}(y).$$

Лемма 2.3. *Для любых $Z_k(y)$, $P_j(y)$ $(k > j)$ справедливо равенство*

$$Z_k(y)P_j(y) = \sum_{s=0}^{j} \tau^{2s} Z_{k+j-2s}(y).$$

Первое и третье утверждения доказаны в [13], а второе — в [14, гл. XI, § 2].

Обозначим через $\widehat{\mathcal{A}}_k$ множество рядов вида

$$\mathcal{E}(y) = \Phi_0(y) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(y), \tag{2.2}$$

где $\Phi_0(y) = A\dfrac{X_k(y)}{\tau^{2k}}$ при $k \geqslant 1$ и $\Phi_0(y) = A \ln \tau$ при $k = 0$, A — произвольная постоянная,

$$\Phi_n(y) = \sum_{j=0}^{2n} \tau^{-2k-2n+2j} Z_{k+3n-2j}(y) + \delta_k^n \alpha_1 \ln \tau, \quad 1 \leqslant n \leqslant k, \tag{2.3}$$

$$\Phi_n(y) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k+3n}{2}\right]} \tau^{-2k-2n+2j} Z_{k+3n-2j}(y) + \ln \tau \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \tau^{2j} Z_{n-k-2j}(y), \quad n \geqslant k+1, \tag{2.4}$$

δ_k^n — символ Кронекера, а α_1 — любое число.

На основе метода математической индукции и исходя из лемм 2.1, 2.2, 2.3 в [13, доказательство теоремы 1.1] была показана справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.4. *Для любого ряда $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{A}}_k$ и любого числа A существует ряд $\mathcal{E} \in \widehat{\mathcal{A}}_k$ такой, что $\Phi_0(y) = A\tau^{-2k} X_k(y)$ при $k \geqslant 1$, $\Phi_0(y) = A \ln \tau$ при $k = 0$ и справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &-\Delta_y \Phi_0 = 0, \qquad -\Delta_y \Phi_1 = L_{-1}\Phi_0, \\ &-\Delta_y \Phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} L_{i-1}\Phi_{n-i-1} + \lambda_0 \Phi_{n-2} + \widetilde{\Phi}_{n-2}, \ \ n \geqslant 2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\Phi_n(y)$ и $\widetilde{\Phi}_n(y)$ — члены рядов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.

Из (2.1) вытекает, что если ряд $\mathcal{E}(y)$ удовлетворяет утверждению леммы 2.4, то ряд $\mathcal{E}(y(x))$ является асимптотическим решением уравнения

$$-\Delta \mathcal{E}(y(x)) = \lambda_0 \mathcal{E}(y(x)) - \mathcal{F}(y(x)) \quad \text{при } x \to x_0. \tag{2.6}$$

Однако нам в дальнейшем понадобится, чтобы это асимптотическое решение удовлетворяло и однородному граничному условию Неймана. В переменных y это означает, что от членов $\Phi_n(y)$ ряда $\mathcal{E}(y)$ дополнительно требуется выполнение условия

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y_2}(y_1, 0) = 0, \quad y_1 \neq 0. \tag{2.7}$$

Очевидно, что главные члены $\Phi_0(y)$ асимптотических рядов из $\widehat{\mathcal{A}}_k$ удовлетворяют условию (2.7). Из (2.3) также легко видеть, что при $1 \leqslant n \leqslant k-1$, добавляя к $\Phi_n(y)$ гармоническое слагаемое $\beta Y_{k-n}(y)\tau^{-2(k-n)}$, где, напомним, $Y_m(y) = \tau^m \sin m\theta$, для вновь полученной функции, во-первых, за счет выбора β добиваемся равенства (2.7), а во-вторых, сохраняем представление (2.3). С другой стороны, из (2.3) и (2.4) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_n}{\partial y_2}(y_1,0) =&\alpha_1 y_1|y_1|^{-2}, \quad y_1\neq 0, \quad n=k\geqslant 1,\\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial y_2}(y_1,0) =&\alpha_2 y_1^{n-k-1}+\alpha_3 y_1^{n-k-1}\ln|y_1|, \quad y_1\neq 0, \quad n\geqslant k+1.\end{aligned}$$

Конечно, добавляя к $\Phi_n(y)$ гармоническое слагаемое $\beta_1\theta$ для $n = k \geqslant 1$ и гармонические слагаемые $\beta_2 Y_{n-k}(y)$, $\beta_3(\theta X_{n-k}(y) + Y_{n-k}(y)\ln\tau)$ для $n \geqslant k+1$, за счет выбора β_i для подправленных функций легко добиться равенства (2.7). Однако при этом структура (2.3) и (2.4) для $\Phi_n(y)$ при $n\geqslant k\geqslant 1$ изменится. Более того, в силу дополнительного слагаемого у $\Phi_k(y)$ изменится и структура правой части уравнения для $\Phi_{k+1}(y)$ и т. д. Поэтому для построения асимптотического решения уравнения (2.6) необходимо показать справедливость следующего утверждения, являющегося аналогом леммы 2.1.

Лемма 2.5. *При $j\geqslant 0$ уравнение $\Delta_y U = \tau^j Z_k\theta$ имеет решение*

$$U(y) = \tau^{j+2}(M^{-1}\theta Z_k(y) + Z_k'(y)),$$

где постоянная $M\neq 0$ из условия леммы 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно проверяются равенства

$$\begin{aligned}\Delta_y\left(\tau^{j+2}X_k\theta\right) =&\tau^j M X_k\theta - 2k\tau^j Y_k,\\ \Delta_y\left(\tau^{j+2}Y_k\theta\right) =&\tau^j M Y_k\theta + 2k\tau^j X_k.\end{aligned}$$

Так как $M\neq 0$, то из этих равенств вытекает справедливость доказываемой леммы.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ множество рядов вида (2.2), где $\Phi_0(y) = A\dfrac{X_k(y)}{\tau^{2k}}$ при $k\geqslant 1$ и $\Phi_0(y) = A\ln\tau$ при $k=0$, A — произвольная постоянная,

$$\Phi_n(y) = \sum_{j=0}^{2n}\tau^{-2k-2n+2j}Z_{k+3n-2j}(y) + \delta_k^n(\alpha_1\ln\tau+\alpha_2\theta), \quad 1\leqslant n\leqslant k,$$

$$\Phi_n(y) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k+3n}{2}\right]}\tau^{-2k-2n+2j}Z_{k+3n-2j}(y) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\tau^{2j}\left(\ln\tau Z_{n-k-2j}(y)+\theta Z'_{n-k-2j}(y)\right), \quad n\geqslant k+1,$$

причем выполняются равенства (2.7).

Следуя доказательству теоремы 1.1 из [13] с использованием лемм 2.1–2.3, 2.5 и приведенных выше соображений, легко показать справедливость следующего аналога леммы 2.4, учитывающего, однако, еще и требуемое граничное условие.

Лемма 2.6. *Для любого ряда $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathcal{A}}_k$ и любого числа A существует ряд $\mathcal{E}\in\widetilde{\mathcal{A}}_k$ такой, что $\Phi_0(y) = A\tau^{-2k}X_k(y)$ при $k\geqslant 1$, $\Phi_0(y) = A\ln\tau$ при $k=0$ и справедливы равенства* (2.5), *где $\Phi_n(y)$ и $\widetilde{\Phi}_n(y)$ — члены рядов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.*

Вычислим несколько первых функций $\Phi_n(y)$ для модельного ряда $\mathcal{E}_1$. Нас интересует коэффициент при первом слагаемом, содержащем $\ln\tau$.

Лемма 2.7. *Существует ряд $\mathcal{E}_1\in\widetilde{\mathcal{A}}_1$, удовлетворяющий утверждению леммы* 2.6 *при $\mathcal{F}=0$ и такой, что*

$$\Phi_0(y) =\tau^{-2}X_1, \quad \Phi_1(y) = -\frac{1}{4}\tau^{-2}Y_2(y) + \frac{1}{8}\tau^{-4}Y_4(y), \tag{2.8}$$

$$\Phi_2(y) = \left(\frac{1}{2}\lambda_0+4\right)X_1(y)\ln\tau + \frac{59}{16}\tau^{-2}X_3(y) - \frac{55}{48}\tau^{-4}X_5(y) + \frac{1}{4}\tau^{-6}X_7(y). \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя $\Phi_0(y)$ в (2.5), получаем уравнение для $\Phi_1(y)$:

$$-\Delta_y \Phi_1 = L_{-1}\Phi_0 = -\frac{Y_2}{\tau^4} + 2\frac{Y_4}{\tau^6}.$$

В силу леммы 2.1 функция $\Phi_1(y)$, определяемая равенством (2.8), удовлетворяет этому уравнению. Непосредственно проверяется выполнение равенства (2.7).

С учетом найденного $\Phi_1(y)$ выписывается уравнение для $\Phi_2(y)$:

$$-\Delta_y \Phi_2 = L_{-1}\Phi_1 + L_0\Phi_0 + \lambda_0\Phi_0 = -(\lambda_0+8)\tau^{-2}X_1 + \frac{59}{2}\tau^{-4}X_3 - \frac{55}{2}\tau^{-6}X_5 + 12\tau^{-8}X_7.$$

В силу леммы 2.1 функция $\Phi_2(y)$, определяемая равенством (2.9), удовлетворяет этому уравнению и, очевидно, для нее выполняется равенство (2.7). Лемма доказана.

Заметим, что с учетом равенства

$$\int_0^1 \mathcal{J}_m^2\big(\sqrt{\lambda_0}r\big)r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{m^2}{\lambda_0}\Big)\mathcal{J}_m^2\big(\sqrt{\lambda_0}\,\big)$$

(см., например, [12, § Д1, п. 2]), ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, соответствующие двукратному собственному значению задачи (1.2), имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}}\mathcal{J}_m^{-1}\big(\sqrt{\lambda_0}\,\big)\mathcal{J}_m\big(\sqrt{\lambda_0}r\big)\cos m\varphi,\\ \psi_0^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}}\mathcal{J}_m^{-1}\big(\sqrt{\lambda_0}\,\big)\mathcal{J}_m\big(\sqrt{\lambda_0}r\big)\sin m\varphi. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\psi_0^{(1)}(x(y)) = \phi_1 + O(\tau^2),\ \tau\to 0, &&\phi_1 = \psi_0^{(1)}(x_0) = \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}},\\ &\psi_0^{(2)}(x(y)) = \phi_2 y_1 + O(\tau^2),\ \tau\to 0, &&\phi_2 = \frac{\partial\psi_0^{(2)}}{\partial\varphi}(x_0) = m\sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi(\lambda_0-m^2)}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{A}_k$ множество функций из $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{x_0\})$ с асимптотикой из $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ в точке x_0, нормальная производная которых обращается в ноль на $\partial\Omega\backslash\{x_0\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $F\in\mathcal{A}_k$, A — произвольная постоянная. Тогда существует функция $E\in\mathcal{A}_k$, имеющая главный член асимптотики при $x\to x_0$, равный $A\tau^{-2k}X_k(y)$ при $k\geqslant 1$ и $A\ln\tau$ при $k=0$ в переменных y и являющаяся решением уравнения*

$$-(\Delta+\lambda_0)E = F + \Lambda_1\psi_0^{(1)} + \Lambda_2\psi_0^{(2)}, \quad x\in\Omega \tag{2.12}$$

при некоторых числах Λ_1, Λ_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{F}\in\widetilde{\mathcal{A}}_k$ асимптотическое разложение функции $F\in\mathcal{A}_k$ при $x\to x_0$, записанное в переменной y. Пусть $\mathcal{E}$ — ряд из $\widetilde{\mathcal{A}}_k$, удовлетворяющий утверждениям леммы 2.6, а $\mathcal{E}^{(M)}$ — его частичная сумма до членов порядка $O(\tau^M\ln\tau)$, где M — достаточно большое положительное число.

Обозначим через $\chi(t)$ бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, тождественно равную единице при $t<1$ и равную нулю при $t>2$. Функцию E будем искать в виде

$$E(x;M) = \chi(3\tau(x))\mathcal{E}^{(M)}(y(x)) + S_M(x). \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12), получаем краевую задачу для S_M:

$$-(\Delta+\lambda_0)S_M = G_M + \Lambda_1\psi_0^{(1)} + \Lambda_2\psi_0^{(2)}, \quad x\in\Omega, \quad \frac{\partial S_M}{\partial r}=0, \quad x\in\partial\Omega, \tag{2.14}$$

где

$$G_M = F + \chi(3\tau)\,(\Delta+\lambda_0)\,\mathcal{E}^{(M)} + \Big(\mathcal{E}^{(M)}\Delta\chi(3\tau) + 2\nabla\mathcal{E}^{(M)}\cdot\nabla\chi(3\tau)\Big).$$

Следовательно, $G_M \in C^{M-3}(\overline{\Omega})$ в силу леммы 2.6.

Из необходимого и достаточного условия разрешимости краевой задачи (2.14) в $W_2^1(\Omega)$ следует, что

$$\Lambda_j(M) = -\int\limits_\Omega G_M\psi_0^{(j)}dx,$$

причем в силу теорем о повышении гладкости $S_M\in C^{M-1}(\overline{\Omega})$.

Покажем, что $\Lambda_j(M)$ не зависит от M. Для этого рассмотрим разность $Q_M(x) = E(x;M) - E(x;3)$, где $M\geqslant 4$. По построению $Q_M\in C^2(\overline{\Omega})$ и

$$-(\Delta+\lambda_0)Q_M = (\Lambda_1(M)-\Lambda_1(3))\psi_0^{(1)} + (\Lambda_2(M)-\Lambda_2(3))\psi_0^{(2)}, \quad \frac{\partial Q_M}{\partial r}=0, \quad x\in\partial\Omega.$$

В силу условия разрешимости этой краевой задачи получаем, что $\Lambda_j(M)=\Lambda_j(3)=\Lambda_j$ и не зависит от M, а $Q_M(x) = c_{M,1}\psi_0^{(1)}(x) + c_{M,2}\psi_0^{(2)}(x)$. Если функции $E(x;M)$ нормализовать, например, условием

$$\int\limits_\Omega (E(x;M)-E(x;3))\psi_0^{(j)}dx = 0,$$

то они также не будут зависеть от M, т.е. $E(x;M)=E(x)$. Отсюда в силу произвола в выборе M следует, что $E\in\mathcal{A}_k$. Теорема доказана.

Лемма 2.8. *Существует функция $E_1\in\mathcal{A}_1$, имеющая асимптотику*

$$E_1(x(y)) = \Phi_0(y)+\Phi_1(y)+\Phi_2(y)+O(\tau^2\ln\tau),\ \tau\to 0, \tag{2.15}$$

где $\Phi_j(y)$ — из леммы 2.7, которая удовлетворяет уравнению (2.12) при $F(x)=0$, и

$$\Lambda_1 = 0, \quad \Lambda_2 = -\pi\phi_2. \tag{2.16}$$

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 2.1, в силу леммы 2.7 и граничных условий получаем, что при $F=0$ существует решение уравнения (2.12), имеющее асимптотику

$$E(x(y)) = \Phi_0(y)+\Phi_1(y)+\Phi_2(y)+S_4(x_0)+\frac{\partial S_4}{\partial y_1}(x_0)y_1 + O(\tau^2\ln\tau),\ \tau\to 0.$$

Тогда в силу (2.11) получаем, что функция

$$E_1(x) = E(x) - \frac{S_4(x_0)}{\phi_1}\psi_0^{(1)}(x) - \frac{\dfrac{\partial S_4}{\partial y_1}(x_0)}{\phi_2}\psi_0^{(2)}(x)$$

имеет асимптотику (2.15) и является решением уравнения (2.12) при $F=0$ и некоторых Λ_i.

Значения (2.16) постоянных Λ_i вычисляются достаточно стандартным образом (см., например, [3]). Пусть $\widetilde{B}_\mu$ — круг радиуса μ с центром в нуле в переменных y, B_μ — его образ в переменных x, $\Omega_\mu := \Omega\backslash B_\mu$. Домножая уравнение (2.12) на $\psi_0^{(i)}$, интегрируя полученное равенство по области Ω_μ по частям и переходя к пределу при $\mu\to 0$ с учетом равенств (2.15), (2.11) и (2.10), получаем равенства (2.16). Лемма доказана.

Таким же методом доказывается справедливость аналогичного утверждения для E_0.

Лемма 2.9. *Существует функция $E_0 \in \mathcal{A}_0$, имеющая главный член асимптотики при $x \to x_0$, равный $\ln\tau$ в переменных y, и являющаяся решением (2.12) при $F = 0$ и*

$$\Lambda_1 = \pi\phi_1, \quad \Lambda_2 = 0.$$

Так как $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$, то из лемм 2.8 и 2.9 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 2.1. *Если $k \geqslant 2$, то для любого $F \in \mathcal{A}_k$ существует решение $E \in \mathcal{A}_k$ уравнения (2.12) при $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$.*

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\rho = |\xi|$, а $H_j(\xi, t, s)$ — такие функции, что при некотором целом k справедливо равенство $\rho^k H_j(\xi; s, t) = sP^{(1)}_{k+j}(\xi) + tP^{(2)}_{k+j} + P^{(3)}_{k+j}(\xi)$, где $P^{(q)}_n(\xi)$ — однородные полиномы порядка n. Далее, пусть $\xi_1^- = -(\xi_1 - a)$, $\xi_1^+ = \xi_1 - b$, $\xi_\pm = (\xi_1^\pm, \xi_2)$, $\rho_\pm$, $\theta_\pm$ — полярные координаты в плоскостях $\xi_\pm$, а

$$\Psi_l^{(\pm)}(\rho_\pm, \theta_\pm, \ln\rho_\pm) = \rho_\pm^{\frac{l}{2}} \sum_{k=0}^{l} \Big(c_k \cos\frac{k\theta_\pm}{2} + d_k \sin\frac{k\theta_\pm}{2} \Big).$$

Обозначим через $\mathcal{B}_p$ множество функций, определенных в $\mathbb{R}^2_+ := \{\xi : x_2 \geqslant 0\}$ и представимых для любых целых $N \geqslant 0$ и достаточно малых действительных $R > 0$ в виде

$$G(\xi) = (1 - \chi(\rho R)) \sum_{l=-p}^{N} H_{-l}(\xi; \ln\rho, \theta) + \chi(\rho_+ R^{-1}) \sum_{l=1}^{2N} \Psi_l^{(+)}(\rho_+, \theta_+, \ln\rho_+)$$

$$+ \chi(\rho_- R^{-1}) \sum_{l=1}^{2N} \Psi_l^{(-)}(\rho_-, \theta_-, \ln\rho_-) + \widetilde{\mathcal{E}}_N(\xi),$$

где $\widetilde{\mathcal{E}}_N(\xi) \in C^N(\mathbb{R}^2_+)$ и $\widetilde{\mathcal{E}}_N(\xi) = o(\rho^{-N})$ при $\rho \to \infty$. Обозначим также через $\mathcal{B}^{(-j)}$ линейную оболочку функций из $\mathcal{B}_p$ вместе с их производными по ξ до j-го порядка включительно, а через $\widetilde{\mathcal{B}}_p$ обозначим множество рядов вида

$$H(\xi) = \sum_{l=-p}^{\infty} H_{-l}(\xi, \ln\rho, \theta).$$

В [15] была доказана справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.10. *Пусть функции $f(\xi) \in \mathcal{B}^{(-2)}$ и ряд $H(\xi) \in \widetilde{\mathcal{B}}_t$ является формальным асимптотическим решением при $\rho \to \infty$ краевой задачи*

$$\Delta_\xi H = f, \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0) = 0.$$

Тогда существует функция $v(\xi) \in \mathcal{B}_t$, которая является решением краевой задачи

$$\Delta_\xi v = f, \quad \xi_2 > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma, \quad v = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

где $\gamma := \{\xi \colon \xi_2 = 0, \xi_1 \in (a, b)\}$, $\Gamma := \{\xi \colon \xi_2 = 0, \xi_1 \notin [a, b]\}$, и при $\rho \to \infty$ разлагается в сумму двух асимптотических рядов

$$v(\xi) = H(\xi) + \sum_{l=0}^{\infty} c_l \rho^{-2l} X_l(\xi).$$

Легко видеть, что функция $\Upsilon_1(\xi) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{(z-a)(z-b)}\right)$, где $z = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$, а i — мнимая единица, принадлежит $\mathcal{B}_1$, является решением краевой задачи

$$\Delta_\xi \Upsilon_1 = 0,\, \xi_2 > 0, \quad \Upsilon_1 = 0, \quad \xi \in \gamma, \quad \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma,$$

и имеет дифференцируемую асимптотику

$$\Upsilon_1(\xi) = \xi_1 + c_{1,0} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1,k} \frac{X_k(\xi)}{\rho^{2k}}, \quad \rho \to \infty, \quad c_{1,0} = -\frac{a+b}{2}, \quad c_{1,1} = -\frac{(b-a)^2}{8}. \tag{2.17}$$

3. Вывод структуры асимптотических разложений собственной функции и собственного значения и формул для главных членов асимптотик

Вне малой окрестности точки x_0 (т.е. вне малой окрестности участка границы γ_ε, где задано граничное условие Дирихле) главные члены приближения собственной функции $\psi^\varepsilon(x)$ будем искать в виде $\psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x)$, где константа $\varkappa_{1,0}$ будет определена позднее. Тогда при $x \to x_0$ в силу (2.11) имеем

$$\psi_0^{(2)}(x(y)) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x(y)) = \phi_2 y_1 + \varepsilon\varkappa_{1,0}\phi_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(P_k^{(2)}(y) + \varepsilon P_k^{(1)}(y)\right), \quad \tau \to 0. \tag{3.1}$$

Переписывая этот ряд в переменных $\xi = y\varepsilon^{-1}$, получаем, что

$$\psi_0^{(2)}(x(\varepsilon\xi)) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x(\varepsilon\xi)) = \phi_2\varepsilon\xi_1 + \varepsilon\varkappa_{1,0}\phi_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\left(P_k^{(2)}(\xi) + \varepsilon P_k^{(1)}(\xi)\right).$$

Поэтому в соответствии с методом согласования асимптотических разложений внутреннее разложение в окрестности точки x_0 должно иметь слагаемые в виде

$$\varepsilon v_{1,0}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k v_{k,0}(\xi), \tag{3.2}$$

где

$$v_{1,0}(\xi) \sim \phi_2\xi_1 + \varkappa_{1,0}\phi_1, \quad \xi \to \infty, \tag{3.3}$$
$$v_{2,0}(\xi) \sim P_2^{(2)}(\xi), \quad v_{k,0}(\xi) \sim P_k^{(2)}(\xi) + P_{k-1}^{(1)}(\xi), \quad k \geqslant 3, \quad \xi \to \infty.$$

Подставляя (3.2) в исходную краевую задачу (1.1), переходя к переменной ξ и приравнивая к нулю коэффициент при ε^{-1}, получаем краевую задачу для $v_{1,0}(\xi)$:

$$\Delta_\xi v_{1,0} = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad v_{1,0} = 0, \quad \xi \in \gamma, \quad \frac{\partial v_{1,0}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Согласно определению (2.17) функции $\Upsilon_1(\xi)$ функция

$$v_{1,0}(\xi) = \phi_2\Upsilon_1(\xi) \tag{3.5}$$

является решением краевой задачи (3.4) и имеет асимптотику

$$v_{1,0}(\xi) = \phi_2\xi_1 + \phi_2 c_{1,0} + \phi_2 c_{1,1}\xi_1\rho^{-2} + \phi_2\sum_{k=2}^{\infty} c_{1,k}X_k(\xi)\rho^{-2k}, \quad \rho \to \infty, \tag{3.6}$$

которая при

$$\varkappa_{1,0} = \phi_1^{-1}\phi_2 c_{1,0} \tag{3.7}$$

соответствует требуемой асимптотике (3.3).

Переписывая асимптотику первого слагаемого в (3.2) при $\rho \to \infty$ во внешней переменной x, с учетом равенства (3.6) получаем, что

$$\varepsilon v_{1,0}(\xi) = \phi_2 y_1 + \varepsilon \varkappa_{1,0} \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 c_{1,1} y_1 \tau^{-2} + \phi_2 \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k+1} c_{1,k} X_k(y) \tau^{-2k}.$$

Первые два слагаемых в правой части уже согласованы (см. (3.1)). Из согласования же остальных членов следует, что внешнее разложение (вне малой окрестности точки x_0) должно иметь слагаемые

$$\psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon \varkappa_{1,0} \psi_0^{(1)}(x) + \varepsilon^2 \psi_{2,0}(x) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k \psi_{k,0} + \psi_0^{(1)}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \varkappa_{k,0}, \tag{3.8}$$

где

$$\begin{gathered} \psi_{2,0}(x(y)) \sim \phi_2 c_{1,1} y_1 \tau^{-2}, \ \tau \to 0, \\ \psi_{k+1,0}(x(y)) \sim \phi_2 c_{1,k} X_k(y) \tau^{-2k}, \ \tau \to 0, \end{gathered} \tag{3.9}$$

а последняя сумма выделена в (3.8) для удобства дальнейшего построения полного асимптотического разложения собственного значения (ее можно было бы включить в третье и четвертое слагаемые). По аналогии с (3.8) собственное значение λ^ε должно иметь слагаемые

$$\lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_{2,0} + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_{k,0}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.8) и (3.10) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем краевые задачи для $\psi_{j,0}(x)$:

$$-(\Delta + \lambda_0)\psi_{2,0} = \lambda_{2,0} \psi_0^{(2)}, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi_{2,0}}{\partial r} = 0, \quad x \in \partial\Omega \backslash \{x_0\}, \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} -(\Delta + \lambda_0)\psi_{k+1,0} = \sum_{s=2}^{k-1} \lambda_{s,0} \psi_{k+1-s,0} + \psi_0^{(1)} \sum_{s=2}^{k} \lambda_{s,0} \varkappa_{k+1-s,0} + \lambda_{k+1,0} \psi_0^{(2)}, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \psi_{k+1,0}}{\partial r} = 0, \quad x \in \partial\Omega \backslash \{x_0\}, \quad k \geqslant 2. \end{gathered} \tag{3.12}$$

В силу леммы 2.8 функция

$$\psi_{2,0}(x) = \phi_2 c_{1,1} E_1(x) \tag{3.13}$$

является решением краевой задачи (3.11) при

$$\lambda_{2,0} = -\pi \phi_2^2 c_{1,1} \tag{3.14}$$

и имеет асимптотику

$$\psi_{2,0}(x(y)) = \phi_2 c_{1,1} \left(y_1 \tau^{-2} + H_0(y) + H_1(y) + d y_1 \ln \tau + O(\tau^2 \ln \tau) \right), \quad \tau \to 0, \tag{3.15}$$

$$d = \frac{1}{2}(\lambda_0 + 8), \tag{3.16}$$

где $H_j(y)$ — однородные функции степени j, которая соответствует требуемой асимптотике (3.9).

Появление логарифмических членов и их степеней в асимптотических разложениях как собственного значения λ^ε, так и во внешнем и внутреннем разложениях собственной функции $\psi^\varepsilon(x)$ легко проследить по следующей цепочке, в которой для удобства изложения полагается $k = 1$ (пока не оговорено противное).

Переходя в асимптотике $\varepsilon^{2k}\ln^{k-1}\varepsilon\psi_{2k,k-1}(x(y))$ (т. е. в асимптотике $\varepsilon^2\psi_{2,0}(x(y))$) при $y\to 0$ к внутренней переменной ξ, в силу равенства (3.15) и метода согласования асимптотических разложений получаем, что во внутреннем разложении должно появиться слагаемое

$$\varepsilon^{2k+1}\ln^k\varepsilon v_{2k+1,k}(\xi),\quad v_{2k+1,k}(\xi)\sim\phi_2(c_{1,1}d)^k\xi_1,\quad \xi\to\infty. \tag{3.17}$$

Для $v_{2k+1,k}(\xi)$ аналогично (3.4) получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi v_{2k+1,k}=0,\quad \xi_2>0,\quad v_{2k+1,k}=0,\quad \xi\in\gamma,\quad \frac{\partial v_{2k+1,k}}{\partial\xi_2}=0,\quad \xi\in\Gamma. \tag{3.18}$$

Легко видеть, что функция $v_{2k+1,k}(\xi)$, определяемая равенством

$$v_{2k+1,k}(\xi)=\phi_2(c_{1,1}d)^k\Upsilon_1(\xi) \tag{3.19}$$

является решением краевой задачи (3.18) и имеет асимптотику

$$v_{2k+1,k}(\xi)=\phi_2(c_{1,1}d)^k\left(\xi_1+c_{1,0}+c_{1,1}\xi_1\rho^{-2}+O(\rho^{-2})\right),\quad \rho\to\infty. \tag{3.20}$$

Переписывая асимптотику $\varepsilon^{2k+1}\ln^k\varepsilon v_{2k+1,k}(\xi)$ при $\rho\to\infty$ во внешней переменной x, с учетом равенства (3.20) получаем, что во внешнем разложении должно появиться слагаемое

$$\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\psi_{2k+2,k}(x),\quad \psi_{2k+2,k}(x(y))\sim\phi_2c_{1,1}^{k+1}d^ky_1\tau^{-2},\quad \tau\to 0. \tag{3.21}$$

(Слагаемое типа $\phi_2(c_{1,1}d)^kc_{1,0}$ согласовывается введением во внешнем разложении слагаемого вида $\varepsilon^{2k+1}\ln^k\varepsilon\varkappa_{2k+1,k}\psi_0^{(1)}(x)$). По аналогии с (3.21) в разложение собственного значения λ^ε добавим слагаемое

$$\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\lambda_{2k+2,k}.$$

Тогда для $\psi_{2k+2,k}(x)$ аналогично (3.11) легко получить следующую краевую задачу:

$$-(\Delta+\lambda_0)\psi_{2k+2,k}=\lambda_{2k+2,k}\psi_0^{(2)},\quad x\in\Omega,\quad \frac{\partial\psi_{2k+2,k}}{\partial r}=0,\quad x\in\partial\Omega\backslash\{x_0\}. \tag{3.22}$$

В силу леммы 2.8 функция

$$\psi_{2k+2,k}(x)=\phi_2c_{1,1}^{k+1}d^kE_1(x) \tag{3.23}$$

является решением краевой задачи (3.22) при

$$\lambda_{2k+2,k}=-\pi\phi_2^2c_{1,1}^{k+1}d^k \tag{3.24}$$

и имеет асимптотику

$$\psi_{2k+2,k}(x(y))=\phi_2c_{1,1}^{k+1}d^k\left(y_1\tau^{-2}+H_0(y)+H_1(y)+dy_1\ln\tau+O(\tau^2\ln\tau)\right),\quad \tau\to 0, \tag{3.25}$$

которая соответствует требуемой асимптотике (3.21).

Переходя в асимптотике $\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\psi_{2k+2,k}(x(y))$ (т.е. в асимптотике $\varepsilon^4\ln\varepsilon\psi_{4,1}(x(y))$) при $y\to 0$ к внутренней переменной ξ, в силу равенства (3.25) и метода согласования асимптотических разложений получаем, что во внутреннем разложении должно появиться слагаемое (3.17) при $k=2$. Далее, повторяя выкладки, приведенные выше для случая $k=1$, убеждаемся, что они имеют место и для $k=2$. Следовательно, переходя в асимптотике $\varepsilon^{2k+2}\ln^k\varepsilon\psi_{2k+2,k}(x(y))$, но уже при $k=2$ (т.е. в асимптотике $\varepsilon^6\ln^2\varepsilon\psi_{6,2}(x(y))$) при $y\to 0$ к внутренней переменной ξ, в силу равенства (3.25) и метода согласования асимптотических разложений получаем, что во внутреннем разложении должно появиться слагаемое (3.17) при $k=3$. Далее, повторяя выкладки, приведенные выше для случая $k=1$, убеждаемся, что они имеют место и для $k=3$. И так далее.

В результате получаем, что вне окрестности точки x_0 внешнее асимптотическое разложение собственной функции следует строить в виде

$$\psi^\varepsilon(x) = \psi_0^{(2)}(x) + \varepsilon\varkappa_{1,0}\psi_0^{(1)}(x) + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]-1}\varepsilon^i \ln^k\varepsilon\,\psi_{i,k}(x) + \psi_0^{(1)}(x)\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{i-1}{2}]}\varepsilon^i \ln^k\varepsilon\,\varkappa_{i,k}; \qquad (3.26)$$

в окрестности точки x_0 внутреннее асимптотическое разложение собственной функции следует искать в виде

$$\psi_{\text{in}}^\varepsilon(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{i-1}{2}]}\varepsilon^i \ln^k\varepsilon\,v_{i,k}(\xi), \quad \xi = \frac{y(x)}{\varepsilon}, \qquad (3.27)$$

а собственное значение — в виде (1.3), где главные члены асимптотик определяются равенствами (3.5), (3.7), (3.13) и (3.14) при $k = 0$ и равенствами (3.19), (3.23), (3.24) и (3.16) при $k \geqslant 1$. Причем из этих формул следует, что равенства (3.19), (3.23) и (3.24) справедливы и при $k = 0$. В свою очередь, из равенства (3.24) и определений (2.11), (2.17) и (3.16) постоянных ϕ_2, $c_{1,1}$ и d вытекает формула (1.4).

В заключение раздела заметим, что, подставляя ряды (1.3) и (3.26) в (1.1), выводим краевые задачи для коэффициентов внешнего разложения (3.26):

$$\begin{aligned} -(\Delta+\lambda_0)\psi_{s+2+2i,i} =&\lambda_{s+2+2i,i}\psi_0^{(2)} + \sum_{q=0}^{i}\sum_{p=2+2q}^{s+2q+1}\lambda_{p,q}\psi_{s+2+2i-p,i-q} \\ &+ \psi_0^{(1)}\sum_{q=0}^{i}\sum_{p=2+2q}^{s+2q+2}\lambda_{p,q}\varkappa_{s+2+2i-p,i-q}, \quad x\in\Omega, \\ &\frac{\partial\psi_{s+2+2i,i}}{\partial r} = 0, \quad x\in\partial\Omega\backslash\{x_0\}, \quad s\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (3.28)$$

Аналогично, подставляя ряды (1.3) и (3.27) в (1.1) и переходя ко внутренней переменной ξ, получаем краевые задачи для коэффициентов внутреннего разложения (3.27):

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi v_{s+1+2i,i} = -\sum_{p=0}^{s-1}L_{p-1}^{\xi}v_{s+1+2i-p,i} - \sum_{q=0}^{i}\sum_{p=2+2q}^{s-1+2q}\lambda_{p,q}v_{s+2i-p,i-q}, \quad \xi_2>0, \\ &v_{s+1+2i,i} = 0, \quad \xi\in\gamma, \quad \frac{\partial v_{s+1+2i,i}}{\partial\xi_2} = 0, \quad \xi\in\Gamma, \quad s\geqslant 0. \end{aligned} \qquad (3.29)$$

Заметим также, что при $s = 0$ краевые задачи (3.28) и (3.29) представляют собой краевые задачи (3.22) и (3.18) соответственно, а краевые задачи (3.28) при $i = 0$ и $s \geqslant 1$ совпадают с (3.12).

4. Построение полных формальных асимптотических разложений

Коэффициенты асимптотики внешнего разложения собственной функции удобно строить в следующем виде

$$\psi_{s+2+2i,i}(x) = \sum_{t=2i}^{s+2i}\Psi_{s+2+2i,i}^{(t)}(x). \qquad (4.1)$$

Обозначим

$$U_{s+2+2i,i}^{(M)}(x) = \sum_{t=2i}^{\min\{s+2i,M\}}\Psi_{s+2+2i,i}^{(t)}(x).$$

В этих обозначениях $U^{(M)}_{s+2+2i,i}(x) = \psi_{s+2+2i,i}(x)$ при $M \geqslant s+2i$ в силу (4.1). Через $\Psi^{\varepsilon,M}_{\mathrm{ex}}(x)$ будем обозначать ряды вида (3.26), где коэффициенты $\psi_{s+2+2i,i}(x)$ заменены на $U^{(M)}_{s+2+2i,i}(x)$, а $\varkappa_{j+1+2i,i} = 0$ при $j+2i \geqslant M$.

На рядах $W(x,\varepsilon)$ вида (3.26) определим операторы $\mathcal{K}_{q,p}$ и $\mathcal{K}$ следующим образом. Коэффициенты ряда $W(x,\varepsilon)$ разложим в ряды при $x \to x_0$ и перейдем к переменным ξ. В полученных рядах оставим только члены вида $\varepsilon^q \ln^p \varepsilon u(\xi)$. Этот ряд обозначим $\mathcal{K}_{q,p}(W(x,\varepsilon))$ и положим

$$\mathcal{K} = \sum_{q,p} \mathcal{K}_{q,p}.$$

Из определений $\mathcal{A}_m$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$, $\mathcal{K}_{m,l}$, $\mathcal{K}$, $\Psi^{\varepsilon,M}_{\mathrm{ex}}(x,\varepsilon)$ и представления (4.1) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Если $\psi_{s+2+2i,i}(x) \in \mathcal{A}_{s+1}$, причем $\psi_{2+2i,i}(x) = \alpha_i E_1(x)$, то*

$$\mathcal{K}(\psi^\varepsilon(x)) = \Psi^\varepsilon_{\mathrm{in}}(\xi),$$

где $\Psi^\varepsilon_{\mathrm{in}}(\xi)$ — ряды вида (3.27), в которых функции $v_{s+1+2i,i}(\xi)$ заменены на ряды $V_{s+1+2i,i}(\xi) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{s+1}$.

Если $\Psi^{(t)}_{s+2+2i,i}(x) \in \mathcal{A}_{s+1-t}$, то функции $\psi_{s+2+2i,i}(x)$, определяемые равенством (4.1), принадлежат $\mathcal{A}_{s+1}$, причем если $\Psi^{(2i)}_{2+2i,i}(x) = \psi_{2+2i,i}(x) = \alpha_i E_1(x)$, а $\Psi^{(2i+1)}_{3+2i,i}(x) = \beta_i E_1(x)$, то имеют место следующие равенства:

$$\varepsilon^{t+1+2i} \ln^i \varepsilon V_{t+1+2i,i}(\xi) = \mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\Psi^{\varepsilon,t+2i}_{\mathrm{ex}}(x)\right) = \mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\psi^\varepsilon(x)\right),$$
$$V_{t+1+2i,i}(\xi) = \widetilde{V}_{t+1+2i,i}(\xi) + \varkappa_{t+1+2i,i}\phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} A^{(t,i)}_k \rho^{-2k} X_k(\xi),$$

где $A^{(t,i)}_k \tau^{-2k} X_k(y)$ – главный член асимптотики $\Psi^{(t+2i)}_{k+1-t+2i,i}(x(y))$ при $y \to 0$,

$$\widetilde{V}_{1,0}(\xi) = \phi_2 \xi_1,$$
$$\widetilde{V}_{1+2i,i}(\xi) = \varepsilon^{-(1+2i)} \ln^{-i} \varepsilon \mathcal{K}_{1+2i,i}\left(\psi_{2i,i-1}(x)\right) = \alpha_{i-1}\Big(\frac{\lambda_0}{2} + 4\Big)\xi_1 + \omega_{i-1}, \quad i \geqslant 1.$$

Здесь ω_j — коэффициент при логарифмическом слагаемом в асимптотике в нуле функции $\Psi^{(2j)}_{3+2j,j}(x(y))$,

$$\widetilde{V}_{t+1+2i,i}(\xi) = \varepsilon^{-(t+1+2i)} \ln^{-i} \varepsilon \mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\Psi^{\varepsilon,t-1+2i}_{\mathrm{ex}}(x)\right) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{t+1}, \quad i \geqslant 0, \quad t \geqslant 1,$$

(т.е. $\widetilde{V}_{t+1+2i,i}$ не зависит от $\Psi^{(m)}_{p,q}$ при $m \geqslant t$, $q \geqslant i+1$).

Если, к тому же, функции $\Psi^{(t)}_{s+2+2i,i}(x)$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned}
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+2+2i,i} &= \lambda_{t+2+2i,i}\psi^{(2)}_0, \quad t+2i \geqslant 0,\\
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+3+2i,i} &= \psi^{(1)}_0 \sum_{q=0}^{i} \sum_{j=2i-2q}^{t+2i} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\varkappa_{1+j,q}, \quad t+2i \geqslant 0,\\
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+k+2+2i,i} &= \psi^{(1)}_0 \sum_{q=0}^{i} \sum_{j=2i-2q}^{t+2i-k+1} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\varkappa_{k+j,q} + \sum_{q=0}^{i} \lambda_{t+2+2i,i-q} \sum_{m=0}^{\min\{t+2i-1,k-2\}} \Psi^{(m)}_{k,q}\\
&\quad + \sum_{q=0}^{i}\sum_{j=1}^{t+2i} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\Psi^{(t+2i)}_{k+j,q}, \quad t+2i+1 \geqslant k > 1,\\
-(\Delta+\lambda_0)\Psi^{(t+2i)}_{t+k+2+2i,i} &= \sum_{q=0}^{i} \lambda_{t+2+2i,i-q} \sum_{m=0}^{t+2i} \Psi^{(m)}_{k,q} + \sum_{q=0}^{i}\sum_{j=1}^{t+2i} \lambda_{t+2+2i-j,i-q}\Psi^{(t+2i)}_{k+j,q}, \quad k > t+2i+1 \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

то функции $\psi_{s+2+2i,i}(x)$, *определяемые равенствами* (4.1), *являются решениями краевых задач* (3.28), *а ряды* $\widetilde{V}_{t+1+2i,i}$ — *формальными асимптотическими решениями краевых задач* (3.29) *при* $\rho\to\infty$, *где в правой части функции* $v_{t+1+2i,i}(\xi)$ *заменены на ряды* $V_{t+1+2i,i}(\xi)$.

Теорема 4.1. *Пусть* λ_0 — *двукратное собственное значение краевой задачи* (1.2), *являющееся квадратом нуля производной функции Бесселя* $\mathcal{J}_m$, $\psi_0^{(1)}$, $\psi_0^{(2)}$ — *соответствующие нормированные в* $L_2(\Omega)$ *собственные функции* (2.10).

Тогда существуют ряды (1.3), (1.4), (3.26), (3.7), (3.23) *и* (3.27), (3.19) *такие, что*

1) *функции* $\psi_{s+2+2i,i}\in\mathcal{A}_{s+2}$ *являются решениями краевых задач* (3.28);
2) *функции* $v_{t+1+2i,i}\in\mathcal{B}_{t+1}$ *являются решениями краевых задач* (3.29);
3) *выполняется следующее равенство*

$$\mathcal{K}(\psi^\varepsilon(x))=\psi^\varepsilon_{\mathrm{in}}(\xi),\quad \rho\to\infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. С учетом утверждений леммы 4.1 для доказательства равенства (4.3) достаточно показать выполнение равенства

$$v_{t+1+2i,i}(\xi)=\varepsilon^{-(t+1+2i)}\ln^{-i}\varepsilon\mathcal{K}_{t+1+2i,i}\left(\Psi^{\varepsilon,t+2i}_{\mathrm{ex}}(x)\right),\quad \rho\to\infty. \tag{4.4}$$

Это достигается путем выбора на q-м шаге согласования главных членов асимптотик в нуле функций $\Psi^{(q)}_{j,i}(x(y))$ и постоянных $\varkappa_{1+q,i}$ (начиная с $q=0$). При этом числа $\lambda_{2+q,i}$ определяются из условия разрешимости уравнений (4.2) для $\Psi^{(q)}_{2+q,i}(x)$ (т. е. уравнений из первой строки в (4.2) при $t+2i=q$).

С учетом утверждений леммы 4.1 алгоритм для этого следующий. На q-м шаге по $\widetilde{V}_{q+1,i}$ в силу леммы 2.10 определяется $v_{q+1,i}$ и $\varkappa_{q+1,i}$. По асимптотике на бесконечности функций $v_{q+1,i}$ последовательно определяются главные члены асимптотик функций $\Psi^{(q)}_{s+2+2i,i}$. Затем в силу леммы 2.8 определяются $\Psi^{(q)}_{2+q,i}(x)$ и $\lambda_{2+q,i}$. И, наконец, в силу следствия 2.1 определяются остальные $\Psi^{(q)}_{2+q+j,i}(x)$ при $j\geqslant 1$. В результате добиваемся равенства (4.4) при $t+2i=q$.

Теорема доказана.

5. Обоснование построенных формальных асимптотических разложений (окончание доказательства теоремы 1.1)

Обоснование построенных асимптотик достаточно стандартно (см., например, [3; 4]).

Обозначим через $\widehat{\lambda}^\varepsilon_N$, $\widehat{\psi}^\varepsilon_N(x)$ и $\widehat{\psi}^\varepsilon_{\mathrm{in},N}(x)$ частичные суммы рядов (1.3), (3.26) и (3.27) до $\varepsilon^N\ln^j\varepsilon$ включительно. Из теоремы 4.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Справедливы равенства*

$$\left(\Delta+\widehat{\lambda}^\varepsilon_{2+2M}\right)\widehat{\psi}^\varepsilon_{2+2M}(x)=O\left(\varepsilon^{2+2M}\tau^{-2M-1}\right),$$
$$\left(\Delta+\widehat{\lambda}^\varepsilon_{2+2M}\right)\widehat{\psi}^\varepsilon_{\mathrm{in},1+2M}(x)=O\left(\varepsilon^{2M-1}\rho^{2M}\right)\quad \textit{при } \rho\to\infty,\quad \varepsilon\rho\to 0,$$
$$\widehat{\psi}^\varepsilon_{2+2M}(x)-\widehat{\psi}^\varepsilon_{\mathrm{in},1+2M}(x)=O\left(\varepsilon^{2M+2}\tau^{-(2M+2)}+\varepsilon^{2M+1}\rho^{2M+2}\right)\quad \textit{при } \tau\to 0,\quad \rho\to\infty,$$

причем последнее равенство дифференцируемо по x (*с учетом того, что* $\xi=\varepsilon^{-1}y(x)$).

Обозначим

$$\widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M}(x)=\left(1-\chi\left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)\widehat{\psi}^\varepsilon_{2+2M}(x)+\chi\left(\frac{\tau(x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\widehat{\psi}^\varepsilon_{\mathrm{in},1+2M}(x),$$

где, напомним, $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t<1$ и равная нулю при $t>2$.

Из определения $\mathcal{H}_p$ следует, что если $v(\xi)\in\mathcal{H}_p$, то $L^\xi_q v(\xi)\in L_2\left(\mathbb{R}^2_+\cap\{\xi:\rho<R\}\right)$ для любого $q\geqslant -1$ и любого R. Поэтому из утверждений теоремы 4.1 и леммы 5.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.2. *Функция* $\widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M}(x)$ *принадлежит* $W^1_2(\Omega)$*, для нее имеет место сходимость*

$$\|\widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M} - \psi^{(2)}_0\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{5.1}$$

и она является решением краевой задачи

$$-\Delta\widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M} = \widehat{\lambda}^\varepsilon_{2+2M}\widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M} + F^\varepsilon_M, \quad x \in \Omega, \quad \widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M}}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \tag{5.2}$$

где

$$\|F^\varepsilon_M\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}\right). \tag{5.3}$$

Так как существует собственное значение λ^ε краевой задачи (1.1), сходящееся к двукратному собственному значению λ_0 краевой задачи (1.2), то из хорошо известных оценок резольвенты (см., например, [16, гл. V, § 3]) для решения краевой задачи (5.2) справедливо неравенство

$$\|\widetilde{\psi}^\varepsilon_{2+2M}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|F^\varepsilon_M\|_{L_2(\Omega)}}{\left|\widehat{\lambda}^\varepsilon_{2+2M} - \lambda^\varepsilon\right|}.$$

Из этой оценки, равенства (5.3) и сходимости (5.1) следует, что

$$\left|\widehat{\lambda}^\varepsilon_{2+2M} - \lambda^\varepsilon\right| = O\big(\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}\big).$$

Отсюда в силу произвола в выборе M вытекает справедливость доказываемой теоремы 1.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гадыльшин Р.Р.** Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий // Асимптот. свойства решений дифференц. уравнений: сб. науч. ст. Уфа: Изд-во БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 4–16.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. **Гадыльшин Р.Р.** Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа // Соврем. математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 3–32.
4. **Бикметов А.Р., Гадыльшин Р.Р.** Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n-мерной области // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 28–64.
5. **Гадыльшин Р.Р.** Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 43–61.
6. **Гадыльшин Р.Р., Шишкина Е.А.** О неравенствах Фридрихса для круга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 48–61.
7. **Чечкин Г.А.** Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 6. С. 99–150.
8. **Гадыльшин Р.Р.** Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстроосциллирующими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 540–551.
9. **Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. **Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.** Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990. 311 с.
11. **Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С.** Усреднение. Методы и приложения. Новосибирск: Изд-во “Тамара Рожковская”, 2004. 246 с. (Белая серия в математике и физике.)
12. **Владимиров В.С., Жаринов В.В.** Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
13. **Ильин А.М.** Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Мат. сб. 1977. Т. 103(145), № 2(6). С. 265–284.
14. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

15. **Гадыльшин Р.Р.** Асимптотика решений эллиптических задач с сингулярно возмущенными граничными условия: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1988. 133 с.
16. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

Поступила 10.12.2014

Гадыльшин Рустем Рашитович
д-р физ.-мат. наук
зав. кафедрой, профессор
Башкирский государственный педагогический университет им. Акмуллы
e-mail: gadylshin@yandex.ru

Репьевский Сергей Владимирович
аспирант
Челябинский государственный университет
e-mail: repyevsky@gmail.com

Шишкина Елена Алексеевна
ассистент
Башкирский государственный педагогический университет им. Акмуллы
e-mail: shishkina.ea@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ[1]

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Рассматривается задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы. Основное отличие от ранее исследованных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае система для быстрых переменных не является асимптотически устойчивой. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time in a time-optimal control problem with a small parameter.

A time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system is considered. The main difference of this case from systems with fast and slow variables studied earlier is that the system for fast variables is not asymptotically stable. Asymptotic expansions of the optimal time and optimal control with respect to the small parameter at derivatives in the equations of the system are constructed.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problems, small parameter.

Посвящается памяти академика А. М. Ильина

Введение

Рассматривается задача о быстродействии [1–4] для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными [5–9] и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления. В отличие от ранее исследованных систем с быстрыми и медленными переменными в данном случае система для быстрых переменных не является асимптотически устойчивой. В настоящей работе используются методы, развитые в работах [10; 11]. Асимптотика времени быстродействия в данной задаче даже в случае общего положения носит сложный характер, аналогичный асимптотике из работ [10; 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометри-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322), программы УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”) и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

ческими ограничениями:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = A_{12}\overline{y} + A_{13}\overline{z}, & \overline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \overline{y} \in \mathbb{R}^m,\ \overline{z} \in \mathbb{R}^k, \\ \varepsilon^2\dot{\overline{y}} = A_{22}\overline{y} + B_1\overline{u}, & \overline{u} \in \mathbb{R}^r,\ r \geqslant 2, \\ \varepsilon^2\dot{\overline{z}} = B_2\overline{u}, & \|\overline{u}\| \leqslant 1, \\ \overline{x}(0) = x_0,\ \overline{y}(0) = y_0,\ \overline{z}(0) = z_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \overline{x}(T_\varepsilon) = 0,\ \overline{y}(T_\varepsilon) = 0,\ \overline{z}(T_\varepsilon) = 0,\ T_\varepsilon \longrightarrow \min . \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма, а $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle$ — скалярное произведение в рассматриваемых конечномерных пространствах.

Задача (1.1) есть задача быстродействия с быстрыми и медленными переменными. Основное отличие рассматриваемой задачи состоит в том, что некоторые собственные числа матрицы при быстрых переменных равны нулю и тем самым нарушено стандартное условие (см.[8]) асимптотической устойчивости этой матрицы.

Предположение 1. $\operatorname{Re}\ \sigma(A_{22}) < 0$.

Предположение 2. *Система* (A_{22}, B_1) *вполне управляема.*

Аналогично [12] перейдем в задаче (1.1) к новому времени $\tau := t/\varepsilon$ и переобозначим $\overline{x}(\varepsilon\tau)$, $\overline{y}(\varepsilon\tau)$, $\varepsilon\overline{z}(\varepsilon\tau)$, $\overline{u}(\varepsilon\tau)$ и $T_\varepsilon/\varepsilon$ через $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$, $u(\tau)$ и θ_ε соответственно. Тогда задача (1.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon A_{12}y + A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^k, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{22}y + B_1u, & u \in \mathbb{R}^r,\ r \geqslant 2, \\ \dot{z} = B_2u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0,\ \overline{y}(0) = y_0,\ z(0) = \varepsilon z_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(\theta_\varepsilon) = 0,\ y(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min . \end{cases} \tag{1.2}$$

Естественно предположить, что, как и в [12], предельной для (1.2) будет задача

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^k, \\ \dot{z} = B_2u, & u \in \mathbb{R}^r,\ r \geqslant 2,\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0,\ z(0) = 0, & \\ x(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.3}$$

получающаяся из задачи (1.2), если положить $\varepsilon = 0$.

Предположение 3. $\operatorname{rank} B_2 = r$.

Предположение 4. *Управляемая система из задачи* (1.3) *вполне управляема.*

Отметим, что из предположения 3 следует, что $r \leqslant k$.

Предположение 4 в силу критерия вполне управляемости Калмана (см, например, [3]) в данном случае имеет вид

$$n + k = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & A_{13}B_2 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A_{13}B_2) + \operatorname{rank} B_2. \tag{1.4}$$

Поскольку $\operatorname{rank}(A_{13}B_2) \leqslant n$, а $\operatorname{rank} B_2 = r \leqslant k$, то из (1.4) получим

$$\operatorname{rank}(A_{13}B_2) = \operatorname{rank} A_{13} = n \leqslant k, \quad r = k. \tag{1.5}$$

Тем самым матрица B_2 обратима, а

$$\operatorname{Ker} A_{13}^* = \{0\}. \tag{1.6}$$

Поэтому, не ограничивая общности (переходя от z к $B_2^{-1}z$ и от A_{12} к $A_{12}B_2$), можно считать, что $B_2 = I_k$ — единичный оператор в пространстве $\mathbb{R}^k$. Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon A_{12}y + A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^k, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{22}y + Bu, & u \in \mathbb{R}^k,\ r \geqslant 2,\ B := B_1, \\ \dot{z} = I_k u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0,\ \overline{y}(0) = y_0,\ z(0) = \varepsilon z_0, & \\ x(\theta_\varepsilon) = 0,\ y(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min & \end{cases} \tag{1.7}$$

с “предельной” задачей

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^k, \\ \dot{z} = I_k u, & u \in \mathbb{R}^k,\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0,\ z(0) = 0, & \\ x(\theta_\varepsilon) = 0,\ z(\theta_\varepsilon) = 0,\ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min. & \end{cases} \tag{1.8}$$

В матричной форме задачи (1.7) и (1.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{w}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon w + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, & w \in \mathbb{R}^{n+m+k}, \\ \|u_\varepsilon\| \leqslant 1, & u_\varepsilon \in \mathbb{R}^k, \\ w(0) = (x_0^*, y_0^*, \varepsilon z_0^*)^*, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ w(\theta_\varepsilon) = 0,\ \ \theta_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = \mathcal{A}_0 v + \mathcal{B}_0 u_0, & v \in \mathbb{R}^{n+k}, \\ \|u_0\| \leqslant 1, & u_0 \in \mathbb{R}^k, \\ v(0) = (x_0^*, 0^*)^*, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ v(\theta_0) = 0,\ \ \theta_0 \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.10}$$

где

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon A_{12} & A_{13} \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}B \\ I_k \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & A_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_k \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

I_n — единичная матрица порядка n; * — знак операции транспонирования матриц (на векторы x, y и z смотрим, как на векторы-столбцы).

Непосредственным вычислением получаем, что

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} = \begin{pmatrix} I_n & \varepsilon^2 A_{12}A_{22}^{-1}\Big(e^{A_{22}\tau/\varepsilon} - I_m\Big) & \tau A_{13} \\ 0 & e^{A_{22}\tau/\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & I_k \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$e^{\mathcal{A}_0 \tau} = \begin{pmatrix} I_n & \tau A_{13} \\ 0 & I_k \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Для сокращения записи формул мы будем использовать обозначения

$$A := A_{12}A_{22}^{-1}, \qquad Ex(\eta) := e^{A_{22}\eta}.$$

2. Разрешимость задачи

Утверждение 1. *Система* $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ *вполне управляема при любом* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Воспользуемся условием, эквивалентным вполне управляемости:

$$\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} l \equiv 0 \Longrightarrow l = 0.$$

В силу (1.11) и (1.13) получим

$$0 \equiv \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} l = \varepsilon B^*\big(Ex^*(\tau/\varepsilon) - I_m\big)A^* l_x + \tau A_{13}^* l_x + \varepsilon^{-1} B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) l_y + l_z \Longrightarrow$$

$$\tau A_{13}^* l_x + l_z - \varepsilon B^* A^* l_x \equiv -\varepsilon B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) A^* l_x - \varepsilon^{-1} B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) l_y \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to +\infty.$$

Поэтому

$$A_{13}^* l_x = 0 \overset{(1.6)}{\Longrightarrow} l_x = 0 \Longrightarrow l_z = 0 \Longrightarrow B^* Ex^*(\tau/\varepsilon) l_y \equiv 0 \overset{\text{предл. 2}}{\Longrightarrow} l_y = 0. \qquad \square$$

Теорема 1. *Задача* (1.8) *разрешима, и* $\theta_0 = 2\sqrt{\|A_{13}^*(A_{13}A_{13}^*)^{-1}x_0\|}$.

Доказательство. В силу принципа максимума Понтрягина [1; 3], который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, оптимальное управление в задаче (1.8) имеет вид

$$u_0(\tau) = \frac{\mathcal{B}_0^* e^{(\theta_0 - \tau)\mathcal{A}_0^*} \widetilde{l}}{\big\|\mathcal{B}_0^* e^{(\theta_0 - \tau)\mathcal{A}_0^*} \widetilde{l}\big\|}, \quad \widetilde{l} \in \mathbb{R}^{n+k}, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{l} = (\widetilde{l}_x^*, \widetilde{l}_z^*)^* \neq 0$ и

$$-e^{\theta_0 \mathcal{A}_0^*} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\theta_0} e^{\tau \mathcal{A}_0} \mathcal{B}_0 \mathcal{B}_0^* e^{\tau \mathcal{A}_0^*} \widetilde{l} \frac{d\tau}{\big\|\mathcal{B}_0^* e^{\tau \mathcal{A}_0^*} \widetilde{l}\big\|}.$$

Последнее равенство в силу (1.12) и (1.14) записывается следующим образом:

$$-\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\theta_0} \begin{pmatrix} \tau^2 A_{13} A_{13}^* \widetilde{l}_x + \tau A_{13} \widetilde{l}_z \\ \tau A_{13}^* \widetilde{l}_x + \widetilde{l}_z \end{pmatrix} \frac{d\tau}{\|\tau A_{13}^* \widetilde{l}_x + \widetilde{l}_z\|}. \tag{2.2}$$

Будем искать $\widetilde{l} \neq 0$ в виде

$$\widetilde{l}_z = -\lambda_0 A_{13}^* \widetilde{l}_x, \quad \lambda_0 > 0. \tag{2.3}$$

Отметим, что $\widetilde{l}_x \neq 0$ и $\lambda_0 A_{13}^* \widetilde{l}_x \neq 0$ в силу (1.6).

Равенство (2.2) при этом распадется на два равенства

$$-x_0 = \frac{A_{13} A_{13}^* \widetilde{l}_x}{\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\|} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{\tau(\tau - \lambda_0)}{|\tau - \lambda_0|} d\tau, \qquad 0 = \frac{A_{13}^* \widetilde{l}_x}{\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\|} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{\tau - \lambda_0}{|\tau - \lambda_0|} d\tau. \tag{2.4}$$

Из второго соотношения в (2.4) получим, что $\lambda_0 = \theta_0/2$. При этом первое равенство в (2.4) дает

$$-x_0 = \frac{A_{13} A_{13}^* \widetilde{l}_x}{\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\|} \frac{\theta_0^2}{4}. \tag{2.5}$$

Поскольку в силу (1.5) и (1.6) оператор $A_{13} A_{13}^*$ обратим, то

$$\widetilde{l}_x = -\mu Q^{-1} x_0, \quad Q := A_{13} A_{13}^*, \quad \mu > 0. \tag{2.6}$$

Подставляя представление (2.6) в равенство (2.5) получаем $\theta_0^2 = 4\|A_{13}^* Q^{-1} x_0\|$, а значение параметра μ определяется условием нормировки.

Например, если $\|A_{13}^* \widetilde{l}_x\| = 1$, то $\mu^{-1} = \|A_{13}^* Q^{-1} x_0\|$. $\square$

Утверждение 2. *Для задачи* (1.8) *представление оптимального управления в виде* (2.1) *с нормированным вектором* $\widetilde{l}$ *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения будет непосредственно следовать из [13, лемма 5], как только будет выполнено условие

$$\big(\forall\, \tau \in \mathbb{R} \quad (\tau A_{13}^{*}\widetilde{l}_{x,1} + \widetilde{l}_{z,1}) \parallel ((\tau A_{13}^{*}\widetilde{l}_{x,2} + \widetilde{l}_{z,2})\big) \Longrightarrow \big((\widetilde{l}_{x,1}^{*}, \widetilde{l}_{z,1}^{*})^{*} \parallel (\widetilde{l}_{x,2}^{*}, \widetilde{l}_{z,2}^{*})^{*}\big). \tag{2.7}$$

Докажем, что свойство (2.7) выполняется. В силу [18, утверждение 3] из

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R} \quad (\tau A_{13}^{*}\widetilde{l}_{x,1} + \widetilde{l}_{z,1}) \parallel (\tau A_{13}^{*}\widetilde{l}_{x,2} + \widetilde{l}_{z,2})$$

следует, что

$$\begin{pmatrix} A_{13}^{*}\widetilde{l}_{x,1} \\ \widetilde{l}_{z,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{13}^{*} & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{l}_{x,1} \\ \widetilde{l}_{z,1} \end{pmatrix} \Bigg\| \begin{pmatrix} A_{13}^{*} & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{l}_{x,2} \\ \widetilde{l}_{z,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{13}^{*}\widetilde{l}_{x,2} \\ \widetilde{l}_{z,2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} A_{13}^{*} & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} = \{0\}$, то $(\widetilde{l}_{x,1}^{*}, \widetilde{l}_{z,1}^{*})^{*} \parallel (\widetilde{l}_{x,2}^{*}, \widetilde{l}_{z,2}^{*})^{*}$. Тем самым свойство (2.7) справедливо. □

Теорема 2. *Задача* (1.7) *разрешима при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$. *При этом*

$$\theta_\varepsilon \to \theta_0, \text{ а } l(\varepsilon) \to (\widetilde{l}_x^{*}, 0^{*}, \widetilde{l}_z^{*})^{*} \text{ при } \varepsilon \to +0,$$

где $l(\varepsilon) = (l_x(\varepsilon)^{*}, l_y(\varepsilon)^{*}, l_z(\varepsilon)^{*})^{*}$ *— нормированный вектор представления оптимального управления в задаче* (1.7);

$$u_\varepsilon(\tau) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^{*} e^{(\theta_\varepsilon - \tau)\mathcal{A}_0^{*}} l(\varepsilon)}{\big\|\mathcal{B}_\varepsilon^{*} e^{(\theta_\varepsilon - \tau)\mathcal{A}_\varepsilon^{*}} l(\varepsilon)\big\|}, \quad l(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+m+k}, \tag{2.8}$$

а $\widetilde{l} = (\widetilde{l}_x^{*}, \widetilde{l}_z^{*})^{*}$ *— нормированный вектор из представления* (2.1) *оптимального управления в задаче* (1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрица $\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon$ получается из $\mathcal{A}_\varepsilon$, если взять $A_{12} = 0$. Тогда из (1.13) получим, что при любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \geqslant 0$

$$\|e^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} - e^{\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}\| \leqslant \varepsilon^2 \|A(Ex(\tau/\varepsilon) - I_m)\| \leqslant K\varepsilon^2$$

при некотором K, не зависящем от $\varepsilon > 0$ и $\tau \geqslant 0$. Поэтому к задаче (1.7) применимы результаты теорем 2 и 3 и следствие 1 работы [13]. □

3. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

Вектор $l(\varepsilon)$ (для сокращения записи будем опускать зависимость от ε) есть решение основного уравнения, аналогичного уравнению (2.2)

$$-\begin{pmatrix} x_0 - \varepsilon^2 A y_0 + \varepsilon\theta_\varepsilon A_{13} z_0 \\ 0 \\ \varepsilon z_0 \end{pmatrix} = \int_0^{\theta_\varepsilon} \mathcal{C}_\varepsilon(\tau)\mathcal{C}_\varepsilon^{*}(\tau) l(\varepsilon) \frac{d\tau}{\|\mathcal{C}_\varepsilon^{*}(\tau) l(\varepsilon)\|} + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big), \ \varepsilon \to +0, \tag{3.1}$$

где в силу (1.11) и (1.13)

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\tau) := e^{\tau\mathcal{A}_\varepsilon}\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon A\big(Ex(\tau/\varepsilon) - I_m\big)B + \tau A_{13} \\ \varepsilon^{-1} Ex(\tau/\varepsilon) B \\ I_k \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Для нахождения асимптотики решения уравнения (3.1) в силу работ [10; 11; 14] достаточно получить асимптотику интеграла из правой части (3.1) относительно малых добавок к предельному вектору $\widetilde{l}$ и, потом, построить асимптотическое решение получившейся системы.

Для нахождения требуемой асимптотики указанного интеграла воспользуемся методом вспомогательного параметра [15; 16].

Разобьем интеграл $J := \int_0^{\theta_\varepsilon}$ из (3.1) в сумму двух интегралов $J = J_1 + J_2$: $J_1 := \int_0^{\mu}$, $J_2 := \int_\mu^{\theta_\varepsilon}$, где $\mu = \varepsilon^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Получим асимптотическое разложение интеграла J_2. При $\tau > \mu$ имеем

$$\mathcal{C}(\tau)\mathcal{C}^*(\tau)l$$

$$= \begin{pmatrix} \tau^2 A_{13}A_{13}^* l_x + \tau A_{13} l_z - \varepsilon\tau(ABA_{13}^* + A_{13}B^*A^*)l_x - \varepsilon AB l_z + \varepsilon^2 ABB^*A^* l_x \\ 0 \\ \tau A_{13}^* l_x + l_z - \varepsilon B^*A^* l_x \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$+ O\big(\varepsilon^{+\infty}\big) := \mathcal{G}(\tau)\mathcal{G}^*(\tau)l + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big), \quad \varepsilon \to +0,$$

$$\|\mathcal{C}^*(\tau)l(\varepsilon)\| = \|\tau A_{13}^* l(\varepsilon)_x + l(\varepsilon)_z - \varepsilon B^*A^* l(\varepsilon)_x\| + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big) = \|\mathcal{G}^*(\tau)l(\varepsilon)\| + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big), \quad \varepsilon \to +0.$$

Поэтому, как и в [18], удобно искать l при специальной нормировке и в специальном виде.

Векторы $\widetilde{l}$ и l нормируем условием

$$\|A_{13}^*\widetilde{l}_x\| = 1, \quad \|A_{13}^* l_x\| = 1. \tag{3.4}$$

Введем новые малые неизвестные r, ρ, h, λ, ϑ (их зависимость от ε будем для сокращения записи опускать) и один неизвестный вектор h_0 по формулам

$$\begin{gathered} l_x = \widetilde{l}_x + r, \quad l_z = -\widetilde{\lambda} A_{13}^* l_x + \varepsilon B^*A^* l_x + \rho, \quad \rho \perp A_{13}^* l_x, \\ l_y = \varepsilon(h_0 + h), \quad \theta_\varepsilon = \theta_0 + \vartheta, \quad \widetilde{\lambda} = (\lambda_0 + \lambda), \quad \beta := \|\rho\|. \end{gathered} \tag{3.5}$$

В силу (3.5) имеем

$$\|\mathcal{G}^*(\tau)l\| = \sqrt{(\tau - \widetilde{\lambda})^2 + \beta^2}. \tag{3.6}$$

Поскольку в окрестности $\tau = 0$ подынтегральное выражение в J_2 бесконечно дифференцируемо по τ, то для нахождения разложения всего интеграла J достаточно взять разложение интеграла

$$\widetilde{J}_2 := \int\limits_0^{\theta_\varepsilon} \mathcal{G}(\tau)\mathcal{G}^*(\tau)l \frac{d\tau}{\|\mathcal{G}^*(\tau)l(\varepsilon)\|}.$$

В этом случае с учетом (3.3), (3.5) и (3.6) получим

$$\widetilde{J}_2 = \begin{pmatrix} F_0(\vartheta,\lambda,\beta)V_0 + F_1(\vartheta,\lambda,\beta)V_1 + F_2(\vartheta,\lambda,\beta)V_2 \\ 0 \\ F_1(\vartheta,\lambda,\beta)A_{13}^* l_x + F_0(\vartheta,\lambda,\beta)\rho \end{pmatrix},$$

$$V_0 := \widetilde{\lambda} A_{13}\rho - \varepsilon AB\rho - \frac{\beta^2}{2} Q l_x, \tag{3.7}$$

$$V_1 := \widetilde{\lambda} Q l_x + A_{13}\rho - \varepsilon ABA_{13}^*,$$

$$V_2 := \frac{1}{2} Q l_x,$$

где

$$F_0(\vartheta,\lambda,\beta)=\ln\left(\frac{\lambda_0+\vartheta-\lambda+\sqrt{(\lambda_0+\vartheta-\lambda)^2+\beta^2}}{-\lambda_0-\lambda+\sqrt{(\lambda_0+\lambda)^2+\beta^2}}\right);$$

$$F_1(\vartheta,\lambda,\beta)=\frac{(\lambda_0+\vartheta-\lambda)^2-(\lambda_0+\lambda)^2}{\sqrt{(\lambda_0+\vartheta-Gl)^2+\beta^2}+\sqrt{(\lambda_0+\lambda)^2+\beta^2}};$$

$$F_2(\vartheta,\lambda,\beta)=(\lambda_0+\vartheta-\lambda)\sqrt{(\lambda_0+\vartheta-\lambda)^2+\beta^2}+(\lambda_0+Gl)\sqrt{(\lambda_0+Gl)^2+\beta^2}.$$

При этом, если r, λ, β и ϑ достаточно малы, то функции F_0, F_1 и F_2 можно представить в следующем виде (напомним, что $\lambda_0=\theta_0/2$):

$$\begin{aligned}
&F_0(\vartheta,\lambda,\beta)=2\ln\frac{\theta_0}{\beta}+\frac{2\vartheta}{\theta_0}+\frac{2\beta^2}{\theta_0^2}-\frac{2}{\theta_0^2}(\lambda^2+(\vartheta-\lambda)^2)+\overset{0}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta),\\
&F_1(\vartheta,\lambda,\beta)=\vartheta-2\lambda+\overset{1}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta),\\
&F_2(\vartheta,\lambda,\beta)=\frac{\theta_0^2}{2}+\theta_0\vartheta+\beta^2+(\vartheta-\lambda)^2+\lambda^2+\overset{2}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta),
\end{aligned}\tag{3.8}$$

где $\overset{0}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta)$, $\overset{1}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta)$ и $\overset{2}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\lambda,\beta)$ — сходящиеся степенные ряды, начинающиеся с третьей степени от своих аргументов, с известными коэффициентами.

Теперь рассмотрим асимптотику интеграла J_1. Сделав замену $\tau:=\varepsilon\eta$ в этом интеграле, получим

$$J_1=\varepsilon\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\mathcal{C}(\varepsilon\eta)\mathcal{C}^*(\tau)l\frac{d\tau}{\|\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l\|},$$

$$\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l=\big(B^*Ex^*(\eta)h_0+\widetilde{l}_z\big)$$

$$+\Big(-\lambda\widetilde{l}_x-(\lambda_0+\lambda)A_{13}^*r+\rho+\varepsilon B^*Ex^*(\eta)A^*l_x+\varepsilon\eta A_{13}^*l_x+B^*Ex^*(\eta)h\Big)=:q_0(\eta)+q_1(\eta).\tag{3.9}$$

Поэтому

$$\|\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l\|^{-1}=\frac{1}{\|q_0\|}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\frac{(2<q_0,q_1>+\|q_1\|^2)^i}{\|q_0\|^i}\right),\quad \gamma_1=-\frac{1}{2}.\tag{3.10}$$

Поскольку

$$\varepsilon\mathcal{C}(\varepsilon\eta)\mathcal{C}^*(\varepsilon\eta)l\ =\ \begin{pmatrix}\varepsilon^2AEx(\eta)-\varepsilon^2AB+\varepsilon^2\eta A_{13}\\ Ex(\eta)B\\ \varepsilon I_k\end{pmatrix}\big(q_0(\eta)+q_1(\eta)\big),\tag{3.11}$$

то компоненты интеграла распадаются на слагаемые двух различных видов

$$\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\mathcal{E}_j(\eta)(l)d\eta}{\|q_0\|^i}\ \text{и}\ \int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\eta^jD_j(l)d\eta}{\|q_0\|^i},$$

где через $\mathcal{E}_j(\eta)$ обозначены известные экспоненциально убывающие при $\eta\to+\infty$ операторы, а через D_j — известные операторы, не зависящие от η.

Отметим, что $\displaystyle\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\mathcal{E}_j(\eta)(l)d\eta}{\|q_0\|^i}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathcal{E}_j(\eta)(l)d\eta}{\|q_0\|^i}+O\big(\varepsilon^{+\infty}\big)$, $\varepsilon\to+0$. Наконец,

$$\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\frac{\eta^jD_j(l)d\eta}{\|q_0\|^i}=\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\left(\frac{1}{\|q_0\|^i}-\frac{1}{\|\widetilde{l}_z\|^i}\right)\eta^jD_j(l)d\eta+\frac{1}{\|\widetilde{l}_z\|^i}\int\limits_0^{\mu/\varepsilon}\eta^jD_j(l)d\eta.$$

Но первый интеграл в этой сумме имеет первый тип и сводится к интегралу по $[0;+\infty)$, а второй дает слагаемые, которые сокращаются с аналогичными слагаемыми из интеграла $\int\limits_0^\mu \mathcal{G}\mathcal{G}^* l \dfrac{d\tau}{\|\mathcal{G}^* l\|}$.

При этом в силу (3.1) и (3.2) неизвестный вектор h_0 есть решение уравнения (отметим, что вектор $\widetilde{l}_z$ известен):

$$0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{Ex(\eta)B\big(B^*Ex^*(\eta)h_0 + \widetilde{l}_z\big)}{\|B^*Ex^*(\eta)h_0 + \widetilde{l}_z\|} d\eta. \tag{3.12}$$

Предположение 5. *Уравнение* (3.12) *имеет решение.*

Утверждение 3. *Если $A_{22} = -\alpha I_m$, $\alpha > 0$, то предположение* 5 *выполнено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом случае $h_0 = -\nu(BB^*)^{-1}B\widetilde{l}_z$ при некотором $\nu > 0$. Пусть

$$f(\nu) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\big(-\nu e^{-2\eta} + e^{-\eta}\big)}{\| -\nu e^{-2\eta} B^*(BB^*)^{-1}B^*\widetilde{l}_z + \widetilde{l}_z\|} d\eta.$$

Тогда уравнение (3.12) имеет вид $0 = f(\nu)B\widetilde{l}_z$. Если $B\widetilde{l}_z = 0$, то $h_0 = 0$. Если же $B\widetilde{l}_z \neq 0$, то и $B^*(BB^*)^{-1}B^*\widetilde{l}_z \neq 0$. При этом $f(0) = 1/(\alpha\|\widetilde{l}_z\|) > 0$, а $f(\nu) \to -\infty$ при $\nu \to +\infty$. Поэтому существует ν_0 такое, что $f(\nu_0) = 0$. $\square$

Таким образом, необходимое разложение интеграла в (3.1) получено.

Система первого приближения для (3.1) в силу (3.7)–(3.11) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\varepsilon A_{13}\, z_0 & = & \dfrac{\theta_0}{2} Q\, r_1 + \vartheta_1 Q\, \widetilde{l}_x + (\vartheta_1 - 2\lambda_1)\, Q\, \widetilde{l}_x + 2\ln\dfrac{\theta_0}{\beta_1} A_{13}\, \rho_1, \\ 0 & = & \varepsilon P_1 + \lambda_1 P_2 + D_{1,r}\, r_1 + D_{1,\rho}\, \rho_1 + D_{1,h}\, h_1, \\ -\varepsilon z_0 & = & (\vartheta_1 - 2\lambda_1)\, A_{13}^*\, \widetilde{l}_x + 2\rho_1 \ln\dfrac{\theta_0}{\beta_1}, \\ 0 & = & \langle A_{13}^*\widetilde{l}_x,\, A_{13}^* r_1\rangle, \\ 0 & = & \langle A_{13}^*\widetilde{l}_x,\, \rho_1\rangle. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Здесь P_1, P_2 — известные постоянные векторы, а $D_{1,r}$, $D_{1,\rho}$, $D_{1,h}$ — известные линейные операторы. В частности,

$$D_{1,h}h = \int\limits_0^{+\infty} \frac{Ex(\eta)B}{\|q_0(\eta)\|} \left(\frac{q_0(\eta)}{\|q_0(\eta)\|}\langle B^*Ex^*(\eta)h, q_0(\eta)\rangle + B^*Ex^*(\eta)h\right) d\eta.$$

При $h \neq 0$ имеем

$$\langle D_{1,h}h, h\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\|q_0(\eta)\|} \left(\frac{\langle B^*Ex^*(\eta)h, q_0(\eta)\rangle^2}{\|q_0(\eta)\|} + \|B^*Ex^*(\eta)h\|^2\right) d\eta \neq 0.$$

Следовательно, (в силу предположения 2) $\operatorname{Ker} D_{1,h} = \{0\}$ и $D_{1,h}$ обратим. Умножая скалярно первое и третье уравнения системы (3.13) на $\widetilde{l}_x$ и $A_{13}^*\widetilde{l}_x$ соответственно, найдем

$$\vartheta_1 = -\varepsilon\langle z_0, A_{13}^*\widetilde{l}_x\rangle, \quad \lambda_1 = 0, \quad r_1 = \frac{2\varepsilon}{\theta_0} Q^{-1}\big(\langle A_{13}\, z_0, \widetilde{l}_x\rangle - A_{13}\, z_0\big).$$

Далее, ρ_1 удовлетворяет уравнению

$$2\rho_1 \ln \frac{\theta_0}{\beta_1} = -\varepsilon z_0 + \varepsilon A_{13}^* \widetilde{l}_x \langle z_0, A_{13}^* \widetilde{l}_x \rangle =: \varepsilon v_0. \tag{3.14}$$

Отметим, что $v_0 = 0 \Longleftrightarrow A_{13}^* \widetilde{l}_x \parallel z_0 \overset{(2.6)}{\Longleftrightarrow} A_{13}^* Q^{-1} x_0 \parallel z_0$.

Предположение 6.

$$A_{13}^* Q^{-1} x_0 \nparallel z_0.$$

Предположение 6 соответствует случаю общего положения (т. е. сохраняется при малых изменениях векторов).

Тем самым в уравнении (3.14) $v_0 \neq 0$ и $\beta_1 = \|\rho_1\|$ удовлетворяет уравнению

$$2\beta_1 \ln\Big(\frac{\theta_0}{\beta_1}\Big) = \varepsilon \|v_0\|. \tag{3.15}$$

Обозначив $\delta := \beta_1/\theta_0$ и $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon\|v_0\|/(2\theta_0)$, получаем уравнение $\delta \ln(1/\delta) = \widetilde{\varepsilon}$. Пусть $W_0(\widetilde{\varepsilon})$ — функция, обратная к функции $\delta \ln(1/\delta)$ при малых δ . Тогда (см. [10; 11])

$$\beta_1 = \theta_0 W_0\Big(\frac{\varepsilon\|v_0\|}{2\theta_0}\Big) =: W(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.16}$$

Отметим также, что в силу (3.15) и (3.16)

$$\varepsilon \ln^{-1} \frac{\theta_0}{\beta_1} = \frac{2}{\|v_0\|}\beta_1, \quad \ln \frac{\theta_0}{\beta_1} = \ln \theta_0 + \ln \frac{1}{W(\varepsilon)} = \frac{2\varepsilon\|v_0\|}{W(\varepsilon)}.$$

Таким образом,

$$\rho_1 = W(\varepsilon)\widetilde{P}_1, \quad h_1 = \varepsilon D_{1,h}^{-1}\widetilde{P}_2 + W(\varepsilon) D_{1,h}^{-1} D_{1,\rho}\, \widetilde{P}_1.$$

Далее, как и в [18], получаются асимптотические разложения для всех указанных величин (3.4) и (3.5). Отметим, что в силу (3.1) для времени быстродействия поправка ϑ_2 второго порядка малости по ε будет иметь вид

$$\vartheta_2 = R_2\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big) \not\equiv R_2\big(\varepsilon, 1\big),$$

где $R_2\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big) = O(\varepsilon^2)$ — рациональная функция своих аргументов.

Вид всех разложений искомых величин подобен виду разложений в [10; 11], и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При выполнении предположений* 1–6 *время быстродействия* T_ε *и компоненты вектора* $l(\varepsilon)$ *раскладываются в асимптотические ряды вида* $\sum_{k=0}^{\infty} R_k\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big)$, *где* $R_k(\cdot)$ — *рациональные функции своих аргументов и* $R_k\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big) = O(\varepsilon^k)$ *при* $\varepsilon \to +0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
6. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.

7. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
8. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
9. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
10. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий // Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.
11. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
12. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
13. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып 14.)
14. **Парышева Ю.В.** Асимптотика решения линейной задачи оптимального управления в сингулярном случае // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 266–270.
15. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярных эллиптических задач // Мат. сб. 1998. Т. 189 (34), № 11. С. 27–60.
16. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
17. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстродействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 67–79.
18. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в задаче о быстродействии с двумя малыми параметрами // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 92–99.

Данилин Алексей Руфимович
Поступила 20.10.2014
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент УрФУ
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: koo@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВНЕ МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ОТРЕЗКА[1]

А. А. Ершов

Построено и обосновано асимптотическое разложение решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка. Малый параметр характеризует ширину окрестности. Физической интерпретацией решения является двумерный потенциал скоростей идеальной жидкости при ламинарном обтекании поперек тонкого тела.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, асимптотическое разложение, метод согласования, ламинарный поток, идеальная жидкость.

A. A. Ershov. Asymptotics of a solution of the second boundary value problem for the Laplace equation outside a small neighborhood of a segment.

We construct and validate an asymptotic expansion of a solution of the exterior Neumann problem for the Laplace equation outside a small neighborhood of a segment. The width of the neighborhood is characterized by a small parameter. A physical interpretation of the solution is the two-dimensional velocity potential of an ideal fluid in the case of a laminar flow across a thin body.

Keywords: boundary value problem, Laplace equation, asymptotic expansion, matching method, laminar stream, ideal fluid.

Введение

Рассматривается внешняя краевая задача для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка, которая физически интерпретируется как модель обтекания тонкого тела ламинарным потоком жидкости. Заметим, что ранее в [1, гл. III, § 2] была рассмотрена похожая двумерная задача обтекания тонкого тела ламинарным потоком жидкости. В данной работе процесс обтекания происходит перпендикулярно к направлению, которое рассматривалось в [1, гл. III, § 2]. Построение этой асимптотики дает возможность вычислить асимптотику решения, интерпретирующего процесс обтекания в любом направлении.

Отметим, что первая краевая задача для общего эллиптического уравнения с переменными коэффициентами вне малой окрестности отрезка впервые была рассмотрена в [2]. Позже была изучена и более сложная задача исследования собственных функций и собственных значений такой задачи в ограниченной области для оператора Лапласа [3]. В работах [4] и [5] была построена асимптотика решения первой краевой задачи вне малой окрестности осесимметричного и неосесимметричного тонкого диска соответственно. Наконец, можно отметить исследование [6] внешней первой и второй краевой задачи для уравнения Лапласа вне малой осесимметричной окрестности отрезка в трехмерном пространстве, однако полученное там асимптотическое приближение не закрывает полностью вопроса построения равномерного асимптотического разложения решения. Также изучены аналогичные краевые задачи вне тонкого бесконечного [7] и полуограниченного [8] цилиндра.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00259-а) и Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса”.

1. Постановка задачи

Пусть σ — интервал $\{(x_1, x_2)\colon 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\overline{\sigma}$ — его замыкание, а σ_ε — окрестность интервала σ (рис. 1).

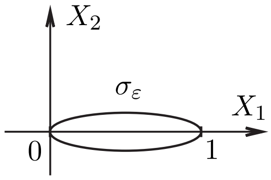


Рис. 1.

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий ширину окрестности σ_ε, так что $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} \sigma_\varepsilon = \sigma$. Точный вид σ_ε определим следующим образом. Пусть $\sigma_\varepsilon = \{x\colon 0 < x_1 < 1, \varepsilon g_-(x_1) < x_2 < g_+(x_1)\}$, где $g_\pm(x_1) \in C^\infty(0,1)$. Вблизи концов отрезка $\overline{\sigma}$ также будем предполагать границу $\partial\sigma_\varepsilon$ гладкой. Это означает, что, например, около точки (0,0) уравнение границы $\partial\sigma_1$ имеет вид $x_1 = \psi(x_2)$, где $\psi(x_2) \in C^\infty$. Ясно, что $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi''(0) \geqslant 0$, и дополнительно предположим, что $\psi''(0) > 0$, т. е. что кривизна кривой $\partial\sigma_1$ в точке $(0,0)$ отлична от нуля. Без ограничения общности будем считать, что $\psi''(0) = 2$. Нетрудно показать, что указанные предположения эквивалентны следующим условиям на $g_\pm(x_1)$:

$$g_\pm(x_1) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to 0, \quad g_1 = 1. \tag{1.1}$$

Аналогичную асимптотику функций $g_\pm(x_1)$ будем предполагать около другого конца σ, т. е. при $x_1 \to 1-0$. Также потребуем, чтобы данные ряды допускали многократное почленное дифференцирование.

Всюду в этой статье будут употребляться обозначения $x = (x_1, x_2)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Посредством $u(x,\varepsilon) = u(x_1, x_2, \varepsilon)$ будем обозначать функцию, которая удовлетворяет условиям $u(x,\varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \sigma_\varepsilon)$,

$$\Delta u = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \sigma_\varepsilon, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x,\varepsilon) = 0 \text{ при } x \in \partial\sigma_\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$u(x,\varepsilon) = x_2 + o(1) \text{ при } r \to \infty. \tag{1.4}$$

Цель работы заключается в построении и обосновании асимптотического разложения по малому параметру ε функции $u(x,\varepsilon)$.

Гидродинамическая интерпретация задачи (1.2)–(1.4) следующая. Рассматривается обтекание тела σ_ε плоским безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ — это потенциал скоростей, так что скорость жидкости $V = \operatorname{grad} u$. Тогда функция $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (1.2) и условию непротекания (1.3) на границе тела. Для однозначного определения течения надо задать еще скорость набегающего потока на бесконечности. Течение с постоянной единичной скоростью, параллельной оси x_2, соответствует решению $u(x) = x_2$, так что физически правильным условием на бесконечности является условие $u \to x_2 + O(1)$ при $r \to \infty$. Но без ограничения общности можно считать выполненным условие (1.4). Отметим, что это условие совпадает с тем, которое было рассмотрено в [1, гл. III, § 2], но поскольку мы рассматриваем потенциал скоростей вместо функции тока, то направление обтекания на самом деле перпендикулярно ранее рассмотренному.

2. Внешнее разложение

Внешнее разложение решения задачи (1.2)–(1.4) будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \tag{2.1}$$

$$\text{где } \Delta u_k = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\sigma}. \tag{2.2}$$

Условие (1.4) переходит в условия

$$u_0(x) = x_2 + o(1) \text{ при } r \to \infty, \tag{2.3}$$

$$u_k(x) = o(1) \text{ при } r \to \infty,\ k > 0. \tag{2.4}$$

Граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ получаются следующим образом (рис. 2).

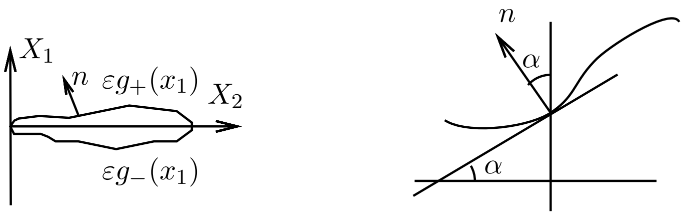


Рис. 2.

По определению производной по направлению

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x)\Big|_{x\in\sigma_\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial n} u(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) = (\nabla u(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)), n).$$

Пусть α — угол между осью Ox_2 и нормалью n. Тогда

$$n = \pm(-\sin\alpha, \cos\alpha) = \pm\Big(- \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}\Big)$$

$$= \pm\Big(- \frac{\varepsilon g'_\pm(x_1)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(x_1)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(x_1)}}\Big).$$

По условию (1.3) нормальная производная на границе равна нулю, т. е.

$$-\varepsilon g'_\pm(x_1) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) = 0.$$

Подставляя сюда вместо u ряд (2.1) и разлагая функции по степеням ε, будем иметь

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) + \varepsilon\Big(- g_\pm(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) + g_\pm(x_1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0)\Big) + \ldots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = g'_\pm(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) - g_\pm(x_1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0) \\
&\qquad = \Big(g_\pm(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \pm 0)\Big)'_{x_1}, \\
&\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = g'_\pm(x_1) \sum_{j=0}^{k} \frac{g^j_\pm(x_1)}{j!} \frac{\partial^{j+1} u_{k-j}}{\partial x_2^j \partial x_1}(x_1, \pm 0) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{g^j_\pm(x_1)}{j!} \frac{\partial^{j+1} u_{k+1-j}}{\partial x_2^{j+1}}(x_1, \pm 0) \\
&\qquad = \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{g^{j+1}_\pm(x_1)}{(j+1)!} \cdot \frac{\partial^{j+1} u_{k-j}}{\partial x_2^j \partial x_1}(x_1, \pm 0)\Big)'_{x_1}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Как и в [1, гл. III, § 2], задача является бисингулярной: функции $u_k(x)$ имеют возрастающие особенности на краях отрезка $\overline{\sigma}$. Кроме того, возникает дополнительная трудность с разрешимостью краевых задач (2.2)–(2.5) для $u_k(x)$.

Начнем с изучения функции $u_0(x)$. Представим ее в виде суммы $u_0(x) = x_2 + \tilde{u}_0(x)$, где непрерывная гармоническая функция $\tilde{u}_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_0(x) = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{\sigma}, \\ \tilde{u}_0(x) = o(1) \text{ при } r \to \infty, \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = -1 \text{ при } x_1 \in (0,1). \end{cases}$$

Данную задачу можно решить методом конформных отображений с помощью функции Жуковского [9]. Решением является функция $\tilde{u}_0(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\sqrt{\big(2x_1 - 1 + 2ix_2\big)^2 - 1} - x_2$. Здесь выбирается та ветвь корня, мнимая часть которого ведет себя как x_2 на бесконечности. Отсюда следует асимптотика

$$u_0(x) = r^{1/2}\cos\frac{\Theta}{2} - \frac{1}{2}r^{3/2}\cos\frac{3\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2j-3)!!}{2^j j!}r^{j+1/2}\cos\Big(j + \frac{1}{2}\Big)\Theta, \quad r \to 0,$$

где Θ — полярный угол $0 \le \Theta \le 2\pi$. Аналогичное разложение существует около точки $(1,0)$. Заметим, что эти степенные ряды сходятся.

Перейдем к изучению функции $u_1(x)$. Граничное условие (2.5) имеет для нее вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \frac{d}{dx_1}\Big(g'_{\pm}(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \pm 0)\Big), \quad 0 < x_1 < 1. \tag{2.6}$$

Таким образом, $u_1(x)$ — это гармоническая в $\mathbb{R}^2\backslash\overline{\sigma}$, стремящаяся к нулю на бесконечности функция, которая удовлетворяет условию (2.6). Для того чтобы проверить разрешимость такой задачи, докажем, что предел

$$\lim_{x_1 \to +0}\Big(g_-(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, -0) - g_+(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, +0)\Big) = 0.$$

Лемма 1. *Верны следующие тождества*:

$$\Big(\sum_j d_j r^{j/2}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_j r^{j/2}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big)'_{x_2} = \sum_j -\frac{j}{2}d_j r^{j/2-1}\sin\Big(\Big(\frac{j}{2} - 1\Big)\Theta\Big) + \frac{j}{2}c_j r^{j/2-1}\cos\Big(\Big(\frac{j}{2} - 1\Big)\Theta\Big),$$

$$\Big(\sum_j d_j r^{j/2}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_j r^{j/2}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big)'_{x_1} = \sum_j \frac{j}{2}d_j r^{j/2-1}\cos\Big(\Big(\frac{j}{2} - 1\Big)\Theta\Big) + \frac{j}{2}c_j r^{j/2-1}\sin\Big(\Big(\frac{j}{2} - 1\Big)\Theta\Big).$$

Доказательство. Для удобного дифференцирования можно использовать представление вида $r^{j/2}\sin(j\Theta/2) = \mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^{j/2}$, где выбирается первообразный корень. $\square$

Согласно лемме 1 $\partial u_0/\partial x_1 = 1/2\ r^{-1/2}\cos(\Theta/2) + O(r^{1/2})$, а по условию (1.1) $g_{\pm}(x_1) = \pm\sqrt{x_1} + O(x_1^{3/2})$. Следовательно, $\partial u_0/\partial x_1(x_1, \pm 0) = \pm 1/(2\sqrt{x_1}) + O(x_1^{1/2})$, а предел равен нулю. Аналогично,

$$\lim_{x_1 \to 1-0}\Big(g_+(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, -0) - g_-(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, +0)\Big) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что интеграл от нормальной производной по всей границе равен нулю. И хотя граничные условия имеют особенности, но в случае второй краевой задачи достаточно, чтобы они были интегрируемы, тогда решение такой задачи существует, единственно и непрерывно всюду, если считать различными разные берега разреза вдоль интервала σ. Однако граничные условия на следующие асимптотические коэффициенты имеют еще бо́льшие особенности, а интеграл от нормальной производной по всей границе может быть не равен нулю даже в смысле главного значения. Прежде чем рассмотреть асимптотическое поведение при $r \to 0$ следующих коэффициентов, а также доказательство возможности их существования и степень определенности, напомним обозначения, которые были введены для аналогичной первой краевой задачи в [1, гл. III, § 2].

Плоскость $\mathbb{R}^2$ с разрезом σ будем обозначать Ω, один из концов интервала σ — точку $(0,0)$ — обозначим O, а другой конец — точку $(1,0)$ — O' (рис. 3).

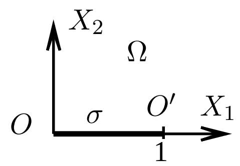


Рис. 3.

Введем те же обозначения для классов функций. Классы $C(\overline{\Omega})$ $(C^N(\overline{\Omega}))$ — это множества функций, определенных в $\overline{\Omega}$ и непрерывных (N раз непрерывно дифференцируемых) всюду, включая границу Ω. При этом точки на разных берегах разреза σ считаются различными точками (т. е. $(x_1,+0) \neq (x_1,-0)$ при $0 < x_1 < 1$). Если при этом функции определены лишь при $r \leqslant \delta$, то такие множества будут обозначаться $C(\overline{\Omega}_\delta)$ $(C^N(\overline{\Omega}_\delta))$. Посредством $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$ обозначаются классы функций, бесконечно дифференцируемых всюду в $\overline{\Omega}$, кроме концов отрезка $\overline{\sigma}$, а посредством $C^\infty(\overline{\Omega}_\delta\backslash O)$ — такие же функции, определенные при $r \leqslant \delta$. При этом берега разреза по-прежнему считаются различными.

Итак, $u_1(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$, но вблизи концов σ функция $u_1(x)$ не является гладкой функцией. Используя разложения функций $g_\pm$ и u_0, можно получить, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = \pm\frac{g_2}{4}x_1^{-1/2} + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} z^j\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to +0, \tag{2.7}$$

где $h_{1,j}$ — некоторые коэффициенты, полученные в результате перемножения соответствующих рядов в (2.6), явный вид их не важен.

Теорема 1. *Пусть k — целое число, функции $h_\pm(x_1) \in C^\infty(0,1)$, для которых справедливы асимптотические разложения*

$$h_\pm(x_1) = \Bigg(\sum_{j=-k}^{\infty} c_j z^j\Bigg)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to +0, \tag{2.8}$$

и аналогичные асимптотические разложения при $x_1 \to 1-0$, и разложения допускают дифференцирование по x_1. В случае $k > 0$ пусть заданы постоянные d_{-1}, d_{-2}, ..., d_{-k}, d'_{-1}, d'_{-2}, ..., d'_{-k}.

Тогда существует функция $u(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$, гармоничная в Ω, стремящаяся к нулю на бесконечности и удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = h'_\pm(x_1) \text{ при } 0 < x_1 < 1.$$

При $k \leqslant 0$ для функции $u(x)$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j r^{j/2}\cos\frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2}\sin\frac{j\Theta}{2}, \quad r \to 0,$$

при $k > 0$

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos\frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin\frac{j\Theta}{2}, \quad r \to 0,$$

а при $x \to O'$ *— аналогичные асимптотические разложения с заменой* d_{-j} *на* d'_{-j}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим вначале случай, когда $k \leqslant 0$. Условием разрешимости этой задачи в классе ограниченных бесконечно дифференцируемых функций является равенство $\int_0^1 h'_+(x_1)dx_1 - \int_0^1 h'_-(x_1)dx_1 = 0$, т. е. разность пределов $\lim\limits_{x_1\to+0} \big(h_-(x_1) - h_+(x_1)\big) - \lim\limits_{x_1\to 1-0} \big(h_+(x_1) - h_-(x_1)\big)$ должна быть равна нулю. В силу (2.8) это равенство всегда выполняется в этом случае. Поскольку задача разрешима, то возьмем ее решение $u(x)$, которое стремится к нулю на бесконечности, и измерим значения функции $u(x)$ на окружности $r = \delta$. Совокупность этих значений образует непрерывную функцию $\varphi(\Theta)$, а сама функция $u(x)$ является также и единственным решением из класса функций $C^\infty(\Omega_\delta) \cap C(\overline{\Omega}_\delta)$ следующей третьей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ при } x \in \Omega_\delta, \\ u\Big|_{r=\delta} = \varphi(\Theta) \text{ при } \Theta \in [0, 2\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \big(h_\pm(x_1)\big)'_{x_1} \text{ при } r < \delta. \end{cases}$$

Заметим, что у этой задачи легко выписать формальное решение

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin\frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos\frac{j\Theta}{2},$$

где $d_0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\Theta)d\Theta$, $d_j = 1/\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\Theta)\cos(j\Theta/2)d\Theta$.

Если ли бы ряды для функций $h_\pm$ сходились к самим функциям $h_\pm$, то отсюда бы следовал требуемый вид асимптотики функции $u(x)$. Но поскольку ряды для функций $h_\pm$ только асимптотические, то для доказательства того, что это формальное решение является настоящим асимптотическим разложением, будем следовать тому же алгоритму, который был продемонстрирован в доказательстве [1, с. 107, теорема 2.1]. Мы сделаем конформное отображение Ω_δ на полукруг, выпишем явное решение, найдем его асимптотику, а затем сделаем обратное отображение.

Отобразим область Ω_δ на полукруг радиуса $\sqrt{\delta}$. Как известно, при отображении $\Theta = 2\overline{\Theta}$, $r = \overline{r}^2$ гармонические функции переходят в гармонические. Обозначим $\overline{u}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \equiv u(x_1, x_2)$, где $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ — декартовы координаты после указанного отображения $\Big(\overline{x}_1 = x_2/\sqrt{2(r - x_1)}$, $\overline{x}_2 = \sqrt{r - x_2}/\sqrt{2}\Big)$. Таким образом, $\overline{u}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ — гармоническая функция в верхнем полукруге $\overline{x}_2 \geqslant 0$, $\overline{r} \leqslant \sqrt{\delta}$. Непрерывная функция $\varphi(\Theta)$ перейдет в непрерывную функцию $\varphi(2\overline{\Theta}) \equiv \overline{\varphi}(\overline{\Theta})$. Исследуем функцию $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0)$. Вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_1}\frac{\partial \overline{x}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\frac{\partial \overline{x}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_1}\frac{\overline{x}_2}{2\overline{r}^2} + \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\frac{\overline{x}_1}{2\overline{r}^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\pm 0} = \Big(\frac{\partial u}{\partial \overline{x}_1}\frac{\overline{x}_2}{2\overline{r}^2}\Big)\Big|_{\overline{x}_2=+0} + \Big(\frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\frac{\overline{x}_1}{2\overline{r}^2}\Big)\Big|_{\overline{x}_2=+0} = \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_2}\Big|_{\overline{x}_2=0} \cdot \frac{\overline{x}_1}{2\overline{x}_1^2} = \frac{1}{2\overline{x}_1}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}_2}\Big|_{\overline{x}_2=0}.$$

Отсюда можно выразить

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}_2}(\overline{x}_1, 0) = 2\overline{x}_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \underset{x_1\to+0}{\overset{\text{ас.}}{=}} 2\overline{x}_1 \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2} c_j z^{j-2}\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}} = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j \overline{x}_1^{j-1}.$$

Заметим, что если $x_2 = 0$, то $\overline{x}_2 = 0$, $x_1 = r = \overline{r}^2 = \overline{x}_1^2$. Также заметим, что поскольку $h_\pm(x_1) \in C^\infty(0,1)$, то функция $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0) \in C^\infty(-\sqrt{\delta}, 0) \cap C^\infty(0, \sqrt{\delta}) \cap C(-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta})$. Докажем бесконечную дифференцируемость функции $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0)$ в точке $\overline{x}_1 = 0$. Поскольку асимптотический ряд для функций $\partial u/\partial x_2(x_1, \pm 0)$ по условию допускает почленное дифференцирование, то можно дифференцировать и асимптотический ряд для функции $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0)$. Отсюда следует существование необходимых пределов в определении всех производных. Таким образом, функция $\partial\overline{u}/\partial\overline{x}_2(\overline{x}_1, 0) \in C^\infty(-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta})$.

С помощью явной формулы

$$\overline{u}(\overline{x}) = \int\limits_{\substack{|y|=R,\\ y_2>0}} \overline{u}(y)\Big(\frac{R^2 - |\overline{x}|^2}{R|y - \overline{x}|^2} + \frac{R^2 - |\overline{x}|^2}{R|y - \overline{\overline{x}}|^2}\Big) dS_y + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}_2}(y_1, 0) \ln\frac{1}{(y_1 - \overline{x}_1)^2 + \overline{x}_2^2} dy_1$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}_2}(y_1, 0) \ln\frac{R^2}{|\overline{x}|^2 y_1^2 - 2R^2\overline{x}_1 + R^4} dy_1,$$

где $\overline{\overline{x}} = (\overline{x}_1, -\overline{x}_2)$, можно показать, что функция $\overline{u}(\overline{x})$ является бесконечно дифференцируемой в точке $\overline{x} = (0,0)$, и, следовательно, ее можно разложить в этой точке в ряд Тейлора. В силу гармоничности функции $\overline{u}(\overline{x})$ члены ряда Тейлора имеют вид $\overline{r}^j \sin j\overline{\Theta}$ или $\overline{r}^j \cos j\overline{\Theta}$, а из асимптотики функции $u_1(\overline{x}_1) = \overline{u}(\overline{x}_1, 0)$ при $\overline{x}_1 \to 0$ следует, что ряд Тейлора для функции $\overline{u}(\overline{x})$ имеет вид

$$\overline{u}(\overline{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \overline{r}^j \sin j\overline{\Theta} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j \overline{r}^j \cos j\overline{\Theta}, \quad \overline{r} \to 0,$$

где d_j — некоторые постоянные. После обратного преобразования полукруга радиуса $R = \sqrt{\delta}$ на область Ω_δ мы получим требуемый вид асимптотики функции $u(x)$ при $r \to 0$.

2. Предположим, что $h_\pm(x_1) = \Big(\sum\limits_{j=-1}^{\infty} c_j z^j\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}}$, $x_1 \to +0$ и $h_\pm(x_1) = \Big(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j \tilde{z}^j\Big)_{\tilde{z}=\pm\sqrt{1-x_1}}$, $x_1 \to 1 - 0$.

Представим $h_\pm(x_1) = c_{-1}\,(\pm 1/\sqrt{x_1})\,\chi(x_1) + (h_\pm(x_1) - c_{-1}\,(\pm 1/\sqrt{x_1})\,\chi(x_1)) = s_\pm(x_1) + p_\pm(x_1)$, где $s_\pm(x_1) = c_{-1}(\pm 1/\sqrt{x_1})\chi(x_1)$, $p_\pm(x_1) = h_\pm(x_1) - c_{-1}(\pm 1/\sqrt{x_1})\chi(x_1)$, $\chi(x_1)$ — срезающая функция, которая тождественно равна единице при $x_1 \leqslant \delta - \hat{\delta}$ и тождественно равна нулю при $x_1 \geqslant \delta + \hat{\delta}$, $0 < \delta < 1$, $0 < \hat{\delta} \ll \delta$. Функцию $u(x)$ будем искать в виде суммы $u_1(x) + u_2(x)$, где функция u_1 является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_1(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = s'_\pm(x_1) \text{ при } 0 < x_1 < 1, \\ u_1(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \end{cases}$$

а функция u_2 является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_2(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = p'_\pm(x_1) \text{ при } 0 < x_1 < 1, \\ u_2(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty. \end{cases}$$

В случае с u_2 имеет место предыдущий случай. Рассмотрим функцию u_1. В классе ограниченных бесконечно дифференцируемых функций эта задача неразрешима, так как $\displaystyle\int_{\partial\sigma} \frac{\partial u_1}{\partial n} dS$ не только не равен нулю, но и вообще расходится. Однако эта задача разрешима в классе функций с особенностями в точке O. Будем искать u_1 также в виде суммы

$$u_1(x) = c_{-1}\chi_2(r) r^{-1/2} \sin(\Theta/2) + c_{-1}\tilde{u}_1(x),$$

где $\tilde{u}_1(x)$ — гладкая функция, а $\chi_2(r)$ — гладкая функция, меняющая свое значение с 1 до 0 в $\hat{\delta}$-окрестности окружности $r = \delta_2$. Таким образом, $\tilde{u}_1(x)$ — это решение задачи

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_1(x) = -\Delta r^{-1/2}\sin\dfrac{\Theta}{2}\cdot\chi_2(r) \text{ при } x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_2}(x_1,\pm 0) = \Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}\chi(x_1)\Big)'_{x_1} - \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big(r^{-1/2}\sin\dfrac{\Theta}{2}\cdot\chi_2(r)\Big)\Big|_{x_2=\pm 0} \text{ при } 0<x_1<1. \end{cases}$$

Докажем, что можно выбрать такое δ_2, чтобы существовало решение $\tilde{u}$, которое стремится к нулю на бесконечности. В этом случае $u_1(x)$ и вся функция $u(x) = c_{-1}u_1(x) + u_2(x)$ будет стремиться к нулю на бесконечности. Для этого вначале выпишем формулировку условия разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона, которая вытекает из первой формулы Грина (см., например, [10, гл. 6, § 6.1]).

Утверждение. *Пусть Ω — двумерная ограниченная область с достаточно гладкой границей, функция $u(x)$ — решение в классе $C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\Omega)\cap C(\overline{\mathbb{R}^2\backslash\Omega})$ следующей внешней второй краевой задачи*

$$\begin{cases} \Delta u = -f \ \text{ в } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi(x) \ \text{ при } x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Тогда существует стремящееся к нулю на бесконечности решение этой задачи, если

$$\int\limits_{\partial\Omega}\psi(x)dS + \iint\limits_{\mathrm{R}^2\backslash\Omega} f(x)dx = 0.$$

Воспользуемся утверждением. Для этого вычислим два интеграла

$$\int\limits_{\partial\sigma}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial n}dS \approx 2\int\limits_{\delta_2}^{\delta}\Big(-\frac{1}{2}x_1^{-3/2}\Big)dx_1 = 2x_1^{-1/2}\Big|_{\delta_2}^{\delta} = 2(\delta^{-1/2}-\delta_2^{-1/2}),$$

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^2\backslash\sigma}\Delta\Big(r^{-1/2}\chi_2(r)\sin\frac{\Theta}{2}\Big)dx \approx -2\delta_2^{-3/2}.$$

Постоянную δ_2 можно примерно найти из уравнения

$$2(\delta^{-1/2}-\delta_2^{-1/2}) \approx 2\delta_2^{-3/2}.$$

Очевидно, что решение такого уравнения всегда существует, точное решение неважно.

Аналогично можно доказать, что существует функция $u_3(x) = r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\Theta/2 + \tilde{u}_3(x)$, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_3 = 0 \text{ при } x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial n}\Big|_{\partial\sigma} = 0 \text{ при } 0<x_1<1, \\ u_3 = o(1) \text{ при } r\to\infty, \end{cases}$$

где $\chi_3(r)$ — срезающая функция, аналогичная $\chi_2(r)$, меняющая свое значение с 1 до 0 в окрестности $r=\delta_3$, а $\tilde{u}_3(x)$ — это гладкая функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_3 = -\Delta\Big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\dfrac{\Theta}{2}\Big) \text{ при } x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_3}{\partial n}\Big|_{\partial\sigma} = -\dfrac{\partial}{\partial n}\Big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\dfrac{\Theta}{2}\Big) \text{ при } 0<x_1<1, \\ \tilde{u}_3 = o(1) \text{ при } r\to\infty. \end{cases}$$

Действительно, заметим, что при $x_2 = \pm 0$ функции $-\dfrac{\partial}{\partial n}\big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos(\Theta/2)\big)$ (при переходе к пределу с разных сторон) являются гладкими функциями от одной переменной x_1, финитными на отрезке $0 < x_1 < 1$. Также заметим, что поскольку функция $\tilde f(x) = r^{-1/2}\chi_3(r)\cos(\Theta/2)$ является нечетной относительно переменной x_2 (при этом надо учитывать, что угол Θ меняется от 0 до 2π), то $\displaystyle\int_{\partial\sigma} \partial\tilde f/\partial n(x)dS = 0$.

