

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

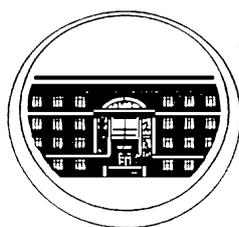
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 20

№ 4

2014



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 20, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. 332 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев
Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (*отв. секретарь*),
д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев,
д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов, д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев,
д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий, канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев,
д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных, д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь),
д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. В. Кряжковский,
акад. РАН А. Б. Куржанский, чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров,
чл.-корр. РАН С. В. Матвеев, чл.-корр. РАН А. А. Махнев,
акад. РАН Ю. С. Осипов, чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов, чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редакторы выпуска

д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев, д-р физ.-мат. наук Т. Ф. Филишова

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ КУРЖАНСКИЙ.....	5
Б. И. Ананьев. Об оценивании обратных стохастических дифференциальных уравнений.....	17
А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, Ф. Л. Перейра. Условия отсутствия скачка решения сопряженной системы принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями.....	29
В. И. Бердышев. Линейная аппроксимация вектор-функций.....	38
М. П. Ващенко, Я. С. Пронин, А. А. Шананин. Математическая модель экономики железнодорожных грузоперевозок.....	44
В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей.....	60
Л. А. Власенко, А. А. Чикрий. Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами.....	71
В. В. Гороховик, М. А. Трофимович. Условия оптимальности первого и второго порядка в задачах векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения.....	81
Н. Л. Григоренко, А. В. Анисимов, Л. Н. Лукьянова. Построение терминального управления для системы второго порядка при наличии фазовых ограничений....	97
М. И. Гусев. О снятии фазовых ограничений при построении множеств достижимости.....	106
А. Р. Данилин. Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления потоком через часть границы.....	116
Л. В. Камнева, В. С. Пацко. Построение максимального стабильного моста в играх с простыми движениями на плоскости.....	128
А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I.....	143
Е. К. Костоусова. О полиэдральном методе решения задач синтеза стратегий управления.....	153
А. В. Кряжимский, Н. В. Стрелковский. Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости.....	168
В. М. Кунцевич. Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами.....	178

(Продолжение)

А. В. Лотов, А. И. Рябиков. Многокритериальный синтез оптимального управления и его применение при построении правил управления каскадом гидроэлектростанций.....	187
Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин. Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа.....	204
В. И. Максимов. Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора.....	218
М. С. Никольский. Исследование одной задачи оптимального управления, связанной с управляемой моделью Солоу.....	231
Е. С. Половинкин. О слабом полярном конусе ко множеству решений дифференциального включения с коническим графиком.....	238
Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова. Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана с непродолжимыми характеристиками.....	247
А. М. Тарасьев, А. А. Усова, W. Wang, О. В. Русских. Построение оптимальных траекторий интегрированием гамильтоновой динамики в моделях экономического роста при ресурсных ограничениях.....	258
В. Н. Ушаков, Н. Г. Лавров, А. В. Ушаков. Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы.....	277
Т. Ф. Филиппова. Оценки множеств достижимости управляемых систем с нелинейностью и параметрическими возмущениями.....	287
М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина. Полиномиальная приближенная схема для евклидовой задачи о цикловом покрытии графа.....	297
А. Г. Ченцов, Е. Г. Пыткеев. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости.....	312

КУРЖАНСКИЙ АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ

(К семидесятипятилетнему юбилею)

19 октября 2014 г. исполнилось 75 лет выдающемуся российскому математику и механику, специалисту в области процессов управления, действительному члену Российской академии наук Александру Борисовичу Куржанскому.

Академику Куржанскому принадлежат фундаментальные результаты в области математической теории управления, теории оптимизации, дифференциальных уравнений и их приложений, методов математического моделирования и системного анализа. Им развиты теория апостериорного гарантированного оценивания и идентификации динамических систем по результатам наблюдений, методы синтеза управлений в условиях реально доступной информации, теория и методы решения обратных задач наблюдения для эволюционных систем. Разработаны новые вычислительные методы эллипсоидального и полиэдрального исчисления в теории управления и оценивания, теория синтеза импульсных управлений и быстрых управлений.

В 1957 г. после окончания с медалью средней школы № 1 в Свердловске А. Б. Куржанский поступил на энергетический факультет Уральского политехнического института (УПИ) им. С. М. Кирова. Лекции по высшей математике студентам энергофака читал профессор Николай Николаевич Красовский, он же вел упражнения в группе, где учился А. Б. Куржанский. Именно с этого времени под сильным впечатлением от общения с Н. Н. Красовским началось увлечение Александра Борисовича математикой. Будучи студентом УПИ, он одновременно посещает лекции на заочном отделении физико-математического факультета Уральского государственного университета им. А. М. Горького (УрГУ), где сдает экзамены по всем основным курсам факультета. Защитив в 1962 г. в УПИ диплом с отличием, А. Б. Куржанский продолжил обучение в аспирантуре математико-механического факультета университета под руководством Н. Н. Красовского. После защиты в 1965 г. кандидатской диссертации работал на организованной в те годы Н. Н. Красовским кафедре прикладной математики университета.

С 1967 г. А. Б. Куржанский — сотрудник Свердловского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, ныне Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (ИММ УрО РАН). В 1971 г. он успешно защищает докторскую диссертацию “Управление экстремально связанным движением и позиционное наблюдение”, развивающую ряд актуальных направлений математической теории управления. Все это время он продолжает читать лекции и вести семинары в университете, активно работает с дипломниками и аспирантами. В 1973 г. он возглавляет созданную в Институте лабораторию (позднее отдел) оптимального управления, где работали его ученики, выпускники УрГУ. В 1976 г. за цикл работ по математической теории управления А. Б. Куржанскому совместно с Н. Н. Красовским, Ю. С. Осиповым, А. И. Субботиным была присуждена Ленинская премия. В 1977 г. А. Б. Куржанский был назначен директором Института математики и механики АН СССР, сменив на этом посту академика Н. Н. Красовского. В этой должности он проработал до 1983 г., много сил и времени отдавая укреплению авторитета ведущих научных направлений Института, развитию его международных контактов, оснащению современной вычислительной техникой. В 1981 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 1990 г. — действительным членом АН СССР по Отделению механики и процессов управления.

Работы А. Б. Куржанского получили международное признание. В 1984 г. он получает приглашение возглавить методологическую программу “Системы и принятие решений” в Международном институте прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия). В этом институте А. Б. Куржанский работал с 1984 по 1992 гг., осуществляя руководство программой и созданным в ее рамках проектом “Динамические системы”. Пребывание Александра Борисовича на этом посту способствовало значительному укреплению авторитета программы и Института в целом. К работе в проектах программы он сумел привлечь ведущих ученых Австрии, СССР, США, Франции, Японии и других стран. В этот период при его непосредственном участии было организовано несколько десятков научных конференций, изданы большое количество научных статей и ряд монографий. В течение нескольких лет А. Б. Куржанский был одновременно и заместителем директора Международного института прикладного системного анализа. В 1992 г. он был удостоен звания Почетного ученого (Honorary Scholar) этого института.

С 1992 г. А. Б. Куржанский — профессор Московского государственного университета (МГУ), организатор и заведующий кафедрой системного анализа на факультете вычислительной математики и кибернетики этого университета.

Широк и разнообразен круг научных интересов А. Б. Куржанского. Он автор более 200 научных работ, в том числе ряда монографий, опубликованных в ведущих отечественных и зарубежных изданиях.

Появившаяся в ранних работах А. Б. Куржанского по теории двойственности задач управления и наблюдения концепция позиционного наблюдения привела его в дальнейшем к созданию и развитию теории гарантированного апостериорного оценивания состояний и параметров динамических систем по результатам наблюдений. В рамках данной теории оценки состояний динамических систем с неопределенными возмущениями по данным наблюдений формируются апостериори по ходу процесса наблюдения в виде функций (вообще говоря, многозначных) от наблюдаемого сигнала. Характеризующие оценки уравнения минимаксной фильтрации возникают как альтернатива классическим соотношениям стохастической фильтрации, полученным в работах А. Н. Колмогорова, Н. Винера, Р. Калмана. Они находят все большее применение в задачах навигации, управления движением механических систем, инженерии, биомедицины, в решении проблем, связанных с изучением окружающей среды.

В дальнейшем А. Б. Куржанским, его учениками и коллегами, методы гарантированного оценивания были распространены на системы со случайными возмущениями, имеющими неточно известные характеристики (например, первые и вторые моменты случайных величин или функции распределения). Такие системы принято называть статистически неопределенными. Теория гарантированного оценивания была развита также для систем с запаздыванием и систем, описываемых уравнениями в частных производных. В последнем случае особенно важное значение приобретает проблема регуляризации задач наблюдения в связи с неустойчивостью решений относительно помех. Для указанных систем была разработана конструкция вспомогательной задачи гарантированного оценивания, динамическая оценка в которой в форме уравнений минимаксного фильтра служит регуляризованным решением обратной задачи.

Во многих разделах теории управления и дифференциальных игр возникают задачи описания траекторных трубок динамических систем с неопределенными параметрами. В серии работ Александра Борисовича и его учеников, посвященной проблемам многозначного анализа, были предложены аналоги дифференциальных уравнений в пространствах множеств и развита теория таких уравнений. Были созданы конструктивные методы описания семейств траекторий дифференциальных включений, сохраняющихся (выживающих) в течение предписанного времени в пределах заданного множества фазового пространства. Получены эволюционные уравнения (уравнения интегральной воронки), описывающие динамику во времени областей достижимости дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. Введен и исследован новый класс эволюционных уравнений, в терминах решений которых дано описание конфликтно-достижимых областей управляемой системы, множеств разрешимости задачи об управлении при наличии фазовых ограничений и противодействия, семейств сильно и слабо инвариантных отображений.