Вычислим второй интеграл, чтобы воспользоваться утверждением (см. выше).

$$\iint\limits_{\Omega} -\Delta\Big(r^{-1/2}\chi_3(r)\cos\frac{\Theta}{2}\Big)dx = \int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{\Theta}{2}d\Theta\cdot\int\limits_{\delta_3-\hat\delta}^{\delta_3+\hat\delta}F(r)dr = 0.$$

Итак, мы доказали, что такая функция $u_3(x)$ существует. В качестве $u(x)$ теперь можно взять следующую сумму $u(x) = c_{-1}u_1(x) + u_2(x, c_{-1}) + d_{-1}u_3(x)$, где d_{-1} — произвольная постоянная. Заметим, что $u(x) = c_{-1}r^{-1/2}\sin(\Theta/2) + d_{-1}r^{-1/2}\cos(\Theta/2) + \sum_{j=0}^{\infty} r^{j/2}\big(c_j\sin(j\Theta/2) + d_j\cos(j\Theta/2)\big)$ при $r\to 0$, где все c_j являются коэффициентами из разложений функций $h_\pm(x_1)$, поскольку в разложениях функций u_2 и u_3 при $r \to 0$ все коэффициенты перед синусами нулевые, так как они являются решениями краевых задач с заданной нулевой нормальной производной на $\partial\sigma$ в окрестности точки O.

Аналогичные действия можно проделать в случае других особенностей краевых условий. $\square$

Итак, согласно теореме 1 и условию (2.7)

$$u_1(x) = d_{0,1} + \frac{g_2}{2}r^{1/2}\sin\frac{\Theta}{2} + c_{1,1}r^{1/2}\cos\frac{\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} r^{j/2}\Big(d_{j,1}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_{j,1}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big), \quad r\to 0. \quad (2.9)$$

Граничное условие для функции $u_2(x)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \Big(g_\pm\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{g_\pm^2}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1\partial x_2}\Big)'_{x_1} = \Big(g_\pm\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big)'_{x_1}. \quad (2.10)$$

Согласно теореме 1 из этого вида граничного условия также следует разрешимость задачи на $u_2(x)$ в классе функций $C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\overline{\Omega}\backslash S)$.

Если учесть асимптотические разложения (1.1) и (2.9), то можно найти

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = \Big(\pm\frac{c_{1,2}}{2}g_2 x_1^{1/2} + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_{j,2}z^j\Big)_{z=\pm\sqrt{x_1}}\Big), \quad x_1 \to 0.$$

В соответствии с теоремой 1 можно построить гармоническую и ограниченную в Ω функцию $u_2(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash C)$, которая удовлетворяет условию (2.10) и имеет следующее разложение при $r \to 0$:

$$u_2(x) = d_{0,2} + \frac{c_{1,2}}{2}g_2 r^{1/2}\sin\frac{\Theta}{2} + d_{1,2}r^{1/2}\cos\frac{\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} r^{j/2}\Big(d_{j,2}\cos\frac{j\Theta}{2} + c_{j,2}\sin\frac{j\Theta}{2}\Big).$$

Однако впоследствии окажется, что в этом разложении не хватает слагаемого $d_{-1,2}r^{-1/2}\times \cos(\Theta/2)$, а сама функция $u_2(x)$ может иметь особенности в точках O и O'.

Граничная функция для коэффициента $u_3(x)$ уже имеет неинтегрируемые особенности на концах отрезка $\overline{\sigma}$. Действительно, согласно условию (2.5)

$$u_3(x_1, \pm 0) = \Big(g_\pm(x_1)\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) + \frac{g_\pm^2(x_1)}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial x_1}(x_1, \pm 0)$$

$$+ \frac{g_\pm^3(r_2)}{3!}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_2^2\partial x_1}(x_1, \pm 0)\Big)'_{x_1} = \Big(\sum_{j=-1}^{\infty} c_{j,3}z^j\Big)'_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \to +0.$$

Следовательно, функция $u_3(x)$ не ограничена около точки O; при приближении к точке O она растет, по крайней мере, как $r^{-1/2}$ (если $g_2 \neq 0$). Однако после согласования асимптотических разложений окажется, что она может расти и как r^{-1}. В классе таких функций в соответствии с теоремой 1 существует решение $u_3(x)$, определенное с точностью до произвольных постоянных c_{-1}, c_{-2}.

Теорема 2. *Существуют функции $u_k(x)$, которые удовлетворяют соотношениям* (2.2), (2.4), (2.5) *и имеют асимтотические разложения*

$$u_k(x) = \sum_{j=-k+1}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos\frac{j\Theta}{2} + c_j r^{j/2} \sin\frac{j\Theta}{2}, \quad r \to 0. \tag{2.11}$$

При определении каждой функции $u_k(x)$ для $k \geqslant 2$ имеются произвольные постоянные $d_{-1,k}$, $d_{-2,k}$, $\dots$, $d_{-k+1,k}$, $d'_{-1,k}$, $d'_{-2,k}$, $\dots$, $d'_{-k+1,k}$.

Доказательство проведем по индукции, опираясь на теорему 1. При $k \leqslant 3$ это утверждение уже проверено. Если утверждение верно для всех $p < k$, то при построении функции $u_k(x)$ остается лишь убедиться в том, что асимптотическое разложение граничной функции (2.5) начинается с члена $r^{(-k+1)/2}$. Действительно, главный член асимптотики в сомножителе $[g_\pm(x_1)]^j$ равен $x_1^{j/2}$, а в сомножителе $\dfrac{\partial^j u_{k+1-j}}{\partial x_2^{j-1} \partial x_1}(x_1, \pm 0)$ главный член по предположению индукции и в силу асимптотического разложения (2.11) равен $c x_1^{(1-k-j)/2}$. Отсюда и из теоремы 1 следует существование искомой функции $u_k(x)$. □

3. Внутреннее разложение

Вблизи концов отрезка σ будем использовать внутренние асимптотические разложения. Будем рассматривать подробно только окрестность точки О. Вблизи этой точки уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ имеет вид $x_2 = \varepsilon g_\pm(x_1) = \varepsilon(\pm\sqrt{x_1} + O(x_1))$. Также, как и в [1, гл. III, § 2], в качестве внутренних переменных возьмем $\xi = \varepsilon^{-2} x_1$ и $\eta = \varepsilon^{-2} x_2$. Посредством D будем обозначать область $\{(\xi, \eta) \colon \xi < \eta^2, \eta \in \mathbb{R}^2\}$, через n_D — внутреннюю нормаль к области D, через n — нормаль к кривой $\partial\sigma_\varepsilon$. В переменных ξ, η уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ выглядит следующим образом:

$$\eta = \pm\sqrt{\xi} + \varepsilon\Phi_\pm(\xi, \varepsilon), \tag{3.1}$$

где

$$\Phi_\pm(\xi, \varepsilon) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2} \varepsilon^j z^{j+2}\Big)_{z=\pm\sqrt{\xi}}, \quad \varepsilon\sqrt{\xi} \to 0.$$

Граничное условие (1.3) для функции $v(\xi, \eta, \varepsilon) \equiv u(x_1, x_2, \varepsilon)$ переходит в равенство

$$\frac{\partial}{\partial n} v(\xi, \pm\sqrt{\xi} + \varepsilon\Phi_\pm(\xi, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{3.2}$$

Внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi, \eta). \tag{3.3}$$

(Здесь $v_0(\xi, \eta) \equiv 0$, так как $u_0(0, 0) = 0$.) Из уравнения (1.2) следует, что

$$\Delta_{\xi,\eta} v_i = 0. \tag{3.4}$$

Подставляя ряд (3.3) в граничное условие (3.2), формально приходим к граничным условиям для $v_i(\xi,\eta)$:

$$\sqrt{1+\frac{1}{4\xi}}\frac{\partial v_1}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) = \mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\frac{\partial v_1}{\partial \xi}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) + \frac{\partial v_1}{\partial \eta}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) = 0, \tag{3.5}$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{4\xi}}\frac{\partial v_i}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) = \Big(\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{i-l}\Big(\frac{1}{z}c_{q,l,i}\frac{\partial^{q+1}v_l(\xi,z)}{\partial\xi\eta^q} + \tilde{c}_{q,l,i}\frac{\partial^{q+1}v_l(\xi,z)}{\partial\eta^{q+1}}\Big)z^{q+i-l}\Big)_{z=\pm\sqrt{\xi}}, \quad i\geqslant 2. \tag{3.6}$$

Здесь $c_{q,l,i}$ и $\tilde{c}_{q,l,i}$ — некоторые постоянные, которые выражаются через g_j. Эти условия можно представить и в другом виде.

В дальнейших преобразованиях для уменьшения громоздкости временно будем игнорировать зависимость функций $\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)$ от ε. Тогда формально можно получить разложение

$$v(\xi,\eta)\Big|_{\partial\sigma_\varepsilon} = v(\xi,\pm\sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^k v}{\partial\eta^k}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon). \tag{3.7}$$

По условию $\partial v/\partial n\big|_{\partial\sigma_\varepsilon} = 0$. Формально разложим это условие по ε. Обозначим $G_\pm(\xi,\varepsilon) = \pm\sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)$.

Вычислим

$$\frac{\partial v}{\partial n} = (\nabla v, n) = \frac{1}{\sqrt{1+G_\pm'^2}}\Big(\Big(\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}} - \varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\Big)\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\Big).$$

Следовательно,

$$\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta} = \varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial\xi} \tag{3.8}$$

или $\partial v/\partial n_D = \varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)/\sqrt{1+1/(4\xi)}\cdot\partial v/\partial\xi$.

В условии (3.8) разложим $\partial v/\partial\xi$ и $\partial v/\partial\eta$ также, как и в (3.7):

$$\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial\xi\partial\eta^k}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial\eta^{k+1}}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon)$$

$$= \varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+1}v}{\partial\xi\partial\eta^k}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^k(\xi,\varepsilon).$$

Подставим в последнем равенстве вместо функции $v(\xi,\eta)$ ряд V. Получим

$$\mp\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j+1}v_{k-j}}{\partial\xi\partial\eta^j}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^j(\xi,\varepsilon) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j+1}v_{k-j}}{\partial\eta^{j+1}}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^j(\xi,\varepsilon)$$

$$= \varepsilon\Phi_\pm'(\xi,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j+1}v_{k-j}}{\partial\xi\partial\eta^j}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm^j(\xi,\varepsilon).$$

Теперь приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε.

ε^0: $\mp\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}\dfrac{\partial v_0}{\partial\xi}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) + \dfrac{\partial v_0}{\partial\eta}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) = 0$ или $\pm\dfrac{\partial v_0}{\partial n_D}\Big|_{\partial D} = 0$,

ε^1 : $\mp\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}\Big(\dfrac{\partial v_1}{\partial\xi} + \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial\xi\partial\eta}\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)\Big) + \dfrac{\partial v_1}{\partial\eta} + \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial\eta^2}\Phi_\pm = \Phi_\pm'\dfrac{\partial v_0}{\partial\xi}$

или $\dfrac{\partial v_1}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4\xi}}}\dfrac{d}{d\xi}\Big(\dfrac{\partial v_0}{\partial\xi}(\xi,\pm\sqrt{\xi})\Phi_\pm(\xi,\varepsilon)\Big)$,

$\dots$

$$\varepsilon^k : \frac{\partial v_k}{\partial n_D}(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4\xi}}}\frac{d}{d\xi}\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j v_{k-j}}{\partial\xi\partial\eta^{j-1}}(\xi, \pm\sqrt{\xi})\Phi_{\pm}^{j}(\xi, \varepsilon)\Big),$$

$\dots$

Затем необходимо разложить $\Phi_{\pm}(\xi, \varepsilon)$ в ряд по ε и переместить полученные слагаемые в нужные условия. Тем не менее для любого k будем иметь условие вида

$$\frac{\partial v_k}{\partial n_D}(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4\xi}}}\frac{d}{d\xi}\Psi_{k,\pm}(\xi),$$

где $\Psi_{k,\pm}(\xi)$ — некоторые функции от ξ, выражающиеся через функции v_0, ..., v_{k-1} и $\Phi_{\pm}$.

Отметим еще одно важное свойство v_k и пар функций $\Psi_{k,\pm}(\xi)$: все они разлагаются в ряды вида $v_k(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = \sum\limits_j c_{kj}(\pm\sqrt{\xi})^j$ при $\xi \to \infty$. Такого же вида разложения имеют и производные $\partial v_k/\partial\xi$, $\partial v_k/\partial\eta$ и $\partial v_k/\partial n_D$. Это легко доказать по индукции, используя граничные условия для v_k и свойство этих разложений сохранять свой вид при перемножении и дифференцировании.

Приближенно заменяя границу (3.1) на параболу $\eta = \pm\sqrt{\xi}$, будем искать функции $v_i(\xi, \eta)$ при $\xi < \eta^2$. Аналогично [1, гл. III, §2] при нахождении $v_i(\xi, \eta)$ будем опираться на уже построенные функции $u_k(x)$ и на условие согласования рядов U и V.

Лемма 2. *Пусть функция* $F(\xi, \eta) \in C^\infty(\overline{D})$ *и*

$$F(\xi, \eta) = O((\xi^2 + \eta^2)^{-N}) \text{ при } \xi^2 + \eta^2 \to \infty, \quad N > 0, \tag{3.9}$$

$H(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R})$ *и* $H(\eta) = O(\eta^{-2N})$, *а* $v(\xi, \eta) \in C^\infty(\overline{D})$ *— стремящееся к нулю (или* $v(\xi, \eta) \sim C\ln\rho + o(1), \rho \to \infty$*) решение следующей краевой задачи*:

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\eta^2, \eta) = H(\eta) \text{ при } \eta \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

$$\Delta_{\xi,\eta} v = F(\xi, \eta) \text{ при } (\xi, \eta) \in D. \tag{3.11}$$

Тогда равномерно в области $\overline{D}$

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\Big(\iint\limits_D F(\xi, \eta)d\xi d\eta + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\eta)\sqrt{1+4\eta^2}d\eta\Big)\cdot\ln\rho \\ + \sum_{j=1}^{2N_1}\rho^{-j/2}\Big(c_j\sin\frac{j\Theta}{2} + d_j\cos\frac{j\Theta}{2}\Big) + O(\rho^{-N_1}), \quad \rho \to \infty, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где ρ, Θ *— полярные координаты:* $\xi = \rho\cos\Theta$, $\eta = \rho\sin\Theta$, $N_1 \to \infty$ *при* $N \to \infty$, *и равенство* (3.12) *можно почленно дифференцировать достаточно большое число раз.*

Доказательство. Отобразим область D на полуплоскость $\eta > 0$ с помощью замены независимых переменных $\xi = s^2 - t^2 - t$, $\eta = s + 2ts$.

Обозначим $v(s^2 - t^2 - t, s + 2ts)$ через $w(s, t)$. Уравнение (3.11) переходит при такой замене в уравнение $\Delta_{s,t} w = [4s^2 + (2t+1)^2]\cdot F(s^2 - t^2 - t, s + 2ts)$, а краевое условие (3.10) — в условие $w_t(s, 0) = H(s)\sqrt{1+4s^2}$.

Обозначая правую часть этого уравнения через $f(s, t)$, $v(s^2 - t^2 - t, s + 2ts)$ — через $w(s, t)$, а функцию $H(s)\sqrt{1+4s^2}$ — через $h(s)$, заключаем, что задача (3.10), (3.11) эквивалентна задаче

$$\Delta_{s,t} w = f(s, t) \text{ при } t \geqslant 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}w(s, 0) = h(s). \tag{3.13}$$

При этом в силу (3.9) $f(s,t) = O((s^2+t^2)^{-N_2})$, $N_2 \to \infty$, при $N \to \infty$.

Решение задачи (3.13) выписывается в явном виде

$$w(s,t) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(s,|t|)\ln\frac{1}{|(s,t)-y|}dy - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\ln\frac{1}{(s-\sigma)^2+t^2}d\sigma$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\tau)\ln\Big(\big((s-\sigma)^2+(t-\tau)^2\big)\big((s-\sigma)^2+(t+\tau)^2\big)\Big)d\sigma d\tau$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\ln((s-\sigma)^2+t^2)d\sigma.$$

Отсюда аналогично [1, с. 111, лемма 2.2] приходим к равенству

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\rho\Big(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\tau)d\sigma d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)d\sigma\Big) + \sum_{j=1}^{2N_1}\rho^{-j/2}\Phi_j(\Theta) + O(\rho^{-N_1}), \quad \rho\to\infty.$$

Так же, как и в [1, с. 111, лемма 2.2], это равенство можно почленно дифференцировать, а функции $\Phi_j(\Theta)$ имеют вид, который фигурирует в равенстве (3.12). Заметим, что поскольку задача Неймана имеет единственное решение в классе растущих на бесконечности, как логарифм, функций при любых непрерывных граничных условиях, то

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\tau)d\sigma d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)d\sigma = \iint\limits_D F(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\eta)\sqrt{1+4\eta^2}d\eta. \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть ряд* $\tilde v = \sum\limits_{j=-k}^{\infty}\rho^{-j/2}\Big(c_j\sin\frac{j\Theta}{2} + d_j\cos\sin\frac{j\Theta}{2}\Big)$, *где* k — *некоторое натуральное число, является ф. а. р. краевой задачи*

$$\Delta v = 0 \ \text{в области } D, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi}) = \frac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{4\xi+1}}\frac{d}{d\xi}\Psi_\pm(\xi), \quad \xi\geqslant 0, \tag{3.15}$$

при $\rho\to\infty$, *где* $\Psi_\pm(\xi)\in C^\infty(\{\xi\geqslant 0\})$ *и разлагаются в ряды вида* $\Psi_\pm(\xi) \overset{as.}{=} \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j(\pm\sqrt{\xi})^j$, $\rho\to\infty$. *Предположим также, что равенства* (3.14) *и* (3.15) *допускают дифференцирование любого порядка в том смысле, что правые части этих равенств разлагаются в асимптотические ряды, полученные соответствующим почленным дифференцированием ряда* $\tilde v$. *Тогда существует функция* $v(\xi,\eta)\in C^\infty(\overline{D})$, *которая удовлетворяет соотношениям* (3.14), (3.15) *и такая, что*

$$v(\xi,\eta) = \tilde v + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{-j/2}\Big(C_j\sin\frac{j\Theta}{2} + D_j\cos\frac{j\Theta}{2}\Big), \quad \rho\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что на самом деле условие (3.15) гладкое; это видно, если записать его с помощью координаты η:

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\eta,\eta^2) = \frac{2\eta}{\sqrt{1+4\eta^2}}\frac{d}{d\eta^2}\Psi(\eta^2), \quad \eta\in\mathbb{R}.$$

Из гладкости условия (3.15) следует необходимая гладкость функции $v(\xi,\eta)$.

Будем искать v в виде суммы v_1+v_2, где $v_1=\sum_{j=-k}^{0}\rho^{-j/2}\left(c_j\sin(j\Theta/2)+d_j\cos(j\Theta/2)\right)$, а v_2 является решением задачи

$$\begin{cases}\Delta v_2=0 \text{ в области } D,\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=\dfrac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{4\xi+1}}\dfrac{d}{d\xi}\Psi_{\pm}(\xi)\mp\dfrac{\partial v_1}{\partial n_D}(\xi,\pm\sqrt{\xi})=\dfrac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{4\xi+1}}\dfrac{d}{d\xi}\widetilde{\Psi}_{\pm}(\xi),\quad \xi\geqslant 0.\end{cases}\tag{3.16}$$

Ясно, что ряд $\tilde v_2=\sum_{j=1}^{\infty}\rho^{-j/2}(c_j\sin(j\Theta/2)+d_j\cos(j\Theta/2))$ будет являться ф.а.р. для задачи (3.16). Кроме того, если представить $\partial v_1/\partial n_D(\xi,\pm\sqrt{\xi})=1/\sqrt{1+1/(4\xi)}\ \widetilde{\Psi}'_{1,\pm}(\xi)$, то разложение функций $\widetilde{\Psi}_{1,\pm}(\xi)$ при $\xi\to\infty$ будет иметь тот же вид, что и для функций $\Psi_{\pm}$ в формулировке леммы. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial D}\frac{\partial v_2}{\partial n}\,ds=\int\limits_{+\infty}^{0}\widetilde{\Psi}'_{-}(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{+\infty}\widetilde{\Psi}'_{+}(\xi)d\xi=\widetilde{\Psi}_{+}(+\infty)-\widetilde{\Psi}_{-}(+\infty)=0.$$

Значит, v_2 можно искать среди ограниченных функций, а тогда в ее разложении заведомо не будет логарифмов.

Теперь применим тот же прием, что и в доказательстве [1, с. 113, лемма 2.3]. Пусть $\chi(\rho)\in C^{\infty}[0,\infty)$ — срезающая функция, равная нулю в окрестности нуля и единице при $\rho>1$. Обозначим посредством $v_N(\xi,\eta)$ произведение $\chi(\rho)\cdot B_N\tilde v_2$, где $B_N\tilde v_2$ означает частичную сумму ряда $\tilde v_2$. Из условий задачи (3.16) следует, что $\Delta_{\xi,\eta}v_N=f_N(\xi,\eta)$, $\partial v_N/\partial n_D(\eta^2,\eta)=\Psi(\eta)+h_N(\eta)$, где $f_N(\xi,\eta)=O(\rho^{-N_1})$, $h_N(\eta)=O(|\eta|^{-N_1})$, $N_1\to\infty$ при $N\to\infty$. Соответствующие оценки верны и для производных функций f_N и h_N.

Пусть $w_N(\xi,\eta)$ — решение краевой задачи $\Delta w_N=f_N$ при $(\xi,\eta)\in D$, $\partial w_N/\partial n_D(\eta^2,\eta)=h_N(\eta)$ при $\eta\in\mathbb{R}$, растущее не быстрее логарифма. Такое решение $w_N(\xi,\eta)\in C^{\infty}(\overline{D})$ существует и в силу леммы 2 имеет асимптотическое представление (3.12).

Разность $v_N(\xi,\eta)-w_N(\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям задачи (3.16). В силу единственности ограниченного решения задачи Неймана (с точностью до аддитивной постоянной) функция $v(\xi,\eta)=v_1(\xi,\eta)+v_N(\xi,\eta)-w_N(\xi,\eta)$ не зависит от N при достаточно больших N и является искомой функцией. □

4. Согласование

При построении коэффициентов рядов (2.1) и (3.3) — функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ воспользуемся таблицей согласования этих рядов. В ней второй индекс i берется по номеру раскладываемой функции внутреннего разложения. Надо отметить, что кроме ряда (3.3) необходимо еще построить точно такой же ряд V' с коэффициентами $v'_i(\xi',\eta')$ у конца O'. И одновременно надо следить за выполнением согласования рядов U и V'.

Т а б л и ц а

$U\backslash V$	$\varepsilon v_1(\xi,\eta)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi,\eta)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi,\eta)$	$\varepsilon^4 v_4(\xi,\eta)$	$\dots$
$u_0(x)$	$\varepsilon\rho^{1/2}\Phi_{-1,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\rho\Phi_{-2,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\rho^{3/2}\Phi_{-3,3}(\Theta)$	$\varepsilon^4\rho^2\Phi_{-4,4}(\Theta)$	$\dots$
	$r^{1/2}\Phi_{-1,1}(\Theta)$	$r\Phi_{-2,2}(\Theta)$	$r^{3/2}\Phi_{-3,3}(\Theta)$	$r^2\Phi_{-4,4}(\Theta)$	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon\Phi_{0,1}$	$\varepsilon^2\rho\Phi_{-1,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\rho\Phi_{-2,3}(\Theta)$	$\varepsilon^4\rho^{3/2}\Phi_{-3,4}(\Theta)$	$\dots$
	$\varepsilon\Phi_{0,1}$	$\varepsilon r^{1/2}\Phi_{-1,2}(\Theta)$	$\varepsilon r\Phi_{-2,3}(\Theta)$	$\varepsilon r^{3/2}\Phi_{-3,4}(\Theta)$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon\rho^{-1/2}\Phi_{1,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\Phi_{0,2}$	$\varepsilon^3\rho^{1/2}\Phi_{-1,3}(\Theta)$	$\varepsilon^4\rho\Phi_{-2,4}(\Theta)$	$\dots$
	$\varepsilon^2 r^{-1/2}\Phi_{1,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\Phi_{0,2}$	$\varepsilon^2 r^{1/2}\Phi_{-1,3}(\Theta)$	$\varepsilon^3 r\Phi_{-2,4}(\Theta)$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon\varepsilon\rho^{-1}\Phi_{2,1}(\Theta)$	$\varepsilon^2\rho^{-1/2}\Phi_{1,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\Phi_{0,3}$	$\varepsilon^4\rho^{1/2}\Phi_{-1,4}(\Theta)$	$\dots$
	$\varepsilon^3 r^{-1}\Phi_{2,1}(\Theta)$	$\varepsilon^3 r^{-1/2}\Phi_{1,2}(\Theta)$	$\varepsilon^3\Phi_{0,3}$	$\varepsilon^3 r^{1/2}\Phi_{-1,4}(\Theta)$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Построим в соответствии с теоремой 2 функции u_k. При этом функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ определены однозначно, а для $k \geqslant 2$ при определении каждой функции имеется $2(k-1)$ произвольных постоянных $c_{-1,k}, c_{-2,k}, \ldots, c_{-k+1,k}, c'_{-1,k}, \ldots, c_{-k+1,k}$. Фиксируем пока эти постоянные каким-нибудь образом и выпишем в нижних частях клеток каждой строки в таблице асимптотическое разложение функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $r \to 0$. После перехода к внутренним переменным ξ, η (так что $r = \varepsilon^2\rho$, а полярный угол Θ сохраняет свое значение) в столбцах таблицы появятся ряды $\varepsilon^i V_i$.

Лемма 4. *Ряды V_i являются ф.а.р. краевых задач* (3.4)–(3.6).

Доказательство можно провести аналогично [1, с. 115, лемма 2.4] прямой проверкой граничных условий. □

Далее, опираясь на лемму 3, можно по асимптотическим рядам V_i построить функции $v_i(\xi,\eta)$ — решения задач (3.5), (3.6). Если бы ряды V_i являлись асимптотическими рядами для функций $v_i(\xi,\eta)$ при $\rho \to \infty$, то по построению рядов V_i было бы выполнено условие согласования рядов (2.1) и (3.3). Но, как следует из леммы 3, асимптотический ряд для функции $v_i(\xi,\eta)$, вообще говоря, отличается от ряда V_i на ряд

$$H_i = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j/2}\Big(C_{j,i}\sin\frac{j\Theta}{2} + D_{j,i}\cos\frac{j\Theta}{2}\Big).$$

(Так как этот ряд удовлетворяет однородному граничному условию $\partial H_i/\partial n(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = 0$, то $C_{1,i} = 0$.) Поэтому построение функций $v_i(\xi,\eta)$ надо проводить последовательно.

Сначала построим функцию $v_1(\xi,\eta)$ по ряду V_1. В результате первый столбец в таблице изменится, начиная с члена $\varepsilon^2\rho^{-1/2}\Phi_{1,1}(\Theta)$: функция $\Phi_{1,1}(\Theta)$ изменится на $c_{1,1}\cos(\Theta/2)$. Таким образом, опираясь на теорему 2, окончательно построим функцию $u_2(x)$.

Так как изменение функции $u_2(x)$ влечет за собой изменения в граничных условиях для следующих функций, то все они изменятся. Но их главные члены асимптотики, стоящие в первом столбце таблицы, уже окончательно определены. Ряды V_i при $i \geqslant 2$ также изменятся, но в силу леммы 4 они по-прежнему останутся ф.а.р. задач (3.4)–(3.6). Далее, в соответствии с леммой 3 построим функцию $v_2(\xi,\eta)$ по ряду V_2, стоящему во втором столбце. Теперь этот столбец изменится, начиная с члена $\varepsilon^2\rho^{-1/2}\Phi_{1,2}(\Theta)$. Это дает возможность окончательно определить $u_3(x)$ и так далее.

Таким образом, построены функции $u_k(x)$ — решения задач (2.2)–(2.5) и функции $v_i(\xi,\eta)$ — решения задач (3.4)–(3.6), так что для рядов (2.1) и (3.3) выполнено условие согласования

$$A_{N_1,\xi,\eta}A_{N_2,x}U = A_{N_2,x}A_{N_1,\xi,\eta}V \quad \forall\, N_1,\, N_2,$$

где оператор $A_{\alpha,x}$ — оператор взятия частичной суммы асимптотического ряда, записанного в переменных x [1, с. 21].

Отметим, что функции $v_i(\xi,\eta)$ определены только в области D, т.е., возможно, в более узкой области, чем в области, заданной неравенствами $-\sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_-(\xi,\varepsilon) \leqslant \eta \leqslant \sqrt{\xi}+\varepsilon\Phi_+(\xi,\varepsilon)$. Для разрешения этой проблемы можно, как и в [1, с. 116], считать, что в некоторой фиксированной окрестности нуля $g_+(x_1) \leqslant \sqrt{x_1}$ и $g_-(x_1) \geqslant -\sqrt{x_1}$, так что функции $v_i(\xi,\eta)$ определены всюду в пересечении этой окрестности с Ω_ε. Аналогичные условия будем предполагать выполненными у точки O'.

Обозначим через $S(\delta)$ пересечение области Ω_ε с кругом радиуса δ и с центром в точке O, а через $S'(\delta)$ — пересечение области Ω с кругом того же радиуса и с центром в точке O'. (Множества $S(\delta)$, $S'(\delta)$ зависят и от ε, но эту зависимость не будем включать в их обозначения.)

Пусть $\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi(x) = 0$ вне $S(2\delta)$ и $\chi(x) = 1$ внутри $S(\delta)$, где δ — фиксированное малое положительное число, а $\tilde{\chi}(x)$ — аналогичная срезающая функция в окрестности точки O'. Введем обозначение $T_N(x,\varepsilon) = A_{N,x}U + (A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U)\chi(x) + (A_{N,\xi',\eta'}V' - A_{N,\xi',\eta'}A_{N,x}U)\tilde{\chi}(x) - u(x,\varepsilon)$, где U — ряд (2.1), V — ряд (3.3), V' — аналогичный ряд, построенный около точки O', а ξ', η' — внутренние координаты около этой точки.

Теорема 3. *Для всех достаточно больших N всюду в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial T_N}{\partial n}(x,\varepsilon)\right| \leqslant M\varepsilon^{N/4-3},$$

где постоянная M не зависит от x и ε.

Доказательство. Аналогично [1, с. 117, теорема 2.3] можно оценить $\partial T_N/\partial n\big|_{\partial\sigma_\varepsilon} = O(\varepsilon^{N/4-11/4})$, $\Delta T_N = O(\varepsilon^{N-1})$ в Ω_ε. Затем можно воспользоваться устойчивостью факторизованной задачи Неймана [11] и получить требуемую оценку. $\square$

Следствие. *В области $\Omega_\varepsilon \backslash S(\varepsilon^\gamma)$ ряд* (2.1) *является равномерным асимптотическим разложением решения задачи* (1.2)–(1.4)*. В области $\Omega_\varepsilon \cap S(\varepsilon^\gamma)$ ряд* (3.3) *является равномерным асимптотическим разложением той же задачи, где γ — любое число такое, что* $0 < \gamma < 2$.

Доказательство. Достаточно проверить, что в области $\Omega_\varepsilon \backslash S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U$, а в области $\Omega_\varepsilon \backslash S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U$. $\square$

Автор благодарен Арлену Михайловичу Ильину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
2. **Ильин А.М.** Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай // Мат. сб. 1976. Т. 99(141), № 4. С. 514–537.
3. **Гадыльшин Р.Р.** Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 4. С. 25–48.
4. **Ершов А.А.** Задача об обтекании тонкого диска // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27(242). С. 61–78. (Математика. Механика. Информатика; вып. 14.)
5. **Ершов А.А.** Асимптотическое разложение решения уравнения Лапласа вне тонкого диска // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 92–107.
6. **Федорюк М.В.** Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Тр. семинара С.Л. Соболева. Новосибирск, 1980. № 1. С. 113–131.
7. **Федорюк М.В.** Асимптотика решения задачи Дирихле для оператора Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 167–186.
8. **Ильин А.М.** Асимптотика решения краевой задачи для уравнения Пуассона вне цилиндра и полуцилиндра // Мат. сб. 1982. Т. 118(160), № 4(6). С. 184–202.
9. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
10. **Ильин А.М.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 2005. 192 с.
11. **Олейник О.А.** Об устойчивости задачи Неймана // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, вып. 1 (67). С. 223–225.

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
ассистент
Челябинский государственный университет
e-mail: ale10919@yandex.ru

Поступила 12.01.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.95

СИНГУЛЯРНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ[1]

С. В. Захаров

Рассматривается асимптотическое поведение решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром при старшей производной в окрестностях особых точек решения предельной задачи. Интерес к данной задаче объясняется ее приложениями в исследованиях эволюции широкого класса физических систем и вероятностных процессов, таких как акустические волны в жидкости и газе, гидродинамическая турбулентность и нелинейная диффузия.

Ключевые слова: параболическое уравнение, сингулярные асимптотики, особые точки, ударные волны, градиентная катастрофа, функция сборки Уитни, ренормализация.

S. V. Zakharov. Singular asymptotics in the Cauchy problem for a parabolic equation with a small parameter.

Results of investigation of the asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for a quasi-linear parabolic equation with a small parameter at a higher derivative in neighborhoods of singular points of solutions of the limit problem are presented. Interest to the problem under consideration is explained by its applications in investigations of the evolution of a wide class of physical systems and probabilistic processes such as acoustic waves in fluid and gas, hydrodynamical turbulence and nonlinear diffusion.

Keywords: parabolic equation, singular asymptotics, singular points, shock waves, gradient catastrophe, Whitney fold function, renormalization.

Памяти учителя, академика Арлена Михайловича Ильина

Введение

Простейшей моделью движения сплошной среды, учитывающей эффекты нелинейного распространения и взаимодействие частиц вещества, является уравнение нелинейной диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение было впервые представлено Дж. Бюргерсом как модель гидродинамической турбулентности. Кроме того, оно используется при изучении эволюции широкого класса физических систем и вероятностных процессов, акустических волн в жидкости и газе [1; 2].

В дальнейшем стали исследовать асимптотическое поведение решений задачи Коши для более общего квазилинейного параболического уравнения с малым параметром ε при старшей производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t \geqslant t_0, \tag{0.1}$$

$$u(x,t_0) = q(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

Предполагается, что $0 < \varepsilon \ll 1$, функция φ бесконечно дифференцируема, а ее вторая производная строго положительна. Начальная функция q ограничена и кусочно гладкая.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322) и программы УрО РАН "Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами" (проект "Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов").

Такие модели строятся при изучении движения автомобильного потока, в задаче о паводковых волнах и в некоторых других [3]. Интерес к данной задаче объясняется как наличием физической интерпретации, так и тем, что ее решения позволяют получить вязкостные обобщенные решения предельного уравнения.

С различных точек зрения эту задачу изучали Н.С. Бахвалов, В.Н. Богаевский, И.М. Гельфанд, А.М. Ильин, Т.Н. Нестерова, О.А. Ладыженская, Е.А. Лапшин, О.А. Олейник, А.Я. Повзнер, В.И. Пряжинский, В.А. Солонников, В.Г. Сушко, Н.Н. Уральцева, Е.Хопф и другие математики.

Строго доказано [4], что существует единственное ограниченное бесконечно дифференцируемое по x и t решение $u(x, t, \varepsilon)$.

Опишем кратко результаты исследований асимптотического поведения решений задачи Коши в окрестностях особых точек, которые возникают на разрывах решения предельного (вырожденного) уравнения, где $\varepsilon = 0$.

Интерес к изучению поведения решений вблизи особых точек объясняется, в частности, тем, что подобные сингулярные события сами занимают очень малое время, но определяют все последующее поведение системы на конечных и больших временах.

При исследовании решений таких задач методом согласования возникает необходимость строить не один, а несколько асимптотических рядов в разных подобластях независимых переменных. С целью подчеркнуть данное обстоятельство эти асимптотики названы *сингулярными*, а сами задачи — сингулярно возмущенными. Кроме того, в некоторых задачах, относимых к классу бисингулярных, коэффициенты асимптотических рядов стремятся к бесконечности при приближении к особой точке.

1. Слияние двух ударных волн

В работах А.М. Ильина и Т.Н. Нестеровой [5; 6] задача рассмотрена в случае, когда предельное решение на конечном отрезке времени имеет две гладких линии разрыва $x = s_1(t)$ и $x = s_2(t)$, сливающиеся в момент $t = t^*$ в одну $x = s_3(t)$.

Отметим, что для уравнения Бюргерса этот случай изложен в книге Дж. Уизема [1].

В окрестности точки слияния линий разрывов необходимо вводить внутренние переменные

$$\zeta = \frac{x - x^*}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t - t^*}{\varepsilon},$$

в которых уравнение (0.1) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \zeta} = 0.$$

Асимптотика решения начальной задачи в малой окрестности данной особой точки строится в виде ряда

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(\zeta, \tau),$$

коэффициенты которого находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial \varphi(w_0)}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial [\varphi'(w_0) w_n]}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_n}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} g_n(w_0, \ldots, w_{n-1}), \quad n \geqslant 1.$$

Эти уравнения должны быть дополнены условиями, которые получаются из следующих соображений. Составная асимптотика, приближающая решение при $t < t^*$ переписывается во внутренних переменных

$$U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n S_n(\zeta,\tau)+O\left\{\varepsilon^{n+1}\left[1+|\tau|^{2(n+1)}\left(|\zeta-s_1'(t^*)\tau|^n+|\zeta-s_2'(t^*)\tau|^n\right)\right]\right\},$$

где функции $S_n(\zeta,\tau)$ представляют собой полиномы степени $2n$ по τ. Таким образом, требуется выполнение условий

$$\lim_{\tau\to-\infty}(w_n(\zeta,\tau)-S_n(\zeta,\tau))=0.$$

Доказано, что решения w_n существуют и удовлетворяют оценкам

$$\Big|\frac{\partial^{l+m}}{\partial\zeta^l\partial\tau^m}(w_n(\zeta,\tau)-S_n(\zeta,\tau))\Big|<M\exp\{\mu\tau-\gamma|\zeta|\},\quad \tau<0,$$

$$\Big|\frac{\partial^{l+m}}{\partial\zeta^l\partial\tau^m}(w_n(\zeta,\tau)-R_{3,n}(\zeta-s_3'(t^*)\tau,\tau))\Big|<M\exp\{-\gamma(\tau+|\zeta|)\},\quad \tau>0,$$

где M, μ, γ — положительные постоянные, зависящие от n, l и m; $R_{3,n}(\zeta,\tau)$ — многочлены относительно τ, полученные при переразложении асимптотики

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_{3,k}((x-s_3(t))/\varepsilon,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k R_{3,k}(\zeta-s_3'(t^*)\tau,\tau))$$

в окрестности ударной волны $x=s_3(t)$ после слияния.

2. Градиентная катастрофа

В работе А.М. Ильина [7] был исследован случай, когда в полосе

$$\{(x,t)\colon t_0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}\}$$

предельное ($\varepsilon=0$) решение задачи является функцией, гладкой всюду, кроме одной гладкой линии разрыва

$$\{(x,t)\colon x=s(t),\ t\geqslant t^*>t_0\}.$$

Подробное изложение его результатов можно найти в монографии [3], где асимптотика решения при $\varepsilon\to0$ построена и обоснована с произвольной степенью точности.

При подходящем выборе независимых переменных особая точка $(s(t^*),t^*)$ совпадает с началом координат и в ее окрестности вводятся растянутые переменные[2]

$$\xi=\varepsilon^{-3/4}x,\quad \tau=\varepsilon^{-1/2}t,$$

а разложение решения ищется в виде ряда

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k/4}\sum_{j=0}^{k-1}w_{k,j}(\xi,\tau)\ln^j\varepsilon^{1/4},$$

при подстановке которого в уравнение (0.1) для коэффициентов $w_{k,j}$ получается рекуррентная система

$$\frac{\partial w_{1,0}}{\partial\tau}+2b^2w_{1,0}\frac{\partial w_{1,0}}{\partial\xi}-\frac{\partial^2 w_{1,0}}{\partial\xi^2}=0,$$

[2]Принятые здесь обозначения не совпадают с оригинальными. Это связано с выбором коэффициента при второй производной из соображений единообразия.

$$\frac{\partial w_{k,j}}{\partial \tau} + 2b^2 \frac{(\partial w_{1,0} w_{k,j})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{k,j}}{\partial \xi^2} = E_{k,j}, \quad k \geqslant 2,$$

где $2b^2 = \varphi''(0)$.

Эти уравнения должны быть дополнены условиями

$$w_{k,j}(\xi,\tau) = W_{k,j}(\xi,\tau), \quad \tau \to -\infty,$$

где $W_{k,j}(\xi,\tau)$ — это сумма всех коэффициентов при $\varepsilon^{k/4} \ln^j \varepsilon^{1/4}$, присутствующих в переразложении асимптотики вдали от особенностей (внешнее разложение) во внутренних переменных.

Изучение решений этой системы является центральной и наиболее трудоемкой частью задачи. Доказано, что существуют решения $w_{k,j}(\xi,\tau)$ при $k \geqslant 2$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, бесконечно дифференцируемые при всех ξ и τ.

Отметим особо свойства главного члена разложения, который находится с помощью преобразования Коула — Хопфа

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = -\frac{2}{\varphi''(0)\Lambda(\xi,\tau)} \frac{\partial \Lambda(\xi,\tau)}{\partial \xi},$$

где

$$\Lambda(\xi,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{1}{8}(z^4 - 2z^2\tau + 4z\xi)\Big) dz$$

называется функцией Пирси и является решением уравнения теплопроводности.

Функция $w_{1,0}$ удовлетворяет условию

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = [\varphi''(0)]^{-1} H(\xi,\tau) + \sum_{l=1}^{\infty} h_{1-4l}(\xi,\tau), \quad 3[H(\xi,\tau)]^2 - \tau \to \infty,$$

где $H(\xi,\tau)$ — функция сборки Уитни, $H^3 - \tau H + \xi = 0$, $h_l(\xi,\tau)$ — однородные функции степени l относительно $H(\xi,\tau)$, $\sqrt{-\tau}$ и $\sqrt{3[H(\xi,\tau)]^2 - \tau}$, являющиеся полиномами от $H(\xi,\tau)$, τ и $(3[H(\xi,\tau)]^2 - \tau)^{-1}$.

Кроме того, справедливы следующие формулы:

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = |\tau|^{1/2}\Big(Z_0(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \tau^{-2j} Z_j(\theta)\Big), \quad \tau \to -\infty,$$

где $\theta = \xi|\tau|^{-3/2}$, $Z_j \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений;

$$w_{1,0}(\xi,\tau) = \sqrt{\tau}\Big(-\frac{\operatorname{th} z}{\varphi''(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-2k} q_k(z)\Big), \quad \tau \to +\infty, \quad |\xi|\tau^{1/2} < \tau^\alpha,$$

где $z = \xi\sqrt{\tau}/2$, $|q_k(z)| \leqslant M_k(1+|z|^k)$, $q_k \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Переход слабого разрыва в сильный

В работе В.Г. Сушко [8] задача (0.1)–(0.2) исследована в случае, когда начальная функция $u(x,0,\varepsilon)$ является гладкой всюду, кроме одной точки, в которой она непрерывна, а разрыв имеет первая производная. Тогда в некоторой полосе $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ предельное решение $u(x,t,0)$ будет непрерывным, но при этом оно будет иметь разрыв производной u_x, т.е. *слабый разрыв*. В работах [9; 10] было исследовано поведение решения $u(x,t,\varepsilon)$ с начальной функцией

$$-(x + ax^2)\,\Theta(-x)\,(1 + q_0(x))$$

вблизи точки перехода слабого разрыва в сильный.

Предполагается, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi''(u) > 0$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 1$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$, $q_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $q_0(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля. Через $\Theta(x)$ обозначается функция Хевисайда.

В окрестности начала координат $(x = 0,\ t = 0)$ вводятся растянутые переменные

$$\xi = \varepsilon^{-2/3}x, \quad \tau = \varepsilon^{-1/3}t.$$

Асимптотика решения задачи построена в виде ряда

$$W = \sum_{p=2}^{\infty}\varepsilon^{p/6}\sum_{s=0}^{[p/2]-1}\ln^s\varepsilon\, w_{p,s}(\xi,\tau).$$

Коэффициенты $w_{p,s}(\xi,\tau)$ — это решения рекуррентной системы уравнений

$$\frac{\partial w_{2,0}}{\partial\tau} + w_{2,0}\frac{\partial w_{2,0}}{\partial\xi} - \frac{\partial^2 w_{2,0}}{\partial\xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{3,0}}{\partial\tau} + \frac{\partial\left(w_{2,0}w_{3,0}\right)}{\partial\xi} - \frac{\partial^2 w_{3,0}}{\partial\xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{p,s}}{\partial\tau} + \frac{\partial\left(w_{2,0}w_{p,s}\right)}{\partial\xi} - \frac{\partial^2 w_{p,s}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial E_{p,s}}{\partial\xi},$$

где

$$E_{p,s} = -\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{p-1}\sum_{l=0}^{s} w_{m,l}w_{p+2-m,s-l} - \sum_{q=3}^{[p/2]-s+1}\frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!}\sum_{\substack{p_1+\dots+p_q=p+2\\ s_1+\dots+s_q=s}}\prod_{j=1}^{q} w_{p_j,s_j}$$

(считается, что при $s = [p/2]-1$ сумма по q равна нулю), с условиями

$$w_{p,s} = \sum_{l=s}^{[p/2]-1}\frac{l!}{s!(l-s)!3^s}\ln^{l-s}|\tau|\sum_{k=\max\{1,2l\}}^{\infty}|\tau|^{(p-3k)/2}R_{k,l,p-2l-2}(\theta)$$

при $\tau \to -\infty$ в области

$$X^0 = \{(\xi,\tau)\colon |\xi| < |\tau|^{1-\gamma},\ \tau < 0\} \quad (0 < \gamma < 1/2),$$

функции $R_{k,l,p-2l-2}(\theta)$ находятся из условия согласования ряда W с разложением в пограничном слое в окрестности линии слабого разрыва. Здесь используется обозначение для автомодельной переменной

$$\theta = \frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}}.$$

Главный член асимптотики имеет вид $\varepsilon^{1/3}w_{2,0}(\xi,\tau)$. Функция $w_{2,0}$ определяется выражениями

$$w_{2,0}(\xi,\tau) = -\frac{2}{\Phi(\xi,\tau)}\frac{\partial\Phi(\xi,\tau)}{\partial\xi},$$

$$\Phi(\xi,\tau) = \int_0^\infty \exp\Big(-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\Big)ds, \quad b = a - \varphi'''(0)/2 > 0.$$

4. Особенность, порожденная большим начальным градиентом

Еще один тип особой точки решения возникает в случае задачи с двумя малыми параметрами [11], когда начальное условие имеет вид

$$u(x,0,\varepsilon,\rho)=\nu(x\rho^{-1}),\quad x\in\mathbb{R},\quad \rho>0,$$

где функция ν бесконечно дифференцируема и ограничена, а ρ — второй малый параметр.

Здесь рассматривается главное асимптотическое приближение, полученное классическим методом согласования, асимптотика полученная методом ренормализации, а также представлен новый, ранее не опубликованный, результат.

В работе [12] доказано, что в рассматриваемом случае при выполнении условий

$$\nu(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu_n^{\pm}}{\sigma^n},\quad \sigma\to\pm\infty,\quad (\nu_0^->\nu_0^+)$$

для решения задачи (0.1)–(0.2) при $\varepsilon\to 0$ и $\mu=\rho/\varepsilon\to 0$ в полосе

$$\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T\}$$

справедлива асимптотическая формула

$$u(x,t,\varepsilon,\rho)=h_0\Big(\frac{x}{\rho},\frac{\varepsilon t}{\rho^2}\Big)-R_{0,0,0}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\Big)+\Gamma\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}\Big)+O\big(\mu^{1/2}\ln\mu\big),$$

где

$$h_0(\sigma,\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(s)\exp\Big[-\frac{(\sigma-s)^2}{4\omega}\Big]ds,$$

$$R_{0,0,0}(z)=\nu_0^-\operatorname{erfc}(z)+\nu_0^+\operatorname{erfc}(-z),$$

$$\operatorname{erfc}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z}^{+\infty}\exp(-y^2)\,dy,\quad z=\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}},$$

функция Γ — решение уравнения во внутренних переменных ($\eta=x/\varepsilon$, $\theta=t/\varepsilon$)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi(\Gamma)}{\partial\eta}-\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\eta^2}=0$$

с начальным условием

$$\Gamma(\eta,0)=\begin{cases}\nu_0^-, & \eta<0,\\ \nu_0^+, & \eta>0.\end{cases}$$

Кроме того, методом ренормализации получена асимптотическая формула

$$u(x,t,\varepsilon,\rho)=\frac{1}{\nu_0^+-\nu_0^-}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma\Big(\frac{x-\rho s}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}\Big)\nu'(s)\,ds+O\big(\mu^{1/4}\big).$$

Эти результаты дают асимптотику только в главном приближении. Для построения полного ряда вблизи точки $x=0$, $t=0$, асимптотически удовлетворяющего начальному условию, естественно “растянуть” переменную x на величину ρ^{-1}. Чтобы уравнение (0.1) сохранило эволюционный характер, производная по t должна быть того же порядка, что и правая часть, то есть порядка $\varepsilon\rho^{-2}$. Исходя из этих соображений, сделаем замену переменных

$$x=\rho\sigma,\quad t=\frac{\rho^2}{\varepsilon}\omega$$

и внутреннее разложение ищем в виде ряда по степеням μ с коэффициентами, зависящими от σ и ω.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geqslant 0$$

с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \nu(x\rho^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0,$$

в области

$$\Omega_1 = \big\{(x,t)\colon t > 0,\ x^2 + \varepsilon t < \rho^{\delta_1}\varepsilon^{2-\delta_1},\ \delta_1 > 0\big\}$$

имеет асимптотическое решение

$$u \sim H(\sigma, \omega, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n h_n(\sigma, \omega), \quad \mu = \frac{\rho}{\varepsilon} \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При подстановке ряда $H(\sigma, \omega, \mu)$ в уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h}{\partial \sigma^2} = -\mu \frac{\partial \varphi(h)}{\partial \sigma},$$

для $h(\sigma, \omega) \equiv u(\rho\sigma, \rho^2\omega/\varepsilon)$, получаем рекуррентную цепочку начальных задач

$$\frac{\partial h_0}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial \sigma^2} = 0, \quad h_0(\sigma, 0) = \nu(\sigma),$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial \varphi(h_0)}{\partial \sigma}, \quad h_1(\sigma, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_n}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial E_n}{\partial \sigma}, \quad h_n(\sigma, 0) = 0,$$

где

$$E_n = \sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(h_0)}{q!} \sum_{n_1+\ldots+n_q=n-1} \prod_{p=1}^{q} h_{n_p}, \quad n \geqslant 2.$$

Откуда все коэффициенты $h_n(\sigma, \omega)$ определяются единственным образом:

$$h_0(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu(s) \exp\Big[-\frac{(\sigma - s)^2}{4\omega}\Big] ds,$$

$$h_n(\sigma, \omega) = -\int\limits_0^{\omega} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega - v)}} \exp\Big[-\frac{(\sigma - s)^2}{4(\omega - v)}\Big] \frac{\partial E_n}{\partial s} ds dv.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
2. **Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.** Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
3. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
4. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
5. **Ильин А.М., Нестерова Т.Н.** Асимптотика решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 1. С. 11–13.
6. **Нестерова Т.Н.** Об асимптотике решения уравнения Бюргерса в окрестности слияния двух линий разрыва // Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1980. С. 66–86.
7. **Ильин А.М.** Задача Коши для одного квазилинейного параболического уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 530–534.
8. **Сушко В.Г.** Об асимптотических разложениях решений одного параболического уравнения с малым параметром // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С. 1794–1798.
9. **Захаров С.В., Ильин А.М.** От слабого разрыва к градиентной катастрофе // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 3–18.
10. **Захаров С.В.** Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 6. С. 47–62.
11. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с двумя малыми параметрами // Докл. Акад. Наук. 2008. Т. 422, № 6. С. 733–734.
12. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 699–706.

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила 16.01.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП В ГРУППЕ $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$[1]

В. И. Зенков

Показано, что в конечной группе G с цоколем, изоморфным $L_n(2)$, примарные подгруппы A и B такие, что A нетривиально пересекается с любой сопряженной с B под действием G, существуют лишь тогда, когда группа G изоморфна группе $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, при этом A и B — 2-подгруппы. Приведено описание всех упорядоченных пар (A, B) таких подгрупп.

Ключевые слова: почти простая группа, пересечение примарных подгрупп.

V. I. Zenkov. On intersections of primary subgroups in the group $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$.

It is proved that, in a finite group G whose socle is isomorphic $L_n(2)$, there exist primary subgroups A and B such that the intersection of A and any subgroup conjugate to B under the action of G is nontrivial only if G is isomorphic to the group $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$; in this case, A and B are 2-subgroups. All ordered pairs (A, B) of such subgroups are described.

Keywords: almost simple group, nilpotent subgroup.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Рассмотрим множество всех пересечений вида $A \bigcap B^g$, $g \in G$. Определим в этом множестве два подмножества: M — множество всех минимальных по включению пересечений и m — множество всех минимальных по порядку пересечений вида $A \bigcap B^g$, $g \in G$. По определению $m \subseteq M$ и для подгрупп $\mathrm{Min}_G(A, B) = \langle M \rangle$ и $\mathrm{min}_G(A, B) = \langle m \rangle$ имеет место включение $\mathrm{min}_G(A, B) \leq \mathrm{Min}_G(A, B)$. В некоторых случаях $\mathrm{min}_G(A, B) < \mathrm{Min}_G(A, B)$. Соответствующий пример рассмотрен перед доказательством теоремы 1.

Подгруппы $\mathrm{Min}_G(A, B)$ и $\mathrm{min}_G(A, B)$ играют ключевую роль при изучении пересечений подгрупп A и B в конечной группе G в силу эквивалентности следующих условий:

1) $A \bigcap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G;
2) $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$;
3) $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$.

Отметим, что если подгруппы A и B абелевы, то согласно [1, теорема 1] $\mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Эта теорема справедлива для любой конечной группы.

Если G — простая неабелева группа, то по [2, теорема 1] для любой пары примарных подгрупп A и B имеем $\mathrm{Min}_G(A, B) = \mathrm{min}_G(A, B) = 1$.

В случае почти простой группы $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$ в статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, изоморфная $\mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \geq 3$, и S — силовская 2-подгруппа из G. Тогда $\mathrm{min}_G(S, S) = S$ в случае нечетного n и $\mathrm{min}_G(S, S) = O_2(N_G(P))$ в случае четного n, где P — параболическая подгруппа, соответствующая центральной точке в схеме Дынкина группы $L_n(2)$.*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и Программы поддержки ведущих университетов России (соглашение 02.A03.210006 от 27.08.2013).

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_n(2)$, $n \geq 3$, A и B — p-подгруппы из силовской подгруппы S группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$;
(2) $\min_G(A, B) \neq 1$;
(3) $p = 2$, $(A, B) \in \bigl\{(\min_G(S, S), \min_G(S, S)), (S, \min_G(S, S)), (\min_G(S, S), S), (S, S)\bigr\}$.

1. Предварительные сведения

Лемма 1. *Пусть $G \simeq L_n(2)$, $n \geq 3$, S_1 — силовская 2-подгруппа из G и z — инволюция из $Z(S_1)$. Тогда в группе G найдутся элементы x_1 и y_1 такие, что $S_1^{x_1} \bigcap S_1^{y_1} = \langle z \rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $G = L_n(2)$. Хорошо известно [7, c. 95], что подгруппа S_1 может быть задана в $L_n(2)$ либо группой верхних, либо группой нижних треугольных матриц. В частности, если S_1 задана верхними треугольными матрицами, то инволюция z, заданная матрицей

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

порождает $Z(S_1)$ [4, c. 56 (1.2)]. Рассмотрим инволюцию t, заданную матрицей

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно [3, (4.2)] инволюции t и z имеют ранг 1 и, следовательно, сопряжены в G. Пусть g — инверсно-транспонированный автоморфизм G [5, p. XVI], а h — инволюция, заданная матрицей

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $[h, g] = 1$, $hg \in C(t)$ и $S_1 \bigcap S_1^{gh} = \langle t \rangle$. Так как t и z сопряжены в G, то и $\langle z \rangle = S_1^{x_1} \bigcap S_1^{y_1}$ для некоторых элементов x_1 и y_1 из G.

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \geq 3$, S_1 — силовская 2-подгруппа из $\mathrm{Inn}\,(L_n(2)) \simeq L_n(2)$ и S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая S_1. Тогда $S^x \bigcap S^y = \langle z \rangle$ для некоторых элементов x и y из G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь сохраняются обозначения из доказательства леммы 1. По лемме 1 инволюция t сопряжена с инволюцией z и $\langle t \rangle = S_1 \bigcap S_1^{hg}$. Покажем, что $S \bigcap S^{hg} = \langle t \rangle$. Допустим, что $S \bigcap S^{hg} = D > \langle t \rangle$. Тогда $|D| = 4$. Поэтому некоторый элемент $d \in D \backslash \langle t \rangle$

нормализует S и S^{hg} в силу $|S:S_1|=2$. Так как $[t,d]=1$ из-за $|D|=4$, то $d\in C_G(t)\backslash C_{G'}(t)$ и $C_G(t)=C_{G'}(t)\langle hg\rangle$. Поэтому $d=chg$, где $c\in C_{G'}(t)$. Но $C_{G'}(t)$ нормализует подгруппу N из S, где $N=O_2(R)$ для максимальной параболической подгруппы из G', содержащей $C_{G'}(t)$. Но тогда в силу $c^{-1}d=hg$ имеем $S\bigcap S^{c^{-1}d}\geq N^d$, так как элемент c нормализует N, и, таким образом, $S\bigcap S^{c^{-1}}\geq N$ и $(S\bigcap S^{c^{-1}})^d=S^d\bigcap S^{c^{-1}d}=S\bigcap S^{c^{-1}d}\geq N^d$ в силу того, что $d\in S$. Но $N\leq G'$ и $|N|>2$ в силу ограничения $n\geq 3$. Противоречие с тем, что $|(S\bigcap G')\bigcap(S\bigcap G')^{c^{-1}d}|=|(S\bigcap G')\bigcap(S\bigcap G')^{hg}|=2$.

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $G=L_n(2)$. Тогда $T=\langle t^{S_1}\rangle\simeq E_{2^{n-1}}$ элементарная абелева нормальная в S_1.*

Заметим, что во всех матрицах в лемме 3 ниже второй строки стоят 0, кроме главной диагонали, на которой стоят 1, и множество матриц $\{A,A_1,\dots,A_{n-2}\}$ строится для порождения подгруппы, изоморфной $E_{2^{n-1}}$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $T_{2,j},\ j>2$, из G:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & & 1 & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

При сопряжении матрицей $T_{2,j}$ любой матрицы A происходит следующее: $A^{T_{2j}}=T_{2,j}AT_{2,j}$ в силу того, что $T_{2,j}$ — трансвекция. Кроме того, умножение матрицы A на $T_{2,j}$ справа приводит к добавлению 2-го столбца к j-му, а умножение матрицы A на $T_{2,j}$ слева приводит к добавлению j-й строки матрицы A ко второй. Так как умножение матриц ассоциативно, то, например, мы можем рассмотреть вначале произведение $AT_{2,j}$ и умножить его на $T_{2,j}$ справа.

Возьмем в качестве A матрицу, определяющую t:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда при $j=3$ имеем

$$A_1=T_{2,3}AT_{2,3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $[A, A_1] = 1$ $(A = t)$ и это элементарная абелева подгруппа, которая может рассматриваться как векторное пространство размерности два над полем из двух элементов. В 1-й строке матрицы A_{j-2} первые j элементов единицы, остальные нули. Предположим по индукции для $j \geq 4$, что

$$A_{j-2} = T_{2,j} A_{j-3} T_{2,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Подсчитаем $A_{j-1} = T_{2,j+1} A_{j-2} T_{2,j+1}$, имеем

$$A_{j-2} T_{2,j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{j-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Порождающее множество $\{A, A_1, \ldots, A_{n-2}\}$ группы T — очевидно, линейно независимая система, которую можно взять в качестве базиса векторного пространства над полем из двух элементов. Поэтому лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть* $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \geq 3$. *Тогда* $C_G(t) \simeq C_G(z)$, $O_2(C_G(t))$ *— экстраспециальная подгруппа порядка* 2^{2n-3} *и* $\overline{C_{G'}(t)} = C_{G'}(t)/O_2(C_{G'}(t)) \simeq L_{n-2}(2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено в лемме 1, инволюции t и z сопряжены в G'. Поэтому $C_G(t) \simeq C_G(z)$. Из матричного представления инволюции t из леммы 1 вытекает, что $C_{G'}(t)$ содержит подгруппу, изоморфную $L_{n-2}(2)$. Кроме того, из леммы 3 следует, что $C_{G'}(t)$ содержит элементарную абелеву подгруппу N, нормальную в $C_{G'}(t)$. Подгруппа N лежит в $S_1 \in \mathrm{Syl}_2(G')$, где S_1 представлена верхними треугольными матрицами, а также лежит в $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $S > S_1$. Из леммы 2 следует, что $S \bigcap S^{hg} = \langle t \rangle$. Следовательно, $N \bigcap N^{hg} = \langle t \rangle$. Тогда (см. [4, с. 56]) $\langle N, N^{hg} \rangle = O_2(C_{G'}(t))$ — экстраспециальная подгруппа порядка 2^{2n-3}.

Лемма 4 доказана. $\square$

Лемма 5. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_2(7)$, S — силовская p-подгруппа из G, A и B — примарные p-подгруппы из G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда $p = 2$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(7))$, $S \simeq A \simeq B \simeq \min_G(A,B) = \min_G(S,S)$ Справедливо и обратное утверждение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $L_2(7) \simeq L_3(2)$ (см. [5, с. 3]), то $p = 2$, и для инволюции $\tau \in S \backslash S \bigcap G'$ имеем $C(\tau) = \langle \tau \rangle \times T$, $T \simeq S_3$ и по [6, лемма 3.2] $S \bigcap S^g = \langle \tau \rangle$. Без ограничения общности можно считать, что A и B лежат в S. Так как $\min_G(A,B) \neq 1$, то $A \bigcap B^g \neq 1$. Поэтому $|A \bigcap B^g| \geq 2$. С другой стороны, $S \bigcap S^g \geq A \bigcap B^g$. Следовательно, $2 = |S \bigcap S^g| \geq |A \bigcap B^g| \geq 2$. Поэтому $S \bigcap S^g = A \bigcap B^g = \langle \tau \rangle$. Значит, $\langle \tau \rangle \leq \min_G(A,B)$. Но тогда и $\langle \tau^S \rangle \leq \min_G(A,B)$. По лемме 2 имеем $Z(S) = \langle z \rangle = S^x \bigcap S^y$. Поэтому, сопрягая в $N_G(V)$, где $V \simeq E_4$ — четверная подгруппа, подгруппу S^x с S при помощи элемента t, имеем $S^{xt} \bigcap S^{yt} = S \bigcap S^{yt} = \langle z^t \rangle$. Следовательно, $V \leq \min_G(A,B)$. Очевидно, что $S \bigcap S^{yt\tau} = \langle z^{t\tau} \rangle$. Значит, $V^g \leq \min_G(A,B)$ и $S = A = B = \min_G(A,B)$. Обратное утверждение следует из [6, теорема B1].

Лемма 5 доказана. $\square$

Лемма 6. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_4(2)$, S — силовская p-подгруппа из G, A, B — p-подгруппы из G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда $p = 2$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(A_8)$, $\min_G(S,S) = O_2(C_G(z))$ и $(A,B) \in \{(\min_G(S,S), \min_G(S,S)), (\min_G(S,S), S), (S, \min_G(S,S)), (S,S)\}$. Справедливо и обратное утверждение.*

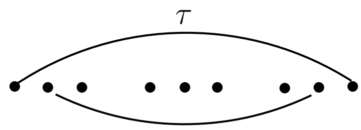
Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $L_4(2) \simeq A_8$ (см. [5, с. 22]), то $\mathrm{Aut}\,(L_4(2)) \simeq \mathrm{Aut}\,(A_8) \simeq S_8$ и по [2, теорема 1] $p = 2$ и $G \simeq S_8$. Пусть $\langle \tau \rangle$ — инволюция с $C_G(\tau) \simeq \langle \tau \rangle \times K$, где $K \simeq S_6$. Согласно [6, лемма 3.1] $\langle \tau \rangle = S \bigcap S^g$ для некоторого элемента g из G. Поэтому $\langle \tau \rangle \leq \min_G(S,S)$ и $\langle \tau \rangle \leq \min_G(A,B)$, где без ограничения общности считаем, что $A, B \leq S$. По леммам 3 и 4 $Z(S) = \langle z \rangle = S^x \bigcap S^y$ и $(z^t)^S = O_2(C_G(z))$. Так как $\langle z^t \rangle \leq \min_G(S,S)$ и $\langle z^t \rangle \leq \min_G(A,B)$, то $\langle (z^t)^S \rangle = O_2(C_{G'}(z)) \leq \min_G(S,S)$ и $\langle (z^t)^S \rangle \leq \min_G(A,B)$. Поскольку $C_{G'(z)}/O_2(C_{G'}(z)) \simeq S_3$, то по [5, с. 22] $\overline{C(z)} = C_G(z)/O_2(C_G(z)) \simeq S_3$. Следовательно, $\min_G(S,S) = \min_G(A,B) \geq O_2(C_{G'}(z))\langle \tau \rangle$. Допустим, что $\min_G(S,S) = \min_G(A,B) > O_2(C_G(z))$. По определению $\min_G(S,S)$ найдется элемент f из G такой, что $S \bigcap S^f < \min_G(S,S)$, но $S \bigcap S^f \not\leq O_2(C_G(z))$. Поэтому $O_2(C_G(z)) \bigcap S^f = 1$. Но $\overline{C_G(z)} \simeq S_3$. Следовательно, по [6, лемма 2.2] $S \bigcap S^h = 1$ для некоторого h из G. Противоречие с тем, что $\min_G(A,B) \neq 1$.

Так как $|S : \min_G(S,S)| = 2$, то прямое утверждение леммы доказано, а для доказательства обратного утверждения леммы достаточно установить, что $\min_G(\min_G(S,S), \min_G(S,S)) \neq 1$. Но так как $\min_G(S,S) = O_2(C_G(z))$ и $\overline{C_G(z)} \simeq S_3$, то это следует из [6, лемма 3.1, теорема $B1$].
Лемма 6 доказана. $\square$

Перед доказательством теорем приведем пример группы G и 2-подгрупп A и B из G, в которой $\min_G(A,B) < \mathrm{Min}\,_G(A,B)$. Например, если в качестве группы G рассмотрим S_4, в качестве подгруппы A возьмем силовскую 2-подгруппу S группы G и положим $A > B \simeq Z_4$, то здесь $M = \{B, \langle t \rangle^f, \langle t \rangle^{f^2}\}$, где t — инволюция из B, а f — элемент порядка 3 из G. В то же время $m = \{\langle t \rangle^f, \langle t \rangle^{f^2}\}\}$. Соответственно, $\mathrm{Min}\,_G(A,B) = \langle M \rangle = S > \min_G(A,B) = O_2(G)$. В этой группе G в качестве подгруппы B можно взять любую 2-подгруппу порядка 4, не лежащую в $O_2(G)$, и все они дадут аналогичный пример со свойством $\min_G(A,B) < \mathrm{Min}\,_G(A,B)$.

2. Доказательства теорем 1 и 2

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть G — контрпример к теореме 1 и порядок G при этом минимален. По леммам 5 и 6 имеем $n > 4$. Далее, по леммам 3 и 4 $O_2(C_{G'}(z)) \leq \min_G(S,S)$. Из матричного представления подгруппы G', рассмотренного в леммах 3 и 4, видно, что подгруппа $C_{G'}(z)$ имеет подгруппу $G_1 \simeq L_{n-2}(2)$, так называемый фактор Леви (см. [4, С. 86–87; 5, P. XV]), если рассматривать $C_{G'}(z)$ как параболическую подгруппу G', на которой нетривиально действует симметрия τ диаграммы Дынкина



Из этой информации видно, что $C_{G'}(z) = M \bigcap M^{\tau}$, где M — параболическая подгруппа, полученная путем удаления из диаграммы Дынкина левой крайней вершины и правой крайней. Учитывая, что $n > 4$, имеем нетривиальное действие τ на $C_{G'}(z)$ и на $\overline{C_{G'}(z)} = C_{G'}(z)/O_2(C_{G'}(z) \simeq L_{n-2}(2)$ и, так как четность n и $n-2$ одинакова, при выполнении условий теоремы 1 по индукции должно выполняться заключение этой теоремы в факторгруппе $\mathrm{Aut}(L_{n-2}(2))$. Далее в теореме обозначение $\overline{H}$ будет применяться для факторгруппы $HO_2(C(z))/O_2((C(z))$ подгруппы H из $C_G(z)$. В силу того, что τ индуцирует нетривиальный автоморфизм на $\overline{C_{G'}(z)}$, имеем $O_2(C_G(z)) \leq G'$. Поэтому $O_2(C_G(z)) = O_2(C_{G'}(z)$ и, следовательно, корректно определена факторгруппа $\overline{C} = \overline{C_G(z)} = C_G(z)/O_2(C_G(z)$.Так как $G' \simeq L_n(2)$ — простая группа характеристики два, то группа верхних треугольных матриц в матричном представлении пересекается с группой нижних треугольных матриц по единичной подгруппе. Следовательно, $O_2(C_G(z)) \bigcap S^x = 1$ для некоторого элемента x из G. Поэтому $|C_G(z) \bigcap S^x| = |\overline{C_G(z) \bigcap S^x}|$. Обозначим подгруппу $C_G(z) \bigcap S^x$ через S_1. Тогда $\overline{S} \bigcap \overline{S_1}^{\overline{c}} \neq \overline{1}$ для любого элемента $\overline{c} \in \overline{C}$, иначе $\min_G(S,S) = 1$, что противоречит [6, теорема B1]. Таким образом, $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}_1) \neq 1$ и, тем более, $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}) \neq 1$. Так как $\overline{C} \simeq \mathrm{Aut}\,(L_{n-2}(2))$, $n \geq 5$, то $n-2 \geq 3$ и по [5, с. 15] $|\mathrm{Aut}\,(L_n(2)) : \mathrm{Inn}\,(L_n(2))| = 2$. Следовательно, в $L_{n-2}(2)$ найдется пара силовских 2-подгрупп, пересекающихся по единице, которые, в свою очередь, будучи вложенными в соответствующие силовские 2-подгруппы из $\overline{C} \simeq \mathrm{Aut}\,(L_{n-2}(2))$ обеспечивают равенство 2$= |\overline{S} \bigcap \overline{S}^{\overline{f}}|$ для некоторого элемента $\overline{f}$ из $\overline{C}$. Условие $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}_1) \neq 1$ вместе с теоремой Силова влечет, что найдется элемент $\overline{t}$ из $\overline{C}$, для которого и $\overline{S} \bigcap \overline{S}^{\overline{f}} = \overline{S} \bigcap \overline{S}_1^{\overline{t}}$. Следовательно, подгруппа $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}_1)$ порождается пересечениями вида $\overline{S} \bigcap \overline{S}_1^{\overline{f}}$, где $\overline{f} \in \overline{C}$ и каждое такое пересечение является образом некоторого пересечения $D = S \bigcap S^g$ порядка 2 из G по определению подгруппы S_1, которое принадлежит $\min_G(S,S)$. Таким образом, подгруппа $\min_G(S,S)$ в факторгруппе $\overline{C}$ содержит подгруппу $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$. С другой стороны, в силу условия $\min_G(S,S) \neq 1$ и леммы 2 найдется такое $D = S \bigcap S^y$ $(y \in G)$, что $|D| = 2$. Если $D \leq O_2(C_G(z))$, то $\overline{D} = \overline{1} \leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$. Если $D \not\leq O_2(C_G(z))$, то в силу того, что $S \geq O_2(C_G(z))$ и $|D| = 2$, получаем, что $O_2(C_G(z)) \bigcap S^y = 1$. Поэтому $|\overline{D}| = 2$ и если $\overline{D} \leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$, то $\overline{\min_G(S,S)} \leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$ и тогда в силу произвольности $\overline{D}$ имеет место равенство $\overline{\min_G(S,S)} = \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$.

Пусть $\overline{D} \not\leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S}) = O_2(N_{\overline{C}}(\overline{P}))$, где по индукции $\overline{P}$ — подгруппа из теоремы 1 примененной к $\overline{C}$. Так как $D \in m$ и $\overline{D} \not\leq O_2(N(\overline{P}))$, то полный прообраз N в C подгруппы $N_{\overline{C}}(\overline{P})$ по теореме 1 удовлетворяет соотношению $\overline{N}/\overline{O_2(N)} \simeq S_3$ в силу того, что каждой точке в диаграмме Дынкина для $L_n(2)$ соответствует фактор Леви, изоморфный $A_1(2) \simeq L_2(2) \simeq S_3$. Поскольку $\overline{D} \not\leq \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$, то справедливо равенство $O_2(N) \bigcap S^y = 1$. Но тогда по [6, лемма 3.2] имеем $S \bigcap S^h = 1$ для некоторого h из G. Противоречие с тем, что $\min_G(S,S) \neq 1$.

Следовательно, из равенства $\overline{\min_G}(S,S) = \min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$ с учетом того, что $n \geq 5$ по индукции получаем строение $\min_{\overline{C}}(\overline{S}, \overline{S})$, а беря полный прообраз и, учитывая, что числа n и $n-2$ имеют одинаковую четность и по леммам 3 и 4 $O_2(C(z)) \le \min_G(S, S)$, получаем заключение теоремы для подгруппы $N_G(P)$. Но $|Z(P)| = 2$, поэтому $N_G(P) \le N_C(P)$ и теорема 1 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Так как условия (1) и (2) в теореме 2 равносильны, то достаточно доказать, что условие (2) равносильно условию (3).

Пусть верно условие (2). Тогда для пары (A, B) p-примарных подгрупп, лежащих без ограничения общности в некоторой силовской подгруппе S из G, получаем по [6, теорема B(2б)], что $p = 2$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \ge 3$, и по [6, теорема $B1$] $\min_G(S, S) \ne 1$. Пусть $D = S \bigcap S^g \in m$. Так как $|\mathrm{Aut}\,(L_n(2)) : \mathrm{Inn}\,(L_n(2))| = 2$ (см. [5, табл. 5]) и в $\mathrm{Inn}\,(L_n(2)) \simeq L_n(2) \simeq G'$ силовская 2-подгруппа, представленная верхними треугольными матрицами, пересекается с силовской 2-подгруппой, представленной нижними треугольными матрицами по единице, то неравенство $\min_G(S, S) \ne 1$ влечет, что $|D| = 2$. Поскольку $S \ge A$ и $S \ge B$, то $D = S \bigcap S^g \ge A \bigcap B^g \ne 1$ в силу условия $\min_G(A, B) \ne 1$. Поэтому $|D| = |S \bigcap S^g| = |A \bigcap B^g| = 2$. Следовательно, $D = A \bigcap B^g \le \min_G(A, B)$. Так как D — произвольный элемент из m, то $\min_G(S, S) \le \min_G(A, B)$. Следовательно, $A \ge \min_G(S, S)$. Но $A \bigcap B^g = (B \bigcap A^{g^{-1}})^g$. Значит, $\min_G(B, A) \ne 1$ и аналогично $B \ge \min_G(S, S)$. По теореме 1 либо n нечетно и $A = B = S$, либо n четно, $|S : \min_G(S, S)| = 2$ и, в таком случае, пара (A, B) принадлежит множеству $\{(S, \min_G(S, S)), (S, S), (\min_G(S, S), S), (\min_G(S, S), \min_G(S, S)\}$. Поэтому из условия (2) в теореме 2 следует условие (3).

Допустим, что в теореме 2 верно условие (3). Если n нечетно, то условие (2) следует из условия (3) согласно [6, теорема $B1$]. Если n четно, то по теореме 1 имеем $(A, B) \in \{(\min_G(S, S), \min_G(S, S)), (S, \min_G(S, S)), (\min_G(S, S), S), (S, S)\}$, где $\min_G(S, S) = O_2(N_G(P))$ и $N_G(P)/O_2(N_G(P)) \simeq S_3$ [5, с 22]. Так как пара $(A, B) = (\min_G(A, B), \min_G(A, B))$ минимальна по включению такому, что $(A, B) \supseteq (A_1, B_1)$, тогда и только тогда, когда $A \ge A_1$ и $B \ge B_1$, то достаточно доказать, что из условия (3) следует условие (2) только для этой пары.

Допустим, что в этом случае из условия (3) не следует условие (2). Тогда $A \bigcap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Так как $A = B = O_2(N_G(P))$, то для подгруппы $N_G(P)$ имеем $O_2(N_G(P)) \bigcap (O_2(N_G(P)))^g = 1$. Последнее равенство в силу $N_G(P)/_{O_2(N_G(P))} \simeq S_3$ (см. [6, лемма 3.1]) влечет равенство $S \bigcap S^x = 1$ для некоторого x из G. Противоречие с [6, теорема $B1$]. Следовательно, из условия (3) следует условие (2). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенков В.И.** Пересечение абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 1–2. С. 150–152.
2. **Зенков В.И., Мазуров В.Д.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
3. **Aschbacher M., Seitz G.M.** Involutions in chevalley groups over fields of even order // Nagoya Math. J. 1976. Т. 63, № 10. С. 1–92.
4. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
5. Atlas of finite group / J.H. Conway, R. Curter, S. Norton, R. Parker, R. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных подгруппах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.
7. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 239 с.

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: zenkov@imm.uran.ru

Поступила 05.12.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.919

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО БЕЛОГО ШУМА[1]

Л. А. Калякин

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая локальное асимптотически устойчивое положение равновесия. Обсуждается проблема устойчивости относительно постоянно действующего возмущения типа белого шума. Устойчивость с заданными оценками установлена на большом промежутке времени — порядка квадрата обратной величины возмущения. Доказательство основано на построении барьера для параболического уравнения Колмогорова, связанного с возмущенной динамической системой.

Ключевые слова: динамическая система, случайное возмущение, устойчивость, параболическое уравнение, барьер.

L. A. Kalyakin. Stability of equilibrium with respect to a white noise.

A system of ordinary differential equations with a local asymptotically stable equilibrium is considered. The problem of stability with respect to a persistent perturbation of the white noise type is discussed. The stability with given estimates is proved on a large time interval with a length of the order of the squared reciprocal magnitude of the perturbation. The proof is based on the construction of a barrier function for the Kolmogorov parabolic equation associated with the perturbed dynamical system.

Keywords: dynamical system, random perturbation, stability, parabolic equation, barrier function.

1. Постановка задачи

Исходным объектом является система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dT} = \mathbf{a}(\mathbf{y}, T), \quad T \in \mathbb{R}^1; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{y}, T)$ — заданная вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$. Считается, что $\mathbf{a}(\mathbf{0}, T) \equiv 0$, так что точка $\mathbf{y} = 0$ представляет собой положение равновесия. Ставится вопрос об устойчивости этого тривиального решения $\mathbf{y}(T) \equiv 0$ относительно возмущения системы белым шумом.

Возмущенная задача записывается в форме стохастического уравнения Ито с начальным условием (см., например, [1; 2]):

$$d\mathbf{y} = \mathbf{a}(\mathbf{y}, T)dT + \mu\sqrt{2}B(\mathbf{y}, T)d\mathbf{w}(T), \ T > s; \ \ \mathbf{y}|_{T=s} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \ (s \geq 0). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{w}(T) \in \mathbb{R}^k$ — k-мерный винеровский процесс, $B(\mathbf{y}, T)$ — заданная матрица размером $n \times k$. Решение этой задачи определяет семейство (случайных при $\mu \neq 0$) траекторий $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$, которые зависят как от начальной точки $\mathbf{x}, s$, так и от параметра возмущения $\mu \in \mathbb{R}^1$. Начальный момент $s \geq 0$ является дополнительным параметром. В обсуждаемом круге задач устойчивость получается равномерной по s, и поэтому мы не акцентируем внимание на случае $s = 0$.

Проблема устойчивости: *остается ли возмущенная траектория вблизи точки* $\mathbf{y} = 0$, *если малы* $|\mathbf{x}|$ *и* $|\mu|$?

В случае $\mu = 0$, когда возмущается только начальная точка, ответ дается в классических теоремах Ляпунова [3]. В частности, равновесие невозмущенной детерминированной системы может быть устойчиво либо асимптотически устойчиво по Ляпунову.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00078).

При возмущении уравнений (в случае $\mu \neq 0$) возможны разные постановки задачи. Если равновесие сохраняется в возмущенной системе, т.е. при $B(0, T) \equiv 0$ можно исследовать устойчивость равновесия по Ляпунову в возмущенной системе, как это сделано в [2; 4; 5]. Близость возмущенной траектории $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$ к точке $\mathbf{y} = 0$ обеспечивается за счет малости начального значения $|\mathbf{x}|$ при фиксированном μ либо равномерно по μ на некотором промежутке. При этом условие асимптотической устойчивости равновесия в невозмущенной системе может оказаться решающим, если не уточнять структуру возмущения [6]. Отметим, что принципиальных отличий между детерминированным и стохастическим возмущением здесь не наблюдается.

В общем случае, когда $B(0, T) \not\equiv 0$, точка $\mathbf{y} = 0$ не является равновесием в возмущенной системе. Теперь, чтобы гарантировать близость возмущенной траектории $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$ к точке $\mathbf{y} = 0$, нужна малость μ. Подобная задача для детерминированного возмущения решена Малкиным [7]. При этом требование асимптотической устойчивости по Ляпунову равновесия невозмущенной системы является необходимым для устойчивости относительно постоянно действующего возмущения[2]. Результаты Малкина обобщены на разные классы возмущений, в частности на некоторые случайные возмущения [5; 6; 8; 9].

Ситуация с устойчивостью значительно ухудшается при возмущении винеровским процессом, если возмущение не исчезает в равновесии: $B(0, T) \not\equiv 0$. Поскольку в этом случае почти любая возмущенная траектория (при $\mu \neq 0$) со временем посещает любую область, то обычной устойчивости на бесконечном временном промежутке не бывает[3]. Такой результат создает впечатление непригодности детерминированных моделей для приложений, поскольку шум всегда присутствует в реальных системах, а физически реализуемые состояния ассоциируются с устойчивыми траекториями. Конечно, здесь надо учитывать, что при малых возмущениях выход траекторий из окрестности равновесия происходит на далеких временах.

Теперь уместно напомнить, что на далеких временах решение модельной системы зачастую вообще не имеет отношения к реальной исходной системе. На уровне математических моделей подобный факт иногда указывается явно. Например, разные варианты методов усреднения [6; 10–12] приводят к модельным (усредненным) уравнениям, которые имеют отношение к исходной системе лишь на конечных, хотя и больших промежутках времени. Поэтому в задаче о постоянно действующих возмущениях представляется разумной ревизия понятия устойчивости в том, что касается поведения решения на бесконечном промежутке времени. Особенно это относится к задаче о возмущении белым шумом, и этот вопрос обсуждался в [6].

Один из альтернативных подходов использует понятие слабой устойчивости по вероятности [13; 14]. Устойчивость здесь означает, что в каждый момент бóльшая часть траекторий находится в малой окрестности равновесия при том, что почти каждая из траекторий может выходить из окрестности. Такая устойчивость была доказана при ограничениях, которые соответствуют глобальной асимптотической устойчивости невозмущенной системы [5; 13]. Существенно ослабить эти ограничения невозможно, и в [13] приведены соображения об отсутствии слабой устойчивости относительно шума при наличии в невозмущенной системе двух устойчивых по Ляпунову положений равновесия.

Более радикальный подход состоит в сведении проблемы устойчивости к определению среднего времени выхода семейства траекторий из заданной области [15] . В системе типа (1.2) это время оказывается экспоненциально большим: $T_\mu \approx \exp(C/\mu^2)$, $C = \mathrm{const} > 0$ при $\mu \to 0$, и для практических задач вопрос устойчивости выглядит решенным. Однако полученные оценки зависят от области (посредством константы C) и не годятся при сжатии области к точке $\mathbf{y} = 0$, [15; 16]. Фактически такой результат соответствует определению устойчивости по Лагранжу: траектории, стартующие из окрестности равновесия, остаются в ограниченной (не малой) области. Подчеркнем важность введенной в [15] идеи о конечности промежутка устойчивости: $s < T \leq T_\mu$, который оказывается большим при малом возмущении.

Еще один похожий подход связывается с понятием технической устойчивости, под которой

[2]Если не накладывать дополнительные ограничения на структуру возмущения [6].

[3]Не бывает сильной устойчивости по вероятности (см., например, [2]).

понимается устойчивость с заданными оценками (в стиле Ляпунова) на конечном промежутке времени [6; 8]. Как раз с этим определением мы будем иметь дело в данной работе. Основное наше нововведение состоит в том, чтобы связать длину промежутка с параметром возмущения. Для рассматриваемой задачи удается доказать, что на интервале $s < T \leq \mu^{-2}$ гарантируется близость возмущенной траектории $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)$ к точке $\mathbf{y} = 0$, [17]. Следует указать, что эта идея не нова и использовалась ранее при анализе устойчивости относительно постоянно действующего возмущения в случае, когда равновесие в невозмущенной системе не является асимптотически устойчивым [6].

В качестве меры устойчивости для стохастической системы используется математическое ожидание $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2]$ квадрата расстояния от траектории до точки $\mathbf{y} = 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Равновесие $\mathbf{y} = 0$ системы (1.1) называется ограниченно устойчивым относительно шума равномерно для матриц B из множества $\mathcal{B}$ и $s \geq 0$ при заданных оценках $\delta(\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon)$, если существует $T_{\mathcal{B}} > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ математическое ожидание на возмущенной траектории мало: $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2] < \varepsilon$ равномерно для всех $|\mathbf{x}| < \delta(\varepsilon)$, $|\mu| < \Delta(\varepsilon)$, $s < T < T_{\mathcal{B}}\mu^{-2}$, $B \in \mathcal{B}$, $s \geq 0$. Подразумевается, что $\delta(\varepsilon), \Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Это определение соответствует слабой устойчивости по вероятности [13; 14], так что любая траектория может выходить из окрестности $|\mathbf{x}| < \varepsilon$, но в каждый момент бо́льшая часть траекторий остается в окрестности (на временах, не слишком больших). Сразу отметим, что в отличие от известных результатов [5; 13] в данной работе будет использоваться требование лишь локальной (а не глобальной) асимптотической устойчивости равновесия в невозмущенной системе. Расплатой за такое послабление является ограничение на промежуток времени.

Использование математического ожидания вдоль траектории в качестве меры устойчивости оказывается удобным приемом ввиду возможности использования параболического уравнения Колмогорова и техники барьерных функций для априорных оценок его решения. Как раз барьеры играют роль аналогов функций Ляпунова в рассматриваемом подходе. При конструировании барьера для параболического уравнения используется локальная функция Ляпунова невозмущенной системы. Основные затруднения связаны с необходимостью продолжения барьера из окрестности точки $\mathbf{y} = 0$ на все пространств $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, поскольку приходится оценивать решение задачи Коши.

Отметим близкие публикации автора на эту тему [17; 18]. Радикальное отличие данной работы заключается в условиях на структуру возмущения. В отличии от [17; 18] здесь не требуется положительная определенность матрицы диффузии BB^*. Это значительно расширяет возможности применения результатов об устойчивости, в частности, на случаи, когда размерность возмущения не совпадает с размерностью системы.

2. Связь с параболическим уравнением

Со стохастической системой (1.2) связано параболическое уравнение Колмогорова

$$\partial_s u + \mathbf{a}(\mathbf{x}, s)\partial_{\mathbf{x}} u + \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\mathbf{x}, s)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u = 0, \quad 0 \leq s < T,$$

для которого ставится задача с финальным условием $u|_{s=T} = \mathbb{E}(f(\mathbf{x}))]$. Квадратная матрица $A = \{\alpha_{i,j}\}$ выражается через матрицу возмущения и сопряженную к ней по формуле $A = BB^*$. Дело можно свести к задаче с начальным условием, если сделать замену времени $s = T - t$:

$$\partial_t u - \mathbf{a}(\mathbf{x}, T - t)\partial_{\mathbf{x}} u - \mu^2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\mathbf{x}, T - t)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leq T;$$

$$u(\mathbf{x}, t; T, \mu)|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Как видим, в неавтономном случае решение зависит от дополнительного параметра T. Связь с решением стохастического уравнения выражается посредством математического ожидания формулой (см., например, [2])

$$\mathbb{E}[u_0(\mathbf{y}_\mu(T;\mathbf{x},s))] = u(\mathbf{x},t;T,\mu)|_{t=T-s}.$$

В частном случае решение задачи Коши с начальной функцией $u_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ дает интересующую нас в стохастической задаче величину математического ожидания $\mathbb{E}[(\mathbf{y}_\mu(T;\mathbf{x},s))^2]$.

Таким образом, вопрос об устойчивости в смысле определения 1 сводится к оценке решения параболического уравнения равномерно по параметру T. При этом специфическая зависимость от времени в виде $T-t$ оказывается не по существу, и задачу можно поставить в чуть более общей форме. В слое $D^T = \{\mathbf{x},t\colon \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ 0\le t\le T\}$ для параболического уравнения

$$L_{T,\mu}u \equiv \partial_t u - \mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T)\partial_{\mathbf{x}}u - \mu^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + q(\mathbf{x},t;T)u = 0 \tag{2.1}$$

рассматривается задача Коши

$$u(\mathbf{x},t;T,\mu)|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n; \tag{2.2}$$

здесь $\partial_{\mathbf{x}} = (\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n})$ — вектор градиента по $\mathbf{x}$. Условие нестрогой параболичности записывается в виде требования неотрицательности матрицы диффузии:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\xi_i\xi_j \ge 0 \ \ \forall\,\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n; \quad \xi\ne 0, \quad \mathbf{x},t\in D^T.$$

В задаче присутствуют два действительных параметра $T\in(0,\infty)$ и $0<\mu^2<\mu_0^2$. Уравнения (2.1), (2.2) представляют собой семейство задач, в котором параболический оператор $L_{T,\mu}$ содержит существенную зависимость от T — верхней границы области D^T. Наличие этого параметра в коэффициентах оператора $L_{T,\mu}$ необходимо, чтобы связать решение $u(\mathbf{x},t;T,\mu)$ со стохастической системой в неавтономном случае.

Главным результатом данной работы является равномерная по параметрам оценка решения $u(\mathbf{x},t;T,\mu)$ в окрестности линии $\{\mathbf{x}=0,\ t>0\}$ — нуля коэффициента $\mathbf{a}(0,t;T)\equiv 0$. В случае специальной зависимости от времени, когда $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\mathbf{x},T-t)$, такой результат обеспечивает для динамической системы $d\mathbf{y} = \mathbf{a}(\mathbf{y},t)dt$ доказательство устойчивости равновесия $\mathbf{y}=0$ относительно постоянно действующего возмущения типа "белый шум".

В отличии от более ранних результатов [17;18] здесь устойчивость доказывается независимо от структуры матрицы диффузии. В частности, эта матрица может быть вырожденной, что случается, когда размерность возмущения меньше размерности системы.

3. Функция Ляпунова

Рассматривается уравнение в частных производных (2.1). Ограничения на него накладываются в форме условий в терминах функции Ляпунова.

Определение 2. Неотрицательная функция $U(\mathbf{x},t;T)\ge 0$, непрерывно дифференцируемая по t и дважды непрерывно дифференцируемая по $\mathbf{x}$ (из класса $C_{2,1}(D^T)$), называется функцией Ляпунова для уравнения (2.1) равномерно по T, если существуют константы $r,\gamma>0$, не зависящие от T, такие что для $\forall\,T>0$ в цилиндре $\mathcal{C}_r^T = \{(\mathbf{x},t)\in D^T\colon |\mathbf{x}|<r\}$ выполняется соотношение

$$\partial_t U - \mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T)\partial_{\mathbf{x}}U \ge \gamma U. \tag{3.1}$$

Пояснение. В случае, когда $\mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T) = \mathbf{a}(\mathbf{x},T-t)$, такая функция получается из обычной функции Ляпунова $U_0(\mathbf{x},t)$ для динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ по формуле $U(\mathbf{x},t;T) = U_0(\mathbf{x},T-t)$.

Дополнительные ограничения накладываются в цилиндре $\mathcal{C}_r^T$ в форме неравенств, равномерных по T:

$$|\mathbf{x}|^2 \le U(\mathbf{x},t;T) \le M_0|\mathbf{x}|^2, \quad |\partial_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x},t;T)|^2 \le M_1 U(\mathbf{x},t;T), \tag{3.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\partial_{x_i}\partial_{x_j} U \le M_2, \quad (\mathbf{x},t) \in \mathcal{C}_r^T. \tag{3.3}$$

В оставшейся части области требуются оценки

$$|\partial_{\mathbf{x}} U|^2 \le M_1 U, \quad L_{T,\mu} U \ge -M_3 U, \quad (\mathbf{x},t) \in D^T \setminus \mathcal{C}_r^T. \tag{3.4}$$

Здесь $M_1, M_2, M_3 = \mathrm{const} > 0,\ M_0 > 1\ \forall T > 0$. Первое условие вместе с (3.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость равновесия (по Ляпунову) [8, с. 70], а второе дает ограниченность матрицы диффузии. Условия (3.4) описывают свойства продолжения функции Ляпунова в слой D^T.

При заданной $U(\mathbf{x},t;T)$ условия (3.3), (3.4) можно рассматривать как ограничения на матрицу диффузии. Задание констант M_2, M_3 выделяет множество этих матриц. Получаемые оценки решения параболической уравнения зависят от этих констант и не зависят от конкретной матрицы $a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)$. Таким образом, неравенства (3.3), (3.4) выделяют множество допустимых возмущений.

4. Барьер

Для определенности приведем определение барьера [19].

О п р е д е л е н и е 3. Барьером для уравнения (2.1) будем называть любую функцию $V(\mathbf{x},t;T,\mu)$, которая имеет непрерывные производные, фигурирующие в дифференциальном операторе $L_{T,\mu}$ из (2.1), и обладает следующим свойством: значение оператора на ней неотрицательно, а именно $L_{T,\mu}V(\mathbf{x},t;T,\mu) \ge 0$ в слое D^T.

При выборе барьера будем исходить из требования малости его при $|\mathbf{x}|,\ \mu \to 0$ равномерно по $t,\ T \le \mathcal{O}(\mu^{-2})$ и требования оценки в начальный момент таковы: $U(\mathbf{x},0;T) \le V(\mathbf{x},0;T,\mu)$. Конструирование барьера в окрестности линии $\{\mathbf{x}=0,\ t>0\}$ составляет основное содержание данного раздела.

В качестве окрестности выгодно использовать область, которая содержится внутри цилиндра $\mathcal{C}_r^T = \{|\mathbf{x}| < r,\ 0 < t < T\}$ и ограничена поверхностью уровня функции Ляпунова:

$$\mathcal{D}_r^T = \{(\mathbf{x},t) \in D^T : U(\mathbf{x},t;T) < r^2\}.$$

Эта окрестность содержит линию $\{\mathbf{x}=0,\ 0<t<T\}$, и при условии (3.2) граница области $\mathcal{D}_r^T$ зажата в цилиндрическом слое $\{r/\sqrt{M_0} \le |\mathbf{x}| \le r,\ t>0\}$.

Далее описывается конструкция барьера. Введем функцию

$$V_0(\mathbf{x},t;T,\mu) = U(\mathbf{x},t;T)\exp(-\alpha_0 t) + \frac{\mu^2 M_2}{\alpha_0}[1-\exp(-\alpha_0 t)], \quad \alpha_0 = \mathrm{const} > 0.$$

При выборе $\alpha_0 \le \gamma$ и при условиях (3.1), (3.2) свойство барьера $L_{T,\mu}V_0(\mathbf{x},t;T,\mu) \ge 0$ выполняется в области $\mathcal{D}_r^T$. Если $r=\infty$, то $U(\mathbf{x},t;T)$ является глобальной функцией Ляпунова и $V_0(\mathbf{x},t;T,\mu)$ будет барьером в слое D^T. Этот случай соответствует [13].

В общем случае условие барьера для функции $V_0(\mathbf{x},t;T,\mu)$ нарушается при $|\mathbf{x}| > r$. Тогда вне области $\mathcal{D}_\rho^T$ $(0<\rho<r)$ добавляется функция

$$V_2(\mathbf{x},t;T,\mu) = P(U)\exp(\alpha t), \quad U = U(\mathbf{x},t;T), \quad (\mathbf{x},t) \in D^T \setminus D_\rho^T,$$

в которой $P(U)$ определяется формулами

$$P(U) = v + \mu^2\Big(m - \frac{\lambda\, v}{\mu^2 + \nu\, v}\Big), \quad v = [U - \rho^2\chi(U)]\frac{\gamma}{M_1}; \quad \alpha, m, \lambda, \nu = \mathrm{const} > 0.$$

Здесь $\chi(U) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — гладкая, монотонно убывающая функция такая, что

$$\chi(U) \equiv 1, \quad U \leq \rho^2; \quad \chi(U) \equiv 0, \quad U \geq r^2.$$

В замыкание области $\mathcal{D}_\rho^T$ эта часть барьера продолжается функцией, похожей на погранслойную:

$$V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu) = m\,\mu^2 \exp\Big(\alpha t + \frac{v}{\mu^2}\Big), \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{D_\rho^T}.$$

Так как в области $\mathcal{D}_\rho^T$ функция $v = [U(\mathbf{x}, t; T) - \rho^2]\gamma/M_1 < 0$ отрицательна, то $V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu)$ будет экспоненциально мала при $\mu \to 0$. В более узкой области, где $U(\mathbf{x}, t; T) < \rho^2/2$, малость $V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu) = \mathcal{O}(\mu^2)$ будет равномерной по $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}_\rho^T$ при $\forall\, T \leq \mathcal{O}(\mu^{-2})$. Это свойство является основной целью предъявляемой конструкции.

Из описанных выше трех функций составляется барьерная функция по формуле

$$V = V_0(\mathbf{x}, t; T, \mu) + \begin{cases} V_1(\mathbf{x}, t; T, \mu), & (\mathbf{x}, t) \in \overline{\mathcal{D}_\rho^T}, \\[2ex] V_2(\mathbf{x}, t; T, \mu), & (\mathbf{x}, t) \in D^T \setminus \overline{\mathcal{D}_\rho^T} \end{cases} \tag{4.1}$$

Проверка свойств барьера при условиях (3.1)–(3.4), выполненная в [18], состоит в подходящем выборе констант $\mu_0, \alpha_0, \alpha, m, \lambda, \nu$ при всех достаточно малых $|\mu| < \mu_0$.

Обратим внимание, что один и тот же барьер годится для уравнений (2.1) с различными матрицами диффузии $A = \{a_{i,j}\}$, множество которых определяется заданием констант M_2, M_3 в условиях (3.3), (3.4). Это свойство является ключевым для выделения множества допустимых возмущений.

5. Устойчивость

В этом разделе анализируется динамическая система (1.1) и ее возмущение в форме стохастического уравнения (1.2). Результаты, полученные выше для параболического уравнения, позволяют доказать устойчивость в смысле определения 1 с заданными оценками $\delta(\varepsilon), \Delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \to 0$. При этом на исходную динамическую систему с вектором $\mathbf{a}(\mathbf{y}, T)$ и на матрицу возмущения $B(\mathbf{y}, T)$ накладываются такие ограничения, которые индуцируют использованные выше ограничения для параболического уравнения при специальном выборе коэффициента $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}, t, T) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, T - t)$ и матрицы диффузии $A(\mathbf{x}, t, T) = BB^*(\mathbf{x}, T - t)$.

Основное ограничение формулируется в виде условия (см. [8, с. 70]).

Условие 1. Для системы (1.1) в области $\mathcal{C}_R = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ T > 0\colon |\mathbf{y}| < R\}$ существует функция Ляпунова $U_0(\mathbf{y}, T) \in C_{2,1}(\mathcal{C}_R)$ со свойствами

$$\partial_T U_0 + \mathbf{a}(\mathbf{y}, T)\partial_{\mathbf{y}} U_0 \leq -\gamma U_0; \quad |\mathbf{y}|^2 < U_0(\mathbf{y}, T) < M_0|\mathbf{y}|^2; \quad |\partial_{\mathbf{y}} U_0|^2 \leq M_1 U_0; \tag{5.1}$$

где $R, \gamma, M_0, M_1 = \mathrm{const} > 0$.

В теоремах устойчивости речь идет о глобальных решениях. Поэтому желательно указать условия, гарантирующие существование таких решений на полубесконечном интервале. Для этого помимо гладкости исходных данных требуются дополнительные ограничения, связанные с поведением на бесконечности [5, с. 107, 113; 20, с. 91]. Мы будем использовать помимо липшицевости требование ограничения на рост в бесконечности в следующей форме:

$$|\mathbf{a}(\mathbf{y}, T)| \leq \mathrm{const} \cdot (1 + |\mathbf{y}|) \ \ \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ T > 0, \tag{5.2}$$

$$\|B(\mathbf{y},T)\| \stackrel{def}{=} \max_{i,j} |b_{i,j}(\mathbf{x},t;T)| \le M\cdot(1+|\mathbf{y}|)\ \forall\,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\quad T>0. \tag{5.3}$$

Исходные матриц-функции $B(\mathbf{y},T)=\{b_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\}$, которые используются в возмущении, всегда можно считать квадратными размером $n\times n$, продолжая при необходимости нулями. Их множество представляет собой линейное пространство, обозначим его $\mathcal{M}^n$.

Поскольку малость возмущения характеризуется множителем μ, то множество возмущений можно выделять, задавая константу M в условиях (5.3). Формально такое множество в пространстве $\mathcal{M}^n$ можно идентифицировать, как шар конечного радиуса в подходящей топологии, например, можно задавать шар в весовой норме по формуле

$$S_M=\big\{B(\mathbf{y},T)\in\mathcal{M}^n\colon \sup_{\mathbf{y},T}||(1+|\mathbf{y}|)^{-1}B(\mathbf{y},T)||\le M\big\}.$$

Кроме того, из-за использовании параболического уравнения требуются дополнительные ограничения, которые гарантируют гладкость математического ожидания от функций на случайных траекториях. Такие ограничения касаются гладкости коэффициентов [21, с. 164]; например, $\mathbf{a}(\mathbf{y},T), B(\mathbf{y},T)\in C_{2,0}(D^\infty)$. Будем также считать, что для первых и вторых производных этих функций выполняются ограничения на рост в бесконечности такие же, как (5.2), (5.3). Шар радиуса M в пространстве таких матриц-функций обозначим через $S_M^{2,0}$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1.1) *существует функция Ляпунова со свойствами* (5.1)*, коэффициент* $\mathbf{a}(\mathbf{y},T)\in C_{2,0}(D^\infty)$*, и выполнено условие* (5.2)*. Тогда для любого* $M>0$ *существуют* $\delta_M,\Delta_M>0$ *такие, что равновесие* $\mathbf{y}=0$ *ограниченно устойчиво относительно шума с заданными оценками* $\delta(\varepsilon)=\delta_M\sqrt{\varepsilon}$*,* $\Delta(\varepsilon)=\Delta_M\sqrt{\varepsilon}$*, равномерно для всех* $B(\mathbf{y},T)$ *из шара* $S_M^{2,0}$ *и* $s\ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к оценке математического ожидания $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T;\mathbf{x},s)\big)^2]$ как решения параболического уравнения. Это уравнение, представленное в (2.1), определяется коэффициентами

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x},t;T)=\mathbf{a}(\mathbf{x},T-t),\quad \{a_{i,j}(\mathbf{x},t;T)\}=BB^*(\mathbf{x},T-t),\quad q(\mathbf{x},t;T-t)\equiv 0.$$

Оценка получается с помощью барьера. Для конструкции барьера надо локальную функцию Ляпунова $U_0(\mathbf{y},T)$ продолжить на $\mathbb{R}^n$, сохраняя оценки (3.4). Поскольку $|\mathbf{y}|^2<U_0(\mathbf{y},T)<M_0|\mathbf{y}|^2$ при $|\mathbf{y}|<R$, то можно понять, что поверхность $z=U_0(\mathbf{y},T)$ допускает продолжение между параболоидами $|\mathbf{y}|^2\le z\le M_0|\mathbf{y}|^2$. Приведем пример такого продолжения. Положим $r=R/\sqrt{2}$ и введем гладкую срезку $\chi(\varrho^2)$ со свойствами

$$\chi(\varrho^2)=1,\quad \varrho<r;\quad \chi(\varrho^2)=0,\quad \varrho>R.$$

Продолжение можно записать в виде

$$\tilde U(\mathbf{y},T)=\chi(|\mathbf{y}|^2)U_0(\mathbf{y},T)+|\mathbf{y}|^2\big[1-\chi(|\mathbf{y}|^2)\big].$$

Переменная T здесь играет роль параметра.

Для параболического уравнения (2.1) функция Ляпунова определяется соотношением $U(\mathbf{x},t;T)=\tilde U(\mathbf{x},T-t)$. Нетрудно проверить, что при выборе $r=R/\sqrt{2}$ все условия (3.1)–(3.4) выполнены. Зафиксируем область D_ρ^T, взяв $\rho=r/\sqrt{2}=R/2$ и соответствующий барьер (4.1). Построенный барьер мажорируется снизу $|\mathbf{x}|^2\le V(\mathbf{x},t;T,\mu)|_{t=0}$ в силу условия (5.2). Тогда по принципу максимума решение параболического уравнения с начальным данным $u|_{t=0}=|\mathbf{x}|^2$ оценивается через барьер: $0\le u(\mathbf{x},t;T,\mu)\le V(\mathbf{x},t;T,\mu)$.

Подчеркнем, что для применения принципа максимума не требуется строгая параболичность; достаточно, чтобы матрица диффузии была неотрицательна [19]. Это обстоятельство позволяет значительно расширить класс допустимых возмущений в уравнении (1.2) по сравнению с результатами [18].

Далее следует уточнить структуру барьера, чтобы получить требуемую оценку для решения. В области $\{|\mathbf{x}| < \rho/\sqrt{M_0},\ 0 < t < T\}$, которая содержится в D_ρ^T, барьер представляется формулой

$$V(\mathbf{x}, t; T, \mu) = U_0(\mathbf{x}, T-t)\exp(-\alpha_0 t) + \frac{\mu^2 M_3}{\alpha_0}[1 - \exp(-\alpha_0 t)] + m\,\mu^2 \exp\Big(\alpha t + \frac{v}{\mu^2}\Big), \qquad (5.4)$$

где $v = U_0(\mathbf{x}, T-t) - \rho^2 < 0$. Поэтому в цилиндре получается оценка

$$u(\mathbf{x}, t; T, \mu) \le M_0|\mathbf{x}|^2 + \mu^2\Big[\frac{M_3}{\alpha_0} + m\exp(\alpha t)\Big].$$

Тем самым на конечном промежутке $0 < t < t_0$, не зависящем от μ^2, имеем $u \le \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2 + \mu^2)$.

Чтобы получить оценку на далеких временах $0 < t < \mathcal{O}(\mu^{-2})$, приходится сужать область, например, взяв $D^T_{\rho/\sqrt{2}}$. Учтем, что в этой области содержится цилиндр $|\mathbf{x}| < \rho/\sqrt{2M_0}$, и справедливо неравенство

$$v = U_0(\mathbf{x}, T-t) - \rho^2 < \rho^2/2 - \rho^2 = -\rho^2/2 = -R^2/8.$$

Поэтому для времен $t \le R^2/8\alpha\mu^2$ экспонента в (5.4) ограничена и решение оценивается по формуле

$$u(\mathbf{x}, t; T, \mu) \le M_0|\mathbf{x}|^2 + \mu^2\Big[\frac{M_3}{\alpha_0} + m\Big].$$

Это неравенство выполняется в цилиндре $\{|\mathbf{x}| < R/\sqrt{8M_0},\ 0 < t \le T\}$, где $T \le R^2/4\alpha\mu^2$.

Следует иметь в виду, что полученная оценка носит условный характер, как и все априорные оценки. Условием является существование решения задачи Коши.

Чтобы применить полученную оценку к функции $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2]$, надо проверить, что эта функция является решением соответствующей параболической задачи. При наложенных ограничениях это свойство имеет место в силу известных результатов о глобальной разрешимости задачи Коши для стохастической системы (1.2) и о гладкости математического ожидания по $\mathbf{x}, t$ (см. [5, с. 107, 113; 21, с. 164]).

Таким образом, на случайной траектории для математического ожидания получена оценка

$$\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2] \le M_0|\mathbf{x}|^2 + \mu^2\Big[\frac{M_3}{\alpha_0} + m\Big].$$

Отсюда вытекает устойчивость в смысле определения 1: $\mathbb{E}[\big(\mathbf{y}_\mu(T; \mathbf{x}, s)\big)^2] < \varepsilon$ при $|\mathbf{x}| < \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2M_0}$, $|\mu| < \Delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2\big[M_3/\alpha_0 + m\big]}$, $0 < T \le R^2/4\alpha\mu^2$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если для невозмущенной системы существует глобальная функция Ляпунова, то устойчивость будет на бесконечном промежутке $0 < t < \infty$ (см. [13]). В общем случае вопрос об устойчивости относительно шума на далеких временах $t \gg \mathcal{O}(\mu^{-2})$ остается открытым.

6. Пример

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dr}{dt} = a(t)\sin\varphi - \Gamma r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -r, \quad t > 0 \quad \big(\Gamma = \mathrm{const} \ge 0,\ a(t) > 0\big), \qquad (6.1)$$

которая, в частности, описывает математический маятник с учетом сопротивления. Математическая модель маятника выводится из закона Ньютона и обычно записывается в форме уравнения второго порядка. На уровне такой модели можно рассматривать возмущения типа белого шума, как случайную внешнюю силу [5, с. 122]. При переходе к системе уравнений первого порядка (6.1) возмущения оказываются в одном из уравнений (см. [22]). В этом случае параболическое уравнение Колмогорова получается вырожденным, поскольку для двумерной матрицы диффузии ранг оказывается единичным ($\operatorname{rank} A = 1$). Результаты из [18] опираются на условие строгой параболичности и потому не гарантируют устойчивость относительно таких возмущений. Между тем, как показано выше, вырожденность параболического уравнения не играет роли.