Важное место в трудах А. Б. Куржанского занимает разработка вычислительных алгоритмов решения задач гарантированного оценивания и управления. Им была разработана техника эллипсоидальных аппроксимаций выпуклых множеств и на ее базе получены эволюционные уравнения для внешних и внутренних эллипсоидальных оценок для различных многозначных интегралов, представляющих, в частности, прямые и попятные области (трубки) достижимости для систем высокой размерности. Принципиальной особенностью развиваемых А. Б. Куржанским методов (в отличие от других известных результатов по эллипсоидальным оценкам в теории управления) является возможность получения сколь угодно точных двусторонних приближений решений путем пересечения внешних и объединения внутренних эллипсоидальных оценок по множествам управляющих параметров. Поскольку отдельные оценки вычисляются независимо, процедуры аппроксимации допускают эффективное распараллеливание вычислений. Подобные же идеи были заложены в схему построения оценок при помощи другого конечно-параметрического класса множеств — параллелотопов. На основе предложенных алгоритмов были разработаны эффективные вычислительные процедуры и созданы пакеты прикладных программ для решения задач оценивания и синтеза управлений в линейных системах с неопределенными возмущениями.

Задачам синтеза управлений для систем с реально доступной информацией всегда уделялось особое место в работах А. Б. Куржанского и его научной школы. Теория гарантированного апостериорного оценивания послужила основой для разработки новых оригинальных методов синтеза стратегий управления, когда в качестве состояний системы рассматриваются информационные множества. Значительным достижением стала формулировка А. Б. Куржанским принципа оптимальности при неопределенности и принципа разделения для таких задач. Задачу синтеза оказалось возможным разделить на конечномерную задачу оценивания и бесконечномерную (в классе траекторных трубок) задачу управления. Решение каждой из подзадач, получаемое посредством применения соответствующего варианта гамильтонова формализма, в линейном случае сводится к построениям в конечномерных пространствах.

Существенное продвижение в работах А. Б. Куржанского и его учеников из МГУ получено в решении трудной проблемы синтеза управлений для импульсных систем. Разработанная теория синтеза опирается на обобщения вариационных неравенств Гамильтона — Якоби — Беллмана. В рамках созданной теории допускается использование “быстрых управлений”, содержащих импульсы высших порядков. Программный вариант подобных управлений изучался еще в ранних работах Александра Борисовича. Разработка теории синтеза импульсных управлений позволила в рамках единой формализации изучать и задачи управления для гибридных систем, содержащих скачкообразные перестройки состояний.

Заметное место в работах А. Б. Куржанского последних лет занимает актуальная тематика координированного целевого синтеза управления группой управляемых объектов, совершающих совместное движение к целевому множеству. Разрабатываемые подходы к решению опираются на развитые им ранее теорию и методы синтеза управлений системами с многозначными траекториями, учитывающие эффект нелинейности систем, недоопределенность моделей и неполноту текущих измерений в каналах обратной связи.

Обширна и многогранна научно-организационная деятельность Александра Борисовича. Он входит в состав редколлегии ряда ведущих отечественных и международных научных журналов и серий монографий издательств Springer и Birkhäuser. В качестве председателя и члена оргкомитетов и программных комитетов он принимает активное участие в организации и проведении многих международных конференций высокого уровня. Он регулярно выступает с пленарными и приглашенными докладами на престижных международных конгрессах и конференциях, с лекциями и докладами во многих ведущих университетах и научных центрах в России и за рубежом.

А. Б. Куржанский возглавляет Национальный комитет России по автоматическому управлению, он член бюро Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, член Национальных комитетов России по теоретической и прикладной механике и по системному анализу при Президиуме РАН. На протяжении ряда лет он был предсе-

дателем экспертного совета ВАК по математике и механике.

Высокий авторитет А. Б. Куржанского в международных научных кругах позволяет ему достойно представлять интересы России в международных организациях. Он давно и плодотворно работает в ИФАК (Международная федерация автоматического управления), был членом Руководящего совета ИФАК. Александр Борисович удостоен знака Почетного деятеля ИФАК. Во многом благодаря его авторитету и энергии удалось провести в России в последние годы несколько крупных международных конференций ИФАК, а также привлечь ведущих мировых специалистов к участию в ряде организуемых в нашей стране, в том числе, в Екатеринбурге, конференций по теории управления.

Работа со студентами и аспирантами всегда была в числе основных приоритетов для А. Б. Куржанского. С 1965 по 1984 гг. он работал на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького ассистентом, доцентом, профессором кафедры прикладной математики. Именно здесь раскрылся его талант педагога. Им было прочитано большое количество общих и специальных курсов по современным разделам математики. Увлеченность и эрудиция, глубина и оригинальность изложения материала всегда привлекали студентов на его лекции и семинары. Среди учеников Александра Борисовича более 30 докторов и кандидатов наук (в их числе несколько заведующих кафедрами и профессоров ведущих вузов), успешно занимающихся математическими исследованиями и преподавательской деятельностью в России и за рубежом.

Возглавив в 1992 г. созданную им кафедру системного анализа на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, А. Б. Куржанский за короткий период времени сумел собрать команду высококлассных специалистов, разработать программы и организовать обучение студентов по ряду новых перспективных направлений теории управления и системного анализа. На кафедре уделяется большое внимание не только теоретическим вопросам, но и приложениям системного анализа в механике, биологии, экологии, экономике и финансах. Кафедра стала одной из лучших и весьма популярна среди студентов на факультете. Все более заметную роль в жизни кафедры системного анализа играют молодые доценты и ассистенты, ее выпускники. Они неоднократно отмечались стипендиями и грантами для молодых ученых. Несмотря на большую занятость административной и научной работой, сам А. Б. Куржанский по сей день несет значительную лекционную нагрузку, читая для студентов кафедры несколько спецкурсов.

А. Б. Куржанский возглавляет известную научную школу по теории управления, в работе которой принимают участие сотрудники и аспиранты кафедры а также его ученики из Екатеринбурга. В 1999 г. А. Б. Куржанскому присвоено звание “Заслуженный профессор Московского государственного университета”.

Все прошедшие годы и поныне А. Б. Куржанский поддерживает тесные контакты с ИММ УрО РАН, городом Екатеринбург и Свердловской областью. Он руководит научной тематикой отдела оптимального управления Института, состоящего из его учеников (среди которых 6 докторов наук), возглавляет ряд проектов, реализуемых в отделе. Ученики Александра Борисовича и руководство Института всегда ощущали его искреннюю заинтересованность и деятельное участие в делах, постоянную поддержку и помощь при решении многих научных и организационных вопросов.

А. Б. Куржанского отличает широта интересов и незаурядная эрудиция. Он прекрасно разбирается во многих вопросах, не связанных непосредственно с его работой, является тонким ценителем классической музыки и литературы, знатоком мировой и отечественной истории. А. Б. Куржанский всегда был и остается настоящим патриотом России, глубоко и искренне переживающим за судьбу страны и происходящие в ней процессы.

Александр Борисович встречает свой юбилей полным творческой энергии, новых идей и планов, активно продолжая плодотворную научную и педагогическую работу.

Коллектив Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, редколлегия журнала, ученики, коллеги и друзья сердечно поздравляют Александра Борисовича со славным юбилеем, желают ему крепкого здоровья, новых творческих свершений и успехов!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О построении методом моментов оптимального управления, минимизирующего среднеквадратичную ошибку // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25, № 5. С. 624–630.
2. Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой, зависящей от управления // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 2. С. 204–213.
3. О вычислении оптимального управления в системе с неполной информацией // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, №3. С. 360–373.
4. К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 298–303 (совм. с Н.Н. Красовским).
5. Задачи об управлении для системы дифференциальных уравнения с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, № 6. С. 1121–1124.
6. Об аппроксимации нестационарных управляемых систем с запаздыванием по времени // Международный конгресс математиков: тез. кратких науч. сообщ. Москва, 1966. С. 13 (совм. с Э.Г. Альбрехтом и др.).
7. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2104.
8. К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, № 2. С. 194–202 (совм. с Ю.С. Осиповым).
9. К теории оптимального управления при ограничениях на переменные состояния // 4-й Междунар. конгр. по автомат. управлению: тр. Варшава: ИФАК, 1969 (совм. с Ю.С. Осиповым).
10. Об оптимальном управлении при стесненных координатах // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, № 4. С. 705–719 (совм. с Ю. С. Осиповым).
11. К управлению линейной системой обобщенными воздействиями // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 8. С. 1360–1370 (совм. с Ю.С. Осиповым).
12. К управляемости в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 9. С. 1715–1718.
13. Об одной задаче управления при ограниченных координатах. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1970. № 5. С. 22–28 (совм. с Ю.С. Осиповым).
14. О некоторых задачах наблюдения и управления в случайных обстоятельствах // Автоматика и телемеханика. 1970. № 12. С. 15–25 (совм. с И.Я. Кацем).
15. К задачам программного преследования в линейных системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1970. № 3. С. 18–29 (совм. с Ю. С. Осиповым).
16. О двойственности задач оптимального управления и наблюдения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 3. С. 429–439.
17. Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 3. С. 491–494.
18. О существовании решений уравнений с последствием // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1800–1809.
19. К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений - I // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 9. С. 1591–1602 (совм. с М.И. Гусевым).
20. К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений - II // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 10. С.1789–1800 (совм. с М.И. Гусевым).
21. О двойственности статистических задач оптимального управления и наблюдения // Автоматика и телемеханика. 1971. № 3. С. 12–21 (совм. с И.Я. Кацем).
22. Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 8. С. 1398–1409.
23. Дифференциальные игры наблюдения // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 3. С. 527–530.
24. К теории позиционного наблюдения. Общие соотношения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 5. С. 20–31.
25. К задачам оптимального наблюдения // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 5. С. 771–786 (совм. с И.Я. Кацем).
26. Оптимальные системы сочетания управления и наблюдения // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, № 1. С. 12–24.
27. Задачи наблюдения и дифференциальные игры // Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1974. С. 138–188.

28. Программное управление по неполным данным // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 12. С. 2162–2172.
29. On minmax control and estimation strategies under incomplete information // Problems of Contr. Inform. Theory. 1975. Vol. 4, № 3. P. 205–218.
30. Оптимальные системы с импульсными управлениями // Дифференц. игры и задачи управления. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1975. С. 131–156.
31. Минимаксное оценивание в многошаговых системах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 3. С. 535–538 (совм. с И.Я. Кацем).
32. On multicriterial solutions in game-theoretic problems of control // IIASA Proc. Workshop Decision Making with Multiple Conflicting Objectives. Laxenburg, 1975. Vol. 2. P. 51–67 (with M. I. Gusev).
33. Control and parameter estimation for systems with distributed parameters // Proc. 6th IFAC Congress. Boston, 1975.
34. Оптимальные управления ансамблем траекторий // Игровые задачи управления. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1976. С. 53–68 (совм. с О.И. Никоновым).
35. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях I // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 8. С. 1434–1446 (совм. с И.Я. Пищулиной).
36. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях II // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 9. С. 1568–1579 (совм. с И.Я. Пищулиной).
37. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях III // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С. 2149–2158 (совм. с И.Я. Пищулиной).
38. Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, № 1. С. 3–13 (совм. с Б.И. Ананьевым и Г.С. Шелементьевым).
39. О ситуациях равновесия в многокритериальных игровых задачах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, № 6. С. 1295–1298 (совм. с М.И. Гусевым).
40. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
41. Об информационных множествах управляемых систем // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 11. С. 1957–1965.
42. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 79–87 (совм. с И.Я. Кацем).
43. Об информационных множествах управляемой системы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 1. С. 14–17.
44. Динамические задачи принятия решений в условиях неопределенности // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. С. 197–235.
45. Multicriterial game-theoretic problems of control for systems with incomplete information // Link Sci. and Appl. Automatic Control.: Proc. 7th Triennial World Congress IFAC (Helsinki, 1978). Oxford, 1979. Vol. 2. P. 1041–1048 (with M.I. Gusev).
46. Dynamic control system estimation under uncertainty conditions. I // Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform. 1980. Vol. 9, no. 6. P. 395–406.
47. Dynamic control system estimation under uncertainty conditions. II // Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform. 1981. Vol. 10, no. 1. P. 33–42.
48. Estimation of control system dynamics under uncertainty in parameters and inputs // Contr. Sci. Technol. Progr. Soc.: Proc. 8th Triennial World Congress IFAC (Kyoto, 1981). Oxford, 1982. Vol. 1. P. 655–661.
49. On evolution equations in estimation problems for systems with uncertainty. Laxenburg, 1982. 10 p. (Working Paper / IIASA; WP-82-49).
50. Evolution equations for problems of control and estimation of uncertain systems // Proc. of the Int. Congress of Mathematicians. Warszawa, 1983. P. 1381–1402.
51. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 72–93 (совм. с А.С. Коцеевым).
52. Оптимального управления математическая теория // Мат. энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 38–41.
53. Оптимальное управление // Мат. энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 41–42.
54. Оптимальное управление позиционное // Мат. энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 42–47.
55. Оптимальное управление программное // Мат. энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 47–51.
56. Понtryгина принцип максимума // Мат. энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 487–489.
57. On adaptive processes in problems of guaranteed control // Prepr. 9th World Congress IFAC (Budapest, 1984). Vol. 5. P. 176–180 (with O.I. Nikonov).

58. Об аналитическом описании множества выживающих траекторий дифференциальной системы // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 4. С. 183–184.
59. Об оценивании распределенных полей по результатам наблюдений // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. Междунар. конф. (Новосибирск, 1983). Новосибирск, 1986. С. 102–108 (совм. с А.Ю. Хапаловым).
60. Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1047–1050.
61. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41 (совм. с Т.Ф. Филипповой).
62. Inverse problems in multiobjective dynamic optimization // Lect. Notes Econ. and Math. Systems. 1986. Vol. 285. P. 374–382.
63. Об адаптивных процессах гарантированного управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1986. № 4. С. 3–15 (совм. с О. И. Никоновым).
64. On the solution sets for uncertain systems with phase constraints // Stochastic Optimization / eds. V. Arkin, A. Shirayev, R. Wets. Berlin etc.: Springer, 1986. P. 675–687. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 81.)
65. The nonlinear filtering problem for a multistage system with statistical uncertainty // Proc. of the II IFAC Symposium on Stochastic Control (Vilnius, 1986.) 1987. P. 189–194 (with B.I. Anan'ev).
66. On the state estimation problem for distributed systems // Analysis and Optimization of Systems / eds. A. Bensoussan, J.L. Lions. Berlin etc.: Springer, 1986. 102–113. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 83.)
67. Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научн.-техн. прогресс. М.: Наука, 1987. Т. 1. С. 187–195 (совм. с М.И. Гусевым).
68. Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315 (совм. с Т.Ф. Филипповой).
69. Inverse problems in multiobjective dynamic optimization // Toward Interactive and Intelligent Decision Support Systems / eds. Y. Sawaragi, K. Inoue, H.V. Nakayama. Berlin etc.: Springer, 1987. P. 374–382. (Ser. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems; vol. 285.)
70. On the set-valued calculus in problems of viability and control for dynamic processes: the evolution equation. Laxenburg, 1988. 25 p. (Working Paper / IIASA; WP-88-091) (with T.F. Filippova).
71. Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusion: the evolution equation // Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform. 1988. Vol. 17, no. 3. P. 137–144 (with T.F. Filippova).
72. On stochastic filtering approximations of estimation problems for systems with uncertainty // Stochastics. 1988. Vol. 23. P. 109–130.
73. Identification – a theory of guaranteed estimates. Laxenburg, 1988. 78 p. (Working Paper / IIASA; WP-88-55).
74. Set-valued calculus in problems of adaptive control // Modelling and Adaptive Control / ed. A.B. Kurzhanski and Ch.I. Byrnes. Berlin etc.: Springer, 1988. P. 189–200. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 105.)
75. Set-valued solutions to control problems and their approximation // Analysis and Optimization of Systems / eds. A. Bensoussan, J.L. Lions. Berlin etc.: Springer, 1988. P. 775–785. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Systems; vol. 111) (with I. Vályi).
76. Identification – a theory of guaranteed estimates // From Data to Model / ed. J.C. Willems. Berlin etc.: Springer, 1989. P. 135–214.
77. On the set-valued calculus in problems of viability and control for dynamic processes: the evolution equation // Les Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non-lineaire. Paris: Bordas, 1989. P. 339–363 (with T.F. Filippova).
78. On a unified framework for deterministic and stochastic treatment of identification problems. Laxenburg, 1989. 39 p. (Working Paper / IIASA; WP-89-013) (with M. Tanaka).
79. Noninvertible evolution systems: guaranteed estimates and the regularization problem. Laxenburg, 1989. 10 p. (Working Paper / IIASA; WP-89-058) (with I.F. Sivergina).
80. Optimal inputs for guaranteed identification. Laxenburg, 1989. 12 p. (Working Paper / IIASA; WP-89-108) (with B.N. Pschenichnyi and V.G. Pokotilo).
81. Observers for distributed systems // Proc. IFAC Symp. on Distributed Parameter Systems (Perpignan, 1987). New York: Pergamon Press, 1989. P. 481–484 (with A.Yu. Khapalov).

82. Identification – deterministic versus stochastic models // Publ. Österr. Zeitschrift für Statistik und Informatik. 1989. Vol. 1, (19 Jg.). P. 30–56 (with M. Tanaka).
83. К задаче синтеза стратегии управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 4. С. 788–793 (совм. с О.И. Никоновым).
84. О необратимых эволюционных системах: гарантированное оценивание и задачи регуляризации // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 2. С. 292–296 (совм. с И.Ф. Сивергиной).
85. Funnel equations and multivalued integration problems for control synthesis // Perspectives in Control Theory: Proc. of the Sielpia Conf. (Sielpia, 1988) / eds. B. Jakubczyk, K. Malanowski, W. Respondek. 1990. P. 143–153 (Ser. Progress in Systems and Control Theory by Birkhäuser) (with O. Nikonov).
86. Mathematical problems motivated by environmental monitoring // Proc. 11th Triennial World Congress IFAC. Tallinn, 1990 (with A. Khapalov).
87. The state estimation problem for parabolic systems // Estimation and Control of Distributed Parameter Systems: Proc. of an Intern. Conf. (Vorau, 1990). Basel: Birkhäuser, 1991. P. 219–246. (Ser. Intern. Series of Numerical Mathematics; vol. 100) (with A.Yu. Khapalov).
88. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
89. Optimal inputs for guaranteed identification // Problems of Control and Information Theory. 1991. Vol. 20, no. 1. P. 13–23 (with B.N. Pschenichnyi and V.G. Pokotilo).
90. О методе сингулярных возмущений для дифференциальных // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 3. С. 454–459 (совм. с Т.Ф. Филипповой).
91. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: the problems of control synthesis // Dynamics and Control. 1991. No. 1. P. 357–378 (with I. Vályi).
92. On the inverse problems for evolutionary systems: Guaranteed estimates and the regularized solutions // Modelling and Inverse Problems of Control for Distributed Parameter Systems: Proc. of IFIP (W.G.7.2)-PIASA Conf. (Laxenburg, 1989). Berlin etc.: Springer, 1991. P. 93–101 (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 154) (with I.F. Sivergina).
93. Ellipsoidal techniques for control synthesis // Nonlinear Synthesis / eds. Ch.I. Byrnes and A.B. Kurzhanski. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 169–184 (with I. Vályi).
94. An observation theory for distributed systems // J. Math. Systems Estim. Control. 1991. Vol. 1, no. 4. P. 389–440 (with A. Khapalov).
95. Ellipsoidal techniques: the problem of control synthesis. Laxenburg, 1991. 27 p. (Working Paper / PIASA; WP-91-003) (with I. Vályi).
96. Ellipsoidal techniques: control synthesis for uncertain systems. Laxenburg, 1991. 30 p. (Working Paper / PIASA; WP-91-007) (with I. Vályi).
97. Ellipsoidal techniques: guaranteed state estimation Laxenburg, 1991. 21 p. (Working Paper / PIASA; WP-91-21) (with I. Vályi).
98. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: Control synthesis for uncertain systems // Dynamics and Control. 1992. No. 2. P. 87–111 (with I. Vályi).
99. ϵ -наблюдаемость систем с распределенными параметрами // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. С. 122–137 (совм. с И.Ф. Сивергиной).
100. Quasiinversion, regularization and the observability problem. Laxenburg, 1992. 25 p. (Working Paper / PIASA; WP-92-14) (with I. F. Sivergina).
101. Метод гарантированных оценок и задачи регуляризации для эволюционных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 11. С. 1720–1733 (совм. с И.Ф. Сивергиной).
102. Perturbation techniques for viability and control // System Modelling and Optimiz: Proc. 15th IFIP Conf. (Zurich, 1991). Berlin etc.: Springer, 1992. P. 394–403. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 180) (with T.F. Filippova).
103. Ellipsoidal calculus, singular perturbations and the state estimation problems for uncertain systems. Laxenburg, 1992. 19 p. (Working Paper / PIASA; WP-92-51) (with T.F. Filippova, K. Sugimoto, I. Vályi).
104. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 5. С. 578–581 (совм. с О.И. Никоновым).
105. Set-valued analysis and differential inclusions / eds. A.B. Kurzhanski, V.M. Veliov Boston: Birkhäuser, 1993. 199 p. (Ser. Progr. Systems Control Theory; vol. 16).
106. On the theory of trajectory tubes – a mathematical formalism for uncertain dynamics, Viability and Control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia / ed. A.B. Kurzhanski. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 122–188. (Ser. Progr. Systems Control Theory; vol. 17) (with T.F. Filippova).