Рассмотрим возмущение системы (6.1) в общей ситуации в виде стохастических уравнений Ито:

$$dr = [a(t)\,\sin\varphi - \Gamma r]dt + \mu\, b_1 dw_1(t), \quad d\varphi = -r\,dt + \mu\, b_2 dw_2(t), \quad t > 0.$$

Здесь $0 < \mu^2 \ll 1$; $w_1(t), w_2(t)$ — независимые винеровские процессы. Некоторые из коэффициентов $b_1, b_2 = \text{const}$ могут обращаться в нуль, так что для соответствующей матрицы диффузии гарантируется лишь неотрицательность.

В невозмущенной системе (при $\mu = 0$) имеются как устойчивые, так и неустойчивые положения равновесия. Относительно белого шума любое из равновесий будет неустойчиво в обычном смысле [13]. Однако свойство устойчивости сохраняется в ограниченном смысле.

Теорема 2. *Пусть функция* $a(t) \in C_2$ *и* $1 \le a(t) \le a_0 < \infty$. *Если* $\Gamma > 0$ *и* $a'(t) \le a_1 < \Gamma/(1+\Gamma^2/2)$, *то равновесие* $r = 0$, $\varphi = 0$ *в системе* (6.1) *ограниченно устойчиво относительно шума равномерно по* b_1, b_2 *на любом компакте с оценками* $\delta(\varepsilon), \Delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для невозмущенной системы имеется функция Ляпунова

$$U_0(r,\varphi,t) = 2[r^2 + a(t)\varphi^2 - 2\alpha\, r\varphi], \quad r,\varphi \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

в которой параметр α надо выбрать из условия $a_1 < \alpha < \Gamma/(1+\Gamma^2/2)$. При таких ограничениях эта функция будет положительно определенной, а ее производная в силу системы (6.1) будет отрицательно определенной в окрестности точки $r = 0$, $\varphi = 0$. Поскольку условия (5.1) выполнены, то применима теорема 1. Следовательно, равновесия ограниченно устойчиво. Теорема доказана.

Отметим, что похожие задачи о случайных возмущениях для уравнений, возникающих в теории авторезонанса, обсуждаются в последнее время [22;23]. Приведенные здесь результаты и конструкции функций Ляпунова для уравнений главного резонанса [24] позволят на аналитическом уровне решить вопрос об устойчивости относительно шума для разных моделей авторезонанса.

Автор выражает признательность профессору Ф.С.Насырову за обсуждение и консультации по тематике случайных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Физматгиз, 1977. 568 с.
2. **Schuss Z.** Theory and applications of stochastic processes. New York: Springer, 2010. 468 p. (Appl. Math. Sci.; vol. 170.)
3. **Ляпунов М.А.** Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 472 с.
4. **Кац И.Я., Красовский Н.Н.** Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, №5. С. 809–823.
5. **Хасьминский Р.З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
6. **Хапаев М. М.** Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая шк., 1988. 184 с.
7. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 432 с.
8. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

9. **Гермаидзе В.Е., Красовский Н.Н.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 6. С. 769–774.
10. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
11. **Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.** Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–290. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления; т. 3).
12. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 5. С. 3–72.
13. **Хасьминский Р.З.** Об устойчивости при постоянно действующих случайных возмущениях. Теория передачи информации. Опознание образов: сб. М.: Наука, 1965. С. 74–87.
14. **Кац И.Я.** Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: Изд-во УрГАПС, 1998. 222 с.
15. **Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.** Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
16. **Ishii H., Souganidis P.E.** Metastability for parabolic equation with drift: Part 1 // arXiv:1312.5504v1 [math.AP] 19 Dec 2013. 32 p. URL: http://arxiv.org/abs/1312.5504.pdf.
17. **Kalyakin L.** Stability under persistent perturbation by white noise // J. Phys: Conf. Ser. 2014. Vol. 482. P. 1–8. DOI:10.1088/1742-6596/482/1/012019.
18. **Kalyakin L.A.** Lyapunov functions in barriers for parabolic equations and in stability problems with respect to “white noise” // Russ. J. Math. Phys. 2014. Vol. 21, no. 4. P. 472–483.
19. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
20. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003. 407 с.
21. **Крылов Н.В.** Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977. 400 с.
22. Resonant acceleration of charged particles in the presence of random fluctuations / A. Artemyev, D. Vainchtein, A. Neishtadt, L. Zelenyi // Phys. Rev. E 84. 2011. P. 046213-1–5.
23. Autoresonance transition in the presence of noise and self-fields / I. Bart, L. Friedland, E. Sarid, A.G. Shagalov // Phys. Rev. Letters. 2009. Vol. 103. P. 155001-1–4.
24. **Калякин Л.А., Султанов О.А.** Устойчивость моделей авторезонанса // Дифференц. уравнения. 2013. Vol. 49, № 3. С. 279–293.

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики с вычислительным центром РАН
e-mail: klenru@mail.ru

Поступила 4.11.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 512.542

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДОПОЛНЕНИЙ К КОРАДИКАЛАМ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Ф. Каморников, О. Л. Шеметкова

В статье развивается теорема Л. А. Шеметкова о дополняемости корадикала конечной группы. Доказано, что если $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, конечная группа G представима в виде произведения субнормальных подгрупп A и B, подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ нормальны в G и являются $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимыми и, кроме того, для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением $\mathfrak{F}$-корадикала группы G.

Ключевые слова: конечная группа, субнормальная подгруппа, формация, корадикал, дополняемая подгруппа, локальная формация Фиттинга.

S. F. Kamornikov, O. L. Shemetkova. On the existence of complements for residuals of finite groups.

L. A. Shemetkov's theorem on the complementability of the $\mathfrak{F}$-residual of a finite group is developed in the article. For a local Fitting formation $\mathfrak{F}$, it is proved that, if a group G is representable in the form $G = AB$, where A and B are subnormal subgroups of G, the subgroups $A^{\mathfrak{F}}$ and $B^{\mathfrak{F}}$ are $\pi(\mathfrak{F})$-solvable and normal in G, and Sylow p-subgroups of $A^{\mathfrak{F}}$ and $B^{\mathfrak{F}}$ are abelian for every $p \in \pi(\mathfrak{F})$, then every $\mathfrak{F}$-normalizer of G is the complement for an $\mathfrak{F}$-residual of G.

Keywords: finite group, subnormal subgroup, formation, residual, complement, local Fitting formation.

Введение

Как отмечено в [1, с. 190], в теории конечных групп большое значение имеет вопрос о существовании дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалам. Центральное место в решении этого вопроса сегодня занимает следующий результат Л. А. Шеметкова [2; 3, теорема 3.2]:

Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и G — конечная группа. Если для любого простого числа p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.

Универсальность приведенной теоремы проявляется в следующем:

1) никаких ограничений (кроме абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала группы G) на конечную группу G не налагается;

2) теорема справедлива для произвольной локальной формации $\mathfrak{F}$;

3) она включает в себя практически все известные результаты о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов (в том числе теорему Шура — Цассенхауза о дополняемости нормальной холловой подгруппы, теорему Ф. Холла о дополняемости коммутанта разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами [4], теорему Гашюца о дополняемости абелевого $\mathfrak{F}$-корадикала [5], теорему Хупперта [6] о дополняемости подгруппы $O^p(G)$, обладающей абелевой силовской p-подгруппой).

Примеры показывают, что условие коммутативности соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала в приведенной теореме Л. А. Шеметкова существенно и потому полностью отбросить его нельзя. Отсюда следует, что любой прогресс в попытках ослабить это условие теоремы может быть связан только с введением дополнительных ограничений либо на саму группу G, либо на локальную формацию $\mathfrak{F}$.

В данной работе определенный прогресс достигается за счет рассмотрения группы G, представимой в виде произведения своих субнормальных подгрупп. Правда, при этом приходится жертвовать общностью локальной формации $\mathfrak{F}$, заменяя ее локальной формацией Фиттинга. При таком подходе условие коммутативности соответствующих силовских подгрупп

$\mathfrak{F}$-корадикала конечной группы G в теореме Л. А. Шеметкова ослабляется до условия коммутативности силовских подгрупп для $\mathfrak{F}$-корадикалов ее субнормальных сомножителей.

1. Основные определения и предварительные результаты

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [7; 8].

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G). Если $\mathfrak{F}$ — формация всех p-групп (p — некоторое простое число), то $\mathfrak{F}$-корадикал группы G обозначается через $O^p(G)$.

Лемма 1 [7, лемма 1.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, N — нормальная подгруппа группы G и H — подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$;

2) *если $G = HN$, то $G^{\mathfrak{F}}N = H^{\mathfrak{F}}N$.*

Класс $\mathfrak{F}$ групп называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Лемма 2 [9, лемма 2]. *Непустая формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда является формацией Фиттинга, когда для любых двух перестановочных субнормальных подгрупп A и B произвольной группы G имеет место равенство $(AB)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.*

Напомним определение локальной формации. Пусть P — множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : \mathrm{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией.*

Для формационной функции f главный фактор A/B группы G называется *f-центральным* (соответственно *f-эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \mathrm{Aut}_G(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс $\mathfrak{F} = LF(f)$ групп называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп G таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы G является f-центральным. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется с помощью формационной функции f, а формационная функция f — *локальное определение формации* $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{G}_p$ — класс всех p-групп, f — формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда функция f называется:

(a) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{G}_p f(p)$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(c) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в [8, теорема IV.3.7], для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция f такая, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Следуя определению 5.5 из [7], главный фактор H/K будем называть $\mathfrak{F}$-*центральным* (соответственно $\mathfrak{F}$-*эксцентральным*), если он f-централен (соответственно f-эксцентрален) для некоторого внутреннего локального определения f формации $\mathfrak{F}$.

Нам понадобится следующая информация о свойствах $\mathfrak{F}$-корадикала. При этом под главным pd-фактором группы понимается главный фактор, порядок которого делится на p.

Лемма 3 [7, теорема 11.6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если для некоторого простого числа p силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.*

Пусть G — p-разрешимая группа. Это означает, что она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_n = G,$$

в котором каждая фактор-группа G_{i+1}/G_i является либо p-группой, либо p'-группой. Поэтому для такой группы можно определить ряд

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq ... \subseteq P_l \subseteq N_l = G,$$

где $N_i/P_i = O_{p'}(G/P_i)$ — наибольшая нормальная p'-подгруппа в G/P_i, а P_{i+1}/N_i — наибольшая нормальная p-подгруппа в G/N_i. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют *p-длиной* группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Следуя [7], дадим определение $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной конечной группы для случая, когда $\mathfrak{F}$ — локальная формация.

Нормальная подгруппа R группы G называется $\mathfrak{F}$-*предельной* нормальной подгруппой, если $R/R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-*эксцентральным* главным фактором группы G. Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-*критической* в G, если в G найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R, что $MR = G$. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-*нормализатором* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_n = G \ (n \geq 0),$$

в которой подгруппа H_{i-1} $\mathfrak{F}$-критична в H_i для всех $i = 1, 2, ...n$. По определению каждая группа G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Отметим, что одна из характеризаций $\mathfrak{F}$-нормализатора (в терминах $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральных элементов) группы G с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом приведена в работе [10].

Для доказательства основных результатов нам понадобится также следующая информация о свойствах $\mathfrak{F}$-нормализаторов.

Пусть H — подгруппа, а A/B — нормальный фактор группы G. Говорят, что

1) H *покрывает* фактор A/B, если $HB \supseteq A$;

2) H *изолирует* фактор A/B, если $H \cap A \subseteq B$.

Лемма 4 [7, следствие 21.1.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если F — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то F покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.*

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга и группа G представима в виде произведения субнормальных подгрупп A и B, причем подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ нормальны в G. Если для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы, то $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Очевидно, $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду леммы 1 справедливы равенства $(AN/N)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}N/N$ и $(BN/N)^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}N/N$. Поэтому силовские p-подгруппы из $(AN/N)^{\mathfrak{F}}$ и $(BN/N)^{\mathfrak{F}}$ абелевы. Кроме того, группа G/N представима в виде произведения субнормальных подгрупп AN/N и BN/N. Значит, ввиду выбора группы G $\mathfrak{F}$-корадикал группы G/N не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Если N не содержится в $G^{\mathfrak{F}}$, то ввиду леммы 1 имеем, что $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N \simeq G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда на основании выбора группы G следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Противоречие. Значит, любая минимальная нормальная подгруппа N группы G содержится в $G^{\mathfrak{F}}$.

Если L — минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично показывается, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}/L$ группы G/L не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Но тогда ввиду изоморфизма $G^{\mathfrak{F}} \simeq G^{\mathfrak{F}}/N \cap L$ следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Получили противоречие с выбором группы G.

Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. При этом каждый главный pd-фактор группы G на участке от N до $G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным. А так как для группы G теорема не верна, то минимальная нормальная подгруппа N группы G является pd-подгруппой, которая $\mathfrak{F}$-центральна в G. Если f — каноническое локальное определение формации $\mathfrak{F}$, то $G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$, а поэтому $N \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$. Отсюда следует, в частности, что N — абелева p-группа.

Пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех p-разрешимых групп. Ввиду теоремы Хупперта [6; 7, теорема 5.11] подгруппы $(A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$ и $(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$ не содержат композиционных факторов порядка p. Ввиду леммы 2 справедливо равенство $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$. Так как формация всех p-разрешимых групп является формацией Фиттинга, то на основании леммы 2 подгруппа $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$ представима в виде $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} = (A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$. Отсюда следует, что p-разрешимый корадикал группы $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит композиционных факторов порядка p. А так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} = 1$, т.е. группа $G^{\mathfrak{F}}$ p-разрешима. Значит, p-разрешимы и подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$. Тогда ввиду [7, следствие 5.11.1] имеют место неравенства $l_p(A^{\mathfrak{F}}) \leq 1$ и $l_p(B^{\mathfrak{F}}) \leq 1$. Так как класс всех групп, p-длина которых не превосходит 1, является классом Фиттинга, то $l_p(G^{\mathfrak{F}}) \leq 1$. Теперь из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что $O_{p'}(G) = 1$. Значит, группа $G^{\mathfrak{F}}$ имеет нормальную силовскую p-подгруппу P.

Пусть P_1 — силовская p-подгруппа из $A^{\mathfrak{F}}$, а P_2 — силовская p-подгруппа из $B^{\mathfrak{F}}$. Ввиду [7, лемма 11.6] справедливо равенство $P = P_1P_2$. Так как подгруппы P_1 и P_2 являются нормальными в G, то подгруппа $P_1 \cap P_2$ нормальна в P. Рассмотрим группу $P/P_1 \cap P_2$. Простая проверка показывает, что

$$P/P_1 \cap P_2 = (P_1/P_1 \cap P_2) \times (P_2/P_1 \cap P_2).$$

Отсюда и из абелевости подгрупп P_1 и P_2 следует, что $P/P_1 \cap P_2$ — абелева группа. Значит,

$$P' = [P, P] \subseteq P_1 \cap P_2 \subseteq A^{\mathfrak{F}} \cap B^{\mathfrak{F}}.$$

Возможны следующие два случая.

1. Пусть $P' = 1$. Тогда P — абелева группа. По лемме 3 подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Пришли к противоречию с тем, что минимальная нормальная подгруппа N $\mathfrak{F}$-центральна в G.

2. Пусть $P' \neq 1$. Так как подгруппа P нормальна в G, а коммутант P' подгруппы P характеристичен в P, то подгруппа P' нормальна в G. Отсюда и из того, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, имеем $N \subseteq P'$. А так как $P' \subseteq A^{\mathfrak{F}} \cap B^{\mathfrak{F}}$, то, в частности, $N \subseteq A^{\mathfrak{F}}$. Ввиду [7, теорема 4.7] формация $f(q)$ является нормально наследственной для любого простого числа q. Поэтому из $G/C_G(N) \in f(p)$ и субнормальности в $G/C_G(N)$

подгруппы $AC_G(N)/C_G(N)$ следует, что

$$AC_G(N)/C_G(N) \in f(p).$$

Ввиду изоморфизма

$$AC_G(N)/C_G(N) \simeq A/A \cap C_G(N) = A/C_A(N)$$

имеем $A/C_A(N) \in f(p)$. Это означает, что все A-главные pd-факторы подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ на участке от 1 до N являются $\mathfrak{F}$-центральными в A. Однако на основании леммы 3 $\mathfrak{F}$-корадикал $A^{\mathfrak{F}}$ подгруппы A не содержит A-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следующая теорема не только устанавливает дополняемость $\mathfrak{F}$-корадикала группы, но и фиксирует важные свойства дополнений.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга и группа G представима в виде произведения субнормальных подгрупп A и B, причем подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ нормальны в G. Если подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ являются $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимыми и для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. На основании теоремы 1 все G-главные факторы группы $G^{\mathfrak{F}}$ являются $\mathfrak{F}$-эксцентральными в G.

Пусть

$$1 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = G^{\mathfrak{F}}$$

— некоторый G-главный ряд подгруппы $G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 2 справедливо равенство $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$. Отсюда, в частности, следует, что подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой. Поэтому на основании леммы 4 $\mathfrak{F}$-нормализатор F изолирует все факторы рассматриваемого ряда, т. е. $F \cap N_i \subseteq N_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует, что

$$F \cap G^{\mathfrak{F}} = F \cap N_n \subseteq F \cap N_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq N_0 = 1,$$

т. е. $F \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Кроме того, $FG^{\mathfrak{F}} = G$. Значит, $\mathfrak{F}$-нормализатор F является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В отличие от теоремы 2 в теореме 1 не требуется, чтобы $\mathfrak{F}$-корадикал группы G был $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым.

Следствие 1 [11, теорема 2.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга и пусть группа G представима в виде произведения нормальных подгрупп A и B. Если подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ являются $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимыми и для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга и группа G представима в виде произведения субнормальных подгрупп A и B, причем подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ нормальны в G. Если подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 3. *Пусть группа G представима в виде произведения субнормальных подгрупп A и B, причем подгруппы $O^p(A)$ и $O^p(B)$ нормальны в G. Если подгруппы $O^p(A)$ и $O^p(B)$ являются p-разрешимыми и силовские p-подгруппы из $O^p(A)$ и $O^p(B)$ абелевы, то каждый $\mathfrak{G}_p$-нормализатор группы G является дополнением подгруппы $O^p(G)$.*

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, и группа G имеет разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал и представима в виде произведения субнормальных подгрупп A и B, причем подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ нормальны в G. Если для любого простого числа p силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шеметков Л.А.** Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 2. С. 179–198.
2. **Шеметков Л.А.** О формационных свойствах конечных групп // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1324–1327.
3. **Шеметков Л.А.** Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.
4. **Hall P.** The construction of soluble groups // J. Reine Angew. Math. 1940. Vol. 182. P. 206–214.
5. **Gaschuütz W.** Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1952. Vol. 190. P. 93–107.
6. **Huppert B.** Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen // Acta Sci. Math. 1961. Vol. 22. P. 46–61.
7. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
8. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
9. **Каморников С.Ф.** О некоторых свойствах формации квазинильпотентных групп // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 2. С. 71–77.
10. **Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.** О подгруппах, покрывающих только $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 158–163.
11. **Каморников С.Ф.** О дополнениях корадикала конечной группы // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2013. № 6. С. 17–23.

Каморников Сергей Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступила 30.06.2014

Шеметкова Ольга Леонидовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
e-mail: ol-shem@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА АВТОРЕЗОНАНСНОГО СОЛИТОНА[1]

О. М. Киселев

Исследована автофазировка в одномерной среде при воздействии внешней силы с медленно меняющейся частотой. В типичной ситуации автофазировка описывается нестационарным нелинейным уравнением Шредингера с внешней силой. При больших значениях временной переменной построен главный член локализованного в пространстве растущего асимптотического решения с солитонным профилем в главном порядке. Оказалось, что растущее по времени асимптотическое решение может быть получено для внешнего возбуждения с убывающей амплитудой. Выведены необходимые условия роста такого решения при диссипации.

Ключевые слова: авторезонанс, автофазировка, солитон.

O. M. Kiselev. Asymptotics of an autoresonance soliton.

Phase locking is studied in a one-dimensional medium under the action of an external force with slowly changing frequency. In a typical situation, the phase locking is described by a nonstationary nonlinear Schrödinger equation with external force. For large values of the time variable, the leading term of a space-localized growing asymptotic solution with soliton profile in the principal order is constructed. It turned out that a time-growing asymptotic solution can be obtained for an external perturbation with decreasing magnitude. Necessary growth conditions are deduced for such a solution under dissipation.

Keywords: autoresonance, phase locking, soliton.

Введение

В работе исследуется асимптотическое при $\tau \to \infty$ решение уравнения

$$-i\partial_\tau \Psi + \partial_\zeta^2 \Psi + \left(|\Psi|^2 - \tau\right) \Psi + F - i\frac{\nu}{2}\Psi = 0. \qquad (0.1)$$

Это уравнение определяет огибающую одиночной моды плоской волны малой амплитуды в нелинейной среде с внешним осциллирующим возбуждением, частота которого линейно меняется. Здесь комплекснозначная функция F определяется огибающей возмущения в среде, параметр ν определяется диссипацией в среде. Уравнение (0.1) можно рассматривать как обобщение нелинейного уравнения Шредингера [1–3], а также как аналог известного обыкновенного уравнения главного резонанса [4; 5] и как нелинейное обобщение уравнения локального резонанса [6].

С точки зрения приложений в физике важно изучить асимптотические свойства решений этого уравнения при больших τ и выделить растущие по τ и локализованные по ζ решения, если таковые существуют. В ситуации общего положения существование растущих решений открывает путь к генерации уединенной волны конечной амплитуды на авторезонансе или, что то же самое, при автофазировке. Ранее были получены асимптотические формулы для генерации огибающей в виде солитона нелинейного уравнения Шредингера на локальном резонансе [7; 8]. Для авторезонанса известны в большей степени численные результаты по генерации кноидальных волн, близких к солитонам [9; 10], и по управлению параметрами солитона как конечной, так и малой амплитуды с помощью внешней накачки [11–13].

Хорошо известно уравнение главного резонанса, определяющее нелинейную динамическую систему с авторезонансом:

$$i\psi' + (|\psi|^2 - \tau)\psi = F. \qquad (0.2)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00078).

Существуют авторезонансные решения уравнения (0.2), растущие, как $\sqrt{\tau}$ при $F = \mathrm{const}$ (см., например, обзор [5]).

Удивительный факт — существование специального решения $\psi = \sqrt{\tau}e^{ia}$, где $a \in [0, 2\pi)$, уравнения главного резонанса (0.2) с убывающей накачкой $F = ie^{ia}/(2\sqrt{\tau})$. Это специальное решение растет так же быстро, как авторезонансные решения уравнения с постоянной неубывающей накачкой F. По сути, все растущие, как $\sqrt{\tau}$, решения уравнения (0.2) с амплитудой накачки F из интервала $\mathcal{O}(1/\sqrt{\tau}) \le F \le \mathcal{O}(\sqrt{\tau})$ можно рассматривать как возмущения этого специального решения.

Цель предлагаемой работы — построить солитонный аналог специального растущего решения для (0.1), который бы являлся главным членом авторезонансной асимптотики.

Результат работы состоит в том, что приведены необходимые условия для параметров главного члена растущего по τ и локализованного по ζ асимптотического решения уравнения (0.1):

$$\Psi \sim -\sqrt{2\tau}\,\frac{2i\eta_0 \exp(-2i\kappa_0\sqrt{\tau}\zeta - 2i(\kappa_0^2 - \eta_0^2)\tau^2 + i\alpha_0)}{\cosh(2\eta_0\sqrt{\tau}\zeta + 4\eta_0\kappa_0\tau^2 + \beta_0)}.$$

В частности, для наиболее простого случая $F = \mathrm{const}$ параметры решения $\kappa_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0$ такие, что

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1, \quad \alpha_0 - \frac{\kappa_0\beta_0}{\eta_0} = \frac{\pi}{2} - \arg(F).$$

1. Вывод модельного уравнения для авторезонанса

Для прояснения связи между параметрами нелинейной среды и уравнением (0.1) полезно привести схему вывода уравнения (0.1), например, воспользовавшись уравнением sine-Gordon. Уравнение sine-Gordon является популярной моделью при исследовании уединенных волн в различных нелинейных средах с дисперсией. Учет внешних возмущений среды приводит к различным вариантам возмущений уравнения sine-Gordon. В предлагаемой работе изучается зарождение уединенной волны — бризера в возмущенном уравнении

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = \varepsilon^3 f\cos(S) - \varepsilon^3\nu u_t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{1.1}$$

Фаза возмущения $S = kx + \omega t - \varepsilon^2 t^2/2$, где $\omega^2 = k^2 + 1$, k — произвольный параметр. Амплитуда возмущения — f. Возмущенное уравнение (1.1) учитывает, например, слабое внешнее воздействие.

В этом разделе приведена схема вывода нелинейного уравнения солитонного авторезонанса. Эта схема повторяет известный формальный вывод автономного нелинейного уравнения Шредингера для слабонелинейных волн [1–3]. Приведенные ниже выкладки объясняют появление неавтономного слагаемого в нелинейном уравнении Шредингера и связь этого слагаемого с модулированной частотой внешнего возмущения уравнения (1.1). Математическое обоснование приведенной здесь схемы возможно при педантичном следовании [14].

Будем считать переменные x, t быстрыми, а переменные $t_1 = \varepsilon t$, $x_1 = \varepsilon x$, $t_2 = \varepsilon^2 t$ — медленными. Асимптотическое решение с малой амплитудой будем строить с помощью метода многих масштабов:

$$u(x, t, \varepsilon) \sim \varepsilon u_1(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon) + \varepsilon^3 u_3(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon). \tag{1.2}$$

Зависимость от быстрых и медленных переменных удобно разделить, оставив зависимость от быстрых переменных и малого параметра только в фазовой переменной S:

$$u_1(x, t, x_1, t_1, t_2, \varepsilon) = A(t_1, x_1, t_2)\exp(iS) + c.c.,$$

где *c.c.* — комплексно сопряженное слагаемое.

После подстановки асимптотической формулы (1.2) в уравнение (1.1) и разложения по степеням параметра ε в порядке ε получится тождественный нуль. В порядке ε^2 получается неоднородное уравнение для u_2:

$$\partial_{tt}u_2 - \partial_{xx}u_2 + u_2 = (-i\omega\partial_{t_1}A + ik\partial_{x_1}A)\exp(iS) + c.c.. \tag{1.3}$$

Зависимость от быстрых переменных в множителе $\exp(iS)$ из правой части этого уравнения содержит решение однородного уравнения для u_2. Такая правая часть приводит к растущим по быстрой переменной решениям уравнения для u_2. Для равномерной ограниченности по t необходимо выполнение условия

$$\omega\partial_{t_1}A - k\partial_{x_1}A = 0. \tag{1.4}$$

Это условие — уравнение для A. Решение этого уравнения — произвольная функция от характерной переменной $\xi_1 = kt_1 + \omega x_1$. В результате уточнена зависимость u_1 от медленных переменных x_1 и t_1: $A = A(\xi_1, t_2)$.

В порядке ε^3 получается уравнение

$$\partial^2_{tt}u_3 - \partial^2_{xx}u_3 + u_3 = f\cos(S) + \frac{1}{6}u_1^3 - 2i\omega\partial_{t_2}u_1 + \partial^2_{\xi_1}u_1 - 2t_2\omega u_1 - i\nu\omega u_1. \tag{1.5}$$

Для ограниченности u_3 по быстрой переменной t необходимо исключить слагаемые, соответствующие решениям однородного уравнения из правой части. В результате получается уравнение для функции A:

$$-2i\omega\partial_{t_2}A + \partial^2_{\xi_1}A + \Big(-2\omega t_2 + \frac{1}{2}|A|^2\Big)A + \frac{1}{2}f - i\nu\omega A = 0. \tag{1.6}$$

Переобозначим $t_2 = \tau$ и сделаем замены: $\sqrt{2\omega}\xi_1 = \zeta$, $A(t_2,\xi_1) = 2\sqrt{\omega}\Psi(\tau,\zeta)$, $F = f/(8\sqrt{\omega^3})$. В результате получится уравнение (0.1). Это уравнение является обобщением нелинейного уравнения Шредингера для авторезонанса с диссипацией.

Результат этого раздела — формальный вывод уравнения (0.1) как уравнения для огибающей волны малой амплитуды в среде с дисперсией и диссипацией.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Уравнение* (0.1) *является необходимым условием ограниченности при* $t = O(\epsilon^{-2})$ *поправок в формальном асимптотическом решении* (1.2) *уравнения* (1.1).

2. Специальное возмущение нелинейного уравнения Шредингера

Для того чтобы убедиться, что уравнение (0.1) действительно определяет авторезонансную накачку в нелинейной среде, необходимо показать, что это уравнение допускает решения растущие по τ и локализованные по переменной ζ. В этом разделе исследуется бездиссипативная система, т. е. $\nu = 0$.

Для исследования растущих при $\tau \to \infty$ решений удобно сделать замены

$$\overline{\Psi} = \sqrt{2\sqrt{2\sigma}}\phi(\sigma,z)\exp(-i\sigma), \quad \sigma = \frac{\tau^2}{2}, \quad z = \sqrt[4]{2\sigma}\zeta.$$

Здесь и ниже черта сверху означает комплексное сопряжение.

Подставим формулу для Ψ в уравнение. После несложных преобразований получим

$$i\partial_\sigma\phi + \partial_{zz}\phi + 2|\phi|^2\phi + \frac{\mathcal{F}}{\sigma^{3/4}}\exp(i\sigma) + \frac{i}{4\sigma}\phi = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{F} = \overline{F}/(2\sqrt[4]{2})$. Это уравнение ниже называется возмущенным нелинейным уравнением Шредингера. Как возмущение здесь рассматриваются слагаемые с убывающими при $\sigma \to \infty$ коэффициентами.

В результате построение авторезонансного решения при $\sigma \to \infty$ сводится к построению решения возмущенного нелинейного уравнения Шредингера с неубывающей амплитудой.

Солитонное решение невозмущенного нелинейного уравнения Шредингера при $\nu = 0$ имеет вид

$$\psi_0 = \frac{2i\eta \exp(-2i\kappa z - i\Omega + \alpha)}{\cosh(2\eta z + V + \beta))},$$

где $\Omega = 4(\kappa^2 - \eta^2)\sigma$, $V = 8\kappa\eta\sigma$. Параметры решения: $\kappa, \eta, \alpha, \beta$ вещественные.

С помощью прямых замен можно показать, что при $\mathcal{F} \equiv 0$ амплитуда солитонных решений возмущенного уравнения (2.1) убывает при $\sigma \to \infty$. Для этого достаточно заметить, что уравнение (0.1) при $\nu = 0$ и $\mathcal{F} \equiv 0$ заменой $\overline{\Psi} = \sqrt{2\sqrt{2}}\psi \exp(-i\tau)$ приводится к невозмущенному нелинейному уравнению Шредингера для функции ψ. В соответствии с заменой для ϕ солитонные решения нелинейного уравнения для ψ переходят в локализованные убывающие решения уравнения (2.1) при $\mathcal{F} \equiv 0$.

Прямая подстановка ψ_0 в возмущенное уравнение (2.1) дает формулу для возмущения

$$\mathcal{F} = \frac{-i}{4\sigma^{1/4}}\psi_0,$$

при котором заведомо существует авторезонансное решение.

Такой выбор возмущения выглядит как специальный трюк. В следующем разделе будет показано, что при возмущении более общего характера солитонное решение является главным членом асимптотического решения при $\sigma \to \infty$.

Если полагать, что амплитуда накачки зависит от временной переменной σ монотонно, тогда получим ограничение на параметры солитонной асимптотики

$$4(\eta^2 + \kappa^2) = 1. \tag{2.2}$$

В результате для внешней накачки, убывающей по σ и локализованной по z, получим формулу

$$\mathcal{F} = \frac{\eta \exp(-2i\kappa y/\eta)}{2\sqrt[4]{\sigma}\cosh(y)}, \quad y = 2\eta z + 8\kappa\eta\sigma.$$

В этом разделе приведена в явном виде формула для амплитуды накачки, при которой существует авторезонансное локализованное решение.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *В случае внешней накачки специального вида $\mathcal{F}$ существует экспоненциально убывающее по $|\zeta|$ решение уравнения* (0.1), *амплитуда которого растет, как $\mathcal{O}(\sqrt{\tau})$.*

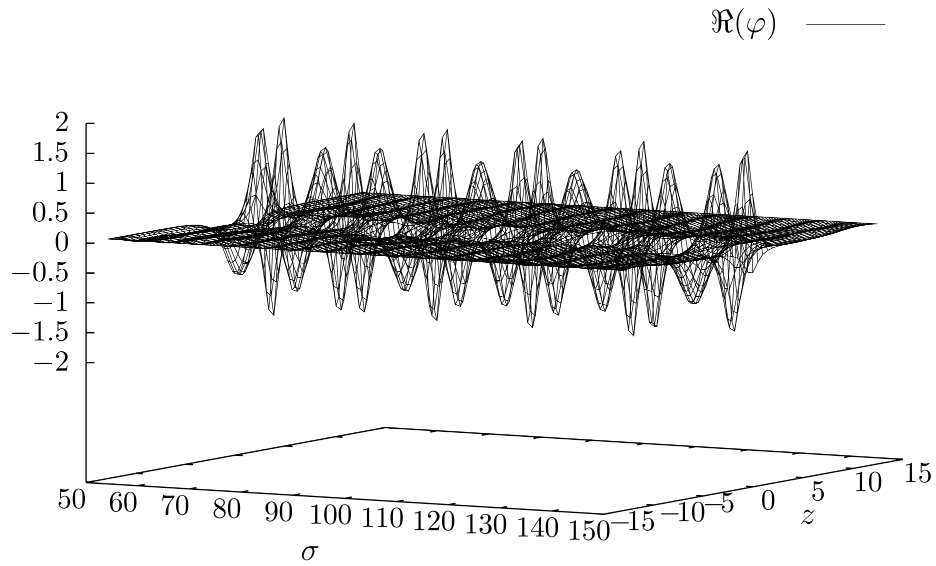
3. Численное решение

Для построения численного решения уравнения (2.1) при $\mathcal{F} \equiv 1$ поставим смешанную задачу с солитонным начальным условием при большом значении σ и нулями на границе при большом значении $|z|$. Численное решение построено с помощью неявной схемы и метода прогонки. Частные производные по z вычисляются по пяти точкам с шагом 0.05. Шаг сетки по σ равен 0.001. Численное решение получено для смешанной задачи для уравнения (2.1) с начальным условием

$$\phi = \frac{-2\eta \exp(-4i\eta^2\sigma)}{\cosh(2\eta z)}$$

при $\sigma = 50$, параметром $\eta = 1/2$ и нулях при $|z| = 15$.

Результат вычислений представлен на рисунке. Там показана вещественная часть неубывающего и сохраняющего солитонную форму численного решения. Такое решение соответствует авторезонансу. В соответствии с результатом предыдущего раздела параметры авторезонансного решения: $\kappa = 0$, $\eta = 1/2$.



Вещественная часть незатухающего численного решения с солитонным профилем.

4. Асимптотическое решение возмущенного нелинейного уравнения Шредингера

Здесь построен главный член асимптотики для уравнения (2.1) при $\sigma \to \infty$ в солитонной форме. При построении удобно воспользоваться известными результатами теории возмущения солитонов [15–17]. Напрямую они неприменимы, поскольку разработаны для возмущения уравнения по произвольному малому параметру и для построения семейства решений по этому параметру. Здесь же исследуется уравнение с возмущением, убывающим при $\sigma \to \infty$.

Поправки теории возмущений в порядках $\mathcal{O}(\sigma^{-\gamma})$, где $\gamma > 1$, могут быть построены методами [15–17]. Однако для построения главного члена приходится использовать немного измененный вид.

Будем искать решение возмущенного уравнения (2.1) при $\sigma \to \infty$ с главным членом в виде

$$\phi \sim \psi_0 + \sigma^{-3/4}\psi_1. \tag{4.1}$$

Здесь $\psi_1 = \psi_1(\sigma, z)$ — поправка теории возмущений. Параметры солитонного решения будем строить в виде

$$\alpha \sim \alpha_0 + \sigma^{-1/4}\alpha_1, \quad \beta \sim \beta_0 + \sigma^{-1/4}\beta_1.$$

Основная цель — получить формулы для связи параметров главного члена асимптотики как необходимые условия для ограниченности поправки ψ_1.

Для того чтобы вычислить асимптотику параметров возмущенного солитона, удобно воспользоваться двумя хорошо известными законами сохранения. С помощью стандартной процедуры выведем уравнения для эволюции параметров. Рассмотрим пару комплексно сопряженных уравнений

$$\partial_\sigma\phi - i\partial_{zz}\phi - 2i|\phi|^2\phi - ih = 0, \tag{4.2}$$

$$\partial_\sigma\overline{\phi} + i\partial_{zz}\overline{\phi} + 2i|\phi|^2\overline{\phi} + i\overline{h} = 0. \tag{4.3}$$

Умножим первое уравнение на $\overline{\phi}$, второе — на ϕ, просуммируем полученные уравнения и проинтегрируем по всей вещественной оси z. Предполагая убывание решения при больших $|z|$

и принадлежность решения классу L_2, получим

$$\frac{d}{d\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\phi|^2dz - i\int\limits_{-\infty}^{\infty}(h\overline{\phi}-\overline{h}\phi)dz = 0.$$

Подставим формулу для главного члена асимптотики в интегральное тождество. В результате

$$4\frac{d\eta}{d\sigma} = i\int\limits_{-\infty}^{\infty}(h\overline{\psi_0}-\overline{h}\psi_0)dz. \tag{4.4}$$

Еще одно уравнение для вычисления параметров солитона получается из закона сохранения импульса для нелинейного уравнения Шредингера. Умножим уравнение (4.2) на $\partial_z\overline{\phi}$, уравнение (4.3) — на $\partial_z\phi$. Вычтем из первого полученного выражения второе и с помощью интегрирования по частям получим

$$\frac{d}{d\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\partial_z\phi\overline{\phi}dz + i\int\limits_{-\infty}^{\infty}(h\partial_z\overline{\phi}+\overline{h}\partial_z\phi)dz = 0. \tag{4.5}$$

В формулу (4.5) подставим выражение для главного члена асимптотики, в результате так же, как и выше, имеем

$$8\frac{d}{ds}(\eta\kappa) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(h\partial_z\overline{\psi_0}+\overline{h}\partial_z\psi_0)dz.$$

Эту формулу удобно преобразовать, использовав формулу для производной

$$\partial_z\psi_0 = -2i\kappa\psi_0 - 2\eta\psi_0\tanh(2\eta z+V+\beta).$$

В результате получим

$$8\frac{d}{ds}(\eta\kappa) = 2i\kappa\int\limits_{-\infty}^{\infty}(h\overline{\psi_0}-\overline{h}\psi_0)dz$$

$$-2\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(h\overline{\psi_0}\tanh(2\eta z+V+\beta)+\overline{h}\psi_0\tanh(2\eta z+V+\beta)\big)dz. \tag{4.6}$$

Формулы (4.4) и (4.6) получаются как необходимые условия для ограниченности поправок теории возмущений. В нашем случае эти формулы определяют допустимые параметры для решения уравнения (2.1) в солитонной форме. Здесь h — невязка:

$$h = i\partial_\sigma\psi_0 + \partial_{zz}\psi_0 + 2|\psi_0|^2\psi_0 + \frac{\mathcal{F}}{\sigma^{3/4}}\exp(i\sigma) - i\frac{\psi_0}{4\sigma}.$$

Если известна детальная структура амплитуды накачки $\mathcal{F}$, тогда уравнения (4.4) и (4.6) для параметров солитонного решения могут быть упрощены. Как пример рассмотрим один из самых простых и, следовательно, распространенных случаев — накачку с постоянной амплитудой $\mathcal{F}=\text{const}$. Положим, $\kappa\sim\kappa_0+o(\sigma^{-1})$, $\eta\sim\eta_0+o(\sigma^{-1})$, $\{\kappa_0,\eta_0\}\in\mathbb{R}$.

Обозначим

$$H_0 = i\int\limits_{-\infty}^{\infty}(h\overline{\psi_0}-\overline{h}\psi_0)dz, \quad H_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(h\overline{\psi_0}\tanh(2\eta z+V+\beta)+\overline{h}\psi_0\tanh(2\eta z+V+\beta)\big)dz.$$

Тогда $H_0\sim o(\sigma^{-1})$, $\;H_1\sim o(\sigma^{-1})$.

Вычислим асимптотику интеграла H_0:

$$H_0 \sim \frac{\eta}{\sigma} + \frac{i}{\sigma^{3/4}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{F} e^{i\sigma} \frac{-2i\eta e^{2i\kappa z + i\Omega + i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} - \overline{\mathcal{F}} e^{-i\sigma} \frac{2i\eta e^{-2i\kappa z - i\Omega - i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} \right) dz$$

$$\sim \frac{\eta}{\sigma} - \frac{2|\mathcal{F}|\eta}{\sigma^{3/4}} \cos\left(\sigma + \arg(\mathcal{F}) - \frac{\kappa V}{\eta} + \Omega + \alpha - \frac{\kappa\beta}{\eta}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\kappa X/\eta)}{\cosh(X)} \frac{dX}{2\eta}$$

$$= \frac{\eta}{\sigma} - \frac{\pi|\mathcal{F}| \cos\left(\sigma + \arg(\mathcal{F}) - \kappa V/\eta + \Omega + \alpha - \kappa\beta/\eta\right)}{\sigma^{3/4} \cosh\left(\pi\kappa/(2\eta)\right)}.$$

Требование $H_0 \sim 0$ дает

$$\frac{\eta}{\sigma} - \frac{\pi|\mathcal{F}|\sigma^{1/4} \cos\left(\sigma + \arg(\mathcal{F}) - \kappa V/\eta + \Omega + \alpha - \kappa\beta/\eta\right)}{\cosh\left(\pi\kappa/(2\eta)\right)} \sim 0.$$

В главном порядке в аргументе косинуса $\mathcal{O}(\sigma)$

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1.$$

В порядке в аргументе косинуса $\mathcal{O}(1)$

$$\arg(\mathcal{F}) + \alpha_0 - \frac{\kappa_0\beta_0}{\eta_0} = \frac{\pi}{2}.$$

В порядке $\mathcal{O}(\sigma^{-1})$

$$\eta_0 = \frac{|\mathcal{F}|\pi(\alpha_1 - \kappa_0\beta_1/\eta_0)}{\cosh\left(\pi\kappa_0/(2\eta_0)\right)}.$$

Подстановка асимптотических формул в H_1 дает

$$H_1 \sim \int\limits_{-\infty}^{\infty} (h\partial_z\overline{\phi_0} + \overline{h}\partial_z\phi_0)dz \sim o(s^{-1}). \tag{4.7}$$

Подставляя формулу для h в (4.7), получим

$$H_1 \sim \frac{1}{\sigma^{3/4}}|\mathcal{F}| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma + i\arg(\mathcal{F})} \left(\frac{4i\eta^2 e^{2i\kappa z + i\Omega + i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} \tanh(2\eta z + V + \beta) \right)$$

$$+ e^{-i\sigma - i\arg(\mathcal{F})} \left(-\frac{4i\eta^2 e^{-2i\kappa z - i\Omega - i\alpha}}{\cosh(2\eta z + V + \beta)} \tanh(2\eta z + V + \beta) \right) dz$$

$$= \frac{4\eta}{\sigma^{3/4}}|\mathcal{F}| \cos\left(\sigma + \arg(\mathcal{F}) + \Omega - \frac{\kappa V}{\eta} + \alpha - \frac{\kappa\beta}{\eta}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\kappa X/\eta)\tanh(X)}{\cosh(X)} dX.$$

В силу вычисленного выше аргумента функции косинус имеем $H_1 = o(\sigma^{-1})$. В результате параметры главного члена в солитонной форме — $\{\kappa_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1\}$ определяются из уравнений

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1, \tag{4.8}$$

$$\alpha_0 - \frac{\kappa_0\beta_0}{\eta_0} = \frac{\pi}{2} - \arg(\mathcal{F}), \tag{4.9}$$

$$\alpha_1 - \frac{\kappa_0\beta_1}{\eta_0} = \frac{\eta_0}{|\mathcal{F}|\pi} \cosh\left(\pi\frac{\kappa_0}{2\eta_0}\right). \tag{4.10}$$

Поправка ψ_1 может быть вычислена с помощью стандартных подходов теории возмущений солитонов [15–17]. Такие вычисления довольно громоздки. Они представляют интерес скорее с точки зрения модификации теории возмущений для уравнения (2.1), чем для теории автофазировки и авторезонансного возбуждения солитонов. Поэтому вычисления для поправок здесь не приводятся.

В этом разделе приведены формулы (4.8)–(4.10) для связи параметров солитонного решения ψ_0. Эти формулы являются необходимыми условиями для ограниченности поправки ψ_1.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для представления формального асимптотического решения в виде* (4.1) *при $\sigma \to \infty$ необходимо, чтобы параметры ψ_0 удовлетворяли соотношениям* (4.8)–(4.10).

5. Влияние диссипации

Рассмотрим уравнение (0.1) при $\nu > 0$. Для функции ϕ и переменных σ, z исходное уравнение примет вид

$$i\partial_\sigma \phi + \partial_{zz}\phi + |\phi|^2\phi + \frac{\mathcal{F}}{\sigma^{3/4}} e^{i\sigma} + i\frac{\nu}{2\sqrt{\sigma}}\phi + i\frac{\phi}{4\sigma} = 0. \qquad (5.1)$$

В этом случае диссипативное слагаемое с параметром ν и внешняя сила $\mathcal{F}$ дают уравнения для параметров солитона в виде

$$\frac{2\nu\eta_0}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{\sigma^{3/4}} \frac{\pi|\mathcal{F}|\cos(\sigma + \arg(\mathcal{F}) + \Omega - \kappa V/\eta + \alpha - \kappa\beta/\eta)}{\cosh\left(\pi\kappa_0/(2\eta_0)\right)} \sim 0.$$

Отсюда следует, что при $\sigma \to \infty$ и постоянной амплитуде $\mathcal{F}$ параметр η_0 убывает, как $\sigma^{-1/4}$. Следовательно, построенная асимптотика $\Psi = \mathcal{O}(1)$ при $\tau \to \infty$.

Рост асимптотического решения сохраняется, если растет амплитуда вынуждающей силы, а именно, при $\mathcal{F} = G\nu\sigma^{1/4}$ или как $\mathcal{O}(\sqrt{\tau})$ в терминах исходной переменной. При этом

$$4(\kappa_0^2 + \eta_0^2) = 1, \quad 2\nu\eta_0 + \frac{\pi|G|\cos(\arg(G) + \alpha - \kappa\beta/\eta)}{\cosh\left(\pi\kappa_0/(2\eta_0)\right)} = 0. \qquad (5.2)$$

Здесь показано, что для существования солитонного решения с главным членом ψ_0 в присутствии диссипации необходим рост амплитуды накачки $\mathcal{F}$.

Необходимость роста амплитуды возбуждения для сохранения авторезонанса в динамической системе была известна ранее [18].

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 4. *Для существования ограниченного асимптотического решения уравнения* (5.1) *в виде* (4.1) *необходимы рост амплитуды накачки $\mathcal{F}$ и выполнение соотношений* (5.2) *для параметров ψ_0.*

Заключение

Для уравнения главного резонанса в частных производных (0.1) — неавтономного нелинейного уравнения Шредингера — построен главный член растущего, как $\sqrt{\tau}$, асимптотического решения в солитонной форме. Оказалось, что для авторезонансного роста солитона достаточно накачки с убывающей, как $\mathcal{O}(1/\sqrt{\tau})$, амплитудой. Показано, что при диссипации для растущего асимптотического решения необходим рост амплитуды накачки, как $\mathcal{O}(\nu\sqrt{\tau})$.

Выражаю признательность С. Г. Глебову за многочисленные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kelley P.L.** Self-focusing of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15. P. 1005–1008.
2. Таланов В.И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2, № 5. С. 218–222.
3. **Zakharov V.E.** Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep liquid // Zh. Prikladnoi Mekh. Tekh. Fiz. 1968. Vol. 2. P. 86–94.
4. **Fajans J., Friedland L.** Autoresonant (non-stationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // Am. J. Phys. 2001. Vol. 69, no. 10. P. 1096–1102.
5. **Kalyakin L.A.** Asymptotic analysis of autoresonance models // Russian Math. Surveys. 2008. Vol. 63, no. 5. P. 791–857.
6. **Neu J.C.** Resonantly interacting waves // SIAM J. Appl. Math. 1983. Vol. 43, no. 1. P. 141–156.
7. **Glebov S.G., Kiselev O.M., Lazarev V.A.** Slow passage through resonance for a weakly nonlinear dispersive wave // SIAM J. Appl. Math. 2005. Vol. 65, no. 6. P. 2158–2177.
8. **Glebov S., Kiselev O., Tarkhanov N.** Weakly nonlinear dispersive waves under parametric resonance perturbation // Stud. Appl. Math. 2010. Vol. 124, no. 1. P. 19–37.
9. **Friedland L., Shagalov A.G.** Excitation of solitons by adiabatic multiresonant forcing // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 8, iss. 20. P. 4357–4360.
10. **Shagalov A.G., Friedland L.** Autoresonant excitation of multiphase waves in the sine-Gordon model // Phys. D. 2009. Vol. 238, no. 16. P. 1561–1568.
11. **Калякин Л.А., Гарифуллин Р.Н., Шамсутдинов М.А.** Авторезонансное возбуждение бризера в слабых ферромагнетиках // Журн. вычислительной математики и мат. физики. 2007. Vol. 47, № 7. С. 1208–1220.
12. **Маслов Е.М., Калякин Л.А., Шагалов А.Г.** Резонансный захват фазы бризера внешним возмущением // Теорет. и мат. физика. 2007. Т. 152, № 2. С. 356–367.
13. **Гарифуллин Р.Н.** Авторезонансное возбуждение солитона нелинейного уравнения Шредингера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 62–66.
14. **Калякин Л.А.** Длинноволновые асимптотики. Интегрируемые уравнения как асимптотический предел нелинейных систем // Успехи мат. наук. Т. 44, вып. 1. 1989. С. 5–34.
15. **Kaup D.J.** A perturbation expansion for the Zakharov–Shabat inverse scattering transform // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31, no. 1. P. 121–133.
16. **Карпман В.И., Маслов Е.М.** Теория возмущений для солитонов // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1977. Vol. 73, вып. 2(8). С. 281–291.
17. **Ньюелл А.** Обратное преобразование рассеяния // Солитоны: кн. / ред. С.П. Новиков. М.: Мир, 1983. С. 193–270.
18. **Калякин Л.А., Шамсутдинов А.М.** Авторезонансные асимптотики в осциллирующей системе с диссипацией // Теорет. и мат. физика. 2009. Т. 160, № 1. С. 102–111.

Киселев Олег Михайлович
д-р физ. мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: olegkiselev@matem.anrb.ru

Поступила 10.12.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.9

К L^1-ТЕОРИИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

А. А. Ковалевский

Рассмотрены нелинейные эллиптические вариационные неравенства второго порядка с вырождающимися (по пространственной переменной) и анизотропными коэффициентами и L^1-данными. Изучены случаи принадлежности множества ограничений определенному анизотропному весовому пространству Соболева и более широкому функциональному классу. В первом случае установлены новые свойства T-решений и сдвиговых T-решений исследованных вариационных неравенств, введено понятие $W^{1,1}$-регулярного T-решения и доказана теорема существования и единственности такого решения. Во втором случае введено понятие $\mathcal{T}$-решения рассмотренных вариационных неравенств и установлены условия существования и единственности такого решения.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические вариационные неравенства, анизотропия, вырождение, L^1-данные, T-решение, $\mathcal{T}$-решение.

A. A. Kovalevsky. Toward the L^1-theory of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities.

We consider nonlinear elliptic second-order variational inequalities with degenerate (with respect to the spatial variable) and anisotropic coefficients and L^1-data. We study the cases where the set of constraints belongs to a certain anisotropic weighted Sobolev space and a larger function class. In the first case, some new properties of T-solutions and shift T-solutions of the investigated variational inequalities are established. Moreover, the notion of $W^{1,1}$-regular T-solution is introduced, and a theorem of existence and uniqueness of such a solution is proved. In the second case, we introduce the notion of $\mathcal{T}$-solution of the variational inequalities under consideration and establish conditions of existence and uniqueness of such a solution.

Keywords: nonlinear elliptic variational inequalities, anisotropy, degeneration, L^1-data, T-solution, $\mathcal{T}$-solution.

Введение

В статье [1] введены и изучены понятия T-решения и сдвигового T-решения для широкого класса нелинейных эллиптических вариационных неравенств с L^1-данными. При этом доказаны теоремы о существовании и единственности таких решений и описаны их свойства. В отличие от многих других работ по эллиптическим вариационным неравенствам с L^1-правыми частями и правыми частями мерами (см., например, [2–11]), класс вариационных неравенств, изученный в [1], характеризуется следующими двумя особенностями. Во-первых, коэффициенты оператора, порождающего левую часть рассматриваемых вариационных неравенств, могут иметь анизотропный порядок роста по координатам переменной, соответствующей градиенту неизвестной функции, и вместе с тем каждый коэффициент может иметь индивидуальное вырождение по пространственной переменной. Во-вторых, основное условие относительно соответствующего множества ограничений является довольно общим и допускает рассмотрение не только односторонних, как, например, в [2–9], и двусторонних, как в [10; 11], препятствий, но и других поточечных ограничений. В отличие от большинства из упомянутых работ в [1] рассмотрен, в частности, случай, когда множество ограничений, по сути общего характера, может не содержать ограниченные функции. Именно для этого случая приспособлено понятие сдвигового T-решения, а понятие T-решения является подходящим для более простого случая,

[1]Работа выполнена в рамках программы УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”).

когда множество ограничений содержит ограниченные функции. Отметим, что основные результаты статьи [1] были анонсированы в заметке [12], а более детальное изложение материала той же статьи было дано в препринте [13].

Настоящая работа является продолжением исследований, представленных в [1; 12; 13]. Статья состоит из трех основных разделов. В разд. 1 даны необходимые предварительные сведения. В разд. 2 изложены новые результаты о свойствах T-решений и сдвиговых T-решений вариационных неравенств с оператором и множествами ограничений, которые рассматривались в [1; 12; 13], и L^1-правыми частями. Эти свойства выражаются в виде некоторых включений и интегральных оценок для исследуемых решений. Полученные результаты позволяют, в частности, дать эквивалентные, но более информативные формулировки понятий T-решения и сдвигового T-решения. Кроме того, введено понятие $W^{1,1}$-регулярного T-решения вариационных неравенств с L^1-данными в случае, когда множество ограничений может не содержать ограниченных функций, и дана теорема существования и единственности такого решения. Заметим, что множества ограничений, рассмотренные в [1; 12; 13] и разд. 2, принадлежат анизотропному весовому пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, где Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, q — набор показателей $q_1,\dots,q_n$ и ν — набор весовых функций $\nu_1,\dots,\nu_n$. Однако T-решения и сдвиговые T-решения изученных вариационных неравенств с L^1-данными, вообще говоря, не принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, причем сами T-решения и ненулевые смещения сдвиговых T-решений содержатся в более широком функциональном множестве, обозначаемом через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому представляет интерес рассмотрение случая, когда множества ограничений для соответствующих вариационных неравенств с L^1-правыми частями непосредственно принадлежат классу $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Раздел 3 посвящен исследованию именно этого случая. Здесь введено и изучено понятие $\mathcal{T}$-решения вариационного неравенства с тем же набором коэффициентов, который рассматривался в [1; 12; 13], множеством ограничений из $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и L^1-правой частью. При этом с использованием результатов, изложенных в [1] и разд. 2, установлены условия существования и единственности $\mathcal{T}$-решения и даны примеры выполнения этих условий.

1. Предварительные сведения

Прежде всего опишем функциональные классы, используемые в работе, и сформулируем ряд предложений относительно их элементов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $q_i \in (1,n)$. Положим $q = \{q_i : i = 1,\dots,n\}$.

Пусть для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ ν_i — неотрицательная функция на Ω такая, что $\nu_i > 0$ п. в. на Ω,

$$\nu_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu_i}\right)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Положим $\nu = \{\nu_i : i = 1,\dots,n\}$. Через $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^1(\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$ и $\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega)$.

Пусть $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ — отображение $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $\mathbb{R}$ такое, что для любой функции $u \in W^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\|u\|_{1,q,\nu} = \int\limits_\Omega |u|\,dx + \sum_{i=1}^n \biggl(\int\limits_\Omega \nu_i |D_i u|^{q_i}\,dx\biggr)^{1/q_i}.$$

Отображение $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ есть норма в $W^{1,q}(\nu,\Omega)$, и ввиду второго из включений (1.1) множество $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ есть банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. Кроме того, в силу первого из включений (1.1) имеем $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{1,q}(\nu,\Omega)$. Очевидно, что множество $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ является банаховым пространством относительно нормы, индуцированной нормой $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. Это пространство рефлексивно. Доказательство данного факта изложено в [13]. Заметим также, что ввиду второго из включений (1.1) имеем $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Согласно [1, предложение 2.1] из слабой сходимости какой-либо последовательности в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ вытекает ее сильная сходимость в $L^1(\Omega)$. Отсюда и из рефлексивности пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ следует такой результат.

Предложение 1. *Пусть $\{u_j\}$ — ограниченная последовательность в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $u \in L^1(\Omega)$, и пусть $u_j \to u$ сильно в $L^1(\Omega)$. Тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $u_j \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.*

Далее, пусть для любого $k > 0$ $\;T_k$ — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Аналогично известным результатам для невесовых соболевских пространств (см., например, [14, гл. 2]) имеем: если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $k > 0$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, и для любого $i \in \{1,\dots,n\}$

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{1.2}$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ имеем $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Ясно, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega). \tag{1.3}$$

Вместе с тем $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \setminus L^1(\Omega) \neq \varnothing$, и следовательно, множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ шире пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Для любых $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим $k(u,x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leqslant l\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $i \in \{1,\dots,n\}$. Тогда $\delta_i u$ — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ $\;\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)(x)$.

О п р е д е л е н и е 2. Если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то δu — отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1,\dots,n\}$ $\;(\delta u(x))_i = \delta_i u(x)$.

Предложение 2. *Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $i \in \{1,\dots,n\}$. Тогда для любого $k > 0$ имеем $D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}}$ п. в. на Ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично изложенному в [15] доказательству для невесового случая.

Из (1.2), (1.3) и предложения 2 вытекает, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п. в. на Ω.

Предложение 3. *Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, и для любых $i \in \{1,\dots,n\}$ и $k > 0$ имеем $D_i T_k(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на $\{|u-v| < k\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о изложено в [13].

Далее, введем набор функций, которые будут коэффициентами рассматриваемых в работе вариационных неравенств.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \geqslant 0$ на Ω, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i — функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (1/\nu_i)^{1/(q_i-1)}(x)|a_i(x,\xi)|^{q_i/(q_i-1)} \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i} + g_1(x), \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi)\xi_i \geqslant c_2 \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i} - g_2(x). \tag{1.5}$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,\xi) - a_i(x,\xi')](\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{1.6}$$

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $u, v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$, *то* $a_i(x, \nabla u) D_i v \in L^1(\Omega)$;

2) *если* $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$, $l \geqslant k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$, *то* $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - v) = a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i T_k(u - v)$ *п. в. на* Ω;

3) *если* $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$, *то* $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - v) \in L^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) вытекает из (1.4). Утверждение 2) следует из предложений 2 и 3. Наконец, утверждение 3) выводим из предложения 3 и утверждений 1) и 2).

Положим $a = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$. Для любой функции $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$ определим

$$\mathcal{M}_a(u) = \{v \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega) : k > 0,\ i \in \{1, \dots, n\} \Longrightarrow a_i(x, \delta u) D_i T_k(v) \in L^1(\Omega)\}.$$

В силу предложения 3 и утверждения 3) предложения 4 имеем

$$u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega),\ v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \Longrightarrow u - v \in \mathcal{M}_a(u). \tag{1.7}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — оператор из $\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $(\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u) D_i v \right\} dx.$$

В следующем разделе рассмотрим вариационные неравенства, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ и набору a, множествам ограничений из $\mathring{W}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и правым частям из $L^1(\Omega)$. В частности, покажем, что заключительное включение в импликации (1.7) справедливо для T-решений исследуемых вариационных неравенств при любых, необязательно ограниченных, сдвигах из множества ограничений. В разд. 3 изучим вариационные неравенства, соответствующие набору a, множествам ограничений из $\mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и правым частям из $L^1(\Omega)$.

2. Вариационные неравенства с множествами ограничений из $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$

2.1. T-решения

Пусть V — замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$V \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing, \tag{2.1}$$

$$\text{если } u, v \in V \text{ и } k > 0, \text{ то } u - T_k(u - v) \in V. \tag{2.2}$$

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $f \in L^1(\Omega)$. T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такую, что:

(i) для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v - u) \in V$;

(ii) если $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v)\rangle \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u - v)dx.$$

В работе [1] установлено, что для любой функции $f \in L^1(\Omega)$ существует единственное T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. При этом в отличие от вариационных неравенств с достаточно регулярными данными, условие строгой монотонности (1.6) существенно использовано не только для обоснования единственности, но и для доказательства существования T-решения.

Положим

$$c_3 = \frac{1}{c_1}\left(\frac{2c_1}{c_2} + 1\right)^n, \qquad c_4 = \frac{1}{c_1}\,\|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \frac{2}{c_2}\,\|g_2\|_{L^1(\Omega)},$$

и пусть $\Phi_{q,\nu}$ — отображение $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $L^1(\Omega)$ такое, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\Phi_{q,\nu}(v) = \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i v|^{q_i}.$$

Предложение 5. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $l = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Тогда*

$$\int\limits_{\{|u-v|<k\}} \Phi_{q,\nu}(T_l(u))dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\,\|f\|_{L^1(\Omega)} + c_3\|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)} + c_4. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения 3 и того, что $|T_k| \leqslant k$ на $\mathbb{R}$, имеем

$$\langle \mathcal{A}T_l(u), T_k(u - v)\rangle \leqslant k\|f\|_{L^1(\Omega)}\,. \tag{2.4}$$

Оценим левую часть неравенства (2.4) снизу. Для этого положим

$$I = \int\limits_{\{|u-v|<k\}} \Phi_{q,\nu}(T_l(u))dx, \qquad J = \int\limits_{\{|u-v|<k\}} \left\{\sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i v\right\} dx.$$

В силу предложений 2 и 3 для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $D_i T_k(u - v) = (D_i T_l(u) - D_i v) \cdot 1_{\{|u-v|<k\}}$ п. в. на Ω. Тогда, используя определение оператора $\mathcal{A}$ и неравенство (1.5), получаем $\langle \mathcal{A}T_l(u), T_k(u - v)\rangle \geqslant c_2 I - J - \|g_2\|_{L^1(\Omega)}$. Отсюда и из (2.4) выводим, что

$$c_2 I \leqslant J + k\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Кроме того, используя неравенство Юнга и (1.4), устанавливаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i v \leqslant \frac{c_2}{2}\,\Phi_{q,\nu}(T_l(u)) + \frac{c_2}{2c_1}\,g_1 + \left(\frac{2c_1}{c_2}+1\right)^{n-1}\Phi_{q,\nu}(v) \ \text{ п. в. на } \Omega.$$

Следовательно,

$$J \leqslant \frac{c_2}{2}\,I + \frac{c_2}{2c_1}\,\|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \left(\frac{2c_1}{c_2}+1\right)^{n-1}\|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из (2.5) выводим неравенство (2.3). Тем самым предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Пусть $v \in V$ и $k \geqslant 1$. Тогда*

$$\int\limits_{\{|u-v|<k\}} \left\{\sum_{i=1}^{n} \nu_i |\delta_i u|^{q_i}\right\} dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\,\|f\|_{L^1(\Omega)} + c_3\|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)} + c_4. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ положим $v_j = \psi - T_j(\psi - v)$. Используя (1.2), устанавливаем, что

$$\|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} \to \|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Положим

$$w = \sum_{i=1}^{n} \nu_i |\delta_i u|^{q_i}, \qquad H = \{|u-v| < k\}$$

и для любого $j \in \mathbb{N}$ определим $H_j = \{|u - v_j| < k\}$. Заметим, что

$$1_{H_j \cap H} \to 1_H \ \text{ на } \Omega. \tag{2.8}$$

Действительно, пусть $x \in H$. Поскольку $v_j(x) \to v(x)$, существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$, имеем $|v_j(x) - v(x)| < k - |u(x) - v(x)|$. Тогда, зафиксировав $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$, получаем $|v_j(x) - u(x)| \leqslant |v_j(x) - v(x)| + |u(x) - v(x)| < k$. Следовательно, $x \in H_j$. Это позволяет заключить, что $1_{H_j \cap H}(x) \to 1_H(x)$. К такому же результату приходим, очевидно, и в случае $x \in \Omega \setminus H$. Таким образом, утверждение (2.8) справедливо.

Далее, пусть $j \in \mathbb{N}$. Поскольку $\psi \in L^\infty(\Omega)$ и $|T_j| \leqslant j$ на $\mathbb{R}$, имеем $v_j \in L^\infty(\Omega)$. Кроме того, поскольку $\psi, v \in V$, ввиду условия (2.2) справедливо включение $v_j \in V$. Таким образом, $v_j \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Положим $k_j = k + \|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}$. Используя предложение 5, получаем

$$\int\limits_{H_j} \Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u))dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\,\|f\|_{L^1(\Omega)} + c_3\|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} + c_4. \tag{2.9}$$

В силу предложения 2 и того, что почти все точки множества H_j содержатся во множестве $\{|u| < k_j\}$, имеем $\Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u)) = w$ п. в. на H_j. Отсюда и из (2.9) вытекает, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\Omega} w \cdot 1_{H_j \cap H}\, dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\,\|f\|_{L^1(\Omega)} + c_3\|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} + c_4. \tag{2.10}$$

Теперь из (2.7), (2.8), (2.10) и леммы Фату выводим неравенство (2.6). Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Пусть $v \in V$ и $k \geqslant 1$. Тогда*

$$T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega), \tag{2.11}$$

$$v - T_k(v-u) \in V, \tag{2.12}$$

$$i \in \{1,\dots,n\} \Longrightarrow D_i T_k(u-v) = \delta_i u - D_i v \ \text{ п. в. на } \{|u-v|<k\}, \tag{2.13}$$

$$i \in \{1,\dots,n\} \Longrightarrow a_i(x,\delta u) D_i T_k(u-v) \in L^1(\Omega), \tag{2.14}$$

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i T_k(u-v) \Big\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v) dx. \tag{2.15}$$

Доказательство. Зафиксируем $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$v_j = \psi - T_j(\psi - v), \qquad z_j = T_k(u - \psi + T_j(\psi - v)).$$

Поскольку $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $\{v_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу предложения 3 имеем $\{z_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Ясно, что

$$z_j \to T_k(u-v) \ \text{ сильно в } \ L^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Покажем, что последовательность $\{z_j\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и положим $k_j = k + \|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ввиду предложений 2 и 3 для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $D_i z_j = (D_i T_{k_j}(u) - D_i v_j) \cdot 1_{\{|u-v_j|<k\}}$ п. в. на Ω. Следовательно,

$$\|\Phi_{q,\nu}(z_j)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant 2^n \int\limits_{\{|u-v_j|<k\}} \Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u)) dx + 2^n \|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Оценивая интеграл функции $\Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u))$ по множеству $\{|u-v_j|<k\}$ с помощью предложения 5 и учитывая, что $\|\Phi_{q,\nu}(v_j)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|\Phi_{q,\nu}(v)\|_{L^1(\Omega)} + \|\Phi_{q,\nu}(\psi)\|_{L^1(\Omega)}$, из (2.17) выводим, что последовательность $\{\Phi_{q,\nu}(z_j)\}$ ограничена в $L^1(\Omega)$. Теперь ясно, что последовательность $\{z_j\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому в силу (2.16) и предложения 1 имеем $T_k(u-v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и

$$z_j \to T_k(u-v) \ \text{ слабо в } \ \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega). \tag{2.18}$$

Тогда, учитывая, что ввиду (1.2) последовательность $\{v_j\}$ сходится к v сильно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, имеем $v_j + z_j \to v + T_k(u-v)$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Кроме того, поскольку $\{v_j\} \subset V \cap L^\infty(\Omega)$, из свойства (i) определения 3 вытекает, что $\{v_j + z_j\} \subset V$. Теперь, учитывая, что множество V слабо замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, из указанных свойств последовательности $\{v_j + z_j\}$ выводим, что $v - T_k(v-u) \in V$. Таким образом, включения (2.11) и (2.12) доказаны.

Далее, положим $H = \{|u-v|<k\}$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ определим $H_j = \{|u-v_j|<k\}$.

Зафиксируем $i \in \{1,\dots,n\}$, и пусть $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. Заметим, что ввиду второго из включений (1.1) для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ справедливо включение $D_i w \in L^1(\Omega)$. Учитывая это, определим функционал $F_i : \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\langle F_i, w\rangle = \int_H \varphi D_i w dx$, $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Легко убедиться в том, что $F_i \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$. Поэтому ввиду (2.18) имеем $\langle F_i, z_j\rangle \to \langle F_i, T_k(u-v)\rangle$. Значит,

$$\int\limits_H \varphi D_i z_j dx \to \int\limits_H \varphi D_i T_k(u-v) dx. \tag{2.19}$$

В силу предложений 2 и 3 для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $D_i z_j \cdot 1_H = (\delta_i u - D_i v) \cdot 1_{H_j \cap H} + (D_i v - D_i v_j) \cdot 1_{H_j \cap H}$ п. в на Ω. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\int\limits_H \varphi D_i z_j dx = \int\limits_\Omega \varphi(\delta_i u - D_i v) \cdot 1_{H_j \cap H} dx + \int\limits_\Omega \varphi(D_i v - D_i v_j) \cdot 1_{H_j \cap H} dx. \tag{2.20}$$

Ввиду второго из равенств (1.1) и предложения 6 функция $\varphi(\delta_i u - D_i v)\cdot 1_H$ суммируема на Ω. Поэтому, учитывая, что $1_{H_j\cap H}\to 1_H$ на Ω, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int\limits_\Omega \varphi(\delta_i u - D_i v)\cdot 1_{H_j\cap H}dx \to \int\limits_H \varphi(\delta_i u - D_i v)dx. \tag{2.21}$$

Кроме того, так как вследствие (1.2) имеем $D_i v_j \to D_i v$ сильно в $L^1(\Omega)$, то

$$\int\limits_\Omega \varphi(D_i v - D_i v_j)\cdot 1_{H_j\cap H}dx \to 0. \tag{2.22}$$

Из (2.19)–(2.22) вытекает, что

$$\int\limits_H \varphi D_i T_k(u-v)dx = \int\limits_H \varphi(\delta_i u - D_i v)dx.$$

Отсюда в силу произвольности функции $\varphi\in L^\infty(\Omega)$ выводим, что $D_i T_k(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на H. Тогда, используя неравенство Юнга и (1.4), устанавливаем, что

$$|a_i(x,\delta u)D_i T_k(u-v)| \leqslant (2c_1+1)\sum_{l=1}^n \nu_l|\delta_l u|^{q_l} + \nu_i|D_i v|^{q_i} + 2g_1 \ \text{ п. в. на } \ H.$$

Отсюда и из предложения 6 вытекает, что $a_i(x,\delta u)D_i T_k(u-v)\cdot 1_H\in L^1(\Omega)$. Поэтому, учитывая, что ввиду равенства $T_k(u-v) = T_k(T_k(u-v))$ на Ω, (2.11) и (1.2) имеем $D_i T_k(u-v) = D_i T_k(u-v)\cdot 1_H$ п. в. на Ω, заключаем, что $a_i(x,\delta u)D_i T_k(u-v)\in L^1(\Omega)$. Таким образом, импликации (2.13) и (2.14) доказаны.

Наконец, докажем неравенство (2.15). Положим $H' = \{|u-v| = k\}$, $H'' = \{|u-v|>k\}$,

$$g = \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u)\delta_i u + g_2, \qquad w = \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u)D_i v + g_2$$

и для любого $j\in\mathbb{N}$ определим

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u)[D_i v_j - D_i v], \qquad k_j = k + \|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Используя неравенство (1.4) и предложения 2 и 6, устанавливаем, что сужения функций g и w на H суммируемы на H и для любого $j\in\mathbb{N}$ сужения функций g, w и w_j на H_j суммируемы на H_j. Кроме того, в силу (1.5) функция g неотрицательна п. в. на Ω.

Пусть $j\in\mathbb{N}$. В силу свойства (ii) из определения 3 имеем

$$\langle \mathcal{A}T_{k_j}(u), T_k(u-v_j)\rangle \leqslant \int\limits_\Omega f\,T_k(u-v_j)dx. \tag{2.23}$$

Используя определение оператора $\mathcal{A}$, утверждение 2) предложения 4 и предложения 2 и 3, получаем

$$\langle \mathcal{A}T_{k_j}(u), T_k(u-v_j)\rangle = \int\limits_{H_j} g\,dx - \int\limits_{H_j} w\,dx - \int\limits_{H_j} w_j\,dx. \tag{2.24}$$

Кроме того, с помощью предложения 2 устанавливаем, что если $\operatorname{meas}(H_j\cap H')>0$, то $g=w$ п. в. на $H_j\cap H'$. В силу этого факта и неотрицательности функции g имеем

$$\int\limits_{H_j} g\,dx - \int\limits_{H_j} w\,dx \geqslant \int\limits_{H_j\cap H} g\,dx - \int\limits_{H_j\cap H} w\,dx - \int\limits_{H_j\cap H''} w\,dx. \tag{2.25}$$

Из (2.23)–(2.25) выводим, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{H_j \cap H} g\,dx \leqslant \int\limits_{H_j \cap H} w\,dx + \int\limits_{H_j \cap H''} w\,dx + \int\limits_{H_j} w_j\,dx + \int\limits_{\Omega} f\,T_k(u - v_j)dx. \tag{2.26}$$

Учитывая, что функции f, $g \cdot 1_H$ и $w \cdot 1_H$ суммируемы на Ω, $T_k(u - v_j) \to T_k(u - v)$ на Ω и $1_{H_j \cap H} \to 1_H$ на Ω, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int\limits_{\Omega} f\,T_k(u - v_j)dx \to \int\limits_{\Omega} f\,T_k(u - v)dx, \qquad \int\limits_{H_j \cap H} g\,dx \to \int\limits_{H} g\,dx, \qquad \int\limits_{H_j \cap H} w\,dx \to \int\limits_{H} w\,dx. \tag{2.27}$$

Покажем, что

$$\int\limits_{H_j \cap H''} w\,dx \to 0, \qquad \int\limits_{H_j} w_j\,dx \to 0. \tag{2.28}$$

Прежде всего заметим, что в силу предложения 5 и ограниченности $\{\Phi_{q,\nu}(v_j)\}$ в $L^1(\Omega)$ существует $M > 0$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_1 \int\limits_{H_j} \Phi_{q,\nu}(T_{k_j}(u))dx + \|g_1\|_{L^1(\Omega)} \leqslant M. \tag{2.29}$$

Теперь зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Используя неравенство Юнга с ε, неравенство (1.4), равенство $\nabla T_{k_j}(u) = \delta u$ п. в. на H_j ($\forall\, j \in \mathbb{N}$), вытекающее из предложения 2, и, наконец, учитывая (2.29), получаем, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{H_j \cap H''} |w|dx \leqslant M\varepsilon + \varepsilon^{1-n} \int\limits_{H_j \cap H''} \Phi_{q,\nu}(v)dx + \int\limits_{H_j \cap H''} g_2 dx, \tag{2.30}$$

$$\int\limits_{H_j} |w_j|dx \leqslant M\varepsilon + \varepsilon^{1-n} \|\Phi_{q,\nu}(v_j - v)\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.31}$$

В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега, сходимости $\{v_j\}$ к v на Ω и теоремы Егорова существуют число $\lambda > 0$ и измеримое множество $\Omega' \subset \Omega$ такие, что

$$\int\limits_{H'' \setminus \{|u-v| > k+\lambda\}} [\Phi_{q,\nu}(v) + g_2]dx \leqslant \varepsilon^n, \qquad \int\limits_{\Omega \setminus \Omega'} [\Phi_{q,\nu}(v) + g_2]dx \leqslant \varepsilon^n \tag{2.32}$$

и $\{v_j\}$ сходится к v равномерно на Ω'. Ввиду этой равномерной сходимости существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$, и $x \in \Omega'$ имеем $|v_j(x) - v(x)| < \lambda$. Тогда, зафиксировав $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$, получаем, что $H_j \cap \{|u - v| > k + \lambda\} \cap \Omega' = \varnothing$. Учитывая это равенство и используя неравенства (2.32), оцениваем

$$\int\limits_{H_j \cap H''} [\Phi_{q,\nu}(v) + g_2]dx \leqslant \int\limits_{H'' \setminus \{|u-v| > k+\lambda\}} [\Phi_{q,\nu}(v) + g_2]dx + \int\limits_{\Omega \setminus \Omega'} [\Phi_{q,\nu}(v) + g_2]dx \leqslant 2\varepsilon^n.$$

Отсюда и из (2.30) ввиду произвольности $\varepsilon \in (0, 1)$ следует первое из предельных соотношений (2.28). Второе же вытекает из (2.31) и того, что в силу (1.2) имеем $\Phi_{q,\nu}(v_j - v) \to 0$ сильно в $L^1(\Omega)$.

Теперь, учитывая, что $\nabla T_k(u - v) = \nabla T_k(u - v) \cdot 1_H$ п. в. на Ω, из (2.26)–(2.28) и (2.13) выводим неравенство (2.15). Предложение доказано.

Предложение 8. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Пусть $v \in V$. Тогда $u-v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, и для любых $k>0$ и $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $D_iT_k(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на $\{|u-v|<k\}$ и $a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $k>0$. Предположим, что $k<1$. Имеем $T_k(u-v) = T_k(T_1(u-v))$. Отсюда и из включения $T_1(u-v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, справедливого в силу предложения 7, выводим, что верно включение (2.11). Из того же предложения вытекает, что включение (2.11) справедливо и в случае $k \geqslant 1$. Таким образом, для любого $k>0$ имеем $T_k(u-v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Значит, $u-v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Далее, пусть $k>0$ и $i \in \{1,\dots,n\}$. Предположим, что $k<1$. Поскольку $T_k(u-v) = T_k(T_1(u-v))$, ввиду (1.2) имеем $D_iT_k(u-v) = D_iT_1(u-v)\cdot 1_{\{|T_1(u-v)|<k\}}$ п. в. на Ω, причем в силу предложения 7 имеем $D_iT_1(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на $\{|u-v|<1\}$. Тогда, учитывая равенство $\{|u-v|<k\} = \{|T_1(u-v)|<k\}$, получаем $D_iT_k(u-v) = \delta_i u - D_i v$ п. в. на $\{|u-v|<k\}$, после чего аналогично изложенному в доказательстве предложения 7 устанавливаем, что $a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$. Такие же результаты справедливы и в случае $k \geqslant 1$, что вытекает из предложения 7. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда u есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого $v \in V$ имеем $u-v \in \mathcal{M}_a(u)$;*
2) *для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v-u) \in V$ и*

$$\int_\Omega \bigg\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v)\bigg\}dx \leqslant \int_\Omega f\,T_k(u-v)dx.$$

Доказательство. Пусть u — T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Ясно, что $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Из предложений 7 и 8 выводим, что справедливы утверждения 1) и 2). Обратно, пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы утверждения 1) и 2). Из этих утверждений и утверждения 2) предложения 4 вытекает, что имеют место свойства (i) и (ii) из определения 3. Значит, u есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Теорема доказана.

2.2. Сдвиговые T-решения и $W^{1,1}$-регулярные T-решения

Пусть V — замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющее только условию (2.2).

Определение 4. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. ψ-сдвиговым T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, будем называть функцию $u : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

(i) если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$, то $v + \psi + T_k(u-v-\psi) \in V$;

(ii) если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}(\psi + T_{k_1}(u-\psi)), T_k(u-v-\psi)\rangle \leqslant \int_\Omega f\,T_k(u-v-\psi)dx.$$

В работе [1] установлено, что для любых функций $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$ существует единственное ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

Используя результаты, установленные в предыдущем подразделе, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Пусть u — ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого $v \in V$ имеем $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;*

2) *для любых $v \in V$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i T_k(u - v) = \delta_i(u - \psi) - D_i(v - \psi)$ п. в. на $\{|u - v| < k\}$ и $a_i(x, \nabla\psi + \delta(u - \psi)) D_i T_k(u - v) \in L^1(\Omega)$;*

3) *для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v - u) \in V$ и*

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla\psi + \delta(u - \psi)) D_i T_k(u - v) \Big\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u - v) dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ определим функцию $\tilde{a}_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\tilde{a}_i(x, \xi) = a_i(x, \nabla\psi(x) + \xi), \qquad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n. \tag{2.33}$$

В силу неравенств (1.4) и (1.5) функции $\tilde{a}_i$ удовлетворяют таким же неравенствам, но с другими константами $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ и неотрицательными функциями $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in L^1(\Omega)$ вместо констант c_1, c_2 и функций g_1, g_2, которые фигурируют в (1.4) и (1.5). Кроме того, ввиду неравенства (1.6) такое же неравенство верно для функций $\tilde{a}_i$.

Далее, так как $\psi \in V$ и множество V удовлетворяет условию (2.2), то множество $-\psi + V$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).

Наконец, поскольку по условию теоремы u — ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в силу определения 4 имеем: $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$; если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$, то $v - T_k(v - (u - \psi)) \in -\psi + V$; если $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \nabla T_{k_1}(u - \psi)) D_i T_k(u - \psi - v) \Big\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u - \psi - v) dx.$$

Это означает, что функция $u - \psi$ есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\tilde{\mathcal{A}}, -\psi + V, f)$, где $\tilde{\mathcal{A}} : \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega))^*$ — оператор такой же структуры, как и оператор $\mathcal{A}$, но с коэффициентами $\tilde{a}_i$. Поэтому из предложения 8 и теоремы 1 выводим, что справедливы следующие утверждения:

1$'$) для любого $v \in -\psi + V$ имеем $u - \psi - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;

2$'$) для любых $v \in -\psi + V$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i T_k(u - \psi - v) = \delta_i(u - \psi) - D_i v$ п. в. на $\{|u - \psi - v| < k\}$ и $\tilde{a}_i(x, \delta(u - \psi)) D_i T_k(u - \psi - v) \in L^1(\Omega)$;

3$'$) для любых $v \in -\psi + V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v - (u - \psi)) \in -\psi + V$ и

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x, \delta(u - \psi)) D_i T_k(u - \psi - v) \Big\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u - \psi - v) dx.$$

Из утверждений 1$'$)–3$'$) выводим, что утверждения 1)–3) заключения теоремы справедливы и тем самым ее доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что если $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v - u) \in V$, то для любого $v \in V$ справедливо включение $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Теорема 3. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\psi \in V$. Тогда u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в том и только в том случае, если $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и справедливы следующие утверждения:*

1) *для любых* $v \in V$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем* $v - T_k(v-u) \in V$;

2) *для любых* $v \in V$, $k > 0$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $a_i(x, \nabla\psi + \delta(u-\psi))D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$;

3) *для любых* $v \in V$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем*

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla\psi + \delta(u-\psi))D_iT_k(u-v) \Big\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v)dx.$$

Доказательство. Если u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, то $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и в силу теоремы 2 справедливы утверждения 1)–3).

Обратно, пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и справедливы утверждения 1)–3). Из утверждения 1) следует, что выполняется условие (i) определения 4. Далее, пусть $v \in (-\psi + V) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу утверждения 1) и замечания 1 справедливо включение $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда в силу утверждения 2) предложения 4 применительно к случаю, когда вместо функций a_i рассматриваются функции $\tilde{a}_i$, определенные формулой (2.33), для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla\psi + \delta(u-\psi))D_iT_k(u-\psi-v) = a_i(x, \nabla\psi + \nabla T_{k_1}(u-\psi))D_iT_k(u-\psi-v)$ п. в. на Ω. Отсюда и из утверждения 3) и определения оператора $\mathcal{A}$ вытекает неравенство, позволяющее заключить, что выполняется условие (ii) определения 4. Таким образом, u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Теорема доказана.

Теперь введем понятие $W^{1,1}$-регулярного T-решения вариационных неравенств с L^1-данными, опишем его связь с понятием сдвигового T-решения и докажем теорему о существовании и единственности $W^{1,1}$-регулярного T-решения.

Определение 5. Пусть $f \in L^1(\Omega)$. $W^{1,1}$-регулярным T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f), будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такую, что:

(i) для любого $v \in V$ имеем $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;

(ii) для любых $v \in V$, $k > 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla u)D_iT_k(u-v) \in L^1(\Omega)$;

(iii) для любых $v \in V$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v-u) \in V$ и

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u)D_iT_k(u-v) \Big\} dx \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v)dx.$$

Предложение 9. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$ *и* $\psi \in V$. *Пусть* u — ψ-*сдвиговое* T-*решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$. *Пусть* $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. *Тогда* u *есть* $W^{1,1}$-*регулярное* T-*решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a, V, f).

Доказательство. Поскольку $V \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, $\psi \in V$ и $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, имеем $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. К тому же очевидно, что справедливы утверждения 1)–3) теоремы 2. Согласно первому из них имеет место свойство (i) из определения 5. Следовательно, $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Используя это включение и предложение 2, а также включение $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, устанавливаем, что $\delta(u-\psi) = \nabla u - \nabla\psi$ п. в. на Ω. Отсюда и из утверждений 2) и 3) теоремы 2 вытекает, что имеют место свойства (ii) и (iii) из определения 5. Предложение доказано.

Предложение 10. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$. *Пусть* u — $W^{1,1}$-*регулярное* T-*решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a, V, f). *Пусть* $\psi \in V$. *Тогда* u *есть* ψ-*сдвиговое* T-*решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$.

Доказательство. Так как ввиду определения 5 имеем $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ и $u - \psi \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то, используя предложение 2 и учитывая, что $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, получаем $\delta(u - \psi) = \nabla u - \nabla\psi$ п. в. на Ω. Отсюда и из свойств (ii) и (iii) из определения 5 выводим, что справедливы утверждения 1)–3) из формулировки теоремы 3. Тогда согласно этой теореме u есть ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Предложение доказано.

Положим

$$\overline{q} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}\right)^{-1}$$

и для любого $m \in \mathbb{R}^n$ такого, что $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, определим

$$p_m = n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1+m_i}{m_i q_i} - 1\right)^{-1}.$$

Заметим, что если $m \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $m_i \geqslant 1/(q_i - 1)$, то $p_m > 1$. Кроме того, заметим, что если $m \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $m_i \geqslant 1/(q_i - 1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, то пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L^{p_m}(\Omega)$. Более подробно по этому поводу см. [1; 13].

Теорема 4. *Пусть существует элемент $m \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами такой, что*

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\} \qquad \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i}, \quad \frac{1}{\nu_i} \in L^{m_i}(\Omega). \tag{2.34}$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда существует единственное $W^{1,1}$-регулярное T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f).

Доказательство. Зафиксируем $\psi \in V$. В силу [1, теорема 7.1] существует ψ-сдвиговое T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Это означает, что существует функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii) определения 4. Тогда, как указано в доказательстве теоремы 2, функция $u - \psi$ есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\tilde{\mathcal{A}}, -\psi + V, f)$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ — оператор, упомянутый в том же доказательстве. Поэтому, учитывая (2.34), в силу [1, следствие 6.3] имеем $u - \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. Отсюда и из предложения 9 вытекает, что u есть $W^{1,1}$-регулярное T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f).

Далее, пусть u_1 и u_2 — $W^{1,1}$-регулярные T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f). Зафиксировав $\psi \in V$, в силу предложения 10 получаем, что u_1 и u_2 — ψ-сдвиговые T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда в силу [1, теорема 7.2] имеем $u_1 = u_2$ п. в. на Ω. Теорема доказана.

Замечание 2. В изотропном и невырождающемся случае ($q_1 = \dots = q_n$ и $\nu_1 = \dots = \nu_n \equiv 1$) существование элемента $m \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами такого, что выполняется условие (2.34), равносильно требованию $q_1 > 2 - 1/n$.

В заключение раздела отметим, что разнообразные примеры замкнутых выпуклых множеств в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2), приведены в [1, § 8].

3. Вариационные неравенства с множествами ограничений из $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$

Пусть V — множество в $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такое, что $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$.

Поскольку $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, имеем $V\cap L^\infty(\Omega)\subset V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому

$$V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\neq\varnothing. \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что множество $V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выпукло и замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. В дальнейшем будет полезен такой результат.

Предложение 11. *Предположим, что выполняется следующее условие*:

$(*)$ *для любых* $w\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$ *и* $k>0$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V$.

Тогда для любых $w,v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и* $k>0$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Доказательство. Пусть $w,v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $k>0$. Зафиксируем $\psi\in V\cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $j\in\mathbb{N}$ положим $v_j=\psi-T_j(\psi-v)$. Ввиду условия $(*)$ имеем $\{v_j\}\subset V\cap L^\infty(\Omega)$. Теперь положим $z=v-T_k(v-w)$ и для любого $j\in\mathbb{N}$ определим $z_j=v_j-T_k(v_j-w)$. Очевидно, что $\{z_j\}\subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому, учитывая включение $\{v_j\}\subset V\cap L^\infty(\Omega)$ и условие $(*)$, имеем

$$\{z_j\}\subset V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega). \tag{3.2}$$

Поскольку $v_j\to v$ на Ω, имеем $z_j\to z$ на Ω. Кроме того, для любого $j\in\mathbb{N}$ имеем $|z_j|\leqslant |w|+2|v|+4|\psi|$ на Ω. Поэтому, учитывая, что $w,v,\psi\in L^1(\Omega)$, получаем

$$z_j\to z \text{ сильно в } L^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Наконец, используя (1.2), для любых $j\in\mathbb{N}$ и $i\in\{1,\dots,n\}$ получаем $|D_iz_j|\leqslant |D_iw|+|D_iv|+|D_i\psi|$ п. в. на Ω. Отсюда и из вышеприведенной оценки для модулей функций z_j вытекает, что последовательность $\{z_j\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Тогда, учитывая (3.3), из предложения 1 выводим, что $z_j\to z$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Поэтому в силу (3.2) и выпуклости и замкнутости множества $V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ заключаем, что $z\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Предложение доказано.

Введем понятие $\mathcal{T}$-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f), где $f\in L^1(\Omega)$, и докажем несколько результатов, связанных с этим понятием.

Определение 6. Пусть $f\in L^1(\Omega)$. $\mathcal{T}$-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке (a,V,f), будем называть функцию $u\in V$ такую, что:

(i) для любого $v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ имеем $u-v\in\mathcal{M}_a(u)$;

(ii) для любых $v\in V\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $k\geqslant 1$ имеем

$$\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u)D_iT_k(u-v)\Big\}dx\leqslant\int\limits_\Omega f\,T_k(u-v)dx.$$

Предложение 12. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

$(*_1)$ *для любых* $w\in V$, $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$ *и* $k>0$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V$;

$(*_2)$ *если* $w\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$ *и для любого* $k\in\mathbb{N}$ *имеем* $v-T_k(v-w)\in V$, *то* $w\in V$.

Пусть $f\in L^1(\Omega)$. *Тогда* u *есть* $\mathcal{T}$*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a,V,f), *в том и только в том случае, если* $u\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и справедливы следующие утверждения*:

a) *для любых* $v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем* $v - T_k(v-u) \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$;

b) *если* $v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ *и* $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, *то*

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u-v)\rangle \leqslant \int\limits_\Omega f\, T_k(u-v)dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду (3.1), условия $(*_1)$ и предложения 11 множество $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).

Пусть u есть $\mathcal{T}$-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f). Тогда $u \in V$ и имеет место свойство (ii) из определения 6. Используя включение $u \in V$, условие $(*_1)$ и предложение 3, устанавливаем, что утверждение a) справедливо. Кроме того, в силу свойства (ii) из определения 6 и утверждения 2) предложения 4 получаем, что справедливо утверждение b).

Обратно, пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы утверждения a) и b). Тогда, учитывая замечание относительно множества $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, сделанное в начале доказательства, из теоремы 1 применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выводим, что имеют место свойства (i) и (ii) из определения 6 и справедлива импликация $v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, $k \geqslant 1 \Longrightarrow v - T_k(v-u) \in V$. Эта импликация вместе с условием $(*_2)$ влечет включение $u \in V$. Таким образом, u есть $\mathcal{T}$-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f). Предложение доказано.

Замечание 3. То, что $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и справедливы утверждения a) и b), приведенные в формулировке предложения 12, означает, что u есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega), f)$.

Теорема 5. *Предположим, что выполняются условия* $(*_1)$ *и* $(*_2)$ *предложения* 12. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$. *Тогда существует единственное* $\mathcal{T}$*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a, V, f).

Доказательство. Учитывая замечание относительно множества $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, сделанное в начале доказательства предложения 12, из [1, теорема 4.1] применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выводим, что существует функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такая, что справедливы утверждения a) и b) из формулировки предложения 12. Из этого предложения вытекает, что u есть $\mathcal{T}$-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f).

Далее, пусть u_1 и u_2 — $\mathcal{T}$-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке (a, V, f). Из предложения 12 следует, что u_1 и u_2 — T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega), f)$. Тогда согласно [1, теорема 5.1] применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ имеем $u_1 = u_2$ п. в. на Ω. Теорема доказана.

Теорема 6. *Предположим, что выполняются условия* $(*_1)$ *и* $(*_2)$ *предложения* 12. *Пусть* $m \in \mathbb{R}^n$, *причем для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $m_i \geqslant 1/(q_i - 1)$ *и* $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. *Пусть* $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. *Тогда* u *есть* $\mathcal{T}$*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* (a, V, f), *в том и только в том случае, если* $u \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *и*

$$\forall\, v \in V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \qquad \langle \mathcal{A}u, u-v\rangle \leqslant \int\limits_\Omega f(u-v)dx.$$

Доказательство. Утверждение теоремы есть следствие [1, предложение 3.1] применительно к множеству $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и предложения 12.

В заключение приведем несколько примеров множества $V \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такого, что $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$, множество $V \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ выпукло и замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и выполняются условия $(*_1)$ и $(*_2)$ предложения 12.

П р и м е р 1. $V = \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

П р и м е р 2. $V = \{v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) : v \geqslant 0$ п. в. на $\Omega\}$.

П р и м е р 3. $V = \{v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) : h(x,\delta v(x)) \leqslant 0$ для п. в. $x \in \Omega\}$, где $h : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, причем для почти всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство $h(x,0) \leqslant 0$ и функция $h(x,\cdot)$ непрерывна и выпукла на $\mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 4. Учитывая непустоту множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \setminus \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, легко видеть, что если $V = \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то множество V не удовлетворяет условию $(*_2)$ предложения 12.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ковалевский А.А., Горбань Ю.С.** О T-решениях вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств с L^1-данными // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 1. С. 101–160.
2. **Boccardo L., Gallouët T.** Problèmes unilatéraux avec données dans L^1 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1990. Vol. 311, no. 10. P. 617–619.
3. **Boccardo L., Cirmi G.R.** Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1 data // J. Convex Anal. 1999. Vol. 6, no. 1. P. 195–206.
4. **Oppezzi P., Rossi A.M.** Esistenza di soluzioni per problemi unilateri con dato misura o in L^1 // Ric. Mat. 1996. Vol. 45, no. 2. P. 491–513.
5. **Oppezzi P., Rossi M.** Unilateral problems with measure data: links and convergence // Differential Integral Equations. 2001. Vol. 14, no. 9. P. 1051–1076.
6. **Leone C.** Existence and uniqueness of solutions for nonlinear obstacle problems with measure data // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. 2001. Vol. 43, no. 2. P. 199–215.
7. **Brandolini B., Randazzo L.** An existence result for a class of variational inequalities with L^1-data // Ric. Mat. 2001. Vol. 50, no. 2. P. 195–207.
8. **Benkirane A., Bennouna J.** Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1-data in Orlicz spaces // Ital. J. Pure Appl. Math. 2004. № 16. P. 87–102.
9. **Aharouch L., Akdim Y., Azroul E.** Quasilinear degenerate elliptic unilateral problems // Abstr. Appl. Anal. 2005. № 1. P. 11–31.
10. **Atik Y., Rakotoson J.-M.** Local T-sets and degenerate variational problems. I // Appl. Math. Lett. 1994. Vol. 7, no. 4. P. 49–53.
11. **Atik Y.** Local T-sets and degenerate quasilinear elliptic bilateral problems with an L^1-datum // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. 1999. Vol. 38, no. 7. P. 827–867.
12. **Kovalevsky A.A., Gorban Y.S.** Degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-data // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2007. Vol. 345, no. 8. P. 441–444.
13. **Ковалевский А.А., Горбань Ю.С.** Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с L^1-данными: препринт / Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины. Донецк, 2007. 92 с.
14. **Киндерлерер Д., Стампаккья Г.** Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
15. **Kovalevsky A.A.** On a sharp condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1-right-hand sides // Ukr. Mat. Bull. 2005. Vol. 2, no. 4. P. 507–545.

Ковалевский Александр Альбертович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: alexkvl71@mail.ru

Поступила 18.12.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.983.23

СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В ОПЕРАТОРНЫЕ ЛИНЕЙНОГО ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В работе изучаются классы функций линейного инъективного оператора, построенных на базе соответствующих скалярных функций, аналитических в областях, лежащих вне некоторого угла Δ с вершиной в нуле, содержащего отрицательную вещественную полуось; функции имеют степенные оценки модуля в бесконечности и, возможно, в нуле. Предполагается, что регулярное множество оператора содержит угол с вершиной в нуле, лежащий в Δ и включающий отрицательную вещественную полуось, причем известна асимптотическая оценка нормы резольвенты в нуле и бесконечности. Данная работа продолжает исследования авторов свойств функций оператора соответствующих классов. В предположении ограниченности обратного оператора предлагается новое достаточное условие равенства, связанного с возведением степени оператора в степень.

Ключевые слова: линейный замкнутый оператор, функции от оператора, мультипликативное свойство, обратимость.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. Properties of mappings of scalar functions to operator functions of a linear closed operator.

We study classes of functions of a linear injective operator constructed on the basis of corresponding scalar functions that are analytic in domains lying outside some angle Δ with vertex at zero containing the negative real semiaxis. The functions have power estimates for the modulus at infinity and, possibly, at zero. It is assumed that the regular set of the operator contains an angle with vertex at zero lying in Δ and containing the negative real semiaxis and that an asymptotic estimate for the norm of the resolvent is known at zero and infinity. This paper continues the authors' studies of the properties of operator functions from relevant classes. Under the assumption of boundedness of the inverse operator, we propose a new sufficient condition for an equality related to raising a power of an operator to a power.

Keywords: linear closed operator, functions of an operator, multiplicative property, invertibility.

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный оператор, действующий в X. При определенных ограничениях на оператор A разными авторами вводились и исследовались операторные функции по заданным скалярным функциям (см., например, [1–8]). В частности, изучались комплексные степени оператора и их свойства, вопросы, связанные с возведением степени оператора в степень.

Пусть A — линейный инъективный оператор с плотной в X областью определения $D(A)$ и множеством значений $\mathrm{Im}A \subset X$; известна оценка нормы резольвенты $R(\lambda)$ оператора A в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей отрицательную вещественную полуось. В [9] введен класс операторных функций в случае ограниченности оператора A^{-1}, а в [10] — два таких класса без предположения ограниченности оператора A^{-1}. Все они строятся на базе соответствующих классов скалярных функций. В [9; 10] изучались свойства введенных операторных функций, при этом в [10] рассматривались связи между этими определениями. В данной работе вводится еще один класс операторных функций в случае ограниченности A^{-1}. Продолжены исследования свойств функций этих классов и связей между ними как в случае ограниченного, так и в случае неограниченного оператора A^{-1}. В предположении ограниченности A^{-1} предлагается новое достаточное условие (в частности, при более общих ограничениях на асимптотическую оценку нормы резольвенты в бесконечности) равенства $(A^x)^\beta = A^{x\beta}$ при соответствующих определениях степени оператора. Это равенство при различных предположениях получено в работах ряда авторов (см., например, [5–7]).

Переходим к изложению результатов работы.

Пусть $\Delta(\varphi)$ $(0 < \varphi < \pi)$ — область в $\mathbb{C}$, содержащая отрицательную вещественную полуось с границей $L(\varphi) = L_1(\varphi) \cup L_2(\varphi)$, где $L_1(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = te^{i\varphi}, t \geqslant 0\}$, $L_2(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = te^{-i\varphi}, t \geqslant 0\}$. Обход контура $L(\varphi)$ задается так, что область $\Delta(\varphi)$ остается справа.

Предположение 1. *Будем считать, что в резольвентном множестве $\overline{\rho(A)}$ плотно определенного в X линейного инъективного оператора A лежит множество $\overline{\Delta(\varphi_0)} \setminus \{0\}$ при некотором $\varphi_0 \in (0, \pi)$ и на нем справедлива оценка нормы его резольвенты $R(\lambda) = R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ (E — единичный оператор)*:

$$\forall \lambda \in \overline{\triangle(\varphi_0)} \setminus \{0\} \quad \|R(\lambda)\| \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|^{\rho}(|\lambda| + 1)^{\gamma - \rho}} \quad (C_0 > 0, \rho \geqslant 0, \gamma \leqslant 1). \tag{1}$$

Заметим, что при $\rho = 0$ (случай непрерывности оператора A^{-1}) и $\gamma = 1$ в предположении справедливости неравенства из (1) на $(-\infty, 0]$ (следовательно, внутри некоторого угла, содержащего $(-\infty, 0]$) дробные степени оператора изучались в работах многих математиков (см., например, [3–6]. При $\rho = 0$, $0 < \gamma < 1$ степени оператора изучались, например, в работах [7; 11], а при $\rho = 0$ и произвольном $\gamma \leq 1$ — в [12]. При $\rho = \gamma = 1$ степени оператора строятся, например, в [5; 6]. При $\rho \geq 1$, $\gamma = 1$ степени оператора изучались в [13].

Для $\varphi \in (\varphi_0, \pi), \tau, \sigma \in \mathbb{R}$ через $F(\varphi, \tau, \sigma)$ обозначим множество функций f, аналитических в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta(\varphi)}$, причем при некотором $C = C(f) \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda \notin \overline{\Delta(\varphi)}$ имеет место неравенство

$$|f(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{\tau}(|\lambda| + 1)^{\sigma - \tau}.$$

Через $\mathcal{F}$ обозначим объединение всех таких классов $F(\varphi, \tau, \sigma)$.

С помощью скалярной функции $g(\lambda; m, n, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^m \lambda^{-n}$ и операторной функции $g(A; m, n, \lambda_0) = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n}$ для $f \in F(\varphi, \tau, \sigma)$ в [10] введены операторные функции

$$f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda) d\lambda,$$

$$\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\varphi_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda) d\lambda \; g(A; m, n, \lambda_0).$$

Здесь

$$\lambda_0 \in \Delta(\varphi_0), \quad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad m \geqslant n, \quad \rho - \tau - n < 1, \quad \gamma - \sigma + m - n > 1. \tag{2}$$

В [10] установлено, что $\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) \subset f(A; m, n, \lambda_0)$, оператор $f(A; m, n, \lambda_0)$ замкнут, не зависит от m, n и λ_0, удовлетворяющих (2). Такими же свойствами обладает оператор $\overline{\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)}$ (замыкание оператора $\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)$) при условии, что $\overline{\mathrm{Im} A} = X$. В этих предположениях в [10] определены операторы $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$ формулами

$$f(A) = f(A; m, n, \lambda_0), \quad \widetilde{f}(A) = \overline{\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)},$$

установлен ряд их свойств и соотношение

$$\widetilde{f}(A) \subset f(A). \tag{3}$$

В дальнейшем (до теоремы 13) считается выполненным

Предположение 2. *Оператор A^{-1} непрерывен на X, причем*

$$\forall \lambda \in \overline{\Omega(a_0, \varphi_0)} \quad \|R(\lambda)\| \leqslant \frac{C_0}{(|\lambda| + 1)^{\gamma}} \quad (C_0 > 0, \gamma \leqslant 1), \tag{4}$$

где $\Omega(a_0,\varphi_0) = \Delta(\varphi_0) \cup B(0,a_0)$ $(B(0,a_0)$ — *открытый круг в* $\mathbb{C}$ *с центром в точке* 0 *радиуса* $a_0 > 0)$ *с границей* $\Gamma(a_0,\varphi_0)$, *которая обходится так, что* $\Omega(a_0,\varphi_0)$ *остается справа* (*заметим, что из* (4) *следует* (1) *при любом* $\rho \geqslant 0$).

Для $\varphi \in (\varphi_0,\pi)$, $a \in (0,a_0)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ через $F_0(a,\varphi,\sigma)$ обозначим множество функций f, аналитических в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega(a,\varphi)}$, удовлетворяющих при $\lambda \notin \overline{\Omega(a,\varphi)}$ неравенству $|f(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^\sigma \quad (C \in \mathbb{R})$. Через $\mathcal{F}_0$ обозначим объединение всех таких классов.

Для $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$ в [9] введена операторная функция

$$\widehat{f}(A,m) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m} f(\lambda) R(\lambda) d\lambda \; A^m$$

при

$$m > \sigma - \gamma + 1 \quad (m \in \mathbb{N} \cup \{0\}). \tag{5}$$

Там доказано, что существует не зависящее от m замыкание $\widehat{f}(A) = \overline{\widehat{f}(A,m)}$.

Определим для $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$ при условии (5) операторную функцию

$$\overleftarrow{f}(A;m) = -\frac{1}{2\pi i} A^m \int_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m} f(\lambda) R(\lambda) d\lambda. \tag{6}$$

В силу сделанных предположений интеграл в (6) сходится абсолютно к непрерывному оператору, т. е. $\overleftarrow{f}(A;m)$ — замкнутый оператор.

Лемма 1. *Пусть выполнено* (4) *и* $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$. *Тогда* $\overleftarrow{f}(A;m)$ *не зависит от*

$$m > \sigma - \gamma + 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\overleftarrow{f}(A;m+1) = -\frac{1}{2\pi i} A^m \cdot A \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m-1} f(\lambda) R(\lambda) d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} A^m \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m-1} f(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} A^m \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m} f(\lambda) R(\lambda) d\lambda = \overleftarrow{f}(A;m),$$

так как $\int_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m-1} f(\lambda) d\lambda = 0$ (см. [9]). Лемма доказана.

Лемма 1 позволяет для $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$ при выполнении (5) определить операторную функцию $\overleftarrow{f}(A)$ формулой

$$\overleftarrow{f}(A) = \overleftarrow{f}(A;m). \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено* (4) *и* $f \in \mathcal{F}_0$. *Тогда*

$$\widehat{f}(A) \subset \overleftarrow{f}(A). \tag{8}$$

Доказательство проводится так же, как и доказательство соотношения (3).

Следствие 1. *Операторы* $\widehat{f}(A)$, $\overleftarrow{f}(A)$ *плотно определены.*

Здесь учтено, что при достаточно большом m $D(\widehat{f}(A)) \supset D(\widehat{f}(A;m)) = D(A^m)$ — плотное множество в X [5].

Следствие 2. *Если* $\widehat{f}(A)$ *или* $\overleftarrow{f}(A)$ — *непрерывный оператор, то в соотношении* (8) *из леммы* 2 *имеет место равенство.*

З а м е ч а н и е 1. Если $f \in F_0(a,\varphi,\sigma)$ с $\sigma < \gamma - 1$, то согласно [9] $\widehat{f}(A)$, а потому и $\overleftarrow{f}(A)$, — непрерывные операторы на X.

Теорема 1. *Пусть выполнено* (4) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_0$. *Тогда*

$$\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A)\cdots\overleftarrow{f}_n(A) \subset (f_1\overleftarrow{f_2\cdots} f_n)(A). \tag{9}$$

$$\overline{\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A)\cdots\widehat{f}_n(A)} \supset (f_1\widehat{f_2\cdots} f_n)(A). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_j \in F_0(a_j,\varphi_j,\sigma_j)$,

$$m_j \in \mathbb{N}, \quad m_j > \sigma_j - \gamma + 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{11}$$

Возьмем $a = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_j$, $\varphi = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \varphi_j$. Тогда $f_j \in F_0(a,\varphi,\sigma_j)$ и согласно [9, утверждение 2]

$$(f_1\widehat{f_2\cdots} f_n)(A; m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \subset \widehat{f}_1(A,m_1)\widehat{f}_2(A,m_2)\cdots\widehat{f}_n(A,m_n)$$

(в [9] это включение установлено для $n = 2$ и на случай n сомножителей распространяется по индукции). Из этого включения следует (10).

Установим теперь (9) при $n = 2$.

$$\begin{aligned}
&\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A) = \overleftarrow{f}_1(A;m_1)\overleftarrow{f}_2(A;m_2)\\
&= \Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 A^{m_1}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m_1} f_1(\lambda)R(\lambda)d\lambda\; A^{m_2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m_2} f_2(\lambda)R(\lambda)d\lambda\\
&\subset A^{m_1}A^{m_2}(\widehat{\lambda^{-m_1} f_1})(A;0)(\widehat{\lambda^{-m_2} f_2})(A;0).
\end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку

$$(\widehat{\lambda^{-m_1} f_1})(A;0)(\widehat{\lambda^{-m_2} f_2})(A;0) \supset (\lambda^{-\widehat{m_1-m_2}} f_1 f_2)(A;0) \tag{13}$$

и в силу (11) операторы в (13) непрерывны, то в (13) имеет место равенство. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A) \subset A^{m_1+m_2}(\lambda^{-\widehat{(m_1+m_2)}} f_1 f_2)(A;0)\\
&= -\frac{1}{2\pi i}A^{m_1+m_2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-(m_1+m_2)} f_1(\lambda)f_2(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \overleftarrow{(f_1f_2)}(A;m_1+m_2) = \overleftarrow{(f_1f_2)}(A),
\end{aligned}$$

т. е. имеет место (9) при $n = 2$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ (9) устанавливается по индукции. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (4) *и* $f, 1/f \in \mathcal{F}_0$. *Тогда существует оператор* $(\overleftarrow{f}(A))^{-1}$, *причем*

$$(\overleftarrow{f}(A))^{-1} = \overleftarrow{(1/f)}(A). \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in D(\overleftarrow{(1/f)}(A))$. Тогда для $m \in \mathbb{N}$, достаточно больших, используя последовательно (7), теорему 1 и представление целой степени оператора из [11], получаем

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m} f(\lambda)R(\lambda)d\lambda\; A^m \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m}\frac{1}{f(\lambda)}R(\lambda)d\lambda x\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}A^m\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m} f(\lambda)R(\lambda)d\lambda \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-m}\frac{1}{f(\lambda)}R(\lambda)d\lambda x\\
&= -\frac{1}{2\pi i}A^m\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-2m}R(\lambda)d\lambda x = A^m A^{-2m}x = A^{-m}x \in D(A^m).
\end{aligned}$$

Поэтому $(\overleftarrow{1/f})(A)x \in D(\overleftarrow{f}(A))$ и $\overleftarrow{f}(A)(\overleftarrow{1/f})(A)x = x$. Аналогично для $x \in D(\overleftarrow{f}(A))$ $\overleftarrow{f}(A)x \in D((\overleftarrow{1/f})(A))$ и $(\overleftarrow{1/f})(A)\overleftarrow{f}(A)x = x$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. 2. В предположениях теоремы 2 равенство

$$(\widehat{f}(A))^{-1} = (\widehat{1/f})(A) \tag{15}$$

доказано в [9].

Теорема 3. *Пусть выполнено* (4) *и* $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_0$. *Если* $1/f_1 \in \mathcal{F}_0$ *и оператор* $(\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}$ *непрерывен или оператор* $\overleftarrow{f}_2(A)$ *непрерывен, то*

$$(\overleftarrow{f_1f_2})(A) = \overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A). \tag{16}$$

Если оператор $\widehat{f}_1(A)$ *непрерывен или* $1/f_2 \in \mathcal{F}_0$ *и* $(\widehat{f}_2(A))^{-1}$ *— непрерывный оператор, то*

$$(\widehat{f_1f_2})(A) = \overline{\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A)}. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $1/f_1 \in \mathcal{F}_0$ и $(\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}$ — непрерывный оператор. Используя теоремы 1 и 2, имеем $\overleftarrow{f}_2(A) = (\overleftarrow{f_1^{-1}f_1f_2})(A) \supset (\overleftarrow{1/f_1})(A)(\overleftarrow{f_1f_2})(A) = (\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}(\overleftarrow{f_1f_2})(A)$. Поэтому

$$\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A) \supset \overleftarrow{f}_1(A)(\overleftarrow{f}_1(A))^{-1}(\overleftarrow{f_1f_2})(A) = (\overleftarrow{f_1f_2})(A),$$

т. е. с учетом (9) получаем (16).

Пусть теперь $\overleftarrow{f}_2(A)$ — непрерывный оператор. Если в последнем из соотношений (12) исключить в обеих частях оператор A^{m_1}, то имеющее место и в этом случае включение является равенством, так как слева будет стоять непрерывный на X оператор. Поэтому и в (12) включение в действительности есть равенство, т. е. имеет место (16).

Предположим теперь, что оператор $\widehat{f}_1(A)$ непрерывен. Тогда согласно [9]

$$\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A) \subset (\widehat{f_1f_2})(A). \tag{18}$$

Из (10) и (18) следует (17).

Рассмотрим теперь случай, когда $1/f_2 \in \mathcal{F}_0$ и оператор $(\widehat{f}_2(A))^{-1}$ непрерывен. По теоремам 1 и 2 $\widehat{f}_1(A) = (\widehat{f_1f_2f_2^{-1}})(A) \subset (\widehat{f_1f_2})(A)(\widehat{1/f_2})(A) = (\widehat{f_1f_2})(A)(\widehat{f}_2(A))^{-1}$. Отсюда

$$\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A) \subset (\widehat{f_1f_2})(A)(\widehat{1/f_2})(A)\widehat{f}_2(A) = (\widehat{f_1f_2})(A)|_{D(\widehat{f}_2(A))} \subset (\widehat{f_1f_2})(A),$$

поэтому с учетом (10) получаем (17). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Без предположения непрерывности $\widehat{f}_1(A)$ или $(\widehat{f}_2(A)^{-1}$ равенство (17) устанавливалось в [9]. Однако при его доказательстве была допущена ошибка.

Лемма 3. *Пусть выполнено* (4) *и* P_1, P_2 *— многочлены,* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant \deg P_1$. *Тогда*

$$\overline{[P_1(A) + P_2(A^{-1})]|_{D(A^p)}} = P_1(A) + P_2(A^{-1}). \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $P_1(A)$ — замкнутый оператор [1, с. 642], а $P_2(A^{-1})$ — непрерывный (поскольку A^{-1} непрерывен), то оператор $P_1(A) + P_2(A^{-1})$ замкнут. Поэтому достаточно доказать, что

$$P_1(A) + P_2(A^{-1}) \subset \overline{[P_1(A) + P_2(A^{-1})]|_{D(A^p)}}. \tag{20}$$

Пусть $x \in D(P_1(A))$ и $[P_1(A)+P_2(A^{-1})]x = y$, т. е. $P_1(A)x = y - P_2(A^{-1})x$. Обозначим через z вектор $y - P_2(A^{-1})x$. Так как $\overline{P_1(A)|_{D(A^p)}} = P_1(A)$ [10], то существует такая последовательность $\{x_n\} \subset D(A^p)$, что $x_n \to x$, $P_1(A)x_n \to z$ при $n \to \infty$. Тогда $[P_1(A) + P_2(A^{-1})]x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z + P_2(A^{-1})x = y$, т. е. имеет место (20), а следовательно, (19). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть операторы B, C_1, C_2 действуют в X, причем B линеен, $D(BC_1) = X$. Тогда $B(C_1 + C_2) = BC_1 + BC_2$.*

Доказательство леммы опускаем ввиду его простоты.

Лемма 5. *Пусть $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant l$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j = k, \dots, l)$, $\alpha_l \neq 0$ и выполнено* (4). *Тогда*

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к рассмотрению нескольких случаев.

1. $l \leqslant 0$. Доказываемое равенство верно, так как оператор в его правой части непрерывен на X и содержится в операторе слева.

2. $p \leqslant l$. Доказательство ведем индукцией по p. При $p = 0$ равенство верно. Предположим, что оно верно для $p - 1$ $(p \geqslant 1)$. Тогда с учетом леммы 4

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = A^{p-1} A \Big(\sum_{j=k}^{p-1} \alpha_j A^{j-p} + \sum_{j=p}^{l} \alpha_j A^{j-p} \Big)$$
$$= A^{p-1} \Big(\sum_{j=k}^{p-1} \alpha_j A^{j-(p-1)} + \sum_{j=p}^{l} \alpha_j A^{j-(p-1)} \Big) = A^{p-1} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-(p-1)} = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j.$$

3. $p > l > 0$. В этом случае

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = A^l A^{p-l} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{(j-l)-(p-l)} = A^l A^{p-l} \sum_{j'=k-l}^{0} \alpha_{j'+l} A^{j'-(p-l)}$$
$$= A^l \sum_{j'=k-l}^{0} \alpha_{j'+l} A^{j'} = A^l \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-l} = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j$$

(здесь используется справедливость доказываемого равенства в первом (при $l = 0$) и во втором (при $p = l$) случаях).

4. $k < 0 < l$. Так как $A^p \sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^{j-p} = \sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^j$ (по первому случаю) — непрерывный на X оператор, $A^p \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^{j-p} = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^j$ (по второму и третьему случаям), то по лемме 4

$$A^p \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{j-p} = A^p \Big(\sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^{j-p} + \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^{j-p} \Big) = \sum_{j=k}^{-1} \alpha_j A^j + \sum_{j=0}^{l} \alpha_j A^j = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $\lambda_0 \in D(\varphi_0)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant l$, $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j \lambda^j$ $(\alpha_j \in \mathbb{C}, \alpha_k, \alpha_l \neq 0)$ и выполнено* (4). *Тогда*

$$\widehat{f}(A) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j = \overleftarrow{f}(A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j$ — сумма многочлена от A и непрерывного оператора (здесь учтено, что оператор A^{-1} непрерывен на X), то для достаточно больших $p \in \mathbb{N}$ с учетом леммы 3

$$\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j = \overline{\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j|_{D(A^p)}} = \overline{\sum_{j=k}^{l} \frac{-1}{2\pi i} \alpha_j \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{j-p} R(\lambda) d\lambda \; A^p}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \lambda^{-p} f(\lambda) R(\lambda) d\lambda \; A^p} = \widehat{f}(A).$$

С другой стороны, для тех же p по лемме 5

$$\sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^j = A^p\sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^{j-p} = -\frac{1}{2\pi i}A^p\sum_{j=k}^{l}\alpha_j\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{j-p}R(\lambda)d\lambda$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}A^p\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-p}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \overleftarrow{f}(A).$$

Теорема доказана.

Следствие 3. $\widehat{g}(A;m,n,\lambda_0) = g(A;m,n,\lambda_0) = \overleftarrow{g}(A;m,n,\lambda_0)$.

Теорема 5. *Пусть выполнено* (4) *и* $f\in\mathcal{F}$. *Тогда*

$$\widehat{f}(A) = \widetilde{f}(A), \tag{21}$$

$$\overleftarrow{f}(A) = f(A). \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in F(\varphi,\tau,\sigma)$, числа λ_0, m, n удовлетворяют (2). Поскольку

$$\int\limits_{\partial(B(0,a_0)\setminus\Delta(\varphi_0))}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}R(\lambda)d\lambda = 0,$$

то

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}R(\lambda)d\lambda\; g(A;m,n,\lambda_0)}.$$

Поэтому по следствиям леммы 1 из [10] и теоремы 4 для достаточно больших $p\in\mathbb{N}$

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{4\pi^2}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}R(\lambda)d\lambda\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}g(\lambda;m,n,\lambda_0)\lambda^{-p}R(\lambda)d\lambda\; A^p}.$$

На основании утверждения 3 из [9] выводим

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}f(\lambda)\lambda^{-p}R(\lambda)d\lambda\; A^p} = \widehat{f}(A).$$

Аналогично при достаточно больших $p\in\mathbb{N}$ имеем

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}g(A;m,n,\lambda_0)\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)R(\lambda)d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2}A^p\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-p}g(\lambda;m,n,\lambda_0)R(\lambda)d\lambda\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\frac{f(\lambda)R(\lambda)d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}A^p\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)}\lambda^{-p}f(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \overleftarrow{f}(A).$$

Теорема доказана.

Следствие 4. *Если* $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{l}\alpha_j\lambda^j$ ($k,l\in\mathbb{Z}$, $k\leqslant l$, $\alpha_j\in\mathbb{C}$, α_k, $\alpha_l\neq 0$), *то*

$$f(A) = \overleftarrow{f}(A) = \widehat{f}(A) = \widetilde{f}(A) = \sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^j.$$

З а м е ч а н и е 4. Равенства (21), (22) справедливы, если $f(\lambda) = \lambda^z$ $(z \in \mathbb{C})$, где $\lambda^z = e^{z \ln \lambda}$ при $|\arg \lambda| < \pi$.

Лемма 6. *Пусть B, C — действующие в X допускающие замыкание линейные операторы с $D(B) \subset D(C)$, $\bar{C}$ — непрерывный на X оператор. Тогда оператор $B + C$ имеет замыкание и $\overline{B+C} = \bar{B} + \bar{C}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $B+C \subset \bar{B}+\bar{C}$, то нужно установить, что $\bar{B}+\bar{C} \subset \overline{B+C}$. Пусть $x \in D(\bar{B} + \bar{C})$. Тогда $x \in D(\bar{B})$. Возьмем такую последовательность $\{x_n\} \subset D(B)$, что $x_n \to x$, $Bx_n \to \bar{B}x$. При этом $(B + C)x_n = Bx_n + \bar{C}x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{B}x + \bar{C}x = (\bar{B} + \bar{C})x$. Поэтому $x \in D(\overline{B+C})$ и $\overline{B+C}x = \bar{B}x + \bar{C}x$. Лемма доказана.

Теорема 6. *Если выполнено (4) и $f, h \in \mathcal{F}_0$, $\overleftarrow{h}(A)$ — непрерывный оператор, то*

$$\overleftarrow{f}(A) + \overleftarrow{h}(A) = (\overleftarrow{f+h})(A), \quad \widehat{f}(A) + \widehat{h}(A) = (\widehat{f+h})(A).$$

Если $f, h \in \mathcal{F}$ (ограниченность A^{-1} не предполагается) и $h(A)$ — непрерывный оператор, то

$$f(A) + h(A) = (f+h)(A), \quad \widetilde{f}(A) + \widetilde{h}(A) = (\widetilde{f+h})(A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f, h \in \mathcal{F}_0$, оператор $\overleftarrow{h}(A)$ (а следовательно, и $\widehat{h}(A)$) непрерывен. Тогда при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ по лемме 4 получаем

$$\overleftarrow{f}(A) + \overleftarrow{h}(A) = -\frac{1}{2\pi i} A^n \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \mu^{-n}(f(\mu) + h(\mu))R(\mu)d\mu = (\overleftarrow{f+h})(A),$$

а по лемме 6

$$\widehat{f}(A) + \widehat{h}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \mu^{-n}[f(\mu) + h(\mu)]R(\mu)d\mu A^n} = (\widehat{f+h})(A).$$

Аналогично рассматривается случай $f, h \in \mathcal{F}$. Теорема доказана.

Пусть $f(\lambda) = \lambda^z = e^{z \ln \lambda}$ $(|\arg \lambda| < \pi, z \in \mathbb{C})$, $\widehat{A^z} = \widehat{f}(A)$, $\overleftarrow{A^z} = \overleftarrow{f}(A)$. Для $x > 1 - \gamma$ $(\widehat{A^x}) = (\overleftarrow{A^x})$, так как эти операторы имеют ограниченные обратные. В этом случае через A^x будем обозначать каждый из этих операторов.

Целью следующих далее рассмотрений является теорема о возведении степени оператора A в степень (теорема 9).

Теорема 7. *Пусть выполнено* (4) *и* $x+\gamma > 1$, $a \in (0, a_0]$, $0 < \varphi_0 x \leqslant \varphi x < \pi$, $\lambda \in \Omega(a^x, \varphi x)$. *Тогда резольвента R_{A^x} оператора A^x задается формулой*

$$R_{A^x}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a,\varphi)} \frac{R(\mu)}{\mu^x - \lambda} d\mu. \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При сделанных предположениях интеграл в (23) сходится абсолютно и потому представляет собой (при фиксированном λ) непрерывный на X оператор. Так как $f(\mu) = \mu^x - \lambda \in \mathcal{F}_0$, $h(\mu) = 1/(\mu^x - \lambda) \in \mathcal{F}_0$, то по теореме 6 $f(A) = A^x - \lambda E$, т. е. в силу (14) получаем $h(A) = (A^x - \lambda E)^{-1}$, с учетом непрерывности $h(A)$ (правой части в (23)) $R_{A^x}(\lambda) = h(A)$ и имеет место (23). Теорема доказана.

Следствие 5. *Для $\gamma \in (0,1)$, $x \in (1-\gamma, 1)$ справедливо равенство*

$$R_{A^x}(\lambda) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^x R(-s) ds}{s^{2x} - 2\lambda s^x \cos(\pi x) + \lambda^2} \tag{24}$$

в области $D = \{\lambda : \pi x < |\arg \lambda| \leqslant \pi\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о получается с помощью рассуждений, приведенных в [5, с. 144]. При $\lambda < 0$

$$-2\pi i R_{A^x}(\lambda) = \lim_{\substack{a\to+0\\ \varphi\to\pi-0}} \int\limits_{\Gamma(a,\varphi)} \frac{R(\mu)}{\mu^x-\lambda}d\mu = \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(-s)ds}{s^x e^{i\pi x}-\lambda} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(-s)ds}{s^x e^{-i\pi x}-\lambda}$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{s^x(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x})R(-s)ds}{(s^x e^{i\pi x}-\lambda)(s^x e^{-i\pi x}-\lambda)} = -2i\sin(\pi x)\int\limits_0^{+\infty} \frac{s^x R(-s)ds}{(s^x e^{i\pi x}-\lambda)(s^x e^{-i\pi x}-\lambda)},$$

откуда вытекает (24). В силу аналитичности в D обеих частей формулы (24) она справедлива в D. Следствие доказано.

Теорема 8. *Пусть выполнено (4) и $x+\gamma > 1$, $a \in (0, a_0)$, $\varphi_0 x < \varphi x < \pi$. Тогда при некотором $C \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda \in \overline{\Omega(a^x, \varphi x)}$ справедлива оценка*

$$\|R_{A^x}(\lambda)\| \leqslant C(|\lambda|+1)^{(1-\gamma)/x-1}. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\gamma = 1$ (25) имеется в [5]. Будем считать поэтому, что $\gamma < 1$. Согласно (23)

$$-2\pi i R_{A^x}(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} I_j,$$

где

$$I_j = \int\limits_{\Gamma_j} \frac{R(\mu)}{\mu^x-\lambda}d\mu,$$

$\Gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{C}\colon \mu = te^{i\varphi_0}, t \geqslant a_0\}$, $\Gamma_2 = \{\mu \in \mathbb{C}\colon \mu = a_0 e^{i\psi}, |\psi| \leqslant \varphi_0\}$, $\Gamma_3 = \{\mu \in \mathbb{C}\colon \mu = te^{-i\varphi_0}, t \geqslant a_0\}$. Оценим для $\lambda \in \overline{\Omega(a^x, \varphi x)} \setminus B(0, a^x)$ норму каждого из интегралов I_j. Представим λ в виде $\lambda = |\lambda| e^{i\theta x}$ ($\varphi x \leqslant |\theta| x \leqslant \pi$). Справедлива оценка

$$\|I_1\| \leqslant C_0 \int\limits_{\Gamma_1} \frac{(|\mu|+1)^{-\gamma}|d\mu|}{||\mu|^x e^{i\varphi_0 x} - |\lambda| e^{i\theta x}|} \leqslant C_1 \int\limits_a^{+\infty} \frac{s^{-\gamma}ds}{|s^x e^{i\varphi_0 x} - |\lambda| e^{i|\theta| x}|}$$

(здесь использовано, что $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - \bar{z}_2|$, если для $j = 1, 2$ $\mathrm{Im} z_j \geqslant 0$). После замены переменной $s^x = |\lambda| u$ имеем

$$\|I_1\| \leqslant C_1 \int\limits_{a^x/|\lambda|}^{+\infty} \frac{u^{-\gamma/x}|\lambda|^{-\gamma/x}|\lambda|^{1/x}\frac{1}{x}u^{1/x-1}du}{|\lambda||ue^{i\varphi_0 x} - e^{i|\theta| x}|} = C_2|\lambda|^{(1-\gamma)/x-1} \int\limits_{a^x/|\lambda|}^{+\infty} \frac{u^{(1-\gamma)/x-1}du}{\sqrt{u^2+1-2u\cos(|\theta|x-\varphi_0 x)}}$$

$$\leqslant C_2|\lambda|^{\frac{1-\gamma}{x}-1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{(1-\gamma)/x-1}du}{\sqrt{u^2+1-2u\cos(\varphi-\varphi_0)x}} = C_3|\lambda|^{(1-\gamma)/x-1}.$$

Аналогично $\|I_3\| \leqslant C_3|\lambda|^{(1-\gamma)/x-1}$. Оценим $\|I_2\|$:

$$\|I_2\| \leqslant C_0 \int\limits_{\Gamma_2} \frac{(|\mu|+1)^{-\gamma}|d\mu|}{|\mu^x-\lambda|} = \frac{C_0}{|\lambda|} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{(a_0+1)^{-\gamma}|d\mu|}{|1-\nu\mu^x|},$$

где $\nu = 1/\lambda$. Множество K точек ν при добавлении нуля компактно, поэтому непрерывная на компакте $\Gamma_2 \times \bar{K}$ функция $\varphi(\mu, \nu) = 1/|1-\nu\mu^x|$ ограниченна, т.е. $\|I_2\| \leqslant C_4/|\lambda|$.

В итоге для $\lambda \in \overline{\Omega(a^x, \varphi x)} \setminus B(0, a^x)$ имеем

$$\|R_{A^x}(\lambda)\| \leqslant C_5(|\lambda| + 1)^{(1-\gamma)/x-1}.$$

Учитывая, что резольвента $R_{A^x}(\lambda)$ на компакте $\overline{B(0, a^x)}$ ограниченна, получаем (25). Теорема доказана.

Замечание 5. При $\gamma \in (0, 1)$, $x \in (1 - \gamma, 1)$, $\lambda < 0$ (25) имеется в [7].

Теорема 9. *Пусть выполнено* (4) *и* $\varphi_0(1 - \gamma) < \pi$, $x \in (1 - \gamma, \dfrac{\pi}{\varphi_0})$, $\beta \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$(\overleftarrow{(A^x)^\beta}) = (\overleftarrow{A^{x\beta}}), \quad (\widehat{(A^x)^\beta}) = (\widehat{A^{x\beta}}).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mathrm{Re}\beta < -1$. Пусть $0 < a_1 < a_0^x$, $\varphi_0 x < \varphi_1 < \pi$. Тогда

$$(\overleftarrow{(A^x)^\beta}) = (\widehat{(A^x)^\beta}) = (A^x)^\beta = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a_1, \varphi_1)} \lambda^\beta R_{A^x}(\lambda) d\lambda$$

(интеграл абсолютно сходится в силу ограничения на β и теоремы 8). Используя теорему 7, в которой полагаем $a = a_0$, $\varphi = \varphi_0$, получаем

$$(A^x)^\beta = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma(a_1, \varphi_1)} d\lambda \int\limits_{\Gamma(a_0, \varphi_0)} \frac{\lambda^\beta R(\mu) d\mu}{\mu^x - \lambda}. \tag{26}$$

Имеют место неравенства

$$\frac{\|\lambda^\beta R(\mu)\|}{|\mu^x - \lambda|} \leqslant \frac{C_0 |\lambda|^\beta (|\mu| + 1)^{-\gamma}}{|\mu^x - \lambda|} \leqslant \frac{C_1 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma}}{|\mu^x - \lambda|} = \frac{C_1 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma - x}}{\left|1 - \dfrac{\lambda}{\mu^x}\right|}$$
$$\leqslant C_2 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma - x} \quad (\lambda \in \Gamma(a_1, \varphi_1), \mu \in \Gamma(a_0, \varphi_0)).$$

Здесь учитываем, что

$$\inf\left\{\left|1 - \frac{\lambda}{\mu^x}\right| : \lambda \in \Gamma(a_1, \varphi_1), \mu \in \Gamma(a_0, \varphi_0)\right\} > 0.$$

Установим последнее неравенство. Пусть $\lambda \in \Gamma_1(a_1, \varphi_1)$, $\mu \in \Gamma_1(a_0, \varphi_0)$, $\lambda = se^{i\varphi_1}$, $\mu = te^{i\varphi_0}$ $(s \geqslant a_1, t \geqslant a_0)$. Тогда

$$\left|1 - \frac{\lambda}{\mu^x}\right| = \left|1 - \frac{s}{t^x} e^{i(\varphi_1 - x\varphi_0)}\right| \geqslant \rho(1, \Lambda) > 0,$$

где Λ — луч $\{ue^{i(\varphi_1 - x\varphi_0)} : u \geqslant 0\}$.

Пусть теперь $\lambda \in \Gamma_1(a_1, \varphi_1)$, $\mu \in \Gamma_2(a_0, \varphi_0)$, $\lambda = se^{i\varphi_1}$, $\mu = a_0 e^{i\psi}$ $(s \geqslant a_1, |\psi| \leqslant \varphi_0)$. Для $s \geqslant 2a_0^x$ получаем $\left|\dfrac{\lambda}{\mu^x}\right| = \dfrac{s}{a_0^x} \geqslant 2$, т. е. $\left|1 - \dfrac{\lambda}{\mu^x}\right| \geqslant 1$. Для $a_1 \leqslant s \leqslant 2a_0^x$ (если такие s есть) $\left|1 - \dfrac{\lambda}{\mu^x}\right| \neq 0$ и, следовательно,

$$\inf\left\{\left|1 - \frac{\lambda}{\mu^x}\right| : a_1 \leqslant s \leqslant 2a_0^x, \mu \in \Gamma_2(a_0, \varphi_0)\right\} > 0.$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Из неравенства

$$\frac{\|\lambda^\beta R(\mu)\|}{|\mu^x - \lambda|} \leqslant C_2 |\lambda|^\beta |\mu|^{-\gamma - x}$$

в условиях теоремы вытекает сходимость интеграла

$$\int\limits_{\Gamma(a_1,\varphi_1)} |d\lambda| \int\limits_{\Gamma(a_0^x,\varphi_0 x)} \frac{\|\lambda^\beta R(\mu)\|}{|\mu^x-\lambda|}|d\mu|,$$

и поэтому в интеграле (26) можно менять порядок интегрирования. Получаем

$$(A^x)^\beta = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} d\mu \int\limits_{\Gamma(a_1,\varphi_1)} \frac{\lambda^\beta R(\mu)}{\mu^x-\lambda}d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \mu^{x\beta}R(\mu)d\mu = A^{x\beta}.$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(a_1,\varphi_1)} \frac{\lambda^\beta d\lambda}{\lambda-\mu^x} = (\mu^x)^\beta$$

для $\mu\in\Gamma(a_0,\varphi_0)$, вытекающее из интегральной формулы Коши с учетом ограничений на параметры.

Пусть теперь $\beta\in\mathbb{C}$ произвольно и $B=A^x$. Возьмем такое $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, что $\mathrm{Re}\beta-n<-1$ и, следовательно, $\mathrm{Re}\beta-n<(\gamma-1)/x$. Тогда в силу теоремы 8 оператор $B^{\beta-n}$ непрерывен. Поэтому в силу теоремы 5 данной статьи, теоремы 11 из [10] и зная, что $(A^x)^{\beta-n}=A^{x(\beta-n)}$ и $(A^x)^n=A^{xn}$ (так как $(A^x)^{-n}=A^{-xn}$), имеем

$$\overleftarrow{((A^x)^\beta)} = \overleftarrow{(B^\beta)} = B^nB^{\beta-n} = A^{nx}A^{(\beta-n)x} = \overleftarrow{(A^{\beta x})},$$
$$\widehat{((A^x)^\beta)} = \widehat{(B^\beta)} = \overline{B^{\beta-n}B^n} = \overline{A^{(\beta-n)x}A^{nx}} = \widehat{(A^{\beta x})}.$$

Теорема доказана.

Продолжаем исследование свойств функций от оператора.

Теорема 10. *Пусть выполнено* (4) *и* $\sigma<0$, $f\in F_0(a,\varphi,\sigma)$, *причем операторы* $\widehat{f}(A)$, $\overleftarrow{f}(A)$ *неограниченны. Тогда регулярные множества* $\rho(\widehat{f}(A))$, $\rho(\overleftarrow{f}(A))$ *операторов* $\widehat{f}(A)$ *и* $\overleftarrow{f}(A)$ *пусты.*

Доказательство. Предположим, что $\rho(\widehat{f}(A))\neq\varnothing$. Так как оператор $\widehat{f}(A)$ линеен, замкнут и неограничен, то $D(\widehat{f}(A))\neq X$. Кроме того, для любого $n\in\mathbb{N}$ оператор $(\widehat{f}(A))^n$ замкнут. Поэтому по теореме 1

$$\widehat{(f^n)}(A)\subset(\widehat{f}(A))^n. \tag{27}$$

Возьмем теперь $n\in\mathbb{N}$, $n>(\gamma-1)/\sigma$. В этом случае $\overleftarrow{(f^n)}(A)$ — непрерывный на X оператор. Но это противоречит (27), так как $D((\widehat{f}(A))^n)\subset D(\widehat{f}(A))\neq X$.

Предположим теперь, что $\rho(\overleftarrow{f}(A))\neq\varnothing$. По теореме 1 для $n\in\mathbb{N}$ имеем $\overleftarrow{(f^n)}(A)\supset(\overleftarrow{f}(A))^n$. Для $n\in\mathbb{N}$, $n>(\gamma-1)/\sigma$ получаем, что $\overleftarrow{(f^n)}(A)$ — непрерывный на X оператор. Поэтому $(\overleftarrow{f}(A))^n$ — также непрерывный оператор на своей области определения. В силу его замкнутости и плотной определенности $D((\overleftarrow{f}(A))^n)=X$, что противоречит тому, что $D((\overleftarrow{f}(A))^n)\subset D(\overleftarrow{f}(A))\neq X$. Теорема доказана.

Следствие 6. *Если* $x=\mathrm{Re}z<0$ *и операторы* $\widehat{A^z}$, $\overleftarrow{A^z}$ *неограниченны, то* $\rho(\overleftarrow{A^z})=\rho(\widehat{A^z})=\varnothing$.

Замечание 6. В работах [14;15] имеются примеры операторов A, степени которых A^z неограниченны для $\mathrm{Re}z\in(\gamma-1,0)\setminus\mathbb{Z}$.

Замечание 7. Пусть $f,1/f\in\mathcal{F}$. Если $\rho(\widehat{f}(A))=\varnothing$, то $\rho(\widehat{(1/f)}(A))=\varnothing$; если $\rho(\overleftarrow{f}(A))=\varnothing$, то $\rho(\overleftarrow{(1/f)}(A))=\varnothing$.

Замечание вытекает из соотношений (14), (15).

В теореме 7 был дан вид резольвенты степени A^z при ряде ограничений на параметры. Соответствующий факт имеет место и в более общем случае функции от оператора.

Теорема 11. *Пусть выполнено* (4) *и* $\varphi_0 < \bar{\varphi} < \pi$, $f \in \mathcal{F}_0$, $1/f \in F_0(\bar{a}, \bar{\varphi}, -\sigma)$, $\gamma + \sigma > 1$, $a \in (\bar{a}, a_0)$, $\varphi \in (\varphi_0, \bar{\varphi})$. *Тогда* $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi))} \subset \rho(A)$ *и для любого* $\lambda \notin \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi))}$

$$R_{\widehat{f(A)}}(\lambda) = R_{\overleftarrow{f}(A)}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a_0,\varphi_0)} \frac{R(\mu)}{f(\mu) - \lambda} d\mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из включений $\Omega(\bar{a}, \bar{\varphi}) \subset \Omega(a, \varphi) \subset \Omega(a_0, \varphi_0)$ имеем

$$\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(\bar{a}, \bar{\varphi}))} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi))} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a_0, \varphi_0))}.$$

Тогда для $\lambda \notin \overline{f(\mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi))}$ $f(\mu) \neq \lambda$ при $\mu \notin \Omega(a, \varphi)$, т. е. функция $\dfrac{1}{f(\mu) - \lambda}$ аналитична по μ в $\mathbb{C} \setminus \Omega(a, \varphi)$. Поскольку из неравенства $\sigma + \gamma > 1$ следует, что $\sigma > 0$ (ведь $\gamma \leqslant 1$), то $\dfrac{1}{f(\mu)} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$, т. е. $f(\mu) \xrightarrow[\mu\to\infty]{} \infty$ и $\dfrac{1}{f(\mu) - \lambda} \underset{\mu\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{f(\mu)}$, а потому $\dfrac{1}{f(\mu) - \lambda} \in F_0(a, \varphi, -\sigma)$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 7. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8. Если оператор A ограничен (ограниченность A^{-1} предполагается) и $f \in \mathcal{F}_0$, то оператор $f(A)$ ограничен.

Действительно, пусть $f \in F_0(a, \varphi, \sigma)$, $\sigma - n < \gamma - 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда оператор $\Big(\dfrac{f(\lambda)}{\lambda^n}\Big)(A)$ ограничен и потому ограничен оператор $f(A) = \Big(\dfrac{f(\lambda)}{\lambda^n}\Big)(A)A^n$.

Теорема 12. *Пусть выполнено* (4) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_0$, *оператор* $\widehat{f}_n(A)$ *неограничен, оператор* $(\widehat{f_1 f_2 \cdots f_n})(A)$ *ограничен. Тогда операторы* $\widehat{f}_1(A)\widehat{f}_2(A) \cdots \widehat{f}_n(A)$ *и* $\overleftarrow{f}_1(A)\overleftarrow{f}_2(A) \cdots \overleftarrow{f}_n(A)$ *незамкнуты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из включений (9), (10).

Аналогичная теорема имеет место для функций из $\mathcal{F}$ в случае неограниченности A^{-1}. Ей предшествует

Теорема 13. *Пусть выполнено* (1) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$. *Тогда*

$$f_1(A)f_2(A) \cdots f_n(A) \subset (f_1 f_2 \cdots f_n)(A), \tag{28}$$

а если $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, *то*

$$\overline{\widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A) \cdots \widetilde{f}_n(A)} \supset (\widetilde{f_1 f_2 \cdots f_n})(A). \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включения (28), (29) при $n = 2$ совпадают с (32), (33) из [10] и аналогично устанавливаются при произвольном $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Теорема 14. *Пусть выполнено* (1) *и* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$, $f_n(A)$ *неограничен, а оператор* $(f_1 f_2 \cdots f_n)(A)$ *ограничен. Тогда оператор* $f_1(A)f_2(A) \cdots f_n(A)$, *а если* $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, *то и оператор* $\widetilde{f}_1(A)\widetilde{f}_2(A) \cdots \widetilde{f}_n(A)$, *незамкнут.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из включений (28), (29).

Следствие 7. *Если* $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, *оператор* A^{z_n} *неограничен, оператор* $A^{z_1+z_2+\cdots+z_n}$ *ограничен, то операторы* $A^{z_1}A^{z_2} \cdots A^{z_n}$, $\widetilde{A^{z_1}}\widetilde{A^{z_2}} \cdots \widetilde{A^{z_n}}$ *незамкнуты.*

Следствие 8. *Если* $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *оператор* A^z *неограничен, оператор* A^{nz} *ограничен, то операторы* $(A^z)^n$, $(\widetilde{A^z})^n$ *незамкнуты. В частности,* $(A^z)^n \neq A^{nz}$, $(\widetilde{A^z})^n \neq A^{nz}$.

З а м е ч а н и е 9. Пусть оператор A^{-1} ограничен на X. Если оператор $A^{-1/n}$ $(n \in \mathbb{N})$ неограничен, то $(A^{1/n})^n \neq A$.

Действительно, $(A^{-1/n})^n \neq A^{-1}$. Перейдя здесь к обратным операторам, получаем требуемое.

В заключение рассмотрим случай полной непрерывности оператора A^{-1}.

Теорема 15. *Пусть выполнено* (4) *и оператор* A^{-1} *вполне непрерывен,* $f \in F_0(a, \varphi, \sigma)$ *с* $\sigma < \gamma - 1$. *Тогда оператор* $\widehat{f}(A)$ *вполне непрерывен, а если* $\overline{\mathrm{Im} A} = X$, *то* $\widehat{f}(A) = \overleftarrow{f}(A)$.

Справедливость теоремы вытекает из полной непрерывности резольвенты $R(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \rho(A)$ и абсолютной сходимости интеграла в представлении

$$\widehat{f}(A) = \overleftarrow{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(a_0, \varphi_0)} f(\lambda) R(\lambda) d\lambda.$$

Данное доказательство аналогично приведенному в [4, с.299] для $f(\lambda) = \lambda^z$, $\gamma = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
2. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
3. **Balakrishnan A.V.** Fructional powers of closed operators and the semigroups generated by them // Pacific J. Math. Soc. 1960. Vol. 3. P. 419–437.
4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. М.: Наука, 1966. 499 с.
5. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
6. **Komatsu H.** Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces // Pacific J. Math. 1967. Vol. 21, no. 1. P. 89–111.
7. **Соболевский П.Е., Чеботарёва Л.М.** О дробных степенях плохо позитивных операторов // Тр. мат. фак-та Воронеж. ун-та. Воронеж, 1971. Вып. 3. С. 112–118.
8. **Martinez C., Sanz M., Pastor J.** A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators // Osaca J. Math. 2000. Vol. 37. P. 551–576.
9. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Расширение класса степенных операторных функций // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 38, вып. 8. С. 80–90. (Математика и механика).
10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Некоторые классы функций линейного замкнутого оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 186–200.
11. **Сильченко Ю.Т.** Об одном классе полугрупп // Операторные уравнение в функциональных пространствах: сб. ст. Воронеж, 1986. С. 80–90.
12. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Дробные степени одного класса операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 81–83.
13. **Коркина Л.Ф.** О классе корректности операторных уравнений первого рода // Тр. ИММ Уральск. научн. центра АН СССР: сб. ст. 1976. Вып. 23. С. 49–60.
14. **Евзеров И.Д.** Оценки резольвенты и области определения дробных степеней абстрактных дифференциальных операторов // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. Свердловск, 1985. С. 29–37.
15. **Коркина Л.Ф., Цэвээнсурэн Ц.** Об ограниченности дробных степеней замкнутого оператора // Исследования по функциональному анализу и топологии. Свердловск, 1990. С. 56–68.

Коркина Людмила Федоровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.11+512.5

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ИДЕАЛОВ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР[1]

В. П. Кривоколеско, В. М Левчук

В известных перечислениях характеристических идеалов алгебры $NT(n, K)$ (нижних) нильтреугольных $n\times n$-матриц над полем K и в близких работах для нильпотентных матричных групп и колец случай $|K| = 2$, как правило, исключается из рассмотрения: здесь каждый идеал оказывается характеристическим. Мы находим формулу числа всех идеалов алгебры $NT(n, K)$ над любым конечным полем K.

Ключевые слова: унитреугольная группа, нильтреугольная матрица, нильпотентные матричные кольца, идеалы, комбинаторные перечисления.

V. P. Krivokolesko, V. M. Levchuk. Enumeration of ideals of exceptional nilpotent matrix algebras.

In well-known enumerations of characteristic ideals of the algebra $NT(n, K)$ of all (lower) niltriangular $n \times n$ matrices over a field K and in related papers for nilpotent matrix groups and rings, the case $|K| = 2$ is, as a rule, excluded from consideration; in this case, every ideal is characteristic. We find a formula for the number of all ideals of the algebra $NT(n, K)$ over any finite field K.

Keywords: unitriangular group, niltriangular matrix, nilpotent matrix rings, ideal, combinatorial enumerations.

Введение

Пусть $NT(n, K)$ — кольцо нижних нильтреугольных (т. е. с нулями на главной диагонали и над ней) $n \times n$-матриц над полем K. В 1970-х гг. В. М. Левчук описал его идеалы и идеалы ассоциированного кольца Ли, показав также, что в лиевом случае это, в точности, нормальные подгруппы присоединенной группы кольца $NT(n, K)$, изоморфной унитреугольной группе $UT(n, K)$ [1;2]. В обоих кольцах идеалы, инвариантные относительно подгруппы D диагональных автоморфизмов, при $|K| > 2$ оказались характеристическими идеалами алгебры $NT(n, K)$; последние, как показали еще в 1951 г. Дюбиш и Перлис [3] (наряду с описанием идеалов и автоморфизмов алгебры $NT(n, K)$), при $|K| > 2$ порождаются подалгебрами вида Ke_{ij}. Г. П. Егорычев [4, теорема 2.1.2] указал комбинаторное выражение их числа методами интегрального представления комбинаторных сумм.

Итак, при ограничении $|K| > 2$ на основное поле в [1–4] установлено, что число $1 + \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n-1}$ совпадает с каждым из следующих чисел:

– число D-инвариантных нормальных подгрупп группы $UT(n, K)$;

– число характеристических идеалов алгебры $NT(n, K)$;

– число D-инвариантных идеалов кольца $NT(n, K)$;

– число D-инвариантных идеалов ассоциированного кольца Ли $NT(n, K)$.

В [5–7] перечисления переносились на нильпотентную подалгебру $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле над K, ассоциированной с системой корней Φ (см. [8]), и на унипотентную подгруппу групп лиева типа. Соответствие нормальных подгрупп унипотентной подгруппы и идеалов кольца Ли $N\Phi(K)$ см. в [9].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00968).

В исключительном случае $|K| = 2$ условие D-инвариантности вырождается и в [6, § 5] записаны проблемы 1 и 2 перечисления идеалов лиевых колец и алгебр $N\Phi(K)$ классических типов над любым конечным полем K. Для лиева типа A_n и простого $|K|$ проблемы 1 и 2 равносильны вопросам перечисления идеалов, соответственно, алгебры $NT(n, K)$ и ассоциированной алгебры Ли.

В настоящей статье установлена формула числа идеалов алгебры $NT(n, K)$ $(n \geq 2)$ над произвольным конечным полем $K = GF(q)$. (При $t = 1, 2$ произведение $\prod_{k=2}^{t-1} \cdots$ в формуле считаем равным 1.)

Теорема 1. *Число ненулевых идеалов алгебры $NT(n, K)$ равно*

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}\Big(\frac{q^k-1}{q-1}\Big)^{j_{k+1}-j_k-1}. \tag{0.1}$$

В исключенном в работах [3; 4] случае $|K| = q = 2$ формулу числа идеалов алгебры $NT(n, K)$ получаем как следствие.

Следствие. *Все идеалы алгебры $NT(n, K)$ над полем K порядка 2 являются характеристическими и их число равно*

$$1+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}(2^t-1)^{m-j_t}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}(2^k-1)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

1. Характеризация идеалов множеством углов и собственным подпространством

Для описания идеалов в кольцах и алгебрах $NT(n, K)$ над полем K нам потребуются некоторые понятия и определения.

Квадратную матрицу порядка n с единицей на месте (i, j) и нулем на остальных местах обозначают через e_{ij}, называя матричной единицей. Очевидно,

$$e_{uv}e_{ts} = \begin{cases} e_{us} & \text{при} \quad v = t, \\ 0 & \text{в} \quad \text{остальных} \quad \text{случаях}. \end{cases}$$

Аддитивные подгруппы Ke_{ij}, $1 \leq j < i \leq n$, аддитивно порождают кольцо $NT(n, K)$, так как

$$\|a_{uv}\| = \sum_{u=2}^{n}\sum_{v=1}^{u-1} a_{uv}e_{uv} \qquad (\|a_{uv}\| \in NT(n, K)).$$

Полагая $(u, v) \geq (i, j)$, если $1 \leqslant v \leqslant j < i \leqslant u \leqslant n$, получаем частичное упорядочение на множестве матричных позиций. Выделим идеалы

$$T(i, j) := \sum_{(u,v)\geq(i,j)} Ke_{uv}, \quad Q(i, j) := \sum_{(u,v)>(i,j)} Ke_{uv}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Множеством углов степени n называют всякое множество матричных позиций вида

$$L = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_m, j_m)\}, \tag{1.2}$$
$$1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m < n, \quad 1 < i_1 < \ldots < i_m \leqslant n, \quad j_t < i_t \quad (1 \leq t \leq m).$$

Множеством углов всякого непустого и ненулевого подмножества $H \subseteq NT(n, K)$ называем множество $L = L(H)$ матричных позиций такое, что

$$H \subseteq T(L) := \sum_{(i,j)\in L} T(i, j),$$

но при любой замене $T(i,j)$ на $Q(i,j)$ в сумме включение нарушается. Ясно, что $L = L(H)$ однозначно представляется в виде (1.2) и является множеством углов степени n. Полагаем также $Q(L) := \sum_{(i,j)\in L} Q(i,j)$. В [6, § 5] введено

О п р е д е л е н и е 2. Аддитивную подгруппу S пространства V_m строк длины m над полем K называем m-собственной (кратко, собственной), если при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$, в S существует элемент с ненулевой i-й координатой.

Пусть H — произвольный ненулевой идеал кольца $NT(n,K)$. Тогда для любого угла (i,j) в H, как и в [2, теорема 2], из включений

$$H \supset Ke_{si}H(Ke_{jt}) + Ke_{si}H + H(Ke_{jt})$$

получаем $Q(i,j) \subset H$. Поэтому $Q(L) \subset H$ и $(H,+)$ есть прямая сумма

$$H = Q(L) + H \cap \sum_{(i,j)\in L(H)} Ke_{ij}.$$

Второе слагаемое (в терминологии [9, § 4] это фрейм для H) однозначно определяет собственную аддитивную подгруппу (подпространство, когда H — идеал алгебры) S в V_m, $m := |L(H)|$ с условием

$$H \cap \sum_{(i,j)\in L(H)} Ke_{ij} = \Big\{ \sum_{t=1}^{m} a_t e_{i_t,j_t} \ \ | \ \ (a_1,\ldots,a_m) \in S \Big\}.$$

Таким образом, идеал H однозначно записывается в виде

$$H(L,S) = Q(L) + \big\{ a_1 e_{i_1,j_1} + \ldots + a_m e_{i_m,j_m} \ \ | \ \ (a_1,\ldots,a_m) \in S \big\}. \tag{1.3}$$

Обратно. Любому множеству L из m углов степени n сопоставляем *m-ступенчатую лестницу* в $n \times n$-матрице, обозначаемую также через L:

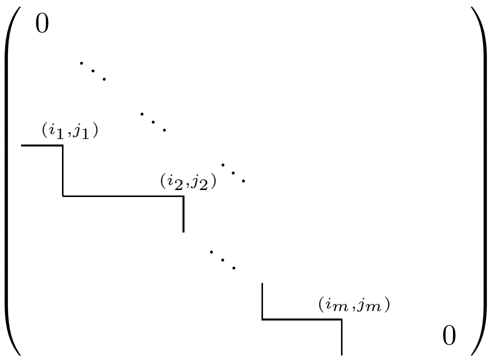


Рисунок.

Выбрав также собственную аддитивную подгруппу S пространства V_m, по формуле (1.3) получаем идеал $H(L,S)$ кольца $NT(n,K)$ (и даже алгебры, когда S — подпространство) с множеством L углов степени n. Все ненулевые элементы матриц из $H(L,S)$ на рисунке лежат на лестнице L или под ней, причем для различных пар (L,S) идеалы $H(L,S)$ различны. Поэтому справедлива (см. также [3, теорема 9; 2, теорема 2])

Теорема 2. *Всякий ненулевой идеал кольца $NT(n,K)$ над полем K однозначно представляется идеалом $H(L,S)$ вида* (1.3) *при подходящем выборе множества L углов степени n и собственной аддитивной подгруппы S в V_m. При этом различным парам (L,S) соответствуют различные идеалы.* □

Когда порядок $|K|$ основного поля K простой, классы идеалов колец и алгебр $NT(n,K)$ (аналогично ассоциированных колец и алгебр Ли), очевидно, совпадают.

2. Доказательство теоремы 1

Произвольное конечное поле $K = GF(q)$ в этом разделе фиксируем.

Отметим, что нулевой идеал алгебры $NT(n, K)$ единственный, у которого нет углов. В силу теоремы 2, для доказательства теоремы 1 достаточно найти число пар (L, S) со множеством L углов степени n и собственным подпространством S в V_m. Из теоремы 2 вытекает

Лемма 1. *Число всех идеалов алгебры $NT(n, K)$ $(n \geq 2)$ равно*

$$1 + \sum_{m=1}^{n-1} B(m, n)\, \tilde{V}_m, \tag{2.4}$$

где $B(m, n)$ — число всех множеств с m углами степени n, $\tilde{V}_m$ — число всех собственных подпространств пространства V_m.

Комбинаторное выражение числа $B(m, n)$ формулой в замкнутом виде

$$B(m, n) = \frac{1}{n}\binom{n}{m+1}\binom{n}{m} \qquad \left(\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\right) \tag{2.5}$$

указал Г. П. Егорычев [4, теорема 2.1.2], используя метод интегрального представления комбинаторных сумм (метод коэффициентов из [4]) и метод перечисления определенных путей в решетке [10].

Обозначая число всех собственных t-мерных подпространств в V_m через $\tilde{V}_{m,t}$, очевидно, имеем

$$\tilde{V}_m = \sum_{t=1}^{m} \tilde{V}_{m,t}. \tag{2.6}$$

Найдем все числа $\tilde{V}_{m,t}$, $1 \leq t \leq m$.

Лемма 2. *Число $\tilde{V}_{m,t}$ всех собственных t-мерных подпространств пространства V_m над конечным полем $K = GF(q)$ при $1 \leq t \leq m$ равно*

$$\tilde{V}_{m,t} = \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} (\frac{q^k-1}{q-1})^{j_{k+1}-j_k-1}. \tag{2.7}$$

(Формула с $j_1 = 1$ определена также для случаев $t = 1, 2$; здесь произведение $\prod_{k=2}^{t-1} \cdots$ равно 1 и его можно опустить.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $\tilde{V}_{m,m} = \tilde{V}_1 = 1$ $(m \geq 1)$. Произвольное одномерное собственное подпространство в V_m записывается в виде $K\alpha$, где α — вектор из V_m, все координаты которого ненулевые. Это позволяет выбрать α с единичной первой координатой. Каждая из оставшихся $m-1$ координат в α может принимать любое из $q-1$ ненулевых значений в поле $K = GF(q)$, причем таким выборам α соответствуют различные собственные подпространства в V_m. Таким образом,

$$\tilde{V}_{m,1} = (q-1)^{m-1} \ (m \geq 1).$$

Базу $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ произвольного t-мерного собственного подпространства S в V_m строим следующим образом.

Вектор α_1 выбираем в S с ненулевой первой координатой, более того, ее можем считать единичной. Остальные базисные векторы выбираем в подпространстве S_1 векторов из S с нулевой первой координатой.

Пусть $j_1 = 1$ и j_2 — наименьший номер ненулевой координаты для векторов из S_1. Тогда вектор α_2 можно выбрать в S_1 с единичной j_2-й координатой. Остальные базисные векторы

$\alpha_3, \cdots, \alpha_t$ выбираем в подпространстве S_2 векторов из S_1, у которых координаты с номерами $\leq j_2$ нулевые. Продолжая аналогично процесс построения, находим базу в S и целые числа

$$j_1 = 1 < j_2 < \cdots < j_t \leq m$$

такие, что j_k-я координата вектора α_k при любом k единична, а его координаты с номерами $< j_k$ или j_l с $l \neq k$ нулевые.

Легко видеть, что в S такая "каноническая" база единственна и имеет вид

$$\alpha_1 = (1, a_2^1, \ldots, a_{j_2-1}^1, 0, a_{j_2+1}^1, \ldots, a_{j_t-1}^1, 0, a_{j_t+1}^1, \ldots, a_m^1),$$

$$\alpha_2 = (0, \ldots, 0, 1, a_{j_2+1}^2, \ldots, a_{j_3-1}^2, 0, a_{j_3+1}^2, \ldots, a_{j_t-1}^2, 0, a_{j_t+1}^2, \ldots, a_m^2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_t = (0, \ldots, 0, 1, a_{j_t+1}^t, \ldots, a_{m-1}^t, a_m^t).$$

Каждый из $j_2 - 2$ коэффициентов $a_2^1, a_3^1, \ldots, a_{j_2-1}^1$ вектора α_1, очевидно, может принимать независимо любое из $q-1$ значений в $K \setminus \{0\}$. В то же время каждая из $j_3 - j_2 - 1$ пар $(a_i^1,\, a_i^2)$ при $j_2 < i < j_3$ может принимать независимо любое из $q^2 - 1$ значений в декартовом квадрате $(K \times K)$, кроме нулевого $(0,0)$ (иначе подпространство S не будет собственным). Значение любой тройки (a_i^1, a_i^2, a_i^3) при $i = j_3+1, \ldots, j_4-1$ может быть любым из $(K \times K \times K) \setminus \{(0,0,0)\}$, т. е. имеем всего $(q^3-1)^{j_4-j_3-1}$ возможных способов.

Аналогично для базисных векторов устанавливаем возможные значения всех координат с номерами $\leq j_t$.

Наконец, при каждом $i,\ j_t < i \leq m$, значение набора $(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^t)$ может быть любым из t-й декартовой степени K^t, исключая нулевое, так что здесь получаем всего $(q^t-1)^{m-j_t}$ способов.

Таким образом, число собственных t-мерных подпространств в V_m определяем как

$$\tilde{V}_{m,t} = \sum_{j_1=1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \Big(\prod_{k=1}^{t-1} (q^k-1)^{j_{k+1}-j_k-1}\Big) \cdot (q^t-1)^{m-j_t}$$

$$= (q-1)^{m-t} \cdot \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \Big(\frac{q^t-1}{q-1}\Big)^{m-j_t} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} \Big(\frac{q^k-1}{q-1}\Big)^{j_{k+1}-j_k-1}$$

$$= \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} \Big(\frac{q^k-1}{q-1}\Big)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

Это завершает доказательство формулы (2.7) леммы 2.

Теперь мы можем найти число

$$\Lambda(n,q) := \sum_{m=1}^{n-1} B(m,n)\, \tilde{V}_m$$

ненулевых идеалов алгебры $NT(n,K)$ над полем $K = GF(q)$ и завершить доказательство теоремы 1.

Ясно, что $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{m,m} = 1 \ \ (m \geq 1)$. По лемме 2 получаем

$$\tilde{V}_{m,2} = (q-1)^{m-2} \sum_{k=0}^{m-2} (q+1)^k = (q-1)^{m-2} \frac{(q+1)^{m-1}-1}{q} \qquad (m \geq 2).$$

Учитывая также выписанное выше число $\tilde{V}_{m,1}$, легко находим числа $\Lambda(n,q)$ для малых n:

$$\Lambda(2,q) = 1, \qquad \Lambda(3,q) = B(1,3)\tilde{V}_1 + B(2,3)\tilde{V}_2 = 3 + q = q + 3,$$

$$\Lambda(4,q) = B(1,4)\tilde{V}_1 + B(2,4)\tilde{V}_2 + B(3,4)\tilde{V}_3 = 2q^2 + 5q + 6.$$

Числа $\Lambda(n,q)$ для случаев $n = 5, 6$ и 7 находим аналогично. Итоги вычислений приведены в следующей таблице.

Значения $\Lambda(n,q)$ для малых n

n	$\Lambda(n,q)$
2	1
3	$q+3$
4	$2q^2+5q+6$
5	$q^4+3q^3+16q^2+11q+10$
6	$2q^6+2q^5+16q^4+36q^3+46q^2+14q+15$
7	$q^9+3q^8+4q^7+37q^6+39q^5+16q^4+144q^3+48q^2+15q+21$

В общем случае формулы (2.4)–(2.7) позволяют записать число $\Lambda(n,q)$ в виде

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}(\frac{q^k-1}{q-1})^{j_{k+1}-j_k-1},$$

и поэтому это число совпадает с (0.1). Тем самым, доказательство теоремы 1 завершается. □

Следствие из нее получаем упрощением формулы в исключительном случае $q = 2$.

З а м е ч а н и е. Наряду с представлением числа $\Lambda(n,q)$ в виде (0.1) естественно возникает вопрос о получении для $\Lambda(n,q)$ рекуррентных соотношений в виде формулы в замкнутом виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левчук В. М.** Подгруппы унитреугольной группы // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1974. Т. 38. С. 1202–1220.
2. **Левчук В. М.** Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 5. С. 558–578.
3. **Dubish R. and Perlis S.** On total nilpotent algebras // Amer. J. Math. 1951. Vol. 73, no. 2. P. 439–452.
4. **Егорычев Г.П.** Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977. 271 с.
5. **Egorychev G.P., Levchuk V.M.** Enumeration of characteristic subgroups of unipotent Lie-type groups // Algebra: Proc. of the III Intern. Conf. Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 1996. P. 68–79.
6. **Egorychev G.P., Levchuk V.M.** Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bull. 2001. Vol. 35, no. 2. P. 20–34.
7. **Egorychev G.P., Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.** Enumeration of ideals of some nilpotent matrix rings // J. Algebra and Its Applications, 2013. Vol. 12, no. 1. C. 1250140-1–1250140-11.
8. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: J. Wiley, 1972. 331 p.
9. **Levchuk V.M., Suleimanova G.S.** Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349. C. 98–116.
10. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967. 499 с.

Левчук Владимир Михайлович
д-р физ.- мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Сибирский федеральный университет
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Поступила 30.11.2014

Кривоколеско Вячеслав Павлович
канд. физ.- мат. наук, доцент
Сибирский федеральный университет
e-mail: krivokolesko@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ КРИТИЧЕСКИМИ ПО СПЕКТРУ[1]

Н. В. Маслова

Пусть G — конечная группа. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ всех порядков ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в $\omega(G)$, будем называть *простым спектром* группы G и обозначать через $\pi(G)$. Группа G называется *критической по спектру* (соответственно *критической по простому спектру*), если для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\omega(L/K) = \omega(G)$ (соответственно $\pi(L/K) = \pi(G)$) следует, что $L = G$ и $K = 1$. В настоящей работе получено описание всех конечных простых групп, не являющихся критическими по спектру. Кроме того, показано, что минимальная относительно простого спектра группа G является критической по простому спектру тогда и только тогда, когда ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ — холлова подгруппа в G.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спектр, простой спектр, критическая по спектру группа, критическая по простому спектру группа.

N. V. Maslova. Finite simple groups that are not spectrum critical.

Let G be a finite group. The *spectrum* of G is the set $\omega(G)$ of orders of all its elements. The subset of prime elements of $\omega(G)$ is called *prime spectrum* and is denoted by $\pi(G)$. A group G is called *spectrum critical* (*prime spectrum critical*) if, for any subgroups K and L of G such that K is a normal subgroup of L, the equality $\omega(L/K) = \omega(G)$ ($\pi(L/K) = \pi(G)$, respectively) implies that $L = G$ and $K = 1$. In the present paper, we describe all finite simple groups that are not spectrum critical. In addition, we show that a prime spectrum minimal group G is prime spectrum critical if and only if its Fitting subgroup $F(G)$ is a Hall subgroup of G.

Keywords: finite group, simple group, spectrum, prime spectrum, spectrum critical group, prime spectrum critical group.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [12; 13; 16]. Всюду в работе мы будем употреблять термин "группа" в значении "конечная группа", а термин "граф" — в значении "конечный граф без петель и кратных ребер".

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей, а для группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π простых чисел.

Пусть q — натуральная степень простого числа и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетного n или $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Будем обозначать через V векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n параметр ε называется *знаком* этой группы и соответствующего ей векторного пространства V.

Через $Soc(G)$ обозначается цоколь группы G (подгруппа, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами), через $F(G)$ — подгруппа Фиттинга

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), фонда Дмитрия Зимина "Династия", Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006).

группы G (ее наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа), а через $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G (пересечение всех ее максимальных подгрупп).

Спектром группы G называется множество $\omega(G)$ всех порядков ее элементов. Множество $\pi(G)$ будем называть *простым спектром группы* G. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, вершинами которого являются простые числа из $\pi(G)$, и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда число rs принадлежит множеству $\omega(G)$.

Для данного множества ω натуральных чисел группа G называется *ω-критической*, если $\omega(G) = \omega$ и для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\omega(L/K) = \omega$ следует, что $L = G$ и $K = 1$. Группу G, которая является ω-критической для некоторого множества ω (или, что то же самое, является $\omega(G)$-критической), естественно назвать *критической по спектру*.

В работе [6] было введено понятие ω-критической группы и поставлена проблема описания всех ω-критических групп для заданного множества чисел ω, а также поставлен вопрос: *Верно ли, что конечная простая группа G, не изоморфная $P\Omega_8^+(2)$ и $P\Omega_8^+(3)$, является $\omega(G)$-критической?*

Группа G называется *распознаваемой по спектру*, если из равенства $\omega(G) = \omega(H)$ следует изоморфизм групп G и H. Легко понять, что если группа G распознаваема по спектру, то она является критической по спектру.

Несмотря на то, что для многих конечных простых групп положительно решен вопрос распознаваемости по спектру, в настоящей работе дается отрицательный ответ на поставленный выше вопрос, более того, определены все конечные простые группы, не являющиеся критическими по спектру. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — конечная простая группа, K и L — подгруппы в G такие, что K — нормальная подгруппа в L. Тогда $\omega(L/K) = \omega(G)$, если, и только если $K = 1$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $G = PSp_4(q)$ *и* $L \cong PSL_2(q^2)\langle t\rangle$, *где q четно и t — автоморфизм порядка 2 группы* $PSL_2(q^2)$;

(2) $G = PSp_8(q)$ *и* $L \cong SO_8^-(q)$, *где q четно*;

(3) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ *и* $L \cong P\Omega_7(2)$;

(4) $G \cong P\Omega_8^+(3)$ *и* $L \cong P\Omega_7(3)$.

Доказательство. Пусть G — простая группа, K и L — подгруппы в G такие, что K — нормальная подгруппа в L, и $\omega(L/K) = \omega(G)$. Легко понять, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$. Ввиду [7, теорема] выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = A_n$, где n и $n-4$ — нечетные непростые натуральные числа, и $L \cong A_{n-1}$;

(2) $G = PSp_4(q)$ и $L \cong PSL_2(q^2)\langle t\rangle$, где q четно и t — автоморфизм порядка 2 группы $PSL_2(q^2)$;

(3) $G = PSp_8(q)$ и $L \cong SO_8^-(q)$, где q четно;

(4) $G = P\Omega_8^+(q)$ и $L \cong P\Omega_7(q)$;

(5) $G = PSL_6(2)$ и L — стабилизатор в G подпространства размерности 1 или 5 пространства V;

(6) $G = A_6$ и $L \cong A_5$;

(7) $G = A_{10}$ и $L \cong (S_7 \times S_3) \cap A_{10}$;

(8) $G = PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$ и $L \in \{2^4 : A_5, S_6, S_5\}$;

(9) $G = PSp_6(2)$ и $L \cong S_8$;

(10) $G = PSU_4(3)$ и $L \cong A_7$;

(11) $G = G_2(3)$ и $L \cong PSL_2(13)$;

(12) $G = M_{11}$ и $L \cong PSL_2(11)$;

(13) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ и $L \in \{2^6 : A_8, A_9, S_8\}$.

Если выполняется условие (1), то $\omega(G) \neq \omega(L)$, так как ввиду основного результата [4] конечные простые знакопеременные группы A_n при $n \notin \{6, 10\}$ распознаваемы по спектру.

Пусть выполняется условие (2). Ввиду [14, табл. 8.14] в группе $G = PSp_4(q)$, где q четно, существует максимальная подгруппа L, изоморфная расщепляемому расширению группы $PSL_2(q^2)$ посредством ее группы внешних автоморфизмов порядка 2. Спектры групп $PSp_4(q)$ и $PSL_2(q)$ хорошо известны. Ввиду [1, следствие 3] спектр группы $PSp_4(q)$ при четном q состоит из всех делителей следующих чисел:

$$q^2 + 1, q^2 - 1, 2(q + 1), 2(q - 1), 4.$$

Ввиду [2, следствие 3] спектр группы $PSL_2(q)$ состоит из всех делителей следующих чисел:

$$q + 1, q - 1, 2.$$

При четном q все внешние автоморфизмы порядка 2 группы $PSL_2(q^2)$ сопряжены с ее полевыми автоморфизмами (см., например, [17, теорема 4.9.1]). Доказательство совпадения спектров группы G и ее подгруппы L завершает применение следующей леммы.

Лемма 1 [5, следствие 14]. *Пусть q — степень простого числа, r — натуральное число и τ — полевой автоморфизм порядка r группы $PSL_n(q^r)$. Тогда*

$$\omega(PSL_n(q^r)\langle\tau\rangle) = \bigcup_{k|r} \frac{r}{k}\omega(PSL_n(q^k)).$$

Таким образом, если выполняется условие (2), то $\omega(G) = \omega(L)$.

Пусть выполняется условие (3). Ввиду [14, табл. 8.48] в группе $G = PSp_8(q)$, где q четно, существует максимальная подгруппа $L \cong SO_8^-(q)$. При четном q спектры групп $PSp_8(q)$ и $SO_8^-(q) \cong GO_8^-(q)$ совпадают ввиду [11, теорема 2].

Пусть выполняется одно из условий (4), (6), (10), (11) или (12). Тогда, поскольку G и L являются простыми группами, ввиду [15, теорема 1] имеем $\omega(G) = \omega(L)$, если, и только если $G \cong P\Omega_8^+(2)$ и $L \cong P\Omega_7(2)$ или $G \cong P\Omega_8^+(3)$ и $L \cong P\Omega_7(3)$.

Если выполняется условие (5), то $\omega(G) \neq \omega(L)$ ввиду [19, теорема 1].

Если выполняется условие (7), то $8 \in \omega(A_{10}) \setminus \omega(S_7 \times S_3)$, следовательно, $\omega(G) \neq \omega(L)$.

Если выполняется условие (8), то ввиду [13] имеем $12 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$, следовательно, $\omega(G) \neq \omega(L)$.

Если выполняется одно из условий (9) или (13), то $\omega(G) \neq \omega(L)$ ввиду [3, теорема 1].

Заметим, что во всех случаях совпадения спектров группы G и ее собственной подгруппы L имеем, что $Soc(L)$ — простая группа и либо $L = Soc(L)$, либо $|L : Soc(L)| = 2$. Поэтому $K = 1$.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Пункт (1) в [7, теорема] получен по модулю расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха, однако доказательство теоремы 1 не зависит от ее справедливости ввиду распознаваемости по спектру конечных простых знакопеременных групп A_n при $n \notin \{6, 10\}$.

Группу G будем называть *минимальной относительно простого спектра*, если $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной (эквивалентно, для любой максимальной) подгруппы H из G.

Исследование нормального строения групп, минимальных относительно простого спектра, представляет интерес, например, в связи с изучением свойств минимального контрпримера к гипотезе Шумяцкого (см. [10, проблема 17.125] и [8]). В [18] описаны конечные простые группы, минимальные относительно простого спектра, а в [9] для некоторых конечных простых групп, не минимальных относительно простого спектра, исследован вопрос их изоморфизма неабелеву композиционному фактору группы, минимальной относительно простого спектра.

Аналогично определению критической по спектру группы будем называть группу G *критической по простому спектру*, если для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\pi(L/K) = \pi(G)$ следует, что $L = G$ и $K = 1$.

Легко видеть, что любая группа, являющаяся критической по простому спектру, будет также критической по спектру и минимальной относительно простого спектра. С другой стороны, исследование групп, критических по простому спектру, можно свести к исследованию групп, минимальных относительно простого спектра, ввиду следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, минимальная относительно простого спектра. Тогда G является группой, критической по простому спектру, если, и только если ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ является холловой подгруппой в G.*

Доказательство. Предположим, что G — группа, минимальная относительно простого спектра, и ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ является холловой подгруппой в G. Пусть K и L — подгруппы группы G такие, что K — нормальная подгруппа в L и $\pi(L/K) = \pi(G)$. Поскольку $\pi(G) = \pi(L/K) \subseteq \pi(L) \subseteq \pi(G)$ и группа G минимальна относительно простого спектра, имеем $L = G$. Следовательно, подгруппа K нормальна в G и $\pi(K) \subseteq \pi(G/K)$.

Допустим, что $K \neq 1$ и $p \in \pi(K)$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу P группы K. Используя лемму Фраттини, получаем $G = KN_G(P)$. Далее, по соответствующей теореме о гомоморфизмах $KN_G(P)/K \cong N_G(P)/N_K(P)$, следовательно,

$$\pi(G) = \pi(G/K) = \pi(KN_G(P)/K) = \pi(N_G(P)/N_K(P)) \subseteq \pi(N_G(P)) \subseteq \pi(G),$$

откуда с учетом минимальности группы G относительно простого спектра получаем, что $G = N_G(P)$. Значит, подгруппа P нормальна в G, и следовательно, ввиду произвольности выбора простого числа $p \in \pi(K)$ заключаем, что подгруппа K нильпотентна, т. е. $K \leq F(G)$.

Пусть K_0 — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K. Тогда $\pi(G) = \pi(G/K) = \pi(G/K_0)$, поэтому ввиду [12, 8.2 и 8.3] из включения $K_0 \leq F(G)$ следует, что K_0 является элементарной абелевой p_0-группой для некоторого простого числа $p_0 \in \pi(F(G))$.

Докажем, что $K_0 \leq \Phi(G)$. Действительно, если в G существует максимальная подгруппа M, не содержащая K_0, то $G = MK_0$ и подгруппа $M \cap K_0$ нормальна в M, следовательно, по соответствующей теореме о гомоморфизмах $G/K_0 \cong M/(M \cap K_0)$. Значит,

$$\pi(G) = \pi(G/K_0) = \pi(M/(M \cap K_0)) \subseteq \pi(M) \subseteq \pi(G),$$

откуда получаем, что $\pi(M) = \pi(G)$, следовательно, $M = G$. Противоречие. Итак, $K_0 \leq \Phi(G)$.

Пусть $Q \in Syl_{p_0}(G)$. Тогда $Q \leq F(G)$ ввиду холловости $F(G)$ в G. В частности, группа G является p_0-разрешимой. Следовательно, ввиду [16, теорема 6.3.5] множество холловых p_0'-подгрупп группы G непусто. Пусть H — холлова p_0'-подгруппа группы G и M — максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Ввиду минимальности группы G относительно простого спектра имеем, что $H = M$. С другой стороны, $K_0 \leq \Phi(G) \leq H$. Противоречие. Значит, $K = 1$, следовательно, G является группой, критической по простому спектру.

Предположим теперь, что $F(G)$ — не холлова подгруппа в G. Пусть p — общий простой делитель чисел $|F(G)|$ и $|G/F(G)|$ и P — силовская p-подгруппа группы $F(G)$. Тогда P — характеристическая подгруппа в $F(G)$. Но подгруппа $F(G)$ нормальна в G, следовательно, подгруппа P нормальна в G. Легко понять, что в этом случае $\pi(G) = \pi(G/P)$, поэтому группа G не является критической по простому спектру.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутурлакин А.А.** Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. труды. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.
2. **Бутурлакин А.А.** Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.
3. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В.Д.** О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1225–1247.

4. **Горшков И.Б.** Распознаваемость знакопеременных групп по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 57–63.
5. **Заварницин А.В.** Распознавание простых групп $U_3(q)$ по порядкам элементов // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 185–202.
6. **Мазуров В.Д., ШиВ.** Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.
7. **Маслова Н.В.** О совпадении графов Грюнберга – Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 156–168.
8. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Порождаемость конечной группы с холловыми максимальными подгруппами парой сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 199–206.
9. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О неабелевых композиционных факторах конечной группы, минимальной относительно простого спектра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 155–166.
10. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь / Ин-т математики СО РАН. Изд. 17-е, доп. Новосибирск, 2010. 219 с.
11. **Старолетов А.М.** О распознавании некоторых простых ортогональных групп по спектру // Алгебра и комбинаторика: тез. междунар. конф. по алгебре и комбинаторике, посвящ. 60-летию А.А. Махнева. Екатеринбург: изд-во "УМЦ-УПИ", 2013. С. 144.
12. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
13. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
15. **Buturlakin A.A.** Isospectral finite simple groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 111–114.
16. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Chelsea Publishing Company, 1968. 519 p.
17. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, 1998. 419 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40.3).
18. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** Transitive subgroups of primitive permutation groups // J. Algebra. 2000. Vol. 234, no. 2. P. 291–361.
19. On recognition of the projective special linear groups over binary fields / M.A. Grechkoseeva, M.S. Lucido, V.D. Mazurov, A.R. Moghaddamfar, A.V. Vasil'ev // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 253–263.

Маслова Наталья Владимировна
Поступила 30.07.2014
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.927.2:517.928

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Ф. Х. Мукминов, Т. Р. Гадыльшин

В работе рассматривается нелинейная задача Дирихле на отрезке для уравнения второго порядка, возмущенная дельта-образным потенциалом $\varepsilon^{-1}Q\left(\varepsilon^{-1}x\right)$, где $Q(\xi)$ — финитная функция, $0<\varepsilon\ll 1$. На основе метода согласования асимптотических разложений построено решение этой краевой задачи с точностью до $O(\varepsilon)$. Для обоснования построенного асимптотического приближения используется теорема о неподвижной точке. Для линейной краевой задачи рассмотрены все типы граничных условий.

Ключевые слова: уравнение второго порядка, дельта-образный потенциал, малый параметр, асимптотика.

F. Kh. Mukminov, T. R. Gadyl'shin. Boundary-value problem for a second-order nonlinear equation with delta-like potential.

A Dirichlet nonlinear problem for a second-order equation is considered on an interval. The problem is perturbed by the delta-like potential $\varepsilon^{-1}Q\left(\varepsilon^{-1}x\right)$, where the function $Q(\xi)$ is compactly supported and $0<\varepsilon\ll 1$. A solution of this boundary-value problem is constructed with accuracy up to $O(\varepsilon)$ with the use of the method of matched asymptotic expansions. The obtained asymptotic approximation is validated by means of the fixed-point theorem. All types of boundary conditions are considered for a linear boundary-value problem.

Keywords: second-order equation, delta-like potential, small parameter, asymptotics.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $k\in C^2[a,b]$, $q\in C[a,b]$, $p\in C^2(-\infty,\infty)$, $Q\in C_0(-\infty,\infty)$, $\{0\}\in(a,b)$,

$$\mathcal{L}^{\varkappa}u:=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\left(x\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(u)+q\left(x\right)u,\quad x\in(a,b),\quad \mathcal{L}^{\varkappa}_{\varepsilon}:=\mathcal{L}^{\varkappa}+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $\varkappa\geqslant 0$, $0<\varepsilon\ll 1$. Здесь и всюду далее $k\left(x\right)\geqslant k_0>0$, $q\left(x\right)\geqslant q_0>0$, $Q(\tau)\geqslant 0$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}^{\varkappa}_{\varepsilon}u^{\varepsilon}=f,\quad x\in(a,b),\quad u^{\varepsilon}(a)=u^{\varepsilon}(b)=0. \tag{1.1}$$

В случае отсутствия дельта-образного потенциала $\varepsilon^{-1}Q\left(\varepsilon^{-1}x\right)$ известно (см., например, [1, гл. 10, § 38]), что при любом фиксированном $f\in C[a,b]$ эта задача однозначно разрешима при достаточно малых $\varkappa$. Обозначим

$$\langle Q\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \langle Q\rangle_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau Q(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \left\{g\right\}(0)=g(+0)-g(-0).$$

Основной целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.1. *При любом фиксированном $f\in L_2(a,b)$ и любом достаточно малом фиксированном $\varkappa>0$ для решения u^{ε} краевой задачи* (1.1) *справедливо равенство*

$$\|u^{\varepsilon}-u_0\|_{C[a,b]}=O(\varepsilon), \tag{1.2}$$

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-07920). Второй автор частично поддержан РНФ.

где u_0 — *решение краевой задачи*

$$\mathcal{L}^{\varkappa}u_0 = f, \quad x \in (a,0)\cup(0,b), \quad u_0(a) = u_0(b) = 0, \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q\rangle\, u_0(0). \tag{1.3}$$

Доказательство этого утверждения будет проводится на основе метода согласования асимптотических приближений [1–3].

2. Разрешимость краевых задач (1.3) и (1.1)

Вначале рассмотрим при $\langle Q\rangle \geqslant 0$ следующую линейную краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^0 u_0 = f, \quad x \in (a,0)\cup(0,b), \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q\rangle\, u_0(0),\\ &l_a u_0 := h_a u_0(a) - H_a\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}(a) = 0, \quad l_b u_0 := h_b u_0(b) + H_b\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}(b) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где h_a, h_b, H_a, $H_b \geqslant 0$, $h_a + H_a > 0$, $h_b + H_b > 0$.

Пусть $f \in L_2(a,b)$. Положим $\widetilde{h}_a = k(a)h_aH_a^{-1}$, $\widetilde{h}_b = k(b)h_bH_b^{-1}$ ($\widetilde{h}_a = 0$, если $H_a = 0$, и $\widetilde{h}_b = 0$, если $H_b = 0$). При $H_aH_b \neq 0$ под обобщенным (слабым) решением краевой задачи (2.1) понимается функция $u_0 \in W_2^1(a,b)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(u_0,v)' := \int\limits_a^b \big(ku_0'v' + qu_0v\big)\,\mathrm{d}x + \langle Q\rangle\, u_0(0)v(0) + \widetilde{h}_a u_0(a)v(a) + \widetilde{h}_b u_0(b)v(b) = \int\limits_a^b fv\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

для любого $v \in W_2^1(a,b)$. Линейное нормированное пространство $W_2^1(a,b)$ вложено в $C[a,b]$ (см., например, [4, гл. III, § 6]). Следовательно,

$$u \in C[a,b], \quad \|u\|_{C[a,b]} \leqslant C\|u\|_{W_2^1(a,b)} \ \ \forall u \in W_2^1(a,b). \tag{2.3}$$

Поэтому скалярное произведение $(u,v)'$ в силу условий $k_1 \geqslant k(x) \geqslant k_0 > 0$, $q_1 \geqslant q(x) \geqslant q_0 > 0$, $\langle Q\rangle \geqslant 0$ эквивалентно исходному в пространстве $W_2^1(a,b)$. Аналогично при $H_a = H_b = 0$ (при $H_a = 0$, $H_b \neq 0$ или при $H_a \neq 0$, $H_b = 0$) под обобщенным решением краевой задачи (2.1) понимается элемент $u_0 \in W_2^1(a,b)$, обращающийся в нуль при $x = a$ и $x = b$ (при $x = a$, или при $x = b$) и удовлетворяющий интегральному тождеству (2.2) для любого $v \in W_2^1(a,b)$, обращающегося в нуль при $x = a$ и $x = b$ (при $x = a$, или при $x = b$).

По теореме Рисса (см., например, [4, гл. II, § 3, п. 2]) краевая задача (2.1) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|u_0\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{2.4}$$

В (2.3), (2.4) и в дальнейшем постоянные C, вообще говоря, разные.

Покажем, что

$$u_0 \in W_2^2(a,0), \quad u_0 \in W_2^2(0,b), \quad \|u_0\|_{W_2^2(a,0)} + \|u_0\|_{W_2^2(0,b)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{2.5}$$

Хорошо известно, что для $F \in L_2(a,0)$ решение краевой задачи

$$\mathcal{L}^0 w = F, \quad x \in (a,0), \quad w(a) = 0, \quad w(0) = 0, \tag{2.6}$$

принадлежит $W_2^2(a,0)$ и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{W_2^2(a,0)} \leqslant C\|F\|_{L_2(a,0)}. \tag{2.7}$$

(Для n-мерных эллиптических операторов этот результат имеется, например, в [4, гл. IV, § 2, п. 3], при $n = 1$ доказательство элементарно.) Будем искать $u_0(x)$ в виде $u_0(x) = w(x) +$

$w_1(x)$, где $w_1(x) = (u_0(a) - u_0(0))x/a + u_0(0)$. В силу (2.3), (2.4) получаем, что $\|w_1\|_{W_2^2(a,0)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}$. Легко видеть, что для w получаем краевую задачу (2.6), причем $\|F\|_{L_2(a,0)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}$ опять же в силу (2.3), (2.4). Следовательно, $u_0 \in W_2^2(a,0)$ и $\|u_0\|_{W_2^2(a,0)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}$ исходя из (2.7). Аналогичная оценка справедлива и для интервала $(0,b)$, т. е. получили (2.5).

Так как $W_2^2(c,d)$ вложено в $C^1[c,d]$ (см., например, [4, гл. III, § 6]), т. е.

$$w \in C^1[a,b], \quad \|w\|_{C^1[c,d]} \leqslant C\|w\|_{W_2^2(c,d)} \quad \forall w \in W_2^2(c,d), \tag{2.8}$$

то в силу (2.3), (2.4) и (2.8), (2.5) имеем

$$\begin{aligned} &u_0 \in C[a,b], \quad \|u_0\|_{C[a,b]} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}, \\ &u_0 \in C^1[a,0], \quad u_0 \in C^1[0,b], \quad \|u_0\|_{C^1[a,0]} + \|u_0\|_{C^1[0,b]} \leqslant \ C\|f\|_{L_2(a,b)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Аналогично определяются обобщенные решения нелинейных краевых задач (1.1) и (1.3) как функции $u^\varepsilon \in W_2^1(a,b)$ и $u_0 \in W_2^1(a,b)$, обращающиеся в нуль на концах интервала (a,b) и удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int\limits_a^b k(u^\varepsilon)'v'\mathrm{d}x + \varkappa\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(u^\varepsilon)\right)v\mathrm{d}x + \int\limits_a^b qu^\varepsilon v\mathrm{d}x + \varepsilon^{-1}\int\limits_a^b Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon v\mathrm{d}x = \int\limits_a^b fv\mathrm{d}x,$$

$$(u_0, v)' + \varkappa\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(u_0)\right)v\mathrm{d}x = \int\limits_a^b fv\mathrm{d}x$$

соответственно при любых $v \in W_2^1(a,b)$, равных нулю на концах интервала (a,b).

Доказательство следующих трех утверждений для нелинейных краевых задач (1.3) и (1.1) основано на подходе, предложенном в [1] при доказательстве теорем существования и оценок для решений нелинейных краевых задач с операторами с быстроосциллирующими коэффициентами.

Теорема 2.1. *Пусть f — произвольная фиксированная функция из $L_2(a,b)$. Тогда при любом достаточно малом $\varkappa > 0$ и любом неотрицательном $\langle Q\rangle$ краевая задача* (1.3) *однозначно разрешима в* $W_2^1(a,b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В подпространстве функций из $W_2^1(a,b)$ рассмотрим шар

$$S_M := \left\{v\colon v(a) = v(b) = 0,\ \|v\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant M\right\},$$

где постоянную M выберем позднее.

Так как $p' \in C^1(-\infty,\infty)$, а $v \in C[a,b]$ согласно (2.3), то $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v) = p'(v)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \in L_2(a,b)$. Определим оператор $A : S_M \to W_2^1(a,b)$ следующим образом: $u = Av$, если при $f \in L_2(a,b)$ функция u является решением следующей однозначно разрешимой в $W_2^1(a,b)$ линейной краевой задачи

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^0 u = f - \varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v), \quad x \in (a,0)\cup(0,b), \quad u(a) = u(b) = 0, \\ k(0)\{u'\}(0) = \langle Q\rangle\, u(0), \end{gathered}$$

причем в силу теорем о повышении гладкости решений $u \in W_2^2(a,0)$, $u \in W_2^2(0,b)$.

В этих обозначениях краевая задача (1.3) приобретает вид $u_0 = Au_0$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что можно выбрать постоянные M и $\varkappa$ так, чтобы оператор A был сжимающим в S_M. Из (2.4) следует, что

$$\|u\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant C^2\Big\|f - \varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v)\Big\|^2_{L_2(a,b)} \leqslant 2C^2\bigg(\|f\|^2_{L_2(a,b)} + \varkappa^2\Big\|p'(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big\|^2_{L_2(a,b)}\bigg). \tag{2.10}$$

Из неравенства (2.3) вытекает, что в шаре S_M справедливы оценки

$$|v(x)| \leqslant CM, \quad |p'(v)| \leqslant M_1. \tag{2.11}$$

Следовательно,

$$\|u\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant 2C^2 \left(\|f\|^2_{L_2(a,b)} + \varkappa^2 M_1^2 M^2\right)$$

в силу (2.10). Отсюда для фиксированного f получаем, что

$$\|Av\|^2_{W_2^1(a,b)} < M^2,$$

если последовательно выбрать M достаточно большим, а $\varkappa$ — достаточно малым. Следовательно, при таких M и $\varkappa$ оператор A переводит шар S_M в себя.

Покажем, что при достаточно малом $\varkappa$ оператор A является сжимающим. Пусть $u_1 = Av_1$, $u_2 = Av_2$. Запишем соотношение (2.2) для u_1, u_2 и вычтем из первого второе:

$$(u_1 - u_2, v)' = \varkappa \int\limits_a^b v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(p(v_2) - p(v_1)\right) \mathrm{d}x.$$

Подставим в это равенство $v = u_1 - u_2$ и проинтегрируем по частям:

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2)' = \varkappa \int\limits_a^b \left(p(v_1(x) - p(v_2(x))\right) (u_1(x) - u_2(x))' \,\mathrm{d}x.$$

Учитывая, что $\min\{k_0; q_0\} \|u_1 - u_2\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant (u_1 - u_2, u_1 - u_2)'$, приходим к неравенству

$$\min\{k_0; q_0\} \|u_1 - u_2\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant \varkappa \max_{v \in S_M} |p'(v)| \int\limits_a^b |v_1(x) - v_2(x)| \cdot \left|u_1'(x) - u_2'(x)\right| \mathrm{d}x.$$

С учетом(2.11) последовательно получаем

$$\|u_1 - u_2\|^2_{W_2^1[a,b]} \leqslant \frac{\varkappa M_1}{\min\{k_0; q_0\}} \|v_1 - v_2\|_{L_2(a,b)} \|u_1 - u_2\|_{L_2(a,b)},$$
$$\|Av_1 - Av_2\|_{W_2^1[a,b]} \leqslant \frac{\varkappa M_1}{\min\{k_0; q_0\}} \|v_1 - v_2\|_{W_2^1(a,b)}.$$

Откуда вытекает, что при достаточно малом положительном $\varkappa$ оператор A является сжимающим и, следовательно, краевая задача (1.3) однозначно разрешима. Теорема 2.1 доказана.

Так как решение u_0 нелинейной краевой задачи (1.3) можно рассматривать как решение линейной краевой задачи

$$\mathcal{L}^0 u_0 = F, \quad x \in (a, 0) \cup (0, b), \quad u_0(a) = u_0(b) = 0, \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q \rangle\, u_0(0)$$

при $F = f - \varkappa \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(u_0)$, то получаем справедливость следующего утверждения (см. (2.5)).

Следствие 2.1. *Решение краевой задачи* (1.3) *принадлежит* $W_2^2(a, 0) \cup W_2^2(0, b)$.

Теорема 2.2. *Пусть f — произвольная фиксированная функция из $L_2(a, b)$. Тогда существует число $\varkappa_0 > 0$ такое, что для любых $Q \geqslant 0$, $0 < \varkappa < \varkappa_0$ и $\varepsilon > 0$ краевая задача* (1.1) *однозначно разрешима в $W_2^1(a, b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая уравнение из однозначно разрешимой краевой задачи

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon u^\varepsilon = f, \quad x \in (a,b), \quad u^\varepsilon(a) = u^\varepsilon(b) = 0,$$

на u^ε и интегрируя полученное равенство по частям по интервалу (a,b) с учетом того, что $Q \geqslant 0$, получаем следующий аналог оценки (2.4):

$$\|u^\varepsilon\|_{W^1_2(a,b)} \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}, \tag{2.12}$$

где постоянная C от ε не зависит. В рассматриваемом случае определим оператор $A : S_M \to W^1_2(a,b)$ следующим образом: $u^\varepsilon = Av$, если u^ε является решением однозначно разрешимой в $W^1_2(a,b)$ линейной краевой задачи

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon u^\varepsilon = f - \varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(v), \quad x \in (a,b), \quad u^\varepsilon(a) = u^\varepsilon(b) = 0.$$

В этих обозначениях краевая задача (1.1) приобретает вид

$$u^\varepsilon = Au^\varepsilon.$$

С учетом оценки (2.12) (вместо (2.4)) и неравенства $Q \geqslant 0$ дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 2.1. Теорема 2.2 доказана.

Справедливость следующего утверждения устанавливается аналогично следствию 2.1.

Следствие 2.2. *Решение краевой задачи* (1.1) *принадлежит* $W^2_2(a,b)$.

Для доказательства теоремы 1.1 понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* $\widehat{W}_\varepsilon$ *является решением краевой задачи*

$$\mathcal{L}^\varkappa_\varepsilon \widehat{W}_\varepsilon = f + \varphi_\varepsilon, \quad x \in (a,b), \quad \widehat{W}_\varepsilon(a) = \widehat{W}_\varepsilon(b) = 0, \tag{2.13}$$

причем

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon), \quad \|\widehat{W}_\varepsilon\|_{C[a,b]} = O(1). \tag{2.14}$$

Тогда

$$\|u^\varepsilon - \widehat{W}_\varepsilon\|_{W^1_2[a,b]} = O(\varepsilon). \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.1) и (2.13) следует, что

$$\mathcal{L}^\varkappa_\varepsilon \widehat{W}_\varepsilon - \mathcal{L}^\varkappa_\varepsilon u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon(x). \tag{2.16}$$

Обозначим

$$v_\varepsilon(x) = \widehat{W}_\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x). \tag{2.17}$$

Следуя доказательству теоремы 2.1, умножим обе части равенства (2.16) на v_ε и проинтегрируем по частям на (a,b). В результате получаем, что

$$\int\limits_a^b \left(k(x)v'^2_\varepsilon(x) + \left(q(x) + \varepsilon Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)v^2_\varepsilon\right)\mathrm{d}x = \varkappa\int\limits_a^b v'_\varepsilon(x)\left(p\left(\widehat{W}_\varepsilon(x)\right) - p\left(u^\varepsilon(x)\right)\right)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x.$$

Отсюда следует, что

$$\min\{k_0; q_0\}\|v_\varepsilon\|^2_{W^1_2(a,b)} \leqslant \varkappa \sup_{x\in[a,b],\theta\in(0,1)} |p'(\widetilde{u}_\varepsilon)| \int\limits_a^b |v'_\varepsilon(x)|\cdot|v_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x + \int\limits_a^b |v_\varepsilon(x)|\cdot|\varphi_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x,$$

где $\widetilde{u}_\varepsilon(x) = \theta(x)u^\varepsilon(x) + (1-\theta(x))\widehat{W}_\varepsilon(x)$, $0 < \theta(x) < 1$. Так как $\|u^\varepsilon\|_{C[a,b]} \leqslant CM$ в силу (2.3), а $\|\widehat{W}_\varepsilon\|_{C[a,b]} \leqslant C$ в силу (2.14), то $|\widetilde{u}_\varepsilon(x)| \leqslant C_1$ и, следовательно, $\sup\limits_{x\in[a,b],\theta\in(0,1)} |p'(\widetilde{u}_\varepsilon)| \leqslant M_1$. Тогда из последнего интегрального неравенства и из (2.14) вытекает, что

$$\min\{k_0; q_0\}\|v_\varepsilon\|^2_{W^1_2(a,b)} \leqslant M_1\varkappa\|v_\varepsilon\|^2_{W^1_2(a,b)} + \varepsilon M_2\|v_\varepsilon\|_{W^1_2(a,b)},$$
$$\|v_\varepsilon\|^2_{W^1_2(a,b)} \leqslant \varepsilon\frac{M_2}{\min\{k_0; q_0\} - M_1\varkappa}.$$

При достаточно малых $\varkappa$ это дает $\|v_\varepsilon\|_{W^1_2(a,b)} = O(\varepsilon)$. Отсюда с учетом определения (2.17) получаем оценку (2.15). Лемма 2.1 доказана.

3. Линейная краевая задача с дельта-образным потенциалом

Целью этого раздела является доказательство следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Для решения краевой задачи*

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon u^\varepsilon = f, \quad x \in (a,b), \quad l_a u^\varepsilon = l_b u^\varepsilon = 0 \tag{3.1}$$

справедлива равномерная оценка

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)}, \tag{3.2}$$

где u_0 — решение краевой задачи

$$\mathcal{L}^0 u_0 = f, \quad x \in (a,0)\cup(0,b), \quad l_a u_0 = l_b u_0 = 0, \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q\rangle\, u_0(0). \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $k(x) \equiv 1$ и граничных условий Дирихле сходимость решений краевой задачи (3.1) к решению краевой задачи (3.3) была показана в [5]. Также известно (см. [6; 7] и содержащийся в этих работах обзор литературы), что для оператора Шредингера с дельта-образным потенциалом на оси предельным будет оператор Шредингера со скачком производной (как в (3.3)). Поэтому и в рассматриваемом нами случае вне малой окрестности нуля в качестве внешнего приближения решения $u^\varepsilon(x)$ краевой задачи (3.1) возьмем решение $u_0(x)$ краевой задачи (3.3).

Функция $u_0(x)$ не удовлетворяет уравнению из (3.1) в окрестности нуля. Поэтому в этой окрестности будем строить внутреннее приближение $V(\xi,\varepsilon)$, где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Функция $u_0(x)$ имеет в нуле односторонние производные, поэтому

$$u_0(x) = u_0(0) + u_0'(\mp 0)x + O(x^2), \quad \mp x > 0.$$

Переходя в этом равенстве к переменной ξ, получаем, что

$$u_0(x) = u_0(0) + \varepsilon u_0'(\mp 0)\xi + O(\varepsilon^2\xi^2), \quad \mp\xi > 0, \quad \varepsilon\xi \to \mp 0.$$

Из этих равенств и условия согласования внешнего и внутреннего разложений [1–3] вытекает, что внутреннее приближение следует искать в виде

$$V(\xi,\varepsilon) = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi), \tag{3.4}$$

требуя от $v_0(\xi)$ и $v_1(\xi)$ следующего поведения на бесконечности:

$$v_0(\xi) = u_0(0) + o(1), \qquad \xi \to \mp\infty, \tag{3.5}$$
$$v_1(\xi) = u_0'(\mp 0)\xi + C_\mp + o(1), \quad \xi \to \mp\infty. \tag{3.6}$$

Переходя в определении $\mathcal{L}^0_\varepsilon$ к переменной ξ, получаем

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon V = \Big(-\varepsilon^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big(k(\varepsilon\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big) + \big(q(\varepsilon\xi)+\varepsilon^{-1}Q\left(\xi\right)\big)\Big)(v_0(\xi)+\varepsilon v_1(\xi))$$

$$= -\varepsilon^{-2}k(0)\frac{\mathrm{d}^2v_0}{\mathrm{d}\xi^2} + \varepsilon^{-1}\left(-k(0)\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\xi\frac{\mathrm{d}^2v_0}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\xi} + Q(\xi)v_0\right)$$

$$-\varepsilon^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((k(x)-k(0))\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + q(x)v_0(\xi) + Q(\xi)v_1(\xi) + \varepsilon q(x)v_1(\xi). \tag{3.7}$$

Приравнивая в правой части коэффициент при ε^{-2}, получаем уравнение для v_0:

$$k(0)\frac{\mathrm{d}^2v_0}{\mathrm{d}\xi^2} = 0. \tag{3.8}$$

Очевидно, что функция

$$v_0(\xi) \equiv u_0(0) \tag{3.9}$$

является решением уравнения (3.8) с асимптотикой (3.5).

Приравнивая в правой части (3.7) коэффициент при ε^{-1} с учетом последнего тождества, выводим уравнение для v_1:

$$k(0)\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\xi^2} = u_0(0)Q(\xi). \tag{3.10}$$

Таким образом, получаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Если функция* $v_0(\xi)$ *определяется равенством* (3.9), *а функция* $v_1(\xi)$ *является решением уравнения* (3.10), *то справедливо равенство*

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon V\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$+\,q\left(x\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) + Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \tag{3.11}$$

Легко видеть, что функция

$$v_1(\xi) = \left(\mathcal{K} + \frac{u_0(0)}{k(0)}\int\limits_{-\infty}^{\xi} Q(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\xi - \frac{u_0(0)}{k(0)}\int\limits_{-\infty}^{\xi}\tau Q(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.12}$$

является решением уравнения (3.10) при любом выборе числа $\mathcal{K}$.

Из этого равенства следует, что

$$v_1(\xi) = \begin{cases} \mathcal{K}\xi & \text{при } \xi \text{ левее } \operatorname{supp} Q(\xi), \\ \left(\mathcal{K} + \dfrac{u_0(0)}{k(0)}\langle Q\rangle\right)\xi - \dfrac{u_0(0)}{k(0)}\langle Q\rangle_1 & \text{при } \xi \text{ правее } \operatorname{supp} Q(\xi). \end{cases} \tag{3.13}$$

Приравнивая в (3.13) с (3.6) коэффициенты при ξ для $\xi \to \mp\infty$, получаем систему уравнений для $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = u_0'(-0), \tag{3.14}$$

$$\mathcal{K} + \frac{u_0(0)}{k(0)}\langle Q\rangle = u_0'(+0). \tag{3.15}$$

В силу условия на скачок производной из (3.3) эта переопределенная система однозначно разрешима относительно $\mathcal{K}$ (что косвенно подтверждает правильный выбор u_0). Таким образом, определив $v_0(\xi)$, $v_1(\xi)$ и $\mathcal{K}$ в соответствии с (3.9), (3.12) и (3.14), мы добились равенства (3.5) и исходя из (3.13)–(3.15) равенства

$$v_1(\xi) = \begin{cases} u_0'(-0)\xi & \text{при } \xi < -r, \\ u_0'(+0)\xi - \dfrac{u_0(0)}{k(0)} \langle Q \rangle_1 & \text{при } \xi > r, \end{cases} \tag{3.16}$$

где $r = \operatorname{dist}(\{0\}, \operatorname{supp} Q(\xi)) + |\operatorname{supp} Q(\xi)|$. Равенство (3.16) соответствует требованию (3.6).

Согласованные члены внешнего и внутреннего приближений обозначим через $\widehat{U}(x)$ и $\widehat{V}(\xi,\varepsilon)$ соответственно, т. е.

$$\widehat{U}(x) := u_0(0) + u_0'(\mp 0)x = u_0(0) + \varepsilon u_0'(\mp 0)\xi := \widehat{V}(\xi,\varepsilon), \quad \mp x, \mp\xi > 0. \tag{3.17}$$

Положим

$$Z_\varepsilon(x) := u_0(x) + V\Big(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\Big) - \widehat{U}(x) = u_0(x) + V\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) - \widehat{V}\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right), \tag{3.18}$$

$$\widehat{v}_1(\xi) := v_1(\xi) - u_0'(\mp 0)\xi, \quad \mp\xi > 0. \tag{3.19}$$

Тогда с учетом равенств (3.4), (3.9) и (3.17) последовательно получаем, что

$$V(\xi,\varepsilon) - \widehat{V}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon\widehat{v}_1(\xi), \tag{3.20}$$

$$Z_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon\widehat{v}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{3.21}$$

А так как $u_0 \in \big(W_2^2(a,0) \cup W_2^2(0,b)\big) \cap W_2^1(a,b)$ в силу (2.5), то из (3.18), (3.17) следует, что

$$Z_\varepsilon \in W_2^2(a,b). \tag{3.22}$$

Ввиду (3.19) и (3.16) имеем

$$\widehat{v}_1(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < -r, \\ -\dfrac{u_0(0)}{k(0)} \langle Q \rangle_1 & \text{при } \xi > r. \end{cases} \tag{3.23}$$

Из (3.21) и последнего равенства с учетом граничных условий для u_0 из (3.3) следует, что

$$l_a Z_\varepsilon = 0, \quad l_b Z_\varepsilon = -\varepsilon h_b \frac{u_0(0)}{k(0)} \langle Q \rangle_1. \tag{3.24}$$

В силу равенств (3.19), (3.12), (3.14) и (3.23) получаем, что

$$|\widehat{v}_1(\xi)| \leqslant C_1 |u_0(0)| + C_2 \left|u_0'(-0)\right| + C_3 \left|u_0'(+0)\right|. \tag{3.25}$$

Из этой оценки, равенства (3.21) и неравенств (2.9) вытекает, что

$$\|Z_\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} \leqslant \varepsilon C \|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.26}$$

В силу определения (3.18), уравнения из (3.3) и равенства (3.11) имеем

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0 Z_\varepsilon = f(x) + \varepsilon^{-1} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\big(u_0(x) - \widehat{U}(x)\big) + q(x)\left(V\Big(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\Big) - \widehat{V}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\Big)\right) + Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x) - k(0) - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right) - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi) + \xi\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)u_0'(\mp0)+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)u_0'(\mp0),\quad \mp x>0.$$

С учетом (3.17), (3.19) и (3.20) это равенство можно переписать в виде

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon Z_\varepsilon=f(x)+I_\varepsilon(x)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}+Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\tag{3.27}$$

где

$$\begin{aligned}I_\varepsilon(x)=&I^1_\varepsilon(x)+I^2_\varepsilon(x)+I^3_\varepsilon(x),\\ I^1_\varepsilon(x)=&\varepsilon^{-1}Q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\big(u_0(x)-u_0(0)-u_0'(\mp0)x\big),\quad \mp x>0,\quad I^2_\varepsilon(x)=\varepsilon q(x)\widehat{v}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\\ I^3_\varepsilon(x)=&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\\ =&-\varepsilon^{-1}\Big(k(x)-k(0)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)x\Big)\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\Big(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(x)-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).\end{aligned}\tag{3.28}$$

Используя для $I^1_\varepsilon(x)$ формулу остаточного члена ряда Тейлора в интегральной форме, в силу уравнения из (3.3) имеем

$$I^1_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\int\limits_0^x\frac{(x-t)}{k(t)}\big(q(t)u_0(t)-k'(t)u_0'(t)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t.\tag{3.29}$$

А так как

$$\int\limits_a^b\left(Q\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\int\limits_0^s(s-t)F(t)\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}s\leqslant C_1\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}\left(\int\limits_0^s(s-t)F(t)\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_1\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}\left|\int\limits_0^s(s-t)^2\,\mathrm{d}t\int\limits_0^sF^2(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}s\leqslant C_1\|F\|^2_{L_2(a,b)}\int\limits_{\mathrm{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}|s|^3\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon^4C_2\|F\|_{L_2(a,b)},$$

то из (3.29) и (2.4) следует, что

$$\|I^1_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}.\tag{3.30}$$

Из определения (3.28) функции $I^2_\varepsilon(x)$ и неравенств (3.25) и (2.9) имеем, что

$$\|I^2_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}.\tag{3.31}$$

Из определения (3.28) функции $I^3_\varepsilon(x)$ и равенства (3.23) следует, что $\mathrm{supp}I^3_\varepsilon\subset[-\varepsilon r,\varepsilon r]$. Из определений (3.12), (3.14) и (3.19) функций $v_1(\xi)$ и $\widehat{v}_1(\xi)$ вытекает, что

$$\left|v_1''(\xi)\right|+\left|\widehat{v}_1'(\xi)\right|\leqslant C_1\left|u_0(0)\right|+C_2\left|u_0'(-0)\right|+C_3\left|u_0'(+0)\right|.\tag{3.32}$$

Из этого неравенства и оценок (2.9) получаем, что

$$\|I^3_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}.\tag{3.33}$$

Из определения (3.28) функции $I_\varepsilon(x)$ и оценок (3.30), (3.31) и (3.33) вытекает, что

$$\|I_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}\leqslant\varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}.\tag{3.34}$$

Легко видеть, что функции

$$v_{2,\varepsilon}(x) = \int_a^x Q\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\int_t^x \frac{1}{k(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{3.35}$$

$$v_{3,\varepsilon}(x) = -\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\int_a^x \Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}t}\int_t^x \frac{1}{k(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{3.36}$$

являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}v_{2,\varepsilon}}{\mathrm{d}x}(x)\Big) =& Q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)v_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}v_{3,\varepsilon}}{\mathrm{d}x}(x)\Big) =& -\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}.\end{aligned}$$

Поэтому, применяя оператор $\mathcal{L}^0_\varepsilon$ к $v_{2,\varepsilon}$ и $v_{3,\varepsilon}$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^0_\varepsilon v_{2,\varepsilon}(x) =& -Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+q(x)v_{2,\varepsilon}(x)+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{2,\varepsilon}(x),\\ \mathcal{L}^0_\varepsilon v_{3,\varepsilon}(x) =& \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}(0)\Big(\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}(\xi)+\xi\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}+q(x)v_{3,\varepsilon}(x)+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{3,\varepsilon}(x).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Обозначим

$$W_\varepsilon(x) = Z_\varepsilon(x)+v_{2,\varepsilon}(x)+v_{3,\varepsilon}(x). \tag{3.38}$$

Тогда, во-первых,

$$W_\varepsilon \in W_2^2(a,b) \tag{3.39}$$

в силу (3.22) и определений (3.35) и (3.36) функций $v_{2,\varepsilon}$ к $v_{3,\varepsilon}$, а во-вторых, в силу равенств (3.27), (3.37) получаем, что

$$\mathcal{L}^0_\varepsilon W_\varepsilon(x) = f(x)+\mathcal{I}_\varepsilon(x), \tag{3.40}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon(x) =& I_\varepsilon(x)+I^4_\varepsilon(x)+I^5_\varepsilon(x),\\ I^4_\varepsilon(x) =& q(x)\left(v_{2,\varepsilon}(x)+v_{3,\varepsilon}(x)\right), \quad I^5_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(v_{2,\varepsilon}(x)+v_{3,\varepsilon}(x)\right),\end{aligned} \tag{3.41}$$

а $I_\varepsilon(x)$ определено в (3.28).

Из определения (3.12), (3.14) функции $v_1(\xi)$ и неравенств (2.9) последовательно получаем:

$$\|v_1\|_{C(\operatorname{supp}Q)} \leqslant C_1\left|u_0(0)\right|+C_2\left|u_0'(-0)\right|+C_3\left|u_0'(+0)\right| \leqslant C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.42}$$

Из этого неравенства и определения (3.35) следует, что

$$\|v_{2,\varepsilon}\|_{C[a,b]} \leqslant C_1\int\limits_{\operatorname{supp}Q(\varepsilon^{-1}x)}\Big|v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big|\mathrm{d}t = \varepsilon C_1\int\limits_{\operatorname{supp}Q(\xi)}|v_1(\xi)|\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.43}$$

А так как

$$v_{2,\varepsilon}'(x) = -\frac{1}{k(x)}\int_a^x Q\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\mathrm{d}t,$$

то аналогично доказывается, что

$$\|v_{2,\varepsilon}'\|_{C[a,b]} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \tag{3.44}$$

Из (3.35) и (3.42) также следует, что

$$\|v_{2,\varepsilon}\|_{C\left(\operatorname{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)} \leqslant C_1\Bigg(\max_{\operatorname{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}|x|\int\limits_{\operatorname{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}\Big|v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big|\mathrm{d}t+\int\limits_{\operatorname{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}|t|\Big|v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big|\mathrm{d}t\Bigg) \leqslant \varepsilon^2 C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.45)$$

В свою очередь, так как носитель функции $(\widehat{v}_1'(\xi)+\xi v_1''(\xi))$ лежит в $[-r,r]$, то аналогично оценкам (3.43)–(3.45), но с использованием неравенств (3.32) и (2.9) вместо (3.42), получаем справедливость следующих оценок:

$$\|v_{3,\varepsilon}\|_{C^1[a,b]} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}, \quad \|v_{3,\varepsilon}\|_{C[-\varepsilon r,\varepsilon r]} \leqslant \varepsilon^2 C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.46)$$

Из определения (3.38) функции $W_\varepsilon(x)$, граничных условий (3.24) для функции $Z_\varepsilon(x)$, определений (3.35), (3.36) функций $v_{2,\varepsilon}$, $v_{3,\varepsilon}$ и неравенств (3.43), (3.44) и (3.46) следует, что

$$l_a W_\varepsilon = 0, \quad |l_b W_\varepsilon| \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.47)$$

Аналогично в силу равенства (3.38) и неравенств (3.26), (3.43) и (3.46) получаем, что

$$\|W_\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.48)$$

Из определения (3.41) функции $I_\varepsilon^4(x)$ и оценок (3.43) и (3.46) выводим, что

$$\|I_\varepsilon^4\|_{L_2(a,b)} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.49)$$

Так как $\operatorname{supp} I_\varepsilon^5(x) = \operatorname{supp} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, то с учетом неравенств (3.45) и (3.46) получаем, что

$$\|I_\varepsilon^5\|_{L_2(a,b)} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.50)$$

Из (3.41), (3.49), (3.50) и (3.34) следует, что

$$\|\mathcal{I}_\varepsilon\|_{L_2(a,b)} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.51)$$

Обозначим

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{b}{2}, \\ \Big(h_b\dfrac{b^2}{4}+H_b b\Big)^{-1}\Big(x-\dfrac{b}{2}\Big)^2 l_b W_\varepsilon, & x \geqslant \dfrac{b}{2} \end{cases},$$

$$\widehat{W}_\varepsilon(x) = W_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x).$$

Из (3.39), определения $\widehat{W}_\varepsilon(x)$, равенства (3.40) и неравенств (3.51), (3.47) следует, что $\widehat{W}_\varepsilon \in W_2^2(a,b)$ является решением краевой задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon^0\widehat{W}_\varepsilon = f+\varphi_\varepsilon, \quad x\in(a,b), \quad l_a\widehat{W}_\varepsilon = l_b\widehat{W}_\varepsilon = 0, \quad (3.52)$$

где

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(a,b)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)}, \quad (3.53)$$

причем в силу (3.48) имеем

$$\|\widehat{W}_\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)}. \quad (3.54)$$

Из (3.52), (3.1) следует, что

$$\int\limits_a^b \mathcal{L}_\varepsilon^0\big(\widehat{W}_\varepsilon - u^\varepsilon\big)\big(\widehat{W}_\varepsilon - u^\varepsilon\big)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \varphi_\varepsilon\big(\widehat{W}_\varepsilon - u^\varepsilon\big)\mathrm{d}x.$$

Интегрируя левую часть этого равенства по частям и учитывая неравенство (3.53), получаем, что
$$\min\{k_0; q_0\}\|\widehat{W}_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}.$$
Отсюда и из (2.9) следует, что $\|\widehat{W}_\varepsilon - u^\varepsilon\|_{C[a,b]} \leqslant \varepsilon C\|f\|_{L_2(a,b)}$. Из этой оценки и неравенства (3.54) вытекает оценка (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Так как $\|v\|_{L_2(a,b)} \leqslant \sqrt{b-a}\,\|v\|_{C[a,b]}$, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Для решения краевой задачи* (3.1) *справедлива равномерная оценка*
$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{L_2(a,b)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(a,b)},$$
где u_0 *— решение краевой задачи* (3.3)*.*

В [8, § 5.2, п. 3] показано, что собственные значения краевой задачи
$$\mathcal{L}_\varepsilon^0\psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon\psi^\varepsilon, \quad x \in (a,b), \quad l_a\psi^\varepsilon = l_b\psi^\varepsilon = 0$$
являются простыми. Аналогично легко показать, что и собственные значения краевой задачи со скачком производной
$$\mathcal{L}^0\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in (a,0)\cup(0,b), \quad l_a\psi_0 = l_b\psi_0 = 0, \quad k(0)\{u_0'\}(0) = \langle Q\rangle\,\psi_0(0)$$
также являются простыми. Поэтому из последнего утверждения и [9, гл. IV, теорема 3.16, гл. V, § 3] вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 3.2. *Все собственные значения* λ^ε *сходятся к собственным значениям* λ_0*, а для соответствующих нормированных собственных функций имеет место сходимость в* $L_2(a,b)$*. И наоборот, к любому собственному значению* λ_0 *сходится собственное значение* λ^ε*, причем*
$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + O(\varepsilon). \tag{3.55}$$

Заметим, что вопрос сходимости собственных значений в случае, когда вместо дельтаобразного потенциала $\varepsilon^{-1}Q(\varepsilon^{-1}x)$ рассматривался потенциал $\mu^{-1}Q(\varepsilon^{-1}x)$ при $\mu^{-1}\varepsilon \to 0$, был исследован в [10]. Отметим также, что равенство, аналогичное (3.55), в задаче Дирихле для оператора со "средней" массой следует из [11].