107. On viable tubes generated by synthesized decision strategies for uncertain systems. Laxenburg, 1993. 11 p. (Working Paper / IIASA; WP-93-312) (with O.I. Nikonov).
108. On the stabilization of uncertain differential systems // Comparison Methods and Stability Theory (Waterloo, ON, 1993). New York: Dekker, 1994. P. 217–225. (Ser. Lecture Notes in Pure and Appl. Math.; vol. 162).
109. Guaranteed State Estimation for Dynamic Systems: Ellipsoidal Techniques // Internat. J. Adapt. Control Signal Process. 1994. Vol. 8, no. 1. P. 85–101 (with K. Sugimoto and I. Vályi).
110. Evolution equations for pencils of trajectories of synthesized control systems // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 1994. Vol. 48, no. 3. P. 606–611 (with O. I. Nikonov).
111. Modeling techniques for uncertain systems / eds. A.B. Kurzhanski, V.M. Veliov. Boston: Birkhäuser, 1994. 288 p. (Ser. Progr. Systems Control Theory; vol. 18).
112. Гарантированное оценивание распределенных процессов по результатам наблюдений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1995. № 1. С. 33–40.
113. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. МИАН. 1995. Vol. 211. С. 304–315 (совм. с Т.Ф. Филипповой).
114. Nonlinear filtering: the set-membership (bounding) and the H-infinity techniques // Proc. 3th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design. Oxford: Pergamon Press, 1995. P. 409–418 (with J.S. Baras).
115. Theoretical framework and approximation techniques for parallel computation in set-membership state estimation // IMACS Multiconf. Proc. of Symposium on Modelling, Anal. and Simulation (CESA'96). Lille, 1996. Vol. 2. P. 849–854 (with E.K. Kostousova).
116. Ellipsoidal state estimation for uncertain dynamical systems // Bounding Approaches to System Identification / eds. by M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, E. Walter. New York: Plenum Press, 1996. P. 213–238 (with T.F. Filippova, K. Sugimoto, I. Vályi).
117. Ellipsoidal calculus for estimation and feedback control // Systems and Control in the Twenty-First Century (St. Louis, MO, 1996). Boston: Birkhäuser, 1997. P. 229–243.
118. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p. (Ser. Systems and Control: Foundations and Applications) (with I. Vályi).
119. Гарантированные оценки точности вычисления в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 1. С. 19–27 (совм. с Е.К. Костоусовой).
120. Set-valued calculus and dynamic programming in problems of feedback control // Variational Calculus, Optimal Control and Applications: Proc. Intern. Conf. (Trassenheide, 1996). Basel: Birkhäuser Verlag, 1998. P. 163–174. (Ser. Intern. Series of Numerical Math.; vol. 124).
121. Метод динамического программирования в обратных задачах оценивания для распределенных систем // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 2. С. 161–166 (совм. с И.Ф. Сивергиной).
122. Динамическое программирование в задачах идентификации систем с распределенными параметрами // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 6. С. 899–912 (совм. с И.Ф. Сивергиной).
123. Mathematical models for simulation of environmental monitoring systems // Proc. of the 1998 Conf. on Mission Earth: Modeling and Simulation of the Earth System: 1998 Western Multiconference. San Diego, 1998. P. 89.
124. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
125. Two approaches to viability and set-membership state estimation // Dynamics and Control. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. P. 93–100. (Ser. Stability and control; vol. 9.)
126. Systems and decision sciences: the research methodology for sustainable development // Systems Analysis Modelling Simulation. 2000. Vol. 39, № 3. P. 381–391.
127. Теория синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 69–100 (совм. с Н.Б. Мельниковым).
128. Достижимость при постоянно действующих возмущениях // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 4. С. 446–450 (совм. с П. Варайя).
129. Ellipsoidal techniques for reachability analysis // Proc. Pittsburg conf. “Hybrid systems–2000”. Berlin etc.: Springer, 2000. P. 202–214. (Ser. Lecture Notes in Computer Science; vol. 1790) (with P. Varaiya).
130. Ellipsoidal techniques for reachability analysis: internal approximation // System Control Lett. 2000. Vol. 41, no. 3. P. 201–211 (with P. Varaiya).
131. On the state estimation problem under mixed uncertainty // Proc. MTNS-2000. Perpignan, 2000. 6 p. (with I.A. Digailova).

-
132. The information states in the boundary control inverse problem of parabolic type // *Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде: тез. докл. конф.* Екатеринбург, 2000. С. 40 (with I.F. Sivergina, M.M. Sorokina).
 133. Dynamic optimization for reachability problems // *J. Optim. Theory Appl.* 2001. No. 2. P. 227–251 (with P. Varaiya).
 134. Ellipsoidal techniques for reachability problems under nonellipsoidal constraints // *Proc. NOLCOS-01.* St. Petersburg, 2001. P. 735–740 (with M.N. Kirilin).
 135. A nonlinear state estimation problem under mixed uncertainty // *Proc. NOLCOS-01.* St. Petersburg, 2001. Vol. 2. P. 547–552 (with I.A. Digailova).
 136. Нелинейный синтез управления при двойных ограничениях // *Дифференц. уравнения.* 2001. Т. 37, № 11. С. 1474–1484 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 137. On reachability under uncertainty // *SIAM J. Control Optim.* 2002. Vol. 41, no. 1. P. 181–216 (with P. Varaiya).
 138. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations // *Optim. Methods Softw.* 2002. Vol. 17, no. 2. P. 177–206 (with P. Varaiya).
 139. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: Internal approximations. Box-valued Constraints // *Optim. Methods Softw.* 2002. Vol. 17, no. 2. P. 207–237 (with P. Varaiya).
 140. Reachability analysis for uncertain systems – the ellipsoidal technique // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B.* 2002. Vol. 9, no. 3. P. 347–367 (with P. Varaiya).
 141. Reachability under state constraints – the ellipsoidal technique // *Proc. 15th Triennial World Congress.* Barcelona, 2002. P. 306. (with P. Varaiya).
 142. The principle of optimality in measurement feedback control for linear systems // *Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization* / eds.: A. Rantzer, C. Byrnes. Berlin etc.: Springer, 2003. P. 193–202. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 286).
 143. Управление в условиях неопределенности при двойных ограничениях // *Дифференц. уравнения.* 2003. Т. 39. № 11. С. 1474–1486 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 144. An inverse problem for the telegraph equation // *System Modeling and Optimization: Proc. of the 21st IFIP TC7 (Sophia, 2003)* / eds. J. Cagnol, J.-P. Zolesio. Berlin etc.: Springer, 2005. P. 177–190. (Ser. IFIP Advances in Information and Communication Technology; vol. 166) (with M. M. Sorokina).
 145. О синтезе управлений по результатам измерений // *Прикл. математика и механика.* 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 547–563.
 146. On some nonstandard dynamic programming problems of control theory // *Variational Methods and Applications* / eds. F. Giannessi, A. Maugeri. New York: Kluwer Acad. Pub., 2004. P. 613–627 (with P. Varaiya).
 147. Задача достижимости при стохастических возмущениях // *Дифференц. уравнения.* 2004. Т. 40. № 11. С. 1495–1499 (совм. с И.А. Дигаевой).
 148. Control synthesis for state constrained and obstacle problems // *Proc. of NOLCOS-04.* Stuttgart: Elsevier Science, 2004. P. 813–818 (with I.M. Mitchell, P. Varaiya).
 149. Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений. 1. Обыкновенные системы // *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41, № 1. С. 12–22.
 150. The diagnostics of safety zones in motion planning // *Optim. Methods Softw.* 2005. Vol. 20, no. 2–3. P. 231–239.
 151. О задачах синтеза управлений по реально доступной информации // *Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика.* 2005. Вып. спец. С. 113–122.
 152. Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41, № 11. С. 1491–1500 (совм. с А.Н. Дарьиным, А.И. Селезевым).
 153. Nonlinear control synthesis under double constraints // *Proc. of 16th IFAC World Congress.* Prague, 2005. P. 440 (with A.N. Daryin).
 154. Reachability analysis under control-dependent stochastic noise // *Proc. of 16th IFAC World Congress.* Prague, 2005. P. 202 (with I.A. Digailova).
 155. Метод динамического программирования в задачах синтеза управлений // *Сб. тр. конф. “Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика)”.* Минск, 2005. Т. 2. С. 51–65 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 156. On some nonstandard dynamic programming problems of control theory // *Nonconvex optimization and its applications* / eds. F. Giannessi, A. Mangeri. Berlin etc.: Springer, 2005. P. 589–603. (Ser. Nonconvex Optimiz. and Its Appl.; vol. 79) (with P. Varaiya).

-
157. A dynamic programming approach to the impulse control synthesis problem // Proc. of Joint 44th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. (ECC 2005). Seville, 2005. P. 8215–8220 (with A.N. Daryin, A.V. Seleznev).
 158. Reachability under uncertainty and measurement noise // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 183–194 (with P. Varaiya).
 159. Ellipsoidal techniques for hybrid dynamics: the reachability problem // New directions and applications in control theory / eds. Wijesuriya Dayawansa, Anders Lindquist, Yishao Zhou. Berlin etc.: Springer, 2005. P. 193–205. (Ser. Lecture Notes in Control and Inform. Sci.; vol. 321.)
 160. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона — Якоби в теории управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
 161. Успокоение многосвязной колебательной системы в условиях неопределенных возмущений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 11. С. 1452–1463 (совм. с И.В. Востриковым, А.Н. Дарьиным).
 162. Задачи динамики и управления в гибридных системах // Тр. Междунар. сем. “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. Т. 1. С. 1–16 (совм. с П. Варайя).
 163. Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems // J. Optim. Theory Appl. 2006. Vol. 128, no. 3. P. 499–521 (with I.M. Mitchell, P. Varaiya).
 164. Ellipsoidal techniques for reachability under state constraints // SIAM J. Control Optim. 2006. Vol. 45, no. 4. P. 1369–1394 (with P. Varaiya).
 165. О синтезе систем с импульсным управлением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 4. С. 2–12.
 166. Синтез управлений в классе обобщенных функций высших порядков // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1443–1453 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 167. Closed-loop impulse control of oscillating systems // Proc. of 3rd IFAC Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO’07). St. Petersburg, 2007. P. 169–201. (with A.N. Daryin).
 168. On the Hamiltonian techniques for designing nonlinear observers under set-membership uncertainty // Prepr. of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Pretoria, 2007. P. 633–638 (with M.I. Gusev).
 169. The Hamilton–Jacobi equations for nonlinear target control and their approximation // Analysis and Design of Nonlinear Control Systems (in Honor of Alberto Isidori). Berlin etc.: Springer, 2008. P. 77–90 (with P. Varaiya).
 170. Dynamic programming for impulse controls // Annual Reviews in Control. 2008. Vol. 32, no. 2. P. 213–227 (with A.N. Daryin).
 171. Impulse control inputs and the theory of fast feedback control // Proc. of 17th World Congress IFAC. Seoul, 2008. P. 4869–4874 (with A.N. Daryin).
 172. Stochastic reachability and measurement feedback // Proc. of 17th World Congress IFAC. Seoul, 2008. P. 14336–14341 (with I. A. Digailova, P. Varaiya).
 173. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1523–1533 (совм. с П. А. Точилиным).
 174. Задача управлением групповым движением. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 1. С. 20–25.
 175. Импульсные управления в моделях гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 716–727 (совм. с П. А. Точилиным).
 176. The control of linear systems under feedback delays // Vienna Conf. of Math. Modelling (MATHMOD 2009). Vienna, 2009. P. 451–459 (with A.N. Daryin, I.V. Vostrikov).
 177. Output feedback strategies for systems with impulsive and fast controls // Proc. of the 48th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC-09). Shanghai, 2009. P. 2801–2806 (with A.N. Daryin, I.A. Digailova).
 178. Избранные труды А.Б. Куржанского. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
 179. О задаче синтеза импульсных управлений по результатам измерений // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Vol. 15, № 3. С. 92–105 (совм. с А.Н. Дарьиным, И.А. Дигайловой).
 180. О синтезе импульсных управлений и теории быстрых управлений // Тр. МИАН. 2010. Vol. 268. С. 215–230.
 181. Hamiltonian techniques for the problem of set-membership state estimation // Internat. J. Adapt. Control Signal Process. 2010. Vol. 25, no. 3. P. 249–263.
 182. Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управлений ими // Проблемы управления и информатики. 2010. № 1. С. 5–21 (совм. с В.М. Кунцевичем)

-
183. On the problem of output feedback control under set-membership uncertainty // Proc. of the 8th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS-10). Bologna: Elsevier, 2010. P. 60–65 (with P. Varaiya).
 184. On synthesizing team target controls under obstacles and collision avoidance // J. Franklin Inst. 2010. Vol. 347, no. 1. P. 130–145 (with P. Varaiya).
 185. Роль макромоделирования в активном управлении транспортной сетью // Тр. МФТИ. 2010. Том 2, № 4. С. 100–118 (совм. А.А. Куржанским, П. Варайя).
 186. О синтезе целевого управления в классе импульсных воздействий при фазовых ограничениях // Proc. 5th Intern. Symp. “Generalized Statements and Solutions of Control Problems” (GSSCP-2010). Уланбатор, 2010. P. 132–135 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 187. Output feedback observers and control under non-Gaussian types of noise // Proc. of 19th Intern. Symp. on Math. Theory of Networks and Systems (MTNS 2010). Budapest, 2010. P. 69–72 (with I.A. Digailova).
 188. Output feedback control under set-membership uncertainty // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 151, no. 1. P. 11–32 (with P. Varaiya).
 189. Быстрые воздействия в задаче синтеза управлений при неопределенности // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 963–971 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 190. К задаче синтеза управлений при неопределенности по данным финитных наблюдателей // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1599–1607 (совм. с П.А. Точилиным).
 191. On the theory of fast controls under disturbances // Proc. of 18th IFAC World Congress. Milano, 2011. P. 3486–3491 (with A. Daryin and Y. Minaeva).
 192. Attenuation of uncertain disturbances through fast control inputs // Special Intern. Conf. on Complex Systems: Synergy of Control, Computing and Communications (COSY 2011). 2011. P. 49–52 (with A.N. Daryin).
 193. Estimation of reachability sets for large-scale uncertain systems: from theory to computation // Proc. of the 51st IEEE Conf. on Decision and Control (CDC 2012). Maui, 2012. P. 7401–7406 (with A.N. Daryin).
 194. The mathematics of impulse control // Proc. of the 20th Intern. Symp. on Math. Theory of Networks and Systems (MTNS 2012): Abstracts Book. Melbourne, 2012. P. 1–4 (with T.F. Filippova).
 195. Метод вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределенных возмущениях // Докл. РАН. 2012. Т. 446, № 6. С. 607–611 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 196. Оптимальное управление эллипсоидальными движениями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1525–1532 (совм. с А.И. Месяцем).
 197. О задаче управления эллипсоидальным движением // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 168–177.
 198. Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределенных возмущениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 1. С. 47–57 (совм. с А.Н. Дарьиным).
 199. Output feedback guaranteed tracking control through finite observers // Proc. of the 52nd IEEE Conf. on Decision and Control (CDC 2013). Florence, 2013. P. 4448–4453 (with P.A. Tochilin).
 200. Ellipsoidal motions for applied control: from theory to computation // Proc. of the 52nd IEEE Conf. on Decision and Control (CDC 2013). Florence, 2013. P. 5816–5821 (with A.I. Mesyats).
 201. Nonlinear feedback types in impulse and fast control // Proc. of the 9th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2013). Toulouse, 2013. С. 235–240 (with A. N. Daryin).
 202. Задача слежения в пределах интервала времени по данным финитных наблюдателей // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 656–666 (совм. с П.А. Точилиным).
 203. The specifics of closed-loop impulse control // Prepr. of the 19th Word Congress IFAC (Cape Town, 2014). P. 1655–1660 (with A.N. Daryin).
 204. The mathematics of team control // Proc. of the 21st Intern. Symp. on Math. Theory of Networks and Systems (MTNS 2014). Groningen, 2014. С. 1755–1758 (with A.I. Mesyats).
 205. Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 404–414 (совм. с А.И. Месяцем).
 206. О задаче группового управления в условиях препятствий // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 166–179.
 207. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (with P. Varaiya). (Ser. Systems and Control: Foundations and Applications; vol. 85) (with P. Varaiya).

УДК 517.977

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ОБРАТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

Б. И. Ананьев

Рассмотрена задача оценивания для обратного стохастического дифференциального уравнения в присутствии статистически неопределенных помех. Используется подход из теории гарантированного оценивания. Предполагается, что статистически неопределенные помехи совместно с некоторыми процессами, входящими в уравнение, стеснены интегральными ограничениями. В линейном случае доказана теорема об аппроксимации случайных информационных множеств детерминированными при стремлении коэффициентов диффузии к нулю. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: обратное стохастическое дифференциальное уравнение, броуновское движение, случайное информационное множество.

V. I. Anan'ev. On the estimation of backward stochastic differential equations.

We consider an estimation problem for a backward stochastic differential equation in the presence of statistically indeterminate noise. We use the approach of the theory of guaranteed estimation and assume that the statistically indeterminate noise, as well as some processes entering the equation, is subject to integral constraints. In the linear case, we prove a theorem on the approximation of random information sets by deterministic sets as the diffusion coefficient vanishes. Examples are considered.

Keywords: backward stochastic differential equation, Brownian motion, random information set.

Введение

Рассмотрим вначале один из возможных подходов гарантированного оценивания [1] в применении к детерминированному n -векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \quad (0.1)$$

удовлетворяющему условиям существования и единственности решения. Пусть заданы m -векторное уравнение измерения и ограничение на неопределенные параметры $(x_0, w(\cdot))$ в следующем виде:

$$y(t) = g(t, x(t)) + w(t), \quad F(x_0) + \int_0^T f_0(t, w(t)) dt \leq 1, \quad (0.2)$$

где $F(\cdot)$ и $f_0(\cdot, \cdot)$ — неотрицательные измеримые функции. Введем функцию

$$V(t, x) = F(x_0) + \int_0^t f_0(\tau, y(\tau) - g(\tau, x(\tau))) d\tau, \quad x(t) = x.$$

Формально дифференцируя эту функцию в силу уравнения (0.1), приходим к уравнению в частных производных

$$V_t = -f'(t, x)V_x + f_0(t, y(t) - g(t, x)), \quad V(0, x) = F(x). \quad (0.3)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00120) и Программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 12-П-1-1019).