4. Доказательство теоремы 1.1

Сохраним для $v_i(\xi)$, $\widehat{v}_1(\xi)$, $V(\xi,\varepsilon)$, $\widehat{U}(x)$, $\widehat{V}(\xi,\varepsilon)$, $Z_\varepsilon(x)$, $v_{2,\varepsilon}(x)$, $v_{3,\varepsilon}(x)$ и $W_\varepsilon(x)$ прежние обозначения, понимая, конечно, под $u_0(x)$ уже решение краевой задачи (1.3), а не решение краевой задачи (3.3) (как в предыдущем разделе).

Легко видеть, что функция
$$v_{4,\varepsilon}(x) = \varkappa\int\limits_a^x p'(u_0)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\int\limits_s^x \frac{1}{k(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{4.1}$$
является решением следующего уравнения:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}v_{4,\varepsilon}}{\mathrm{d}x}(x)\Big) = \varkappa p'(u_0)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$
Поэтому, применяя оператор $\mathcal{L}_\varepsilon^0$ к $v_{4,\varepsilon}$, имеем
$$\mathcal{L}_\varepsilon^0 v_{4,\varepsilon} = -\varkappa p'(u_0)\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_1}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + qv_{4,\varepsilon} + \varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{4,\varepsilon}. \tag{4.2}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_\varepsilon(x) =&W_\varepsilon(x) + v_{4,\varepsilon}(x) = Z_\varepsilon(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x)\\ =&u_0(x) + \widehat{v}_1(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x).\end{aligned} \tag{4.3}$$

(см. (3.38), (3.21)). Тогда

$$\widetilde{W}_\varepsilon \in W_2^2(a,b) \tag{4.4}$$

в силу (3.39) и определения (4.1) функции $v_{4,\varepsilon}$.

Применяя $\mathcal{L}_\varepsilon^\varkappa$ к $\widetilde{W}_\varepsilon(x)$, с учетом (3.40), (4.2), (4.3) и (1.3) получаем

$$\mathcal{L}_\varepsilon^\varkappa \widetilde{W}_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon^0 \widetilde{W}_\varepsilon + \varkappa p'(\widetilde{W}_\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\widetilde{W}_\varepsilon}{\mathrm{d}x} = f + \mathcal{J}_\varepsilon, \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\varepsilon(x) =&\mathcal{I}_\varepsilon(x) + I_\varepsilon^6(x) + I_\varepsilon^7(x) + I_\varepsilon^8(x) + I_\varepsilon^9(x),\\ I_\varepsilon^6(x) =&\varkappa\left(p'(\widetilde{W}_\varepsilon) - p'(u_0)\right)\left(u_0'(x) + \widehat{v}_1'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),\\ I_\varepsilon^7(x) =&\varkappa p'(\widetilde{W}_\varepsilon)\left(v_{2,\varepsilon}'(x) + v_{3,\varepsilon}'(x) + v_{4,\varepsilon}'(x)\right),\\ I_\varepsilon^8(x) =&q(x)v_{4,\varepsilon}(x), \quad I_\varepsilon^9(x) = \varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{4,\varepsilon}(x),\end{aligned} \tag{4.6}$$

а $\mathcal{I}_\varepsilon(x)$ определяется равенством (3.41).

Полностью аналогично доказательству оценок (3.43)–(3.46) доказывается справедливость следующих равенств:

$$\|v_{4,\varepsilon}\|_{C^1[a,b]} = O(\varepsilon), \quad \|v_{4,\varepsilon}\|_{C\left(\mathrm{supp}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)} = O(\varepsilon^2). \tag{4.7}$$

Из определения (4.3) функции $\widetilde{W}_\varepsilon(x)$, граничных условий для функции $W_\varepsilon(x)$, определения (4.1) функции $v_{4,\varepsilon}$ и оценок (4.7) следует, что

$$\widetilde{W}_\varepsilon(a) = 0, \quad \widetilde{W}_\varepsilon(b) = O(\varepsilon). \tag{4.8}$$

Аналогично в силу равенства (4.3), неравенства (3.48) и оценок (4.7) получаем, что

$$\|\widetilde{W}_\varepsilon - u_0\|_{C[a,b]} = O(\varepsilon). \tag{4.9}$$

Пользуясь формулой остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа, из (4.6), (4.3), (2.9), (3.25), (3.43), (3.46), (4.7), конечности носителя функции $\widehat{v}_1'(\xi)$ и (3.32) выводим

$$\begin{aligned}\|I_\varepsilon^6\|_{L_2(a,b)} \leqslant \varkappa \sup_{x\in[a,b],\theta\in(0,1)}\Bigg(\Bigg|p''\left(u_0(x) + \theta\left(\varepsilon\widehat{v}_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x)\right)\right)\Bigg|\\ \times\left|\left(\varepsilon\widehat{v}_{1,\varepsilon}(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x)\right)\right|\Bigg) \times \sqrt{\|u_0'\|_{L_2(a,b)}^2 + \varepsilon\int\limits_{-r}^{r}|\widehat{v}_1'(\xi)|^2\mathrm{d}\xi} = O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Из (4.6), (4.3), (2.9), (3.25), (3.43), (3.44), (3.46) и (4.7) следует, что

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_\varepsilon^7(x)\|_{L_2(a,b)} \leqslant \varkappa \max_{x\in[a,b]}|p'(u_0(x) + \varepsilon\widehat{v}_{1,\varepsilon}(x) + v_{2,\varepsilon}(x) + v_{3,\varepsilon}(x) + v_{4,\varepsilon}(x))|\\ \times \max_{x\in[a,b]}\left(|v_{2,\varepsilon}'(x)| + |v_{3,\varepsilon}'(x)| + |v_{4,\varepsilon}'(x)|\right)\sqrt{b-a} = O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Аналогично оценкам (3.49), (3.50) для $I_\varepsilon^4(x)$, $I_\varepsilon^5(x)$ с учетом (4.7) получаем, что

$$\|I_\varepsilon^8\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon), \quad \|I_\varepsilon^9\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon).$$

Из определения (4.6), последнего равенства и оценок (3.51), (4.10), (4.11) вытекает, что

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon\|_{L_2(a,b)} = O(\varepsilon). \tag{4.12}$$

Обозначим

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{4}{b^2}\widetilde{W}_\varepsilon(b)\Big(x - \dfrac{b}{2}\Big)^2, & x \geqslant \dfrac{b}{2} \end{cases},$$

$$\widehat{W}_\varepsilon(x) = \widetilde{W}_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x).$$

Из (4.4), определения $\widehat{W}_\varepsilon(x)$, равенств (4.5), (4.12), (4.8), (4.9) и формулы остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа следует, что $\widehat{W}_\varepsilon$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Следовательно, справедливо равенство (2.15). Из этого равенства, вложения $W_2^1(a,b)$ в $C[a,b]$ и равенства (4.9) вытекает равенство (1.2). Теорема 1.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. **Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х.** Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, № 3. С. 55–66.
4. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1971. 512 с.
5. **Олейник О.А.** О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. М.: Наука, 1988. С. 101–127.
6. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден. М.: Мир, 1991. 568 с.
7. On point interactions one dimension / S. Albeverio, F. Gesztezy, R. Hoegh-Krohn, W. Kirch // J. Operator Theory. 1984. Vol. 12. P. 101–126.
8. **Владимиров В.С., Жаринов В.В.** Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
9. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
10. **Бикметов А.Р., Гадыльшин Т.Р., Хуснуллин И.Х.** Возмущение узким потенциалом операторов, ассоциированных с полуторалинейными секториальными формами // Проблемы мат. анализа. 2014. Вып. 75. С. 21–26.
11. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой / Ю.Д. Головатый, С.А. Назаров, О.А. Олейник, Т.С. Соболева // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 71–91.

Мукминов Фарит Хамзаевич
д-р физ.-мат., профессор
Башкирский государственный университет
e-mail: mfkh@rambler.ru

Поступила 1.12.2014

Гадыльшин Тимур Рустемович
студент
Уфимский государственный авиационный технический университет
e-mail: gtimr@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.5

ОБ ОЦЕНКАХ РАВНОМЕРНОЙ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НАИЛУЧШИХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ИНТЕРПОЛИРУЕМЫХ ДАННЫХ[1]

С. И. Новиков

Рассматривается задача интерполяции с минимальным значением равномерной нормы оператора Лапласа интерполянтов для класса интерполируемых ограниченных последовательностей. Интерполирование осуществляется в узлах сетки, образованной точками из $\mathbb{R}^2$ с целочисленными координатами. В работе найдены двусторонние оценки равномерной нормы наилучшего интерполянта, которые являются более точными, чем известные оценки.

Ключевые слова: интерполяция, оператор Лапласа, ZP-элемент.

S. I. Novikov. On estimates for the uniform norm of the Laplace operator of the best interpolants on a class of bounded interpolation data.

We consider an interpolation problem with minimum value of the uniform norm of the Laplace operator of interpolants for a class of bounded interpolated sequences. The data are interpolated at nodes of the grid formed by points from $\mathbb{R}^2$ with integer coordinates. Two-sided estimates for the uniform norm of the best interpolant are found, which improve known estimates.

Keywords: interpolation, Laplace operator, ZP-element.

Настоящая работа посвящена задаче интерполирования класса ограниченных последовательностей гладкими функциями двух переменных с минимальным значением равномерной нормы оператора Лапласа.

Прежде всего, введем обозначения и сформулируем постановку задачи.

Для последовательности $z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ вещественных чисел полагаем

$$\|z\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^2)} = \sup\left\{|z_j|\colon j \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Пусть

$$\mathfrak{M}_\infty = \left\{z\colon z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2},\ \|z\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^2)} \le 1\right\}$$

— класс последовательностей, которые будем интерполировать в точках с целочисленными координатами из $\mathbb{R}^2$.

Через $C^k(\mathbb{R}^2)$ обозначаем пространство k раз ($k = 0, 1, \ldots$) непрерывно дифференцируемых вещественных функций двух переменных с нормой $\|u\|_{C^k(\mathbb{R}^2)} = \sup\{|u(x,y)| : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, причем мы допускаем, что $\|u\|_{C^k(\mathbb{R}^2)}$ может быть равна бесконечности. Пусть $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ — пространство измеримых, существенно ограниченных функций с нормой $\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x,y)| : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Для краткости мы будем писать $\|u\|_\infty$ для обозначения равномерной нормы функции $u = u(x,y)$ независимо от того, какому из пространств $C^k(\mathbb{R}^2)$ или $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ принадлежит эта функция. Всюду далее

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа.

Пусть

$$U_\infty = \left\{u \in C^1(\mathbb{R}^2)\colon \Delta u \in L_\infty(\mathbb{R}^2)\right\},$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00496а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1).

где Δu понимается в обобщенном смысле Соболева, т. е. $v = \Delta u$, если для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi = \varphi(x, y)$ имеет место равенство

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} v(x,y)\varphi(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} u(x,y)\Delta\varphi(x,y)\,dxdy.$$

Класс функций, интерполирующих фиксированный элемент $z \in \mathfrak{M}_\infty$, определяем следующим образом:

$$Y_\infty(z) = \left\{u \in U_\infty\colon\ \|u\|_\infty < +\infty,\ u(j) = z_j\ \ \forall j \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Целью настоящей работы является исследование величины

$$a_\infty(\mathbb{R}^2) = \sup_{z\in\mathfrak{M}_\infty}\ \inf_{u\in Y_\infty(z)} \|\Delta u\|_\infty, \tag{1}$$

которую можно интерпретировать как равномерную норму оператора Лапласа, примененного к “наилучшей” функции из класса $Y_\infty(z)$, при интерполировании “наихудшей” последовательности $z \in \mathfrak{M}_\infty$.

Задача

$$\|\Delta u\|_\infty \longrightarrow \inf_{u\in Y_\infty(z)}$$

представляет собой интерполяционную проблему типа Фавара (см., например, [1–3]) для произвольной фиксированной последовательности $z \in \mathfrak{M}_\infty$. Поэтому задачу нахождения величины (1) можно рассматривать как интерполяционную проблему типа Фавара для всего класса $\mathfrak{M}_\infty$ интерполируемых последовательностей.

Вычисление величины (1) — задача, аналогичная задаче экстремальной функциональной интерполяции, начало изучению которой было положено Ю. Н. Субботиным [4; 5] (см. также [6–8], где приведен обзор результатов и дана подробная библиография по этой тематике), однако в настоящей работе класс интерполируемых последовательностей определяется несколько иначе, чем в отмеченных выше работах. В связи с постановкой задачи (1) отметим также результаты [9, гл. 7; 10] исследований процессов интерполяции на классах аналитических функций комплексной переменной.

Нахождение точного значения величины (1) является сложной задачей, известны лишь оценки сверху и снизу этой величины. Автором [8] было показано, что величина (1) отделена от нуля и бесконечности, а затем в [11] было установлено, что

$$\frac{1}{8} \le a_\infty(\mathbb{R}^2) \le 48. \tag{2}$$

В настоящей работе мы улучшаем эти оценки. Основным результатом является

Теорема. *Справедливы следующие неравенства*:

$$\frac{2}{9} \le a_\infty(\mathbb{R}^2) \le 36.$$

Оценка сверху (2) была получена путем построения интерполянта на основе произведения двух полиномиальных B-сплайнов: одного по переменной x, другого — по переменной y. При доказательстве оценки сверху в теореме мы будем строить интерполирующую функцию иначе — с помощью так называемого ZP-*элемента*[2].

ZP-элемент M_{ZP} является функцией двух переменных и определяется следующим образом:

$$M_{ZP}(x,y) = \int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 \chi(x - t + \tau, x - t - \tau)\,dtd\tau,$$

[2]Zwart-Powell element (англ.)

где $\chi(x,y)$ — характеристическая функция единичного квадрата $[0,1]\times[0,1]$.

Впервые эта функция появилась в работах [12; 13]. Как оказалось впоследствии, она является представителем обширного семейства функций, называемых *box-сплайнами* (см., например, [14; 15]). Перечислим нужные нам свойства ZP-элемента (их доказательства можно найти, например, в [14; 15]):

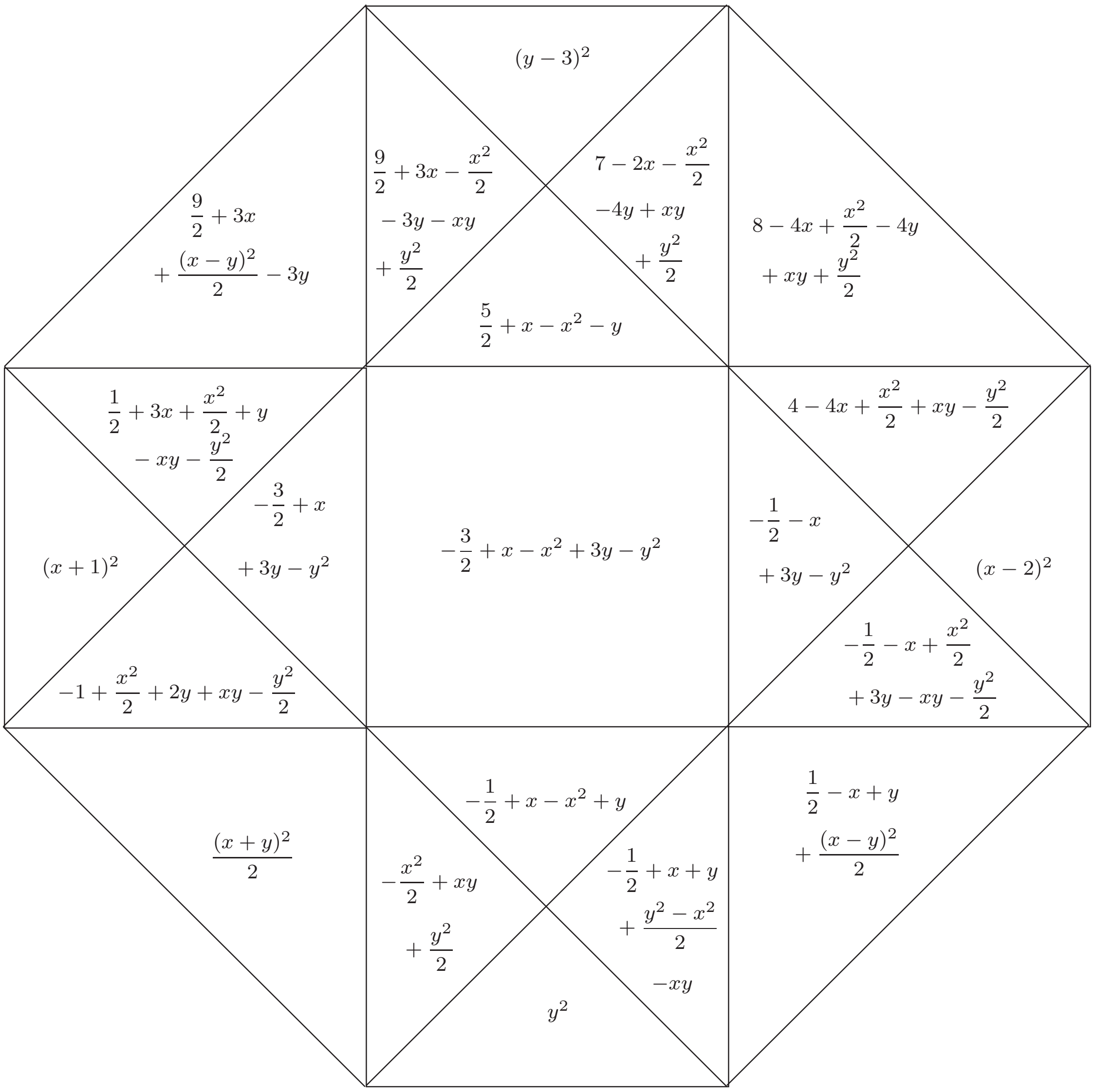
1) $M_{ZP}\in C^1(\mathbb{R}^2)$;

2) носитель $M_{ZP}(x,y)$ представляет собой восьмиугольник, получающийся отрезанием углов квадрата $[-1,2]\times[0,3]$;

3) $M_{ZP}(x,y)>0$ во всех внутренних точках ее носителя;

4) $M_{ZP}(x,y)$ достигает максимума в единственной точке $(1/2;3/2)$;

5) $M_{ZP}(x,y)$ является кусочно-квадратичной функцией по каждой из переменных. Кроме того, $f(x,y)=2M_{ZP}(x,y)$ имеет следующий вид [15, p. 149]:



Функция f.

Выражения, записанные на рисунке внутри каждого из двадцати треугольников и одного квадрата, являются явными выражениями удвоенного ZP-элемента на соответствующем элементе носителя [3].

[3]На нашем рисунке исправлены опечатки, обнаруженные в [15, p. 149] в выражениях, расположенных в двух боковых треугольниках нижнего квадрата.

Анализ перечисленных свойств ZP-элемента показывает, что эта функция аналогична параболическому B-сплайну одной переменной. Однако аналогия не является полной (см., например, [14, Ch. 2–4]). Известно [15, p. 124–125], что свойствами 1–5 наряду с ZP-элементом обладают и некоторые другие box-сплайны.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Сначала докажем оценку сверху.

Фиксируем произвольную последовательность $z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2} \in \mathfrak{M}_\infty$, $j = (j_1, j_2)$ и для нее строим интерполирующую функцию, принадлежащую классу $Y_\infty(z)$. Разбиваем плоскость на квадраты со сторонами, равными единице:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^2} V_j, \qquad V_j = \Big[j_1 - \frac{1}{2}; j_1 + \frac{1}{2}\Big] \times \Big[j_2 - \frac{1}{2}; j_2 + \frac{1}{2}\Big].$$

Любые два соседних квадрата при этом пересекаются только по их общей стороне. На каждом из этих квадратов определяем функцию

$$F_j(x,y) = c_j\ M_{ZP}\Big(3x - 3j_1 + \frac{1}{2}, 3y - 3j_2 + \frac{3}{2}\Big),$$

у которой коэффициент c_j находим из условия интерполяции $F_j(j_1, j_2) = z_{j_1,j_2}$. В результате получаем $c_j = z_j\ (M_{ZP}(1/2, 3/2))^{-1} = 2z_j$. Теперь полагаем

$$\Phi(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} F_j(x,y).$$

Поскольку внутренности носителей функций $F_j(x,y)$ при различных $j \in \mathbb{Z}^2$ не пересекаются, то для любой точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ сумма в правой части будет содержать только одно отличное от нуля слагаемое.

Применяя к функции $\Phi(x,y)$ оператор Лапласа и учитывая найденные значения коэффициентов c_j, имеем

$$|\Delta\Phi(x,y)| = 2|z_j|\ \Big|\Delta M_{ZP}\Big(3x - 3j_1 + \frac{1}{2}, 3y - 3j_2 + \frac{3}{2}\Big)\Big|.$$

Из явного вида ZP-элемента (см. рисунок) нетрудно заметить, что кусочно-постоянная функция $|\Delta M_{ZP}(x,y)|$ максимальна на центральном (квадратном) элементе ее носителя. В результате простых вычислений приходим к неравенству

$$\|\Delta\Phi\|_\infty \le 36\|z\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^2)}.$$

Поскольку $z \in \mathfrak{M}_\infty$, отсюда получаем оценку сверху величины $a_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Теперь доказываем оценку снизу.

Выбираем последовательность $z^* = \{z^*_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2} \in \mathfrak{M}_\infty$ такую, что

$$z^*_j = \begin{cases} 1, & j = (0,0), \\ 0, & j \ne (0,0). \end{cases}$$

Тогда

$$a_\infty(\mathbb{R}^2) \ge \inf_{u\in Y_\infty(z^*)} \|\Delta u\|_\infty. \tag{3}$$

Пусть $\widehat{u} \in Y_\infty(z^*)$ — произвольный интерполянт для последовательности z^*.

Разбиваем $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^2} Q_{j_1,j_2/2}, \quad Q_{j_1,j_2/2} = \Big[j_1, j_1 + 1\Big] \times \Big[\frac{j_2}{2}, \frac{j_2}{2} + \frac{1}{2}\Big].$$

Здесь любые два соседних прямоугольника пересекаются только по их общей стороне.

Функция $\widehat{u}$ обращается в нуль не более чем в двух точках каждого такого прямоугольника: на прямоугольниках $Q_{-1,1/2},\ Q_{0,1/2},\ Q_{-1,-1/2}$ и $Q_{0,-1/2}$ имеется только одна такая точка, а на всех остальных — две. Фиксируем любой из прямоугольников и представляем на нем функцию $\widehat{u}$ с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$\widehat{u}(x,y) = \widehat{u}(x_0,y_0) + (x-x_0)\int\limits_0^1 \frac{\partial\widehat{u}(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))}{\partial x}\,dt$$

$$+\,(y-y_0)\int\limits_0^1 \frac{\partial\widehat{u}(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))}{\partial y}\,dt,$$

где (x_0,y_0) — произвольная точка прямоугольника. В качестве этой точки выбираем нуль функции $\widehat{u}$. Из написанного представления легко следует неравенство

$$|\widehat{u}(x,y)| \ \le\ |x-x_0|\cdot\max\left|\frac{\partial\widehat{u}(x,y)}{\partial x}\right| + |y-y_0|\cdot\max\left|\frac{\partial\widehat{u}(x,y)}{\partial y}\right|,$$

где максимум берется по всем точкам прямоугольника. Из построения прямоугольников имеем $|x-x_0|\le 1,\ |y-y_0|\le 1/2$. Поскольку каждая точка $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ попадает в какой-либо прямоугольник разбиения, отсюда получаем

$$\|\widehat{u}\|_\infty \le \left\|\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x}\right\|_\infty + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial\widehat{u}}{\partial y}\right\|_\infty.$$

Теперь оцениваем нормы производных первого порядка с помощью неравенств, доказанных В. Г. Тимофеевым [16] для любой функции $f\in U_\infty$:

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_\infty \le \sqrt{2}\Big(\|f\|_\infty\ \|\Delta f\|_\infty\Big)^{1/2}; \qquad \left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_\infty \le \sqrt{2}\ \Big(\|f\|_\infty\ \|\Delta f\|_\infty\Big)^{1/2}.$$

В результате имеем

$$\|\widehat{u}\|_\infty \ \le\ \frac{9}{2}\ \|\Delta\widehat{u}\|_\infty. \tag{4}$$

Поскольку $\|\widehat{u}\|_\infty \ge |\widehat{u}(0,0)| = 1$, из (3) и (4) получаем оценку снизу.

Теорема доказана. □

Выясним, что изменится в исследуемой задаче, если единичный шаг заменить на произвольный $h>0$, одинаковый для обеих переменных. Класс интерполирующих функций в этом случае определяется так:

$$Y_{\infty,h}(z) = \left\{u\in U_\infty\colon \|u\|_\infty < +\infty,\ u(hj_1,hj_2) = z_{j_1,j_2}\ \ \forall (j_1,j_2)\in\mathbb{Z}^2\right\}$$

и исследуется величина

$$a_{\infty,h}(\mathbb{R}^2) = \sup_{z\in\mathfrak{M}_\infty}\ \inf_{u\in Y_{\infty,h}(z)} \|\Delta u\|_\infty.$$

Метод, с помощью которого была доказана теорема, позволяет найти порядок роста величины $a_{\infty,h}(\mathbb{R}^2)$ при $h\to 0$.

Следствие.

$$a_{\infty,h}(\mathbb{R}^2) \sim h^{-2} \quad (h\to 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При получении оценки снизу разбиваем плоскость на прямоугольники со сторонами h по горизонтали и $h/2$ по вертикали и для такого разбиения повторяем соответствующий фрагмент доказательства теоремы. Для доказательства оценки сверху представляем $\mathbb{R}^2$ в виде объединения квадратов $V_j^h = \Big[j_1 h - \dfrac{h}{2}; j_1 h + \dfrac{h}{2}\Big] \times \Big[j_2 h - \dfrac{h}{2}; j_2 h + \dfrac{h}{2}\Big]$, на каждом из этих квадратов строим "сжатый" ZP-элемент $M_{ZP}\Big(\dfrac{3x}{h} - 3j_1 + \dfrac{1}{2}, \dfrac{3y}{h} - 3j_2 + \dfrac{3}{2}\Big)$ и через него определяем функцию F_j. Остальная часть доказательства повторяет доказательство оценки сверху в теореме. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Если в определении класса интерполянтов отказаться от ограничения $\|u\|_\infty < +\infty$, то величина (1) оказывается равной нулю, поскольку для любой последовательности $z \in \mathfrak{M}_\infty$ существует гармоническая функция, которая ее интерполирует (см. [8]).

З а м е ч а н и е 2. Для круга и квадрата в $\mathbb{R}^2$ задачи, аналогичные (1), но с конечным числом условий интерполяции и занулением интерполянтов на границе, были рассмотрены в работах автора [17; 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 9. P. 281–306.
2. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
3. **Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.** О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, no 1. P. 83–96.
4. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН. 1965. Т. 78. С. 24–42.
5. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
7. **Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
8. **Новиков С.И.** Задачи экстремальной функциональной интерполяции // Тр. Междунар. летней мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 100–109.
9. **Гарнет Дж.** Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.
10. **Nicolau A., Ortega-Gerda J., Seip K.** The constant of interpolation // Pacific J. Math. 2004. Vol. 213, no 2. P. 389–398.
11. **Novikov S.I.** Interpolation in $\mathbb{R}^2$ with minimum value of the uniform norm of the Laplace operator // J. Math. and System Science. 2013. Vol. 3, no 2. P. 55–61.
12. **Zwart P.B.** Multivariate splines with non-degenerate partitions // SIAM J. Numer. Analysis. 1973. Vol. 10, no. 2. P. 665–673.
13. **Powell M.** Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting // Software for Numerical Mathematics / ed. D. J. Evans. London: Acad. Press, 1974. P. 253–271.
14. **Boor C. de, Höllig K., Riemenschneider S.** Box splines. New York etc.: Springer, 1993. 200 p.
15. **Concini C. de, Procesi C.** Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines. New York etc.: Springer, 2010. 384 p.
16. **Тимофеев В.Г.** Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа // Теория функций и аппроксимаций. Саратов: Изд-во СГУ, 1983. С. 84–92.
17. **Новиков С.И.** Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збiрник праць Iн-ту матем. НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 248–262.
18. **Новиков С.И.** Об одной задаче интерполяции с наименьшим значением нормы оператора Лапласа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 230–243.

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 09.11.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.977

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО КОНЕЧНЫМИ МОНОИДАМИ СО СВОЙСТВОМ $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ [1]

Т. В. Первухина

В работе рассматривается псевдомногообразие, порожденное всеми конечными моноидами, на которых совпадают отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$. Доказывается, что каждый конечный моноид S, принадлежащий этому псевдомногообразию, делит моноид всех верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц над конечной группой с присоединенным нулем. Доказательство конструктивно — группа и размер матриц эффективно вычисляются по моноиду S.

Ключевые слова: конечные моноиды, псевдомногообразие моноидов, (верхне)треугольные матрицы, отношения Грина, $\mathscr{R}$-тривиальные моноиды.

T. V. Pervukhina. Characterization of the pseudovariety generated by finite monoids satisfying $\mathscr{R} = \mathscr{H}$.

We consider the pseudovariety generated by all finite monoids on which Green's relations $\mathscr{R}$ and $\mathscr{H}$ coincide. It is shown that any finite monoid S belonging to this pseudovariety divides the monoid of all upper-triangular row-monomial matrices over a finite group with zero adjoined. The proof is constructive; given a monoid S, the corresponding group and the order of matrices can be effectively found.

Keywords: finite monoids, monoid pseudovariety, upper-triangular matrices, Green's relations, $\mathscr{R}$-trivial monoids.

Введение

Псевдомногообразием моноидов называется класс моноидов, замкнутый относительно взятия подмоноидов, гомоморфных образов и формирования конечных декартовых произведений. Изучение псевдомногообразий конечных моноидов является активно развивающимся направлением в теории полугрупп (см., например, монографии [1; 3]). Псевдомногообразия моноидов также представляют большой интерес ввиду их приложения к изучению формальных языков, а именно, как показано С. Эйленбергом, существует взаимно однозначное соответствие между псевдомногообразиями моноидов и определенными классами формальных языков, называемыми многообразиями языков [2]. Это соответствие позволяет классифицировать распознаваемые языки исходя из свойств их синтаксических моноидов. Особую роль здесь играют псевдомногообразия моноидов, удовлетворяющих некоторым ограничениям на отношения Грина: псевдомногообразия всех $\mathscr{H}$-тривиальных моноидов, всех $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов и всех $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов. В частности, $\mathscr{H}$-тривиальные моноиды являются аналогом беззвездных языков [2; 4], а $\mathscr{J}$-тривиальные моноиды соответствуют кусочно-тестируемым языкам [2; 5].

Напомним, что моноид S *делит* моноид T, если S является гомоморфным образом некоторого подмоноида в T. Одним из способов описания псевдомногообразий моноидов является характеризация на языке делителей. При этом указывается набор конкретных моноидов (например, серия, зависящая от одного или нескольких параметров) таких, что каждый моноид из данного псевдомногообразия делит некоторый моноид из этого набора. Характеризация псевдомногообразия $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов была получена Г. Страубингом [6].

[1]Работа написана в рамках выполнения базовой части госзадания на выполнение НИР (проект № 2248 Министерства образования и науки РФ) при поддержке программы президента РФ по поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Согласно одному из эквивалентных условий теоремы Страубинга конечный моноид является $\mathscr{J}$-тривиальным тогда и только тогда, когда он делит моноид $\mathscr{U}_n$ всех верхнетреугольных булевых матриц порядка n с единицами на главной диагонали для некоторого n. Для характеризации псевдомногообразия $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов Ж.-Э. Пэном [2] была использована серия моноидов $\mathscr{E}_n$ всех направленных преобразований на множестве $\{1,\ldots,n\}$. Всякое такое преобразование представимо верхнетреугольной булевой матрицей порядка n, каждая строка которой содержит в точности один ненулевой элемент. Напомним, что такие матрицы называются *мономиальными по строкам.* Согласно теореме Пэна конечный моноид является $\mathscr{R}$-тривиальным тогда и только тогда, когда он изоморфно вкладывается в моноид $\mathscr{E}_n$ для некоторого n.

Моноиды, удовлетворяющие равенству $\mathscr{R}=\mathscr{H}$, обобщают случаи $\mathscr{J}$-тривиальных и $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов. В [8] автором была получена характеризация на языке делителей для класса конечных моноидов, на которых совпадают отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$. Однако, как показано в [8], этот класс уже не является псевдомногообразием. Целью данной работы является расширение полученной в [8] характеризации с класса моноидов, удовлетворяющих равенству $\mathscr{R}=\mathscr{H}$, на псевдомногообразие **RH**, порожденное этим классом. Приведем определения, необходимые для формулировки основного результата.

Конечную группу G с присоединенным нулем 0 обозначим через $G\cup 0$. Для всех элементов $g\in G\cup 0$ положим дополнительно $g+0=g$. Обозначим через $TM_n(G)$ моноид всех верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц порядка n над $G\cup 0$. Умножение двух мономиальных матриц из $TM_n(G)$ с учетом дополнительного условия осуществляется по правилам обычного матричного умножения.

Теорема. *Конечный моноид принадлежит псевдомногообразию* **RH** *тогда и только тогда, когда он делит моноид $TM_n(G)$ для некоторой группы G и некоторого натурального n.*

Доказательство теоремы конструктивно — конечная группа и порядок матриц эффективно вычисляются по данному конечному моноиду.

1. Предварительные сведения

Основные понятия теории полугрупп можно найти в монографиях [2; 7]. Отношения Грина $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{H}$ на моноиде S определяются формулами

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow aS=bS,\ a\mathscr{L}b \Leftrightarrow Sa=Sb,\ a\mathscr{J}b \Leftrightarrow SaS=SbS,$$
$$\mathscr{D}=\mathscr{R}\vee\mathscr{L},\ \mathscr{H}=\mathscr{R}\cap\mathscr{L}.$$

Пусть H — произвольный $\mathscr{H}$-класс моноида S. Моноид $St_r(H)=\{x\in S\mid Hx\subseteq H\}$ называется *правым стабилизатором класса* H. На $St_r(H)$ определим отношение $\sim$, положив $x\sim y$ тогда и только тогда, когда $hx=hy$ для любого $h\in H$. Это отношение является конгруэнцией на $St_r(H)$. Обозначим фактор-моноид моноида $St_r(H)$ по конгруэнции $\sim$ через $\Gamma_r(H)$ и назовем $\Gamma_r(H)$ *моноидом переходов класса* H. Моноид переходов $\Gamma_r(H)$ является просто транзитивной группой подстановок на H. Если $\mathscr{H}$-классы H_1 и H_2 содержатся в одном $\mathscr{D}$-классе, то группы $\Gamma_r(H_1)$ и $\Gamma_r(H_2)$ изоморфны. Абстрактная группа $\Gamma_r(H)$ называется *группой Шютценберже* $\mathscr{D}$-*класса* D, содержащего H. Также для произвольного $\mathscr{H}$-класса H обозначим через $Pw_r(H)$ множество элементов $St_r(H)$, поточечно стабилизирующих H.

Понятие правого стабилизатора переносится на случай произвольного подмножества $P\subseteq S$, а именно, $St_r(P)=\{x\in S\mid Px\subseteq P\}$. При этом фактор-моноид $St_r(P)/\sim$ называется *локальным моноидом* множества P. Локальный моноид, являющийся группой, назовем *локальной группой* множества P.

Обозначим через $\mathscr{R}^\sharp$ конгруэнцию, порожденную отношением $\mathscr{R}$.

Напомним, что рефлексивное и симметричное бинарное отношение называется *толерантностью.* Толерантность ρ на моноиде S называется *согласованной с умножением*, если для любых $a, b, x, y \in S$ из соотношений $a\,\rho\, x$ и $b\,\rho\, y$ следует $ab\,\rho\, xy$. Будем называть *ρ-классом* максимальное по включению подмножество элементов из S, находящихся попарно в отношении ρ. В общем случае элемент $x \in S$ может принадлежать нескольким ρ-классам. Толерантность ρ назовем *стабильной*, если для каждого ρ-класса K и каждого $x \in S$ из условия $Kx \cap K \neq \varnothing$ следует $Kx \subseteq K$.

Пусть классы толерантности ρ на S являются объединениями $\mathscr{R}$-классов моноида S. В этом случае толерантность ρ назовем $\mathscr{R}$-минимальной, если для произвольного фиксированного ρ-класса K любой $\mathscr{R}$-класс, лежащий в K, минимален во множестве всех $\mathscr{R}$-классов, лежащих в K относительно стандартного частичного порядка $\leq$ на множестве $\mathscr{R}$-классов моноида S: $R_a \leq R_b$ тогда и только тогда, когда $aS \subseteq bS$, где $a, b \in S$. Порядок $\leq$ порождает следующее бинарное отношение $\leq_{\mathscr{R}}$ на S: $a \leq_{\mathscr{R}} b$ тогда и только тогда, когда $aS \subseteq bS$, где $a, b \in S$.

2. Свойства конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$

В [9] была получена характеризация моноидов, принадлежащих **RH**, в терминах свойств толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$, определенной в той же работе. Воспроизведем ее построение.

Построение $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$. Перенумеруем $\mathscr{R}$-классы моноида S в виде $K^0_1, \ldots, K^0_{n_0}$. Для каждого произведения вида $K^0_i K^0_j$ рассмотрим минимальное по включению объединение $\mathscr{R}$-классов, содержащее $K^0_i K^0_j$. Назовем эти объединения *$\mathscr{R}$-покрытиями*. Перенумеруем полученные $\mathscr{R}$-покрытия в виде $K^1_1, \ldots, K^1_{n_1}$ и для всех произведений вида $K^l_i K^m_j$ рассмотрим их $\mathscr{R}$-покрытия $K^2_1, \ldots, K^2_{n_2}$. Будем продолжать процедуру до тех пор, пока каждое новое $\mathscr{R}$-покрытие не будет содержаться в одном из уже построенных, что произойдет в силу конечности моноида. Максимальные по включению множества K^l_i являются классами толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$. Отметим, что конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ является транзитивным замыканием толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$. □

Обозначим через T набор множеств K^j_i, построенных выше. Определим на T следующее бинарное отношение $\preceq$: для $A, B \in T$ соотношение $A \preceq B$ выполнено тогда и только тогда, когда найдется такой $X \in T$, что $AX \subseteq B$. Если $A \preceq B$, но $A \neq B$, будем писать $A \prec B$.

Предложение 1. *Отношение $\preceq$ является частичным порядком на множестве T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in T$. Рассмотрим $\mathscr{R}$-класс R_e, содержащий единицу e моноида S. Для $a \in A$ и $x \in R_e$ рассмотрим произведение ax. Поскольку $x\,\mathscr{R}\,e$, то для некоторого $y \in R_e$ выполнено $xy = e$, то есть $axy = a$, откуда $a\,\mathscr{R}\,ax$. Поскольку A по построению содержит $\mathscr{R}$-класс элемента a, получаем $ax \in A$, то есть $AR_e \subseteq A$, откуда $A \preceq A$, то есть отношение $\preceq$ рефлексивно.

Пусть $A, B, C \in T$, причем $A \preceq B$ и $B \preceq C$. Тогда $AX \subseteq B$ и $BY \subseteq C$ для некоторых $X, Y \in T$, откуда $AXY \subseteq C$. Пусть $a \in A$, $x \in X$ и $y \in Y$, тогда $axy \in C$. Возьмем произвольный $h \in S$ со свойством $h\,\mathscr{R}\,xy$, тогда $ah\,\mathscr{R}\,axy$. Поскольку C по построению содержит $\mathscr{R}$-класс элемента axy, получаем $ah \in C$. Таким образом, если Z — $\mathscr{R}$-покрытие произведения XY, то $AZ \subseteq C$. Следовательно, $A \preceq C$, то есть отношение $\preceq$ транзитивно.

Пусть $A, B \in T$, причем $A \preceq B$ и $B \preceq A$. Тогда $AX \subseteq B$ и $BY \subseteq A$ для некоторых $X, Y \in T$, откуда $AXY \subseteq A$. Выбрав произвольно представителей $a, b, x, y \in S$ множеств A, B, X, Y, имеем $ax\,\mathscr{R}^\sharp_{cr}\,b$ и $axy\,\mathscr{R}^\sharp_{cr}\,a$. Так как $axy \leq_{\mathscr{R}} a$, то соотношение $axy\,\mathscr{R}^\sharp_{cr}\,a$ в силу $\mathscr{R}$-минимальности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ влечет $axy\,\mathscr{R}\,a$, то есть $axyz = a$ для некоторого $z \in S$, откуда $a\,\mathscr{R}\,ax$. Поскольку $ax, b \in B$ и B по построению содержит $\mathscr{R}$-класс элемента ax, то $a \in B$, откуда $A \subseteq B$. Из включения $BY \subseteq A$ аналогично получаем $B \subseteq A$, то есть $A = B$ в T. Отсюда заключаем, что отношение $\preceq$ антисимметрично и является таким образом частичным порядком на T. Предложение доказано. □

Предложение 2. *Конечный моноид S принадлежит псевдомногообразию* **RH** *тогда и только тогда, когда конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ является $\mathscr{R}$-минимальной на S и для произвольного $\mathscr{R}^\sharp$-класса Q множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H \subseteq Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ является $\mathscr{R}$-минимальной на S и для произвольного $\mathscr{R}^\sharp$-класса Q множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H \subseteq Q$. Обозначим через φ канонический гомоморфизм из S на $S/\mathscr{R}^\sharp$. Обозначим правое отношение Грина на моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$ через $\bar{\mathscr{R}}$, а $\mathscr{R}^\sharp$-класс элемента $a \in S$ — через $\bar{a}$. Пусть $\bar{a}\bar{\mathscr{R}}\bar{b}$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда найдутся такие элементы $x, y \in S$, что $\bar{a} = \bar{b}\bar{x}$ и $\bar{b} = \bar{a}\bar{y}$. Поднимаясь в моноид S, имеем $a\mathscr{R}^\sharp bx$ и $b\mathscr{R}^\sharp ay$. Отсюда, учитывая, что $\mathscr{R}^\sharp$ — конгруэнция, заключаем, что $a\mathscr{R}^\sharp ayx$. Поскольку выполнено $ayx \leq_{\mathscr{R}} a$, то в силу $\mathscr{R}$-минимальности конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$ получаем, что $a\mathscr{R}ayx$. Но тогда $a\mathscr{R}ay\mathscr{R}^\sharp b$, откуда $a\mathscr{R}^\sharp b$, то есть $\bar{a} = \bar{b}$. Таким образом, правое отношение Грина тривиально на моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$.

Зафиксируем произвольный $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q и рассмотрим правый стабилизатор $St_r(Q)$. Возьмем произвольный элемент $x \in St_r(Q)$. Так как $St_r(Q)$ является подмоноидом в S, достаточно показать обратимость действия x на Q. Возьмем произвольный $a \in Q$. В силу $\mathscr{R}$-минимальности $\mathscr{R}^\sharp$ имеем $a\,\mathscr{R}\,ax$, а тогда найдется такой $y \in S$, что $axy = a$. Так как $Qy \cap Q \neq \varnothing$, то y также принадлежит $St_r(Q)$, и тогда $xy \in St_r(Q)$. Обозначим $\mathscr{H}$-класс элемента a через H_a. Элемент xy стабилизирует H_a поточечно, поскольку если $b\,\mathscr{H}\,a$, то $b = la$ для некоторого $l \in S$, откуда $bxy = laxy = la = b$. Действие элемента xy на H_a, таким образом, соответствует единице группы Шютценберже $\Gamma_r(H_a)$. Это означает, что действия элементов x и y взаимно обратны в группе $\Gamma_r(H_a)$, то есть элемент yx также поточечно стабилизирует H_a. Поскольку поточечные стабилизаторы $Pw_r(H)$ всех $\mathscr{H}$-классов, лежащих в Q, совпадают по условию, то элементы xy и yx должны поточечно стабилизировать все $\mathscr{H}$-классы, лежащие в Q. Это означает, что действия элементов x и y на Q взаимно обратны. Следовательно, локальный моноид $\mathscr{R}^\sharp$-класса Q является группой. Так как $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q был выбран произвольно, то локальные моноиды всех $\mathscr{R}^\sharp$-классов являются группами.

Таким образом, гомоморфизм $\varphi\colon S \to S/\mathscr{R}^\sharp$ таков, что правое отношение Грина тривиально на $S/\mathscr{R}^\sharp$ и локальные моноиды всех $\mathscr{R}^\sharp$-классов являются группами. По теореме 1 из [9] теперь получаем, что S принадлежит псевдомногообразию $\mathbf{RH}$.

Обратно, предположим, что моноид S принадлежит псевдомногообразию $\mathbf{RH}$. Тогда согласно теореме 2 из [9] толерантность $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ является стабильной и $\mathscr{R}$-минимальной на S, и для произвольного $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класса K множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H \subseteq K$. Множества $Pw_r(H)$ будут тогда совпадать для любых двух пересекающихся $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов и, следовательно, будут совпадать на каждом $\mathscr{R}^\sharp$-классе по транзитивному замыканию. Покажем теперь $\mathscr{R}$-минимальность конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$. Зафиксируем произвольный $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q и произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс $K_0 \subseteq Q$. Если $K_0 = Q$, то Q содержит только несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Пусть K_0 не совпадает с Q. Будем рассуждать по индукции по длине цепочки $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов K_0, $K_1, \ldots, K_n \subseteq Q$ таких, что $K_0 \cap K_1 \neq \varnothing$, $K_i \cap K_{i+1} \neq \varnothing$ и $K_i \cap K_j = \varnothing$, если $j \neq i+1$.

База индукции. Пусть K_1 — произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс, пересекающийся с K_0. Предположим, что K_0 и K_1 содержат сравнимые, но несовпадающие $\mathscr{R}$-классы. Без ограничения общности будем считать, что для некоторого $x \in S$ и некоторого $\mathscr{R}$-класса $R \subseteq K_0$ выполнено $RR_x \cap K_n \neq \varnothing$, где через R_x обозначен $\mathscr{R}$-класс элемента x. При этом $RR_x \cap K_0 = \varnothing$, поскольку K_0 содержит лишь несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Относительно множества K_0R_x имеем две возможности: $K_0R_x \subseteq K_1$ или $K_0R_x \nsubseteq K_1$. Предположим, что $K_0R_x \subseteq K_1$. Возьмем произвольный $\mathscr{R}$-класс $R_1 \subseteq K_0 \cap K_1$, тогда $R_1R_x \subseteq K_1$, то есть $K_1R_x \cap K_1 \neq \varnothing$, откуда $R_x \subseteq St_r(K_1)$, то есть $R_1R_x \subseteq R_1$. Но тогда $R_x \subseteq St_r(K_0)$, поскольку $R_1 \subseteq K_0$, откуда $RR_x \subseteq K_0$, противоречие с предположением.

Предположим теперь, что $K_0R_x \nsubseteq K_1$, тогда для любого $\mathscr{R}$-класса $R_1 \subseteq K_0 \cap K_1$ имеем $R_1R_x \nsubseteq K_1$, иначе вновь получим $K_1R_x \cap K_1 \neq \varnothing$, и будут справедливы приведенные выше рассуждения. Пусть K_2 — произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс, содержащий произведение K_0R_x, тогда $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$ и $K_1R_x \cap K_2 \neq \varnothing$, поскольку для любого $\mathscr{R}$-класса $R_1 \subseteq K_0 \cap K_1$ имеем $R_1R_x \subseteq K_2$. Вновь имеем две возможности: $K_1R_x \subseteq K_2$ или $K_1R_x \nsubseteq K_2$. Предположив $K_1R_x \subseteq K_2$, получим аналогично приведенным выше рассуждениям, что $R_x \subseteq St_r(K_1)$, противоречие с тем фактом, что $R_1R_x \nsubseteq K_1$. Значит, выполнено $K_1R_x \nsubseteq K_2$. Выберем такой $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_3, что $K_1R_x \subseteq K_3$, тогда K_3 пересекается с K_2. Поскольку $K_0R_x \nsubseteq K_0$ и $K_1R_x \nsubseteq K_1$, получаем, что $K_0 \prec K_2$ и $K_1 \prec K_3$ относительно частичного порядка $\preceq$ на множестве T, определенного в предложении 1. Предположив, что $K_2R_x \nsubseteq K_3$, на следующем шаге мы выберем $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_4, содержащий K_2R_x, и получим $K_0 \prec K_2 \prec K_4$ в T. Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим на некотором i-м шаге, что альтернатива $K_iR_x \nsubseteq K_{i+1}$ невозможна, поскольку цепи относительно частичного порядка $\preceq$ конечны. Таким образом, на некотором шаге мы получим противоречие с предположением, что пересекающиеся $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классы K_0 и K_1 содержат сравнимые $\mathscr{R}$-классы.

Шаг индукции. Предположим, что любая цепочка $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов $K_0, K_1, \ldots, K_l$, лежащих в Q, где $l \leq n-1$, может содержать лишь несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Рассмотрим цепочку $K_0, K_1, \ldots, K_n$. Предположим, что для некоторого $x \in S$ выполнено $K_0R_x \cap K_n \neq \varnothing$. Если $K_0R_x \subseteq K_n$, то и для любого $\mathscr{R}$-класса $R \subseteq K_0 \cap K_1$ выполнено $RR_x \subseteq K_n$, то есть цепочка $K_1, \ldots, K_n$ содержит сравнимые $\mathscr{R}$-классы, что невозможно по предположению. Пусть K_{n+1} — произвольный $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс, содержащий K_0R_x, причем $K_n \cap K_{n+1} \neq \varnothing$. Имеем две возможности: $K_1R_x \subseteq K_{n+1}$ или $K_1R_x \nsubseteq K_{n+1}$. Предположив $K_1R_x \subseteq K_{n+1}$, получим для цепочки $K_1, \ldots, K_{n+1}$ противоречие аналогично приведенным выше рассуждениям. Значит, выполнено $K_1R_x \nsubseteq K_{n+1}$, тогда $K_1R_x \subseteq K_{n+2}$, где $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_{n+2} пересекается с K_{n+1}. Кроме того, получаем, что $K_0 \prec K_{n+1}$ относительно частичного порядка $\preceq$ на множестве T. Аналогичную схему рассуждений теперь можно применить к цепочке $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов $K_2, \ldots, K_{n+2}$. На каждом шаге мы либо получим противоречие с предположением, либо дойдем до момента, когда будет построен $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класс K_{2n+2} такой, что $K_0 \prec K_{n+1} \prec K_{2n+2}$ в T. Будем продолжать процесс. Поскольку, как было указано выше, цепи относительно порядка $\preceq$ конечны, на некотором шаге альтернатива $K_jR_x \nsubseteq K_{j+n}$ станет невозможной, а включение $K_jR_x \subseteq K_{j+n}$ означает наличие сравнимых $\mathscr{R}$-классов в цепочке $K_{j+1}, \ldots, K_{j+n}$, что противоречит предположению. Таким образом, $\mathscr{R}^\sharp$-класс Q содержит только несравнимые $\mathscr{R}$-классы. Предложение доказано. $\square$

Из предложения 2 следует, что для любого моноида $S \in \mathbf{RH}$ правое отношение Грина $\bar{\mathscr{R}}$ тривиально на фактор-моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$. Отсюда следует, что отношение $\leq_{\bar{\mathscr{R}}}$ будет отношением частичного порядка на $S/\mathscr{R}^\sharp$. В соответствии с предложением 0.1 из [2] существует такой линейный порядок $\leq_\sharp$ на $S/\mathscr{R}^\sharp$, что для $U, V \in S/\mathscr{R}^\sharp$ соотношение $U \leq_{\bar{\mathscr{R}}} V$ влечет $V \leq_\sharp U$. Пронумеруем $\mathscr{R}^\sharp$-классы моноида S по возрастанию в соответствии с порядком $\leq_\sharp$ и зафиксируем эту нумерацию. Очевидно, единица моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ будет наименьшим элементом относительно введенного линейного порядка. Договоримся начинать нумерацию с 1, тогда единица моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ будет иметь номер 1. Поскольку для любых элементов $X, U \in S/\mathscr{R}^\sharp$ выполнено $UX \leq_{\bar{\mathscr{R}}} U$, то $U \leq_\sharp UX$, т.е. с каждым элементом моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ связано направленное действие на $S/\mathscr{R}^\sharp$ относительно порядка $\leq_\sharp$. Следовательно, мы можем, аналогично рассуждениям в [8], рассматривать правые действия элементов моноида S на моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$ и характеризовать их в терминах плотных разложений и локальных групп. Приведем необходимые определения из [8].

Определение 1. Назовем $\mathscr{R}^\sharp$-классы K_i и K_j *соседними относительно действия $\mathscr{R}^\sharp$-класса* K, если $K_i \leq_\sharp K_j$, $K_iK \subseteq K_j$ и для любых $\mathscr{R}^\sharp$-классов P и Q таких, что $PQ \subseteq K$, выполнено в точности одно из двух условий

1) $K_iP \subseteq K_i$ и $K_iQ \subseteq K_j$;

2) $K_iP \subseteq K_j$ и $K_jQ \subseteq K_j$.

Определение 2. Пусть элемент b переводит K_i в K_j, т.е. $K_ib \subseteq K_j$. Пусть $b = b_1 \ldots b_p$, где $b_1 \ldots b_p \in S$ — такое разложение элемента b, а $K_{i_1}, \ldots, K_{i_{p+1}}$, где $K_{i_1} = K_i, K_{i_{p+1}} = K_j$, — такие $\mathscr{R}^\sharp$-классы, что

1) $K_{i_l} \neq K_{i_{l+1}}$ и $K_{i_1}b_1 \subseteq K_{i_2}, \ldots, K_{i_p}b_p \subseteq K_{i_{p+1}}$; K_{i_l} и $K_{i_{l+1}}$ — соседние относительно b_l;

2) для любого другого разложения $b = c_1 \ldots c_s$ элемента b (где $c_1 \ldots c_s \in S$) выполнено следующее условие: если $\{K_{i_1} \ldots K_{i_p}\} \subseteq \{K_{j_1} \ldots K_{j_s}\}$, то $\{K_{i_1} \ldots K_{i_p}\} = \{K_{j_1} \ldots K_{j_s}\}$.

Подобное разложение $b = b_1 \ldots b_p$ назовем *плотным.* Оно, очевидно, существует, поскольку частично упорядоченое множество $\mathscr{R}^\sharp$-классов конечно в силу конечности S.

Зафиксируем $\mathscr{R}^\sharp$-класс K и элемент $a \in K$ и рассмотрим $\mathscr{R}^\sharp$-классы K_i и K_j, соседние относительно действия класса K.

Лемма. *Для любого элемента $b \in K$ найдутся такие элементы $x \in St_r(K_i)$ и $y \in St_r(K_j)$, что действие элемента b на $\mathscr{R}^\sharp$-классе K_i поточечно совпадает с действием элемента xay на $\mathscr{R}^\sharp$-классе K_i.*

Доказательство. Поскольку элементы a и b лежат в одном $\mathscr{R}^\sharp$-классе, то найдется такая последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in S$, что $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_k = p_k z_k$ и $a_{k+1} = q_k z_k$, где $p_k, q_k, z_k \in S$ и $p_k \mathscr{R} q_k$.

Рассмотрим элементы $a_0 = p_0 z_0$ и $a_1 = q_0 z_0$. Имеем $K_i a_0, K_i a_1 \subseteq K_j$. Поскольку $p_0 \mathscr{R} q_0$, конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$ включает $\mathscr{R}$, а K_i и K_j — соседние $\mathscr{R}^\sharp$-классы относительно действия $\mathscr{R}^\sharp$-класса K, имеем две возможности:

1) $K_i p_0, K_i q_0 \subseteq K_i$, откуда $p_0, q_0 \in St_r(K_i)$. Зафиксируем произвольный элемент $h \in K_i$. Найдется такой элемент $x_0 \in St_r(K_i)$, что в локальной группе класса K_i действие элемента q_0 совпадает с действием элемента $x_0 p_0$, откуда получаем $ha_1 = hq_0 z_0 = hx_0 p_0 z_0 = hx_0 a_0$. Положим также $y_0 = e$, где e — единица моноида S. Поскольку h был выбран произвольно, заключаем, что действие элемента a_1 на классе K_i поточечно совпадает с действием элемента $x_0 a_0 y_0$ на K_i.

2) $K_i p_0, K_i q_0 \subseteq K_j$. Отсюда следует, что $z_0 \in St_r(K_j)$. Зафиксируем произвольный элемент $h \in K_i$. Так как $p_0 \mathscr{R} q_0$, то для некоторого $z \in S$ выполнено равенство $q_0 z = p_0$, откуда $zz_0 \in St_r(K_j)$. Тогда найдется такой элемент $y_0 \in St_r(K_j)$, что в локальной группе класса K_j действие z_0 совпадает с действием элемента $zz_0 y_0$, откуда получаем $ha_1 = hq_0 z_0 = hq_0 zz_0 y_0 = hp_0 z_0 y_0 = ha_0 y_0$. Положим также $x_0 = e$, где e — единица моноида S. Поскольку h был выбран произвольно, заключаем, что действие элемента a_1 на классе K_i поточечно совпадает с действием $x_0 a_0 y_0$ на K_i.

С помощью аналогичных рассуждений мы получим, что для элементов a_k и a_{k+1} найдутся элементы $x_k \in St_r(K_i)$ и $y_k \in St_r(K_j)$ такие, что действие a_{k+1} на классе K_i поточечно совпадает с действием $x_k a_k y_k$. Рассуждая по индукции, мы построим такие элементы $y = y_0 y_1 \ldots y_{n-1}$ и $x = x_{n-1} \ldots x_1 x_0$, что действие элемента $b = a_n$ на классе K_i поточечно совпадает с действием элемента $xay = xa_0 y$:

$$ha_n = hx_{n-1} a_{n-1} y_{n-1} = hx_{n-1} x_{n-2} a_{n-2} y_{n-2} y_{n-1} = \ldots = hxa_0 y$$

для любого $h \in K_i$. Переход вида $(hx_{n-1}) a_{n-1} y_{n-1} = (hx_{n-1}) x_{n-2} a_{n-2} y_{n-2} y_{n-1}$ корректен, поскольку $hx_{n-1} \in K_i$. Лемма доказана. □

Из леммы следует, что при фиксированном отображении между K_i и K_j, которое осуществляется элементом $a \in K$, элементу $b \in K$ при действии на K_i сопоставляется элемент группы $G_i \times G_j$, где G_i и G_j — локальные группы $\mathscr{R}^\sharp$-классов K_i и K_j, соответственно. Докажем теперь главный результат этой работы.

3. Доказательство основного результата

Любой конечный моноид, делящий $TM_n(G)$, принадлежит псевдомногообразию **RH**, поскольку моноиды $TM_n(G)$ принадлежат **RH** по предложению 1 из [8].

Пусть конечный моноид S принадлежит **RH**. Возьмем канонический гомоморфизм $\varphi \colon S \to S/\mathscr{R}^\sharp$. Рассмотрим прямое произведение групп $G_1 \times \ldots \times G_n$, где G_i — локальная группа $\mathscr{R}^\sharp$-класса K_i, $1 \le i \le n$, и $n = card(S/\mathscr{R}^\sharp)$. Нумерация $\mathscr{R}^\sharp$-классов $K_1 \ldots K_n$ дана в соответствии с ранее введенным порядком $\le_\sharp$.

В лемме мы описали действие произвольного элемента b из $\mathscr{R}^\sharp$-класса K в том случае, когда b действует из K_i в K_j и при этом классы K_i и K_j являются соседними относительно действия класса K. В этом случае при заранее фиксированном элементе $a \in K$ найдутся такие элементы $x \in St_r(K_i)$ и $y \in St_r(K_j)$, что для всякого элемента $h \in K_i$ выполнено $hb = hxay$.

Теперь охарактеризуем действие элемента $b \in K$ в общем случае, если $\mathscr{R}^\sharp$-классы K_i и K_j необязательно являются соседними относительно действия класса K. Пусть $b = b_1 \dots b_p$ — произвольное плотное разложение элемента b. Тогда по лемме каждому из элементов b_l, $1 \leq l \leq p$, ставится в соответствие пара $(g_{i_l}, g^*_{i_{l+1}}) \in G_{i_l} \times G_{i_{l+1}}$, определяющая действие элемента b_l на $\mathscr{R}^\sharp$-класс K_{i_l}. Поставим в соответствие элементу $b \in K$ элемент $(f_1, \dots, f_n)$ из группы $G_1 \times \dots \times G_n$ следующим образом:

1) $f_i = e_i$ (единица группы G_i), если $K_i \notin \{K_{i_1} \dots K_{i_p}\}$;

2) $f_{i_1} = g_{i_1}$, $f_{i_{p+1}} = g^*_{i_{p+1}}$;

3) $f_{i_l} = g^*_{i_{l-1}} g_{i_l}$ для $l = 2, \dots, p$.

В итоге получаем, что при действии элемента b из K_i в K_j ему сопоставляется набор $f_{ij}(b)$ элементов группы $G_1 \times \dots \times G_n$, построенных по всевозможным плотным разложениям элемента b. Элементы этого набора, построенные по описанной выше схеме, зависят от выбора $(g_{i_l}, g^*_{i_{l+1}}) \in (G_{i_l}, G_{i_{l+1}})$ для каждого элемента b_l из конкретного разложения и от выбора разложения. Если для пары (i, j) класс K не переводит K_i в K_j, то полагаем $f_{ij}(b) = \varnothing$.

Теперь сопоставим элементу $b \in K$ набор $f(b)$ верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц порядка n над $(G_1 \times \dots \times G_n) \cup 0$. Расстановка ненулевых элементов каждой матрицы определяется согласно тому, какая матрица соответствует $\mathscr{R}^\sharp$-классу K как элементу $\mathscr{R}$-тривиального моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ при вложении его в моноид направленных преобразований. Эта расстановка будет одинакова для всех элементов $b \in K$. Рассмотрев действие элемента b на каждый класс K_i, $1 \leq i \leq n$, и зафиксировав одно плотное разложение при каждом действии, мы таким образом полностью определим матрицу $B \in f(b)$. Полагаем

$$B_{ij} = \begin{cases} (f_1, \dots, f_n) \in f_{ij}(b), & \text{если } f_{ij}(b) \text{ непусто}, \\ 0, & \text{если } f_{ij}(b) \text{ пусто}, \end{cases}$$

т. е. все матрицы в $f(b)$ получаются, когда ненулевые элементы B_{ij} каждой матрицы $B \in f(b)$ независимо друг от друга пробегают элементы соответствующих наборов $f_{ij}(b)$.

Рассмотрим теперь множество $f(S) = \{f(z) \mid z \in S\}$. Определим отображение $\psi\colon f(S) \to S$ следующим образом: $\psi(Z) = z$ для каждой матрицы $Z \in f(z)$. Покажем корректность определения. Пусть $a, b \in S$ — произвольные элементы полугруппы и $a \neq b$. Тогда докажем, что $f(a) \cap f(b) = \varnothing$. Рассмотрим действие элементов a и b на $\mathscr{R}^\sharp$-класс K_1, содержащий единицу e моноида S. Предположим от противного, что найдется матрица $X \in f(a) \cap f(b)$. Тогда имеем два случая:

1) Пусть $a \in K_i$, $b \in K_j$ и $K_i \neq K_j$. Тогда, поскольку $K_1 a \subseteq K_i$ и $K_1 b \subseteq K_j$, имеем $X_{1i} \neq 0$ и $X_{1j} \neq 0$ при $i \neq j$, что противоречит мономиальности X.

2) Пусть $a, b \in K_i$, и пусть $X_{1i} = (f_1, \dots, f_n)$. Тогда этот элемент X_{1i} соответствует некоторым плотным разложениям $a = a_1 \dots a_p$, $b = b_1 \dots b_p$ и цепочке $\mathscr{R}^\sharp$-классов $K_1 = K_{i_1}, \dots, K_{i_{p+1}} = K_i$. Поскольку набор элементов $\{s_{i_l}\}$, определяющих отображения из K_{i_l} в $K_{i_{l+1}}$, $1 \leq l \leq p$, заранее зафиксирован, имеет место цепочка равенств

$$a = ea = e f_{i_1} s_{i_1} f_{i_2} s_{i_2} \dots s_{i_p} f_{i_{p+1}} = eb = b,$$

откуда $a = b$, что противоречит предположению (здесь умножение на f_{i_l} понимается как действие элемента соответствующей локальной группы).

Итак, $f(a) \cap f(b) = \varnothing$, и корректность доказана. Осталось показать, что $f(S)$ — моноид относительно операции умножения матриц и ψ — гомоморфизм. Сюръективность ψ очевидна из построения. Достаточно показать, что если $A \in f(a), B \in f(b)$, то $AB \in f(ab)$.

Пусть $AB = C$. Если $C_{ij} \neq 0$, то в соответствии с умножением мономиальных матриц для некоторого l имеем $A_{il}, B_{lj} \neq 0$ и $A_{il} B_{lj} = C_{ij}$. Элемент $A_{ik} \in f_{ik}(a)$ матрицы A соответствует некоторому плотному разложению $a_1 \dots a_p$ и набору классов $\{K_{i_1}, \dots, K_{i_p}\}$ при действии $K_i a$. Обозначим $A_{ik} = (f_1(a), \dots, f_n(a))$. Аналогично элемент $B_{kj} \in f_{kj}(b)$ матрицы B соответствует некоторому плотному разложению $b = b_1 \dots b_s$ и набору классов $\{K_{i_p} \dots K_{i_{p+s-1}}\}$.

Пусть $B_{kj} = (f_1(b) \dots f_n(b))$. Имеем $C_{ij} = (f_1(a)f_1(b), \dots, f_n(a)f_n(b))$, где

$$f_i(a)f_i(b) = \begin{cases} e_ie_i = e_i, & \text{для } i \notin \{i_1 \dots i_{p+s-1}\}, \\ f_i(a)e_i = f_i(a), & \text{для } i \in \{i_1 \dots i_{p-1}\}, \\ f_{i_p}(a)f_{i_p}(b), & \text{для } i = i_p, \\ e_if_i(b) = f_i(b), & \text{для } i \notin \{i_{p+1} \dots i_{p+s-1}\}. \end{cases}$$

С другой стороны, имеем $K_ia \subseteq K_l$, $K_lb \subseteq K_j$. Значит, $K_ic = K_iab \subseteq K_j$. Теперь заметим, что для $c = ab$ разложение $c = a_1 \dots a_pb_1 \dots b_s$ плотное, поскольку иначе $a = a_1 \dots a_p$ или $b = b_1 \dots b_s$ можно было бы уплотнить, а это не так. При действии $K_ic \subseteq K_j$ этому разложению соответствует в точности элемент C_{ij}. Так как рассуждение проводилось для произвольного $C_{ij} \neq 0$, имеем $C \in f(c) = f(ab)$. Следовательно, множество $f(S) = \{f(z) \mid z \in S\}$ образует подмоноид в $TM_n(G)$, поскольку единице моноида S соответствует единичная матрица E_n. Отображение $\psi\colon f(S) \to S$, определяемое правилом $\psi(Z) = z$ для каждой матрицы $Z \in f(z)$, является гомоморфизмом $f(S)$ на S. Таким образом, S делит $TM_n(G)$. Теорема доказана. $\square$

Автор выражает глубокую признательность А. Н. Плющенко за внимание к работе и ряд ценных замечаний, которые помогли существенно улучшить изложение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Almeida J.** Finite semigroups and universal algebra. Singapore: World Scientific, 1994. 511 p.
2. **Pin J.-E.** Varieties of formal languages. London: North Oxford Academic Publishers, 1986. 148 p.
3. **Rhodes J., Steinberg B.** The q-theory of finite semigroups. New York: Springer, 2009. 666 p.
4. **Schützenberger M.P.** On finite monoids having only trivial subgroups // Inf. Control. 1965. Vol. 8. P. 190–194.
5. **Simon I.** Piecewise testable events // Lect. Notes in Comp. Sci. 1975. Vol. 33. P. 214–222.
6. **Straubing H.** On finite $\mathscr{J}$-trivial monoids // Semigroup Forum. 1980. Vol. 19. P. 107–110.
7. **Лаллеман Ж.** Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. 440 с.
8. **Первухина Т.В.** Структура конечных моноидов, удовлетворяющих соотношению $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 181–191.
9. **Первухина Т.В.** О псевдомногообразии, порожденном всеми конечными моноидами со свойством $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. Р. 215–220.

Первухина Татьяна Вячеславовна
младший науч. сотрудник
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им Б. Н. Ельцина
e-mail: cristofory@gmail.com

Поступила 03.04.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.977

РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ МАССИВНЫХ ТЕЛ ПРИ НАГРЕВЕ ПОДВИЖНЫМ ПОЛОСОВЫМ ИСТОЧНИКОМ[1]

И. В. Першин

Рассматривается вторая краевая задача о нагреве массивного тела высококонцентрированным движущимся полосовым источником тепла большой мощности. Построены главные члены внутреннего и внешнего асимптотического разложения решения, исследовано поведение этого решения в окрестности источника тепла.

Ключевые слова: краевые задачи для уравнений в частных производных, асимптотика решения.

I. V. Pershin. The calculation of the thermal field of massive bodies moving band heat source.

Considered the second boundary value problem of the heating of a massive body of highly concentrated moving strip source heat a large capacity. Built the major members of the interior and exterior asymptotic expansions of solutions, investigated the behavior of this solution in the the area of influence of a heat source.

Keywords: boundary value problems for partial differential equations, asymptotics of a solution.

Посвящается памяти академика А. М. Ильина

Введение

Современные процессы сварки и наплавки (электронно-лучевая, лазерная) характеризуются наличием сосредоточенных источников тепла большой мощности, поэтому вблизи источника тепла температура на небольшом участке резко возрастает, возникают большие температурные градиенты.

Рассматривается задача о нагреве полубесконечного тела мощным подвижным источником тепла, заданным на полосе малой ширины. Задача имеет явное аналитическое решение, однако использовать это решение для прикладных расчетов крайне затруднительно, так как решение имеет особенности вблизи источника тепла.

Один из путей получения пригодных для практики расчетных формул состоит в том, чтобы представить решение несколькими членами асимптотического разложения по некоторому параметру [3].

Проведено исследование поведения решения в случае, когда эффективная (полная) мощность источника тепла постоянна, а площадь нагрева стремится к нулю. Получены простые формулы для расчета температуры, при этом вдали от источника тепла используется одно представление решения, в окрестности источника — другое, учитывающее особенности поведения решения в этой области.

1. Постановка задачи

По поверхности полубесконечного тела с постоянной скоростью перемещается источник тепла, заданный на узкой полосе. Предполагаются выполненными следующие условия: распро-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322) и программы УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”).

странение тепла в теле происходит только с помощью теплопроводности, при этом теплофизические свойства материала не зависят от температуры; отсутствуют фазовые и структурные превращения; граничная поверхность теплоизолирована; источник нагрева распределен в полосе заданной ширины, эффективная мощность источника постоянна во времени и обратно пропорциональна ширине полосы.

Задача решается в области

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < \widetilde{y} < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0.$$

Обозначение $\widetilde{y}$ показывает, что задача решается в неподвижной системе координат.

Полосовой источник тепла действует на границе $x = 0$, движется вдоль оси $\widetilde{y} = 0$ с постоянной скоростью v. В этом случае тепловое поле полубесконечного тела является симметричным по координате z и задача сводится к двумерному случаю: определение поля температур в полуплоскости, по границе которой движется источник тепла малой ширины. При этом ширина источника тепла стремится к нулю, а мощность источника — к бесконечности.

Задача описывается двумерным уравнением теплопроводности и граничными условиями :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial \widetilde{y}^2}\Big), \\ \Big(-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = \Phi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon), \\ T(x, \widetilde{y}, 0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

в области $0 < x < \infty,\ -\infty < \widetilde{y} < \infty,\ t > 0$.

Функция Φ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon)\, d\widetilde{y} = Q,$$

которое означает, что эффективная (полная) мощность источника тепла остается постоянной, хотя удельный тепловой поток стремится к бесконечности, а ширина источника тепла стремится к нулю.

Здесь λ — коэффициент теплопроводности, $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, $c,\ \rho$ — теплоемкость и плотность металла. Параметр ε определяет ширину полосы нагрева источника тепла, функция Φ задает распределение мощности источника тепла по ширине нагрева.

Не теряя общности, для простоты можно положить коэффициенты теплопроводности и температуропроводности по величине равными 1, что можно достичь простой заменой переменных, а также принять эффективную мощность $Q = 1$. Заменой переменных приведем систему (1) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{y}^2}\Big), \\ \Big(-\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = \varphi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon), \\ u = (x, \widetilde{y}, 0) = 0, \\ 0 < x < \infty,\ -\infty < \widetilde{y} < \infty,\ t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\varphi(\widetilde{y}, v, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{\widetilde{y} - vt}{\varepsilon}\Big);$$

ψ — плотность распределения теплового потока по полосе нагрева, которая задается следующим образом:

$$\psi(\widetilde{y},v,t,\varepsilon)=\begin{cases}\psi_1(\widetilde{y},v,t,\varepsilon), & |\widetilde{y}-vt|\le\dfrac{\varepsilon}{2},\\[2ex] 0, & |\widetilde{y}-vt|>\dfrac{\varepsilon}{2}.\end{cases}$$

Функция φ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\widetilde{y},v,t,\varepsilon)\,d\widetilde{y}=1$, а ψ_1 — ограниченная функция. Это условие показывает, что эффективная мощность источника тепла остается постоянной, если ширина полосы нагрева стремится к нулю.

В предельном случае при $\varepsilon=0$ функция $\varphi(\widetilde{y},v,t,0)$ вырождается в дельта-функцию Дирака [2].

Можно показать [4; 7], что решение задачи (2) имеет вид

$$u(x,\widetilde{y},t)=\int\limits_0^t\frac{1}{2\pi(t-\omega)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x^2+(\widetilde{y}-\xi)^2}{4(t-\omega)}\Big)\varphi\left(\xi,v,\omega,\varepsilon\right)d\xi\,d\omega. \tag{3}$$

Ниже проведено исследование поведения решения (3) в случае, когда эффективная мощность источника тепла постоянна, а площадь нагрева стремится к нолю.

В этом случае необходимо построить, в соответствии с [1], два различных вида асимптотики решения (3) в различных областях:

— в окрестности источника тепла, где возникают большие температуры и температурные градиенты, строится внутреннее асимптотическое разложение, учитывающее особенности поведения решения и его производных;

— вне области влияния источника тепла, где решение имеет гладкий характер, строится внешнее разложение.

2. Внешнее асимптотическое разложение

Введем новые переменные:

$$\zeta=\frac{\xi-v\omega}{\varepsilon},\quad \tau=(t-\omega),\quad y=\widetilde{y}-vt.$$

В результате получим решение задачи (2) в подвижной системе координат, связанной с источником тепла:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x^2+(y+v\tau-\varepsilon\zeta)^2}{4\tau}\Big)\psi(\zeta)d\zeta d\tau. \tag{4}$$

Внешнее разложение ищем в виде асимптотического ряда по степеням ε [1]: $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k$, где u_k — неизвестные функции, подлежащие определению. Для практического применения достаточно определить первые два-три члена ряда.

Решение (4) можно представить в виде

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\zeta)Gd\zeta,$$

где

$$G=\int\limits_0^t\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{x^2+(y+v\tau-\varepsilon\zeta)^2}{4\tau}\Big)d\tau.$$

Обозначим $\alpha^2 = x^2 + y^2$, исследуем поведение функции G при $\varepsilon \to 0$ в области $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, где $\alpha_0 > m\varepsilon$, m — некоторая константа.

Функцию G представим в виде

$$G = \exp\Big(\frac{v}{2}(\varepsilon\zeta - y)\Big) \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau.$$

Разложив в ряд множитель перед интегралом, имеем

$$G = \exp\Big(-\frac{vy}{2}\Big)\Big(1 + \varepsilon\frac{v\zeta}{2} + \varepsilon^2\frac{c^2\zeta^2}{8}\Big) \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau$$

$$= \exp\Big(- \frac{vy}{2}\Big)\Big(1 + \varepsilon\frac{v\zeta}{2} + \varepsilon^2\frac{v^2\zeta^2}{8}\Big)\left(G_1 - G_2\right),$$

где

$$G_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau, \quad G_2 = \int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau} \exp\Big(- \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2\zeta^2 - 2y\varepsilon\zeta}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big) d\tau.$$

Здесь G_1 — это функция Макдональда (или модифицированная функция Бесселя) [2]:

$$G_1 = 2K_0\bigg(\frac{\alpha v}{2}\sqrt{\Big(1 + \frac{\varepsilon^2\zeta^2}{\alpha^2} - \frac{2\varepsilon\zeta y}{\alpha^2}\Big)}\bigg).$$

Разложив данную функцию в ряд при малых ε, получим

$$G_1 = 2K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right) + \varepsilon K_1\left(\frac{\alpha v}{2}\right)\frac{v\zeta y}{\alpha} + 2\varepsilon^2\left(K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right)\frac{v^2\zeta^2 y^2}{8\alpha^2} + K_1\left(\frac{\alpha v}{2}\right)\left(\frac{v\zeta^2 y^2}{\alpha^3} + \frac{v\zeta^2}{4\alpha}\right)\right).$$

Здесь K_0, K_1 — функции Макдональда нулевого и первого порядка соответственно [2]. Аналогичное преобразование проведем для G_2. Используя для u_k представление вида

$$u_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\zeta)\nu_k(\zeta)d\zeta,$$

будем иметь

$$\nu_0 = 2\exp\left(-\frac{vy}{2}\right)\left(K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau}\exp\Big(- \frac{\alpha^2}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\right),$$

$$\nu_1 = v\zeta\exp\left(-\frac{vy}{2}\right)\left(K_0\left(\frac{\alpha v}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau}\exp\Big(- \frac{\alpha^2}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\right)$$

$$+\ y\zeta\exp\left(-\frac{vy}{2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}K_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_t^\infty \frac{1}{\tau^2}\exp\Big(- \frac{\alpha^2}{4\tau} - \frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\right).$$

В итоге имеем решение в виде $u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Внешнее асимптотическое разложение для задачи* (1) *в неподвижной системе координат вне области влияния источника тепла имеет вид*

$$T(x, \widetilde{y}, t) = T_0(x, \widetilde{y}, t) + \varepsilon T_1(x, \widetilde{y}, t) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$T_0(x,\widetilde{y},t)=\frac{1}{\pi}\exp\Big(-\frac{v(\widetilde{y}-vt)}{2}\Big)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\times\Big\{K_0\Big(\frac{v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}{2}\Big)-\frac{1}{2}\int\limits_t^{\infty}\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}{4\tau}-\frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\Big\},$$

$$T_1(x,\widetilde{y},t)=\frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{v(\widetilde{y}-vt)}{2}\Big)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\times\Big\{\Big[K_0\Big(\frac{v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}{2}\Big)-\frac{1}{2}\int\limits_t^{\infty}\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}{4\tau}-\frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\Big]v$$

$$+\Big[(\widetilde{y}-vt)K_1\Big(\frac{v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}{2}\Big)\frac{1}{\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^{\infty}\frac{1}{\tau^2}\exp\Big(-\frac{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2}{4\tau}-\frac{v^2\tau}{4}\Big)d\tau\Big]\Big\}. \qquad \square$$

По этим формулам нетрудно определить значение функций T_0 и T_1, так как функции K_0 и K_1 — это известные табличные функции [2], а внутренние интегралы (по τ) легко вычисляются с помощью стандартных методов численного интегрирования, поскольку они не имеют никаких особенностей. Нетрудно показать, что эти интегралы являются быстроубывающими функциями вне области влияния источника тепла, подобно интегрально-показательной функции.

Используя конкретный вид функции $\psi(\zeta)$, можно определить нужное число членов ряда u_k и найти решение с любой точностью по ε. Например, если на полосе задан равномерно распределенный источник тепла (т. е. функция $\psi_1\equiv 1$), то $u_0=\nu_0/2\pi$, а $u_1\equiv 0$.

Таким образом, получены довольно простые формулы для определения решения вне некоторой окрестности подвижного источника тепла. Использовать это разложение непосредственно вблизи источника тепла нельзя, так как при $\alpha\to 0$ ряд T_k не является асимптотическим, коэффициенты ряда имеют особенности (начинают быстро расти). При этом чем больше членов ряда используется во внешнем разложении, тем хуже он будет аппроксимировать решение задачи вблизи источника тепла в силу нарастания особенностей в коэффициентах ряда.

Нетрудно показать, что главный член внешнего разложения $T_0(x,\widetilde{y},t)$ вблизи источника тепла ведет себя подобно функции $-\ \ln(v\sqrt{x^2+(\widetilde{y}-vt)^2})$, т. е. температура стремится к бесконечности вблизи источника тепла, чего быть не должно.

3. Внутреннее асимптотическое разложение

Для правильного представления решения (3) вблизи источника тепла необходимо ввести новые внутренние “растянутые” переменные:

$$x=\varepsilon\eta,\quad \xi=\widetilde{y}+\varepsilon\zeta,\quad \omega=t-\varepsilon^2\tau.$$

Сделав замену переменных в (3) и используя обозначения, аналогичные введенным в предыдущем разделе, получим внутреннее решение в виде

$$w(\eta,\zeta,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t/\varepsilon^2}\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\eta^2+\zeta^2}{4\tau}\Big)\psi\Big(\frac{y-vt}{\varepsilon}+\zeta+\varepsilon\tau\Big)d\zeta d\tau.$$

Обозначив $s = r + \zeta + \varepsilon v\tau,\ r\varepsilon = y - vt$, будем иметь

$$w(\eta,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t/\varepsilon^2}\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\eta^2+(s-\varepsilon v\tau-r)^2}{4\tau}\Big)\psi(s)dsd\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(s)Qds.$$

Здесь

$$Q = \int\limits_0^{t/\varepsilon^2}\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{\eta^2+(s-\varepsilon v\tau-r)^2}{4\tau}\Big)d\tau = \Big(1+\varepsilon\frac{v(s-r)}{2}+\varepsilon^2\frac{v^2(s-r)^2}{8}+O(\varepsilon^3)\Big)\left(Q_1-Q_2\right),$$

$$Q_1 = \int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{\beta^2}{4\tau}-\frac{v^2\varepsilon^2\tau}{4}\Big)d\tau = 2K_0\Big(\frac{\beta v\varepsilon}{2}\Big),\quad Q_2 = \int\limits_{t/\varepsilon^2}^{\infty}\frac{1}{\tau}\exp\Big(-\frac{\beta^2}{4\tau}-\frac{v^2\varepsilon^2\tau}{4}\Big)d\tau,$$

где $\beta^2 = \eta^2 + (s-r)^2$.

Обозначив $\varsigma = \tau\varepsilon^2$, имеем

$$Q_2 = \int\limits_t^{\infty}\frac{1}{\varsigma}\exp\Big(-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4\varsigma}-\frac{v^2\varsigma}{4}\Big)d\varsigma.$$

Разложив в ряд подынтегральное выражение, получим

$$Q_2 = \int\limits_t^{\infty}\frac{1}{\varsigma}\exp\Big(-\frac{v^2\varsigma}{4}\Big)\Big(1-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4\varsigma}+O\left(\beta^4\varepsilon^4\right)\Big)d\varsigma.$$

По этим формулам несложно найти решение в непосредственной близости от источника тепла. Например, если решение искать с точностью $O(\varepsilon^2)$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Внутреннее асимптотическое разложение для задачи (2)вблизи источника тепла имеет вид*

$$w(\eta,\zeta,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\Big(1+\frac{v\varepsilon(s-r)}{2}\Big)$$

$$\times\Big\{K_0\Big(\frac{v\varepsilon\sqrt{\eta^2+(s-r)^2}}{2}\Big)-\frac{1}{2}\int\limits_t^{\infty}\frac{1}{\varsigma}\exp\Big(-\frac{v^2\varsigma}{4}\Big)d\varsigma\Big\}ds + O(\varepsilon^2). \qquad \square$$

При этом, как и в предыдущем случае, функция K_0 — функция Макдональда, а вычисление внутреннего интеграла (по ς) путем замены переменных сводится к интегральной показательной функции Ei [2].

Как и для случая внешнего разложения, зададим равномерно распределенный источник тепла (функцию $\psi_1 \equiv 1$). Тогда не представляет особых трудностей вычислить этот интеграл непосредственно, разложив функцию K_0 в ряд.

Тогда главный член решения при нулевой степени (ε) для задачи (1) будет выглядеть следующим образом:

$$T_0(x,\widetilde{y},t) = \frac{T^*(x,\widetilde{y},t)}{2\pi}.$$

Здесь

$$T^*(x,\widetilde{y},t) = -2\ln\frac{v\varepsilon}{4a} - 2\gamma + 2 - 2\eta\Big(\operatorname{arctg}\Big(\frac{0.5-r}{\eta}\Big)\Big) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{0.5+r}{\eta}\Big)$$

$$-(1-2r)\ln(\eta^2+(0.5-r)^2)-(1+2r)\ln(\eta^2+(0.5+r)^2)-\int\limits_{at}^{\infty}\frac{1}{\varsigma}\exp\Big(-\frac{v^2\varsigma}{4}\Big)d\varsigma,$$

где $r=\dfrac{-vt}{\varepsilon}$ и $\eta=x/\varepsilon$. Из этой формулы видно, что когда параметр $\varepsilon\to 0$, то решение вблизи источника тепла ведет себя подобно $-\ln v\varepsilon$.

4. Область применения формул

Одним из важных вопросов при проведении практических расчетов является оценка границ применения полученных формул внешнего и внутреннего разложения. Из формул для внешнего разложения видно, что по мере приближения к источнику тепла (в некоторой окрестности источника) ряд теряет асимптотический характер, коэффициенты ряда начинают быстро расти и чем больше членов ряда используется в разложении, тем хуже он приближает точное решение. Аналогично внутреннее разложение хорошо аппроксимирует точное решение, но только в некоторой окрестности источника тепла.

Из оценки остаточного члена ряда внешнего разложения можно получить теоретическую оценку для границ этих областей.

Так, для области применения внешнего разложения справедлива оценка $v\alpha > M_1\sqrt{\varepsilon}$, а для соответствующей области применения внутреннего разложения — оценка $v\alpha < M_2\sqrt{\varepsilon}$, причем эти области перекрываются $M_2 > M_1$, где M_1 и M_2 — константы, а $\alpha=\sqrt{x^2+(y-vt)^2}$.

В области перекрытия внешнее и внутреннее разложения совпадают.

Теоретически получить значения величин M_1 и M_2 достаточно сложно. Были проведены численные эксперименты по определению этих величин, которые показали, что если рассматривать только главные члены соответствующих рядов (при нулевой степени ε), то внешнее разложение справедливо при условии $v\alpha > \varepsilon$, т. е. $M_1=\sqrt{\varepsilon}$, а внутреннее разложение — при $v\alpha < 20\sqrt{\varepsilon}$, т. е. $M_2 = 20$. В этом случае внешнее разложение хорошо приближает точное решение вплоть до окрестности, сравнимой по размеру с размером источника тепла, но это справедливо только для главного члена. Если возникнет необходимость использовать несколько следующих членов ряда, тогда внешнее разложение будет справедливо при условии $v\alpha > M_1\sqrt{\varepsilon},\ M_1 > 1$, т. е. вне гораздо большей окрестности источника тепла.

Следует сделать следующие замечания по поводу использования формулы внешнего разложения для главного (нулевого) члена:

1. Численные эксперименты показали, что эта формула хорошо аппроксимирует точное решение всюду, за исключением малой (сопоставимой по размерам с размерами источника) окрестности источника тепла. При этом возникает впечатление, что под источником (т. е. когда $\alpha = 0$) температура неограниченна, так как $K_0(v\alpha/2)\to\infty$ при $\alpha = 0$.

На самом деле при фиксированном ε температура под источником всегда ограниченна (что хорошо видно из соответствующей формулы для внутреннего разложения).

2. В некоторых работах (например в [5;6]) отмечается, что для расчета температуры удобно использовать формулы предельного квазистационарного состояния, получаемого при $t=\infty$. При этом утверждается, что полученное таким образом решение мало (на $3-5\%$) отличается от точного.

Расчеты показали, что использовать формулы предельного состояния можно только при временах $T >> 1$, иначе ошибка составит 10–15%.

В ы в о д ы. Для решения получены простые формулы, позволяющие проводить расчеты тепловых полей для массивных тел с подвижным полосовым источником тепла большой мощности как вдали от источника тепла, так и в непосредственной близости от него. Показаны области применения этих формул.

Вычисление двойного несобственного интеграла заменяется на вычисление нескольких однократных интегралов (которые легко считаются стандартными методами численного интегрирования, либо сами являются стандартными функциями).

При практическом применении достаточно иметь первые два члена асимптотических рядов внешнего и внутреннего разложения, но если необходимо получить решение с более высокой точностью, то получить следующие члены этих рядов не представляет особых трудностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М: Наука, 1989. 336 с.
2. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. 2-е изд. М.: Физматлит, 1963. 359 с.
3. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 455 с.
4. **Полянин А.Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
5. **Рыкалин Н.Н.** Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951. 327 с.
6. **Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М.** Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. М.: Наука, 1985. 172 с.
7. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

Першин Игорь Викторович
главный программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: piv@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.65

О КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Вычислены точно константы Лебега (нормы линейных операторов из C в C) локальных параболических сплайнов с произвольным расположением узлов, построенных вторым автором в 2005 г., и локальных параболических сплайнов Н. П. Корнейчука, точных на квадратичных функциях. Обе константы оказались меньше, чем у интерполяционных параболических сплайнов.

Ключевые слова: константы Лебега, локальные параболические сплайны, произвольные узлы.

E. V. Strelkova, V. T Shevaldin. On Lebesgue constants of local parabolic splines.

Lebesgue constants (the norms of linear operators from C to C) are calculated exactly for local parabolic splines with an arbitrary arrangement of knots, which were constructed by the second author in 2005, and for N.P. Korneichuk's local parabolic splines, which are exact on quadratic functions. Both constants are smaller than the constants for interpolation parabolic splines.

Keywords: Lebesgue constants, local parabolic splines, arbitrary knots.

Введение

Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим линейный метод $S(x) = S(f,x)$ ее аппроксимации на оси $\mathbb{R}$ полиномиальными сплайнами минимального дефекта степени r (порядка $r+1$) с произвольными узлами. Одной из характеристик устойчивости метода S является поведение равномерной нормы оператора S (как оператора, действующего из пространства непрерывных на оси функций $C = C(\mathbb{R})$ в C), а именно, величина

$$L = \|S\|_C^C = \sup_{\|f\|_C \le 1} \|S(f,\cdot)\|_C.$$

Число L называется константой Лебега метода S. Чем меньше такая константа, тем больше устойчивость метода к изменению аппроксимационных условий.

Различными вопросами, связанными с константами Лебега для интерполяционных полиномиальных сплайнов (и их обобщений), занимались Ф. Шурер и Е. В. Чини [1], Ф. Ричардс [2], А. А. Женсыкбаев [3], И. Цимбаларио [4], Х. Г. Морше [5], Ю. Н. Субботин и С. А. Теляковский [6;7], В. А. Ким [8;9] и многие другие. Принципиальный результат в этом направлении принадлежит Ю. Н. Субботину и С. А. Теляковскому [6], которые доказали, что константы Лебега L интерполяционных N-периодических полиномиальных сплайнов $S_{r,N}(x)$ степени r с равномерными узлами асимптотически ведут себя следующим образом:

$$L = \|S_{r,N}\|_C^C = \frac{2}{\pi}\ln(\min(N,r)) + O(1), \tag{0.1}$$

причем слагаемое $O(1)$ не зависит от N и r. Отметим, что точно вычислить в этой тематике константы L удается далеко не всегда. Даже выяснение порядков L по различным параметрам представляет большой интерес. Естественно поставить вопрос об изучении констант Лебега неинтерполяционных полиномиальных сплайнов (и их обобщений), аппроксимирующих (в том или ином смысле) непрерывные функции на отрезке числовой прямой $\mathbb{R}$ и на всей прямой. Перейдем к более точным формулировкам.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Пусть в узлах равномерной с шагом $h > 0$ сетки $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$ числовой прямой заданы значения $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ некоторой функции $f(x):\ y_j = f(jh),\ j \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\widetilde{B}_{r+1}$ нормализованный (в C) полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) степени r (порядка $r+1$) с носителем $\operatorname{supp}\widetilde{B}_{r+1} = [0;(r+1)h]$ и равномерными узлами $0,\ h,\ 2h,\dots,(r+1)h$ (см., например, [10, гл. 1]). В 1975 г. Т. Лич и Л. Шумейкер [11] (см., также [10, гл. 9]) для любой функции $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ построили локальные полиномиальные сплайны $(r+1)$-го порядка вида

$$S_{r+1}(x) = S_{r+1}(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{s=-k}\gamma_s f((j+s)h)\widetilde{B}_{r+1}\Big(x - jh - \frac{r+1}{2}h\Big) \qquad (x\in\mathbb{R}), \tag{0.2}$$

где $k = [r/2]$ и действительные коэффициенты γ_s выбирались из условия точности формулы $S_{r+1}(f,x) = f(x)$ для алгебраических многочленов степени r. Было доказано, что такой выбор коэффициентов может быть осуществлен единственным образом. Локальный сплайн вида (0.2) не является интерполяционным, так как $S_{r+1}(jh)\neq y_j$ $(j\in\mathbb{Z})$, и его значение в фиксированной точке $x\in\mathbb{R}$ зависит только от нескольких значений $y_j = f(jh)$, определяемых носителями сдвигов B-сплайна, в которые входит точка x. Результаты Т. Лича и Л. Шумейкера [11] развивались и обобщались в различных направлениях (см., например, библиографию в работе авторов [12]). Методы локальной аппроксимации сплайнами (с равномерными и неравномерными узлами) стали эффективным инструментом решения разнообразных задач теории приближения функций и численного анализа как полезная альтернатива метода интерполяции. Оказалось (см., например, [10; 13]), что порядки аппроксимации локальными полиномиальными сплайнами $(r+1)$-го порядка с равномерными узлами классических соболевских классов W^r_∞ r раз почти всюду дифференцируемых функций в равномерной метрике совпадают с порядками аппроксимации этих классов соответствующими интерполяционными сплайнами и равняются порядкам колмогоровских поперечников указанных классов функций. Напомним, что класс функций W^r_∞ определяется следующим образом:

$$W^r_\infty = \{f\colon f^{(r-1)}\in AC,\ \|f^{(r)}\|_{L_\infty}\le 1\}.$$

Здесь AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $\|g\|_{L_\infty} = \|g\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$. Но при этом, помимо простоты построения, методы локальной аппроксимации сплайнами (в отличие от интерполяционных методов) обладают еще и полезными формосохраняющими и сглаживающими свойствами (см., например, [14–16] и ссылки в этих работах). Возникает естественный вопрос о сравнении локальных и интерполяционных сплайнов в смысле услойчивости к изменению исходных данных (т. е. чисел $y_j = f(jh)$). Интересно выяснить, у каких из них константы Лебега будут меньше. Поставим задачу о вычислении (или оценке) констант Лебега

$$L = \|S_{r+1}\|^C_C = \sup_{\|f\|_C\le 1}\|S_{r+1}(f,\cdot)\|_C$$

для локальных полиномиальных сплайнов вида (0.2) $S_{r+1}(f,x)$ Т. Лича и Л. Шумейкера [11]. Пока не видно подходов к нахождению этих величин в случае произвольного r. Вначале хотелось бы получить асимптотическое равенство типа (0.1).

Далее будет доказано (теорема 1), что для параболических сплайнов (т. е. при $r = 2$), сохраняющих квадратичные функции, величина

$$\|S_3\|^C_C = 1.25.$$

В. А. Ким [8] показал, что константа Лебега интерполяционных параболических сплайнов, у которых сетка узлов сплайна сдвинута на полшага (т. е. на $h/2$) относительно сетки узлов интерполяции, равна $L = \sqrt{2}\approx 1,41$. Сравнение этих результатов показывает, что в вопросе устойчивости локальные параболические сплайны вида (0.2) (их коэффициенты $\gamma_{-1} = -1/8$, $\gamma_2 = 5/4,\ \gamma_3 = -1/8$ указал Н. П. Корнейчук [17]) имеют преимущество перед соответствующими интерполяционными.

В 1993 г. Ю. Н. Субботин [14] на классе функций W^2_∞, заданных на равномерной сетке $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, построил еще один (неинтерполяционный) метод локальной параболической аппроксимации, использующий параболические сплайны с дополнительными узлами и сохраняющий локально геометрические свойства (монотонность и выпуклость) исходных данных $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$. В периодическом случае этот метод оказался экстремальным в смысле поперечников по Колмогорову и по Коновалову. В 2005 г. один из авторов этой статьи В. Т. Шевалдин [15] обобщил данный метод на параболические сплайны с произвольным расположением узлов. Нам удалось доказать (см. далее теорему 2), что для любой сетки узлов сплайна константы Лебега таких сплайнов равны 1.

1. Сплайны Н. П. Корнейчука

Пусть $B_3(x) = \widetilde{B}_3(x + 3h/2)$ (см., например, [10]) — нормализованный параболический B-сплайн с равномерными узлами $-3h/2,\ -h/2,\ h/2,\ 3h/2$. Он может быть записан в виде

$$B_3(x) = \frac{1}{2h^2}\begin{cases} \Big(x+\dfrac{3h}{2}\Big)^2, & x\in\Big[-\dfrac{3h}{2};-\dfrac{h}{2}\Big],\\ \dfrac{3h^2}{2}-2x^2, & x\in\Big[-\dfrac{h}{2};\dfrac{h}{2}\Big],\\ \Big(\dfrac{3h}{2}-x\Big)^2, & x\in\Big[\dfrac{h}{2};\dfrac{3h}{2}\Big],\\ \qquad 0, & x\notin\Big[-\dfrac{3h}{2};\dfrac{3h}{2}\Big]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положим $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$, и пусть

$$I_j = \Big(-\frac{1}{8}\Big)y_{j-1} + \frac{5}{4}y_j + \Big(-\frac{1}{8}\Big)y_{j+1} \quad (j\in\mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

— последовательность линейных функционалов. Рассмотрим локальный параболический сплайн вида

$$S_3(x) = S_3(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_j\ B_3(x-jh) \quad (x\in\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Формула (1.3) — частный случай формулы (0.2) при $r = 2$. Такие локальные сплайны изучал Н. П. Корнейчук [17]. Он доказал, что для любого квадратного трехчлена $p_2(x) \in P_2$ имеет место равенство

$$S_3(p_2(\cdot),x) = p_2(x) \quad (x\in\mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Здесь P_2 — пространство алгебраических многочленов второй степени с действительными коэффициентами. Равенство (1.4) означает, что схема локальной аппроксимации (1.2), (1.3) сохраняет пространство P_2. Нетрудно проверить, что $S_3(jh) \ne y_j$ $(j \in \mathbb{Z})$, т. е. построенные локальные сплайны не являются интерполяционными. Кроме того, Н. П. Корнейчук доказал, что

$$\sup_{f\in W^2_\infty}\|f-S_3\|_C = \frac{9}{32}h^2. \tag{1.5}$$

Пусть

$$d_m(W^2_\infty)_C = \inf_{\dim M_m\le m}\ \sup_{f\in W^2_\infty}\ \inf_{g\in M_m}\|f-g\|_C \tag{1.6}$$

— колмогоровский поперечник порядка m класса функций $W^2_\infty = W^2_\infty(\mathbb{R})$. Известно (см., например, [13]), что для 1-периодических функций

$$d_{2n-1}(W^2_\infty)_C = d_{2n}(W^2_\infty)_C = \frac{h^2}{8} \qquad \Big(h=\frac{1}{n}\Big),$$

причем экстремальным подпространством M_m (реализующим внешний inf в равенстве (1.6)) при четном $m = 2n$ является пространство интерполяционных параболических сплайнов с равномерными узлами (у них узлы интерполяции сдвинуты на полшага по сравнению с узлами сплайна), а также пространство локальных сплайнов Ю. Н. Субботина [14]. Равенство (1.5) означает, что сплайны Н. П. Корнейчука приближают класс функций W^2_∞ с тем же порядком h^2, но сами по себе экстремальным подпространством (в смысле поперечника по Колмогорову) не являются. Рассмотрим теперь константу Лебега метода Н. П. Корнейчука [17]. Нас интересует ответ на следующий вопрос. Пусть все числа y_j таковы, что $|y_j| \le 1$ $(j \in \mathbb{Z})$. Чему в этом случае равна величина

$$L_1 = \max_{x\in\mathbb{R}} \big\{|S_3(x)|\colon |y_j| \le 1\ (j \in \mathbb{Z})\big\}?$$

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$L_1 = 1.25.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x \in [(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ сплайн $S_3(x)$, определенный формулами (1.2), (1.3), с учетом равенства (1.1) можно представить в виде

$$S_3(x) = \frac{1}{16h^2}\Big[(-y_{l-2} + 10y_{l-1} - y_l)\Big(t - \frac{h}{2}\Big)^2 + (-y_{l-1} + 10y_l - y_{l+1})\Big(\frac{3h^2}{2} - 2t^2\Big)$$

$$+ (-y_l + 10y_{l+1} - y_{l+2})\Big(t + \frac{h}{2}\Big)^2\Big] = \frac{1}{16h^2}\sum_{s=1}^{5} y_{l+s-1}q_s(t), \qquad (1.7)$$

где $t = x - lh \in [-h/2; h/2]$ и

$$q_1(t) = -\Big(t - \frac{h}{2}\Big)^2, \qquad q_2(t) = 12t^2 - 10th + h^2, \qquad q_3(t) = -22t^2 + \frac{29}{2}h^2,$$

$$q_4(t) = 12t^2 + 10th + h^2, \qquad q_5(t) = -\Big(t + \frac{h}{2}\Big)^2.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $l = 0$. Из (1.7) имеем

$$|S_3(x)| \le \frac{1}{16h^2} q(t) \max_{-2\le j\le 2} |y_j|, \qquad (1.8)$$

где $q(t) = \sum_{s=1}^{5} |q_s(t)|$. Анализ нулей квадратных трехчленов $q_s(t)$ $(s = \overline{1,5})$ показывает, что имеет место равенство

$$q(t) = \begin{cases} 5(-4t^2 - 4th + 3h^2), & -\dfrac{h}{2} \le t \le \dfrac{-5+\sqrt{13}}{12}h, \\ 4t^2 + 17h^2, & \dfrac{-5+\sqrt{13}}{12}h \le t \le \dfrac{5-\sqrt{13}}{12}h, \\ 5(-4t^2 + 4th + 3h^2), & \dfrac{5-\sqrt{13}}{12}h \le t \le \dfrac{h}{2}. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Из (1.9) выводим равенство

$$\max_{t\in[-h/2;h/2]} q(t) = q\Big(-\frac{h}{2}\Big) = q\Big(\frac{h}{2}\Big) = 20h^2, \qquad (1.10)$$

причем при $t = -h/2$ знак равенства в неравенстве (1.8) реализуется при $y_{-2} = y_1 = y_2 = -1$, $y_{-1} = y_0 = 1$, а при $t = h/2$ — при $y_{-2} = y_{-1} = y_2 = -1$, $y_0 = y_1 = 1$. Из (1.8)–(1.10) следует утверждение теоремы 1.

2. Локальные параболические сплайны с произвольными узлами, сохраняющие линейные функции

Рассмотрим на оси $\mathbb{R}$ бесконечную в обе стороны сетку узлов: $\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$; $h_j = x_{j+1} - x_j$, $x_{j+1/2} = 0,5(x_j + x_{j+1})$ $(j \in \mathbb{Z})$. Для функции $f \in W^2_\infty(\mathbb{R})$ построим разделенную разность второго порядка по значениям функции $y = f(x)$ в точках x_j, x_{j+1} и x_{j+2}:

$$[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] = f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{y_{j+2}}{h_{j+1}(h_{j+1}+h_j)} - \frac{y_{j+1}}{h_{j+1}h_j} + \frac{y_j}{h_j(h_{j+1}+h_j)} \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

Функции $f \in W^2_\infty(\mathbb{R})$ ставится в соответствие (см. [15]) локальный параболический сплайн вида

$$\widetilde{S}_3(x) = \widetilde{S}_3(f,x) = f(x_j) + \frac{h_{j-1}h_j}{4} f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{h_j + h_{j-1}}(x - x_j)$$
$$+ \frac{h_{j-1}}{h_j}(x-x_j)^2 f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] + \Big(\frac{h_{j+1}}{h_j} f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] - \frac{h_{j-1}}{h_j} f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]\Big)$$
$$\times (x - x_{j+1/2})^2_+, \qquad x \in [x_j; x_{j+1}] \qquad (j \in \mathbb{Z}), \tag{2.1}$$

где $(x - x_{j+1/2})^2_+ = \max\{0; (x - x_{j+1/2})\}^2$. Для равномерной сетки узлов $h_j = h$ $(j \in \mathbb{Z})$ сплайн (2.1) был построен Ю. Н. Субботиным [14]. Сплайн $\widetilde{S}_3(x)$ обладает формосохраняющими и сглаживающими свойствами (см. [15, теорема 1]) и сохраняет линейные функции. В [15] на классе функций $W^2_\infty(\mathbb{R})$ для него были вычислены величины погрешностей аппроксимации

$$\sup_{f \in W^2_\infty} \|f - \widetilde{S}_3\|_C, \qquad \sup_{f \in W^2_\infty} \|f' - \widetilde{S}_3'\|_C,$$

причем в случае равномерной сетки, как показал Ю. Н. Субботин [14], первая величина равняется $h^2/8$, а вторая — $h/2$.

В настоящей работе мы исследуем константу Лебега

$$L_2 = \max_{x \in \mathbb{R}} \big\{ |\widetilde{S}_3(x)| \colon |y_j| \le 1 \ (j \in \mathbb{Z}) \big\}.$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$L_2 = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приводя подобные члены в равенстве (2.1) при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$, получим

$$\widetilde{S}_3(x) = y_{j-1} r_1(x) + y_j r_2(x) + y_{j+1} r_3(x), \tag{2.2}$$

где

$$r_1(x) = \frac{1}{h_{j-1}+h_j}\Big(\frac{h_j}{4} - (x-x_j) + \frac{(x-x_j)^2}{h_j}\Big), \qquad r_2(x) = \frac{3}{4} - \frac{(x-x_j)^2}{h_j^2},$$
$$r_3(x) = \frac{1}{h_{j-1}+h_j}\Big(\frac{h_{j-1}}{4} + x - x_j + \frac{(x-x_j)^2 h_{j-1}}{h_j^2}\Big).$$

Из (2.2) следует, что

$$|\widetilde{S}_3(x)| \le \max_{j-1 \le s \le j+1} |y_s| \big\{ |r_1(x)| + |r_2(x)| + |r_3(x)| \big\}. \tag{2.3}$$

Покажем, что все три квадратных трехчлена $r_1(x)$, $r_2(x)$ и $r_3(x)$ неотрицательны при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. В самом деле, $r_1(x_j) > 0$, $r_1(x_{j+1/2}) = 0$, $r_1'(x_{j+1/2}) = 0$, и потому $r_1(x) \ge 0$ при

$x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. У квадратного трехчлена $r_2(x)$ коэффициент при x^2 отрицательный, $r_2(x_j) = 3/4$, $r_2(x_{j+1/2}) = 1/2$, и тогда $r_2(x) > 0$ при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. Далее $r_3(x_j) > 0$ и $r_3'(x) > 0$ при $x > x_j$. Следовательно, $r_3(x) > 0$ при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$. Из неравенства (2.3) выводим оценку

$$|\widetilde{S}_3(x)| \le \max_{j-1\le s\le j+1} |y_s| \big\{ r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) \big\}. \tag{2.4}$$

После несложных преобразований получаем, что

$$r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) = 1.$$

Поскольку все числа $|y_j| \le 1$ $(j \in \mathbb{Z})$, то из (2.4) при $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$ выводим оценку

$$|\widetilde{S}_3(x)| \le 1,$$

причем знак равенства в этом неравенстве реализуют числа $y_j = 1$ $(j = s-1, s, s+1)$. Формула (2.1) для сплайна $\widetilde{S}_3(x)$ на отрезке $[x_j; x_{j+1}]$ симметрична относительно середины этого отрезка (т. е. точки $x = x_{j+1/2}$), поэтому имеет место неравенство $|\widetilde{S}_3(x)| \le 1$, $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$. Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schurer F., Cheney E.W.** On interpolation cubic splines with equally-spaced nodes // Proc. Nederlande Acad. van Wetenschappen. 1968. Bd. 71, H. 5. P. 517–524.
2. **Richards F.** The Lebesque constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, № 2. P. 83–92.
3. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
4. **Tzimbalario J.** Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, № 2. P. 441–448.
5. **Morsche H.G. ter** On the Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, № 3. C. 232–246.
6. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
7. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Нормы в L периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 108–117.
8. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
9. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.
10. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
11. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, № 4. P. 294–325.
12. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Локальные экспоненциальные сплайны с произвольными узлами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 258–263.
13. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
14. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
15. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.

16. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Формосохранение при аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами произвольного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 291–299.
17. **Корнейчук Н.П.** О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журнал. 1982. Т. 34, № 5. С. 617–621.

Стрелкова Елена Валерьевна Поступила 12.08.2014
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАХВАТА В ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АВТОРЕЗОНАНС[1]

О. А. Султанов

Рассматривается математическая модель, описывающая начальный этап захвата в параметрический авторезонанс в нелинейных колебательных системах. Резонансу соответствуют решения с неограниченно растущей энергией. Исследуется устойчивость таких решений относительно постоянно действующих возмущений на асимптотически большом интервале времени. Описывается класс допустимых возмущений, при которых имеет место захват в параметрический авторезонанс.

Ключевые слова: параметрический резонанс, нелинейные колебания, возмущения, устойчивость.

O. A. Sultanov. Stability of capture into parametric autoresonance.

A mathematical model describing the initial stage of a capture into parametric autoresonance in nonlinear oscillating systems is considered. The resonance corresponds to solutions with unboundedly growing energy. The stability of such solutions with respect to persistent perturbations on an asymptotically large time interval is investigated. A class of admissible perturbations is described for which a capture into parametric autoresonance occurs.