Предположим, что существует единственное решение уравнения (0.3) в классическом смысле, т. е. $V(t, x)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению всюду при всех возможных t, x . Тогда информационное множество (далее ИМ) $\mathcal{X}(t, y)$ можно описать [1; 2, формула (2.2)] неравенством

$$\mathcal{X}(t, y) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(t, x) \leq 1\}. \quad (0.4)$$

Однако нетрудно заметить, что никаких свойств гладкости от функции $V(t, x)$ можно не требовать и считать соотношение (0.4) просто определением ИМ. Тем не менее уравнение (0.3) в ряде случаев все же будет выполняться в обобщенном смысле [3], при этом входящие в него функции могут быть разрывными.

Напомним, что ИМ $\mathcal{X}(t, y)$ содержит все возможные состояния $x(t) = x$, которые совместимы с проведенными измерениями вплоть до момента t и с ограничениями (0.2).

Пусть теперь в уравнение (0.1) добавлено диффузионное слагаемое, т. е. мы имеем стохастическое дифференциальное уравнение (далее СДУ)

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + Z(t)dW(t), \quad (0.5)$$

где $W(t)$ — стандартное k -мерное броуновское движение. Уравнение (0.5) будем понимать в смысле Ито [4] и считать его стохастическим “возмущением” детерминированного уравнения (0.1). Ограничения на неопределенные параметры сохраним в прежнем виде (0.2). Но в таком случае прием, связанный с построением функции $V(t, x)$, лишен смысла, поскольку уравнение (0.5), вообще говоря, нельзя решать обратно по времени. Вследствие неопределенности не проходит также и построение оптимальных оценок на основе наблюдаемых σ -алгебр, как в теории нелинейной фильтрации [5].

Один из возможных выходов из создавшейся ситуации состоит в изучении модифицированного стохастического уравнения

$$dx(t) = h(t, x(t), Z(t))dt + Z(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.6)$$

где $h(t, x, 0) = f(t, x)$, которое также можно считать стохастическим “возмущением” уравнения (0.1) и которое уже можно решать обратно по времени, изменив понятие решения. Рассмотрим решение уравнения (0.6) подробнее. Пусть стандартное k -мерное броуновское движение $W(t) = [w_1(t); \dots; w_k(t)]$ (вектор-столбец) задано на полном вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) ; $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $Z(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Относительно функции $h(\cdot, \cdot, \cdot)$ предполагается, что

$$\begin{aligned} h(\cdot, 0, 0) &\in L_n^2(0, T), \quad |h(t, x, Z) - h(t, \bar{x}, \bar{Z})| \leq \varkappa(|x - \bar{x}| + |Z - \bar{Z}|), \\ \varkappa > 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad Z, \bar{Z} \in \mathbb{R}^{n \times k}. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Здесь $|\cdot|$ — норма в пространстве $\mathbb{R}^{n \times k}$, соответствующая скалярному произведению $A \cdot B = \text{tr}AB'$ матриц, где $'$ — символ транспонирования. Таким образом, если $k = 1$, то $x \cdot y$ — обычное евклидово скалярное произведение. Зависимость процессов $x(t)$, $Z(t)$, $W(t)$ от $\omega \in \Omega$ обычно будем опускать. Свяжем с броуновским движением возрастающий поток σ -алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), s \in [0, t]\}$, который считается пополненным множествами нулевой вероятности. Здесь $\sigma\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$ — наименьшая σ -алгебра, порожденная семейством случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$.

Введем ряд обозначений. Действительный случайный процесс $p(t, \omega)$ на указанном выше вероятностном пространстве называется \mathcal{F}_t -согласованным, если функция $p(\cdot, \cdot)$ от двух переменных является $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}_T | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой, а функция $p(t, \cdot) - \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой для любого $t \in [0, T]$. Здесь и далее $\mathcal{B}(U)$ — борелевская σ -алгебра, заданная на метрическом пространстве U . Символом $L_n^2(\Omega, \mathcal{H})$ обозначим пространство функций $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, измеримых относительно под- σ -алгебры $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ и таких, что $E|\xi|^2 < \infty$, где E — математическое ожидание. Символ $L_{n, \mathcal{F}}^2(0, T)$ будет обозначать гильбертово пространство n -мерных \mathcal{F}_t -согласованных

процессов $p(t, \omega)$, для которых $E \int_0^T |p(t, \omega)|^2 dt < \infty$. Банахово пространство непрерывных по t и \mathcal{F}_t -согласованных n -мерных процессов $p(t, \omega)$, для которых $E \sup_{t \in [0, T]} |p(t, \omega)|^2 < \infty$, обозначается как $L_{n, \mathcal{F}}^2(\Omega; C(0, T))$.

Определим пространство $M(0, T) = L_{n, \mathcal{F}}^2(\Omega; C(0, T)) \times L_{n \times k, \mathcal{F}}^2(0, T)$. Мы используем следующий результат.

Теорема 1 (Янг, Зоу [6, теорема 7.3.2]). *Пусть выполнены условия (0.7). Тогда уравнение (0.6) для любого $x(T) = \xi \in L_n^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ имеет единственное \mathcal{F}_t -согласованное решение $[x(\cdot); Z(\cdot)] \in M(0, T)$, для которого*

$$x(t) = \xi - \int_t^T h(s, x(s), Z(s)) ds - \int_t^T Z(s) dW(s) \quad \forall t \in [0, T], \quad P\text{-н.н.}$$

Если $[x(\cdot); Z(\cdot)]$, $[\bar{x}(\cdot); \bar{Z}(\cdot)]$ — два решения уравнения (0.6), соответствующих разным параметрам (h, ξ) , $(\bar{h}, \bar{\xi})$ в (0.6), то справедлива оценка

$$\| [x(\cdot) - \bar{x}(\cdot); Z(\cdot) - \bar{Z}(\cdot)] \|_{M(0, T)}^2 \leq K \left\{ E |\xi - \bar{\xi}|^2 + E \int_0^T |h(s, x(s), Z(s)) - \bar{h}(s, x(s), Z(s))|^2 ds \right\}, \quad K > 0. \quad (0.8)$$

Отметим, что теорема верна и при условии зависимости \mathcal{F}_t -согласованным образом функции h от случайного элемента ω . Уравнения типа (0.6) с граничным условием на правом конце траектории называются обратными стохастическими дифференциальными уравнениями (далее ОСДУ). В отличие от прямых СДУ вида (0.5) решение ОСДУ представляется парой согласованных процессов. Обратные СДУ впервые рассмотрены в работе [7] в связи с доказательством стохастического принципа максимума. Отметим также, что ОСДУ находят применение в задачах финансовой математики.

Настоящая работа представляет собой расширенное и дополненное изложение результатов, анонсированных в [8]. Кроме того, здесь добавлены результаты по оцениванию прямых обратных СДУ.

1. Постановка задачи

Предположим, что фазовый вектор $x(t)$ уравнения (0.6) недоступен для наблюдения. Измеряется m -мерный вектор

$$y(t) = g(t, x(t)) + \eta(t) \quad (1.1)$$

со статистически неопределенной помехой $\eta \in L_{m, \mathcal{F}}^2(0, T)$, стесненной вместе с параметрами $(x_0, Z(\cdot))$ уравнения (0.6) априорными ограничениями

$$J(x_0, \eta(\cdot), Z(\cdot)) = F(x_0) + E \int_0^T \{Q_1(t, \eta(t)) + Q_2(t, Z(t))\} dt \leq 1, \quad (1.2)$$

где $F(\cdot)$, $Q_i(\cdot, \cdot)$, $i = 1, 2$, — неотрицательные борелевские функции. Для функций в (1.2) допускаются и бесконечные значения, для того чтобы охватить случай геометрических ограничений.

Функция $g(t, x)$ в (1.1) обычно предполагается глобально липшицевой по x и измеримой по t . Поскольку наблюдаемый процесс (1.1) не является, вообще говоря, процессом Ито и статистика помехи неопределенная, стохастический подход, связанный с формированием наблюдаемых σ -алгебр $\mathcal{F}_t^y = \sigma\{y(s), s \in [0, t]\}$ и нахождением условного среднего $E(x(t) | \mathcal{F}_t^y)$ из

уравнений нелинейной фильтрации [5], неприменим. Но так как уравнение (0.6) допустимо решать обратно по времени, можно использовать тот же подход, что и для уравнения (0.1). Для определенного класса линейных систем он реализован в работе [9].

Чтобы учесть некоторую дополнительную уточняющую информацию о фазовом состоянии $x(t)$, будем считать, что задан возрастающий поток σ -алгебр $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$ такой, что $x(t) \in L_n^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_t)$. В частности, поток может порождаться некоторым прямым СДУ, содержащим, возможно, некоторые неопределенные параметры и броуновское движение $W(t)$ или его часть. Для помехи $\eta(t)$ также может быть задана уточняющая информация в виде возрастающего потока $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$ такого, что случайный процесс $\eta(\cdot) \in L_{m,\mathcal{H}}^2(0, T)$. Считается, что потоки $\tilde{\mathcal{F}}_t$ и \mathcal{H}_t удовлетворяют обычным условиям непрерывности справа и полноты множествами нулевой вероятности.

Задача 1. Пусть в системе (0.6), (1.1) реализовался случайный наблюдаемый процесс $y(\cdot)$ при некоторых элементах $\xi^* \in L_n^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_T)$ и $\eta^*(\cdot) \in L_{m,\mathcal{H}}^2(0, T)$, для которых выполняется неравенство (1.2). Нужно определить случайное информационное множество $\mathcal{X}(t, y)$, состоящее из всех векторов $x(t) \in L_n^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_t)$, для которых найдется пара $[\xi; \eta(\cdot)] \in L_n^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_T) \times L_{m,\mathcal{H}}^2(0, T)$ такая, что $J(x_0, \eta(\cdot), Z(\cdot)) \leq 1$, и выполняется равенство (1.1) P -н.н. для всех $t \in [0, T]$. Здесь параметры $x_0, x(\cdot), Z(\cdot)$ однозначно определяются из (0.6) по краевому условию $x(T) = \xi$.

Отметим, что процесс построения множества $\mathcal{X}(t, y)$ при $t < T$ иногда называют *интерполяцией*, а при $t = T$ — *фильтрацией*.

Из определения случайного информационного множества (далее СИМ) следует, что оно непусто, так как $x^*(t) \in \mathcal{X}(t, y)$. Помимо задачи 1, которую будем называть основной, рассматривается задача определения оптимальных оценок $\xi_t^0 \in \mathcal{X}(t, y)$, для которых функционал $J(x_0, \eta(\cdot), Z(\cdot))$ имеет минимально возможное значение. Если оптимальных оценок много, то их совокупность будет обозначаться $\mathcal{X}^0(t, y)$. В отличие от СИМ непустоту множества $\mathcal{X}^0(t, y)$ нужно специально устанавливать.

Приведем некоторые простые примеры.

Пример 1. Рассмотрим одномерную систему $dx(t) = z(t)dw(t)$, $x(T) = \xi$, $y(t) = x(t) + \eta(t)$, $E \int_0^T |\eta(t)|^2 dt \leq 1$ и задачу фильтрации. Здесь $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t$ и $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$. Единственным \mathcal{F}_t -согласованным решением уравнения является мартингал Леви $x(t) = E(\xi | \mathcal{F}_t)$ в виде условного математического ожидания. Действительно, по теореме о мартингальном представлении [6, теорема 1.5.7] существует единственный процесс $z(\cdot) \in L_{1,\mathcal{F}}^2(0, T)$ такой, что $E(\xi | \mathcal{F}_t) = E\xi + \int_0^t z(s)dw(s) = \xi - \int_t^T z(s)dw(s)$. Пусть $\mathcal{M}^2(0, T)$ — пространство квадратично интегрируемых непрерывных мартингалов относительно потока \mathcal{F}_t . Каждый из них имеет единственное представление в виде $E(\zeta | \mathcal{F}_t)$, где $\zeta \in L_1^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Подпространство $\mathcal{M}^2(0, T)$ замкнуто в гильбертовом пространстве $L_{1,\mathcal{F}}^2(0, T)$ [4, лемма 2, с. 280]. Представим сигнал $y(\cdot)$ в виде ортогональной суммы $y(\cdot) = \hat{y}(\cdot) + y^\perp(\cdot)$, где $\hat{y}(\cdot) = E(\hat{\zeta} | \mathcal{F}_t)$ — проекция сигнала на $\mathcal{M}^2(0, T)$. Тогда получаем

$$\mathcal{X}(T, y) = \left\{ \xi \in L_1^2(\Omega, \mathcal{F}_T); E \int_0^T \{ |y^\perp(t)|^2 + |E((\xi - \hat{\zeta}) | \mathcal{F}_t)|^2 \} dt \leq 1 \right\}.$$

Используя свойства интеграла Ито, [4, лемма 1, с. 279], второе слагаемое можно представить в виде $T|E(\xi - \hat{\zeta})|^2 + \int_0^T \int_0^t E|z(s) - \hat{z}(s)|^2 ds dt$, где $\hat{y}(t) = E\hat{\zeta} + \int_0^t \hat{z}(s)dw(s)$. Ясно, что множество $\mathcal{X}^0(T, y) = \{ \hat{\zeta} \}$ состоит из единственного элемента. Как следует из рассуждений, задача сводится к ортогональному проектированию в специфическом бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Пример 2. Дана двумерная система $dx_1 = x_2 dt + z_1(t)dw(t)$, $dx_2 = -\sin(x_1)dt + z_2(t)dw(t)$ с наблюдением $y(t) = x_2(t) + \eta(t)$ и ограничением

$$1_{X_0}(x(0)) + \mathbb{E} \int_0^T |\eta(t)|^2 dt \leq 1,$$

где индикаторная функция $1_{X_0}(x) = 0$ при $x \in X_0$ и $1_{X_0}(x) = +\infty$ при $x \notin X_0$. Пусть $w(t)$ — одномерное броуновское движение, $\tilde{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{F}_0$ — σ -алгебра, состоящая из Ω и всех подмножеств нулевой вероятности, поток $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$ произвольный. Тогда в силу единственности решений ОСДУ можно считать, что финальное состояние $x(T) = \xi$ — константа P -п.н., функции $z_i(t) = 0$ P -п.н. Обозначим через $x(t; \xi) = [x_1(t; \xi); x_2(t; \xi)]$ вектор-столбец решений системы с нулевыми функциями z_i и финальным состоянием $x(T) = \xi$. Множество $\mathcal{X}(t, y)$ будет состоять из векторов $x(t; \xi)$, для которых $x(0; \xi) \in X_0$ и

$$\mathbb{E} \int_0^T y^2(t) dt - 2\mathbb{E} \int_0^T y(t)x_2(t; \xi) dt + \int_0^T x_2^2(t; \xi) dt \leq 1.$$

Множество $\mathcal{X}^0(t, y)$ состоит из всех векторов $x(t; \xi)$, для которых ξ доставляет минимум левой части этого неравенства при условии $x(0; \xi) \in X_0$. Множество $\mathcal{X}^0(T, y)$ непусто, если X_0 компактно. В отличие от предыдущего примера здесь задача, по существу, конечномерна.

2. Решение задачи фильтрации в линейно-квадратичном случае

Пусть уравнения (0.6) и (1.1) линейны:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{j=1}^k (B_j(t)dt + Idw_j(t))z_j(t), \\ y(t) &= G(t)x(t) + \eta(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $A(\cdot), B_j(\cdot) \in L_{n \times n, \mathcal{F}}^\infty(0, T)$, $G(\cdot) \in L_{m \times n, \mathcal{F}}^\infty(0, T)$, $f(\cdot), z_j(\cdot) \in L_{n, \mathcal{F}}^2(0, T)$, I — единичная $n \times n$ -матрица, $W(t) = [w_1(t); \dots; w_k(t)]$ — стандартное k -мерное броуновское движение. Здесь зависимость от ω опущена,

$$L_{m \times n, \mathcal{F}}^\infty(0, T) = \{G(t, \omega) - \mathcal{F}_t\text{-согласованная матрица; } \text{esssup}_{t \in [0, T], \omega \in \Omega} |G(t, \omega)| < \infty\}.$$

Таким образом, в уравнении (2.1) допускаются случайные \mathcal{F}_t -согласованные и ограниченные коэффициенты. Теорема 1 из введения при этом полностью сохраняется. Вместе с тем чтобы охватить и детерминированный случай, коэффициенты системы и функция $f(\cdot)$ могут быть согласованы с меньшим потоком σ -алгебр $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$. При этом $\xi \in L_n^2(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}_T)$. Ограничения (1.2) зададим в виде

$$J(\eta(\cdot), Z(\cdot)) = \mathbb{E} \int_0^T \{\eta(t) \cdot R\eta(t) + Z(t) \cdot QZ(t)\} dt \leq 1, \quad (2.2)$$

где R — симметрическая положительно определенная матрица размера $n \times n$, $Q : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ — симметричный положительно определенный оператор, задаваемый числами q_{ijrs} , $q_{ijrs} = q_{rsij}$. Имеем $Z \cdot QZ = \sum_{i,r=1}^n \sum_{j,s=1}^k q_{ijrs} z_{rs} z_{ij}$, где z_{ij} — элементы матрицы $Z = [z_1, \dots, z_k]$, а z_j — ее столбцы.

Введем линейный ограниченный оператор $\mathcal{A} : L_n^2(\Omega, \mathcal{F}_T) \rightarrow \mathbb{M}(0, T)$, сопоставляющий финальному состоянию ξ системы (2.1) ее решение $[x(\cdot); Z(\cdot)]$ при $f(\cdot) = 0$. Обозначим через

$[x^f(\cdot); Z^f(\cdot)]$ решение системы (2.1) при $\xi = 0$ и ненулевой функции $f(\cdot)$. Введем гильбертово пространство $\mathbb{L}_m(0, T) = L^2_{m, \mathcal{F}}(0, T) \times L^2_{n \times k, \mathcal{F}}(0, T)$. Очевидно, что $\mathbb{M}(0, T) \subset \mathbb{L}_n(0, T)$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{L}_m(0, T)$. Определим также операторы

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} G(\cdot) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Подставив соответствующие функции в ограничение (2.2), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\xi, y) &= \langle [y(\cdot) - G(\cdot)x^f(\cdot); Z^f(\cdot)], \mathcal{R}[y(\cdot) - G(\cdot)x^f(\cdot); Z^f(\cdot)] \rangle_m \\ &- 2 \langle \mathcal{G}^* \mathcal{R}[y(\cdot) - G(\cdot)x^f(\cdot); -Z^f(\cdot)], \mathcal{A}\xi \rangle_n + \langle \mathcal{A}\xi, \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A}\xi \rangle_n \leq 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, $\xi \in \mathcal{X}(T, y)$ тогда и только тогда, когда элемент ξ удовлетворяет неравенству (2.3) для соответствующей квадратичной формы. Для описания оптимальной оценки рассмотрим сопряженный гильбертов оператор \mathcal{A}^* по отношению к $\mathcal{A} : L^2_n(\Omega, \mathcal{F}_T) \rightarrow \mathbb{L}_n(0, T)$. С этой целью введем сопряженную систему

$$dp(t) = (-A'(t)p(t) + \varphi(t))dt + \sum_{j=1}^k (-B'_j(t)p(t) + \psi_j(t))dw_j(t), \quad p(0) = 0, \quad (2.4)$$

где $[\varphi(\cdot); \Psi(\cdot)] \in \mathbb{L}_n(0, T)$. Поскольку для всех таких элементов и всех ξ выполняется равенство (см. [6, р. 354])

$$\ll p(T), \xi \gg = \langle [\varphi(\cdot); \Psi(\cdot)], \mathcal{A}\xi \rangle_n,$$

где $\ll \cdot, \cdot \gg$ — скалярное произведение в $L^2_n(\Omega, \mathcal{F}_T)$, то $\mathcal{A}^*[\varphi(\cdot); \Psi(\cdot)] = p(T)$. Беря производную Фреше от левой части неравенства (2.3), получаем уравнение для оптимальной оценки $\hat{\xi}$:

$$\mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A} \xi = \mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R}[y(\cdot) - G(\cdot)x^f(\cdot); -Z^f(\cdot)]. \quad (2.5)$$

Обсудим корректность решения уравнения (2.5). Введем

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что система (2.1) является стохастически вполне наблюдаемой в момент T , если $\|\mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A} \xi\| \geq \varkappa \|\xi\|$, $\varkappa > 0 \forall \xi$, т. е. оператор $\mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A}$ является коэрцитивным.