Keywords: parametric resonance, nonlinear oscillations, perturbations, stability.

1. Введение

Явление захвата в авторезонанс связано с ростом энергии нелинейных колебаний, под действием малой медленно меняющейся накачки. Это явление было открыто в середине двадцатого века Векслером [1] и Макмилланом [2] в задачах по ускорению релятивистских частиц. Со временем было обнаружено, что авторезонансные эффекты присутствуют во многих прикладных задачах [3].

В последнее время явление авторезонанса активно исследуется на уровне математических моделей методами асимптотического анализа и численного счета [4]. При этом в реальных физических процессах неизбежно присутствуют шум и возмущения, которые трудно (в силу усложнения уравнений) учитывать при математическом моделировании. В то же время эти силы могут оказывать губительное влияние на процесс захвата в резонанс [5]. В данной работе предлагается решение проблемы устойчивости параметрического авторезонанса относительно постоянно действующих возмущений.

Явление параметрического авторезонанса обычно связывают с реакцией нелинейных колебательных систем на накачку их параметров [6]. При этом в линейных системах с периодической накачкой резонанс характеризуется потерей устойчивости положения равновесия и экспоненциальным ростом амплитуды колебаний [7, с. 209]. В нелинейных системах подобные возмущения приводят лишь к незначительным изменениям энергии [7, с. 219]. Оказывается, что значительный (степенной) рост амплитуды нелинейных колебаний возможен при медленном изменении частоты параметрического возмущения [8]. Подробное исследование проблемы захвата нелинейных осциллирующих систем в параметрический авторезонанс проводилось в [9; 10]. Подобные эффекты, наблюдаемые в нелинейных волнах, исследовались в [11; 12].

Отметим, что вопросам устойчивости авторезонанса посвящено несколько работ [13–15], где описаны достаточно жесткие ограничения на параметры шума, при которых сохраняется

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-31054) и частичной поддержке гранта Президента России для молодых российских ученых (МД-183.2014.1).

явление захвата. В настоящей работе предлагается качественно другой подход к исследованию устойчивости авторезонанса, который позволяет существенно расширить классы допустимых возмущений.

1.1. Уравнения главного параметрического резонанса

Основным объектом исследования является система двух дифференциальных уравнений, которая описывает начальный этап захвата в параметрический авторезонанс в нелинейных колебательных системах

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - \lambda\tau + f\cos\Phi, \qquad (1.1)$$

$$\tau > 0, \quad \lambda, f = \text{const} > 0.$$

Искомые функции $\mathcal{E}(\tau)$ и $\Phi(\tau)$ соответствуют медленно меняющимся энергии и сдвигу фазы быстрых гармонических колебаний. Решения с растущей энергией $\mathcal{E}(\tau) \approx \lambda\tau$ соответствуют параметрическому авторезонансу. Цель работы – исследовать устойчивость такого типа решений относительно постоянно действующих возмущений.

Система (1.1) появляется при исследовании нелинейных колебаний с малой параметрической накачкой [4; 8; 9]. В качестве примера рассмотрим уравнение нелинейного осциллятора с медленно меняющимся возмущением:

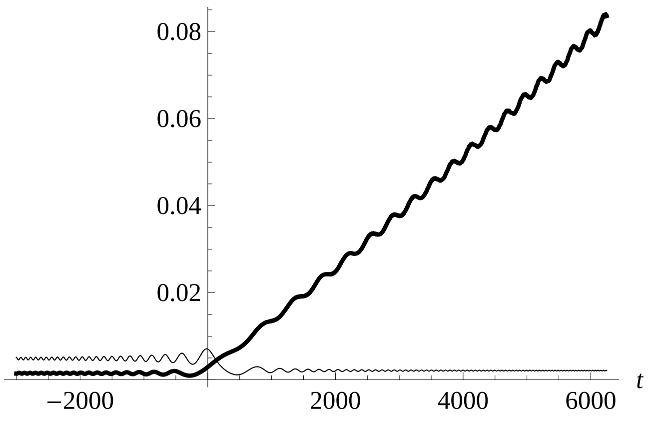
$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + \varepsilon\cos\phi)\,x + \gamma x^3 = 0, \qquad (1.2)$$

$$\phi(t;\varepsilon) = 2t + \alpha\varepsilon^2 t^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \alpha, \gamma = \text{const} > 0.$$

Численный анализ уравнения (1.2) с начальными данными $|x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ свидетельствует о наличии резонансных решений с растущей в среднем энергией (см. рисунок). Приближенное решение уравнения (1.2), близкое к резонансному, при $t \ll \varepsilon^{-2}$ может быть получено с помощью метода усреднения [7]. На этом пути строится асимптотика решения в виде

$$x(t;\varepsilon) = \sqrt{\kappa\varepsilon\mathcal{E}(\tau)}\cos\frac{1}{2}(\phi + \Phi(\tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \quad \tau = \frac{\varepsilon t}{2}, \quad \kappa = \frac{2}{3\gamma},$$

где пара медленно меняющихся функции $\mathcal{E}(\tau)$, $\Phi(\tau)$ является решением модельных уравнений (1.1) с параметрами $\lambda = 8\alpha$, $f = 1$.



Эволюция энергии уравнения (1.2), где $\gamma = 3/2$, $\varepsilon = 0.001$, $\alpha = 1/8$. Два графика соответствуют решениям разного типа: захваченное в авторезонанс и нерезонансное.

1.2. Авторезонансное решение

Явные формулы для точных решений модельной системы (1.1) не известны. Однако можно построить асимптотические решения на бесконечности по τ, которые соответствуют авторезонансу. Проще всего такие решения строятся в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами:

$$E_0(\tau) = \lambda\tau + \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{E}_j\, \tau^{-j/2}, \quad \Psi_0(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, \tau^{-j/2}, \quad \tau \to \infty. \tag{1.3}$$

Коэффициенты $\mathcal{E}_j$, $\psi_j = \text{const}$ определяются из рекуррентных формул, которые выписываются после подстановки рядов в уравнения и приравнивания выражений при одинаковых степенях τ. На этом пути определяются два решения, отличия в которых связаны с выбором одного из двух (по модулю 2π) корней уравнения $\sin\psi_0 = 0$. Существование решений $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ при $\tau \geq \tau_0$ ($\tau_0 = \text{const} > 0$), которые имеют асимптотику (1.3) при $\tau \to \infty$, следует из [16]. Из [17, с. 16] следует, что эти решения можно продолжить на всю ось $\tau \in \mathbb{R}$. Вопросы обоснования асимптотик решений для похожих уравнений изучались в [18]. Устойчивость таких решений обсуждается в настоящей работе.

Заметим, что у системы (1.1) существуют также решения с ограниченной энергией [19], которые не имеют отношения к явлению авторезонанса и здесь не рассматриваются.

1.3. Возмущенные уравнения

Для исследования устойчивости авторезонанса наряду с системой (1.1) рассматриваются возмущенные уравнения в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = (1+\mu\xi)\mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - \lambda\tau + \mu\zeta + (f+\mu\eta)\cos\Phi. \tag{1.4}$$

Здесь функции $\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)$, $\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)$, $\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)$ вместе с коэффициентом $\mu \in \mathbb{R}$ соответствуют постоянно действующим возмущениям. Параметр μ позволяет контролировать величину возмущения [20]. Будем считать, что $|\mu| \ll 1$. Это требование соответствует предположению малости возмущений. Задача устойчивости заключается в описании классов возмущений, при которых в системе (1.4) будут наблюдаться решения, чья энергия растет так же, как (1.3).

Примером исходной задачи (до усреднения), которая приводит к системе (1.4), является уравнение нелинейного осциллятора с возмущенной накачкой

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \bigl\{1 + \varepsilon(1+\mu a)\cos(\phi + \mu\varphi)\bigr\}\, x + \gamma x^3 = 0. \tag{1.5}$$

Роль возмущения здесь играют функции $a(x,\dot{x},t;\varepsilon)$, $\varphi(x,\dot{x},t;\varepsilon)$. В случае, когда возмущение зависит только от времени, связь между функциями $a(t;\varepsilon)$, $\varphi(t;\varepsilon)$ и возмущениями $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ усредненных уравнений (1.4) описывается формулами

$$\xi(\tau) = a(t;\varepsilon), \quad \eta(\tau) = a(t;\varepsilon), \quad \zeta(\tau) = k\,\partial_t\varphi(t;\varepsilon)\varepsilon^{-1}, \quad t = 2\tau\varepsilon^{-1}, \tag{1.6}$$

где k — некоторая константа, не зависящая от μ и ε.

В данной работе предлагается исследовать устойчивость авторезонанса с помощью второго метода Ляпунова. Для этого в первой части работы описывается конструкция функции Ляпунова для невозмущенной системы (1.1) и попутно исследуется устойчивость авторезонанса относительно начальных возмущений. Затем, во второй части, построенная функция используется при исследовании возмущенных уравнений и выводе ограничений на постоянно действующие возмущения.

2. Возмущения начальных данных

В данном разделе приводятся предварительные результаты, которые касаются устойчивости решений (1.3) относительно малых возмущений начальных данных, т. е. данных задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1).

Система (1.1) имеет пару решений с асимптотикой (1.3), отличие в которых связано с выбором корня уравнения $\sin\psi_0 = 0$. Решение с $\psi_0 = 0$ оказывается неустойчивым. Этот факт следует из анализа собственных значений линеаризованной системы.

Для другого решения с $\psi_0 = \pi$ собственные числа линеаризованной системы являются чисто мнимыми. Следовательно, при анализе устойчивости необходимо привлекать нелинейные члены уравнений. Этот случай будет исследоваться с помощью второго метода Ляпунова.

Уточним асимптотику решения (1.3) с $\psi_0 = \pi$:

$$E_0(\tau) = \lambda\tau + f + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad \Psi_0(\tau) = \pi - \tau^{-1} + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad \tau \to \infty. \tag{2.1}$$

Сформулируем определение устойчивости, которое будет использоваться в данном разделе.

О п р е д е л е н и е 1. Решение $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ системы (1.1) устойчиво, если существует $\tau_0 > 0$ такое, что $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta_\epsilon > 0$:

$$\forall\,\varrho_0, \phi_0 : \ |\varrho_0 - E_0(\tau_0)| + |\phi_0 - \Psi_0(\tau_0)| \le \delta_\epsilon,$$

решение $\mathcal{E}(\tau)$, $\Phi(\tau)$ системы (1.1) с начальными данными $\mathcal{E}(\tau_0) = \varrho_0$, $\Phi(\tau_0) = \phi_0$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{E}(\tau) - E_0(\tau)|\tau^{-1/2} + |\Phi(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon \quad \forall\,\tau > \tau_0.$$

Отличие приведенного определения устойчивости от классического состоит в наличии множителя $\tau^{-1/2}$ в оценке возмущенных решений. Присутствие этого множителя объясняется спецификой поставленной задачи об устойчивости авторезонанса. Действительно, поскольку авторезонансу соответствует решение с растущей энергией $\mathcal{E}(\tau) \approx \lambda\tau$, то разумно требовать сохранения скорости роста возмущенной энергии только в главном члене асимптотики. Таким образом, для энергии возмущенных решений допускается поведение $\mathcal{E}(\tau) = \lambda\tau[1 + \mathcal{O}(\tau^{-1/2})]$ при $\tau \to \infty$. Существование решений системы (1.1) с такой асимптотикой на бесконечности следует из [4].

Заметим, что такие слабые требования гарантирует только Ψ-устойчивость (см., например, [21, с. 16]) решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$. Устойчивости по обеим переменным в обычном смысле может и не быть. Зато введенное нами определение в дальнейшем позволит найти более слабые ограничения на параметры возмущений, при которых будет иметь место явление захвата в авторезонанс.

Теорема 1. *Если в системе* (1.1) *коэффициент* $f > 1/2$, *то решение* $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (2.1) *устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В системе (1.1) делается замена переменных при $\tau \ge 0$:

$$\mathcal{E} = E_0(\tau) + (\lambda\tau)^{1/2}\,E, \quad \Phi = \Psi_0(\tau) + \Psi, \quad T = \frac{2\sqrt{\lambda}}{3}\,\tau^{3/2}, \tag{2.2}$$

и для новых функций $E(T)$, $\Psi(T)$ исследуется устойчивость положения равновесия $(0;0)$. В новых переменных уравнения (1.1) принимают следующий вид:

$$\frac{dE}{dT} = -\partial_\Psi H(E,\Psi,T), \quad \frac{d\Psi}{dT} = \partial_E H(E,\Psi,T) + G(E,\Psi,T). \tag{2.3}$$

Здесь гамильтониан $H(E,\Psi,T)$ и негамильтонова компонента $G(E,\Psi,T)$ имеют вид

$$H(E,\Psi,T) = \frac{E^2}{2} + \nu^2 E_0\big(\cos(\Psi+\Psi_0) - \cos\Psi_0 + \Psi\sin\Psi_0\big)T^{-2/3}$$

$$+\nu E\big(\cos(\Psi+\Psi_0)-\cos\Psi_0\big)T^{-1/3}+\frac{E\Psi}{3}T^{-1}; \tag{2.4}$$

$$G(E,\Psi,T)=\nu(f-1)\big(\cos(\Psi+\Psi_0)-\cos\Psi_0\big)T^{-1/3}-\frac{\Psi}{3}T^{-1}, \quad \nu=\big(\frac{2}{3\lambda}\big)^{1/3}. \tag{2.5}$$

Для систем вида (2.3) эффективно строится функция Ляпунова [22], конструкция которой опирается на асимптотику гамильтониана $H(E,\Psi,T)$ и добавки $G(E,\Psi,T)$ при $T\to\infty$ и в окрестности равновесия при $\rho=\sqrt{E^2+\Psi^2}\to 0$.

В гамильтониане можно выделить положительно определенную квадратичную форму в качестве главного члена асимптотики:

$$H=\frac{E^2}{2}+\frac{\Psi^2}{2}+\mathcal{O}(\rho^3)+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-1/3}), \quad \rho\to 0, \quad T\to\infty.$$

Заметим, что приводимые здесь и ниже асимптотические оценки вида $\mathcal{O}(\rho^n)$ или $\mathcal{O}(T^{-m})$ $(n,m=\text{const}>0)$ являются равномерными по (E,Ψ,T) в области

$$\mathcal{D}(\rho_*,T_*)=\{(E,\Psi,T)\colon \rho<\rho_*,\, T>T_*\}, \quad \rho_*,T_*=\text{const}>0.$$

Частные производные гамильтониана $H(E,\Psi,T)$ имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}
\partial_E H &= E+\nu(1-\cos\Psi)T^{-1/3}+\frac{1}{3}(\Psi-2\sin\Psi)T^{-1}+\mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(T^{-5/3}),\\
\partial_\Psi H &= \sin\Psi+\nu E\sin\Psi\, T^{-1/3}+\nu^2\big[f\sin\Psi+\lambda(1-\cos\Psi)\big]T^{-2/3}\\
&\quad +\frac{E}{3}(1-2\cos\Psi)T^{-1}+\mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(T^{-4/3}),\\
\partial_T H &= \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(T^{-4/3})+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-5/3}).
\end{aligned}$$

Функция $G(E,\Psi,T)$ стремится к нулю при $T\to\infty$:

$$G=\alpha(1-\cos\Psi)T^{-1/3}-\beta[\Psi+\mathcal{O}(\rho^3)]T^{-1}+O(\rho)O(T^{-4/3}), \quad \alpha=\nu(f-1), \quad \beta=\frac{2f-1}{3}>0.$$

Основу конструкции функции Ляпунова составляет гамильтониан, который возмущается добавками, убывающими при $T\to\infty$ с разными скоростями:

$$V(E,\Psi,T)=H(E,\Psi,T)+\sum_{k=1}^{3}V_k(E,\Psi)\,T^{-k/3}, \tag{2.6}$$

$$V_1=\alpha\Big[E(1-\cos\Psi)+\frac{E^3}{3}\Big], \quad V_2=-\frac{\alpha\nu}{2}\Big[f(1-\cos\Psi)^2+\frac{E^4}{2}\Big], \quad V_3=-\frac{\beta}{2}E\Psi.$$

Производная от этих функций, вычисленная в силу системы (2.3), имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dT}\Big|_{(2.3)} &= \frac{\partial H}{\partial T}+\frac{\partial H}{\partial\Psi}G=\alpha\sin\Psi(1-\cos\Psi)T^{-1/3}\\
&\quad +\alpha\nu E\sin\Psi(1-\cos\Psi)T^{-2/3}-\beta[\Psi^2+\mathcal{O}(\rho^4)]T^{-1}+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}),\\
\frac{dV_1}{dT}\Big|_{(2.3)} &= -\alpha\sin\Psi(1-\cos\Psi)T^{-1/3}\\
&\quad +\alpha\nu E\sin\Psi\Big[(f-1)(1-\cos\Psi)-E^2\Big]T^{-2/3}+\mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(T^{-1}),\\
\frac{dV_2}{dT}\Big|_{(2.3)} &= -\alpha\nu E\sin\Psi\Big[f(1-\cos\Psi)-E^2\Big]T^{-1/3}+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}),\\
\frac{dV_3}{dT}\Big|_{(2.3)} &= -\frac{\beta}{2}[E^2-\Psi^2+\mathcal{O}(\rho^3)]T^{-1}+\mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает выражение для производной функции $V(E,\Psi,T)$, которая оказывается знакопостоянной в главном члене асимптотики:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} = -\frac{\beta}{2}(E^2+\Psi^2)T^{-1} + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(T^{-1}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(T^{-4/3}).$$

Так как остатки в последнем выражении могут быть сделаны сколь угодно малыми, то для любого $\sigma > 0$ существуют константы $\rho_1 > 0$, $T_1 > 0$ такие, что в окрестности $\mathcal{D}(\rho_1, T_1)$ справедлива оценка сверху

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} \le -\frac{(\beta-\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2)T^{-1}, \quad \beta-\sigma>0.$$

Аналогично получаются оценки и для самой функции $V(E,\Psi,T)$, а именно для любого $\sigma > 0$ существуют такие $\rho_2 > 0$, $T_2 > 0$, что

$$\frac{(1-\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2) \le V(E,\Psi,T) \le \frac{(1+\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2)$$

при $(E,\Psi,t)\in\mathcal{D}(\rho_2,T_2)$. Выберем $\sigma\in(0,\min\{1,\beta\})$, тогда в области $\mathcal{D}(\rho_0,T_0)$, $\rho_0=\min\{\rho_1,\rho_2\}$, $T_0=\max\{T_1,T_2\}$ имеет место оценка

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} \le -\beta_0 V T^{-1} \le 0, \quad \beta_0 = \frac{\beta-\sigma}{1+\sigma} > 0. \tag{2.7}$$

Зафиксируем параметр $\epsilon > 0$ ($\epsilon < \rho_0$) и определим $\delta_\epsilon = \epsilon\sqrt{1-\sigma}/(2\sqrt{1+\sigma})$. Тогда для функции Ляпунова выполняются неравенства

$$\sup_{\rho\le\delta_\epsilon, T>T_0} V(E,\Psi,T) \le (1+\sigma)\frac{\delta_\epsilon^2}{2} < (1-\sigma)\frac{\epsilon^2}{2} \le \inf_{\rho=\epsilon, T>T_0} V(E,\Psi,T). \tag{2.8}$$

Отсюда в силу отрицательности производной функции Ляпунова следует, что всякая траектория $E(T)$, $\Psi(T)$ с начальными данными $[E^2(T_0)+\Psi^2(T_0)]^{1/2} \le \delta_\epsilon$ не покинет ϵ-окрестность положения равновесия $(0;0)$ системы (2.3) при $T > T_0$:

$$[E^2(T)+\Psi^2(T)]^{1/2} < \epsilon, \quad T > T_0.$$

С помощью замены переменных (2.2) выводится оценка для решений системы (1.1)

$$|\mathcal{E}(\tau)-E_0(\tau)|(\lambda\tau)^{-1/2} + |\Phi(\tau)-\Psi_0(\tau)| < \epsilon, \quad \tau > \tau_0.$$

Теорема доказана. □

Заметим, что в теореме 1 доказана устойчивость решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ в окрестности бесконечности при $\tau > \tau_0$. Устойчивость решения на конечном промежутке $\tau\in(0;\tau_0]$ следует из теоремы о непрерывности решения задачи Коши относительно начальных данных [17, с. 22–23].

Достаточные условия, полученные в теореме 1, являются почти необходимыми, что видно из следующего утверждения.

Теорема 2. *Если в системе* (1.1) *коэффициент* $f < 1/2$, *то решение* $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (2.1) *неустойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично с помощью построенной функции Ляпунова (2.6). При этом для производной функции Ляпунова будет справедлива оценка снизу в области $\mathcal{D}(\rho_0, T_0)$:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)} \ge \frac{(|\beta|-\sigma)}{2}(E^2+\Psi^2)T^{-1}, \quad |\beta|-\sigma>0.$$

Из последней оценки и неравенства (2.8) в силу теоремы Ляпунова [23, с. 196] следует неустойчивость тривиального решения системы (2.3). Отсюда с учетом замены (2.2) вытекает неустойчивость решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ с асимптотикой (2.1). □

3. Постоянно действующие возмущения

В данном разделе исследуется устойчивость захвата в авторезонанс относительно постоянно действующих возмущений. Наряду с уравнениями (1.1) рассматривается возмущенная система (1.4)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = (1+\mu\xi)\mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - \lambda\tau + \mu\zeta + (f+\mu\eta)\cos\Phi.$$

Задача заключается в определении класса возмущений $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}$, при котором система (1.4) имеет авторезонансные решения с растущей энергией. В данном разделе предлагается исследовать устойчивость относительно постоянно действующих возмущений на конечном, но асимптотически большом интервале времени $0\le\tau\le\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, где $|\mu|\ll 1$ — параметр возмущений, $\varkappa=\mathrm{const}>0$. Такой подход основан на том, что исследуемая математическая модель (1.4) остается пригодной на конечном временном интервале [4]: при $0\le\tau\ll\varepsilon^{-1}$, где $0<\varepsilon\ll 1$ — малый параметр накачки в исходной задаче до усреднения (см. (1.2)). При этом на далеких временах явление авторезонанса описывается другими уравнениями [4]. Предлагаемый подход позволяет значительно расширить допустимый класс возмущений $\mathcal{P}$. Заметим, что похожая постановка задачи об устойчивости на асимптотически большом интервале времени рассматривалась в [20, с. 76].

Сформулируем определение устойчивости.

О п р е д е л е н и е 2. Решение $E_0(\tau),\Psi_0(\tau)$ системы (1.1) устойчиво относительно постоянно действующих возмущений $\mathcal{P}$ на асимптотически большом промежутке времени, если существуют $\tau_0,\varkappa>0$ такие, что $\forall\,\epsilon>0\ \exists\,\delta_\epsilon,\Delta_\epsilon>0$:

$$\forall\varrho_0,\phi_0: \quad |\varrho_0 - E_0(\tau_0)| + |\phi_0 - \Psi_0(\tau_0)| \le \delta_\epsilon,$$

$\forall\,|\mu|<\Delta_\epsilon$, $\forall\,(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}$ решение $\mathcal{E}_\mu(\tau)$, $\Phi_\mu(\tau)$ возмущенных уравнений (1.4) с начальными данными $\mathcal{E}_\mu(\tau_0)=\varrho_0$, $\Phi_\mu(\tau_0)=\phi_0$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{E}_\mu(\tau) - E_0(\tau)|\tau^{-1/2} + |\Phi_\mu(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon$$

при $0<\tau-\tau_0\le\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$.

Пусть a,b,c — некоторые числовые параметры. Определим класс возмущений $\mathcal{P}_{a,b,c}$ как множество функций (ξ,η,ζ), для которых конечна следующая величина:

$$\sup_{(\mathcal{E},\Phi)\in\mathbb{R}^2,\tau>0} |\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-a} + |\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-b} + |\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-c} < \infty.$$

Для каждого значения $h>0$ определим также $\mathcal{P}^h_{a,b,c}$ как подмножество функций $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}_{a,b,c}$, для которых выполняется оценка

$$\sup_{(\mathcal{E},\Phi)\in\mathbb{R}^2,\tau>0} |\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-a} + |\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-b} + |\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-c} \le h.$$

Требование глобальной разрешимости задачи Коши для системы (1.4) налагает дополнительные ограничения на возмущения. Такие условия считаются хорошо известными [17, с. 16].

Исследование устойчивости решения $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $(0;0)$ системы (2.3) относительно постоянно действующих возмущений. Для этого в возмущенных уравнениях (1.4) делается замена переменных (2.2), после чего система принимает вид

$$\frac{dE}{dT} = -\partial_\Psi H + \mu P, \quad \frac{d\Psi}{dT} = \partial_E H + G + \mu Q. \tag{3.1}$$

Гамильтониан $H(E,\Psi,T)$ и функция $G(E,\Psi,T)$ определяются формулами (2.4) и (2.5). Постоянно действующие возмущения системы (2.3) описываются функциями $P(E,\Psi,T)$ и $Q(E,\Psi,T)$:

$$P=\frac{\hat{\xi}}{\lambda\tau}(E_0+\sqrt{\lambda\tau}E)\sin(\Psi+\Psi_0),\quad Q=\frac{1}{\sqrt{\lambda\tau}}(\hat{\eta}\cos(\Psi+\Psi_0)+\hat{\zeta}). \tag{3.2}$$

Функции $\hat{\xi}(E,\Psi,T)$, $\hat{\eta}(E,\Psi,T)$, $\hat{\zeta}(E,\Psi,T)$ появляются в результате подстановки (2.2) в $\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)$, $\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)$, $\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)$ соответственно, например

$$\hat{\xi}(E,\Psi,T)=\xi(E_0(\tau)+\sqrt{\lambda\tau}E,\Psi_0(\tau)+\Psi,\tau),\quad \tau=\nu^2\lambda^{1/3}T^{2/3}.$$

Теорема 3. *Пусть в системе* (1.1) *коэффициент* $f>1/2$. *Тогда* $\forall\, h>0$, $a>-3/2$, $b>-1$, $c>-1$ *и* $\varkappa\in(0;\varkappa_0)$ *решение* $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (2.1) *устойчиво относительно постоянно действующих возмущений* $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathcal{P}^h_{a,b,c}$:

$$\sup_{(\mathcal{E},\Phi)\in\mathbb{R}^2,\tau>0}|\xi(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-a}+|\eta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-b}+|\zeta(\mathcal{E},\Phi,\tau)|\tau^{-c}\le h$$

на асимптотически большом промежутке времени $0<\tau\le\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, *где* $\varkappa_0=2/(2\vartheta+3)$, $\vartheta=\max\{a,b-1/2,c-1/2\}$.

Доказательство утверждения проводится в два этапа. Сначала исследуется устойчивость положения равновесия $E(T)\equiv0$, $\Psi(T)\equiv0$ системы (2.3) относительно постоянно действующих возмущений $P(E,\Psi,T)$, $Q(E,\Psi,T)$. Затем на основе замены (2.2) делается вывод об устойчивости решения с растущей энергией $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$.

Зафиксируем $h>0$, $a>-3/2$, $b>-1$, $c>-1$. При исследовании уравнений (3.1) воспользуемся функцией Ляпунова (2.6), которая была построена в теореме 1. Вычислим полную производную функции $V(E,\Psi,T)$ в силу возмущенной системы (3.1):

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(3.1)}=\frac{dV}{dT}\Big|_{(2.3)}+\mu(P\,\partial_E V+Q\,\partial_\Psi V).$$

Для первого слагаемого в правой части выражения справедлива оценка (2.7) в области $\mathcal{D}(\rho_0,T_0)$ с константами $0<\sigma<1$, $\beta_0>0$. Частные производные $\partial_E V$, $\partial_\Psi V$ ограничены в этой области и удовлетворяют оценкам $|\partial_E V|\le\ell$, $|\partial_\Psi V|\le\ell$. Из (3.2) и определения класса $\mathcal{P}^h_{a,b,c}$ следуют оценки для функций P и Q :

$$|P(E,\Psi,T)|\le M_hT^{2\vartheta/3},\quad |Q(E,\Psi,T)|\le M_hT^{2\vartheta/3},\quad (E,\Psi,T)\in\mathcal{D}(\rho_0,T_0),$$

с константой $M_h>0$ и показателем $\vartheta>-3/2$. Отсюда и из (2.7) вытекает оценка для полной производной функции $V(E,\Psi,T)$:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(3.1)}\le-\beta_0T^{-1}\Big[V-\frac{2|\mu|\ell M_h}{\beta_0}T^{1+2\vartheta/3}\Big],\quad (E,\Psi,T)\in\mathcal{D}(\rho_0,T_0).$$

Зафиксируем $\epsilon\in(0;\rho_0)$, $0<\kappa<3/(2\vartheta+3)$ и определим параметры

$$\delta_\epsilon=\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}},\quad \Delta_\epsilon=(2T_0)^{-(3+2\vartheta)/\kappa_0}\Big[\frac{\beta_0(1-\sigma)\delta_\epsilon^2}{8\ell M_h}\Big]^{3/\kappa_0},\quad \kappa_0=3-(2\vartheta+3)\kappa>0.$$

Тогда при $|\mu|<\Delta_\epsilon$, $\delta_\epsilon<\rho<\rho_0$ на асимптотически большом интервале времени $0<T-T_0\le T_0|\mu|^{-\kappa}$ полная производная функции Ляпунова оказывается отрицательной:

$$\frac{dV}{dT}\Big|_{(3.1)}\le-\beta_0T^{-1}\Big[V-(1-\sigma)\frac{\delta_\epsilon^2}{4}\Big]<0. \tag{3.3}$$

Заметим, что для функции Ляпунова при выбранном δ_ϵ справедливы неравенства (2.8). Отсюда и из отрицательности полной производной функции $V(E,\Psi,T)$ на траекториях системы (3.1) следует, что всякое решение системы (3.1) с начальными данными $[\mathcal{E}_\mu^2(T_0)+\Phi_\mu^2(T_0)]^{1/2} = \delta_\epsilon$ остается в ϵ-окрестности нуля, т. е. $[\mathcal{E}_\mu^2(T)+\Phi_\mu^2(T)]^{1/2} < \epsilon$ при $0 < T - T_0 \le T_0|\mu|^{-\kappa}$.

В круге $\rho < \delta_\epsilon$ отрицательность полной производной функции $V(E,\Phi,T)$ не гарантируется. Поэтому либо траектории системы (3.1) с начальными данными $[\mathcal{E}_\mu^2(T_0)+\Phi_\mu^2(T_0)]^{1/2} < \delta_\epsilon$ остаются ограниченными $[E_\mu^2(T)+\Phi_\mu^2(T)]^{1/2} < \delta_\epsilon < \epsilon$ на интервале $0 < T - T_0 \le T_0|\mu|^{-\kappa}$, либо существуют T_ϵ: $0 < T_\epsilon - T_0 < T_0|\mu|^{-\kappa}$ и $[\mathcal{E}_\mu^2(T_\epsilon)+\Phi_\mu^2(T_\epsilon)]^{1/2} = \delta_\epsilon$. В последнем случае из оценок (3.3) и (2.8) следует, что $[\mathcal{E}_\mu^2(T)+\Phi_\mu^2(T)]^{1/2} < \epsilon$ при $T \in [T_\epsilon, T_0+T_0|\mu|^{-\kappa}]$. Следовательно, тривиальное решение системы (2.3) устойчиво при постоянно действующих возмущениях при $0 < T - T_0 \le T_0|\mu|^{-\kappa}$.

С помощью замены переменных (2.2) выводятся оценки для решений исходной системы (1.4):

$$|\mathcal{E}_\mu(\tau) - E_0(\tau)|(\lambda\tau)^{-1/2} + |\Phi_\mu(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon$$

при $0 < \tau - \tau_0 \le \mathcal{O}(|\mu|^{-2\kappa/3})$, $\kappa \in (0; 3\varkappa_0/2)$. Устойчивость на конечном промежутке $\tau \in (0;\tau_0]$ следует из теоремы о непрерывности решения задачи Коши относительно параметров уравнений [17, с. 23]. Следовательно, $\forall\, h > 0$, $a > -3/2$, $b > -1$, $c > -1$ и $\varkappa \in (0;\varkappa_0)$ решение $E_0(\tau), \Psi_0(\tau)$ системы (1.1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях на асимптотически большом интервале времени $0 < \tau \le \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, равномерно по $(\xi,\eta,\zeta) \in \mathcal{P}^h_{a,b,c}$. □

З а м е ч а н и е. Доказанное утверждение содержит описание класса допустимых возмущений, при котором имеет место устойчивость явления авторезонанса на асимптотически большом интервале времени, причем масштаб временного интервала $\varkappa$ связан с параметрами a, b, c класса $\mathcal{P}_{a,b,c}$, отвечающими за скорость роста возмущений. В предельном случае, когда $a = -3/2$, $b = -1$, $c = -1$, то $\vartheta = -3/2$ и соответственно $\varkappa$ может принимать любые значения из интервала $(0;\infty)$, утверждение теоремы 3 согласуется с известными результатами об устойчивости параметрического авторезонанса на бесконечном промежутке [14].

П р и м е р. В качестве примера рассмотрим частный случай возмущений системы (1.1), а именно $\xi(\tau) \equiv 1$, $\eta(\tau) \equiv \tau$, $\zeta(\tau) \equiv \tau$. Тогда возмущенная система (1.4) примет вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = (1+\mu)\mathcal{E}\sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \mathcal{E} - (\lambda+\mu)\tau + (f+\mu\tau)\cos\Phi, \quad |\mu| \ll 1.$$

Такие возмущения содержатся в классе $\mathcal{P}^1_{0,1,1}$: $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. Из теоремы 3 следует, что $\forall \varkappa \in (0;1/2)$ явление авторезонанса устойчиво относительно постоянно действующих возмущений на асимптотически большом интервале $0 < \tau \le \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$.

С другой стороны, в данном случае возмущения имеют довольно простой вид и можно построить асимптотику возмущенных резонансных решений на бесконечности по τ. Одно из решений будет иметь асимптотику вида (1.3):

$$\mathcal{E}_\mu(\tau) = (\lambda+2\mu)\tau + f + \mathcal{O}(\tau^{-1}), \quad \Phi_\mu(\tau) = \pi - \frac{1}{1+\mu}\tau^{-1} + \mathcal{O}(\tau^{-2}), \quad \tau \to \infty.$$

Существование решения с такой асимптотикой следует из [16]. Оценим разность возмущенного $\mathcal{E}_\mu(\tau)$, $\Phi_\mu(\tau)$ и невозмущенного $E_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ решений при $\tau \to \infty$:

$$|E_0(\tau) - \mathcal{E}_\mu(\tau)|\tau^{-1/2} = 2|\mu|\tau^{1/2}[1+\mathcal{O}(\tau^{-2})], \quad |\Psi_0(\tau) - \Phi_\mu(\tau)| = |\mu|\tau^{-1}[(1+\mu)^{-1} + \mathcal{O}(\tau^{-1})].$$

Из оценки для разности энергий видно, что устойчивости на бесконечном промежутке нет: при $\tau \ge \mu^{-2}$ возмущенное решение будет отличаться от невозмущенного на величину порядка единицы. Однако при $\tau \le \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, $\varkappa \in (0;1/2)$ имеет место оценка

$$|E_0(\tau) - \mathcal{E}_\mu(\tau)|\tau^{-1/2} + |\Psi_0(\tau) - \Phi_\mu(\tau)| \le \mathcal{O}(|\mu|^{1-\varkappa/2}),$$

которая указывает на устойчивость на асимптотически большом промежутке. Похожие оценки имеют место и для других резонансных решений возмущенной системы.

В случае, когда функции возмущений имеют более сложный вид, анализ устойчивости на основе асимптотики для возмущенных решений зачастую оказывается недоступным. Это связано с тем, что построение и обоснование асимптотик в некоторых случаях может вызывать значительные трудности. В таких ситуациях теорема 3 дает эффективный инструмент для анализа устойчивости.

4. Заключение

Исследована устойчивость параметрического авторезонанса при постоянно действующих возмущениях. Описаны классы детерминированных возмущений, при наличии которых имеет место захват в авторезонанс. Случайные возмущения авторезонанса исследовались в [15]. Эти результаты могут быть расширены с помощью подходов, развитых в настоящей работе. Открытым остается вопрос о влиянии белого шума на параметрический авторезонанс.

Полученные результаты для модельных уравнений (1.1) достаточно просто переносятся на нелинейные осциллирующие системы с параметрической накачкой вида (1.5). В частности, из теоремы 3 и формул (1.6) следует, что если в уравнении (1.5)

$$|a(t;\varepsilon)| \le \sqrt{\varepsilon t}, \quad |\varphi(t;\varepsilon)| \le \varepsilon^2 t^2, \quad t \ge 0,$$

то в соответствующей усредненной системе (1.4) имеет место захват в резонанс при $\tau \ll \mu^{-1/2}$. Установим связь между ε — малым параметром накачки в исходной задаче и μ — параметром возмущения так, чтобы область пригодности модели (1.4) содержалась в интервале устойчивости: $\varepsilon^{-2} < \varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}$. Положим $\mu = \varepsilon^{5/2}$, тогда из теоремы 3 следует, что в нелинейной системе (1.5), где $\mu a(t;\varepsilon) = \varepsilon^3 t^{1/2} a_0(t;\varepsilon)$, $\mu\varphi(t;\varepsilon) = \varepsilon^{9/2} t^2 \varphi_0(t;\varepsilon)$, $a_0(t;\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$, $\varphi_0(t;\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ сохраняется захват в параметрический авторезонанс.

Автор благодарит Л.А. Калякина и О.М. Киселева за полезные обсуждения и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Векслер В.И.** Новый метод ускорения релятивистских частиц // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43, № 8. С. 346–348.
2. **McMillan E.M.** The synchrotron–a proposed high energy particle accelerator // Phys. Rev. 1945. Vol. 68. P. 143–144
3. **Fajans J., Friedland L.** Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // Am. J. Phys. 2001. Vol. 69, no. 10. P. 1096–1102.
4. **Kalyakin L.A.** Asymptotic analysis of autoresonance models // Russian Math. Surveys. 2008. Vol. 63, no. 5. P. 791–857.
5. **Коломенский А.А., Лебедев А.Н.** Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.
6. **Горелик Г.С.** Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. М.: Физматлит, 2007. 565 с.
7. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 501 с.
8. **Khain E., Meerson B.** Parametric autoresonance // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, iss. 3. P. 036619.
9. **Kiselev O.M., Glebov S.G.** The capture into parametric autoresonance // Nonlinear Dynam. 2007. Vol. 48, no. 1–2. P. 217–230.
10. Autoresonance parametric excitation of localized oscillations of magnetization in a ferromagnet by an AC field of a variable frequency / L.A. Kalyakin, M.A. Shamsutdinov, R.N. Garifullin, R.K. Salimov // The Physics of Metals and Metallography. 2007. Vol. 104, no. 2. P. 107–120.

11. **Assaf M., Meerson B.** Parametric autoresonance of Faraday waves // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, iss. 1. P. 016310.
12. **Glebov S., Kiselev O., Tarkhanov N.** Weakly nonlinear dispersive waves under parametric resonance perturbation // Studies in Appl. Math. 2009. Vol. 124. P. 19–37.
13. **Kalyakin L.A., Sultanov O.A.** Stability of autoresonance models // Differ. Equ. 2013. Vol. 49, no. 3. P. 267–281.
14. **Султанов О.А.** Устойчивость моделей авторезонанса относительно возмущений, ограниченных в среднем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 274–283.
15. **Sultanov O.A.** Stability of autoresonance models subject to random perturbations for systems of nonlinear oscillation equations // Comput. Math. Math. Phys. 2014. Vol. 54, no. 1. P. 59–73.
16. **Кузнецов А.Н.** О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функц. анализ и его приложения. 1989. Т. 23, № 4. С. 63–74.
17. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал, 2004. 552 с.
18. **Kalyakin L.A.** Justification of asymptotic expansions for the principal resonance equations // Proc. Steklov Inst. Math. 2003. Suppl. 1. P. S108–S122.
19. **Garifullin R.N., Kalyakin L.A., Shamsutdinov M.A.** Autoresonance excitation of a breather in weak ferromagnetics // Comput. Math. Math. Phys. 2007. Vol. 47, no. 7. P. 1158–1170.
20. **Хапаев М.М.** Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая шк., 1988. 184 с.
21. **Румянцев В.В., Озиранер А.С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
22. **Султанов О.А.** Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым // Уфим. мат. журн. 2010. Т. 2, № 4. С. 88–98.
23. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 432 с.

Султанов Оскар Анварович
аспирант
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: oasultanov@gmail.com

Поступила 23.11.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.948

О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Е. В. Табаринцева

В работе рассмотрена задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения. Предложен способ построения методов приближенного решения данной нелинейной некорректно поставленной задачи, обобщающий предложенную А.Б. Бакушинским схему построения методов приближенного решения линейных некорректно поставленных задач. Получены двусторонние оценки погрешности рассмотренных методов через оценки погрешности соответствующих методов решения линейной задачи на стандартных классах корректности. Доказана оптимальность по порядку предложенных процедур.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, обратная задача, модуль непрерывности обратного оператора, метод приближенного решения, оценка погрешности.

E. V. Tabarintseva. An approach to solving an ill-posed problem for a nonlinear differential equation.

A reverse time problem is considered for a semilinear differential equation. We suggest an approach to construct approximate solving methods for the problem under study. The approach generalizes the scheme proposed by A.B. Bakushinskii for linear ill-posed problems. Two-sided error estimates for the proposed methods are obtained via the error estimates for the corresponding linear problem on standard correctness classes. Order optimality is proved for the considered algorithms.

Keywords: differential equation, inverse problem, modulus of continuity of the inverse operator, approximate method, error estimate.

Введение

В статье рассматривается задача с обратным временем для полулинейного дифференциально-операторного уравнения. Данная задача поставлена некорректно, поэтому основными при ее исследовании являются вопросы построения устойчивого приближенного решения и оценки погрешности приближенного решения. Для линейных некорректно поставленных задач в работах В.К. Иванова, В.Н. Страхова, их учеников и последователей (см., например, [1–4]) была создана теория и разработан аппарат для получения оценок погрешности методов приближенного решения на компактных множествах (классах корректности). В этой теории естественным образом вводятся понятия оптимального и оптимального по порядку метода приближенного решения.

Соответствующие понятия были введены и для нелинейных некорректно поставленных задач (см., например, [5; 6]). В работе [7] была предложена общая схема построения регуляризующих алгоритмов для линейных некорректно поставленных задач. Различные подходы к приближенному решению нелинейных некорректно поставленных задач предложены и исследованы в монографиях [8–10]. Однако практическое вычисление (или оценка) погрешности методов или модуля непрерывности обратного оператора было проведено только для конкретных некорректно поставленных задач. В [11] был введен класс полулинейных дифференциально-операторных уравнений с обратным временем, для которых удалось разработать технику получения оценок модуля непрерывности нелинейного оператора через модуль непрерывности соответствующего линейного оператора.

Настоящая работа продолжает эти исследования. С использованием подхода, развитого в [7] для линейных некорректно поставленных задач, предложена схема построения методов

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00117).

приближенного решения полулинейной обратной задачи. Получены двусторонние оценки погрешности построенных приближенных решений на стандартных классах корректности. Установлена оптимальность по порядку построенных процедур.

1. Задача с обратным временем для линейного дифференциально-операторного уравнения

Приведем известные результаты для линейного дифференциально-операторного уравнения. Пусть H — гильбертово пространство, A — линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H.

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\tau \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -Av; \quad t \in (\tau; T), \tag{1.1}$$

$$v(\tau) = \varphi_\tau, \qquad 0 < t_0 \le \tau < T,$$

удовлетворяет условию $v(T) = \chi$.

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение φ_δ^τ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Рассмотрим семейство функций $\Phi_\alpha(\mu)$, принимающих действительные значения при $\mu > 0$, кусочно-непрерывных на промежутке $\mu \in (0; \infty)$, $(0 < \alpha < \alpha_0)$. Будем предполагать также, что функции $\Phi_\alpha(\mu)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\sup\{|\Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)})| \colon \lambda \ge 0\} \le K_\alpha(\tau) < \infty$, где функция $K_\alpha(t)$ удовлетворяет условию $K_\alpha(\tau_1 + \tau_2) = K_\alpha(\tau_1) K_\alpha(\tau_2)$;

2) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)}) e^{-\lambda(T-\tau)} = 1$ при каждом $\lambda \ge 0$;

3) $\sup\{|\Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)}) e^{-\lambda(T-\tau)}| \colon \lambda \ge 0,\ 0 < \alpha < \alpha_0\} = c < \infty$.

Следуя работе [7], рассмотрим семейство операторов $R_\alpha^{T-\tau}$, действующих в пространстве H по правилу

$$R_\alpha^{T-\tau} = \Phi_\alpha(e^{-A(T-\tau)}). \tag{1.2}$$

В качестве приближенного решения линейной задачи с обратным временем будем рассматривать элемент

$$\varphi_\delta^\tau = R_\alpha^{T-\tau} \chi_\delta \tag{1.3}$$

при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

2. Задача с обратным временем для нелинейного дифференциально-операторного уравнения

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t)); \quad t \in (t_0; T), \tag{2.1}$$

$$u(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in H, \quad 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$. Здесь $f \colon [0; T] \times H \to H$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной u и условию Гельдера по переменной t, т. е. существуют постоянные $K > 0$, $L > 0$, $0 < \gamma < 1$ такие, что $\|f(u_1, t_1) - f(u_2, t_2)\|_H \le L\|u_1 - u_2\|_H + K|t_1 - t_2|^\gamma$ при всех $t \in [0; T]$, $u_1, u_2 \in H$.

Пусть $B : H \to H$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор такой, что множество

$$M = BS(0,r) = \{\varphi \in H \colon \|B^{-1}\varphi\| \le r\}$$

является классом корректности как для нелинейной обратной задачи, так и для соответствующей линейной задачи.

Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $\varphi \in H$ поставленной обратной задачи, принадлежащее множеству M.

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| \le \delta$. Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение φ_δ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Задача Коши (2.1) равносильна интегральному уравнению (см., например, [12])

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)} f(\tau, u(\tau))d\tau. \tag{2.2}$$

Рассмотрим величины:

$$\omega(M,\delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| \colon \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|\chi_1 - \chi_2\| \le \delta\}$$

— модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M,\delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| \colon \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|e^{A(T-t_0)}(\varphi_1 - \varphi_2)\| \le \delta\}$$

— модуль непрерывности для линейной обратной задачи.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [11, теорема]. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $\delta < \delta_0$ выполняются неравенства*

$$\hat{\omega}(M, e^{-LT}\delta) \le \omega(M,\delta) \le \hat{\omega}(M, e^{LTe^{LT}}\delta).$$

Пусть R_α^t — семейство линейных непрерывных самосопряженных операторов, определенных формулой (1.2).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u^\alpha(t) = R_\alpha^{T-t}\chi - \int\limits_{t}^{T} e^{A(T-\tau)} R_\alpha^{T-t} f(\tau, u^\alpha(\tau))d\tau \tag{2.3}$$

Выполняется следующее утверждение.

Утверждение. *Для любого элемента $\chi \in H$ интегральное уравнение* (2.3) *имеет решение в пространстве непрерывных функций $C([0;T];H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения может быть получено стандартным методом с применением принципа сжимающих отображений.

Обозначим через $u_\delta^\alpha(t)$ решение интегрального уравнения

$$u_\delta^\alpha(t) = R_\alpha^{T-t}\chi_\delta - \int\limits_{t}^{T} e^{A(T-\tau)} R_\alpha^{T-t} f(\tau, u_\delta^\alpha(\tau))d\tau. \tag{2.4}$$

В качестве приближенного решения нелинейной задачи с обратным временем будем рассматривать элемент

$$\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0), \tag{2.5}$$

где $u_\delta^\alpha(t)$ — решение интегрального уравнения (2.4) при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

Докажем следующие неравенства, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть* $u(t)$ *— решение интегрального уравнения* (2.2), $P(\tau,t) = e^{A(\tau-t)}G(t)$, *где* $G(t)$ *— положительно определенный самосопряженный оператор в* H *такой, что оператор* $P(\tau,t)$ *ограничен,* $\|P(\tau,t)\| \le B(\tau,t)$; *здесь функция* $B(\tau,t)$ *удовлетворяет условию*

$$B(\tau_1,t)B(\tau_2,t) = B(\tau_1+\tau_2,t) \quad (t_0 \le t \le \tau \le T),$$

функция $v(t)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$v(t) = P(T-t,t)u(T) - \int\limits_t^T P(\tau-t,t)f(\tau,v(\tau))d\tau. \tag{2.6}$$

Тогда выполняются неравенства

$$e^{-LTe^{LT}}\|P(T-t,t)u(T)\| \le \|v(t)\| \le e^{LT}\|P(T-t,t)u(T)\|, \tag{2.7}$$

$$e^{-LTe^{LT}}\|G(t)u(t)-u(t)\| \le \|v(t)-u(t)\| \le e^{LT}\|G(t)u(t)-u(t)\|. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенства (2.7). Пусть функция $v(t)$ удовлетворяет равенству (2.6.) Оценим $\|v(t)\|$ сверху. Рассмотрим функцию $z(t) = \dfrac{v(t)}{B(T-t,t)}$. Из (2.6) выводим, что функция $z(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|z(t)\| \le \frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T,t)} + L\int\limits_t^T \|z(\tau)\|d\tau. \tag{2.9}$$

Из неравенства (2.9) в силу леммы Гронуолла следует

$$\|z(t)\| \le e^{LT}\frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T-t,t)}$$

или

$$\|v(t)\| \le e^{LT}\|P(T-t,t)u(T)\|. \tag{2.10}$$

Оценим величину $\|v(t)\|$ снизу. Рассмотрим равенство

$$B(T-t,t)u(T) = v(t) + \int\limits_t^T P(\tau-t,t)(f(\tau,v(\tau)))d\tau. \tag{2.11}$$

Из равенства (2.11) с учетом (2.10) вытекает неравенство

$$\frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T-t,t)} \le \|z(t)\| + Le^{LT}\int\limits_t^T \frac{\|P(\tau-t,t)u(T)\|}{B(\tau-t,t)}d\tau. \tag{2.12}$$

Из неравенства (2.12) в силу леммы Гронуолла следует

$$\frac{\|P(T-t,t)u(T)\|}{B(T-t,t)} \le e^{LTe^{LT}}\|z(t)\|$$

или $\|P(T-t,t)u(T)\| \le e^{LTe^{LT}}\|v(t)\|$. Неравенства (2.7) доказаны.

Докажем неравенства (2.8). Оценим $\|v(t)-u(t)\|$ сверху. Так как

$$u(T) = e^{-A(T-t)}u(t) + \int\limits_t^T e^{-A(T-\tau)}f(\tau,u(\tau))d\tau,$$

то из (2.6) получаем равенство

$$v(t)-u(t)=G(t)u(t)-u(t)+\int\limits_t^T P(\tau-t,t)(f(\tau,v(\tau))-f(\tau,u(\tau)))d\tau. \tag{2.13}$$

Рассмотрим функцию $w(t)=\dfrac{v(t)-u(t)}{B(T-t,t)}$. Из (2.13) выводим, что функция $w(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|w(t)\|\le\frac{\|G(t)u(t)-u(t)\|}{B(T-t,t)}+L\int\limits_t^T\|w(\tau)\|d\tau. \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14) в силу леммы Гроноулла следует

$$\|w(t)\|\le e^{LT}\frac{\|G(t)u(t)-u(t)\|}{B(T-t,t)}$$

или

$$\|v(t)-u(t)\|\le e^{LT}\|G(t)u(t)-u(t)\|. \tag{2.15}$$

Оценим величину $\|v(t)-u(t)\|$ снизу. Рассмотрим равенство

$$G(t)u(t)-u(t)=v(t)-u(t)+\int\limits_t^T P(\tau-t,t)(f(\tau,v(\tau))-f(\tau,u(\tau)))d\tau. \tag{2.16}$$

Из равенства (2.16) с учетом (2.15) получаем неравенство

$$\frac{\|G(t)u(t)-u(t)\|}{B(T-t,t)}\le\|w(t)\|+Le^{LT}\int\limits_t^T\frac{\|G(\tau)u(\tau)-u(\tau)\|}{B(T-\tau,\tau)}d\tau. \tag{2.17}$$

Из неравенства (2.17) в силу леммы Гроноулла следует

$$\frac{\|G(t)u(t)-u(t)\|}{B(T-t,t)\|}\le e^{LTe^{LT}}\|w(t)\|$$

или $\|G(t)u(t)-u(t)\|\le e^{L(T)e^{L(T)}}\|v(t)-u(t)\|$. Неравенства (2.8) доказаны.

3. Оценка погрешности метода приближенного решения

Обозначим $\varphi^\alpha=u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ — решение уравнения (2.3), $\varphi^\alpha_\delta=u^\alpha_\delta(t_0)$, где $u^\alpha_\delta(t)$ — решение уравнения (2.4).

Рассмотрим величину

$$\Delta_M(\alpha,\delta)=\sup\left\{\|\varphi^\alpha_\delta-\varphi\|\colon\varphi\in M,\|\chi-\chi_\delta\|\le\delta\right\},$$

характеризующую точность построенного метода приближенного решения нелинейной задачи (2.1) на множестве M.

Воспользуемся неравенством $\Delta_M(\alpha,\delta)\le\Delta_1(\alpha)+\Delta_2(\alpha,\delta)$, где

$$\Delta_1(\alpha)=\sup_{\varphi\in M}\|\varphi^\alpha-\varphi\|;\quad \Delta_2(\alpha,\delta)=\sup_{\|\chi-\chi_\delta\|\le\delta}\|\varphi^\alpha_\delta-\varphi^\alpha\|.$$

Рассмотрим также величину

$$\hat\Delta_M(\alpha,\delta)=\sup\left\{\|R^{T-t_0}_\alpha\hat\chi_\delta-\varphi\|\colon\varphi\in M,\|e^{-A(T-t_0)}\varphi-\hat\chi_\delta\|\le\delta\right\}$$

— погрешность приближенного решения соответствующей линейной задачи на множестве M. Будем использовать очевидное неравенство $\hat{\Delta}_M(\alpha,\delta) \le \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)$, где

$$\hat{\Delta}_1(\alpha) = \sup_{\varphi\in M} \|R_\alpha^{T-t_0}\hat{\chi} - \varphi\|, \quad \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta) = \sup_{\|\hat{\chi}-\hat{\chi}_\delta\|\le\delta} \|R_\alpha^{T-t_0}(\hat{\chi}_\delta - \hat{\chi})\|.$$

Выполняются неравенства (см., например, [1])

$$\frac{1}{4}(\Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta)) \le \Delta_M(\alpha,\delta) \le \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta). \tag{3.1}$$

Аналогично

$$\frac{1}{4}(\hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)) \le \hat{\Delta}_M(\alpha,\delta) \le \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta). \tag{3.2}$$

Из леммы 2 при $B(\tau,t) = e^{-A(T-\tau)}R_\alpha^{T-t}$ следуют неравенства

$$e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_1(\alpha) \le \Delta_1(\alpha) \le e^{LT}\hat{\Delta}_1(\alpha), \quad e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_2(\alpha,\delta) \le \Delta_2(\alpha,\delta) \le e^{LT}\hat{\Delta}_2(\alpha,\delta).$$

Выберем зависимость $\alpha = \alpha^*(\delta)$ из условия минимальности величины $g(\alpha,\delta) = \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)$ и используем эту зависимость при решении нелинейного уравнения.

Из последних неравенств с учетом (3.1), (3.2) вытекает следующая теорема.

Теорема. *Существует постоянная* $0 < \delta_0 < 1$ *такая, что для всех* $0 < \delta < \delta_0$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{4}e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_M(\alpha^*(\delta),\delta) \le \Delta_M(\alpha^*(\delta),\delta) \le 4e^{LT}\hat{\Delta}_M(\alpha^*(\delta),\delta).$$

С учетом леммы 1 выполняется

Следствие. *Метод приближенного решения нелинейной задачи* (2.1), *определенный равенством* (2.5), *оптимален по порядку на множестве* M *тогда и только тогда, когда метод приближенного решения линейной задачи* (1.1), *определенный равенством* (1.3), *оптимален по порядку на множестве* M.

4. Примеры

Приведем примеры методов приближенного решения задачи с обратным временем для полулинейного уравнения, которые строятся по предложенной общей схеме, но могут быть реализованы в виде задач с малым параметром для дифференциальных уравнений.

Пример 1 (метод проекционной регуляризации). Обозначим через $\{E_\lambda : \lambda \ge 0\}$ разложение единицы, порожденное оператором A. Пусть A_α — линейный ограниченный оператор в H, определяемый формулой

$$A_\alpha u = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2.1) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = -A_\alpha u_\delta^\alpha(t) + E_\alpha f(u_\delta^\alpha(t)), \quad t \in (t_0,T); \quad u_\delta^\alpha(T) = E_\alpha\chi. \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что функция u_δ^α удовлетворяет уравнению (2.4) с оператором $R_\alpha^{T-t} = e^{A_\alpha(T-t)}E_\alpha$.

П р и м е р 2 (метод квазиобращения). Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2.1) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = -(A - \alpha A^m)u_\delta^\alpha(t) + e^{-\alpha A^m(T-t)} f(t, u_\delta^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); u_\delta^\alpha(T) = \chi_\delta. \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что функция u_δ^α удовлетворяет интегральному уравнению (2.4) с оператором $R_\alpha^{T-t} = e^{(A-\alpha A^m)(T-t)}$.

П р и м е р 3 (метод вспомогательных граничных условий). Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (2.1) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = -Au_\delta^\alpha(t) + f(t, u_\delta^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \quad u_\delta^\alpha(T) + \alpha u_\delta^\alpha(t_0) = \chi_\delta. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что функция u_δ^α удовлетворяет интегральному уравнению (2.4) с оператором $R_\alpha^{T-t} = e^{A(T-t)}(E + \alpha e^{A(T-t_0)})^{-1}$.

Другие методы решения нелинейных обратных задач рассмотрены, например, в статьях [13; 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.** Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 176 с.
2. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Иванов В.К., Королюк Т.И.** Об оценке погрешности при решении линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.
4. **Страхов В.Н.** О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 8. С. 1490–1495.
5. **Танана В.П.** О сходимости регуляризованных решений нелинейных операторных уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 119–133.
6. **Танана В.П.** Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 39, № 5. С. 503–507.
7. **Бакушинский А.Б.** Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректно поставленного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 8. С. 672–677.
8. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург.: Наука, 1993. 264 с.
9. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.
10. **Кокурин М.Ю.** Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола.: Изд. Марийского гос. ун-та, 1998. 292 с.
11. **Табаринцева Е.В.** Об оценке модуля непрерывности одной нелинейной обратной задачи // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 253–257.
12. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
13. **Табаринцева Е.В.** Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 3. С. 259–271.
14. **Танана В.П., Табаринцева Е.В.** О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 2. С. 221–228.

Табаринцева Елена Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: eltab@rambler.ru

Поступила 10.02.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.948

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО АЛГОРИТМА, ОСНОВАННОГО НА МЕТОДЕ М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

В. П. Танана, А. И. Сидикова

В статье рассматривается операторное уравнение первого рода с погрешностью в операторе и в правой части этого уравнения. В качестве метода берется функция от этого оператора, зависящая от положительного параметра α. Получена оценка снизу для метода решения данного уравнения при любых значениях α. Построен регуляризующий алгоритм, основанный на методе М.М. Лаврентьева, для него получена двухсторонняя оценка погрешности. Для метода М.М. Лаврентьева построены дискретные аппроксимации данного метода. Сделана оценка погрешности этих аппроксимаций. Эти дискретные аппроксимации в дальнейшем использовались при возмущении оператора уравнения.

Ключевые слова: операторное уравнение, регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. I. Sidikova. A two-sided error estimate for a regularizing method based on M.M. Lavrent'ev's method.

We consider an operator equation of the first kind with error in the operator and in the right-hand side of the equation. The method is a function of this operator depending on a positive parameter α. A lower estimate of a method of solving this equation for any value of α is obtained. A regularizing method based on Lavrent'ev's method is constructed, and a two-sided error estimate is obtained for this method. Discrete approximations of Lavrent'ev's method are constructed. Error estimates are obtained for these approximations. The discrete approximations were further used for a perturbation of the operator in the equation.

Keywords: operator equation, regularization, error estimation, ill-posed problem.

Введение

Решение некорректно поставленных задач невозможно без использования вычислительной техники. Поэтому при их решении важное место занимают квадратурные, конечноразностные и другие методы дискретизации, позволяющие свести исходную задачу к конечномерной [1–4].

До последнего времени некорректные задачи, как правило, решались в два этапа. Сначала для решения задачи использовали оптимальный по порядку метод и получали оценку погрешности для приближенного решения. Затем использовали дискретизацию, строили конечномерный вариант метода регуляризации, но при этом исследовании конечномерных аппроксимаций ограничивались лишь доказательством сходимости последних. Одной из работ, в которой получена оценка погрешности конечномерной аппроксимации, является [5]. В работе [6] был рассмотрен конечномерный регуляризующий алгоритм для широкого класса методов регуляризации и получена оценка погрешности, использующая модуль непрерывности обратного оператора.

В настоящей статье результаты работы [7] обобщаются на более широкий класс методов регуляризации. Примеры таких методов — метод М.М. Лаврентьева [8] и метод квазиобращения [9], которые для некоторых классов корректности при любых значениях параметра регуляризации дают погрешность, не сравнимую с модулем непрерывности обратного оператора (см. [10, с. 48]).

1. Постановка задачи

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. $(H \to H)$ — пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство H в $H, (H \to H)_1$ — множество линейных ограниченных, положительных и самосопряженных операторов, отображающих H в H, $(H \to H)_2$ — множество линейных инъективных, вполне непрерывных операторов, отображающих H в H, $(H \to H)_3$ — линейное многообразие линейных ограниченных операторов, имеющих конечномерное множество значений.

Предположим, что $M_r = B\overline{S}_r$, $\overline{S}_r = \{v\colon v \in H,\ \|v\| \le r\}$, а $B \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{1.1}$$

где $u \in M_r$, $f \in H$ и $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$.

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1.1), принадлежащее множеству M_r, но элемент f_0 нам не известен, а вместо него даны $f_\delta \in H$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Кроме того, при построении численного алгоритма для решения уравнения (1.1) оператор A нам неудобен. Поэтому вместо него используем некоторый приближенный оператор $A_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_3$ такой, что $\|A_h - A\| \le h$, для которого уровень погрешности $h \in (0, h_0]$ будем считать известным.

Требуется, используя априорную информацию A_h, f_δ, h, δ и M_r, определить приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1.1) и оценить величину уклонения $\|u_{\delta h} - u_0\|$ приближенного решения $u_{\delta h}$ от точного.

Теперь сведем уравнение (1.1) к конечномерному

$$A_h u = \bar{f}_{\delta,h}, \tag{1.2}$$

где $\bar{f}_{\delta h} = pr[f_\delta, R(A_h)]$, $pr[f_\delta, R(A_h)]$ — метрическая проекция элемента f_δ на множество значений $R(A_h)$ оператора A_h.

В качестве регуляризующего семейства операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ рассмотрим обобщение известного понятия, предложенного в [11], на класс уравнений (1.1) с приближенно заданным оператором.

Теперь опишем множество D, из которого будем брать приближенные операторы $\overline{A}$.

Так как $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, по теореме Гильберта — Шмидта [12, с. 283] существует полная ортонормированная система $\{e_n\}$ собственных векторов оператора A такая, что для любого $u \in H$ имеем

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n u_n e_n,$$

где σ_n— собственное значение оператора A, а $u_n = (u, e_n)$.

Предположим, что $D \subset (H \to H)_1 \cap (H \to H)_3$ и для любого оператора $\overline{A} \in D$ и любого n справедливо неравенство $0 \le \overline{\sigma}_n \le \sigma_n + h_0$, где $\overline{\sigma}_n$— собственное значение оператора $\overline{A}$.

Для определения регуляризующего семейства операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ введем функциональную последовательность $\{\Phi_n(\sigma, \alpha)\}$ такую, что для любого n

$$\Phi_n(\sigma, \alpha) \in C([0, \sigma_n + h_0] \times (0, \alpha_0]) \tag{1.3}$$

и для любого $\overline{\alpha} \in (0, \alpha_0)$ найдется число $r(\overline{\alpha})$ такое, что для любых значений n, $\sigma \in [0, \sigma_n + h_0]$ и $\alpha \in [\overline{\alpha}, \alpha_0]$ имеем

$$|\Phi_n(\sigma, \alpha)| \le r(\overline{\alpha}). \tag{1.4}$$

Пусть $C \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, $f \in H$, а $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Тогда

$$P_\alpha(C)f = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\sigma_n, \alpha)\overline{f}_n \overline{e}_n, \tag{1.5}$$

где $\overline{e}_n$ — собственный вектор оператора C, а σ_n — его собственное значение.

Кроме того, предположим, что для любого n

$$|\sigma_n \Phi_n(\sigma_n, \alpha) - 1| \to 0 \;\text{ при }\; \alpha \to 0 \tag{1.6}$$

и существуют числа $\alpha_1 \in (0, \alpha_0)$ и $r(\alpha_1) > 0$ такие, что для любых значений n и $\alpha \in (0, \alpha_1)$ справедливо неравенство

$$|\sigma_n \Phi_n(\sigma_n, \alpha) - 1| \le r(\alpha_1). \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) по критерию точечной сходимости линейных операторов [13, с. 15] следует, что семейство операторов $\{P_\alpha(C)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ регуляризует уравнение $Cu = f$ на всем пространстве H.

Далее, применим к уравнению (1.2) регуляризующее семейство операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$, а элемент $u_{\delta h}^{\alpha} = P_\alpha(A_h)\overline{f}_{\delta h}$ назовем регуляризованным решением уравнения (1.1) с приближенными исходными данными $A_h \in D$ и $f_\delta \in H$.

Для выбора параметра α в регуляризованном решении $u_{\delta h}^{\alpha}$ и оценки погрешности, следуя [7], введем величину

$$\Delta[P_\alpha(A)] = \sup_{u, f_\delta, A_h} \Big\{ \|P_\alpha(A_h)\overline{f}_{\delta h} - u\|\colon u \in M_r,\ A_h \in D,$$

$$\|A_h - A\| \le h,\ f_\delta \in H,\ \|f_\delta - Au\| \le \delta \Big\}, \tag{1.8}$$

где $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, а $\overline{f}_{\delta h} = pr[f_\delta, R(A_h)]$.

Используя (1.8), выберем $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, h, r)$ таким образом, что существует $d > 1$ такое, что для любых $\delta \in (0, \delta_0]$ и $h \in (0, h_0]$ имеем

$$\inf_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \Delta[P_\alpha(A)] \le \Delta[P_{\overline{\alpha}(\delta,h,r)}(A)] \le d \cdot \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \Delta[P_\alpha(A)].$$

2. Оценка для погрешности $\Delta[P_\alpha(A)]$

Предположим, что $B = g(A)$, где $g(\sigma_n) \downarrow n$ и $\lim\limits_{\sigma_n \to 0} g(\sigma_n) = 0$.

В дальнейшем будет часто использоваться следующий известный факт, приведенный в [13, с. 343].

Пусть $C \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$. Тогда

$$\|C\| = \sup_n \sigma_n. \tag{2.1}$$

Из леммы, доказанной в [13, с. 320], следует существование положительного корня из этого оператора, который обозначим $\sqrt{C}$. При этом

$$\|C\| = \sup_{\|u\| \le 1} \|Cu\| = \sup_{\|u\| \le 1} \|\sqrt{C}u\|^2 = \sup_{\|u\| \le 1} (Cu, u). \tag{2.2}$$

Из (2.2) на основании леммы, доказанной в [12, с. 284], будет следовать, что $\sup_{\|u\| \le 1}(Cu, u) = \sigma_1$, где σ_1- максимальное собственное значение оператора C.

Таким образом, имеем $\|C\| = \sigma_1$, $\|B\| = g(\sigma_1)$ и $\|P_\alpha(C)\| = \sup_n |\Phi_n(\sigma_n, \alpha)|$, $0 < \alpha \le \alpha_0$, где оператор $P_\alpha(C)$ определен формулой (1.5).

Лемма 1. *Пусть семейство операторов* $\{P_\alpha(C)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5), *а последовательности* $\{\sigma_n\}$ *и* $\{\Phi_n(\sigma_n, \alpha)\}$ *удовлетворяют условиям* (1.6) *и* (1.7).

Тогда $\|P_\alpha(C)\| \to \infty$ *при* $\alpha \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для удобства величину $\|P_\alpha(C)\|$ обозначим через $F(\alpha)$. Предположим противное. Тогда найдутся число K и последовательность $\{\alpha_k\}$ такие, что $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ и для любого k справедливо

$$F(\alpha_k) \le K. \tag{2.3}$$

В силу $F(\alpha_k) = \sup_n |\Phi_n(\sigma_n, \alpha_k)|$ и неравенства (2.3) следует, что для любого k имеет место оценка

$$\|P_{\alpha_k}(C)\| \le K. \tag{2.4}$$

Из (1.6) и (1.7) вытекает, что последовательность $\{P_{\alpha_k}(C)\}$ регуляризует уравнение $Cu = f$ на всем пространстве H , т. е. для любого $f = Cu$

$$P_{\alpha_k}(C)f \to u \ \text{ при } \ k \to \infty, \tag{2.5}$$

где $u = C^{-1}f$.

Ввиду плотности в H множества значений $R(C)$ оператора C, а также (2.4) и (2.5) для любого $f \in H$ справедливо

$$P_{\alpha_k}(C)f \to \overline{C}^{-1}f \ \text{ при } \ k \to \infty,$$

где $\overline{C}^{-1}$ — продолжение по непрерывности оператора C^{-1} на H.

Таким образом, $\|\overline{C}^{-1}\| \le K$ и, следовательно, $\|C^{-1}\| \le K$, что противоречит полной непрерывности оператора C.

Тем самым лемма доказана. □

Теперь рассмотрим оператор $B - P_\alpha(A)AB$.

Из формулы (2.1) получаем, что

$$G(\alpha)\|B - P_\alpha(A)AB\| := \sup_n |[1 - \sigma_n\Phi_n(\sigma_n, \alpha)]g(\sigma_n)|. \tag{2.6}$$

Лемма 2. *Пусть семейство операторов* $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5) *и последовательность функций* $\{\Phi_n(\sigma_n, \alpha)\}$ *удовлетворяет условиям* (1.3) *и* (1.4).

Тогда функция $G(\alpha)$ *непрерывна на полуинтервале* $(0, \alpha_0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий (1.3) и (1.4) по критерию точечной сходимости следует сильная непрерывность по α семейства операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$.

Пусть $\overline{\alpha} \in (0, \alpha_0]$, $\{\alpha_k\} \subset (0, \alpha_0]$, $\alpha_k \to \overline{\alpha}$ при $k \to \infty$.

Тогда из сильной непрерывности семейства $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ следует, что для любого $u \in H$ выполняется

$$P_{\alpha_k}(A)Au \to P_{\overline{\alpha}}(A)Au \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{2.7}$$

Так как $M_r = B\overline{S}_r$ компактно в H, то из (2.7) следует равномерная сходимость последовательности операторов $\{P_{\alpha_k}(A)A\}$ к оператору $P_{\overline{\alpha}}(A)A$ на множестве M_r.

Таким образом, $\|P_{\alpha_k}(A)AB - P_{\overline{\alpha}}(A)AB\| \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно,

$$\|B - P_{\alpha_k}(A)AB\| - \|B - P_{\overline{\alpha}}(A)AB\| \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) получаем, что $G(\alpha)$ непрерывна в точке $\overline{\alpha}$. Тем самым лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть семейство операторов* $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5), *а последовательности* $\{\sigma_n\}$ *и* $\{\Phi_n(\sigma_n, \alpha)\}$ *удовлетворяют условиям* (1.6), (1.7).

Тогда функция $G(\alpha)$, *определенная формулой* (2.6), *удовлетворяет условию* $G(\alpha) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий (1.6) и (1.7) следует, что семейство операторов $\{P_\alpha(A)\colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ регуляризует уравнение (1.1) на всем пространстве H.

Пусть $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда для любого $u \in H$ имеем

$$P_{\alpha_k}(A)Au \to u \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.9}$$

Из полной непрерывности оператора B следует компактность множества $B\,\overline{S}_1$ в пространстве H, где $\overline{S}_1 = \{v\colon v \in H, \|v\| \le 1\}$.

Из (2.9) получаем, что $P_{\alpha_k}(A)Au$ сходится равномерно к u на множестве $B\,\overline{S}_1$.

Таким образом, $\sup_{\|v\|\le 1} \|Bv - P_{\alpha_k}(A)ABv\| \to 0$ при $k \to \infty$, и, следовательно,

$$\|B - P_{\alpha_k}(A)AB\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тем самым лемма доказана. □

Пусть $F(\alpha) \in C(0, \alpha_0]$ и

$$F(\alpha) \downarrow\downarrow \quad \text{по } \alpha \text{ на} \quad (0, \alpha_0], \tag{2.10}$$

а также существуют неотрицательные функции $G_1(\alpha)$ и $G_2(\alpha)$ такие, что для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$ выполняется неравенство

$$G_1(\alpha) \le G(\alpha) \le G_2(\alpha). \tag{2.11}$$

Предположим, что $G_2(\alpha) \in C(0, \alpha_0]$ и справедливы следующие условия:

$$G_2(\alpha) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0, \tag{2.12}$$

$$G_1(\alpha) \uparrow \ \text{по } \alpha \text{ на } (0, \alpha_0], \tag{2.13}$$

$$G_2(\alpha) \uparrow \ \text{по } \alpha \text{ на } (0, \alpha_0]. \tag{2.14}$$

Рассмотрим уравнение

$$r\,G_2(\alpha) = \frac{1}{18} F(\alpha) \cdot [r\|B\|h + \delta]. \tag{2.15}$$

Из леммы 1, условий (2.10)–(2.14) и в силу $rG_2(\alpha_0) > \dfrac{1}{18}F(\alpha_0)\cdot[r\|B\|h+\delta]$ уравнение (2.15) имеет единственное решение $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, h, r)$.

Теперь перейдем к оценке снизу для величины $\inf\limits_{0<\alpha\le\alpha_0} \Delta[P_\alpha(A)]$.

Лемма 4. *Пусть $\overline{\alpha}(\delta, h, r)$ определено уравнением* (2.15)*, а $\alpha \ge \overline{\alpha}(\delta, h, r)$.*
Тогда $\Delta[P_\alpha(A)] \ge \dfrac{r}{2}\, G_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $\alpha \ge \overline{\alpha}(\delta, h, r)$ на основании (2.13) следует, что

$$r\ G_1(\alpha) \ge rG_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)].$$

Так как оператор $B - P_\alpha(A)AB$ является функцией оператора A, то он имеет те же собственные векторы e_n, что и оператор A, а собственные значения этого оператора, отвечающие e_n, обозначим через μ_n.

Таким образом, из (2.1) имеем

$$\|B - P_\alpha(A)AB\| = \sup_n |\mu_n(\alpha)|, \tag{2.16}$$

а с учетом (2.6) справедливо $G(\alpha) = \sup_n |\mu_n(\alpha)|$.

Из (2.16) следует существование номера $\iota(\alpha)$ такого, что

$$|\mu_{\iota(\alpha)}| \ge \frac{1}{2} \sup_n |\mu_n(\alpha)|. \tag{2.17}$$

Из полной непрерывности оператора A имеем, что $\{\sigma_k\}$, убывая, стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, существует номер k такой, что

$$|\sigma_{k+1}| \leq \frac{h}{2}, \quad k \geq \iota(\alpha). \tag{2.18}$$

Отсюда и из (2.18) получаем

$$\sup_n\{|\mu_n(\alpha)|;\ n = 1, 2, \dots, k\} \geq \frac{1}{2}G(\alpha). \tag{2.19}$$

Рассмотрим подпространство H_k, порожденное элементами $e_1, e_2, \dots, e_k$, и определим оператор $\overline{A}_h$ формулой

$$\overline{A}_h u = \begin{cases} Au, & u \in H_k; \\ 0, & u \in H_k^{\perp}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Тогда из (2.18) и (2.20) вытекает

$$\|\overline{A}_h - A\| = \sup_{n \geq k+1} \sigma_n \leq h. \tag{2.21}$$

Пусть $u_0 \in M_r \cap H_k$, а $f_\delta = Au_0$. Тогда $u_0 \in M_r$ и для любого $\delta > 0$ $\|f_\delta - Au_0\| \leq \delta$. Таким образом, из (1.8), (2.20) и (2.21) следует

$$\Delta[P_\alpha(A)] \geq \sup_{u_0}\big\{\|P_\alpha(\overline{A}_h)f_\delta - u_0\|\colon u_0 \in M_r \cap H_k,\ f_\delta = Au_0\big\}. \tag{2.22}$$

Так как $u_0 \in M_r \cap H_k$, то существует элемент $v_0 \in H_k$ такой, что

$$u_0 = Bv_0, \quad \|v_0\| \leq r. \tag{2.23}$$

Из (2.20), (2.23) имеем, что

$$\sup_{u_0}\big\{\|P_\alpha(\overline{A}_h)f_\delta - u_0\|\colon u_0 \in M_r \cap H_k,\ f_\delta = Au_0\big\} = \sup_{v_0 \in H_k}\big\{\|P_\alpha(A)ABv_0 - Bv_0\|\colon \|v_0\| \leq r\big\}.$$

Обозначим через $G_k(\alpha)$ функцию, определяемую формулой

$$G_k(\alpha) = \sup_{v_0}\big\{\|Bv_0 - P_\alpha(A)ABv_0\|\colon v_0 \in H_k,\ \|v_0\| \leq 1\big\}. \tag{2.24}$$

Так как подпространство H_k порождено собственными элементами e_n оператора $B - P_\alpha(A)AB$, отвечающими собственным значениям $\mu_n(\alpha)$, $n \leq k$, этого оператора, то

$$\sup_{v_0}\big\{\|Bv_0 - P_\alpha(A)ABv_0\|\colon v_0 \in H_k, \|v_0\| \leq 1\big\} = \sup_n\{|\mu_n(\alpha)|\colon n = 1, 2, \dots, k\}. \tag{2.25}$$

Из (2.19), (2.24) и (2.25) следует, что $G_k(\alpha) \geq \dfrac{1}{2}G(\alpha)$.

С учетом последнего неравенства и из (2.22), (2.23), (2.25) получаем, что $\Delta[P_\alpha(A)] \geq \dfrac{r}{2}G(\alpha)$.

Поэтому в силу $\alpha \geq \overline{\alpha}(\delta, h, r)$, (2.11) имеем $\Delta[P_\alpha(A)] \geq \dfrac{r}{2}G_1(\alpha)$, а ввиду (2.13) —

$$\Delta[P_\alpha(A)] \geq \frac{r}{2}G_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)],$$

Тем самым лемма доказана. □

Чтобы получить оценку снизу для $\Delta[P_\alpha(A)]$ в случае $\alpha < \overline{\alpha}(\delta, h, r)$, докажем ряд вспомогательных лемм. Для этого определим оператор $\overline{A}_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$ следующим образом:

$$Sp(\overline{A}_h) = Sp(A), \tag{2.26}$$

собственные элементы q_n оператора $\overline{A}_h$ зададим формулами

$$q_1 = \frac{e_1 - h_1 e_{\iota(\alpha)}}{\sqrt{1+h_1^2}}, \quad q_{i(\alpha)} = \frac{e_{i(\alpha)} + h_1 e_1}{\sqrt{1+h_1^2}}, \tag{2.27}$$

$$q_n = e_n \ \text{ при } \ n \neq 1 \text{ и } n \neq \iota(\alpha),$$

где $i(\alpha)$ определено (2.17), $h_1 = \dfrac{h}{2\sigma_1}$, а e_n- собственные элементы оператора A.

Теперь рассмотрим конечномерное подпространство H_k, порожденное элементами $e_1, e_2, \dots,$ e_k, где номер k определен соотношением (2.18), а оператор A_h формулой —

$$A_h u = \begin{cases} \overline{A}_h u & \text{при } \ u \in H_k, \\ 0 & \text{при } \ u \in H_k^{\perp}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Лемма 5. *Пусть оператор A_h определен формулой* (2.28), *а* $\sigma_{k+1} < \dfrac{h}{2}$.
Тогда $\|A_h - A\| \leq h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала оценим $\|\overline{A}_h - A\|$, где $\overline{A}_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$ и определен формулой (2.26) и (2.27).

Введем подпространство L, порожденное элементами e_1 и $e_{i(\alpha)}$.

Так как для любого $u \in L^{\perp}$ справедливо $\overline{A}_h u = Au$, то

$$\|\overline{A}_h - A\|_H = \|\overline{A}_h - A\|_L. \tag{2.29}$$

Пусть $u \in L$ и $\|u\| = 1$. Тогда $u = u_1 e_1 + u_2 e_{i(\alpha)} = u_1' q_1 + u_2' q_{i(\alpha)}$.

Поэтому

$$u_1 = \frac{u_1' + h_1 u_2'}{\sqrt{1+h_1^2}}, \quad u_2 = \frac{u_2' - h_1 u_1'}{\sqrt{1+h_1^2}}.$$

В результате имеем

$$Au = \frac{\sigma_1 u_1' + \sigma_1 h_1 u_2'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_1 + \frac{\sigma_{\iota(\alpha)} u_2' - \sigma_{\iota(\alpha)} h_1 u_1'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_{\iota(\alpha)}, \tag{2.30}$$

$$\overline{A}_h u = \frac{\sigma_1 u_1' + \sigma_{\iota(\alpha)} h_1 u_2'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_1 + \frac{\sigma_{\iota(\alpha)} u_2' - \sigma_1 h_1 u_1'}{\sqrt{1+h_1^2}} e_{\iota(\alpha)}. \tag{2.31}$$

Из (2.30) и (2.31) получаем, что

$$(A - \overline{A}_h) u = \frac{(\sigma_1 - \sigma_{\iota(\alpha)}) u_2' h_1}{\sqrt{1+h_1^2}} e_1 - \frac{(\sigma_1 - \sigma_{\iota(\alpha)}) u_1' h_1}{\sqrt{1+h_1^2}} e_{\iota(\alpha)}.$$

Из (2.27) и последнего равенства следует, что $\|(A - \overline{A}_h) u\|_L^2 \leq \dfrac{\sigma_1^2 h_1^2}{1+h_1^2} \leq \dfrac{h_2}{4}$.

Так как $\|u\| = 1$, то справедлива оценка $\|A - \overline{A}_h\|_L \leq \dfrac{h}{2}$. Поэтому с учетом (2.29) имеем

$$\|\overline{A}_h - A\|_H \leq \frac{h}{2}. \tag{2.32}$$

Ввиду $\sigma_{k+1} < \dfrac{h}{2}$ из (2.28) следует, что $\|A_h - \overline{A}_h\|_H \leq \dfrac{h}{2}$, а с учетом (2.32) — $\|A_h - A\| \leq h$. Тем самым лемма доказана. □

Так как в силу (1.5) оператор $P_\alpha(C)$ является функцией оператора C, то он имеет те же собственные элементы $\overline{e}_n$, что и C. Собственные значения этого оператора, отвечающие $\overline{e}_n$, обозначим через $\lambda_n(\alpha)$.

Положим
$$\overline{u}_0 = r\ \|B\|\ e_1, \quad \overline{f}_0 = A\overline{u}_0, \quad \overline{f}_\delta = A\overline{u}_0 + \delta q_{\iota(\alpha)}. \tag{2.33}$$

В этом случае
$$\overline{u}_0 \in M_r \cap H_k, \quad \|\overline{f}_\delta - A\overline{u}_0\| \le \delta. \tag{2.34}$$

Лемма 6. *Пусть* $\alpha < \overline{\alpha}(\delta, h, r)$,
$$\lambda_1(\alpha) < \frac{\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)}{9}. \tag{2.35}$$

Тогда
$$\Delta[P_\alpha(A)] \ge r\ G_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)].$$

Доказательство. Пусть оператор A_h определен формулой (2.28), $\overline{u}_0$, $\overline{f}_\delta$ — (2.33). Тогда из (1.8), (2.34) и леммы 5 следует, что $\Delta[P_\alpha(A)] \ge \|\overline{u}_0 - P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta\|$.

В свою очередь
$$\|\overline{u}_0 - P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta\| \ge |\ \|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| - \|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\|\ |. \tag{2.36}$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части неравенства (2.36).

Так как
$$P_\alpha(A_h)q_1 = \lambda_1(\alpha)q_1, \quad P_\alpha(A_h)q_{\iota(\alpha)} = \lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)q_{\iota(\alpha)}, \quad P_\alpha(A)e_1 = \lambda_1(\alpha)e_1, \ \text{ где } e_1 = \frac{q_1 + h_1 q_{\iota(\alpha)}}{\sqrt{1+h_1^2}},$$
то
$$P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)\overline{f}_0 = \delta\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)q_{\iota(\alpha)} + \lambda_{i(\alpha)}(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|h_1}{\sqrt{1+h_1^2}}q_{\iota(\alpha)} + \lambda_1(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|}{\sqrt{1+h_1^2}}q_1$$
$$- \lambda_1(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|}{\sqrt{1+h_1^2}}q_1 - \lambda_1(\alpha)\frac{r\sigma_1\|B\|h_1}{\sqrt{1+h_1^2}}q_{\iota(\alpha)}.$$

Поэтому имеем
$$\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| = (\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha) - \lambda_1(\alpha))\frac{r\sigma_1\|B\|h_1}{\sqrt{1+h_1^2}} + \lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha)\delta.$$

Из этого с учетом $h_1 = \dfrac{h}{2\sigma_1}$, $\lambda_{\iota(\alpha)}(\alpha) > \dfrac{1}{2}\|P_\alpha(A)\|$, $h_1 \le 1$, и соотношения (2.35) следует, что $\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| \ge \dfrac{1}{9}\ \|P_\alpha(A)\|(r\|B\|h + \delta)$. Таким образом, ввиду (2.10) получаем
$$\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| \ge \frac{1}{9}\ \|P_{\overline{\alpha}(\delta,h,r)}(A)\|(r\|B\|h + \delta).$$

Отсюда и из (2.15) вытекает, что
$$\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - P_\alpha(A)A\overline{u}_0\| \ge 2rG_2[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]. \tag{2.37}$$

Теперь оценим второе слагаемое в правой части формулы (2.36). Ввиду (2.6) $\|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\| \le rG(\alpha)$.

С учетом (2.11) имеем $\|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\| \le rG_2(\alpha)$, из этого и (2.14) следует, что
$$\|P_\alpha(A)A\overline{u}_0 - \overline{u}_0\| \le rG_2[\overline{\alpha}(\delta, h, r)].$$

Тогда в силу (2.37) получаем $\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - \overline{u}_0\| \ge rG_2[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]$. Таким образом, ввиду (2.11) справедлива оценка $\|P_\alpha(A_h)\overline{f}_\delta - \overline{u}_0\| \ge rG_1[\overline{\alpha}(\delta, h, r)]$.

Тем самым лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть регуляризующее семейство операторов* $\{P_\alpha(C)\colon 0<\alpha\le\alpha_0\}$ *определено формулой* (1.5), *функция* $G_1(\alpha)$ — *формулой* (2.11), *а* $\overline{\alpha}(\delta,h,r)$ — *уравнением* (2.15).

Тогда, если $h<\|A\|$, *а* $\Delta[P_\alpha(A)]$ *определена формулой* (1.8), *то для любого* $\alpha\in(0,\alpha_0]$ *справедлива оценка*

$$\Delta[P_\alpha(A)]\ge\frac{r}{2}G_1[\overline{\alpha}(\delta,h,r)].$$

Доказательство этой теоремы следует из лемм 4 и 6. □

3. Метод М. М. Лаврентьева

Пусть $A\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_2$. Тогда метод М.М. Лаврентьева, согласно [8], заключается в замене операторного уравнения первого рода (1.1) уравнением второго рода

$$Au+\alpha u=f,\quad \alpha>0. \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что

$$\Phi_n(\sigma,\alpha)=(\sigma+\alpha)^{-1},\quad 0\le\sigma\le\sigma_n+h_0,\quad 0<\alpha\le\alpha_0, \tag{3.2}$$

где σ_n– собственные значения оператора A. В качестве класса корректности M_r возьмем множество $B\overline{S}_r$, в котором $B=A^p,\ p>1$, т. е.

$$g(\sigma)=\sigma^p,\quad p>1. \tag{3.3}$$

Далее предположим, что при $f=f_0$ существует $u_0\in M_r$ и $f_0=Au_0$, но f_0 неизвестно, а вместо него даны $f_\delta\in H$ и $\delta>0$ такие, что $\|f_\delta-f_0\|\le\delta$.

Теперь в формуле (3.1) оператор A заменим оператором $A_h\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_3$. Тем самым уравнение (3.1) сведем к

$$A_hu+\alpha u=f_\delta. \tag{3.4}$$

Предположим, что

$$\|A_h-A\|\le h, \tag{3.5}$$

и выберем параметр $\overline{\alpha}(\delta,h,r)$ в уравнении (3.4). Для этого определим в нашем случае функции $F(\alpha)$ и $G_2(\alpha)$, используемые в лемме 1 и (2.11).

Из (3.2) получаем

$$F(\alpha)=\sup_n(\sigma_n+\alpha)^{-1}. \tag{3.6}$$

Так как $\sigma_n\to+0$ при $n\to\infty$, то из (3.6) имеем

$$F(\alpha)=\frac{1}{\alpha}. \tag{3.7}$$

Из (2.6) , (3.2), (3.3) следует, что

$$G(\alpha)=\sup_n|1-\sigma_n(\sigma_n+\alpha)^{-1}|\sigma_n^p. \tag{3.8}$$

Отсюда $G(\alpha)=\alpha\sup_n\dfrac{\sigma_n^p}{\sigma_n+\alpha}$ и $G(\alpha)\le\alpha\sup_{0<\sigma\le\|A\|}\dfrac{\sigma^p}{\sigma+\alpha}$, где $p>1$.

Так как $\dfrac{\sigma^p}{\sigma+\alpha}\Big\uparrow$ по σ на $(0,\|A\|]$, то

$$\sup_{0<\sigma\le\|A\|}\frac{\sigma^p}{\sigma+\alpha}=\frac{\|A\|^p}{\|A\|+\alpha}.$$

Следовательно, имеет место оценка $G(\alpha) \le \alpha \dfrac{\|A\|^p}{\|A\| + \alpha}$. Так как $A \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_2$, то $\|A\| = \sigma_1$. Значит справедливо неравенство

$$G(\alpha) \le \alpha \frac{\sigma_1^p}{\sigma_1 + \alpha}. \tag{3.9}$$

Отсюда, учитывая, что $\sigma_1 \in Sp(A)$, имеем $G(\alpha) = \alpha \dfrac{\sigma_1^p}{\sigma_1 + \alpha}$. Из этого следует непрерывность функции $G(\alpha)$ на $(0, \alpha_0]$. Продифференцировав эту функцию, легко проверить, что

$$G(\alpha) \uparrow \ \alpha \ \text{ на } \ (0, \alpha_0],$$

поэтому можно положить $G_1(\alpha) = G_2(\alpha) = G(\alpha),\ 0 < \alpha_0 \le \alpha_0$. Но для упрощения выкладок ввиду (2.11) допускаем

$$G_1(\alpha) = \alpha \frac{\sigma_1^p}{\sigma_1 + \alpha}, \tag{3.10}$$

$$G_2(\alpha) = \alpha\, \sigma_1^{p-1}. \tag{3.11}$$

Для определения параметра регуляризации $\overline{\alpha}_1(\delta, h, r)$ запишем уравнение

$$r\sigma_1^{p-1}\alpha = \frac{r\sigma_1^p h + \delta}{\alpha},$$

решив которое, имеем

$$\overline{\alpha}_1(\delta, h, r) = \sqrt{\frac{r\sigma_1^p h + \delta}{r\sigma_1^{p-1}}}. \tag{3.12}$$

Из (3.4) и (3.12) получим приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1.1):

$$u_{\delta h} = (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)\ E)^{-1} f_\delta.$$

Оценим уклонение $\|u_{\delta h} - u_0\|$ приближенного решения $u_{\delta h}$ от точного решения u_0. В нашем случае

$$P_\alpha(A) = (A + \alpha E)^{-1},$$

и с учетом (1.8) имеем

$$\Delta[P_\alpha(A)] = \sup_{u, f_\delta, A_h} \Big\{ \|P_\alpha(A_h) f_\delta - u\| \colon u \in M_r,$$

$$A_h \in (H \to H)_1 \cap (H \to H)_3,\ \|A_h - A\| \le h,\ \|f_\delta - Au\| \le \delta \Big\}. \tag{3.13}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|u - (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} f_\delta\| &\le \|u - (A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au\| \\ &+ \|(A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au - (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} A_h u\| \\ &+ \|(A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} A_h u - (A_h + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} f_\delta\|, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $u \in M_r$, то

$$\|u - (A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au\| \le r G_2[\overline{\alpha}_1(\delta, h, r)].$$

Отсюда и из (3.11), (3.12) следует

$$\|u - (A + \overline{\alpha}_1(\delta, h, r)E)^{-1} Au\| \le \sqrt{r\sigma_1^{p-1}(r\sigma_1^p h + \delta)}. \tag{3.15}$$

Поскольку

$$\|A_h - f_\delta\| \le r\sigma_1^p h + \delta,$$

то
$$\|(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}A_hu-(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}f_\delta\|\le F[\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)][r\sigma_1^p h+\delta].$$
Это влечет с учетом (3.6), (3.12)
$$\|(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}A_hu-(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}f_\delta\|\le\sqrt{r\sigma_1^{p-1}(\sigma_1^p rh+\delta)}. \tag{3.16}$$

Лемма 7. *Пусть* $A\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_2$, $A_h\in(H\to H)_1\cap(H\to H)_3$, *выполнено* (3.5) *и* $u\in M_r$. *Тогда*
$$\|(A+\alpha E)^{-1}Au-(A_h+\alpha E)^{-1}A_hu\|\le r\|B\|\,\frac{h}{\alpha}.$$

Доказательство. Отметим, что
$$\|(A+\alpha E)^{-1}Au-(A_h+\alpha E)^{-1}A_hu\|\le\|(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h\|\cdot\|u\|.$$
Так как
$$\begin{aligned}(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h&=EA(A+\alpha E)^{-1}-(A_h+\alpha E)^{-1}A_hE\\=(A_h+\alpha E)^{-1}(A_h+\alpha E)A(A+\alpha E)^{-1}&-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h(A+\alpha E)(A+\alpha E)^{-1}\\=(A_h+\alpha E)^{-1}[(A_hA+\alpha A)(A+\alpha E)^{-1}&-(A_hA+\alpha A_h)(A+\alpha E)^{-1}],\end{aligned}$$
$$(A_hA+\alpha A)(A+\alpha E)^{-1}-(A_hA+\alpha A_h)(A+\alpha E)^{-1}=\alpha(A-A_h)(A+\alpha E)^{-1},$$
то
$$\|(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h\|\le\alpha\|(A_h+\alpha E)^{-1}\|\cdot\|A-A_h\|\cdot\|(A+\alpha E)^{-1}\|.$$
Из этого, поскольку $\|(A_h+\alpha E)^{-1}\|\le\dfrac{1}{\alpha}$ и $\|(A+\alpha E)^{-1}\|\le\dfrac{1}{\alpha}$, имеем
$$\|(A+\alpha E)^{-1}A-(A_h+\alpha E)^{-1}A_h\|\le\frac{h}{\alpha}.$$
Тем самым лемма доказана. □

Из (3.12) и леммы 7 следует, что для $u\in M_r$
$$\|(A+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}Au-(A_h+\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)E)^{-1}A_hu\|\le\sqrt{r\|A\|^{p-1}(r\|B\|h+\delta)}.$$
Отсюда и из (3.13)–(3.16) получаем неравенство
$$\Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}(A)]\le d_1\sqrt{r\sigma_1^p h+\delta}, \tag{3.17}$$
где $d_1=3\sigma_1^{(p-1)/2}\sqrt{r}$.

Теперь перейдем к оценке снизу.

Из (2.15), (3.7) и (3.11) следует $r\sigma_1^{p-1}\alpha=\dfrac{1}{18\alpha}[r\sigma_1^p h+\delta]$, отсюда
$$\overline{\alpha}(\delta,h,r)=\frac{1}{\sqrt{18r\sigma_1^{p-1}}}\,\sqrt{r\sigma_1^p h+\delta},$$
и согласно теореме 1 справедливо неравенство $\Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}]\ge\dfrac{r}{2}G_1[\overline{\alpha}(\delta,h,r)]$. Из этой оценки и уравнения (3.10) получаем, что
$$\Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}]\ge d_2\sqrt{r\sigma_1^p h+\delta}, \tag{3.18}$$
где $d_2=\dfrac{r\sigma_1^p}{2(\sigma_1+\alpha)}\dfrac{1}{\sqrt{18r\sigma_1^{p-1}}}$.

Теорема 2. *Пусть регуляризующее семейство операторов* $\{P_\alpha(C) \colon 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ *определено формулой* (3.1), $g(\sigma)$ — *формулой* (3.3), $\overline{\alpha}_1(\delta, h, r)$ — *формулой* (3.12). *Тогда существуют положительные числа* d_1 *и* d_2 *такие, что для достаточно малых значений* δ *и* h *справедливы оценки*

$$d_2\sqrt{r\sigma_1^p h + \delta} \le \Delta[P_{\overline{\alpha}_1(\delta,h,r)}(A)] \le d_1\sqrt{r\sigma_1^p h + \delta}.$$

Доказательство следует из формул (3.17) и (3.18). □

Оценки теоремы 2 говорят о том, что рассматриваемый метод является точным по порядку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. **Васин В.В.** Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 11–21.
3. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 261 с.
4. **Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14, № 1. С. 15–24.
5. **Данилин А.Р.** Об условиях сходимости конечномерных аппроксимаций метода невязки // Изв. вузов. Математика. 1980. № 11. С. 38–40.
6. **Данилин А.Р.** Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач // Журн. вычисл. математики. и мат. физики. 1985. Т. 25, № 8. С. 1123–1130.
7. **Танана В.П.** Об оптимальности методов регуляризации при решении вырожденных операторных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1985. № 9. С. 75–76.
8. **Лаврентьев М.М.** Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
9. **Латтес Р., Лионс Ж.Л.** Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
10. **Танана В.П.** Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 158 с.
11. **Бакушинский А.Б.** Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 672–677.
12. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.
13. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Поступила 14.01.2008

Сидикова Анна Ивановна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: 7413604@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.954

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПСЕВДОВЕРШИН КРАЕВОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА[1]

А. А. Успенский

Исследуется проблема возникновения негладких особенностей обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения типа эйконала. Предметом изучения являются псевдовершины краевого множества. Псевдовершины нужны для аналитического и численного конструирования ветвей сингулярного множества — множества, на котором решение краевой задачи теряет гладкость. Получены необходимые условия существования псевдовершин для случая гладкой границы невыпуклого краевого множества. Условия выписаны в терминах стационарности кривизны и стационарности координатных функций, задающих границу множества.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, волновой фронт, диффеоморфизм, эйконал, функция оптимального результата, сингулярное множество, симметрия.

A. A. Uspenskii. Necessary conditions for the existence of pseudovertices of the boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation.

The problem of the appearance of nonsmooth singularities in generalized solutions of first-order PDEs is studied. The Dirichlet boundary value problem is considered for an eikonal-type equation. The subject of the research is pseudovertices of the boundary set. Pseudovertices are useful for the analytic and numerical construction of branches of the singular set, i.e., the set where the solution of the boundary value problem is nonsmooth. Necessary conditions for the existence of pseudovertices are obtained in the case when a nonconvex boundary set has smooth boundary. The conditions are written in terms of constant curvature and constant coordinate functions defining the boundary of the set. Keywords: first-order PDE, minimax solution, wavefront, diffeomorphism, eikonal, optimal result function, singular set, symmetry.

Введение

Необходимость построения решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка обусловлена потребностями различных отраслей знания, к которым относятся, в частности, механика, геометрическая оптика, теория оптимального управления, дифференциальные игры. Гладкость краевых условий в задаче Коши или в задаче Дирихле не гарантирует гладкость решения уравнения такого типа на сколько-нибудь большой области в пространстве переменных. В этом смысле гладкость решения уравнения в частных производных первого порядка не является наследуемым свойством. Тем более неоправданно надеяться на дифференцируемость решения уравнения всюду, если краевые условия не являются гладкими. В приложениях же задачи с негладкими краевыми условиями не являются редкостью. Проблема построения нелокальной теории для таких уравнений снимается введением обобщенных решений. Известны различные подходы [1–5] к определению обобщенного решения уравнений. Концепция минимаксного решения [4], которая базируется на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [6], введена А. И. Субботиным. Эффективность минимаксного подхода нашла подтверждение в разработке теоретических методов и аппроксимационных процедур построения обобщенных решений различных классов краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений гамильтонова типа, изучаемых при исследовании задач управления и дифференциальных игр. Одной из таких задач является задача оптимального управления по быстродействию.

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-13), а также при поддержке РФФИ (проекты 14-01-00486_а и 13-01-96055).

В настоящей работе изучается проблема возникновения негладкости функции оптимального результата в плоской задаче о быстродействии для случая круговой индикатрисы. Достаточно простая по своей геометрии структура вектограммы скоростей делает эту задачу в некоторой степени модельной задачей. Сложность данной задаче придает допустимая по условию невыпуклость целевого множества. В этом случае даже при достаточно высокой гладкости границы цели у функции оптимального результата (минимаксного решения соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби) возникают множества, на которых эта функция терпит "градиентную катастрофу". Задача исследователя видится здесь, в частности, в том, чтобы научиться выявлять и строить сингулярные множества. Этой проблеме посвящен цикл работ [7–16], в которых предложены аналитические и численные алгоритмы построения сингулярных множеств и функции оптимального результата.

При изучении проблемы полезно помнить и использовать свойства решений задач формально близких к задаче о быстродействии. Известно [11], что функция оптимального результата задачи о быстродействии отличается лишь знаком от эйконала — фундаментального, по С. Н. Кружкову [11], решения основного уравнения геометрической оптики [17]. Совпадение множеств Лебега функции оптимального результата и эйконала позволяет применять при построении решения задачи о быстродействии методы и конструкции геометрической оптики, дифференциальной геометрии [18].

Волновые фронты эйконала являются линиями уровня функции оптимального результата. Эволюция волновых фронтов, их перестройка, возникновение и классификация особенностей изучаются методами и средствами теории особенностей гладких отображений [19; 20]. Конструкции этой теории также привлекаются при исследовании задач динамического управления [21]. В настоящей работе при изучении свойств множеств используются диффеоморфизмы, которые часто эксплуатируется в указанной теории. Кроме того, применяется удобная при громоздких аналитических аппроксимативных построениях техника струй — локальных разложений Тейлора.

Основной результат исследования состоит в получении необходимых условий для псевдовершин целевого множества в случае достаточно гладкой границы. Псевдовершины являются особыми точками границы краевого множества. С одной стороны, они геометрически локализуют экстремум кривизны кривой, а с другой — связаны с характеризацией множества с точки зрения меры невыпуклости [7; 8]. В задаче о быстродействии нахождение псевдовершин целевого множества позволяет строить ветви сингулярного множества функции оптимального результата.

Полученные в работе результаты создают конструктивную основу для введения обобщения производной, совпадающего в частном случае с симметрической производной Шварца [22; 23]. Означенное обобщение производной дает возможность описания свойств решения на сингулярной кривой соотношениями типа условий Ранкина — Гюгонио. Схожие конструкции при построении решений задачи Коши для уравнения гамильтонова типа рассматривались, например, в работе [24].

1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\min_{\nu\colon \|\nu\|\leqslant 1}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0, \tag{1.1}$$

$$u|_{\Gamma}=0. \tag{1.2}$$

Здесь $\|\nu\|=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ — норма вектора $\nu=(\nu_1,\nu_2)$. Краевое условие (1.2) определено на границе замкнутого множества $\Gamma=\partial M$. Предполагается, что Γ не имеет точек самопересечения. Дифференциальные свойства границы будут оговорены ниже при обосновании утверждений.

Структура минимаксного решения $u = u(x, y)$ задачи (1.1), (1.2) известна [11]:

$$u(x, y) = \rho\big((x, y), M\big).$$

Здесь $\rho(\mathbf{x}, M) = \min\limits_{\mathbf{a}\in M} \|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества M. Минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) является функцией оптимального результата в соответствующей задаче быстродействия [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leqslant 1$. Задача быстродействия заключается в приведении движения динамической системы (1.3) на множество M за наименьшее время за счет надлежащего выбора допустимого управления $\nu = (\nu_1, \nu_2)$.

С. Н. Кружков ввел [1] главное (фундаментальное) решение $u_k = u_k(x, y)$ краевой задачи Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В частном случае для изотропной среды фундаментальное решение краевой задачи

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 = 1 \tag{1.4}$$

с краевым условием

$$u|_\Gamma = 0 \tag{1.5}$$

имеет вид $u_k(x, y) = \rho\big((x, y), M\big)$. Здесь краевое условие то же, что и в задаче (1.1), (1.2). Нетрудно видеть, что карта линий уровня фундаментального решения задачи (1.4), (1.5), т. е. совокупность волновых фронтов, и карта линий уровня минимаксного решения задачи (1.1), (1.2) совпадают. Стало быть, нахождение решения задачи (1.1), (1.2) равносильно построению решения задачи (1.4), (1.5). Характер эволюции волновых фронтов определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. При этом выпуклость краевого множества играет весьма существенную роль. Невыпуклость этого множества влечет наличие у решения задачи сингулярного множества, которое в данном случае относится к множествам симметрии [13]. В достаточно общем случае сингулярное множество является объединением нуль- и одномерных многообразий, и это множество разбивает область рассмотрения решения задачи (1.1), (1.2) на подобласти, в которых решение дифференцируемо в классическом смысле. Отыскание сингулярного множества в аналитическом виде или же нахождение с помощью вычислительных процедур его аппроксимации заметным образом облегчает построение решение краевой задачи в целом. Особую роль при этом играют псевдовершины — точки на границе краевого множества, “сигнализирующие” о наличии одномерных многообразий, ветвей множества симметрии. Ранее установлена связь посредством аналитических формул между псевдовершинами краевого множества и крайними точками одномерных многообразий (“началами” ветвей сингулярного множества) в ряде случаев. При этом означенная связь выявлена в том числе и для ослабленных в части гладкости условий, налагаемых на границу краевого множества. В частности, получены формулы для крайних точек сингулярных кривых в случае, когда граница цели имеет разрыв по второй производной, и в случае кусочно-гладкой границы [16].

Ниже обоснуем необходимые условия существования псевдовершин для случая достаточно гладкой параметризованной границы краевого множества в условиях, допускающих невыпуклость множества.

2. Определения, основные понятия

Пусть $\gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$ — отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty \leqslant \hat{t} < \check{t} \leqslant +\infty$, на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ является гладкой в том смысле, что ее производные существуют, по крайней мере, до третьего порядка включительно. Образ $\Gamma = \gamma(t)$ этого отображения представляет собою плоскую кривую. Полагаем, что Γ является регулярной, т. е. вектор скорости $\gamma'(t) = \bigl(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\bigr)$ не обращается в нуль-вектор. Это означает, что точка $\gamma = \gamma(t)$ движется вдоль кривой Γ и при этом никогда не останавливается и не поворачивает обратно. Будем полагать, что кривая Γ не имеет точек самопересечения, т. е. не существует двух моментов $t_*, t_{**}, t_* \neq t_{**}$, что $\gamma(t_*) = \gamma(t_{**})$. Включим также в рассмотрение кривые, заданные на конечных интервалах $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$, допускающие доопределение в концевых точках $t = \hat{t}$ и $t = \check{t}$. Кривые вида $\Gamma = \gamma(t)$, когда $T = [\hat{t}, \check{t}]$, $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$, будем называть контурами.

Приводимые ниже в этом разделе определения являются переложением ранее введенных определений [9–12] со случая скалярной функции одного переменного на случай параметрически заданного отображения.

Рассмотрим локальные (определенные на малых интервалах) решения уравнения вида $G(t_1, t_2) = 0$. Для изучаемой краевой задачи вид функции $G(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, определен ниже. Локальные решения этого уравнения будем искать на прямоугольных открытых областях $\Pi_-(t_0) = \{(t_1, t_2)\colon t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)\}$. Здесь t_0 фиксировано, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Нас интересуют решения этого уравнения с заранее предписанными свойствами, а именно диффеоморфизмы [20]. Здесь диффеоморфизм — скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция. В отличие от распространенного определения диффеоморфизма, согласно которому от функции требуется существование производных высших порядков, в настоящем исследовании достаточно требовать существования производной только первого порядка. Говоря о локальном диффеоморфизме, мы подразумеваем, что он определен в малом — в окрестности или же в полуокрестности точки рассмотрения.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный уравнением $G(t_1, t_2) = 0$, непрерывен слева в точке $t_1 = t_0$ и отображает левую полуокрестность точки $t_1 = t_0$ в ее правую полуокрестность, если выполняются условия

(A1) $t_2\bigl((t_0 - \delta_1, t_0)\bigr) = (t_0, t_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$,

(A2) $\lim\limits_{t_1 \to t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$.

Нетрудно видеть, что односторонняя непрерывность слева диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ обеспечивается требованием строгой отрицательности его производной. Введенный в рассмотрение диффеоморфизм можно рассматривать как локальную перепараметризацию кривой, которая (перепараметризация) задается в окрестности точки неявно с помощью функции G. Диффеоморфизмы естественным образом входят в арсенал дифференциальной геометрии и теории особенностей гладких отображений [19; 20].

Отметим особенности предложенной математической модели. Введенный диффеоморфизм носит локальный характер, причем определяется с одной стороны (слева) от точки $t_1 = t_0$. При этом конструкции присуща симметрия в следующем смысле. Обратный локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$ при соблюдении условия (A2) определения 1 существует, определен с другой стороны (справа) от той же точки $t_2 = t_0$ и наследует аналог этого условия в том смысле, что $\lim\limits_{t_2 \to t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0$. Таким образом, в рамках этой конструкции точка $t = t_0$ “выколота” и рассматривается как предельный элемент. Это важное свойство математической модели, которое позволяет исследовать кривые с различными дифференциальными свойствами, не исключая негладкие кривые [9; 14]. На локальный диффеоморфизм можно смотреть так же, как на правило, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между парами точек, лежащими в окрестности точки рассмотрения по разные от нее стороны. Кроме того, здесь можно говорить о двойственной кривой $\widetilde{\Gamma}$, определенной в плоскости переменных t_1, t_2 непрерывной склейкой графиков исходного диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ и ему обратного диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$. При этом дифференциальные свойства кривой в точке определяются дифференциальными свойствами исходной кривой Γ [12].

Выберем произвольно и зафиксируем два момента $t_1 \in T$ и $t_2 \in T$, $t_1 < t_2$. Проведем через точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ касательные прямые.

Определение 2. Псевдовершиной кривой Γ будем называть точку

$$(x_0, y_0) \triangleq \lim_{t_1 \to t_0 - 0} (\overline{x}_*, \overline{y}_*),$$

где $(\overline{x}_*, \overline{y}_*) = \big(\overline{x}_*(t_1), \overline{y}_*(t_1)\big) = \big(x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1))\big)$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_*, y_*) = \big(x_*(t_1, t_2),\ y_*(t_1, t_2)\big)$ системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) = (y - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1), \\ (x - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) = (y - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2), \end{array} \right. \tag{2.1}$$

определяемое непрерывным слева в точке $t_1 = t_0$ локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ левой полуокрестности точки $t_1 = t_0$ на ее правую полуокрестность, который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) = 0. \tag{2.2}$$

Здесь

1) (x_*, y_*) — точка пересечения касательных к кривой Γ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$,

2) $G(t_1, t_2) = \rho^2\big(\gamma(t_1), (x_*, y_*)\big) - \rho^2\big(\gamma(t_2), (x_*, y_*)\big)$ — разность квадратов расстояний между указанными точками $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ кривой Γ и точкой (x_*, y_*) пересечения касательных, проведенных через $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$.

Определение 3. Ветвью $L(x_0, y_0)$ сингулярного множества L, где (x_0, y_0) — псевдовершина Γ, будем называть множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) + (y - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1) = 0, \\ (x - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) + (y - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2) = 0. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Здесь $t_2 = t_2(t_1)$ — непрерывный слева в точке $t_1 = t_0$ локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки $t_1 = t_0$ на ее правую полуокрестность, который задается уравнением (2.2).

Система уравнений (2.3) является сопряженной к системе линейных уравнений (2.1) и определяет точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, которые имеют не менее двух ортогональных проекций на кривую Γ, причем проекции отстоят от соответствующей точки проецирования на равном расстоянии.

3. Необходимые условия третьего порядка

Необходимые условия существования псевдовершины в терминах производных порядка не выше второго оказываются вырожденными. Вырожденность проявляется в том, что эти условия в форме уравнения, связывающего производные первого и второго порядков, удовлетворяются не только в псевдовершине гладкой кривой, но и во всех других точках кривой. Одно из объяснений этого факта заключается в том, что псевдовершина является кратным решением уравнения (2.2).

В этом разделе мы преодолеем проблему кратности корней нелинейного уравнения (2.2) и обоснуем необходимые условия для псевдовершин в классе кривых, имеющих производные не ниже третьего порядка. Для сокращения и “компактификации” объема вычислений будем использовать локальные разложения скалярных функций вблизи точки $t = t_0$ по формуле Тейлора, технику струй. Пусть k — натуральное число. Следуя [19], под k-струей достаточное число раз дифференцируемой функции $f(t), t \in T$, будем понимать многочлен Тейлора k-го порядка

$$J^k_{t,t_0} f(\delta) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \delta^i,\ \ \delta = t - t_0.$$

Пусть f и g — дифференцируемые функции. Сумма струй этих функций находится естественным образом как сумма соответствующих многочленов Тейлора. Произведение k-струй определяется по следующему правилу. Если

$$J^k_{t,t_0}f(\delta_1)=\sum_{i=0}^{k}\frac{f^{(i)}(t_0)}{i!}\delta_1^i,\quad \delta_1=t-t_0,\quad J^k_{\tau,t_0}g(\delta_2)=\sum_{i=0}^{k}\frac{g^{(i)}(t_0)}{i!}\delta_2^i,\quad \delta_2=\tau-t_0,$$

k-струи функций f и g соответственно, то их произведением

$$J^k_{t,t_0}f(\delta_1)\otimes J^k_{\tau,t_0}g(\delta_2)$$

называется многочлен, получаемый естественным (т. е. почленным) умножением многочленов $J^k_{t,t_0}f(\delta_1)$ и $J^k_{\tau,t_0}g(\delta_2)$, в котором отброшены все члены степени выше k.

В последующем будем оперировать 1-, 2- и 3-струями. При этом, учитывая трехточечность рассматриваемой модели, будем различать струи, получаемые дифференцированием "назад", т. е. когда $t_0<t=t_2$, и струи, получаемые дифференцированием "вперед", т. е. когда $t_0>t=t_1$. Примем обозначения

$$\Delta_1=t_0-t_1>0,\quad \Delta_2=t_2-t_0>0,\quad \Delta=\Delta_1+\Delta_2.$$

Тогда две отличающиеся "направлением" дифференцирования 2-струи имеют вид

$$J^2_{t_2,t_0}f(\Delta_2)=f(t_0)+\Delta_2f'(t_0)+\frac{\Delta_2^2}{2}f''(t_0),\ J^2_{t_1,t_0}f(\Delta_1)=f(t_0)-\Delta_1f'(t_0)+\frac{\Delta_1^2}{2}f''(t_0).$$

В силу введенного выше определения произведение этих 2-струй есть многочлен второго порядка относительно приращений Δ_1 и Δ_2, которые, вообще говоря, рассматриваются как независимые друг от друга величины:

$$J^2_{t_2,t_0}f(\Delta_2)\otimes J^2_{t_1,t_0}g(\Delta_1)$$

$$=f(t_0)g(t_0)-\Delta_1f(t_0)g'(t_0)+\Delta_2f'(t_0)g(t_0)-\Delta_1\Delta_2f'(t_0)g'(t_0)+\frac{\Delta_2^2}{2}f''(t_0)g(t_0)+\frac{\Delta_1^2}{2}f(t_0)g''(t_0).$$

Пусть $a(t)=\big(a_1(t),a_2(t)\big)$, $b(t)=\big(b_1(t),b_2(t)\big)$ — дифференцируемые вектор-функции скалярного аргумента $t\in T=(\hat t,\check t)$. Введем обозначения:

$\langle a(t),b(t)\rangle$ — скалярное произведение векторов $a(t)$ и $b(t)$;

$\det\big(a(t_1),b(t_2)\big)=a_1(t_1)b_2(t_2)-a_2(t_1)b_1(t_2)$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix}a_1(t_1) & a_2(t_1)\\ b_1(t_2) & b_2(t_2)\end{pmatrix}$, построенный на векторах $a(t_1)$ и $b(t_2)$, $t_1\in T$, $t_2\in T$.

В дальнейшем на кривую Γ будем накладывать условия:

(B1) $\gamma'(t)\neq 0$, $t\in T$;

(B2) $\det\big(\gamma'(t),\gamma''(t)\big)\neq 0$, $t\in T$.

Условие (B1) — это условие регулярности кривой Γ, постулирующее невырожденность касательного вектора. Условие (B2) формально означает отличие от нуля кривизны кривой Γ в соответствующей точке. Напомним, что кривизна кривой Γ в точке $\gamma(t)$ определяется формулой $\kappa\big(\gamma(t)\big)=\dfrac{\det\big(\gamma'(t),\gamma''(t)\big)}{\|\gamma'(t)\|^3}$ (см. [18]). Ненулевая кривизна свидетельствует о локальной выпуклости кривой, что гарантирует существование решений системы (2.1) в определении 2 псевдовершины. Кроме того, важно отметить, что условия (B1), (B2) обеспечивают для каждой координатной функции отличие от нуля хотя бы одной из производных первого и второго порядков. Это означает, что координатные функции не являются плоскими и, следовательно, могут быть локально аппроксимированы струями [20].

Теорема (Необходимые условия третьего порядка). *Если $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ — псевдовершина трижды дифференцируемой кривой $\Gamma=\gamma(t)$ и в точке $t=t_0$ выполняются условия* (B1), (B2), *то с необходимостью в указанной точке выполняется одно из следующих равенств:*

$$\gamma_2'\left(\det(\gamma',\gamma''')\|\gamma'\|^2-3\det(\gamma',\gamma'')\langle\gamma',\gamma''\rangle\right)=0, \tag{3.1}$$

$$\gamma_1' \left(\det(\gamma', \gamma''')\|\gamma'\|^2 - 3\det(\gamma', \gamma'')\langle\gamma', \gamma''\rangle\right) = 0. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию

$$(x_0, y_0) = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} (\overline{x}_*, \overline{y}_*),$$

где $(\overline{x}_*, \overline{y}_*) = (\overline{x}_*(t_1), \overline{y}_*(t_1))$ — однопараметрическое подмножество решений системы (2.1), определяемое локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, являющимся решением уравнения (2.2). Кривая регулярная. Пусть для определенности $\gamma_1'(t_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $t = t_0$ приращение $\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) \neq 0$ и производные $\gamma_1'(t_2) \neq 0$, $\gamma_1'(t_1) \neq 0$. В этом случае уравнение (2.2) допускает эквивалентное представление

$$2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \Big(\frac{\gamma_2'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)} + \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_2)}\Big)(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2$$

$$- 2\frac{\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)}(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) - \Big(\frac{\gamma_2'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)} + \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_2)}\Big)(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 = 0. \tag{3.3}$$

Теоретически возможны два случая:

С л у ч а й 1) $\Big(\frac{\gamma_2'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)} + \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_2)}\Big) = 0.$

С л у ч а й 2) $\Big(\frac{\gamma_2'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)} + \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_2)}\Big) \neq 0.$

Пусть реализовался случай 1). Тогда из (3.3) следует

$$2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)) - 2\frac{\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)}(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) = 0.$$

Отсюда

$$(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))\Big(1 - \frac{\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)}\Big) = 0. \tag{3.4}$$

Множитель $1 - \frac{\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)}$ строго больше нуля, поскольку в рамках случая 1) отношения производных $\frac{\gamma_2'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)}$ и $\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_2)}$ имеют разные знаки либо одновременно равны нулю.

Приравняв первый сомножитель к нулю, рассмотрим уравнение

$$\gamma_2(t_0) + \gamma_2'(t_0)(t_1 - t_0) + o(t_1 - t_0) - \gamma_2(t_0) - \gamma_2'(t_0)(t_2 - t_0) + o(t_2 - t_0) = 0,$$

$$\gamma_2'(t_0)(t_1 - t_0) + o(t_1 - t_0) - \gamma_2'(t_0)(t_2 - t_0) + o(t_2 - t_0) = 0. \tag{3.5}$$

Здесь переменные связаны в силу локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$, $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$. Поделив обе части уравнения (3.5) на $(t_1 - t_0)$ и перейдя к пределу, получим $2\gamma_2'(t_0) = 0$. Отсюда $\gamma_2'(t_0) = 0$.

Если допустить, что второй сомножитель в левой части уравнения равен нулю, то аналогичными рассуждениями придем к равенству $\gamma_1'(t_0) = 0$, которое невозможно по предположению. Стало быть, единственное решение уравнению (3.4) доставляет первый сомножитель. Получаем, что при заявленном предположении $\gamma_1'(t_0) \neq 0$ вторая компонента псевдовершины стационарна: $\gamma_2'(t_0) = 0$. На этом рассмотрение случая 1) завершено.

Очевидно, что если исходить из условия регулярности кривой и допустить теперь, что $\gamma_2'(t_0) \neq 0$, то столкнемся со случаем, симметричным случаю 1), и в итоге получим условие стационарности на первую компоненту псевдовершины: $\gamma_1'(t_0) = 0$.

Пусть теперь реализовался случай 2). После алгебраических преобразований уравнение (3.3) принимает вид

$$\Big(\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}\Big)^2+2\frac{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)-\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)}\cdot\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}-1=0.$$

Примем обозначения

$$\lambda=\lambda(t_1,t_2)\triangleq\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)},$$

$$\mu=\mu(t_1,t_2)\triangleq\frac{\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)-\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)}.$$

Тогда относительно λ получаем квадратное уравнение $\lambda^2+2\mu\lambda-1=0$.

Нельзя не обратить внимание на то, что уравнение по своей структуре близко к уравнению гармонической пропорции (золотого сечения) [25]. Наше уравнение имеет два действительных решения разного знака

$$\lambda_-=-\mu-\sqrt{\mu^2+1}<0,\quad \lambda_+=-\mu+\sqrt{\mu^2+1}>0.$$

Таким образом трехчлен раскладывается на множители с действительными коэффициентами $\lambda^2+2\mu\lambda-1=(\lambda-\lambda_-)(\lambda-\lambda_+)$.

Покажем, что точка $t_1=t_0$ является его корнем, при этом является корнем второго сомножителя в разложении, т. е. указанная точка есть решение уравнения

$$\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}+\mu(t_1,t_2)-\sqrt{(\mu(t_1,t_2))^2-1}=0, \tag{3.6}$$

когда переменные связаны в силу диффеоморфизма $t_2=t_2(t_1)$.

Преобразуем левую значимую часть уравнения (3.6) с помощью алгебраических операций. Поскольку

$$\mu^2+1=\frac{(s(t_1))^2(s(t_2))^2}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)},$$

где $s(t)=\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}$ — длина касательного вектора, то

$$\lambda_+=-\mu+\sqrt{\mu^2+1}=\frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_1)+s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_1)}.$$

Уравнение (3.6) принимает вид

$$\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}-\frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)+s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)}=0. \tag{3.7}$$

Воспользуемся формулами для струй, дифференцируя функции всякий раз в точке $t=t_0$. При этом дифференцирование осуществляем "вперед" по отношению к точке $t=t_1$ и "назад" по отношению к точке $t=t_2$. Начнем с вычисления 1-струй:

$$J^1_{t_2,t_0}\gamma_2=\gamma_2+\Delta_2\gamma_2',\quad J^1_{t_1,t_0}\gamma_2=\gamma_2-\Delta_1\gamma_2'\ \text{ и }\ J^1_{t_2,t_0}\gamma_2-J^1_{t_1,t_0}\gamma_2=(\Delta_2+\Delta_1)\gamma_2'=\Delta\gamma_2',$$

$$J^1_{t_2,t_0}\gamma_1=\gamma_1+\Delta_2\gamma_1',\quad J^1_{t_1,t_0}\gamma_1=\gamma_1-\Delta_1\gamma_1'\ \text{ и }\ J^1_{t_2,t_0}\gamma_1-J^1_{t_1,t_0}\gamma_1=(\Delta_2+\Delta_1)\gamma_1'=\Delta\gamma_1'.$$

Отсюда аппроксимация частного $\dfrac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}$ после сокращения на Δ принимает вид

$$\frac{J^1_{t_2,t_0}\gamma_2-J^1_{t_1,t_0}}{J^1_{t_2,t_0}\gamma_1-J^1_{t_1,t_0}}=\frac{\Delta\gamma_2'}{\Delta\gamma_1'}=\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}. \tag{3.8}$$

Найдем произведения 1-струй:

$$J^1_{t_1,t_0}\gamma_2 \otimes J^1_{t_2,t_0} = \gamma_2'\gamma_1' - \Delta_1\gamma_2''\gamma_1' + \Delta_2\gamma_1''\gamma_2',$$

$$J^1_{t_2,t_0}\gamma_2 \otimes J^1_{t_1,t_0} = \gamma_2'\gamma_1' + \Delta_2\gamma_2''\gamma_1' - \Delta_1\gamma_1''\gamma_2'.$$

Тогда

$$J^1_{t_1,t_0}\gamma_2 \otimes J^1_{t_2,t_0} + J^1_{t_2,t_0}\gamma_2 \otimes J^1_{t_1,t_0} = 2\gamma_2'\gamma_1' + (\Delta_2 - \Delta_1)\gamma_2''\gamma_1' + (\Delta_2 - \Delta_1)\gamma_1''\gamma_2'.$$

В приведенных разложениях функций приращения выбирались независимыми. Далее свяжем их, полагая стесненными в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ с предельными соотношениями $\lim\limits_{t_1\to t_0-0} t_2(t_1) = t_0$, $\lim\limits_{t_1\to t_0-0} \dfrac{dt_2}{dt_1} = -1$. Поскольку

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{\Delta_2}{\Delta} = \lim_{t_1\to t_0-0}\frac{(t_2(t_1)-t_0)'}{(t_2(t_1)-t_1)'} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t_1\to t_0-0}\frac{\Delta_1}{\Delta} = \lim_{t_1\to t_0-0}\frac{(t_0-t_1)'}{(t_2(t_1)-t_1)'} = \frac{1}{2},$$

то $\lim\limits_{t_1\to t_0-0}\dfrac{\Delta_2-\Delta_1}{\Delta} = 0$. Тогда разность приращений, найденная с учетом означенной дифференциальной связи $t_2 = t_2(t_1)$, является функцией класса $o(\Delta_1)$:

$$\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta} = o(\Delta_1), \quad \Delta_1 \downarrow 0. \tag{3.9}$$

Стало быть, соответствующие члены разложений вида $\mathrm{const}(\Delta_2-\Delta_1)^k$ имеют порядок малости $o(\Delta_1^k)$ и ими в разложении k-го порядка допустимо пренебречь. В то же время $\Delta_2 = \Delta_1 + o(\Delta_1)$ и

$$\Delta = 2\Delta_1 + o(\Delta_1),\ \Delta_1 \downarrow 0. \tag{3.10}$$

С учетом этого замечания линейная аппроксимация $J^1_{t_1,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma_1' + J^1_{t_2,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_1,t_0}\gamma_1'|_{t_2=t_2(t_1)}$ суммы $\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)$, вычисляемая в силу дифференциальной связи $t_2 = t_2(t_1)$, т. е. когда $\Delta_2 = \Delta_1 + o(\Delta_1)$, $\Delta_2 - \Delta_1 = o(\Delta_1)$, $\Delta_1 \downarrow 0$, “теряет” линейные по приращениям члены:

$$J^1_{t_1,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma_1' + J^1_{t_2,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_1,t_0}\gamma_1'|_{t_2=t_2(t_1)} = 2\gamma_2'\gamma_1'.$$

Действуя аналогично, находим аппроксимации функции $\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_1) - \gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)$ и $s(t_1)s(t_2)$:

$$J^1_{t_1,t_0}\gamma_2'\otimes J^1_{t_2,t_0}\gamma_2' - J^1_{t_1,t_0}\gamma_1'\otimes J^1_{t_2,t_0}\gamma_1'$$

$$= (\gamma_2' - \Delta_1\gamma_2'')\otimes(\gamma_2' + \Delta_2\gamma_2'') - (\gamma_1' - \Delta_1\gamma_1'')\otimes(\gamma_1' + \Delta_1\gamma_1'')$$

$$= (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)\gamma_2''\gamma_2' + (\Delta_1 - \Delta_2)\gamma_1''\gamma_1'.$$

$$(J^1_{t_1,t_0}\gamma_2'\otimes J^1_{t_2,t_0}\gamma_2' - J^1_{t_1,t_0}\gamma_1'\otimes J^1_{t_2,t_0}\gamma_1')|_{t_2=t_2(t_1)} = (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2.$$

$$J^1_{t_1,t_0}s_1\otimes J^1_{t_2,t_0}s_2 = (s - \Delta_1 s')\otimes(s + \Delta_2 s) = s^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)(s')^2,$$

$$(J^1_{t_1,t_0}s_1\otimes J^1_{t_2,t_0}s_2)|_{t_2=t_2(t_1)} = s^2.$$

Подставляя в левую часть уравнения (3.7) 1-струи, найденные с учетом диффеоморфизма, получим

$$\frac{J^1_{t_2,t_0}\gamma_2 - J^1_{t_1,t_0}\gamma_2}{J^1_{t_2,t_0}\gamma_1 - J^1_{t_1,t_0}\gamma_1}$$

$$-\frac{(J^1_{t_1,t_0}\gamma_2'\otimes J^1_{t_2,t_0}\gamma_2' - J^1_{t_1,t_0}\gamma_1'\otimes J^1_{t_2,t_0}\gamma_1')|_{t_2=t_2(t_1)} + (J^1_{t_1,t_0}s_1\otimes J^1_{t_2,t_0}s_2)|_{t_2=t_2(t_1)}}{J^1_{t_1,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma_1' + J^1_{t_2,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_1,t_0}\gamma_1'|_{t_2=t_2(t_1)}} = 0.$$

Равенство нулю означает, что существует функция $g(t_1)$ такая, что левая часть уравнения (3.7) раскладывается на множители

$$\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}+\mu-\sqrt{\mu^2+1}=\Delta_1\, g(t_1).$$

Другими словами, $t_1 = t_0$ является корнем именно этого уравнения — одного из двух уравнений, полученных при разложении квадратного трехчлена на множители. Этот вывод не прибавляет дополнительной информации в копилку необходимых условий. В то же время этот результат означает, что членов первого порядка при разложении функций недостаточно для получения необходимых условий. Увеличим порядок аппроксимации значимой части рассматриваемого уравнения (3.7). Перейдем в разложениях ко второму порядку, формируя многочлены второго порядка по приращениям.

Прежде отметим, что $t_1 = t_0$ является еще корнем и числителя, и знаменателя дроби $\dfrac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}$. Действительно (см. (3.8), (3.10)),

$$\left.\frac{J^1_{t_2,t_0}\gamma_2-J^1_{t_1,t_0}\gamma_2}{J^1_{t_2,t_0}\gamma_1-J^1_{t_1,t_0}\gamma_1}\right|_{t_2=t_2(t_1)}=\frac{\Delta\gamma_2'}{\Delta\gamma_1'}=\frac{2\Delta_1\gamma_2'}{2\Delta_1\gamma_1'}=\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}.$$

Это означает, что при построении аппроксимаций второго порядка для означенной дроби потребуется считать струи, по крайней мере, на единицу выше по порядку. Вычислим 3-струи координатных функций:

$$J^3_{t_2,t_0}\gamma_2=\gamma_2+\Delta_2\gamma_2'+\frac{\Delta_2^2}{2}\gamma_2''+\frac{\Delta_2^3}{6}\gamma_2''',\quad J^3_{t_1,t_0}\gamma_2=\gamma_2-\Delta_1\gamma_2'+\frac{\Delta_1^2}{2}\gamma_2''-\frac{\Delta_1^3}{6}\gamma_2''',$$

$$J^3_{t_2,t_0}\gamma_2-J^3_{t_1,t_0}\gamma_2=\Big(\gamma_2'+\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}\gamma_2''+\frac{(\Delta_2-\Delta_1)^2+\Delta_1\Delta_2}{6}\gamma_2'''\Big),$$

$$J^3_{t_2,t_0}\gamma_1-J^3_{t_1,t_0}\gamma_1=\Big(\gamma_1'+\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}\gamma_1''+\frac{(\Delta_2-\Delta_1)^2+\Delta_1\Delta_2}{6}\gamma_1'''\Big).$$

Отсюда аппроксимация частного $\dfrac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}$ после сокращения на Δ принимает вид

$$\frac{J^3_{t_2,t_0}\gamma_2-J^3_{t_1,t_0}\gamma_2}{J^3_{t_2,t_0}\gamma_1-J^3_{t_1,t_0}\gamma_1}=\frac{\gamma_2'+\dfrac{\Delta_2-\Delta_1}{2}\gamma_2''+\dfrac{(\Delta_2-\Delta_1)^2+\Delta_1\Delta_2}{6}\gamma_2'''}{\gamma_1'+\dfrac{\Delta_2-\Delta_1}{2}\gamma_1''+\dfrac{(\Delta_2-\Delta_1)^2+\Delta_1\Delta_2}{6}\gamma_1'''}.$$

Эта же аппроксимация, но улучшенная в силу диффеоморфизма с учетом (3.9), избавляет от членов с производной второго порядка:

$$\left.\frac{J^3_{t_2,t_0}\gamma_2-J^3_{t_1,t_0}\gamma_2}{J^3_{t_2,t_0}\gamma_1-J^3_{t_1,t_0}\gamma_1}\right|_{t_2=t_2(t_1)}=\frac{\gamma_2'+\dfrac{\Delta_1^2}{6}\gamma_2'''}{\gamma_1'+\dfrac{\Delta_1^2}{6}\gamma_1'''}.$$

Аппроксимируем произведения функций:

$$J^2_{t_1,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma_1'=\gamma_1'\gamma_2'-\Delta_1\gamma_1'\gamma_2''+\Delta_2\gamma_2'\gamma_1''-\Delta_1\Delta_2\gamma_1''\gamma_2''+\frac{\Delta_1^2}{2}\gamma_1'\gamma_2'''+\frac{\Delta_2^2}{2}\gamma_1'''\gamma_2',$$

$$J^2_{t_2,t_0}\gamma_2'\otimes J^2_{t_1,t_0}\gamma_1'=\gamma_1'\gamma_2'+\Delta_2\gamma_1'\gamma_2''+\frac{\Delta_2^2}{2}\gamma_1'\gamma_2'''-\Delta_1\gamma_1''\gamma_2'-\Delta_1\Delta_2\gamma_1''\gamma_2''+\frac{\Delta_1^2}{2}\gamma_1'''\gamma_2',$$

$$J^2_{t_1,t_0}\gamma'_2\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma'_1+J^2_{t_2,t_0}\gamma'_2\otimes J^2_{t_1,t_0}\gamma'_1=2\gamma'_1\gamma'_2+(\Delta_2-\Delta_1)\gamma'_1\gamma''_2+(\Delta_2-\Delta_1)\gamma'_2\gamma''_1-2\Delta_1\Delta_2\gamma''_1\gamma''_2$$
$$+\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2}{2}\gamma'_1\gamma'''_2+\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2}{2}\gamma'''_1\gamma'_2.$$

Сложим:

$$(J^2_{t_1,t_0}\gamma'_2\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma'_2+J^2_{t_2,t_0}\gamma'_2\otimes J^2_{t_1,t_0}\gamma'_1)|_{t_2=t_2(t_1)}=2\gamma'_1\gamma'_2-2\Delta_1^2\gamma''_1\gamma''_2+\Delta_1^2\gamma'_1\gamma'''_2+\Delta_1^2\gamma'''_1\gamma'_2.$$

Продолжим вычисления:

$$J^2_{t_1,t_0}\gamma'_2\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma'_2-J^2_{t_1,t_0}\gamma'_1\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma'_1=(\gamma'_2)^2-(\gamma'_1)^2+(\Delta_2-\Delta_1)\gamma''_2\gamma'_2+(\Delta_2-\Delta_1)\gamma''_1\gamma'_1$$
$$+\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2}{2}(\gamma'_2\gamma'''_2-\gamma'_1\gamma'''_1)+\Delta_1\Delta_2\left((\gamma''_1)^2-(\gamma''_2)^2\right).$$

Тогда

$$(J^2_{t_1,t_0}\gamma'_2\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma'_2-J^2_{t_1,t_0}\gamma'_1\otimes J^2_{t_2,t_0}\gamma'_1)|_{t_2=t_2(t_1)}=(\gamma'_1)^2-(\gamma'_2)^2+\Delta_1^2\left((\gamma''_1)^2-(\gamma''_2)^2+\gamma'_2\gamma'''_2-\gamma'_1\gamma'''_1\right).$$

Разберемся с аппроксимациями произведения длин касательных векторов. Структура разложения для функции $s=s(t)$ идентична структуре соответствующего разложения для любой другой (коэффициенты многочлена Тейлора вычисляются по одним и тем же правилам вне зависимости от функции). Поэтому, заменив, например, в формуле для $J^2_{t_1,t_0}\gamma'_1$ величину γ'_1 на $s_1=s(t_1)$, а в формуле для $J^2_{t_2,t_0}\gamma'_2$ величину γ'_2 на $s_2=s(t_2)$, получим

$$J^2_{t_1,t_0}s_1\otimes J^2_{t_2,t_0}s_2=s^2-\Delta_1^2(s')^2+\Delta_1^2ss''.$$

Подставив производные длины $s=s(t)$ касательного вектора (аргумент опущен)

$$s'=\frac{\langle\gamma',\gamma''\rangle}{s},$$

$$s''=\frac{(\|\gamma''\|^2+\langle\gamma',\gamma'''\rangle)s^2-\langle\gamma',\gamma''\rangle^2}{s^3}=\frac{\langle\gamma',\gamma'''\rangle s^2+(\det(\gamma',\gamma''))^2}{s^3},$$

получим

$$J^1_{t_1,t_0}s_1\otimes J^1_{t_2,t_0}s_2|_{t_2=t_2(t_1)}=s^2-\Delta_1^2\frac{\langle\gamma',\gamma''\rangle^2}{s^2}+\Delta_1^2\langle\gamma',\gamma'''\rangle+\Delta_1^2\frac{(\det(\gamma',\gamma''))^2}{s^2}.$$

Воспользуемся найденными результатами локальной аппроксимации функций, определяющих значимую часть уравнения (3.7), и запишем аппроксимацию левой части этого уравнения с помощью струй:

$$\frac{\gamma'_2+\dfrac{\Delta_1^2}{6}\gamma'''_2}{\gamma'_1+\dfrac{\Delta_1^2}{6}\gamma'''_1}-\frac{(\gamma'_2)^2-(\gamma'_1)^2+\Delta_1^2\left((\gamma''_1)^2-(\gamma''_2)^2+\gamma'_2\gamma'''_2-\gamma'_1\gamma'''_1\right)+s^2-\Delta_1^2(s')^2+\Delta_1^2ss''}{2\gamma'_1\gamma'_2+\Delta_1^2(-2\gamma''_1\gamma''_2+\gamma'_1\gamma'''_2+\gamma'''_1\gamma'_2)}$$

$$=\frac{\gamma'_2+\dfrac{\Delta_1^2}{6}\gamma'''_2}{\gamma'_1+\dfrac{\Delta_1^2}{6}\gamma'''_1}-\frac{2(\gamma'_2)^2+\Delta_1^2\left(\gamma'_2\gamma'''_2-\gamma'_1\gamma'''_1+(\gamma''_1)^2-(\gamma''_2)^2-(s')^2+ss''\right)}{2\gamma'_1\gamma'_2+\Delta_1^2(-2\gamma''_1\gamma''_2+\gamma'_1\gamma'''_2+\gamma'''_1\gamma'_2)}.$$

Отсюда аппроксимация числителя результирующей дроби левой части уравнения (3.7), выписанная до членов второго порядка включительно, принимает вид

$$2\gamma'_1(\gamma'_2)^2+\frac{\Delta_1^2}{3}\gamma'_1\gamma'_2\gamma'''_2+\Delta_1^2\gamma'_2(-2\gamma''_1\gamma''_2+\gamma'_1\gamma'''_2+\gamma'''_1\gamma'_2)-2\gamma'_1(\gamma'_2)^2-\frac{\Delta_1^2}{3}(\gamma'_2)^2\gamma'''_1$$

$$+ \Delta_1^2\gamma_1'\left(\gamma_1'\gamma_1''' - \gamma_2'\gamma_2''' - (\gamma_1'')^2 + (\gamma_2'')^2 + (s')^2 - ss''\right)$$

$$= \frac{\Delta_1^2}{3}\gamma_2'\det(\gamma',\gamma''') + \Delta_1^2\gamma_2'(-2\gamma_1''\gamma_2'' + \gamma_1'\gamma_2''' + \gamma_1'''\gamma_2')$$

$$+ \Delta_1^2\gamma_1'\left(\gamma_1'\gamma_1''' - \gamma_2'\gamma_2''' - (\gamma_1'')^2 + (\gamma_2'')^2 + (s')^2 - ss''\right)$$

$$= \frac{\Delta_1^2}{3}\gamma_2'\det(\gamma',\gamma''') + \Delta_1^2\gamma_1'\frac{\langle\gamma',\gamma''\rangle^2 - (\det(\gamma',\gamma''))^2}{s^2}$$

$$+ \Delta_1^2\left(-\gamma_2'\det(\gamma',\gamma''') + \gamma_2''\det(\gamma',\gamma'') - \gamma_1''\langle\gamma',\gamma'''\rangle\right).$$

Здесь в конце равенства учтено соотношение

$$(s')^2 - ss'' = \frac{\langle\gamma',\gamma''\rangle^2 - (\det(\gamma',\gamma''))^2}{s^2} - \langle\gamma',\gamma'''\rangle.$$

Найденный многочлен является аппроксимацией на языке струй с точностью до $o(\Delta_1^2)$ левой части уравнения (3.7). В итоге, поделив разложение левой части уравнения (3.7) на Δ_1^2 и перейдя к пределу при $t_1 \to t_0 - 0$, имеем

$$-\frac{2\gamma_2'}{3}\det(\gamma',\gamma''') + \gamma_1'\frac{\langle\gamma',\gamma''\rangle^2 - (\det(\gamma',\gamma''))^2}{s^2} + \gamma_2''\det(\gamma',\gamma'') - \gamma_1''\langle\gamma',\gamma'''\rangle = 0.$$

Необходимые условия третьего порядка получены. Упростим их формат представления с помощью алгебраических преобразований:

$$-\frac{2\gamma_2'}{3}\det(\gamma',\gamma''') + \frac{2\gamma_2'\langle\gamma',\gamma''\rangle\det(\gamma',\gamma'')}{s^2} = 0.$$

Отсюда незамедлительно получаем (3.1).

На этом рассмотрение случая 2) завершено. Вывод равенства (3.1) осуществлялся при предположении $\gamma_1'(t_0) \neq 0$. Если же допустить, что $\gamma_2'(t_0) \neq 0$, то, повторяя рассуждения, получим симметричный результат. А именно псевдовершина $\gamma = \gamma(t_0)$ удовлетворит равенству (3.2).

Обобщая заметим, что в рамках случая 1) и ему симметричного случая в качестве необходимых условий получили выполнение одного из двух равенств:

1) $\gamma_2'(t_0) = 0$, когда $\gamma_1'(t_0) \neq 0$;

2) $\gamma_1'(t_0) = 0$, когда $\gamma_2'(t_0) \neq 0$.

Условия (3.1) и (3.2) являются более общими. □

Интерпретация результата следующая. Псевдовершины краевого множества, порождающие сингулярные кривые, содержатся во множестве, объединяющем точки двух совокупностей. Первую совокупность составляют точки со стационарной кривизной, т. е. точки $\gamma = \gamma(t_0)$, в которых выполняется равенство

$$\det(\gamma',\gamma''')\|\gamma'\|^2 - 3\langle\gamma',\gamma''\rangle\det(\gamma',\gamma'') = 0.$$

Вторую совокупность составляют точки $\gamma = \gamma(t_0) = \big(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)\big)$, в которых одна компонента стационарная, а вторая таковой не является, т. е. здесь выполняется одно условие из двух: $\gamma_1'(t_0) = 0$ и $\gamma_2'(t_0) \neq 0$ либо же $\gamma_2'(t_0) = 0$ и $\gamma_1'(t_0) \neq 0$. Ясно, что два выделенных подмножества точек, вообще говоря, могут пересекаться по непустому множеству.

4. Пример построения решения краевой задачи Дирихле

Пусть в задаче Дирихле (1.1), (1.2) контур Γ, ограничивающий краевое множество M, задан уравнением

$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + h\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt - h\sin(t - mt). \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь параметры $t \in [0, 8\pi]$, $R = 1, m = 1/4, h = 1/5$. Кривая (4.1) известна как гипотрохоида, она является траекторией точки, расположенной на круге радиуса $r = m\,R$ на расстоянии h от его центра, катящемся без скольжения с внутренней стороны окружности радиуса R.

Теорема позволяет найти псевдовершины $(0.55, 0.55)$, $(0.55, -0.55)$, $(-0.55, -0.55)$, $(-0.55, 0.55)$, порождающие четыре ветви сингулярного множества L. На рис. 1. псевдовершины помечены маркерами в виде кружков. Ветви сингулярного множества являются открытыми лучами и лежат на биссектрисах всех четырех квадрантов. На рис. 1. также показана эволюция волновых фронтов Φ — линий уровня функции оптимального результата $u = u(x, y)$ для соответствующей задачи о быстродействии. График этой недифференцируемой функции представлен на рис. 2. Функция $u = u(x, y)$ является супердифференцируемой, т. е. при локальном рассмотрении она либо дифференцируема, либо недифференцируема и вогнута.

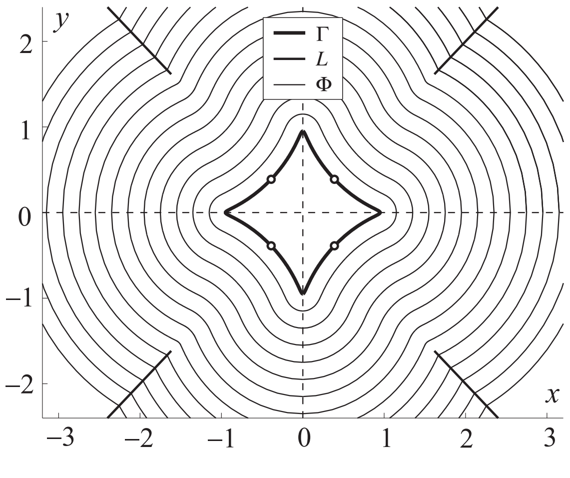


Рис. 1. Контур Γ, псевдовершины краевого множества, сингулярное множество L и волновые фронты Φ.

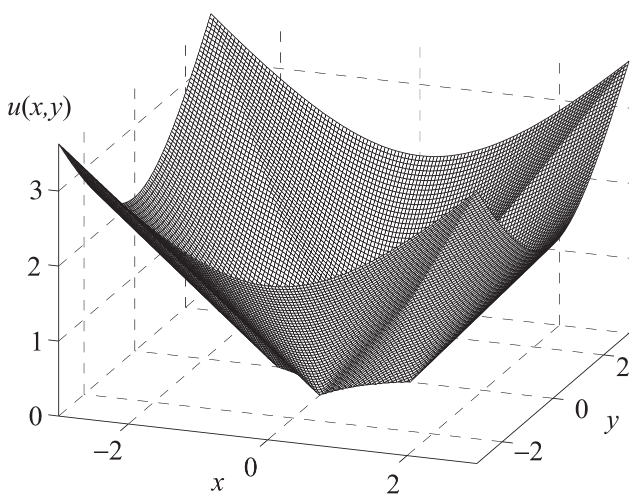


Рис. 2. График функции оптимального результата $u = u(x, y)$ в задаче о быстродействии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I // Мат. сб. 1974. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
2. **Субботин А.И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
3. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
4. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Институт компьютерных технологий. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
5. **Колокольцов В.Н., Маслов В.П.** Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. 1987. Vol. 296 (4). С. 796–800.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.** α-множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с.
8. **Успенский А.А.** Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. 21 с.
9. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. 9-й Междунар. Четаевской конф. 2007. Т. 5. С. 224–236.
10. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. 2008. № 3. С. 27–37.
11. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
12. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.
13. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
14. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
15. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Сер. 10, вып. 3. С. 157–167.
16. **Успенский А.А.** Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 276–290.
17. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.
18. **Бюшгенс С.С.** Дифференциальная геометрия. М.: ГИТТЛ, 1940. 300 с.
19. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
20. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
21. **Закалюкин В.М.** Огибающие семейств волновых фронтов и теория управления // Тр. МИАН. 1995. Т. 209. С. 133–142.
22. **Бляшке В.** Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.
23. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
24. **Субботина Н.Н., Колпакова Е.А.** О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана в терминах классических характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 202–218.
25. **Ohm Martin.** Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Bd 2. Leipzig: Friedrich Volckmar, 1835.

Успенский Александр Александрович
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила 10.12.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.957+517.988+517.977.56

О КУСОЧНО ПОСТОЯННОЙ АППРОКСИМАЦИИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

А. В. Чернов

Статья посвящена задачам оптимального управления распределенными системами, представимыми функционально-операторным уравнением типа Гаммерштейна в банаховом пространстве, компактно вложенном в лебегово пространство. Рассматривается задача минимизации интегрального функционала на множестве пар "состояние — управление", удовлетворяющих управляемому уравнению указанного типа. Доказывается эквивалентность этой задачи задаче оптимизации, получаемой из исходной путем перехода к описанию управляемой системы с помощью функционально-операторного уравнения В.И.Сумина в лебеговом пространстве. Эта эквивалентная задача оптимизации называется в статье S-двойственной. Для S-двойственной задачи оптимизации исследуется кусочно постоянная аппроксимация по паре "состояние — управление". Для такого способа аппроксимации устанавливаются следующие результаты: 1) сходимость кусочно постоянных аппроксимаций по функционалу и по уравнению для S-двойственной задачи оптимизации; 2) существование глобального решения аппроксимирующей конечномерной задачи математического программирования; 3) сходимость по функционалу решений аппроксимирующей задачи оптимизации к решению исходной задачи. В качестве вспомогательного результата, представляющего самостоятельный интерес, доказывается теорема о тотальном (по всему множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна. В качестве примера сведения управляемой распределенной системы к указанному уравнению рассматривается задача Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения типа диффузии-реакции.

Ключевые слова: кусочно постоянная аппроксимация, оптимальное управление, уравнение типа Гаммерштейна, сходимость по функционалу, тотальное сохранение разрешимости, полулинейное стационарное уравнение диффузии-реакции.

A. V. Chernov. On piecewise constant approximation in distributed optimization problems.

The paper is devoted to optimal control problems for distributed parameter systems representable by functional operator equations of Hammerstein type in a Banach space compactly embedded in a Lebesgue space. The problem of minimizing an integral functional on a set of "state–control" pairs satisfying a control equation of the mentioned type is considered. We prove that this problem is equivalent to an optimization problem obtained from the original one by passing to a description of the control system in terms of V.I. Sumin's functional operator equation in a Lebesgue space. The equivalent optimization problem is called S-dual. For an S-dual optimization problem, we investigate a piecewise constant approximation for the "state–control" pair. For this approximation method, we state the following results: (1) convergence of piecewise constant approximations with respect to the functional and the equation for the S-dual optimization problem; (2) existence of a global solution of an approximating finite-dimensional mathematical programming problem; (3) convergence with respect to the functional of solutions of an approximating optimization problem to a solution of the original problem. As an auxiliary result of independent interest, we prove a theorem on the total (over the whole set of admissible controls) preservation of solvability for a control equation of Hammerstein type. The Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation of diffusion–reaction type is considered as an example of reducing a distributed parameter control system to such an equation.

Keywords: piecewise constant approximation, optimal control, equation of Hammerstein type, convergence by functional, total preservation of solvability, semilinear stationary diffusion–reaction equation.

Введение

При численном решении распределенных оптимизационных задач часто применяют ту или иную конечномерную аппроксимацию таких задач задачами математического программирования (см., например, [1, гл. 3, 4; 2; 3; 4, § 8.11; 5–8]). При этом можно выделить два основных подхода. Первый состоит в конечно-разностной аппроксимации всей управляемой системы и

[1]Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

по управлению, и по состоянию (см., например, [2;3;5;9]). Для таких аппроксимаций доказывалась сходимость в различных смыслах (по функционалу, по управлению, по норме сопряженных пространств и т. д.). Реализация такого подхода связана с определенными трудностями. Прежде всего, это большая размерность получаемых задач математического программирования. Кроме того, в нелинейном случае приходится учитывать на каждой итерации нелинейную систему ограничений большой размерности, которая получается в результате дискретизации из управляемой системы. Отметим, что в случае линейной управляемой системы соответствующая система ограничений в аппроксимирующей задаче тоже будет линейной, и при ее решении можно использовать эффективные методы линейной алгебры, позволяющие существенно снижать трудоемкость вычислений даже в условиях большой размерности (см., например, [10]). Второй подход заключается в той или иной аппроксимации только лишь управления в предположении, что состояние однозначно зависит от управления, и тем самым функционалы исходной оптимизационной задачи обращаются в обычные функции многих переменных — параметров дискретизации при ограничениях достаточно простого вида относительно этих переменных. Указанный подход известен как *техника параметризации управления* (см. краткий обзор в [11]). К этому подходу можно отнести известные своей эффективностью метод моментов и обобщенный метод моментов (см., например, [4, § 8.11; 1, гл. 3, 4]). К сожалению, в случае, когда единственность решения управляемой *начально-краевой задачи* (НКЗ) не доказана, техника параметризации управления неприменима. В связи с упомянутыми выше трудностями представляется актуальным поиск более эффективных способов аппроксимации. Насколько известно автору, предлагались, в частности, следующие идеи. Первая [12;13] состоит в использовании подвижных (управляемых) сеток, что позволяет ограничиваться не слишком мелким шагом дискретизации, а кроме того, решать задачи с варьируемой областью (подробнее об этом, включая соответствующую библиографию, см. в [13]). Существуют конкретные примеры [12; 14], свидетельствующие об эффективности этой идеи. Однако строгое исследование показывает, что, например, гладкость функций аппроксимирующей задачи удается обеспечить лишь при линейности правой части дифференциального уравнения по управляющей переменной [13]. Другая идея состоит в использовании сплайн-аппроксимации (иначе говоря, метода конечных элементов) для состояния и, скажем, кусочно постоянной аппроксимации для управления (см., например, [8]). Однако здесь приходится следить за непрерывностью стыковки отдельных участков сплайна и решать другие вопросы, относящиеся к сплайн-интерполяции (см., например, [15]). Упомянем, наконец, работу [16], где для сосредоточенной управляемой системы в линейно-квадратичном случае использовалась кусочно постоянная аппроксимация обратной связи по состоянию. Эта работа, хотя и относится к сосредоточенному случаю, приводит нас к следующему вопросу: нельзя ли представить состояние как результат действия некоторого сглаживающего оператора G на состояние z некоторой другой управляемой системы, каким-то образом связанной с исходной управляемой системой и такой, что для функции z кусочно постоянная аппроксимация совершенно естественна подобно тому, как она естественна для управления u в лебеговом пространстве? Такой подход позволил бы произвести кусочно постоянную аппроксимацию исходной управляемой системы по паре (z, u). При этом за счет эффекта сглаживания не было бы необходимости брать шаг дискретизации слишком мелким, не говоря уже о том, что не нужно было бы следить за соблюдением непрерывной стыковки, учитывать большую нелинейную систему ограничений на параметры и т. д. Чтобы более конкретно пояснить суть предлагаемого подхода, рассмотрим в качестве примера управляемую задачу Дирихле для полулинейного стационарного уравнения типа диффузии-реакции:

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv -\mathrm{div}\,\big(A\nabla x\big) + bx = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad u \in \mathcal{D}; \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{0.1}$$

Здесь $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — заданная область, ограниченная и строго липшицевая (для этого достаточно выпуклости, см. [17, с. 30–31]), $n \geq 2$; $\mathcal{D} \equiv \big\{u \in L_r^s(\Pi)\colon u_i(t) \in [\alpha_i; \beta_i]$ для п.в. $t \in \Pi$, $i = \overline{1, s}\,\big\}$ — множество допустимых управлений, $r > 2$; $A = A(.) = \{a_{ij}(.)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n\times n}(\Pi)$ — матричная функция, при некотором $\sigma > 0$ удовлетворяющая условию: $A(t)\xi\cdot\xi \geq \sigma\,|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п.в.

$t \in \Pi$ (“ $\cdot$ ” означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$); множество всех таких матричных функций будем обозначать $\mathcal{A}(\sigma)$; $b \in L_\infty(\Pi)$, $b \geq 0$. Что касается правой части $f(t,y,u) : \Pi\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, будем предполагать, что она измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по переменным $\{y;u\} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^s$ и такова, что $f\big(.,y,u\big) \in L_2(\Pi)$ $\forall y \in L_q(\Pi)$, $u \in L_r^s(\Pi)$; $s \in \mathbb{N}$, $2 < q < 2n/(n-2)$.

Уравнение (0.1) известно как стационарное уравнение типа диффузии-реакции. Здесь для краткости изложения мы рассматриваем случай одного уравнения, однако все построения легко обобщаются на случай системы уравнений вида (0.1). Система стационарных уравнений диффузии-реакции имеет важное прикладное значение и потому является объектом пристального изучения (см., например, [18, § 2]), в том числе с позиций теории оптимального управления [19;20]. Чтобы определить понятие решения задачи (0.1), рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{0.2}$$

Решение задачи (0.2) естественно понимать в обобщенном смысле, а именно как функцию $x \in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$ интегральному тождеству

$$B[x,\omega] = \int\limits_\Pi z(t)\,\omega(t)\,dt; \quad B[x,\omega] \equiv \int\limits_\Pi \big[A\nabla x\cdot\nabla\omega + bx\omega\big]\,dt.$$

Пользуясь теоремой Лакса — Мильграма, можно показать (см. разд. 8), что для каждого $z \in L_2(\Pi)$ задача (0.2) имеет единственное решение; обозначим его $x = G[z]$. Тем самым, определен линейный оператор $G : L_2(\Pi) \to H_0^1(\Pi)$. Более того, этот оператор оказывается также и ограниченным. Соответственно, решение исходной задачи (0.1) можно понимать как решение функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$x = G\big[f(.,x,u)\big], \quad x \in \mathcal{H}(\Pi) \equiv W_2^1(\Pi). \tag{0.3}$$

По теореме вложения Соболева пространство $\mathcal{H} = H^1(\Pi) = W_2^1(\Pi)$ вложено в $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$ ограниченно (т. е. $\exists C > 0\colon \|x\|_{L_q} \leq C\,\|x\|_{W_2^1}$ $\forall x \in W_2^1$) и, более того, компактно. Отсюда ясно, что данное нами определение решения корректно в силу условий на функцию f и того, что $H_0^1 \subset \mathcal{H}$. Фактически решение задачи (0.1) понимается в смысле интегрального тождества

$$B[x,\omega] = \int\limits_\Pi f\big(t,x(t),u(t)\big)\,\omega(t)\,dt \quad \forall\omega \in H_0^1(\Pi).$$

Будем считать теперь, что целью управления является минимизация интегрального функционала вида $J[x,u] = \int_\Pi F\big(t,x(t),u(t)\big)\,dt$ на множестве пар $(x,u) \in \mathcal{H}\times\mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (0.3); функция F удовлетворяет такого же типа условиям, как функция f (с заменой L_2 на L_1). Соотнесем уравнению (0.3) уравнение типа предложенного В. И. Суминым для описания управляемых начально-краевых задач [21–23]:

$$z = f\big(.,G[z],u\big), \quad z \in L_2(\Pi). \tag{0.4}$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала $I[z,u] = J\big[G[z],u\big]$ на парах $(z,u) \in L_2\times\mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (0.4). Такую задачу минимизации мы называем S-двойственной по отношению к исходной. В данной статье, в частности, устанавливается эквивалентность исходной и S-двойственной задач оптимизации. В свою очередь, для S-двойственной задачи, в отличие от исходной задачи оптимизации, вполне естественной является кусочно постоянная аппроксимация по паре “состояние — управление” (z,u). Например, если считать, что конечномерные векторы ξ, η представляют параметры дискретизации, $z\{\xi\}$, $u\{\eta\}$ — кусочно постоянные аппроксимации функций z, u соответственно, то (с учетом релаксации с параметром $\delta > 0$)

в качестве аппроксимирующей задачи можно взять конечномерную задачу математического программирования $I\{\xi,\eta\} \equiv I[z\{\xi\},u\{\eta\}] \to \min$ при ограничении

$$\Psi_1\{\xi,\eta\} \equiv \big\|z\{\xi\} - f\big(.,G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|^2_{L_2} \le \delta.$$

Если же известно, что управляемая система $\forall\, u \in \mathcal{D}$ имеет решение $x = x[u]$, $\|x[u]\|_{W_2^1} \le \gamma$, то разумно добавить ограничение $\Psi_2\{\xi,\eta\} \equiv \big\|G\big[z\{\xi\}\big]\big\|^q_{L_q} \le (C\gamma+\delta)^q$. Таким образом, получаем задачу минимизации функции многих переменных всего лишь при двух ограничениях типа неравенства (помимо условий на параметры дискретизации). Если $(\overline{\xi};\overline{\eta})$ — приближенное решение аппроксимирующей задачи, то в качестве приближения к решению исходной задачи естественно взять $(\overline{x},\overline{u}) = (G[z\{\overline{\xi}\}],u\{\overline{\eta}\})$. Важно, что производные функций $I\{\xi,\eta\}$, $\Psi_1\{\xi,\eta\}$ и $\Psi_2\{\xi,\eta\}$ (при соответствующей гладкости функции f) по параметрам $\{\xi,\eta\}$ вычисляются тривиально. Здесь оператор G выступает в качестве сглаживающего оператора. Фактически $G[z]$ — это решение однородной НКЗ, связанной с линейным уравнением (см. (0.2)). Ясно, что решать такую задачу существенно проще, чем исходную нелинейную (0.1). При этом можно использовать, вообще говоря, любой подходящий метод, в частности такой эффективный, как метод конечных элементов, либо (при практической реализации) любой готовый математический пакет. Действительно, это всего лишь отдельная *линейная* подзадача, алгоритмически отделенная от аппроксимирующей задачи математического программирования.

Абстрагируясь от конкретной задачи (0.1), мы рассматриваем далее уравнение вида (0.3) с произвольным линейным ограниченным оператором G, действующим из лебегова пространства m-вектор-функций $\mathcal{Z}^m$ в банахово пространство ℓ-вектор-функций $\mathcal{H}^\ell$, предполагая, что $\mathcal{H}$ компактно вложено в лебегово пространство $\mathcal{X}$. При этом устанавливаются следующие результаты: 1) сходимость кусочно постоянных аппроксимаций по функционалу и по уравнению для S-двойственной задачи оптимизации; 2) существование глобального решения аппроксимирующей конечномерной задачи математического программирования; 3) сходимость по функционалу решений аппроксимирующей задачи оптимизации к решению исходной задачи. В качестве вспомогательного результата, представляющего самостоятельный интерес, доказывается теорема о тотальном (по всему множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна.

Если обратиться к задаче (0.1), достаточно в общих формулировках теорем считать, что $\ell = m = 1$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$; $x = G[z]$ — решение задачи (0.2).

Для удобства читателя приведем список нестандартных обозначений, используемых далее.

Пусть $n,m,\ell,s \in \mathbb{N}$, $p,q,r \in [1,\infty)$ — заданные числа, $q \ge p$; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество; $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$;

$$\mathcal{D} \equiv \big\{u \in \mathcal{U}^s \colon u_i(t) \in [\alpha_i;\beta_i] \text{ для п.в. } t \in \Pi,\ i = \overline{1,s}\,\big\}$$

— множество допустимых управлений. Определим класс $\mathbb{F}(\ell,s,m;\mathcal{X},\mathcal{Z},\mathcal{U})$ всех функций вида $f(t,y,u)\colon \Pi\times\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, каждая из которых измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по переменным $\{y;u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такова, что $f\big(.,y,u\big) \in \mathcal{Z}^m$ $\forall y \in \mathcal{X}^\ell(\Pi)$, $u \in \mathcal{U}^s(\Pi)$.

Через $\mathcal{X}^+$ обозначаем конус неотрицательных функций в пространстве $\mathcal{X}$. Для векторов $a,b \in \mathbb{R}^\ell$, $a \le b$ (векторное неравенство понимаем покомпонентно), используем обозначение $[a;b] \equiv [a_1;b_1] \times \cdots \times [a_\ell;b_\ell]$. Модуль вектора понимаем как сумму модулей компонент.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Pi)$ — банахово пространство функций, измеримых на Π, компактно вложенное в $\mathcal{X}(\Pi)$ (т. е. ограниченные множества функций $x \in \mathcal{H}$ относительно компактны в $\mathcal{X}$). Следовательно, пространство $\mathcal{H}^\ell(\Pi)$ компактно вложено в $\mathcal{X}^\ell(\Pi)$. Для определенности будем считать, что константа $C > 0$ обеспечивает оценку $\|x\|_{\mathcal{X}^\ell} \le C\,\|x\|_{\mathcal{H}^\ell}$ $\forall x \in \mathcal{H}^\ell$.

Пусть $\kappa \in \mathbb{N}$ — заданное число, причем множество Π представлено в виде дизъюнктного объединения $\Pi = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\kappa} \Pi_j$. Такое представление будем обозначать π и называть *разбиением* *множества* П. Число κ будем обозначать $|\pi|$. Наибольший диаметр элементов разбиения будем называть *мелкостью разбиения* π и обозначать $\rho(\pi)$. Определим множество

$$\mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big) \equiv \Big\{u \in L^s_\infty(\Pi) : \, u_i(t) \equiv w_{ij} \in [\alpha_i;\beta_i], \, t \in \Pi_j, \, i = \overline{1,s}, \, j = \overline{1,\kappa}\Big\}, \qquad (0.5)$$

понимая его как множество аппроксимаций управления. Положим $\mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ — множество $(s\,\kappa)$-мерных векторов $w = \big\{w_{11}, \ldots, w_{1\kappa}; \ldots; w_{s1}, \ldots, w_{s\kappa}\big\}$ со свойствами: $w_{ij} \in [\alpha_i;\beta_i]$, $i = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,\kappa}$. Формула (0.5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Аппроксимацию $v \in \mathbb{V}$, отвечающую вектору $w \in \mathbb{W}$, обозначим $v\{w\}$.

1. Постановка задачи оптимизации

Будем рассматривать следующее функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна[2], являющееся удобной формой описания широкого класса управляемых распределенных систем (см. [25–28]), а также пример во введении (более подробно разобранный в разд. 8):

$$x(t) = \theta(t) + G\big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{H}^\ell. \qquad (1.1)$$

Здесь $u \in \mathcal{D}$ — управление; $\theta \in \mathcal{H}^\ell$ — заданный элемент; $G : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{H}^\ell$ — заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО); $f \in \mathbb{F}(\ell, s, m; \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U})$ — заданная функция. Относительно ЛОО G предполагаем, что

G) ЛОО $G : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{H}^\ell$ имеет положительную мажоранту[3] $G^\sharp : \mathcal{Z} \to \mathcal{H}$.

Относительно уравнения (1.1) предполагаем следующее.

H) Существует функция $\varphi(t,\xi) : \Pi \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная и не убывающая по $\xi \in \mathbb{R}^+$ и такая, что имеет место оценка $\big|f\big(.,y(.),u(.)\big)\big| \le \varphi\big(.,|y(.)|\big) \in \mathcal{Z}$ $\forall y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$, и кроме того, разрешимо *мажорантное уравнение*

$$x(t) = |\theta(t)| + G^\sharp\big[\varphi\big(.,x(.)\big)\big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^+. \qquad (1.2)$$

Конструктивные достаточные условия разрешимости мажорантного уравнения получены в [26, §4]. Обозначим Ξ — множество всех пар $(x,u) \in \mathcal{H}^\ell \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (1.1). Будем рассматривать целевой функционал вида

$$J[x,u] = \int\limits_\Pi F\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt, \quad (x,u) \in \Xi,$$

где $F \in \mathbb{F}(\ell, s, 1; \mathcal{X}, \widehat{\mathcal{Z}}, \mathcal{U})$; $\widehat{\mathcal{Z}}$ — лебегово пространство функций на П с индексом суммируемости из $[1;+\infty)$ и такое, что $\mathcal{X} \subset \widehat{\mathcal{Z}}$. Поставим задачу оптимизации

$$J[x,u] \to \min, \quad (x,u) \in \Xi. \qquad (1.3)$$

2. S-двойственная задача оптимизации

Следующее функционально-операторное уравнение[4] было введено ранее В. И. Суминым и исследовалось им в ряде работ с точки зрения таких вопросов, как устойчивость существования глобальных решений, обоснование сходимости численных методов оптимизации этого

[2]См., например, [24, гл. VI, п.19.2].

[3]То есть $G^\sharp : \mathcal{Z} \to \mathcal{H}$ — ЛОО, $G^\sharp[\mathcal{Z}^+] \subset \mathcal{H}^+$ и $\big|G[z]\big| \le G^\sharp\big[|z|\big]$ для всех $z \in \mathcal{Z}^m$.

[4]При $\theta = 0$ и условии вольтерровости линейного ограниченного оператора G, входящего в правую часть и рассматриваемого как оператор $L^m_p(\Pi) \to L^\ell_q(\Pi)$, в связи с чем именовалось как *функциональное вольтеррово уравнение*.

уравнения, получение необходимых условий оптимальности в соответствующих задачах оптимального управления и т. д. (см., например, [21–23]).

$$z(t) = f\bigl(t, \theta(t) + G[z](t), u(t)\bigr), \quad t \in \Pi, \quad z \in \mathcal{Z}^m. \tag{2.1}$$

Определим функционал $I[z,u] = J\bigl[\theta + G[z], u\bigr]$, $z \in \mathcal{Z}^m$, $u \in \mathcal{U}^s$. Обозначим Υ — множество всех пар $(z,u) \in \mathcal{Z}^m \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (2.1). Задачу оптимизации

$$I[z,u] \to \min, \quad (z,u) \in \Upsilon, \tag{2.2}$$

назовем *S-двойственной* по отношению к задаче (1.3).

Двойственный характер задачи (2.2) по отношению к задаче (1.3) раскрывается в следующих утверждениях (их доказательства см. в разд. 4).

Теорема 1. *Пусть* $(x,u) \in \Xi$, $z = f(.,x,u)$. *Тогда* $(z,u) \in \Upsilon$.

Теорема 2. *Пусть* $(z,u) \in \Upsilon$, $x = \theta + G[z]$. *Тогда* $(x,u) \in \Xi$.

Теорема 3. *Пусть* $(\overline{x}, \overline{u}) \in \Xi$ *— решение задачи оптимизации* (1.3)*, глобальное или локальное;* $\overline{z} = f(., \overline{x}, \overline{u})$. *Тогда* $(\overline{z}, \overline{u})$ *— решение задачи* (2.2)*, соответственно глобальное или локальное.*

Теорема 4. *Пусть* $(\overline{z}, \overline{u}) \in \Upsilon$ *— решение задачи оптимизации* (2.2)*, глобальное или локальное;* $\overline{x} = \theta + G[\overline{z}]$. *Тогда* $(\overline{x}, \overline{u})$ *— решение задачи* (1.3)*, соответственно глобальное или локальное.*

З а м е ч а н и е 1. S-двойственная задача (2.2) существенно удобнее для аппроксимации, так как для уравнения (2.1) совершенно естественно оценивать невязку по норме лебегова пространства $\mathcal{Z}^m$. Поэтому кусочно постоянная аппроксимация для решений уравнения (2.1) естественна. Уравнение (1.1) при сделанных предположениях тоже можно рассматривать в лебеговом пространстве — пространстве $\mathcal{X}^\ell$, и для точных решений в этом нет проблемы. Однако оценивать невязку для уравнения (1.1) в норме пространства $\mathcal{X}^\ell$ было бы неестественно, поскольку из малости невязки в этой норме не следует малость невязки в пространстве $\mathcal{H}^\ell$.

3. Формулировка основных результатов

Следующее утверждение дает достаточные условия тотального сохранения разрешимости уравнения (1.1) (доказательство см. в разд. 5).

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения* **G**)*,* **H**)*;* $\overline{x} \in \mathcal{H}$ *— решение мажорантного уравнения* (1.2)*,* $\overline{x} \geq 0$. *Тогда уравнение* (1.1) *для каждого управления* $u \in \mathcal{D}$ *имеет по крайней мере одно решение* $x \in \mathcal{H}^\ell$ *такое, что* $|x| \leq \overline{x}$, $\|x\|_{\mathcal{H}^\ell} \leq \gamma \equiv \|\theta\|_{\mathcal{H}^\ell} + \|G\|_{\mathcal{Z}^m \to \mathcal{H}^\ell} \|\varphi(., \overline{x})\|_{\mathcal{Z}}$.

Обозначим $\mathcal{H}^\ell_\gamma = \bigl\{x \in \mathcal{H}^\ell \colon \|x\|_{\mathcal{X}^\ell} \leq C\gamma\bigr\}$; $\Xi_\gamma \subset \Xi$ — множество всех пар $(x,u) \in \mathcal{H}^\ell_\gamma \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих уравнению (1.1).

Далее будем предполагать, что $J(x[k], u[k]) \to +\infty$ при $k \to \infty$ для любого выбора последовательности $\{(x[k], u[k])\} \subset \mathcal{H}^\ell \times \mathcal{D}$ такой, что $\|x[k]\|_{\mathcal{H}^\ell} \to \infty$ при $k \to \infty$. Очевидно, что в этом случае множество $\Xi(c,J) = \bigl\{(x,u) \in \Xi : \ J[x,u] \leq c\bigr\}$ будет ограничено для любого числа $c \in \mathbb{R}$. Пользуясь теоремой 5 (или любой другой теоремой, обеспечивающей существование хотя бы одной пары $(x,u) \in \Xi$), можно найти число $c \in \mathbb{R}$, при котором оно будет не пусто. Для такого числа c исходная задача оптимизации будет эквивалентна следующей:

$$J[x,u] \to \min, \quad (x,u) \in \Xi(c,J).$$

При этом в силу ограниченности множества $\Xi(c,J)$ найдется число $\gamma>0$ такое, что $\|x\|_{\mathcal{H}^\ell}\le\gamma$ для всех $(x,u)\in\Xi(c,J)$, т. е. $\Xi(c,J)\subset\Xi_\gamma$. С учетом сказанного далее вместо исходной задачи оптимизации будем рассматривать равносильную задачу

$$J[x,u]\to\min,\quad (x,u)\in\Xi_\gamma. \tag{3.1}$$

Абстрагируясь от проведенных рассуждений, будем считать, что выполнено условие

Г) Множество $\Xi_\gamma\ne\varnothing$.

Следующее утверждение устанавливает возможность кусочно постоянной аппроксимации с любой заданной точностью любой пары вида (z,u), где $z=f(.,x,u)$, (x,u) — произвольная пара, удовлетворяющая уравнению (1.1), по уравнению (2.1) и по функционалу. В этом смысле можно говорить о сходимости аппроксимаций. Более того, утверждается, что эта сходимость равномерна на классе пар указанного вида. Доказательство см. в разд. 6.

Теорема 6. *Для любого числа $\varepsilon>0$ существуют числа $\rho_\varepsilon,\lambda_\varepsilon>0$ и параллелепипед $[a;b]\subset\mathbb{R}^m$ такие, что, каковы бы ни были разбиения π и ϖ множества Π мелкостей соответственно $\rho(\pi)<\rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi)<\lambda_\varepsilon$, для любой пары $(x,u)\in\Xi_\gamma$ и соответствующего элемента $z=f(.,x,u)$ найдутся $\xi\in\mathbb{W}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$, $\eta\in\mathbb{W}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие аппроксимации $z\{\xi\}\in\mathbb{V}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$, $u\{\eta\}\in\mathbb{V}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ такие, что*

$$\big\|z\{\xi\}-f\big(.,\theta+G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|_{\mathcal{Z}^m}<\varepsilon, \tag{3.2}$$

$$\big\|\theta+G\big[z\{\xi\}\big]\big\|_{\mathcal{X}^\ell}\le C\gamma+\varepsilon, \tag{3.3}$$

$$\big|I[z,u]-I[z\{\xi\},u\{\eta\}]\big|<\varepsilon. \tag{3.4}$$

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы 6 и формулировки леммы 4 (см. далее), в основе этого доказательства лежит возможность для всякого $\delta>0$ найти число $\lambda[\delta]>0$ и параллелепипед $[a;b]\subset\mathbb{R}^m$ такие, что при любом разбиении ϖ множества Π мелкости $\rho(\varpi)<\lambda[\delta]$ функцию z можно приблизить аппроксимацией $z\{\xi\}\in\mathbb{V}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$ с точностью δ: $\|z-z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m}\le\delta$. Если же выполнены предположение **H**) и утверждение теоремы 5, то, как видно из доказательства леммы 4, в качестве такого параллелепипеда $[a;b]$ можно взять декартову степень $[a;b]=[\overline{a};\overline{b}]^m$, где $[\overline{a};\overline{b}]=\big\{\xi\in\mathbb{R}\colon|\xi|\le k_\delta\big\}$, число $k_\delta>0$ определяется из условия $\|\overline{z}-\overline{z}^{(k_\delta)}\|_{\mathcal{Z}}<\delta/2$, а $\overline{z}^{(k_\delta)}$ — это срезка $\big\{\overline{z}(t),\ \text{если } |z(t)|\le k_\delta; 0,\ \text{иначе}\big\}$. То, что такая срезка существует, видно из доказательства леммы 4.

Зафиксируем достаточно малое число $\delta>0$ — точность выполнения ограничений. В соответствии с теоремой 6 *аппроксимирующей задачей* для задачи (3.1) назовем следующую конечномерную задачу математического программирования:

$$I\{\xi,\eta\}\equiv I[z\{\xi\},u\{\eta\}]\to\min \tag{3.5}$$

при ограничениях $\xi\in\mathbb{V}\big(\varpi,m,[a;b]\big)$, $\eta\in\mathbb{V}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$,

$$\Phi_1\{\xi,\eta\}\equiv\big\|z\{\xi\}-f\big(.,\theta+G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|^p_{\mathcal{Z}^m}\le\delta, \tag{3.6}$$

$$\Phi_2\{\xi,\eta\}\equiv\big\|\theta+G\big[z\{\xi\}\big]\big\|^q_{\mathcal{X}^\ell}\le(C\gamma+\delta)^q. \tag{3.7}$$

Теорема 7. *Пусть множество $\Xi\ne\varnothing$ и выполнено условие* **Г**). *Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существуют числа ρ_ε, $\lambda_\varepsilon>0$, $\sigma_\varepsilon>0$, а также параллелепипед $[a;b]\subset\mathbb{R}^m$ такие, что для любых разбиений π и ϖ множества Π мелкостей $\rho(\pi)<\rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi)<\lambda_\varepsilon$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Задача* (3.5)–(3.7) *имеет глобальное решение.*

2. *Пусть* $(\overline{\xi},\overline{\eta})$ *— приближенное глобальное решение задачи* (3.5)–(3.7) *с точностью* σ_ε *по функции;* $\overline{z}=z\{\overline{\xi}\}$, $\overline{u}=u\{\overline{\eta}\}$, $\overline{x}=\theta+G[\overline{z}]$. *Тогда* $(\overline{x},\overline{u})$ *есть приближенное глобальное решение задачи* (3.1) *с точностью* ε *по функционалу при точности* δ *выполнения ограничений в смысле*

$$\big\|\overline{x}-\theta-G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big]\big\|_{\mathcal{H}^\ell}\le\|G\|\,\sqrt[p]{\delta}, \tag{3.8}$$

$$\|\overline{x}\|_{\mathcal{X}^\ell}\le C\gamma+\delta. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7 см. в разд. 7.

4. Доказательство теорем об S-двойственности

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $(x,u)\in\Xi$, т.е. (x,u) — решение уравнения (1.1). Тогда для $z=f(.,x,u)$ имеем $z=f\big(.,\theta+G[f(.,x,u)],u\big)=f\big(.,\theta+G[z],u\big)$, т.е. $(z,u)\in\Upsilon$. Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть $(z,u)\in\Upsilon$, т.е. (z,u) — решение уравнения (2.1). Тогда для $x=\theta+G[z]$ имеем $x=\theta+G\big[f(.,\theta+G[z],u)\big]=\theta+G\big[f(.,x,u)\big]$, т.е. $(x,u)\in\Xi$. Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. В соответствии с формулировкой теоремы рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $(\overline{x},\overline{u})\in\Xi$ — глобальное решение задачи (1.3), $\overline{z}=f(.,\overline{x},\overline{u})$. По теореме 1 $(\overline{z},\overline{u})\in\Upsilon$. Предположим от противного, что пара $(\overline{z},\overline{u})$ не является глобальным решением задачи (2.2). Это означает, что найдется пара $(\widetilde{z},\widetilde{u})\in\Upsilon$, обеспечивающая неравенство $I[\widetilde{z},\widetilde{u}]<I[\overline{z},\overline{u}]$.

Обозначим $\widetilde{x}=\theta+G[\widetilde{z}]$. По теореме 2 $(\widetilde{x},\widetilde{u})\in\Xi$. При этом

$$J[\widetilde{x},\widetilde{u}]=J\big[\theta+G[\widetilde{z}],\widetilde{u}\big]=I[\widetilde{z},\widetilde{u}]<I[\overline{z},\overline{u}]=J\big[\theta+G[\overline{z}],\overline{u}\big]=J\big[\theta+G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big],\overline{u}\big]=J[\overline{x},\overline{u}].$$

Полученная оценка противоречит условию. Таким образом, наше предположение неверно.

2. Пусть $(\overline{x},\overline{u})\in\Xi$ — локальное решение задачи (1.3), $\overline{z}=f(.,\overline{x},\overline{u})$. Согласно теореме 1 $(\overline{z},\overline{u})\in\Upsilon$. Предположим от противного, что пара $(\overline{z},\overline{u})$ не является локальным решением задачи (2.2). Это означает, что найдется последовательность пар $(\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k)\in\Upsilon$,

$$\|\widetilde{z}_k-\overline{z}\|_{\mathcal{Z}^m}\to 0,\quad \|\widetilde{u}_k-\overline{u}\|_{\mathcal{U}^s}\to 0\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

обеспечивающих неравенство $I[\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k]<I[\overline{z},\overline{u}]$. Обозначим $\widetilde{x}_k=\theta+G[\widetilde{z}_k]$. По теореме 2 $(\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k)\in\Xi$. Учитывая, что пара $(\overline{x},\overline{u})$ является решением уравнения (1.1), можем записать $\|\widetilde{x}_k-\overline{x}\|_{\mathcal{H}^\ell}=\big\|\theta+G[\widetilde{z}_k]-\theta-G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big]\big\|_{\mathcal{H}^\ell}=\big\|G\big[\widetilde{z}_k-\overline{z}\big]\big\|_{\mathcal{H}^\ell}$. Тогда в силу ограниченности оператора G $\|\widetilde{x}_k-\overline{x}\|_{\mathcal{H}^\ell}\to 0$ при $k\to\infty$. При этом аналогично предыдущему пункту устанавливается неравенство $J[\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k]<J[\overline{x},\overline{u}]$, которое противоречит локальной оптимальности пары $(\overline{x},\overline{u})$. Таким образом, наше предположение неверно. Теорема 3 доказана.

Для доказательства сохранения локальной оптимальности в теореме 4 нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть функция* $g(t,x):\Pi\times\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$ *такова, что* $g\big(.,x_1(.),\dots,x_\nu(.)\big)\in Z$ *для всех* $x_j\in X_j$, $j=\overline{1,\nu}$, *где* $X_j=X_j(\Pi)$, $j=\overline{1,\nu}$, $Z=Z(\Pi)$ *— лебеговы пространства с индексами суммируемости из* $[1;+\infty)$; $X=X_1\times\ldots\times X_\nu$. *Тогда оператор* $\mathcal{G}:X\to Z$, *определяемый формулой* $\mathcal{G}[x]=g\big(.,x(.)\big)$, *является непрерывным и ограниченным.*

Для $\nu=1$ лемма 1 доказана в [29, §I.2, теорема 2.1, с. 31; теорема 2.2, с. 35]. Ее справедливость для $\nu>1$ следует из анализа доказательств [29, там же].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. В соответствии с формулировкой теоремы рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $(\overline{z},\overline{u}) \in \Upsilon$ – глобальное решение задачи (2.2), $\overline{x} = \theta + G[\overline{z}]$. Согласно теореме 2 $(\overline{x},\overline{u}) \in \Xi$. Предположим от противного, что пара $(\overline{x},\overline{u})$ не является глобальным решением задачи (1.3). Это означает, что найдется пара $(\widetilde{x},\widetilde{u}) \in \Xi$, обеспечивающая неравенство

$$J[\widetilde{x},\widetilde{u}] < J[\overline{x},\overline{u}] = J\big[\theta + G[\overline{z}],\overline{u}\big] = I[\overline{z},\overline{u}].$$

Обозначим $\widetilde{z} = f\big(.,\widetilde{x},\widetilde{u}\big)$. По теореме 1 $(\widetilde{z},\widetilde{u}) \in \Upsilon$. При этом

$$J[\widetilde{x},\widetilde{u}] = J\big[\theta + G[f(.,\widetilde{x},\widetilde{u})],\widetilde{u}\big] = J\big[\theta + G[\widetilde{z}],\widetilde{u}\big] = I[\widetilde{z},\widetilde{u}].$$

Таким образом, $I[\widetilde{z},\widetilde{u}] < I[\overline{z},\overline{u}]$. Полученная оценка противоречит условию. Стало быть, наше предположение неверно.

2. Пусть $(\overline{z},\overline{u}) \in \Upsilon$ — локальное решение задачи (2.2), $\overline{x} = \theta + G[\overline{z}]$. Согласно теореме 2 $(\overline{x},\overline{u}) \in \Xi$. Предположим от противного, что пара $(\overline{x},\overline{u})$ не является локальным решением задачи (1.3). Это означает, что найдется последовательность пар $(\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k) \in \Xi$,

$$\|\widetilde{x}_k - \overline{x}\|_{\mathcal{X}^\ell} \le C\,\|\widetilde{x}_k - \overline{x}\|_{\mathcal{H}^\ell} \to 0, \quad \|\widetilde{u}_k - \overline{u}\|_{\mathcal{U}^s} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

обеспечивающих неравенство $J[\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k] < J[\overline{x},\overline{u}]$.

Обозначим $\widetilde{z}_k = f\big(.,\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k\big)$. По теореме 1 $(\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k) \in \Upsilon$. Учитывая, что $(\overline{z},\overline{u})$ является решением уравнения (2.1), можем записать

$$\|\widetilde{z}_k - \overline{z}\| = \big\|f\big(.,\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k\big) - f\big(.,\theta + G[\overline{z}],\overline{u}\big)\big\| = \big\|f\big(.,\widetilde{x}_k,\widetilde{u}_k\big) - f\big(.,\overline{x},\overline{u}\big)\big\|,$$

где $\|\,.\,\| = \|\,.\,\|_{\mathcal{Z}^m}$. Тогда согласно лемме 1 $\|\widetilde{z}_k - \overline{z}\|_{\mathcal{Z}^m} \to 0$ при $k \to \infty$. При этом аналогично предыдущему пункту получаем неравенство $I[\widetilde{z}_k,\widetilde{u}_k] < I[\overline{z},\overline{u}]$, что противоречит локальной оптимальности пары $(\overline{z},\overline{u})$. Поэтому наше предположение неверно. Теорема 4 доказана.

5. Доказательство теоремы о тотальном сохранении разрешимости

Следующее утверждение известно как теорема Шаудера [30, гл. XVI, § 3, п. 3.3, с.627].

Лемма 2. *Пусть X — нормированное пространство, Ω — выпуклое замкнутое множество в нем, $F : \Omega \to \Omega$ — непрерывное отображение. Если множество $F(\Omega)$ относительно компактно в X, то отображение F имеет неподвижные точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Воспользуемся леммой 2. Зафиксируем произвольно $u \in \mathcal{D}$ и определим оператор $F_u : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$ с помощью формулы $F_u[x] = \theta + G\big[f(.,x,u)\big]$, $x \in \mathcal{X}^\ell$. Отметим, что по лемме 1 оператор F_u непрерывен. Учитывая, что $\mathcal{H}^\ell \subset \mathcal{X}^\ell$, уравнение (1.1) равносильно следующему:

$$x = F_u[x], \quad x \in \mathcal{X}^\ell. \tag{5.1}$$

Определим множество $\Omega = \big\{x \in \mathcal{X}^\ell\colon |x| \le \overline{x}\big\}$. Множество Ω не пусто, поскольку решение мажорантного уравнения (1.2) неотрицательно: $\overline{x} \ge 0$, т. е. $0_{\mathcal{X}^\ell} \in \Omega$. Выпуклость и замкнутость множества Ω очевидны. Множество значений $F_u[\Omega]$ ограничено в $\mathcal{H}^\ell$:

$$\|F_u[x]\|_{\mathcal{H}^\ell} = \big\|\theta + G[f(.,x,u)]\big\|_{\mathcal{H}^\ell} \le \|\theta\|_{\mathcal{H}^\ell} + \|G\|_{\mathcal{Z}^m \to \mathcal{H}^\ell}\,\|f(.,x,u)\|_{\mathcal{Z}^m},$$

и по идеальности пространства $\mathcal{Z}$, условию **H**) и монотонности по ξ функции $\varphi(t,\xi)$ имеем

$$\|f(.,x,u)\|_{\mathcal{Z}^m} = \big\||f(.,x,u)|\big\|_{\mathcal{Z}} \le \|\varphi(.,|x|)\|_{\mathcal{Z}} \le \|\varphi(.,\overline{x})\|_{\mathcal{Z}}$$

для всех $x \in \Omega$. Тогда в силу компактности вложения $\mathcal{H}^\ell \subset \mathcal{X}^\ell$ множество $F_u[\Omega]$ относительно компактно в $\mathcal{X}^\ell$. Остается проверить, что оператор F_u не выводит из Ω. Зафиксируем произвольно $x \in \mathcal{X}^\ell$ и положим $z = f(.,x,u)$, $y = F_u[x]$. Согласно условиям **G**), **H**) ясно, что

$$|y| = \big|\theta + G[f(.,x,u)]\big| \le |\theta| + G^\sharp\big[|f(.,x,u)|\big] \le |\theta| + G^\sharp[\varphi(.,|x|)].$$

Используя определение множества Ω и монотонность функции $\varphi(t,\xi)$ по $\xi \ge 0$, а также условие **H**), получаем $\big|F_u[x]\big| = |y| \le |\theta| + G^\sharp[\varphi(.,\overline{x})] = \overline{x}$. Таким образом, $F_u : \Omega \to \Omega$ для всех $u \in \mathcal{D}$. Пользуясь леммой 2, заключаем, что оператор F_u имеет неподвижные точки на Ω, т. е. уравнение (5.1) имеет решение $x_u \in \Omega$ для всех $u \in \mathcal{D}$. Теорема 5 доказана.

6. Доказательство теоремы о равномерной сходимости аппроксимаций

Прежде всего, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Пусть элемент* $u \in \mathcal{D}$ *произвольно фиксирован. Тогда для любого числа* $\delta > 0$ *существует число* $\rho[\delta] > 0$ *такое, что, каково бы ни было разбиение* π *множества* Π *мелкости* $\rho(\pi) < \rho[\delta]$, *найдутся* $\eta \in \mathbb{W}(\pi, s, [\alpha;\beta])$ *и соответствующая ему аппроксимация* $u\{\eta\} \in \mathbb{V}(\pi, s, [\alpha;\beta])$ *такие, что* $\|u - u\{\eta\}\|^r_{\mathcal{U}^s} < \delta$.

Доказательство. Положим $\widehat{u} = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. В соответствии с теоремой Н. Н. Лузина и с абсолютной непрерывностью интеграла Лебега существует компакт $\Pi_0 \subset \Pi$ такой, что $2\|\widehat{u}\|^r_{\mathcal{U}(\Pi\setminus\Pi_0)} < \delta/2$, и на Π_0 каждая из функций $u_i(t)$, $i = \overline{1,s}$, непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна. Таким образом, существует число $\rho[\delta] > 0$ такое, что

$$\max_{i=\overline{1,s}}\big|u_i(t) - u_i(\tau)\big|^r < \frac{\delta}{2s^r \operatorname{mes}\Pi} \quad \forall t,\tau \in \Pi_0, \quad |t-\tau| \le \rho[\delta].$$

Пусть разбиение π вида $\Pi = \bigsqcup_{j=1}^{\kappa} \Pi_j$ имеет мелкость $\rho(\pi) < \rho[\delta]$. Обозначим $Q_j = \overline{\Pi_0 \cap \Pi_j}$, $\eta_{ij} = \max_{t\in Q_j} u_i(t)$, $i = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,\kappa}$. Тогда вектор $\eta \in \mathbb{W}(\pi, s, [\alpha;\beta])$, и по построению

$$\max_{t\in Q_j} |u_i(t) - \eta_{ij}|^r < \frac{\delta}{2s^r \operatorname{mes}\Pi}, \quad i = \overline{1,s}, \quad j = \overline{1,\kappa}.$$

Таким образом,

$$\big\|u - u\{\eta\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s} = \big\|u - u\{\eta\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s(\Pi\setminus\Pi_0)} + \big\|u - u\{\eta\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s(\Pi_0)}$$

$$\le 2\big\|\widehat{u}\big\|^r_{\mathcal{U}(\Pi\setminus\Pi_0)} + s^r \sum_{j=1}^{\kappa} \max_{t\in Q_j}\max_{i=\overline{1,s}} |u_i(t) - \eta_{ij}|^r \operatorname{mes} Q_j < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2\operatorname{mes}\Pi}\sum_{j=1}^{\kappa}\operatorname{mes} Q_j \le \delta.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть элемент* $z \in \mathcal{Z}^m$ *произвольно фиксирован. Тогда для любого числа* $\delta > 0$ *существуют число* $\lambda[\delta] > 0$ *и параллелепипед* $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$ *такие, что, каково бы ни было разбиение* ϖ *множества* Π *мелкости* $\rho(\varpi) < \lambda[\delta]$, *найдутся* $\xi \in \mathbb{W}(\varpi, m, [a;b])$ *и соответствующая ему аппроксимация* $z\{\xi\} \in \mathbb{V}(\varpi, m, [a;b])$ *такие, что* $\|z - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta$.

Доказательство. Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$z^{(k)}(t) = \begin{cases} z(t), & \text{если } |z(t)| \le k, \\ 0, & \text{если } |z(t)| > k, \end{cases} \qquad t \in \Pi.$$

Обозначим $Q_k = \{t \in \Pi\colon z(t) = z^{(k)}(t)\}$, $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что система множеств $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ упорядочена по вложению и при этом $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \Pi$. Поэтому $\operatorname{mes}(\Pi \setminus Q_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\big\|z - z^{(k)}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} = \big\|z - z^{(k)}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m(\Pi\setminus Q_k)} = \big\|z\big\|^p_{\mathcal{Z}^m(\Pi\setminus Q_k)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$ найдется номер $k_\delta \in \mathbb{N}$ такой, что $\big\|z - z^{(k)}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} < \delta/2$ $\forall k \ge k_\delta$. Считая число $\delta > 0$ произвольно фиксированным, выберем любой параллелепипед $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$, содержащий множество $\{\xi \in \mathbb{R}^m\colon |\xi| \le k_\delta\}$. По построению функция $Z_\delta = z^{(k_\delta)}$ принимает все свои значения в $[a;b]$. Совершенно аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 3, устанавливается, что существует число $\lambda[\delta] > 0$ такое, что, каково бы ни было разбиение ϖ множества Π мелкости $\rho(\varpi) < \lambda[\delta]$, найдутся $\xi \in \mathbb{W}(\varpi, m, [a;b])$ и соответствующая ему аппроксимация $z\{\xi\} \in \mathbb{V}(\varpi, m, [a;b])$, обеспечивающие оценку $\|Z_\delta - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta/2$. Таким образом,

$$\|z - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \|z - Z_\delta\|^p_{\mathcal{Z}^m} + \|Z_\delta - z\{\xi\}\|^p_{\mathcal{Z}^m} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. По лемме 1 множество $\mathcal{Q} = \{J[x,u] : (x,u) \in \Xi_\gamma\}$ ограничено, а следовательно, предкомпактно в пространстве $\mathbb{R}$. Стало быть, существует конечная $(\varepsilon/2)$-сеть $\mathcal{Q}_\varepsilon = \{q_j,\ j = \overline{1,M}\} \subset \mathcal{Q}$ для множества $\mathcal{Q}$ в пространстве $\mathbb{R}$. Тем самым, для каждого $j = \overline{1,M}$ найдется пара $(x^{(j)}, u^{(j)}) \in \Xi_\gamma$ такая, что $q_j = J[x^{(j)}, u^{(j)}]$. Обозначим $z^{(j)} = f(.,x^{(j)}, u^{(j)})$, $j = \overline{1,M}$. Заметим, что

$$q_j = J[x^{(j)}, u^{(j)}] = J\big[\theta + f(.,x^{(j)}, u^{(j)}), u^{(j)}\big],$$

так как $(x^{(j)}, u^{(j)})$ является решением уравнения (1.1). Иначе говоря,

$$q_j = J\big[\theta + G[z^{(j)}], u^{(j)}\big] = I[z^{(j)}, u^{(j)}].$$

Кроме того, согласно определению множества Ξ_γ

$$\big\|\theta + G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|\theta + G\big[f(.,x^{(j)}, u^{(j)})\big]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|x^{(j)}\big\|_{\mathcal{X}^\ell} \le C\gamma.$$

Согласно лемме 1 оператор $\mathcal{N} : \mathcal{Z}^m \times \mathcal{U}^s \to \mathcal{Z}^m$, определяемый формулой

$$\mathcal{N}[z,u] = z - f(.,\theta + G[z], u), \quad z \in \mathcal{Z}^m, \quad u \in \mathcal{U}^s,$$

непрерывен. Непрерывны также и функционал $I[z,u] : \mathcal{Z}^m \times \mathcal{U}^s \to \mathbb{R}$, и оператор $G : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$. Поэтому найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\big\|\mathcal{N}[z,w] - \mathcal{N}[z^{(j)}, u^{(j)}]\big\|_{\mathcal{Z}^m} < \varepsilon, \quad \big|I[z,w] - I[z^{(j)}, u^{(j)}]\big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \big\|G[z] - G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} < \varepsilon$$

для всех $j = \overline{1,M}$ и $z \in \mathcal{Z}^m$, $w \in \mathcal{U}^s$, удовлетворяющих условиям

$$\|z - z^{(j)}\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta_\varepsilon, \quad \|w - u^{(j)}\|^r_{\mathcal{U}^s} \le \delta_\varepsilon.$$

Согласно леммам 3 и 4 существуют числа $\rho_\varepsilon = \rho[\delta_\varepsilon]$, $\lambda_\varepsilon = \lambda[\delta_\varepsilon]$ и параллелепипед $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$ такие, что каковы бы ни были разбиения π и ϖ множества Π мелкостей $\rho(\pi) < \rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi) < \lambda_\varepsilon$ для $z^{(j)}$, $u^{(j)}$ найдутся $\xi^{(j)} \in \mathbb{W}(\varpi, m, [a;b])$, $\eta^{(j)} \in \mathbb{W}(\pi, s, [\alpha;\beta])$ и соответствующие аппроксимации $z\{\xi^{(j)}\} \in \mathbb{V}(\varpi, m, [a;b])$, $u\{\eta^{(j)}\} \in \mathbb{V}(\pi, s, [\alpha;\beta])$ такие, что

$$\big\|z^{(j)} - z\{\xi^{(j)}\}\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} \le \delta_\varepsilon, \quad \big\|u^{(j)} - u\{\eta^{(j)}\}\big\|^r_{\mathcal{U}^s} \le \delta_\varepsilon, \quad j = \overline{1,M}.$$

Возьмем любую пару $(x,u) \in \Xi_\gamma$. Найдем индекс $j \in \overline{1,M}$ такой, что $\big|J[x,u] - J[x^{(j)}, u^{(j)}]\big| < \varepsilon/2$. Обозначим $z = f(.,x,u)$. Так как (x,u) есть решение уравнения (1.1), можем записать

$$I[z,u] = J\big[\theta + G[z], u\big] = J\big[\theta + G\big[f(.,x,u)\big], u\big] = J[x,u].$$

Таким образом, $\big|I[z,u] - I[z^{(j)}, u^{(j)}]\big| = \big|J[x,u] - J[x^{(j)}, u^{(j)}]\big| < \varepsilon/2$.

Заметим, что в силу теоремы 1 $\mathcal{N}[z^{(j)}, u^{(j)}] = 0$, так как $(x^{(j)}, u^{(j)}) \in \Xi_\gamma \subset \Xi$. С учетом этого рассмотрим

$$\big\|\mathcal{N}[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}]\big\|_{\mathcal{Z}^m} = \big\|\mathcal{N}[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}] - \mathcal{N}[z^{(j)}, u^{(j)}]\big\|_{\mathcal{Z}^m} < \varepsilon.$$

Это означает, что выполнено (3.2). При этом

$$\big\|\theta + G[z\{\xi^{(j)}\}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|\theta + G[z^{(j)}] + G[z\{\xi^{(j)}\}] - G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell}$$

$$\leq \big\|\theta + G[z^{(j)}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} + \big\|G\big[z\{\xi^{(j)}\} - z^{(j)}\big]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} \leq C\gamma + \varepsilon,$$

т. е. выполняется (3.3). Кроме того,

$$\big|I[z,u] - I[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}]\big| \leq \big|I[z,u] - I[z^{(j)}, u^{(j)}]\big| + \big|I[z^{(j)}, u^{(j)}] - I[z\{\xi^{(j)}\}, u\{\eta^{(j)}\}]\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. выполняется (3.4). Теорема 6 доказана.

7. Доказательство теоремы о сходимости решения аппроксимирующей задачи к решению исходной задачи

Доказательство теоремы 7. Поскольку $\Xi \neq \varnothing$ и выполнено условие **Г**), то ясно, что $\Xi_\gamma \neq \varnothing$. Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. Из теоремы 6 следует, что существуют числа $\rho_\varepsilon, \lambda_\varepsilon > 0$ и параллелепипед $[a;b] \subset \mathbb{R}^m$ такие, что для любых разбиений π и ϖ множества Π мелкостей $\rho(\pi) < \rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi) < \lambda_\varepsilon$ любой пары $(x,u) \in \Xi_\gamma$ и соответствующего $z = f(.,x,u)$ найдутся векторы $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие им аппроксимации $z\{\xi\} \in \mathbb{V}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $u\{\eta\} \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ такие, что $\big|I[z,u] - I[z\{\xi\}, u\{\eta\}]\big| < \varepsilon/2$,

$$\big\|z\{\xi\} - f\big(.,\theta + G[z\{\xi\}], u\{\eta\}\big)\big\|^p_{\mathcal{Z}^m} < \delta, \quad \big\|\theta + G[z\{\xi\}]\big\|^q_{\mathcal{X}^\ell} \leq (C\gamma + \delta)^q.$$

Отсюда ясно, что допустимое множество в задаче (3.5)–(3.7) не пусто. Согласно лемме 1 функционал $I[z,u]$ непрерывен по $(z,u) \in \mathcal{Z}^m \times \mathcal{U}^s$. И очевидно, что зависимость аппроксимаций $z\{\xi\}$, $u\{\eta\}$ от векторов $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ соответственно в метриках пространств $\mathcal{Z}^m$ и $\mathcal{U}^s$ непрерывна, причем множества $\mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$ и $\mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ являются компактами. Отсюда и из теоремы Вейерштрасса получаем, что справедливо утверждение 1.

Докажем утверждение 2. Пусть теперь $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ — приближенное глобальное решение задачи (3.5)–(3.7) с точностью $\sigma_\varepsilon = \varepsilon/2$ по функции; $\overline{z} = z\{\overline{\xi}\}$, $\overline{u} = u\{\overline{\eta}\}$, $\overline{x} = \theta + G[\overline{z}]$.

Это означает, во-первых, что при $\xi = \overline{\xi}$, $\eta = \overline{\eta}$ выполнено (3.6), откуда

$$\big\|\overline{x} - \theta - G\big[f(.,\overline{x},\overline{u}]\big\|_{\mathcal{H}^\ell} = \big\|G\big[\overline{z} - f(.,\overline{x},\overline{u}]\big\|_{\mathcal{H}^\ell} = \big\|G\big[\overline{z} - f(.,\theta + G[\overline{z}],\overline{u}]\big\|_{\mathcal{H}^\ell} \leq \|G\| \sqrt[p]{\delta},$$

т. е. выполнено (3.8). Во-вторых, при $\xi = \overline{\xi}$, $\eta = \overline{\eta}$ выполнено (3.7), откуда

$$\|\overline{x}\|_{\mathcal{X}^\ell} = \big\|\theta + G[\overline{z}]\big\|_{\mathcal{X}^\ell} \leq C\,\gamma + \delta,$$

т. е. выполнено соотношение (3.9). И, в-третьих, $I[z\{\xi\}, u\{\eta\}] - I[\overline{z}, \overline{u}] \geq -\varepsilon/2$ для всех векторов $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$, удовлетворяющих условиям (3.6), (3.7). Выберем теперь произвольно пару $(x,u) \in \Xi_\gamma$ и обозначим $z = f(.,x,u)$. Как уже было сказано, найдутся векторы $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие им аппроксимации $z\{\xi\} \in \mathbb{V}\big(\varpi, m, [a;b]\big)$, $u\{\eta\} \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$, удовлетворяющие (3.6), (3.7) и такие, что имеет место неравенство $\big|I[z,u] - I[z\{\xi\}, u\{\eta\}]\big| < \varepsilon/2$. Таким образом,

$$J[x,u] - J[\overline{x},\overline{u}] = J\big[\theta + G\big[f(.,x,u)\big], u\big] - J\big[\theta + G[\overline{z}], \overline{u}\big]$$

$$= J\big[\theta + G[z], u\big] - J\big[\theta + G[\overline{z}], \overline{u}\big] = I[z,u] - I[\overline{z},\overline{u}]$$

$$= I[z,u] - I[z\{\xi\}, u\{\eta\}] + I[z\{\xi\}, u\{\eta\}] - I[\overline{z},\overline{u}] \geq -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon.$$

Теорема 7 доказана.

8. Пример: задача Дирихле для стационарного уравнения типа диффузии-реакции

Обратимся к задаче (0.1), обсуждавшейся во введении. Чтобы строго обосновать необходимые нам свойства оператора $G[z]$, прежде всего вспомним *неравенство Пуанкаре — Фридрихса*: существует константа $R_\Pi = R(\mathrm{mes}\,\Pi)^{1/n}$, где $R > 0$ зависит лишь от n, такая, что для любой функции $x \in H_0^1(\Pi)$ справедлива оценка $\|x\|_{L_2(\Pi)} \leq R_\Pi \|\nabla x\|_{L_2^n(\Pi)}$. Пользуясь этим неравенством, нетрудно сконструировать положительную константу μ такую, что

$$\|\nabla x\|_{L_2^n(\Pi)} \geq \sqrt{\mu}\,\|x\|_{W_2^1(\Pi)} \quad \forall\, x \in H_0^1(\Pi). \tag{8.1}$$

Однако сделать это можно разными способами. Далее для простоты изложения эту константу $\mu > 0$ будем считать заданной. Сведем задачу (0.1) к уравнению вида (1.1) и проверим выполнение предположений, сделанных нами относительно этого уравнения. Для этого нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений. Первое из них известно как теорема вложения Соболева — Кондрашова (см., например, [17, гл. II, теорема 2.2]).

Лемма 5. *Для всех ограниченных строго липшицевых областей $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ (а также конечных сумм таких областей) ограниченные множества функций $x \in W_p^1(\Pi)$ относительно компактны*[5] *в $L_q(\Pi)$ для всех $q < pn/(n-p)$ при $p \leq n$.*

Следующее утверждение — это теорема Лакса — Мильграма [31, § 5.8, теорема 5.8, с.84].

Лемма 6. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство; $B : H \times H \to \mathbb{R}$ — билинейная форма, которая является ограниченной и коэрцитивной, т. е. существуют константы γ_1, $\gamma_2 > 0$ такие, что $\big|B[x,y]\big| \leq \gamma_2 \|x\|\,\|y\|$, $B(x,x) \geq \gamma_1 \|x\|^2$ $\forall x,y \in H$. Тогда для любого $\psi \in H^*$ существует единственный элемент $x \in H$ такой, что $B[x,.] = \psi$.*

Следующее утверждение известно как *принцип максимума* для эллиптических уравнений (см., например, [32, гл. 2, теорема 4.1], а также [31, теорема 8.1]).

Лемма 7. *Для любых $A \in \mathcal{A}(\sigma)$ и $b \in L_\infty^+(\Pi)$ при условии, что $B[x,\omega] \geq 0$ $\forall \omega \in \mathbf{C}_0^1(\Pi)$, $\omega \geq 0$, имеем $\inf\limits_{\Pi} x \geq \inf\limits_{\partial\Pi} x^-$, где $x^- = \min\{x, 0\}$.*

Лемма 8. *Для любых $A \in \mathcal{A}(\sigma)$, $b \in L_\infty^+(\Pi)$, $z \in L_2^+(\Pi)$ всякое обобщенное решение задачи* (0.2) *неотрицательно*: $x \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $x \in H_0^1(\Pi)$ — обобщенное решение задачи (0.2). Это означает, что

$$B[x,\omega] = \int\limits_{\Pi} z(t)\omega(t)\,dt$$

для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$. Для любого $\omega \in \mathbf{C}_0^1(\Pi)$, $\omega \geq 0$, отсюда, в частности, получаем $B[x,\omega] \geq 0$. После этого остается воспользоваться леммой 7. Лемма доказана.

Теперь для произвольно фиксированного $z \in \mathcal{Z} = L_2(\Pi)$ рассмотрим вспомогательную задачу (0.2). Так же, как и раньше, элемент $x \in H_0^1(\Pi)$ называем обобщенным решением задачи (0.2), если и только если для каждого $\omega \in H_0^1(\Pi)$ выполняется тождество

$$B[x,\omega] = \int\limits_{\Pi} z(t)\omega(t)\,dt.$$

[5] В [17, гл. II, теорема 2.2] речь идет о компактности. Однако там используется устаревшая терминология: на самом деле имеется в виду относительная секвенциальная компактность, а она в случае метрического пространства равносильна относительной компактности (см. [30, § I.5, следствие 2 теоремы 2, с. 45]).

На пространстве $H_0^1(\Pi)$ с помощью формулы $\psi[\omega] = \displaystyle\int_\Pi z(t)\omega(t)\,dt$ определим линейный непрерывный функционал $\psi \in H^*$, $H = H_0^1(\Pi)$. Пользуясь определением класса $\mathcal{A}(\sigma)$, а также неравенствами Коши — Буняковского и Гельдера, нетрудно показать, что билинейная форма $B[x,y]$ является ограниченной. Пользуясь определением класса $\mathcal{A}(\sigma)$, неотрицательностью функции $b \in L_\infty^+(\Pi)$ и неравенством (8.1) для произвольного $x \in H$ можем оценить

$$B[x,x] = \int\limits_\Pi \big[A\nabla x \cdot \nabla x + bx^2\big]\,dt \geq \sigma\|\nabla x\|^2_{L_2^n} \geq \sigma_1\|x\|^2_{W_2^1}, \quad \sigma_1 = \sigma\mu.$$

Это означает, что билинейная форма $B[x,y]$ коэрцитивна. Таким образом, согласно теореме Лакса — Мильграма (лемме 6) при данном (произвольно фиксированном) $z \in L_2(\Pi)$ существует единственное решение $x \in H_0^1(\Pi)$, которое мы обозначим $G[z]$. Тем самым определен оператор $G : L_2(\Pi) \to H_0^1(\Pi) \subset \mathcal{H}(\Pi)$. Ясно, что это линейный оператор. Кроме того, он является также и ограниченным. Действительно по доказанному имеем

$$\sigma_1\big\|G[z]\big\|^2_{W_2^1} \leq B\big[G[z],G[z]\big] \leq \int\limits_\Pi |z(t)|\,|G[z](t)|\,dt \leq \|z\|_{L_2}\,\|G[z]\|_{L_2} \leq \|z\|_{L_2}\,\|G[z]\|_{W_2^1},$$

откуда $\big\|G[z]\big\|_{W_2^1} \leq \sigma_1^{-1}\,\|z\|_{L_2}$. При этом задача (0.1) становится равносильной уравнению (0.3) вида (1.1). Кроме того, в соответствии с леммой 5 имеет место компактное вложение $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$.

Согласно лемме 8 оператор G является положительным в смысле $G[z_1] \leq G[z_2]$ для всех z_1, $z_2 \in L_2(\Pi)$, $z_1 \leq z_2$. Таким образом, в качестве мажоранты $G^\sharp$ можно взять $G^\sharp = G$, и условие **G**) выполняется. Мажорантное уравнение (1.2) из условия **H**) равносильно задаче

$$\mathcal{L}[x](t) = \varphi\big(t,x(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0; \quad x \in H_0^1(\Pi), \quad x \geq 0. \tag{8.2}$$

Условие **H**) можно понимать как условие относительно функции f и считать выполненным. Тем самым в соответствии с теоремой 1 будет выполнено и условие **Г**). Таким образом, все предположения выполняются. Следовательно, справедливы утверждения теорем 5–7 при $\ell = m = 1$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$; $\theta = 0$; при $G[z]$, понимаемом как решение задачи (0.2); $G^\sharp = G$ и при заменах (1.1) $\to$ (0.3) или (0.1) (что одно и то же), (2.1) $\to$ (0.4).

А именно, имеют место следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть существует функция $\varphi(t,\xi) : \Pi \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная и не убывающая по $\xi \in \mathbb{R}^+$ и такая, что $\big|f\big(.,y(.),u(.)\big)\big| \leq \varphi\big(.,|y(.)|\big) \in L_2(\Pi)$ для всех $y \in L_q(\Pi)$, $u \in \mathcal{D}$, и, кроме того, мажорантная задача* (8.2) *имеет решение $x = \widehat{x}$. Тогда при некотором $\gamma > 0$ задача* (0.1) *для каждого управления $u \in \mathcal{D}$ имеет по крайней мере одно решение $x \in H_0^1(\Pi)$ такое, что $|x| \leq \widehat{x}$, $\|x\|_{W_2^1} \leq \gamma$.*

Обозначим $\mathcal{P}_\gamma$ — множество всех пар $(x,u) \in H_0^1(\Pi) \times \mathcal{D}$, удовлетворяющих системе (0.1) и таких, что $\|x\|_{W_2^1} \leq \gamma$.

Теорема 9. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют числа $\rho_\varepsilon, \lambda_\varepsilon > 0$ и отрезок $[a;b] \subset \mathbb{R}$ такие, что, каковы бы ни были разбиения π и ϖ множества Π мелкостей соответственно $\rho(\pi) < \rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi) < \lambda_\varepsilon$, для любой пары $(x,u) \in \mathcal{P}_\gamma$ и соответствующего элемента $z = f(.,x,u)$ найдутся векторы $\xi \in \mathbb{W}\big(\varpi,1,[a;b]\big)$, $\eta \in \mathbb{W}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ и соответствующие им аппроксимации $z\{\xi\} \in \mathbb{V}\big(\varpi,1,[a;b]\big)$, $u\{\eta\} \in \mathbb{V}\big(\pi,s,[\alpha;\beta]\big)$ такие, что*

$$\big\|z\{\xi\} - f\big(.,G[z\{\xi\}],u\{\eta\}\big)\big\|_{L_2} < \varepsilon, \quad \big\|G\big[z\{\xi\}\big]\big\|_{L_q} \leq C\gamma + \varepsilon, \quad \big|I[z,u] - I[z\{\xi\},u\{\eta\}]\big| < \varepsilon,$$

где $G[z]$ понимается как решение задачи (0.2).

Для заданного $\delta > 0$ (точности выполнения ограничений) аппроксимирующая задача оптимизации ставится следующим образом (см. введение):

$$I\{\xi,\eta\} \to \min,\ \ \xi \in \mathbb{V}\big(\varpi, 1, [a;b]\big),\ \ \eta \in \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big),\ \ \Psi_1\{\xi,\eta\} \le \delta,\ \ \Psi_2\{\xi,\eta\} \le (C\gamma{+}\delta)^q. \quad (8.3)$$

Теорема 10. *Пусть выполнены предположения теоремы* 8. *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* ρ_ε, $\lambda_\varepsilon > 0$, $\sigma_\varepsilon > 0$, *а также отрезок* $[a;b] \subset \mathbb{R}$ *такие, что для любых разбиений* π *и* ϖ *множества* Π *мелкостей* $\rho(\pi) < \rho_\varepsilon$, $\rho(\varpi) < \lambda_\varepsilon$ *справедливы следующие утверждения:* 1) *задача* (8.3) *имеет глобальное решение*; 2) *пусть* $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ — *приближенное глобальное решение задачи* (8.3) *с точностью* σ_ε *по функции*; $\overline{z} = z\{\overline{\xi}\}$, $\overline{u} = u\{\overline{\eta}\}$, $\overline{x} = G[\overline{z}]$. *Тогда* $(\overline{x}, \overline{u})$ *есть приближенное глобальное решение задачи* $J[x,u] \to \min$, $(x,u) \in \mathcal{P}_\gamma$, *с точностью* ε *по функционалу при точности* δ *выполнения ограничений в смысле*

$$\big\|\overline{x} - G\big[f(.,\overline{x},\overline{u})\big]\big\|_{W_2^1} \le \|G\|\ \sqrt[p]{\delta}, \quad \|\overline{x}\|_{L_q} \le C\gamma + \delta,$$

где $G[z]$ *понимается как решение задачи* (0.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М.** Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1989. 142 с.
2. **Потапов М.М., Разгулин А.В.** Разностные методы в задачах оптимального управления стационарным самовоздействием световых пучков // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 8. С. 1157–1169.
3. **Ишмухаметов А.З.** Условия устойчивости и аппроксимации в задачах оптимального управления гиперболическими системами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 1. С. 12–28.
4. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
5. **Потапов М.М.** Разностная аппроксимация задач дирихле-наблюдения слабых решений волнового уравнения с краевыми условиями III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 8. С. 1323–1339.
6. **Tröltzsch F.** Semidiscrete Ritz–Galerkin approximations of nonlinear parabolic boundary control problems — strong convergence of optimal controls // Appl. Math. Optimization. 1994. Vol. 29, no. 3. P. 309–329.
7. **Chryssovergchi I.** Mixed discretization-optimization methods for relaxed optimal control of nonlinear parabolic systems // Proc. of the 6th WSEAS International Conf. on Simulation, Modelling and Optimization. Lisbon, 2006. P. 41–47.
8. **Fu H.** A characteristic finite element method for optimal control problems governed by convection-diffusion equations // J. Comput. Appl. Math. 2010. Vol. 235, no. 3. P. 825–836.
9. **Цепелев И.А.** Аппроксимация негладких решений ретроспективной задачи для модели конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 281–290.
10. **Исаев В.И., Шапеев В.П.** Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 41–60.
11. **Чернов А.В.** О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 12. С. 2029–2043.
12. **Golubev Yu.F., Seregin I.A., Khayrullin R.Z.** The floating nodes method // Sov. J. Comput. Syst. Sci. 1992. Vol. 30, no. 2. P. 71–76.
13. **Чернов А.В.** О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса — Дарбу на варьируемой области // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 305–321.
14. **Чернов А.В.** О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 6(1). С. 107–114.
15. **Волков Ю.С., Субботин Ю.Н.** 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
16. **Su Laiping, Abe Kenichi.** Optimal control for linear periodic systems by using multirate piecewise constant sampled state feedback // Int. J. Syst. Sci. 1993. Vol. 24, no. 2. P. 355–371.

17. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
18. **Воробьев А.Х.** Диффузионные задачи в химической кинетике. М.: Изд-во МГУ, 2003. 98 с.
19. **Tröltzsch F.** Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications. Providence: American mathematical society, 2010. 399 p. (Graduate Studies in Mathematics; vol. 112.)
20. **Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.** Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 1. С. 20–46.
21. **Сумин В.И.** Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056–1059.
22. **Сумин В.И.** Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 1. С. 3–21.
23. **Сумин В.И.** Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. I. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 1992. 110 с.
24. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
25. **Чернов А.В.** Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
26. **Чернов А.В.** О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
27. **Чернов А.В.** О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1400–1414.
28. **Чернов А.В.** Об управляемости нелинейных распределенных систем на множестве конечномерных аппроксимаций управления // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 83–98.
29. **Красносельский М.А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956. 392 с.
30. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
31. **Гилбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
32. **Карчевский М.М., Павлова М.Ф.** Уравнения математической физики. Дополнительные главы. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2012. 228 с.

Чернов Андрей Владимирович
Поступила 25.06.2014
канд. физ.-мат. наук, доцент
Нижегородский государственный университет
Нижегородский государственный технический университет
e-mail: chavnn@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 519.624

СХЕМА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ [1]

Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина

Рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии. Для этой задачи разрабатывается новый подход к построению разностных схем, решения которых сходятся в равномерной норме равномерно относительно возмущающего параметра ε, $\varepsilon \in (0,1]$ (т. е. ε-равномерно) с порядком точности значительно выше максимального достижимого для метода Ричардсона на кусочно-равномерных сетках. Главное в этом подходе — использование равномерных сеток для решения сеточных подзадач для регулярной и сингулярной компонент сеточного решения. На основе техники асимптотических конструкций строится базовая схема метода декомпозиции решения, решение которой сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$, где $N+1$ — число узлов в используемых равномерных сетках. Техника экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках применяется к базовой схеме метода декомпозиции решения. В результате получается схема Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности, решение которой сходится ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная краевая задача, обыкновенное дифференциальное уравнение реакции-диффузии, декомпозиция сеточного решения, техника асимптотических конструкций, разностная схема метода декомпозиции решения, равномерные сетки, ε-равномерная сходимость, равномерная норма, техника экстраполяции Ричардсона, разностная схема высокого порядка точности.

G. I. Shishkin, L. P. Shishkina. Difference scheme of highest accuracy order for a singularly perturbed reaction–diffusion equation based on the solution decomposition method.

A Dirichlet problem is considered for a singularly perturbed ordinary differential reaction–diffusion equation. For this problem, a new approach is developed in order to construct difference schemes whose solutions converge in the maximum norm uniformly with respect to the perturbation parameter ε, $\varepsilon \in (0,1]$ (i.e., ε-uniformly) with order of accuracy significantly greater than the achievable accuracy order for the Richardson method on piecewise-uniform grids. Important in this approach is the use of uniform grids for solving grid subproblems for regular and singular components of the grid solution. Using the asymptotic construction technique, a basic difference scheme of the solution decomposition method is constructed that converges ε-uniformly in the maximum norm at the rate $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$, where $N+1$ is the number of nodes in the uniform grids used. The Richardson extrapolation technique on three embedded grids is applied to the basic scheme of the solution decomposition method. As a result, we have constructed the Richardson scheme of the solution decomposition method with highest accuracy order. The solution of this scheme converges ε-uniformly in the maximum norm at the rate $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$.

Keywords: singularly perturbed boundary value problem, ordinary differential reaction–diffusion equation, decomposition of a discrete solution, asymptotic construction technique, difference scheme of the solution decomposition method, uniform grids, ε-uniform convergence, maximum norm, Richardson extrapolation technique, difference scheme of highest accuracy order.

Посвящается памяти академика А. М. Ильина

1. Введение

В последнее время для сингулярно возмущенных задач на основе схем на кусочно-равномерных сетках с использованием техники Ричардсона (технику Ричардсона для регулярных задач см. в [1]) построены ε-равномерно сходящиеся схемы повышенного порядка точности (см., например, [2–8], а также [9, гл. 10], и библиографию там). Однако использование неравномерных сеток вызывает затруднения при построении схем высокого порядка точности.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00618).

Так, метод Ричардсона в случае параболического уравнения реакции-диффузии не позволяет строить схемы с порядком точности по x выше третьего (см. [7]), а в случае эллиптического уравнения конвекции-диффузии — с порядком точности выше второго (см. [8]).

В статье [10] разработан новый подход к построению специальных схем на основе техники асимптотических конструкций — метод декомпозиции сеточного решения. Главное в этом подходе — использование классических аппроксимаций задач для регулярной и сингулярной компонент решения на равномерных сетках. В отличие от известных подходов к построению ε-равномерно сходящихся разностных схем — метода подгонки (приводящего к схемам Ильина/Аллена — Саусвелла [11; 12]) и метода специальных сеток, сгущающихся в погранслое (использующего классические схемы на сетках Бахвалова и/или Шишкина [13–15]), — в новом подходе сеточные подзадачи решаются на соответствующих равномерных сетках, причем коэффициенты сеточных уравнений не зависят от явного вида сингулярной компоненты решения. В [10] для задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии впервые построена схема метода декомпозиции решения, сходящаяся ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$, где $N+1$ — число узлов в используемых сетках. В этой же работе — с использованием техники Ричардсона — построена улучшенная схема метода декомпозиции решения, сходящаяся ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-4}\ln^4 N\right)$.

Отметим, что для сингулярно возмущенных задач схемы, сходящиеся ε-равномерно с порядком выше четвертого, в литературе не известны. В настоящей работе метод декомпозиции сеточного решения впервые применяется для построения аппроксимации краевой задачи реакции-диффузии, сходящейся ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$. Построение сеточных аппроксимаций решения высокого порядка точности потребовало модификации метода экстраполяции Ричардсона и техники декомпозиции сеточных решений, используемых ранее в [10]. Существенным является использование трех вложенных сеток в методе экстраполяции Ричардсона, а также построение улучшенных разложений для регулярной компоненты решения. Предлагаемый новый вариант разностной схемы допускает построение разностных схем для числа вложенных сеток больше трех (при построении схем, сходящихся с порядком, близким к восьмому и выше) и, в отличие от работы [10], не требует использования сеточных конструкций, область определения которых выходит за область определения краевой задачи.

О содержании работы. Постановка краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии и цель исследования сформулированы в разд. 2. В разд. 3 приводится стандартная разностная схема на равномерной сетке. В разд. 4 описывается метод экстраполяции Ричардсона, используемый для повышения точности решений стандартной разностной схемы на равномерной сетке. В разд. 5 строится базовая разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенной задачи. Регулярная и сингулярная компоненты рассматриваются на равномерных сетках. Схема метода декомпозиции решения сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$ — такой же скоростью, как стандартная схема на кусочно-равномерной сетке. Здесь $N+1$ — число узлов используемых сеток; заметим, что число узлов сеток, на которых рассматриваются сеточные аппроксимации регулярной и сингулярных компонент в окрестности левой и правой границ области, одинаково. Разностная схема высокого порядка точности — схема Ричардсона метода декомпозиции решения, сходящаяся ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$, — строится в разд. 6.

2. Постановка задачи. Цель работы

На множестве $\overline{D}$

$$\overline{D} = D \cup \Gamma, \quad D = (0, d), \tag{2.1}$$

рассмотрим задачу Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии[1]

$$L_{(2.2)}\,u(x) \equiv \left\{\varepsilon^2\,a(x)\frac{d^2}{dx^2} - c(x)\right\} u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 и Γ_2 — левая и правая части границы Γ; функции $a(x)$, $c(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{D}$, причем[2]

$$a_0 \le a(x) \le a^0, \quad c_0 \le c(x) \le c^0, \quad x \in \overline{D}; \quad a_0,\, c_0 > 0;$$
$$|f(x)| \le M, \quad x \in \overline{D}; \quad |\varphi(x)| \le M, \quad x \in \Gamma;$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. При малых значениях параметра ε в окрестности множества Γ появляется пограничный слой.

Цель настоящей работы — для краевой задачи (2.2), (2.1) построить схему высокого порядка точности — схему, сходящуюся ε-равномерно в равномерной норме с шестым порядком точности (с точностью до логарифмического сомножителя) — на основе техники декомпозиции сеточного решения и техники экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках.

3. Разностная схема на равномерной сетке

Рассмотрим разностную схему, строящуюся на основе классической аппроксимации задачи (2.2), (2.1) на равномерной сетке. На множестве $\overline{D}$ введем равномерную сетку

$$\overline{D}_h \tag{3.1}$$

с шагом $h = d\,N^{-1}$, где $N+1$ — число узлов сетки $\overline{D}_h$.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем разностной схемой [16]:

$$\Lambda_{(3.2)}\,z(x) \equiv \left\{\varepsilon^2\,a(x)\,\delta_{\overline{x}\widehat{x}} - c(x)\right\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{3.2}$$

Здесь $D_h = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\,z(x)$ — центральная разностная производная второго порядка на равномерной сетке, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\,z(x) = 2\,h^{-1}\,[\delta_x\,z(x) - \delta_{\overline{x}}\,z(x)]$; $\delta_x\,z(x)$ и $\delta_{\overline{x}}\,z(x)$ — разностные (вперед и назад) производные первого порядка, $\delta_x\,z(x) = h^{-1}\,(x^{i+1} - x^i)$, $\delta_{\overline{x}}\,z(x) = h^{-1}\,(x^i - x^{i-1})$, $x = x^i \in D_h$. Схема (3.2), (3.1) монотонна [16] ε-равномерно. Для нее справедлив принцип максимума. При достаточно гладких данных задачи, обеспечивающих включение $u \in C^K(\overline{D})$, $K > 0$, для решения краевой задачи выполняется априорная оценка (см., например, [17, гл. I, § 3; 9, гл. 2])

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\,u(x)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad x \in \overline{D}, \quad k \le K, \tag{3.3}$$

где $K = 4$. С учетом этой оценки на основе принципа максимума получается оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M\,\left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-2}\,N^{-2}, \quad x \in \overline{D}_h. \tag{3.4}$$

Таким образом, схема (3.2), (3.1) сходится при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N = N_{(3.1)}. \tag{3.5}$$

---

[1] Запись $L_{(j.k)}$ $(\overline{D}_{(j.k)}, M_{(j.k)})$ означает, что этот оператор (область, постоянная) введен в формуле $(j.k)$.

[2] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

4. Экстраполяция Ричардсона на основе классической схемы (3.2), (3.1)

Опишем модифицированный метод экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках, используемый для повышения точности решений стандартной разностной схемы (3.2) на равномерной сетке (3.1). Отметим, что техника экстраполяции Ричардсона из [10] оказывается непригодной для повышения точности решения схемы при использовании сеточных решений на вложенных сетках, когда число вложенных сеток больше двух.

4.1. На множестве $\overline{D}$ строим равномерные сетки

$$\overline{D}_h^q, \quad q = 1, 2, 3. \tag{4.1a}$$

Здесь $\overline{D}_h^1$ есть $\overline{D}_{h(3.1)}$, $\overline{D}_h^2$ и $\overline{D}_h^3$ — "прореженные" сетки. Шаг h^2 сетки $\overline{D}_h^2$ (на отрезке $\overline{D}$) в k раз больше, чем шаг h^1 сетки $\overline{D}_h^1$, а шаг h^3 сетки $\overline{D}_h^3$ в k^2 раз больше, чем шаг h^1; $k^{-1}N+1$ и $k^{-2}N+1$ — число узлов сеток $\overline{D}_h^2$ и $\overline{D}_h^3$ соответственно; имеем $h^1 = dN^{-1}$, $h^2 = kdN^{-1}$, $h^3 = k^2 dN^{-1}$. Пусть

$$\overline{D}_h^0 = \overline{D}_h^1 \bigcap \overline{D}_h^2 \bigcap \overline{D}_h^3. \tag{4.1b}$$

При k целом ($k \geq 2$) $\overline{D}_h^0 = \overline{D}_h^3$, а при k нецелом $\overline{D}_h^0 \neq \overline{D}_h^3$.

Пусть функции $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1,\ 2,\ 3,$ — решения разностных схем

$$\begin{aligned} \Lambda_{(3.2)} z^q(x) &= f(x), \quad x \in D_h^q, \\ z^q(x) &= \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h^q, \quad q = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.2a}$$

Решения $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, допускают разложения относительно величины N^{-2}, где функция $u(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение краевой задачи — есть главный член. Рассматривая линейную комбинацию сеточных решений $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, получим на $\overline{D}_h^0$ более точное решение, чем $z^q(x)$, $q = 1, 2, 3$. Полагаем

$$z^0(x) = \gamma_1\, z^1(x) + \gamma_2\, z^2(x) + \gamma_3\, z^3(x), \quad x \in \overline{D}_h^0. \tag{4.2b}$$

Здесь

$$\gamma_q = \gamma_q(k), \quad q = 1, 2, 3, \quad \gamma_1 = k^6(k^6 - k^4 - k^2 + 1)^{-1},$$
$$\gamma_2 = -(k^4 + k^2)(k^6 - k^4 - k^2 + 1)^{-1}, \quad \gamma_3 = (k^6 - k^4 - k^2 + 1)^{-1}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1.$$

Так, например, при $k = 2$ имеем

$$z^0(x) = 45^{-1}(64\, z^1(x) - 20\, z^2(x) + z^3(x)), \quad x \in \overline{D}_h^0. \tag{4.3}$$

Будем говорить, что функция $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$ (функция $z^0_{(4.3)}(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$ при $k = 2$) есть решение разностной схемы (4.2), (4.1), т. е. схемы, строящейся на основе метода экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках или, короче, схемы Ричардсона. Функции $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, назовем компонентами решения схемы Ричардсона. Коэффициенты $\gamma_q = \gamma_q(k)$, $q = 1, 2, 3$, в (4.2b) выбираются таким образом, чтобы функция $z^0(x)$ в разложении (4.4) по величине N^{-1} (по эффективному шагу) не содержала функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ (см. разложение (4.4) ниже).

4.2. Для обоснования сходимости схемы (4.2), (4.1) применяется техника, подобная использованной в [2–4; 6; 9]. Предполагаем, что для решения краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется априорная оценка (3.3) при $K = 8$.

Рассмотрим разложения функций $z^q(x)$, $x \in \overline{D}_h^q$, $q = 1, 2, 3$, по величине N^{-1}:

$$z^q(x) = u(x) + 12^{-1} d^2 k^{2(q-1)} N^{-2} u_1(x) + 360^{-1} d^4 k^{4(q-1)} N^{-4} u_2(x) + v^q(x), \tag{4.4}$$

$$x \in \overline{D}_h^q, \quad q = 1, 2, 3,$$

где $v^q(x)$ — остаточный член. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ — решения задач

$$L_{(2.2)}\, u_1(x) = -\varepsilon^2\, a(x)\, \frac{d^4}{dx^4}\, u(x), \quad x \in D, \quad u_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{4.5a}$$

$$L_{(2.2)} u_2(x) = -2.5\, \varepsilon^2 a(x) \frac{d^4}{dx^4} u_1(x) - \varepsilon^2 a(x) \frac{d^6}{dx^6}\, u(x), \quad x \in D, \quad u_2(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Здесь $u(x) = u_{\{(2.2),\,(2.1)\}}(x)$, $x \in \overline{D}$.

При построении разложения (4.4) используется разложение для второй центральной разностной производной функции $u(x)$, $u \in C^8(\overline{D})$:

$$\delta_{x\,\overline{x}} u(x) = \frac{d^2}{dx^2}\, u(x) + \; 12^{-1}\, h^2 \frac{d^4}{dx^4}\, u(x) + 360^{-1}\, h^4 \frac{d^6}{dx^6}\, u(x) + 20160^{-1}\, h^6 \frac{d^8}{dx^8}\, u(\widetilde{x}),$$

где $x \in D_h^u$, $x - h \le \widetilde{x} \le x + h$, а также подобные разложения второй разностной производной для функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

Компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются достаточно гладкими на $\overline{D}$. Для функций $u_{1(4.5)}(x)$, $u_{2(4.5)}(x)$, $x \in \overline{D}$, справедливы оценки

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} u_1(x) \right| \le M\, \varepsilon^{-2-k}, \quad \left| \frac{d^k}{dx^k} u_2(x) \right| \le M\, \varepsilon^{-4-k}, \quad x \in \overline{D}. \tag{4.6}$$

Применив оператор $\Lambda_{(3.2)}$ к разложению (4.4), принимая во внимание оценку (3.4) для решения $u(x)$ и оценку (4.6) для компонент $u_1(x)$, $u_2(x)$, находим оценку для функции $v^q(x)$:

$$|v^q(x)| \le M\, \varepsilon^{-6} N^{-6}, \quad x \in \overline{D}_h^q, \quad q = 1, 2, 3. \tag{4.7}$$

С учетом разложения (4.4) и оценки (4.7) находим оценку решения схемы Ричардсона:

$$|u(x) - z^0(x)| \le M\, \varepsilon^{-6} N^{-6}, \quad x \in \overline{D}_h^0. \tag{4.8}$$

Решение схемы Ричардсона (4.2), (4.1) сходится к решению $u(x)$ краевой задачи при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N = N_{(4.1)}. \tag{4.9}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для решения краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется оценка* (3.3) *при* $K = 8$. *Тогда решение* $z^0(x)$ *схемы Ричардсона* (4.2), (4.1) *сходится к решению* $u(x)$ *краевой задачи при условии* (4.9). *Для сеточного решения выполняется оценка* (4.8).

З а м е ч а н и е 1. Схема Ричардсона (4.2), (4.1) сходится при условии (4.9), подобном условию (3.5) для сходимости стандартной схемы (3.2), (3.1), однако схема Ричардсона сходится с порядком скорости сходимости $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-6}\, N^{-6}\right)$, а стандартная схема — лишь с порядком $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-2}\, N^{-2}\right)$.

5. Базовая схема метода декомпозиции сеточного решения для задачи (2.2), (2.1)

На основе техники асимптотических конструкций построим ε-равномерно сходящуюся разностную схему метода декомпозиции сеточного решения, в котором сеточные регулярная и сингулярная компоненты решения вычисляются на равномерных сетках. Будем использовать ее как базовую при построении схемы высокого порядка точности в разд. 6.

5.1. Рассмотрим простейшую декомпозицию решения сингулярно возмущенной краевой задачи (2.2), (2.1). Решение этой задачи представим в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения
$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{5.1a}$$

Поскольку нам предстоит строить ε-равномерно сходящуюся схему высокого порядка точности в разд. 6, нам потребуются оценки производных регулярной компоненты решения $U(x)$, ε-равномерно ограниченные до более высокого порядка по сравнению с оценками теоремы 4 в статье [10], мы рассматриваем разложение регулярной компоненты в виде суммы *с большим числом членов*, чем это было в статье [10] (см. формулу (5.1b) в [10]):
$$U(x) = U_0(x) + \varepsilon^2 U_1(x) + \varepsilon^4 U_2(x) + v_U(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{5.2}$$

Функции $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$ и $v_U(x)$ в (5.2) — решения следующих задач:
$$L_{(5.3)}\, U_0(x) = f(x), \qquad x \in \overline{D}; \tag{5.3a}$$
$$L_{(5.3)}\, U_1(x) = -a(x)\, \frac{d^2}{dx^2}\, U_0(x), \qquad x \in \overline{D}; \tag{5.3b}$$
$$L_{(5.3)}\, U_2(x) = -a(x)\, \frac{d^2}{dx^2}\, U_1(x), \qquad x \in \overline{D};$$
$$L_{(2.2)}\, v_U(x) = -\varepsilon^6 a(x)\, \frac{d^2}{dx^2}\, U_2(x), \quad x \in D, \quad v_U(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{5.3c}$$

Здесь $L_{(5.3)} = L_{(2.2)}|_{\varepsilon=0} \equiv -c(x)$, $x \in \overline{D}$.

Отсюда следует, что в представлении (5.2) регулярной компоненты $U(x)$ главные члены $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$ определяются соотношениями
$$U_0(x) = -\, c^{-1}(x)\, f(x), \quad U_1(x) = -\, c^{-1}(x)\, a(x)\, \frac{d^2}{dx^2}\, (c^{-1}(x)\, f(x)), \tag{5.4a}$$
$$U_2(x) = -\, c^{-1}(x)\, a(x)\, \frac{d^2}{dx^2} \Big[c^{-1}(x)\, a(x)\, \frac{d^2}{dx^2}\, (c^{-1}(x)\, f(x)) \Big], \quad x \in \overline{D},$$
остаточный член $v_U(x)$ — решение задачи
$$L_{(2.2)} v_U(x) = \varepsilon^6 a(x)\, \frac{d^2}{dx^2} \Big\{ c^{-1}(x)\, a(x)\, \frac{d^2}{dx^2} \Big[c^{-1}(x)\, a(x)\, \frac{d^2}{dx^2}\, (c^{-1}(x)\, f(x)) \Big] \Big\}, \tag{5.4b}$$
$$x \in D, \quad v_U(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Сингулярная компонента $V(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение задачи
$$L_{(2.2)}\, V(x) = 0, \quad x \in D, \quad V(x) = \varphi_V(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5.5a}$$
где
$$\varphi_V(x) = \varphi(x) - U(x), \quad x \in \Gamma, \quad U(x) = U_{(5.2)}(x), \quad x \in \overline{D}.$$

Функцию $V(x)$ представим в виде суммы функций
$$V(x) = V_1(x) + V_2(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{5.1c}$$
где функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ — решения задач
$$\begin{aligned} L_{(2.2)}\, V_j(x) &= 0, && x \in D, \\ V_j(x) &= \varphi_V(x), && x \in \Gamma_j, \\ V_j(x) &= 0, && x \in \Gamma \setminus \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.5b}$$

Таким образом, для решения задачи (2.2), (2.1) получено представление (5.1a,c), (5.2), компоненты которого являются решением задачи {(5.3), (5.5)}, эквивалентной задаче {(5.4), (5.5)}.

Будем предполагать, что для данных краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется условие Теоремы 10 из [10] при $l_0 \ge 8$, $n = 2$. Тогда для компонент из представления (5.1a,c) получаются оценки, подобные оценкам (5.4) из [10]:

$$\left.\begin{aligned} &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U(x)\Big| \le M\,[1+\varepsilon^{6-k}] \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,V_1(x)\Big| \le M\,\varepsilon^{-k}\,\exp(-m\,\varepsilon^{-1}\,x) \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,V_2(x)\Big| \le M\,\varepsilon^{-k}\,\exp(-m\,\varepsilon^{-1}\,(d-x)) \end{aligned}\right\},\quad x\in\overline{D},\quad k\le K, \tag{5.6}$$

а для компонент из (5.2) — следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U_0(x)\Big| \le M, && k\le K+4 \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U_1(x)\Big| \le M, && k\le K+2 \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,U_2(x)\Big| \le M, && k\le K \\ &\Big|\frac{d^k}{dx^k}\,v_U(x)\Big| \le M\,\varepsilon^{4-k}, && k\le K \end{aligned}\right\},\quad x\in\overline{D}, \tag{5.7}$$

где m — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min_{\overline{D}}^{1/2}\,\big[a^{-1}(x)\,c(x)\big]$; $K = 8$.

Теорема 2. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие теоремы* 10 *из* [10] *при* $l_0 \ge 8$, $n = 2$. *Тогда для компонент из представлений* (5.1a,c) *и* (5.2) *справедливы оценки* (5.6) *и* (5.7) *соответственно, где* $K = 8$.

5.2. Для краевой задачи (2.2), (2.1) с использованием декомпозиции (5.2) регулярной компоненты $U(x)$ построим разностную схему метода декомпозиции решения — асимптотических конструкций, подобных рассматриваемым в [9, гл. 10]. При значениях параметра, близких к единице, краевую задачу аппроксимируем стандартной разностной схемой, а при малых значениях ε используем сеточные аппроксимации дифференциальных подзадач для регулярной и сингулярной компонент решения на подходящих равномерных сетках.

При не слишком малых значениях параметра ε, а именно при условии

$$\varepsilon \ge \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = m\,l^{-1}\,d\,\ln^{-1} N, \tag{5.8}$$

где $m = m_{(5.7)}$, $l = 6$, задачу (2.2), (2.1) будем аппроксимировать стандартной разностной схемой (3.2) на *равномерной сетке* (3.1); $N = N_{(3.1)}$.

При достаточно малых значениях параметра ε, а именно при условии

$$\varepsilon < \varepsilon_0(N), \tag{5.9}$$

главный член $U_0(x)$ регулярной компоненты $U(x)$, а также компоненты $U_1(x)$ и $U_2(x)$ из представления (5.2) выписываются в явном виде (см. (5.4a)). Краевую задачу (5.4b) для остаточного члена $v_U(x)$ будем аппроксимировать схемой на *равномерной сетке* (3.1), а краевые задачи для сингулярных компонент $V_j(x)$ из (5.5b) — схемами на *равномерных сетках*, строящихся на подобластях $\overline{D}{}_j^{\sigma}$ из $\overline{D}$, примыкающих к границам Γ_j, $j = 1, 2$, где

$$\overline{D}{}_j^{\sigma} = D_j^{\sigma} \bigcup \Gamma_j^{\sigma}, \quad j = 1, 2, \quad D_1^{\sigma} = (0, \sigma), \quad D_2^{\sigma} = (d-\sigma, d), \tag{5.10a}$$

$$\sigma = \sigma(\varepsilon,\, N,\, l) = \min\big[d,\ m^{-1}\,l\,\varepsilon\,\ln N\big]\,; \tag{5.10b}$$

здесь $m = m_{(5.12)}$, $l = l_{(5.8)}$, $N = N_{(5.8)}$, $\varepsilon = \varepsilon_{(5.9)}$.

5.2.1. Рассмотрим построение разностной схемы при условии (5.9).

Краевую задачу (5.4b) для остаточного члена $v_U(x)$ аппроксимируем стандартной разностной схемой на равномерной сетке (3.1):

$$\Lambda_{(3.2)}\, z_{v_U} = \varepsilon^6 a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\left\{c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big[c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,(c^{-1}(x)\,f(x))\Big]\right\}, \tag{5.11}$$

$$x \in D_h, \quad z^q_{v_U}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h.$$

Находим сеточную регулярную компоненту $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$:

$$z_U(x) = U_0(x) + \varepsilon^2\, U_1(x) + \varepsilon^4\, U_2(x) + z_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}_h, \tag{5.12}$$

аппроксимирующую регулярную компоненту $U(x)$ из (5.2).

Через $\overline{z}_U(x)$, $x \in \overline{D}$, обозначим интерполянт — линейный интерполянт, строящийся по значениям $z_U(x)$ в узлах сетки $\overline{D}_h$ на элементарных интервалах разбиения множества $\overline{D}$, порождаемых сеткой $\overline{D}_h$.

Функцию $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$, а также ее интерполянт $\overline{z}_U(x), x \in \overline{D}$, назовем решениями (сеточным и континуальным) разностной схемы $\{\{(5.11), (3.1);(5.12)\}; (5.9)\}$, аппроксимирующей дифференциальную задачу (5.4) при условии (5.9) (будем говорить — дифференциальную задачу $\{(5.4); (5.9)\}$).

Имея регулярную компоненту $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$, построим сеточную аппроксимацию краевых задач $\{(5.5a), (5.5b), (2.1)\}$ для сингулярной компоненты $V(x)$ и ее составляющих $V_j(x)$. На множестве $\overline{D}^{\sigma}_{j\,(5.10)}$ введем равномерную сетку

$$\overline{D}^{\sigma}_{j\,h} = \overline{D}^{\sigma u}_{j\,h}, \quad j = 1, 2, \tag{5.13}$$

где $\overline{D}^{\sigma u}_{j\,h}$ — сетка на $\overline{D}^{\sigma}_{j\,(5.10)}$ с шагом $h^{\sigma} = \sigma N^{-1}$, $N+1$ — число узлов сетки $\overline{D}^{\sigma u}_{j\,h}$, $N = N_{(3.1)}$; $\overline{D}^{\sigma}_{j\,h} = D^{\sigma}_{j\,h} \cup \Gamma^{\sigma}_{j\,h}$. На сетке $\overline{D}^{\sigma}_{j\,h}$ решаем сеточную задачу

$$\begin{aligned} \Lambda_{(3.2)} z_{V_j}(x) \ &= \ 0, \quad x \in D^{\sigma}_{j\,h}, \\ z_{V_j}(x) \ &= \ \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x) - \overline{z}_U(x), & x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h} \cap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h} \setminus \Gamma \end{array} \right\}, \quad x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.14}$$

По функции $z_{V_j}(x)$, $x \in \overline{D}^{\sigma}_{j\,h}$, построим интерполянт $\overline{z}_{V_j}(x)$, $x \in \overline{D}^{\sigma}_{j}$. Функции $z_{V_j}(x)$ и $\overline{z}_{V_j}(x)$ вне множества $\overline{D}^{\sigma}_{j}$ считаем равными нулю. Полагаем

$$\overline{z}_V(x) = \overline{z}_{V_1}(x) + \overline{z}_{V_2}(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{5.15}$$

Функцию $\overline{z}_{V\,(5.15)}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем решением (континуальным) разностной схемы $\{(5.14), (5.13); (5.9)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (5.5a), (2.1) при условии (5.9) (будем говорить — краевую задачу $\{(5.5), (2.1); (5.9)\}$). Функцию

$$\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a})}(x) = \overline{z}_U(x) + \overline{z}_V(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.9), \tag{5.16a}$$

где $\overline{z}_U(x) = \overline{z}_{U\,(5.12)}(x)$, $\overline{z}_V(x) = \overline{z}_{V\,(5.15)}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем решением (континуальным) разностной схемы $\{\{(5.11), (3.1); (5.14)\ (5.13)\}; (5.9)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (2.2), (2.1) при условии (5.9) (будем говорить — краевую задачу $\{(2.2), (2.1); (5.9)\}$). Функции

$$U_0(x), U_1(x), U_2(x), \quad x \in \overline{D}; \quad z_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}_h; \quad z_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\sigma}_{jh}, \quad j = 1, 2,$$

определяющие решение $\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a})}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем компонентами этого решения.

5.2.2. В случае условия (5.8) решаем разностную схему (3.2), (3.1); интерполянт

$$\overline{z}_{u(5.16\mathrm{b})}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.8), \tag{5.16b}$$

строящийся по решению $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$ схемы (3.2), (3.1), назовем решением разностной схемы $\{(3.2),\ (3.1);\ (5.8)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (2.2), (2.1) при условии (5.8) (будем говорить — краевую задачу $\{(2.2),\ (2.1);\ (5.8)\}$).

5.2.3. Строим функцию $\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$,

$$\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a})}(x) & \textit{при условии} \quad (5.9) \\ \overline{z}_{u(5.16\mathrm{b})}(x) & \textit{при условии} \quad (5.8) \end{array} \right\}, \quad x \in \overline{D},$$

аппроксимирующую решение задачи (2.2), (2.1). Эту функцию $\overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$, а также функции $\overline{z}_{U\,(5.12)}(x)$, $\overline{z}_V(x) = \overline{z}_{V\,(5.15)}(x)$, $x \in \overline{D}$, назовем соответственно решением (континуальным) и компонентами (континуальными) решения разностной схемы $\{\{(3.2),\ (3.1)\};\ \{(5.11),\ (3.1);\ (5.14),\ (5.13)\}\}$, которую назовем *базовой схемой метода декомпозиции решения.*

Базовая схема метода декомпозиции решения монотонна ε-равномерно. Например, в случае условия (5.9) справедлив следующий вариант теоремы сравнения.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (5.9)*, и пусть для функций* ${U_0}^k(x)$*,* $x \in \overline{D}$*,* $z^k_{v_U}(x)$*,* $x \in \overline{D}_h$*, и* $z^k_{V_j}(x)$*,* $x \in \overline{D}^{\,\sigma}_{j\,h}$*,* $j = 1, 2$*, при* $k = 1, 2$*, являющихся компонентами решения* $\overline{z}^k_{u(5.16\mathrm{a})}(x)$*,* $x \in \overline{D}$*, выполняются условия*

$$\Lambda_{(3.2)} z^1_{v_U}(x) \le \Lambda_{(3.2)} z^2_{v_U}(x), \quad x \in D_h, \qquad z^1_{v_U}(x) \ge z^2_{v_U}(x), \qquad x \in \Gamma_h;$$

$$\Lambda_{(3.2)} z^1_{V_j}(x) \le \Lambda_{(3.2)} z^2_{V_j}(x), \qquad x \in D^{\sigma}_{j\,h}, \quad z^1_{V_j}(x) \ge q z^2_{V_j}(x), \quad x \in \Gamma^{\sigma}_{j\,h}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$z^1_{v_U}(x) \ge z^2_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D_h}; \quad z^1_{V_j}(x) \ge z^2_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\,\sigma}_{j\,h}, \quad j = 1, 2.$$

5.3. Оценим ошибку $u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$, предполагая выполненным условие теоремы 2, обеспечивающее включения $U,\ V \in C^6(\overline{D})$, $U_0 \in C^8(\overline{D})$, U_1, U_2, $v_U \in C^6(\overline{D})$, где $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ — компоненты из разложения (5.2), а также справедливость априорных оценок (5.6), (5.7).

С учетом априорных оценок компонент $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ и $V_j(x)$, а также с использованием теоремы сравнения находим оценки для $v_U(x) - \overline{z}_{v_U}(x)$ и $V_j(x) - \overline{z}_{V_j}(x)$. Из этих оценок получаем оценку $u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a})}(x)$ при условии (5.9).

Оценивая $u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{b})}(x)$ при условии (5.8), используем оценку (3.4), где $\varepsilon > \varepsilon_0(N)$.

Для решения базовой разностной схемы метода декомпозиции решения получается оценка

$$|u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)| \le M\, N^{-2} \min{}^2\, [\varepsilon^{-1},\, \ln N], \quad x \in \overline{D}, \tag{5.17}$$

а также ε-равномерная оценка

$$|u(x) - \overline{z}_{u(5.16\mathrm{a,b})}(x)| \le M\, N^{-2}\, \ln^2 N, \quad x \in \overline{D}. \tag{5.18}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2)*,* (2.1) *выполняется условие теоремы* 2*. Тогда решение базовой разностной схемы метода декомпозиции решения* $\{\{(3.2), (3.1)\}; \{(5.11), (3.1); (5.14), (5.13)\}\}$ *сходится со скоростью* $\mathcal{O}\left(N^{-2} \ln^2 N\right)$ *ε-равномерно. Для решения этой разностной схемы справедливы оценки* (5.17), (5.18).

З а м е ч а н и е 2. Оценки (5.17), (5.18) в случае схемы метода декомпозиции решения такие же, как оценки для схемы на кусочно-равномерной сетке [9].

6. Экстраполяция Ричардсона для базовой схемы метода декомпозиции сеточного решения

Базовая схема $\{\{(3.2),(3.1)\};\{(5.11),(3.1);(5.14),(5.13)\}\}$ метода декомпозиции решения сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$. Использование метода экстраполяции Ричардсона позволяет повысить порядок ε-равномерной скорости сходимости этой базовой схемы. Построим схему метода декомпозиции, сходящуюся ε-равномерно с шестым порядком с точностью до логарифмического сомножителя.

Для повышения порядка ε-равномерной скорости сходимости схемы метода декомпозиции сеточного решения применяем технику экстраполяции Ричардсона к сеточным решениям разностных схем, аппроксимирующих краевую задачу (5.4b) для остаточного члена $v_U(x)$, и краевую задачу (5.5b) для сингулярных компонент $V_j(x)$; сеточные решения рассматриваются на трех вложенных сетках. Как и при построении базовой схемы метода декомпозиции сеточного решения, построение схем высокого порядка точности рассматриваем в двух случаях:

при условии (5.8) — при не слишком малых значениях параметра ε;
при условии (5.9) — при достаточно малых значениях параметра ε.

6.1. Строим схемы высокого порядка точности при условии (5.9).

6.1.1. Используя метод экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках, построим сеточную аппроксимацию компоненты $v_{U\,(5.2)}(x)$ — решения краевой задачи (5.4b) — и в соответствии с соотношением (5.2) найдем сеточную аппроксимацию регулярной компоненты $U_{(5.2)}(x)$. На множестве $\overline{D}$ строим три вложенные сетки

$$\overline{D}_h^q = \overline{D}^q_{h\,(4.1)}, \quad q = 1,2,3; \quad \overline{D}_h^0 = \overline{D}^0_{h\,(4.1)}. \tag{6.1}$$

Краевую задачу (5.4b), эквивалентную задаче (5.3c), (2.1), аппроксимируем разностной схемой на сетках $\overline{D}_h^q$:

$$\Lambda_{(3.2)}\, z^q_{v_U}(x) = \varepsilon^6 a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\left\{c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\Big[c^{-1}(x)\,a(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\,(c^{-1}(x)\,f(x))\Big]\right\}, \tag{6.2}$$
$$x \in D_h^q, \quad z^q_{v_U}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h^q, \quad q = 1,2,3.$$

На множестве $\overline{D}_h^0$ определим функцию $z^0_{v_U}(x)$:

$$z^0_{v_U}(x) = \gamma_1\, z^1_{v_U}(x) + \gamma_2\, z^2_{v_U}(x) + \gamma_3\, z^3_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}_h^0, \tag{6.3}$$

где $\gamma_q = \gamma_{q\,(4.2)}(k)$. Функция $z^0_{v_U\,(6.3)}(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$, есть улучшенная сеточная аппроксимация остаточного члена $v_{U\,(5.2)}(x)$, $x \in \overline{D}$, построенная с использованием техники Ричардсона.

По функции $z^0_{v_U}(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$, строим ее интерполянт (улучшенную континуальную аппроксимацию остаточного члена $v_{U\,(5.2)}(x)$)

$$\widetilde{z}^0_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{6.4}$$

— 6-точечный (пятой степени) интерполянт Ньютона [18], строящийся на элементарных интервалах разбиения множества $\overline{D}$ (порождаемых узлами сетки $\overline{D}_h^0$). Интерполянт строится на элементарном интервале разбиения, являющемся центральным для 6-точечного шаблона, все узлы этого шаблона не выходят за множество $\overline{D}$. В том случае, когда какие-то узлы такого шаблона принадлежат границе Γ, интерполянт с центрального элементарного интервала разбиения продолжается до границы Γ. Полагаем

$$U^{(imp)}(x) = U_0(x) + \varepsilon^2\, U_1(x) + \varepsilon^4\, U_2(x) + \widetilde{z}^0_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{6.5}$$

где $U_i(x) = U_{i(5.4\mathrm{a})}(x)$, $i = 0, 1, 2$, $\widetilde{z}^{\,0}_{v_U}(x) = \widetilde{z}^{\,0}_{v_U\,(6.4)}(x)$.

Функция $U^{(imp)}(x)$, $x \in \overline{D}$, есть континуальная аппроксимация функции $U_{(5.2)}(x)$, $x \in \overline{D}$, построенная с использованием техники Ричардсона на основе улучшенной компоненты $\widetilde{z}^{\,0}_{v_U\,(6.4)}(x)$, $x \in \overline{D}$.

6.1.2. Используя технику Ричардсона, построим сеточную аппроксимацию сингулярной компоненты $V(x)$, $x \in \overline{D}$. На $\overline{D}$ введем множества $\overline{D}^{\,\sigma}_j$:

$$\overline{D}^{\,\sigma}_j = \overline{D}^{\,\sigma}_{j\,(5.10)} = D^{\sigma}_j \bigcup \Gamma^{\sigma}_j, \quad j = 1, 2, \quad \sigma = \sigma_{(5.10)}(\varepsilon,\, N,\, l). \tag{6.6}$$

На множествах $\overline{D}^{\,\sigma}_j$ строим вложенные сетки (подобно сеткам $\overline{D}^{\,q}_{h\,(6.1)}$, $\overline{D}^{\,0}_{h\,(6.1)}$)

$$\overline{D}^{\,\sigma q}_{j\,h} = \overline{D}^{\,\sigma q}_{j\,h\,(6.7)}, \quad q = 1, 2, 3; \tag{6.7}$$

$$\overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h} = \overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h\,(6.7)} = \overline{D}^{\,\sigma 1}_{j\,h} \bigcap \overline{D}^{\,\sigma 2}_{j\,h} \bigcap \overline{D}^{\,\sigma 3}_{j\,h}, \quad j = 1, 2,$$

где $\overline{D}^{\,\sigma 1}_{j\,h}$, $j = 1, 2$, — “основные” сетки; $\overline{D}^{\,\sigma 2}_{j\,h}$, $\overline{D}^{\,\sigma 3}_{j\,h}$, $j = 1, 2$ — “прореженные” сетки; $N_{(6.6)} + 1$ — число узлов “основных” сеток.

Краевую задачу (5.5b), (2.1) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{aligned} \Lambda_{(3.2)} z^q_{V_j}(x) &= 0, \quad x \in D^{\sigma q}_{j\,h}, \\ z^q_{V_j}(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} \varphi^{(imp)}_V(x), & x \in \Gamma^{\sigma\,q}_{j\,h} \bigcap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma^{\sigma q}_{j\,h} \setminus \Gamma \end{array} \right\}, \quad x \in \Gamma^{\sigma\,q}_{j\,h}, \quad q = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где

$$\varphi^{(imp)}_V(x) = \varphi(x) - U^{(imp)}(x), \quad x \in \Gamma, \quad U^{(imp)}(x) = U^{(imp)}_{(6.5)}(x), \quad x \in \overline{D},$$

$\varphi^{(imp)}_V(x)$ — граничное значение улучшенной сеточной аппроксимации сингулярной компоненты $V(x)$, $x \in \overline{D}$.

На множестве $\overline{D}^{\,\sigma\,0}_{j\,h}$ определим функцию $z^0_{V_j}(x)$

$$z^0_{V_j}(x) = \gamma_1\, z^1_{V_j}(x) + \gamma_2\, z^2_{V_j}(x) + \gamma_3\, z^3_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h}, \quad j = 1, 2, \tag{6.9}$$

где $\gamma_q = \gamma_{q\,(4.2)}$, $q = 1, 2, 3$. Функция $z^0_{V_j}(x)$, $x \in \overline{D}^{\,\sigma 0}_{j\,h}$, есть сеточная аппроксимация функции $V_j(x)$, построенная с использованием техники Ричардсона.

На множестве $\overline{D}^{\,\sigma}_j$ построим ее интерполянт (подобно интерполянту $\widetilde{z}^{\,0}_{v_U\,(6.4)}(x)$, $x \in \overline{D}$)

$$\widetilde{z}^{\,0}_{V_j}(x), \quad x \in \overline{D}^{\,\sigma}_j, \quad j = 1, 2;$$

вне множества $\overline{D}^{\,\sigma}_j$ функции $z^0_{V_j}(x)$ и $\widetilde{z}^{\,0}_{V_j}(x)$ полагаем равными нулю.

Обоснование представлений (6.3) и (6.9) для функций $z^0_{v_U}(x)$ и $z^0_{V_j}(x)$ вытекает из разложений компонент $z^q_{v_U}(x)$ и $z^q_{V_j}(x)$ в ряд по степеням N^{-1} с главными членами разложений $v_U(x)$ и $V_j(x)$ соответственно (подобных разложению (4.4) для функции $z^q_{(4.2)}(x)$ с главным членом разложения $u(x)$).

Определим функцию $\widetilde{z}^{\,0}_V(x)$ на $\overline{D}$ соотношением

$$\widetilde{z}^{\,0}_V(x) = \widetilde{z}^{\,0}_{V_1}(x) + \widetilde{z}^{\,0}_{V_2}(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{6.10}$$

Функцию

$$\widetilde{z}_{u(6.11\mathrm{a})}(x) = U^{(imp)}_{(6.5)}(x) + \widetilde{z}^{\,0}_{V\,(6.10)}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.9) \tag{6.11a}$$

назовем решением разностной схемы $\{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}; (5.9)\}$ — схемы Ричардсона, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (5.9).

6.2. Пусть выполняется условие (5.8). В этом случае решаем разностную схему Ричардсона (4.2), (4.1); интерполянт

$$\widetilde{z}_{u(6.11\text{b})}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \textit{при условии} \quad (5.8), \tag{6.11b}$$

строящийся по решению схемы (4.2), (4.1), назовем решением разностной схемы $\{(4.2), (4.1); (5.8)\}$, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (5.8).

6.3. Строим функцию $\widetilde{z}_{u(6.11\text{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$,

$$\widetilde{z}_{u(6.11\text{a,b})}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{z}_{u(6.11\text{a})}(x) & \textit{при условии} \quad (5.9) \\ \widetilde{z}_{u(6.11\text{b})}(x) & \textit{при условии} \quad (5.8) \end{array} \right\}, \quad x \in \overline{D},$$

которая аппроксимирует решение краевой задачи (2.2), (2.1). Эту функцию назовем континуальным решением разностной схемы Ричардсона высокого порядка точности $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$, — схемы Ричардсона метода декомпозиции сеточного решения, строящейся на основе улучшенной регулярной компоненты $U_{(5.2)}(x)$ или, короче, схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности.

6.4. Оценим ошибку $u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\text{a,b})}(x)$, $x \in \overline{D}$, предполагая выполненным условие теоремы 2, обеспечивающее включения $U,\ V \in C^6(\overline{D})$, $U_0 \in C^8(\overline{D})$, $U_1,\ U_2,\ v_U \in C^6(\overline{D})$, где $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ — компоненты из разложения (5.2), а также справедливость априорных оценок (5.6), (5.7).

При условии (5.9) с учетом априорных оценок компонент $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $v_U(x)$ и $V_j(x)$ (теорема 2), подобно выводу оценки (4.8), находим оценки для $U(x) - U^{(imp)}_{(6.5)}(x)$ и $V(x) - \widetilde{z}^{\,0}_{V\,(6.10)}(x)$. Из этих оценок получаем оценку $u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\text{a})}(x)$.

Оценивая $u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\text{b})}(x)$ при условии (5.8), используем оценку (4.8), где $\varepsilon > \varepsilon_0(N)$.

В результате для решения схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$ получается оценка

$$|u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\text{a,b})}(x)| \le M\, N^{-6} \min{}^6\, [\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \overline{D}, \tag{6.12}$$

а также ε-равномерная оценка

$$|u(x) - \widetilde{z}_{u(6.11\text{a,b})}(x)| \le M\, N^{-6} \ln^6 N, \quad x \in \overline{D}. \tag{6.13}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть для компонент решения краевой задачи* (2.2), (2.1) *из представлений* (5.1a,c), (5.2) *выполняются оценки* (5.6), (5.7) *теоремы* 2 *при* $K = 8$. *Тогда решение схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности* $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$ сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6} \ln^6 N\right)$. Для решения разностной схемы справедливы оценки (6.12), (6.13).

Следствием утверждений теорем 2 и 5 является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие Теоремы* 2. *Тогда решение схемы Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности* $\{\{(4.2), (4.1)\}; \{\{(6.1)–(6.5)\}, \{(6.8), (6.7)\}\}\}$ сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6} \ln^6 N\right)$. Для решения разностной схемы справедливы оценки (6.12), (6.13).

7. Выводы

1. Для задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии построена *базовая разностная схема метода декомпозиции сеточного решения*, в которой регулярная и сингулярная компоненты решения краевой задачи аппроксимируются на равномерных сетках. Решение этой схемы сходится ε-равномерно *в равномерной норме* со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$ (см. оценку (5.18) и утверждение теоремы 4 в разд. 5).

2. Исходя из базовой схемы метода декомпозиции решения с использованием экстраполяции Ричардсона на основе трех вложенных сеток построена *схема Ричардсона метода декомпозиции решения высокого порядка точности*, решение которой сходится ε-равномерно *в равномерной норме* со скоростью $\mathcal{O}\left(N^{-6}\ln^6 N\right)$ (см. оценку (6.13) и утверждение теоремы 6 в разд. 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. **Хемкер П.В., Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Декомпозиция метода Ричардсона высокого порядка точности для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Журн. вычисл. математки и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 328–336.
3. **Shishkina L.P.** The Richardson method of high-order accuracy in t for a semilinear singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation on a strip // Proc. of the internat. conf. on comput. math. (ICCM'2004). Part 2. Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2004. P. 927–931.
4. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Метод Ричардсона высокого порядка точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 7. С. 980–989.
5. **Shishkin G.I.** Robust novel high-order accurate numerical methods for Singularly perturbed convection-diffusion problems // Math. Modelling and Analysis. 2005. Vol. 10, № 4. P. 393–412.
6. **Шишкин Г.И.** Метод Ричардсона повышения точности решений сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с конвекцией // Изв. вузов. Сер. математическая. 2006. № 2. С. 57–71.
7. **Шишкин Г.И.** Схема Ричардсона для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии с разрывным начальным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1416–1436.
8. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Схема Ричардсона повышенного порядка точности для семилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 458–478.
9. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference methods for singular perturbation problems. Boca Raton: Chapman & HAll/CRC, 2009. 408 p. (Ser. Monographs & Surveys in Pure & Applied Math; vol. 140.)
10. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного (обыкновенного дифференциального) уравнения реакции-диффузии // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 255–271.
11. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
12. **Allen D.N., Southwell R.V.** Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of viscous fluid past a fixed cylinder // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. Vol. 8, № 2. P. 129–145.
13. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
14. **Miller J.J.H., O'Riordan E.** Necessity of fitted operators and Shishkin meshes for resolving thin layer phenomena // CWI Quarterly. 1997. Vol. 10, № 3&4. P. 207–213.
15. **Шишкин Г.И.** Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 7. С. 963–977.
16. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

17. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992. 233 с.
18. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 632 с.

Шишкин Григорий Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Поступила 15.12.2014

Шишкина Лидия Павловна
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Lida@convex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

УДК 517.97+539.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТРЕЩИН В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ[1]

В. В. Щербаков, О. И. Криворотько

Рассматривается задача оптимального управления для уравнений квазистатического деформирования линейного вязкоупругого тела. В теле имеется трещина, смещения противоположных берегов которой ограничены условием непроникания. Установлена непрерывная зависимость решения задачи равновесия от формы трещины. В частности, доказано существование такой формы, при которой раскрытие трещины будет минимальным.

Ключевые слова: вязкоупругость, трещина, условие непроникания, оптимальное управление, метод фиктивных областей.

V. V. Shcherbakov, O. I. Krivirot'ko. Optimal shapes of cracks in a viscoelastic body.

We consider an optimal control problem for equations describing the quasistatic deformation of a linear viscoelastic body. There is a crack in the body, and displacements of opposite faces of the crack are constrained by the nonpenetration condition. The continuous dependence of the solution to the equilibrium problem on the shape of the crack is established. In particular, we prove the existence of a shape for which the crack opening is minimal.

Keywords: viscoelasticity, crack, nonpenetration condition, optimal control, fictitious domain method.

Введение

В работе рассматривается задача оптимального управления для краевой задачи о квазистатическом деформировании линейного вязкоупругого тела с трещиной [1]. Требуется минимизировать функционал, характеризующий раскрытие трещины. В качестве переменной, для которой ищется оптимальное значение выступает форма трещины. При этом для каждой фиксированной формы смещения точек противоположных берегов трещины ограничены условием непроникания. Результаты, полученные в этом направлении математической теории трещин для моделей упругого и неупругого деформирования твердых тел, можно найти в [2] и [3] соответственно.

Вопрос о зависимости решений задач теории упругости в областях с разрезами (трещинами) от параметра при возмущении формы области изучался в [4–10]. Для более сложных уравнений состояния этот вопрос исследован в меньшей степени. Отметим лишь работу [11], где обсуждались асимптотические свойства решения задачи теории ползучести с условием непроникания. В отличие от работ [5; 7; 8], посвященных доказательству существования оптимальных форм трещин, в настоящей работе рассматриваются не только трещины, концы которых лежат внутри деформируемого тела, но и трещины, выходящие на внешнюю границу, в том числе, под нулевым углом.

1. Трещина с концами, лежащими внутри области

1.1. Задача равновесия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$. Выберем произвольную функцию $\psi \in H_0^2(0,1)$ и для малого параметра $\delta \in [0, \delta_0]$ определим кривую $\overline{\Gamma}_\delta \subset \Omega$:

$$\Gamma_\delta = \{\, (x,y) \mid y = \delta\psi(x),\ x \in (0,1) \,\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00017 и 14-01-31182).

Считаем, что Γ_δ можно продолжить по обе стороны от ее концов до пересечения с $\partial\Omega$ под ненулевыми углами. В соответствии с вектором единичной нормали

$$\nu^\delta = (\nu_1^\delta, \nu_2^\delta) = (-\delta\psi_{,x}, 1)/\sqrt{1 + (\delta\psi_{,x})^2}$$

будем различать положительный Γ_δ^+ и отрицательный Γ_δ^- берега кривой Γ_δ (индекс после запятой означает производную по соответствующей координате). В наших рассуждениях область $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_\delta$ отвечает телу в недеформированном естественном состоянии, кривая Γ_δ — трещине. Геометрическая интерпретация представлена на рис. 1.

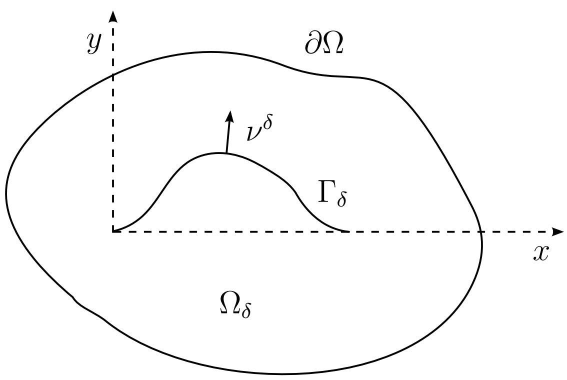


Рис. 1. Область Ω_δ с трещиной Γ_δ.

Рассмотрим квазистатическую задачу о неупругом деформировании тела Ω_δ. Предположим, что в момент времени $t \in (0, T)$, $T = \text{const} > 0$, компоненты тензора напряжений $\sigma(t) = \{\sigma_{ij}(t)\}$ и тензора деформаций $\varepsilon(u(t)) = \{\varepsilon_{ij}(u(t))\}$ связаны линейными уравнениями состояния

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u(t)) + \int\limits_0^t a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u(\tau))\,d\tau, \quad i, j, k, l = 1, 2. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже принято правило суммирования по повторяющимся индексам. Деформации считаются малыми, так что компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij}(u(t)) = (1/2)(u_{i,x_j}(t) + u_{j,x_i}(t)), \quad i, j = 1, 2, \quad x_1 = x,\ x_2 = y.$$

Коэффициенты тензора модулей упругости $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, не зависят от t и подчинены стандартным требованиям симметричности и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} = \text{const},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Уравнения состояния (1.1) соответствуют так называемым вязкоупругим материалам с долговременной памятью, для которых напряжения в момент времени t зависят от значений деформаций во все моменты времени из промежутка $[0, t]$ (см. [12]). В дальнейшем нам будет удобно использовать следующее обозначение:

$$w(t, x, y) = u(t, x, y) + \int\limits_0^t u(\tau, x, y)\,d\tau,$$

с учетом которого, (1.1) можно переписать в виде $\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl}\varepsilon_{ij}(w(t)),\ i,j,k,l = 1,2$. Краевая задача о равновесии линейного вязкоупругого тела с трещиной формулируется следующим образом. В цилиндре $\Omega_\delta \times (0,T)$ требуется найти функции u^δ, $\sigma^\delta = \{\sigma_{ij}^\delta\}$, $i,j = 1,2$, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma^\delta = f \quad \text{в} \quad \Omega_\delta \times (0,T), \tag{1.2}$$

$$\sigma^\delta = A\varepsilon(w^\delta) \quad \text{в} \quad \Omega_\delta \times (0,T), \tag{1.3}$$

$$u^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.4}$$

$$[u^\delta]\nu^\delta \geqslant 0, \quad [\sigma_{\nu^\delta}^\delta] = 0, \quad \sigma_{\nu^\delta}^\delta \cdot [u^\delta]\nu^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta \times (0,T), \tag{1.5}$$

$$\sigma_{\nu^\delta}^\delta \leqslant 0, \quad \sigma_{\tau^\delta}^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta^\pm \times (0,T). \tag{1.6}$$

Здесь $f = (f_1, f_2)$ — вектор внешних массовых сил, $\sigma_{\nu^\delta}^\delta = \sigma_{ij}^\delta \nu_j^\delta \nu_i^\delta$ — нормальная компонента вектора напряжений, $\sigma_{\tau^\delta}^\delta = \sigma^\delta\nu^\delta - \sigma_{\nu^\delta}^\delta \cdot \nu^\delta$ — вектор касательных напряжений, $\tau^\delta = (-\nu_2^\delta, \nu_1^\delta)$. В зависимости от контекста, скобки $[v] = v^+ - v^-$ означают скачок функции v либо на кривой Γ_δ, либо на поверхности $\Gamma_\delta \times (0,T)$. Краевые условия (1.5), (1.6) обеспечивают взаимное непроникание берегов трещины Γ_δ в отсутствии трения.

Перейдем к понятию обобщенного решения для задачи (1.2)–(1.6). Пусть $H^1(\Omega_\delta)$ — пространство функций С. Л. Соболева, суммируемых с квадратом вместе со своими первыми обобщенными производными в Ω_δ, $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)$ — его подпространство, состоящее из всех функций обращающихся в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Введем множество кинематически допустимых полей перемещений

$$K^\delta(\Omega_\delta) = \{\, u \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\delta \,\},$$

пусть также

$$\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta) = \big\{\, u \in L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)) \mid u(t) \in K^\delta(\Omega_\delta) \ \text{ на } \ (0,T) \big\}.$$

Обозначим через $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)^*$ топологически сопряженное к $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)$ пространство. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathfrak{L}_\delta : L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)) \to L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)^*)$, действующий по формуле

$$\mathfrak{L}_\delta(u)(\bar u) = \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt, \quad \bar u \in L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta)),$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega_\delta}$ означают скалярное произведение в $L^2(\Omega_\delta)$. Будем говорить, следуя [1], что элемент $u^\delta \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$ является обобщенным решением задачи (1.2)–(1.6) для заданной функции $f \in L^2(0,T; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$, если он удовлетворяет следующему вариационному неравенству:

$$u^\delta \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \quad \mathfrak{L}_\delta(u^\delta)(\bar u - u^\delta) \geqslant \int_0^T \langle f, \bar u - u^\delta\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \ \text{ для всех } \ \bar u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta). \tag{1.7}$$

Существование (единственного) обобщенного решения u^δ вытекает из абстрактной теории вариационных задач [13], поскольку оператор $\mathfrak{L}_\delta$ обладает свойством псевдомонотонности, а также является коэрцитивным на $\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$. Неравенство (1.7) можно представить в виде

$$u^\delta \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \quad \int_0^T \langle \sigma_{ij}(w^\delta), \varepsilon_{ij}(\bar u - u^\delta)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int_0^T \langle f, \bar u - u^\delta\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \ \text{ для всех } \ \bar u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \tag{1.8}$$

где $\sigma_{ij}(\omega^\delta) = \sigma_{ij}^\delta, i,j = 1,2$, определяется из (1.3).

1.2. Вариация формы трещины

Вплоть до настоящего момента значение параметра δ, отвечающего за форму трещины Γ_δ, было фиксированным. Далее мы допускаем возможность изменения δ. Наша ближайшая цель — исследовать поведение последовательности решений $\{u^\delta\}$, $\delta \in [0, \delta_0]$, вариационного неравенства вида (1.8) при $\delta \to 0$. Выберем произвольную срезающую функцию $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, равную единице в малой выпуклой окрестности множества $\bigcup_{\delta \in [0,\delta_0]} \Gamma_\delta$, и зададим взаимно однозначное преобразование независимых переменных

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y - \delta\psi(x)\theta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_\delta, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_0, \tag{1.9}$$

с положительным якобианом $J_\delta = 1 - \delta\psi\theta_{,y}$. Для того, чтобы преобразование (1.9) было корректно определено, будем полагать, что функция ψ продолжена нулем вне интервала $(0, 1)$. Заметим, что для произвольной функции $v \in L^2(0, T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\delta))$ справедливы формулы пересчета первых производных: $v_{,x} = \tilde{v}_{,\tilde{x}} - \delta\tilde{v}_{,\tilde{y}}(\psi\theta)_{,x}$, $v_{,y} = \tilde{v}_{,\tilde{y}}(1 - \delta\psi\theta_{,y})$, где $\tilde{v} = \tilde{v}(t, \tilde{x}, \tilde{y}) = v(t, x, y)$. Пусть $u_\delta(t, \tilde{x}, \tilde{y}) = u^\delta(t, x, y)$. В (1.8) произведем замену области интегрирования Ω_δ на Ω_0 в соответствии с (1.9). В результате получим следующее вариационное неравенство:

$$u_\delta \in \mathcal{K}_\delta(\Omega_0), \quad \int_0^T \langle J_\delta^{-1}\sigma_{ij}(w_\delta), \varepsilon_{ij}(\bar{u}_\delta - u_\delta)\rangle_{\Omega_0}\, dt - \int_0^T \langle J_\delta^{-1} f_\delta, \bar{u}_\delta - u_\delta\rangle_{\Omega_0}\, dt$$

$$\geqslant \delta \int_0^T \int_{\Omega_0} J_\delta^{-1} G(\tilde{x}, \tilde{y}, \delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}} w_\delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}} \bar{u}_\delta, D^\alpha_{x,y}(\psi\theta))\, d\Omega_0\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u}_\delta \in \mathcal{K}_\delta(\Omega_0). \tag{1.10}$$

Здесь $f_\delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y)$; множество допустимых перемещений определяется следующим образом:

$$K_\delta(\Omega_0) = \{\, u \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0 \,\},$$
$$\mathcal{K}_\delta(\Omega_0) = \big\{\, u \in L^2(0, T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)) \mid u(t) \in K_\delta(\Omega_0) \ \text{ на } \ (0, T)\big\}.$$

Функция G зависит от своих аргументов, $|\alpha| \leqslant 1$, причем для равномерно ограниченных по δ в пространстве $L^2(0, T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0))$ последовательностей $\{u_\delta\}$, $\{\bar{u}_\delta\}$ при $\delta \to 0$ имеет место сходимость

$$\delta \int_0^T \int_{\Omega_0} J_\delta^{-1} G\big(\tilde{x}, \tilde{y}, \delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}} w_\delta, D^\alpha_{\tilde{x},\tilde{y}} \bar{u}_\delta, D^\alpha_{x,y}(\psi\theta)\big)\, d\Omega_0\, dt \to 0.$$

Перейдем к обоснованию предельного перехода в (1.10) при $\delta \to 0$. Подстановка $\bar{u}_\delta = 0$ в качестве пробной функции в (1.10) влечет равномерную по δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, оценку

$$\|u_\delta\|_{L^2(0,T;H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0))} \leqslant c.$$

Можно считать, что из последовательности $\{u_\delta\}$ выбрана подпоследовательность с прежним обозначением, для которой при $\delta \to 0$

$$u_\delta \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)), \tag{1.11}$$

$$\int_0^t u_\delta\, d\tau \to \int_0^t u\, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)). \tag{1.12}$$

Отметим, что $K^0(\Omega_0) = K_0(\Omega_0)$, значит $\mathcal{K}^0(\Omega_0) = \mathcal{K}_0(\Omega_0)$. Установим следующее вспомогательное утверждение: для любого элемента $\bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0)$ можно построить последовательность пробных функций $\{\bar{u}_\delta\} \in \{\mathcal{K}_\delta(\Omega_0)\}$ так, что при $\delta \to 0$

$$\bar{u}_\delta \to \bar{u} \quad \text{сильно в} \quad L^2(0, T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0)). \tag{1.13}$$

Действительно, для произвольного $\bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0)$ всеми необходимыми свойствами обладает последовательность $\{\bar{u}_\delta\}$ с общим членом $\bar{u}_\delta = \bar{u} + \delta(0, \psi_{,x}\theta\bar{u}_1)$. Проверим, что выполнено неравенство $[\bar{u}_\delta]\nu^\delta \geqslant 0$ на $\Gamma_0 \times (0,T)$. Поскольку $\bar{u}$ является элеметом $\mathcal{K}_0(\Omega_0)$, то величина $[\bar{u}_2]$ неотрицательна на $\Gamma_0 \times (0,T)$, и мы получаем требуемое неравенство:

$$[\bar{u}_\delta]\nu^\delta = \frac{[\bar{u}_1](-\delta\psi_{,x}) + [\bar{u}_2] + [\bar{u}_1]\delta\psi_{,x}}{\sqrt{1+(\delta\psi_{,x})^2}} = \frac{[\bar{u}_2]}{\sqrt{1+(\delta\psi_{,x})^2}} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T).$$

Сильная сходимость (1.13) очевидна.

На основании сходимостей (1.11), (1.12) и (1.13) осуществим переход к пределу при $\delta \to 0$ в (1.10), что дает

$$u \in \mathcal{K}_0(\Omega_0), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u}-u)\rangle_{\Omega_0}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u\rangle_{\Omega_0}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0). \tag{1.14}$$

В силу единственности решения вариационного неравенства (1.14) имеем $u = u^0$, где u^0 — решение задачи (1.8), соответствующее $\delta = 0$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть u^δ — решение задачи* (1.8). *Тогда при $\delta \to 0$ последовательность $\{u_\delta\}$ слабо сходится к u^0 в пространстве $L^2(0,T; H^1_{\partial\Omega}(\Omega_0))$.*

1.3. Задача оптимального управления

Опираясь на полученный результат, покажем, как можно доказать существование оптимальных форм трещины. Пусть $\Psi_{\mathrm{ad}} \subset H^2_0(0,1)$ — непустое выпуклое замкнутое и ограниченное множество допустимых форм трещины. Мы предполагаем, что для всех $\psi \in \Psi_{\mathrm{ad}}$ замыкание графика $\Gamma_\psi = \{\, (x,y) \mid y = \psi(x),\ x \in (0,1)\,\}$ лежит в области Ω. Среди элементов множества Ψ_{ad} требуется выбрать тот, при котором раскрытие трещины будет минимальным. Говоря другими словами, необходимо решить задачу оптимального управления

$$\mathcal{J}(\psi) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_\psi} \Big|[u^\psi]\Big|\, d\Gamma_\psi dt \to \inf_{\psi\in\Psi_{\mathrm{ad}}}. \tag{1.15}$$

З а м е ч а н и е 1. Точные значения и оценки функционалов типа $\mathcal{J}$ широко применяются при изучении вопросов деформирования и разрушения тел с трещинами (см., например, [14]).

Теорема 2. *Существует решение задачи оптимального управления* (1.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\{\psi^n\} \in \Psi_{\mathrm{ad}}$, $n \in \mathbb{N}$, минимизирующую последовательность, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}(\psi^n) = \inf\limits_{\psi\in\Psi_{\mathrm{ad}}} \mathcal{J}(\psi)$. Выбирая, в случае необходимости, подпоследовательность, предполагаем, что при $n \to \infty$

$$\psi^n \to \psi \quad \text{слабо в} \quad H^2_0(0,1) \quad \text{и сильно в} \quad C^1([0,1]), \quad \psi \in \Psi_{\mathrm{ad}}.$$

Включение $\psi \in \Psi_{\mathrm{ad}}$ является следствием слабой замкнутости множества Ψ_{ad}, а сильная сходимость вытекает из компактности вложения $H^2_0(0,1)$ в $C^1([0,1])$. В силу равномерной сходимости $\{\psi^n_{,x}\}$ к $\psi_{,x}$ можно считать, что $|\psi^n_{,x} - \psi_{,x}| < 1/n$ на $(0,1)$.

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ можно найти единственное решение вариационного неравенства

$$u^n \in \mathcal{K}^n(\Omega_n), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w^n), \varepsilon_{ij}(\bar{u}-u^n)\rangle_{\Omega_n}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u^n\rangle_{\Omega_n}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}^n(\Omega_n),$$

и вычислить значение целевого функционала

$$\mathcal{J}(\psi^n) = \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_{\psi^n}} |[u^n]| \, d\Gamma_{\psi^n} dt. \tag{1.16}$$

Здесь кривая Γ_{ψ^n}, область $\Omega_n = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_{\psi^n}$, множество $\mathcal{K}^n(\Omega_n)$ соответствуют графику функции $y = \psi^n(x)$.

Сделаем замену переменных

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y - \frac{1}{n}\varphi_n(x)\theta(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_n, \quad (\tilde{x},\tilde{y}) \in \Omega_\psi, \tag{1.17}$$

со срезающей функцией $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\theta = 1$ в малой выпуклой окрестности множества $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{\psi^n}$, и $\varphi_n = n(\psi^n - \psi)$. Мы предполагаем, что функции ψ, ψ^n тривиально продолжены вне интервала $(0,1)$.

Дальнейшие рассуждения, в целом, аналогичны приведенным выше и используют факт равномерной ограниченности последовательности $\{\varphi_n\}$ в пространстве $C^1([0,1])$. Как и в подразделе 2.1, доказывается, что при $n \to \infty$ имеем $u_n \to u$ слабо в $L^2(0,T;H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\psi))$, где $u_n(\tilde{x},\tilde{y}) = u^n(x,y)$, $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Omega_\psi$, $(x,y) \in \Omega_n$, а предельная функция u соответствует функции ψ. В частности, при $n \to \infty$

$$[u_n] \to [u] \quad \text{слабо в} \quad L^1(0,T;L^1(\Gamma_\psi)). \tag{1.18}$$

В (1.16) можно выполнить замену области интегрирования с Γ_{ψ^n} на Γ_ψ согласно (1.17) и на основе (1.18) установить необходимую сходимость $\mathcal{J}(\psi^n) \to \mathcal{J}(\psi)$ при $n \to \infty$. Это и означает, что функция $\psi \in \Psi_{\text{ad}}$ — искомое решение задачи оптимального управления (1.15). Теорема доказана.

2. Трещина с концом, выходящим на внешнюю границу

2.1. Задача равновесия

Усложним геометрию задачи: предположим, что один из концов трещины выходит на внешнюю границу области. Для определенности будем считать, что Γ_δ касается внешней границы $\partial\Omega$ в точке $(0,0)$ (см. рис. 2), а правый конец Γ_δ можно продолжить до пересечения с $\partial\Omega$ под ненулевым углом.

В рассматриваемой ситуации постановка задачи равновесия совпадает с (1.2)–(1.6), а ее обобщенная формулировка — с (1.8). Ранее мы предполагали, что трещина не выходит на

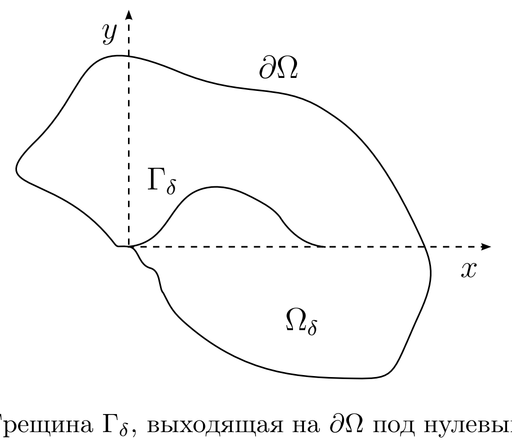


Рис. 2. Трещина Γ_δ, выходящая на $\partial\Omega$ под нулевым углом.

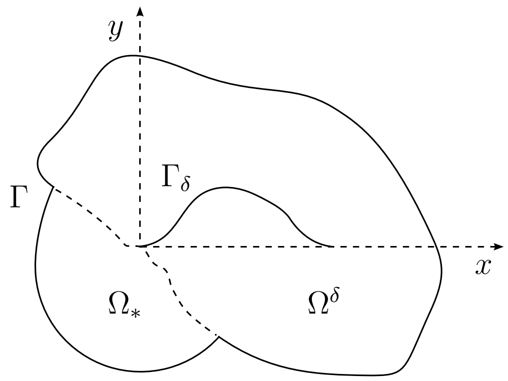


Рис. 3. Расширенная область Ω^δ с фиктивной областью Ω_*.

внешнюю границу области — условия на геометрию области с разрезом (трещиной) позволили применить первое неравенство Корна для доказательства коэрцитивности оператора $\mathfrak{L}_\delta$ на множестве $\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$. Если же угол между кривыми Γ_δ и $\partial\Omega$ нулевой, то неравенство Корна, вообще говоря, может не выполняться. Поэтому для обоснования разрешимости вариационного неравенства (1.8) необходимо привлекать дополнительные аргументы. Ниже, опираясь на метод фиктивных областей, мы изложим эти аргументы.

Метод фиктивных областей для задач теории упругости с условием непроникания впервые предложен в [15]. В случае областей, границы которых содержат нулевые углы, можно обратиться к [16]. Применение метода фиктивных областей к задаче Синьорини для вязкоупругого тела с уравнением состояния вида (1.1) обсуждалось в [17].

Теорема 3. *Существует единственное решение задачи* (1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Добавим фиктивную область Ω_* с липшицевой границей $\partial\Omega_*$ так, как указано на рис. 3. Внешнюю границу расширенной области $\Omega^\delta = \Omega_\delta \cup \Omega_* \cup \operatorname{int}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_*)$ обозначим через Γ и будем считать, что она удовлетворяет условию Липшица. Для положительного параметра λ введем тензор $A^\lambda = \{a^\lambda_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$,

$$a^\lambda_{ijkl} = \begin{cases} a_{ijkl} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} \quad \text{в} \quad \Omega_*, \end{cases}$$

и сформулируем в цилиндре $\Omega^\delta \times (0, T)$ следующее семейство задач. Найти функции u^λ, $\sigma^\lambda = \{\sigma^\lambda_{ij}\}, i, j, = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma^\lambda = f \quad \text{в} \quad \Omega^\delta \times (0, T), \tag{2.1}$$

$$\sigma^\lambda = A^\lambda \varepsilon(w^\lambda) \quad \text{в} \quad \Omega^\delta \times (0, T), \tag{2.2}$$

$$u^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, T), \tag{2.3}$$

$$[u^\lambda]\nu^\delta \geqslant 0, \quad [\sigma^\lambda_{\nu^\delta}] = 0, \quad \sigma^\lambda_{\nu^\delta} \cdot [u^\lambda]\nu^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta \times (0, T), \tag{2.4}$$

$$\sigma^\lambda_{\nu^\delta} \leqslant 0, \quad \sigma^\lambda_{\tau^\delta} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^\pm_\delta \times (0, T). \tag{2.5}$$

Задача (2.1)–(2.5) разрешима при каждом $\lambda > 0$. Действительно, пусть подпространство $H^1_\Gamma(\Omega^\delta)$ состоит из всех функций, принадлежащих $H^1(\Omega^\delta)$ и обращающихся в нуль на Γ. Определим множество кинематически допустимых полей перемещений

$$K(\Omega^\delta) = \{\, u \in H^1_\Gamma(\Omega^\delta) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\delta \,\},$$

пусть также

$$\mathcal{K}(\Omega^\delta) = \{\, u \in L^2(0, T; H^1_\Gamma(\Omega^\delta)) \mid u(t) \in K(\Omega^\delta) \quad \text{на} \quad (0, T) \,\}.$$

Так как в области Ω^δ первое неравенство Корна выполняется, то вариационное неравенство

$$u^\lambda \in \mathcal{K}(\Omega^\delta), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(\bar{u}-u^\lambda)\rangle_{\Omega^\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u^\lambda\rangle_{\Omega^\delta}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}(\Omega^\delta). \tag{2.6}$$

имеет единственное решение.

Покажем, как перейти к пределу при $\lambda \to 0$. Последовательно выбирая пробные функции $\bar{u} = 0$, $\bar{u} = 2u^\lambda$ в (2.6) и сравнивая полученные неравенства, приходим к равенству

$$\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_*}\, dt = \int\limits_0^T \langle f, u^\lambda\rangle_{\Omega^\delta}\, dt.$$

Из последнего соотношения выводим оценки

$$\|u^\lambda\|_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^\delta))} \leqslant c, \qquad \|u^\lambda\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_*))} \leqslant c\lambda$$

с постоянной c, равномерной по $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Не ограничивая общности, можно считать, что при $\lambda \to 0$ имеют место сходимости

$$u^\lambda \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^\delta)),$$
$$\int\limits_0^t u^\lambda\, d\tau \to \int\limits_0^t u\, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^\delta)),$$
$$u^\lambda \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega_*)).$$

Выберем $\bar{u} \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$, продолжим ее нулем $\Omega_* \times (0,T)$ и подставим полученную таким образом функцию в (2.6) в качестве пробной функции. В результате получим

$$\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(\bar{u})\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_*}\, dt$$
$$- \int\limits_0^T \langle f, u^\lambda\rangle_{\Omega_*}\, dt + \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u^\lambda\rangle_{\Omega_\delta}\, dt. \tag{2.7}$$

Принимая во внимание неравенство

$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(u^\lambda)\rangle_{\Omega_*}\, dt \geqslant 0,$$

перейдем к нижнему пределу при $\lambda \to 0$ в правой и левой частях (2.7):

$$\int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u}-u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u\rangle_{\Omega_\delta}\, dt. \tag{2.8}$$

Поскольку справедливо включение $u^\lambda \in \mathcal{K}(\Omega^\delta)$, то ограничение предельной функции u на область $\Omega_\delta \times (0,T)$ принадлежит множеству $\mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$. Таким образом, соотношение (2.8) может быть записано в виде вариационного неравенства

$$u \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u}-u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u}-u\rangle_{\Omega_\delta}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta), \tag{2.9}$$

которое с точностью до обозначений совпадает с (1.8).

Решение задачи (2.9) будет единственным. Следствием предположения о существовании двух различных решений $u^1, u^2 \in \mathcal{K}^\delta(\Omega_\delta)$ является равенство

$$\int_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(u)\rangle_{\Omega_\delta}\, dt = 0$$

с функцией w, соответствующей $u = u^1 - u^2$. В силу однородных краевых условий для функции u на $\partial\Omega \times (0,T)$ заключаем, что $u = 0$ в $\Omega_\delta \times (0,T)$, что и требовалось доказать.

2.2. Вариация формы трещины

Для того чтобы установить непрерывную зависимость решения от формы трещины, поступим следующим образом. В цилиндре $\Omega^\delta \times (0,T)$ рассмотрим семейство задач (ср. с (2.6)), зависящих от параметров $\delta \in [0,\delta_0]$, $\lambda > 0$:

$$u^{\delta\lambda} \in \mathcal{K}(\Omega^\delta), \quad \int_0^T \langle \sigma^\lambda_{ij}(w^{\delta\lambda}), \varepsilon_{ij}(\bar u - u^{\delta\lambda})\rangle_{\Omega^\delta}\, dt \geqslant \int_0^T \langle f, \bar u - u^{\delta\lambda}\rangle_{\Omega^\delta}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar u \in \mathcal{K}(\Omega^\delta). \tag{2.10}$$

Ранее мы показали, что для фиксированных значений параметров задача (2.10) однозначно разрешима. На следующем этапе получим априорные оценки решения, на основе которых осуществим последовательно предельные переходы при $\delta \to 0$, $\lambda \to 0$.

Пусть η — бесконечно гладкая финитная в области $\Omega \cup \Omega_* \cup \mathrm{int}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_*)$ функция, равная единице в малой выпуклой окрестности множества $\bigcup_{\delta\in[0,\delta_0]} \Gamma_\delta$. Используя замену переменных

$$\tilde x = x, \quad \tilde y = y - \delta\psi(x)\eta(x,y), \quad (x,y) \in \Omega^\delta, \quad (\tilde x, \tilde y) \in \Omega^0, \tag{2.11}$$

с положительным якобианом $J_\delta = 1 - \delta\psi\eta_{,y}$, отобразим взаимно однозначно область Ω^δ на Ω^0. Поставим в соответствие функции $u^{\delta\lambda}(t,x,y)$ функцию $u^\lambda_\delta(t,\tilde x,\tilde y)$ по правилу $u^\lambda_\delta(t,\tilde x,\tilde y) = u^{\delta\lambda}(t,x,y)$. В результате замены переменных (2.11) вариационное неравенство (2.10) будет рассматриваться на множестве

$$\mathcal{K}_\delta(\Omega^0) = \big\{\, u \in L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)) \mid u(t) \in K_\delta(\Omega^0) \ \text{ на } \ (0,T)\big\},$$

где

$$K_\delta(\Omega^0) = \big\{\, u \in H^1_\Gamma(\Omega^0) \mid [u]\nu^\delta \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0\big\}.$$

Равномерная по δ, $\delta \in [0,\delta_1]$, $\delta_1 \leqslant \delta_0$, оценка решения u^λ_δ имеет вид $\|u^\lambda_\delta\|_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^0))} \leqslant c$. Пусть подпоследовательность, обозначаемая прежним образом $\{u^\lambda_\delta\}$, такова, что для каждого фиксированного λ при $\delta \to 0$

$$u^\lambda_\delta \to u^\lambda \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)), \tag{2.12}$$

$$\int_0^t u^\lambda_\delta\, d\tau \to \int_0^t u^\lambda\, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)). \tag{2.13}$$

Для любой функции $\bar u \in \mathcal{K}_0(\Omega^0)$ можно указать последовательность пробных функций $\{\bar u_\delta\} \in \{\mathcal{K}_\delta(\Omega^0)\}$, обладающую тем свойством, что при $\delta \to 0$

$$\bar u_\delta \to \bar u \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)). \tag{2.14}$$

Сходимости (2.12)–(2.14) позволяют перейти к пределу при $\delta \to 0$ в вариационном неравенстве (2.10), записанном в переменных $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega^0$. Предельная функция u^λ удовлетворяет вариационному неравенству

$$u^\lambda \in \mathcal{K}_0(\Omega^0), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}^\lambda(w^\lambda), \varepsilon_{ij}(\bar{u} - u^\lambda)\rangle_{\Omega^0}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u} - u^\lambda\rangle_{\Omega^0}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega^0),$$

и, как следствие, равномерным по $\lambda \in (0, \lambda_1]$ оценкам

$$\|u^\lambda\|_{L^2(0,T;H^1_\Gamma(\Omega^0))} \leqslant c, \quad \|u^\lambda\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_*))} \leqslant c\lambda.$$

Тогда без потери общности можно считать, что при $\lambda \to 0$ имеют место сходимости

$$u^\lambda \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)),$$

$$\int\limits_0^t u^\lambda\, d\tau \to \int\limits_0^t u\, d\tau \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1_\Gamma(\Omega^0)).$$

$$u^\lambda \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; H^1(\Omega_*)).$$

Таким образом, сужение предельной функции u на исходный цилиндр $\Omega_\delta \times (0,T)$ является решением вариационного неравенства

$$u \in \mathcal{K}_0(\Omega_0), \quad \int\limits_0^T \langle \sigma_{ij}(w), \varepsilon_{ij}(\bar{u} - u)\rangle_{\Omega_0}\, dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, \bar{u} - u\rangle_{\Omega_0}\, dt \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in \mathcal{K}_0(\Omega_0).$$

Последнее, в свою очередь, означает, что сужение функции u соответствует прямолинейному графику Γ_0 и, значит, совпадает с u^0 — решением задачи (1.8) при $\delta = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Представленное доказательство, очевидно, сохраняет силу и в случае, когда угол между кривыми Γ_δ и $\partial\Omega$ в точке $(0,0)$ будет ненулевым.

З а м е ч а н и е 3. Другой подход к задаче о вариации формы трещины, выходящей на границу под ненулевым углом, может быть основан на использовании в (1.9) срезающей функции специального вида (см. [18]).

2.3. Задача оптимального управления

Обсудим вкратце вопрос о выборе экстремальных форм для трещины, один конец которой выходит на внешнюю границу области Ω. Именно, предположим, что для каждого $\psi \in \Psi_{\mathrm{ad}}$ график $\Gamma_\psi = \{(x,y) \mid y = \psi(x),\ x \in (0,1)\}$ выходит на границу $\partial\Omega$ в точке $(0,0)$. Здесь множество Ψ_{ad} выбирается так же, как и в подразд. 1.3. Применяя схему рассуждений из подразд. 1.3 и 2.2, можно получить следующий результат.

Теорема 4. *Существует решение задачи оптимального управления* (1.15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Khludnev A.M.** On equilibrium problem for a plate having a crack under the creep condition // Control and Cybern. 1996. Vol. 25, no. 5. P. 1015–1030.
2. **Хлуднев А.М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
3. **Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000. 408 p.

4. **Kovtunenko V.A.** Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations // Z. Angew. Math. Phys. 2003. Vol. 54, no. 3. P. 410–423.
5. **Рудой Е.М.** Выбор оптимальной формы поверхностных трещин в трехмерных телах // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 2. С. 76–87.
6. **Рудой Е.М.** Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 113–127.
7. **Вторушин Е.В.** Управление формой трещины в упругом теле при условии возможного контакта берегов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 20–30.
8. **Лазарев Н.П.** Существование экстремальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 49–62.
9. **Лазарев Н.П.** Формула Гриффитса для пластины Тимошенко с криволинейной трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 98–108.
10. **Lazarev N.P., Rudoy E.M.** Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. Vol. 94, no. 9. P. 730–739.
11. **Арутюнян Н.Х., Шойхет Б.А.** Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 3. С. 31–48.
12. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
13. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
14. **Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.** Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
15. **Hoffmann K.-H., Khludnev A.M.** Fictitious domain method for the Signorini problem in a linear elasticity // Adv. Math. Sci. Appl. 2004. Vol. 14, no. 2. P. 465–481.
16. **Алексеев Г.В., Хлуднев А.М.** Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 15–29.
17. **Попова Т.С.** Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 1. С. 87–106.
18. **Хлуднев А.М.** Об экстремальных формах разрезов в пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 1. С. 170–176.

Поступила 17.09.2014

Щербаков Виктор Викторович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: sherbakov87@gmail.com

Кривотько Ольга Игоревна
младший науч. сотрудник
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
e-mail: krivorotko.olya@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

ПАМЯТИ АРКАДИЯ ВИКТОРОВИЧА КРЯЖИМСКОГО

3 ноября 2014 г. не стало незаурядного человека — Аркадия Викторовича Кряжимского.

Долгие годы его судьба была неразрывно связана с Институтом математики и механики. В 1971 г. он окончил математико-механический факультет Уральского государственного университета им. А.М. Горького и поступил в аспирантуру, где его научным руководителем стал Юрий Сергеевич Осипов. В 1972 г. в Институте математики и механики УНЦ АН СССР была создана лаборатория (впоследствии — отдел) дифференциальных уравнений, которую возглавил Ю.С. Осипов. Аркадий Викторович со дня основания отдела до начала девяностых годов являлся его сотрудником.

В семидесятые годы интенсивно развивался один из разделов функционального анализа — выпуклый анализ в гильбертовых пространствах. Привлекая его аппарат, Аркадий Викторович провел комплексные исследования игры сближения-уклонения с функциональной целью. Полученные результаты составили основу его кандидатской диссертации "Некоторые игровые задачи управления", которую он успешно защитил в 1974 г. Затем он занялся изучением дифференциальных игр для "обыкновенных" систем с неполной информацией и бесконечномерных управляемых систем. Итогом этой работы стала докторская диссертация "Дифференциальные игры для нелипшицевых систем" (1981), заметно обогатившая данный раздел математики и по достоинству оцененная основоположниками теории.

В начале восьмидесятых годов А.В. Кряжимский вместе с коллегами по отделу обратился к поиску новых задач и разработке новых теоретических подходов. На стыке теории некорректных задач и теории позиционного управления был найден новый круг задач — задачи динамической регуляризации — и указан революционный подход к их решению — метод регуляризованного экстремального сдвига. Этот подход, позволивший решить проблему устойчивого восстановления неизвестных характеристик управляемых систем в режиме реального времени, нашел широкое применение и стал базисом новой теории — теории динамического обращения, покрывающей широкий спектр вопросов — от постановок задач, изучения проблемы их разрешимости, сравнения возможностей динамических и апостериорных методов до построения оптимальных алгоритмов и детальной реализации схемы “обращение-управление”. Отдельные разделы теории апеллируют к методам теории дифференциальных уравнений, теории управления (в частности, к аппарату обобщенных управлений), теории оценивания, функционального анализа, выпуклого анализа, теории приближения функций. Явные описания алгоритмов обращения и обращения-управления, готовые для непосредственного применения и сопровождаемые оценками точности, комбинируются с изучением тонких качественных вопросов, таких как регуляризуемость, порядковая оптимальность, асимптотическая оптимальность и др. Работы по динамическому обращению “обыкновенных” конечномерных систем были подытожены в совместной с Ю.С. Осиповым монографии (1995).

В середине восьмидесятых годов Аркадий Викторович приступил к исследованиям, связанным с оборонной тематикой. Вплоть до развала Советского Союза в 1991 г. в руководимом им секторе отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики совместно с коллегами из НПО “Энергия” и НПО “Автоматика” проводились работы, посвященные процессам взаимодействия динамических систем в условиях неполной и меняющейся информации.

В начале девяностых годов А.В. Кряжимский уехал работать в Международный институт прикладного системного анализа — IIASA (г. Лаксенбург, Австрия), где до конца 2012 г. руководил проектом “Динамические системы”. Системный, всесторонний подход к решению сложных междисциплинарных задач, являющийся визитной карточкой института, в полной мере был присущ Аркадию Викторовичу. Находясь за рубежом, он не терял связи со своей научной “альма матер” — отделом дифференциальных уравнений ИММ УрО РАН, активно сотрудничая в разных направлениях. Аркадий Викторович периодически возвращался к классической тематике дифференциальных игр для “обыкновенных” конечномерных систем и проводил исследования на стыке теории дифференциальных и эволюционных игр. В частности, обращаясь к задачам позиционного управления с неполной информацией о фазовых состояниях, совместно с Ю.С. Осиповым он развивал новый подход к построению обратных связей, гарантирующих требуемое качество движений при всевозможных реализациях факторов неопределенности. Этот метод, названный “пакетами программ”, обобщает идею программных конструкций.

С 1996 г. до конца жизни Аркадий Викторович работал в Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова. Одновременно он читал лекции на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, и эти лекции неизменно пользовались большой популярностью у студентов благодаря полноте содержания, информативности, ясности изложения материала и личному обаянию лектора, постоянно настроенного на диалог с аудиторией.

Аркадий Викторович Кряжимский поражал коллег широтой научного кругозора и работоспособностью на высочайшем интеллектуальном уровне. Он с блеском решал задачи из самых разных разделов математики и пограничных наук, справиться с которыми до него не мог никто и постоянно доказывал, что занятие наукой — не рутина, а каждодневное удовольствие. Аркадий Викторович опубликовал более 200 научных работ. Избрание в Академию наук стало результатом вложенного труда, признания заслуг и достижений, весомого вклада в развитие российской научной мысли. С мая 1997 г. А.В. Кряжимский — член-корреспондент, а с мая 2006 — академик РАН.

Он был открытым и искренним человеком, чрезвычайно авторитетным, но абсолютно не авторитарным. Все, кто был знаком с ним, отмечали его интеллигентность, увлеченность, необыкновенную внутреннюю культуру, энциклопедичность и поразительную готовность как делиться своими идеями, так и воспринимать и обсуждать чужие. Аркадий Викторович Кряжимский прекрасно играл на гитаре, сочинял неординарные стихи, занимался фехтованием, в совершенстве владел английским языком.

Мы всегда будем помнить Аркадия Викторовича Кряжимского, выдающегося ученого и замечательного человека.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 20 (2014)

	№	Стр.
S. M. Aseev, and V. M. Veliov. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions	3	41–57
V. M. Veliov. *см.* S. M. Aseev	3	41–57
W. Wang. *см.* А. М. Тарасьев	4	258–276
Ю. В. Авербух. Универсальные равновесия по Нэшу в дифференциальных играх многих лиц	3	26-40
Р. Р. Акопян. Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций	1	9–16
Б. И. Ананьев. Об оценивании обратных стохастических дифференциальных уравнений	4	17–28
А. В. Анисимов. *см.* Н. Л. Григоренко	4	97–105
А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова. Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями	2	13–28
В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина. Неравенство Бернштейна — Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов	1	17-31
А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, Ф. Л. Перейра. Условия отсутствия скачка решения сопряженной системы принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями	4	29-37
Н. В. Байдакова. Оценки снизу погрешности аппроксимации производных для составных конечных элементов со свойством гладкости	1	32–42
А. П. Бакланов. *см.* А. Г. Ченцов	3	309–323
В. А. Белоногов. Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы	2	29–43
И. Н. Белоусов. Об автоморфизмах обобщенного шестиугольника порядка (t,t)	2	44–54
В. В. Беляев, Д. А. Швед. Полупростые группы, имеющие точное финитарное подстановочное представление	2	55–62
К 75-летнему юбилею Виталия Ивановича Бердышева	1	5–8
В. И. Бердышев. Линейная аппроксимация вектор-функций	4	38–43
Е. В. Бугаева. *см.* А. И. Созутов	2	277–283
В. В. Васин, Е. О. Соболева. Раздельное восстановление компонент решения с различными типами особенностей для линейных операторных уравнений первого рода	2	63–73
М. П. Ващенко, Я. С. Пронин, А. А. Шананин. Математическая модель экономики железнодорожных грузоперевозок	4	44–59
В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Описание винтового движения несжимаемой невязкой жидкости	1	43–51

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей 4 60–70

А. Ю. Веснин, В. В. Таркаев, Е. А. Фоминых. Трехмерные гиперболические многообразия с каспами сложности 10, имеющие максимальный объем 2 74–87

Л. А. Власенко, А. А. Чикрий. Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами 4 71–80

Ю. С. Волков, Ю. Н. Субботин. 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции 1 52–67

Э. Х. Гимади, А. М. Истомин, И. А. Рыков, О. Ю. Цидулко. Вероятностный анализ приближенного алгоритма для решения задачи о нескольких коммивояжерах на случайных входных данных, неограниченных сверху 2 88–98

Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай. Эффективные алгоритмы с оценками точности для некоторых задач поиска нескольких клик в полном неориентированном взвешенном графе 2 99–112

А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко. Регуляризация и нормальные решения систем линейных уравнений и неравенств 2 113-121

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов. Об устойчивости одной процедуры решения задачи управления на минимакс позиционного функционала 1 68-82

М. И. Гомоюнов, Д. В. Корнев, Н. Ю. Лукоянов. О численном решении задачи управления на минимакс позиционного функционала 3 58–75

Д. В. Горбачев. Оценка оптимального аргумента в точном многомерном L_2-неравенстве Джексона — Стечкина 1 83–91

В. В. Гороховик, М. А. Трофимович. Условия оптимальности первого и второго порядков в задачах векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения 4 81–96

П. Ю. Глазырина. *см.* В. В. Арестов. 1 17–31

Н. Л. Григоренко, А. В. Анисимов, Л. Н. Лукьянова. Построение терминального управления для системы второго порядка при наличии фазовых ограничений 4 97–105

Е. В. Громова. *см.* Л. А. Петросян. 3 193–203

М. И. Гусев. О снятии фазовых ограничений при построении множеств достижимости 4 106–115

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотика оптимального времени в задаче о быстродействии с двумя малыми параметрами 1 92–99

А. Р. Данилин. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с интегральным ограничением 3 76–85

А. Р. Данилин. Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления потоком через часть границы 4 116–127

Е. Н. Демина, Н. В. Маслова. Неабелевы композиционные факторы конечной группы с арифметическими ограничениями на неразрешимые максимальные подгруппы 2 122–134

Ю. Ф. Долгий. Линейно-квадратичная задача управления для систем дифференциальных уравнений с последействием 3 86–97

Е. Б. Дураков. *см.* А. И. Созутов. 2 277–283

Р. В. Дыба, А. Р. Миротин. Функции ограниченной средней осцилляции и ганкелевы операторы на компактных абелевых группах 2 135–144

Ю. Г. Евтушенко. *см.* А. И. Голиков. 2 113–121

Иван Иванович Еремин 2 5-12

В. Г. Жадан. Об одном варианте допустимого аффинно-масштабирующего метода для полуопределенного программирования 2 145–160

С. В. Захаров. Обоснование асимптотик решений системы Навье — Стокса при малых числах Рейнольдса 2 161–167

М. Р. Зиновьева. Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел 2 168–183

Н. Д. Зюляркина, А. А. Махнев. Автоморфизмы графов Хигмена с $\mu = 6$ 2 184–209

Е. Е. Иванко. Адаптивная устойчивость в задачах комбинаторной оптимизации 1 100–108

В. И. Иванов, Ха Тхи Минь Хуэ. Обобщенное неравенство Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля 1 109–118

А. М. Истомин. *см.* Э. Х. Гимади. 2 88–98

А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах 1 119–129

Л. В. Камнева, В. С. Пацко. Построение максимального стабильного моста в играх с простыми движениями на плоскости 4 128–142

Д. Ю. Карамзин. *см.* А. В. Арутюнов. 4 29-37

А. В. Кельманов. *см.* Э. Х. Гимади. 2 99–112

К. С. Кобылкин. Нижние оценки числа гиперплоскостей, разделяющих два конечных множества точек 2 210–222

О. О. Коврижных. *см.* А. Р. Данилин. 1 92–99

А. С. Кондратьев. Распознаваемость групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$ по графу простых чисел 2 223–229

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I 4 143–152

В. В. Кораблева. О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^2E_6(q^2)$ 2 230–237

Д. В. Корнев. *см.* М. И. Гомоюнов. 3 58–75

А. И. Короткий, Ю. В. Стародубцева. Прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии 3 98–113

Е. К. Костоусова. О полиэдральном методе решения задач синтеза стратегий управления 4 153–167

Н. А. Красовский, А. В. Кряжимский, А. М. Тарасьев. Уравнения Гамильтона — Якоби в эволюционных играх 3 114–131

Николай Николаевич Красовский (*К девяностолетию со дня рождения*) . . . 3 5–25

А. В. Кряжимский, Н. В. Стрелковский. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы 3 132–147

А. В. Кряжимский. *см.* Н. А. Красовский. 3 114–131

А. В. Кряжимский, Н. В. Стрелковский. Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации	4	168–177
П. А. Кузнецов. *см.* А. Л. Казаков	1	119–129
С. С. Кумков, С. Ле Менек, В. С. Пацко. Множества разрешимости в задаче преследования с двумя догоняющими и одним убегающим	3	148–165
В. М. Кунцевич. Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами	4	178–186
Н. А. Куклин. Экстремальная функция в задаче Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного пространства	1	130–141
Ю. И. Кулаженко. Полуабелевость и свойства векторов n-арных групп	1	142–147
Александр Борисович Куржанский	4	5–16
А. Б. Куржанский. О задаче группового управления в условиях препятствий	3	166–179
Н. Г. Лавров. *см.* В. Н. Ушаков.	4	277–286
А. С. Лахтин. *см.* В. Н. Ушаков.	3	291–308
П. Д. Лебедев. *см.* В. Н. Ушаков	3	291–308
А. В. Лотов, А. И. Рябиков. Многокритериальный синтез оптимального управления и его применение при построении правил управления каскадом гидроэлектростанций	4	187–203
Л. Н. Лукьянова. *см.* Н. Л. Григоренко	4	97–105
Н. Ю. Лукоянов. *см.* М. И. Гомоюнов	1	68–82
Н. Ю. Лукоянов. *см.* М. И. Гомоюнов	3	58–75
Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин. Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа	4	204–217
С. В. Лутманов. Принцип компромисса в дифференциальных играх нескольких лиц	1	148–155
В. И. Максимов. Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора	4	218–230
В. И. Максимов. Об одном алгоритме реконструкции входного воздействия в линейной системе с последействием	3	180–192
Н. В. Маслова. О совпадении графа Грюнберга — Кегеля и спектра конечной простой группы и ее собственной подгруппы	1	156–168
Н. В. Маслова. *см.* Е. Н. Демина	2	122–134
А. А. Махнев, Д. В. Падучих. О расширениях исключительных сильно регулярных графов с собственным значением 3	1	169–184
А. А. Махнев. *см.* Н. Д. Зюляркина	2	184–209
С. Ле Менек. *см.* С. С. Кумков	3	148–165
А. Р. Миротин. *см.* Р. В. Дыба.	2	135–144
А. В. Митянина. О $K_{1,3}$-свободных графах Деза диаметра больше двух	2	238–241
А. У. Муллабаева. *см.* В. В. Напалков	1	201–214
Н. В. Нагул. Классы свойств, сохраняющихся при морфизмах обобщений многоосновных алгебраических систем в исследовании динамики	1	185–200

В. В. Напалков, А. У. Муллабаева. Об одном классе дифференциальных операторов и их применении 1 201–214

Е. Д. Незнахина. *см.* М. Ю. Хачай. 4 297–311

М. С. Никольский. Исследование одной задачи оптимального управления, связанной с управляемой моделью Солоу 4 231–237

Д. В. Падучих. *см.* А. А. Махнев. 1 169–184

Э. М. Пальчик. Конечные простые группы с факторизацией $G = G_\pi B$, $2 \notin \pi$ 2 242–249

В. С. Пацко. *см.* С. С. Кумков. 3 148–165

В. С. Пацко. *см.* Л. В. Камнева. 4 128–142

Т. В. Первухина. О псевдомногообразии, порожденном всеми конечными моноидами со свойством $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ 1 215–220

Ф. Л. Перейра. *см.* А. В. Арутюнов. 4 29-37

Л. А. Петросян, Е. В. Громова. Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх 3 193–203

А. Р. Плаксин. *см.* Н. Ю. Лукоянов. 4 204–217

Е. А. Плещева, Н. И. Черных. Построение ортогональных базисов мультивсплесков 1 221–230

Е. С. Половинкин. О слабом полярном конусе ко множеству решений дифференциального включения с коническим графиком 4 238–246

Л. Д. Попов. Двойственный подход к применению барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода 1 231–237

Я. С. Пронин. *см.* М. П. Ващенко. 4 44–59

Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов. К вопросу о структуре ультрафильтров и свойствах, связанных со сходимостью в топологических пространствах 2 250–267

Е. Г. Пыткеев. *см.* А. Г. Ченцов. 4 312–329

А. В. Пяткин. *см.* Э. Х. Гимади. 2 99–112

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов. Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных 1 238–246

О. В. Русских. *см.* А. М. Тарасьев. 4 258–276

И. А. Рыков. *см.* Э. Х. Гимади. 2 88-98

А. И. Рябиков. *см.* А. В. Лотов. 4 187–203

Д. А. Серков. О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата 3 204–217

В. Д. Скарин. О применении метода невязки для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования 2 268–276

Е. О. Соболева. *см.* В. В. Васин. 2 63–73

А. И. Созутов, Е. Б. Дураков, Е. В. Бугаева. О некоторых почти-областях и точно дважды транзитивных группах 2 277–283

Л. Ф. Спевак. *см.* А. Л. Казаков. 1 119–129

Ю. В. Стародубцева. *см.* А. И. Короткий. 3 98–113

С. А. Стасюк. Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных	1	247–257
Н. В. Стрелковский. *см.* А. В. Кряжимский.	3	132–147
Н. В. Стрелковский. *см.* А. В. Кряжимский.	4	168–177
Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин. Локальные экспоненциальные сплайны с произвольными узлами	1	258–263
Ю. Н. Субботин. *см.* В. П. Верещагин.	1	43–51
Ю. Н. Субботин. *см.* Ю. С. Волков.	1	52–67
Ю. Н. Субботин. *см.* В. П. Верещагин.	4	60–70
Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев. Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных	3	218–233
Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова. Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана с непродолжимыми характеристиками	4	247–257
П. Г. Сурков. Регуляризация некорректной задачи Коши для автономной системы с запаздыванием при использовании одного класса стабилизаторов	3	234–245
А. М. Тарасьев. *см.* Н. А. Красовский.	3	114–131
А. М. Тарасьев, А. А. Усова, W. Wang, О. В. Русских. Построение оптимальных траекторий интегрированием гамильтоновой динамики в моделях экономического роста при ресурсных ограничениях	4	258–276
В. В. Таркаев. *см.* А. Ю. Веснин.	2	74–87
К. С. Тихановцева. Скорость поведения наименьшего значения взвешенной меры множества неотрицательности многочленов с нулевым средним значением на отрезке	1	264–270
Т. Б. Токманцев. *см.* Н. Н. Субботина.	3	218–233
А. А. Толстоногов. Дифференциальные включения с неограниченной правой частью: теоремы существования и релаксации	3	246–262
Е. Л. Тонков. Теорема об асимптотической устойчивости Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского распространяется на управляемые системы на гладких многообразиях	3	263–275
В. И. Трофимов. Несколько замечаний о симметрических расширениях графов	2	284–293
В. И. Трофимов. *см.* А. С. Кондратьев.	4	143–152
М. А. Трофимович. *см.* В. В. Гороховик.	4	81–96
О. Н. Ульянов. *см.* Л. И. Рубина.	1	238–246
А. А. Успенский. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия	3	276–290
А. А. Усова. *см.* А. М. Тарасьев.	4	258–276
В. Н. Ушаков, А. С. Лахтин, П. Д. Лебедев. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве	3	291–308
В. Н. Ушаков, Н. Г. Лавров, А. В. Ушаков. Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы	4	277–286
А. В. Ушаков. *см.* В. Н. Ушаков.	4	277–286

И. А. Финогенко. Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений	1	271–284
Е. А. Фоминых. *см.* А. Ю. Веснин.	2	74–87
Т. Ф. Филиппова. Оценки множеств достижимости управляемых систем с нелинейностью и параметрическими возмущениями	4	287–296
Ха Тхи Минь Хуэ. В. И. Иванов.	2	99–112
О. В. Хамисов. Глубокие отсечения в вогнутом и линейном 0-1 программировании	2	294–304
М. Ю. Хачай. *см.* Э. Х. Гимади.	2	99–112
М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина. Полиномиальная приближенная схема для евклидовой задачи о цикловом покрытии графа	4	297–311
Е. В. Хорошилова. *см.* А. С. Антипин.	2	13–28
О. Ю. Цидулко. *см.* Э. Х. Гимади.	2	88-98
Л. Ю. Циовкина. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$	2	305–310
А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики	3	324–333
Г. Ц. Чикрий. *см.* А. А. Чикрий.	3	324–333
А. А. Чикрий. *см.* Л. А. Власенко.	4	71–80
А. В. Чернов. О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса — Дарбу на варьируемой области	1	305–321
Н. И. Черных. *см.* В. П. Верещагин.	1	43–51
Н. И. Черных. *см.* В. П. Верещагин.	4	60–70
Н. И. Черных. *см.* Е. А. Плещева.	1	221–230
А. Г. Ченцов. Ультрафильтры измеримых пространств и их применение в конструкциях расширений	1	285–304
А. Г. Ченцов. *см.* Е. Г. Пыткеев.	2	250–267
А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов. К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера	3	309–323
А. Г. Ченцов, Е. Г. Пыткеев. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости	4	312–329
Л. Г. Шагалова. *см.* Н. Н. Субботина.	4	247–257
А. А. Шананин. *см.* М. П. Ващенко.	4	44–59
И. А. Шарая. Бескванторные описания для интервально-кванторных линейных систем	2	311–323
Д. А. Швед. *см.* В. В. Беляев.	2	55–62
В. Т. Шевалдин. *см.* Е. В. Стрелкова.	1	258–263
Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина. Устойчивая стандартная разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии при компьютерных возмущениях	1	322–333
Л. П. Шишкина. *см.* Г. И. Шишкин.	1	322–333

СОДЕРЖАНИЕ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова. О дискретизации методов локализации особенностей зашумленной функции ... 3

М. А. Артемов, Е. С. Барановский. Граничные задачи для уравнений движения полимерных жидкостей с нелинейным условием проскальзывания вдоль твердых стенок ... 14

В. А. Белоногов. Конечные группы, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты. I ... 25

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев. Сильно однородные расширения двойственных 2-схем ... 35

В. И. Бердышев. К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями ... 46

Р. Р. Гадыльшин, С. В. Репьевский, Е. А. Шишкина. О собственном значении для лапласиана в круге с граничным условием Дирихле на малом участке границы в критическом случае ... 56

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотика оптимального времени в одной задаче о быстродействии с малым параметром ... 71

А. А. Ершов. Асимптотика решения второй краевой задачи для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка ... 81

С. В. Захаров. Сингулярные асимптотики в задаче Коши для параболического уравнения с малым параметром ... 97

В. И. Зенков. О пересечениях примарных подгрупп в группе $\mathrm{Aut}(L_n(2))$ ... 105

Л. А. Калякин. Устойчивость равновесия относительно белого шума ... 112

С. Ф. Каморников, О. Л. Шеметкова. О существовании дополнений к корадикалам конечных групп ... 122

О. М. Киселев. Асимптотика авторезонансного солитона ... 128

А. А. Ковалевский. К L^1-теории вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств ... 137

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант. Свойства отображений скалярных функций в операторные линейного замкнутого оператора ... 153

В. П. Кривоколеско, В. М. Левчук. Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр ... 166

Н. В. Маслова. Конечные простые группы, не являющиеся критическими по спектру 172

Ф. Х. Мукминов, Т. Р. Гадыльшин. Краевая задача для нелинейного уравнения второго порядка с дельта-образным потенциалом ... 177

С. И. Новиков. Об оценках равномерной нормы оператора Лапласа наилучших интерполянтов на классе ограниченных интерполируемых данных 191

Т. В. Первухина. Характеризация псевдомногообразия, порожденного конечными моноидами со свойством $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ 197

И. В. Першин. Расчет тепловых полей массивных тел при нагреве подвижным полосовым источником 205

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин. О константах Лебега локальных параболических сплайнов 213

О. А. Султанов. Устойчивость захвата в параметрический авторезонанс 220

Е. В. Табаринцева. О решении некорректно поставленной задачи для нелинейного дифференциального уравнения 231

В. П. Танана, А. И. Сидикова. Двусторонняя оценка точности регуляризующего алгоритма, основанного на методе М.М. Лаврентьева 238

А. А. Успенский. Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала 250

А. В. Чернов. О кусочно постоянной аппроксимации в распределенных задачах оптимизации 264

Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина. Схема высокого порядка точности для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии на основе метода декомпозиции решения 280

В. В. Щербаков, О. И. Криворотько. Оптимальные формы трещин в вязкоупругом теле 294

Памяти Аркадия Викторовича Кряжимского 305

Алфавитный указатель тома 20 (2014 г.) 307

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 1 2015

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 24.02.15. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 36, 7. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226