В случае, когда поток $\tilde{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{F}_0$, приведенное определение совпадает с понятием детерминированной вполне наблюдаемости [1]. Поскольку в случае стохастической полной наблюдаемости оператор $\mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный, приходим к утверждению.

Теорема 2. Пусть система (2.1) стохастически вполне наблюдаема в момент T . Тогда СИМ $\mathcal{X}(T, y)$ является ограниченным эллипсоидом в гильбертовом пространстве $L^2_n(\Omega, \mathcal{F}_T)$ и определяется неравенством

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(T, y) &= \left\{ \xi \in L^2_n(\Omega, \mathcal{F}_T); \langle [y(\cdot) - G(\cdot)x^f(\cdot); -Z^f(\cdot)], \right. \\ &(\mathcal{R} - \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A} (\mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R}) [y(\cdot) - G(\cdot)x^f(\cdot); -Z^f(\cdot)] \rangle_m + \langle (\xi - \hat{\xi}), \mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A} (\xi - \hat{\xi}) \rangle_n \leq 1 \left. \right\}, \end{aligned}$$

причем единственная оптимальная оценка $\hat{\xi}$, удовлетворяющая уравнению (2.5), имеет вид

$$\hat{\xi} = (\mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R} \mathcal{G} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^* \mathcal{G}^* \mathcal{R}[y(\cdot) - G(\cdot)x^f(\cdot); -Z^f(\cdot)].$$

Рассмотрим

П р и м е р 3. Пусть дана n -мерная система $dx(t) = Z(t)dW(t)$, $x(T) = \xi$, $y(t) = x(t) + \eta(t)$, $E \int_0^T (|\eta(t)|^2 + q|Z(t)|^2)dt \leq 1$, $q > 0$, с k -мерным винеровским процессом $W(t)$. Рассмотрим

значение $\mathcal{A}^* \mathcal{R} \mathcal{A} \xi = p(T)$ как решение сопряженной системы (2.4), имеющей здесь вид $dp(t) = x(t)dt + qZ(t)dW(t)$, $p(0) = 0$. Следовательно,

$$\xi = E\xi + \int_0^T Z(s)dW(s), \quad p(T) = TE\xi + \int_0^T (q + T - s)Z(s)dW(s).$$

Отсюда, используя свойства интеграла Ито, находим

$$E|\xi|^2 = |E\xi|^2 + E \int_0^T |Z(s)|^2 ds, \quad E|p(T)|^2 = |TE\xi|^2 + E \int_0^T |(q + T - s)Z(s)|^2 ds.$$

Значит, $E|p(T)|^2 \geq \varkappa E|\xi|^2$, где $\varkappa = \min\{q^2, T^2\}$, и условие корректной разрешимости уравнения (2.5) выполняется. Отметим, что стохастическая вполне наблюдаемость здесь имеет место при $q = 1$. Для нахождения оптимальной оценки следует решить уравнение (2.5), имеющее здесь вид $p(T) = \int_0^T y(t)dt$. Если $\int_0^T y(t)dt = r + \int_0^T Z^y(t)dW(t)$ — мартингаловое разложение, то, очевидно, выбор $E\xi = r/T$, $Z(t) = Z^y(y)/(q + T - t)$ решает это уравнение.

Отметим, что в случае, когда коэффициенты системы (2.1) согласованы с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{F}_0$, финальное состояние ξ является \mathcal{F}_0 -измеримым и поток $\mathcal{H}_t \equiv \mathcal{F}_0$, задача 1 для системы (2.1) становится детерминированной, $Z(t) = 0$. Информационное множество будет тогда эллипсоидом вида (см. [10])

$$\mathcal{X}(T, y) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; r(T) - 2\xi \cdot d(T) + \xi \cdot \mathcal{L}(T)\xi \leq 1 \right\}, \quad (2.6)$$

где параметры удовлетворяют системе матричных и векторных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} &= -A'(t)\mathcal{L} - \mathcal{L}A(t) + G'(t)RG(t), & \mathcal{L}(0) &= 0; \\ \dot{d} &= -A'(t)d + G'(t)Ry(t) + \mathcal{L}(t)f(t), & d(0) &= 0; \\ \dot{r} &= y(t) \cdot Ry(t) + 2d(t) \cdot f(t), & r(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Множество (2.6) будет ограничено тогда и только тогда, когда система вполне наблюдаема в детерминированном смысле.

3. Аппроксимация СИМ при малых коэффициентах диффузии

Рассмотрим вопрос о сходимости СИМ $\mathcal{X}(T, y)$ из теоремы 2 к множеству, аналогичному ИМ (2.6), в случае, когда $Z \cdot \mathcal{Q}Z = q|Z|^2$ и $q \rightarrow \infty$. Пусть реализовался сигнал $y(\cdot)$. Для непустоты СИМ $\mathcal{X}^q(T, y)$, соответствующего ограничению

$$J^q(\eta(\cdot), Z(\cdot)) = E \int_0^T \{ \eta(t) \cdot R\eta(t) + q|Z(t)|^2 \} dt \leq 1, \quad (3.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

Предположение 1. Для всякого $q > 0$ существует пара $(\eta(\cdot), Z(\cdot))$, реализующая $y(\cdot)$ вместе с некоторым $\xi = x(T)$ в силу уравнений (2.1) и удовлетворяющая ограничению (3.1).

Введем функционал

$$\bar{J}(\xi, y) = E\{r(T) - 2\xi \cdot d(T) + \xi \cdot \mathcal{L}(T)\xi\}, \quad (3.2)$$

где параметры определяются из уравнений (2.7). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и предположение 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $q(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $q \geq q(\varepsilon)$

$$\sup_{\xi \in \mathcal{X}^q(T, y)} (\bar{\mathcal{J}}(\xi, y) - \mathcal{J}^q(\xi, y)) \leq \varepsilon,$$

где $\mathcal{J}^q(\xi, y) = J^q(y(\cdot) - G(\cdot)x(\cdot), Z(\cdot))$, а функционалы J^q и $\bar{\mathcal{J}}$ определяются формулами (3.1) и (3.2).

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Для всех $\xi \in \mathcal{X}^q(T, y)$ выполняется неравенство $\bar{\mathcal{J}}(\xi, y) \leq 1 + \varepsilon$. Отсюда получаем оценку сверху для СИМ:

$$\mathcal{X}^q(T, y) \subset \bar{\mathcal{X}}^q(T, y) = \{\xi; \bar{\mathcal{J}}(\xi, y) \leq 1 + \varepsilon\} \quad (3.3)$$

для всех $q \geq q(\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\xi \in \mathcal{X}^q(T, y)$ для некоторого $q > 1$. Решение уравнения (2.1) с краевым условием $x(T) = \xi$ представим как $x(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}(t)$, где $\bar{x}(t)$ — решение уравнения (2.1) с $Z(t) \equiv 0$, а

$$\tilde{x}(t) = - \sum_{j=1}^k \int_t^T X(t, s) (B_j(s) ds + Idw_j(s)) z_j(s).$$

Здесь $X(t, s)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (2.1). В силу ограниченности коэффициентов уравнения (2.1) имеем $\|X(t, s)\| \leq \alpha$, $\|B_j(s)\| \leq b$, $\|G(s)\| \leq g$ P -п.н. для обычных евклидовых норм матриц, некоторых положительных констант и всех $t, s \in [0, T]$. Оценим $\mathbb{E}|\tilde{x}(t)|^2$. Используя свойства интеграла Ито и некоторые элементарные неравенства, находим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\tilde{x}(t)|^2 &\leq 2\mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^k \int_t^T X(t, s) B_j(s) z_j(s) ds \right|^2 \right. \\ &\left. + \left| \sum_{j=1}^k \int_t^T X(t, s) z_j(s) dw_j(s) \right|^2 \right) \leq 2\alpha^2 (b^2 T k + 1) \mathbb{E} \int_0^T |Z(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Введем вспомогательный функционал

$$\mathcal{J}_1^q(\xi, y) = \mathbb{E} \int_0^T \{(y(t) - G(t)\bar{x}(t)) \cdot R(y(t) - G(t)\bar{x}(t)) + q|Z(t)|^2\} dt.$$

При больших q этот функционал мало отличается от $\mathcal{J}^q(\xi, y)$, поскольку справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}^q(\xi, y) - \mathcal{J}_1^q(\xi, y)| &\leq \left| \mathbb{E} \int_0^T \{\tilde{x}(t) \cdot G'(t) R G(t) \tilde{x}(t) - 2\tilde{x}(t) \cdot G'(t) R (y(t) - G(t)\bar{x}(t))\} dt \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \int_0^T \{\tilde{x}(t) \cdot G'(t) R G(t) \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}(t) \cdot G'(t) R \eta(t)\} dt \right| \leq g^2 \|R\| \mathbb{E} \int_0^T |\tilde{x}(t)|^2 dt \\ &\quad + 2g \sqrt{\|R\| \mathbb{E} \int_0^T |\tilde{x}(t)|^2 dt}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Шварца и тем, что ξ — совместимое финальное состояние. Следовательно, существует помеха $\eta(\cdot)$ такая, что выполняются уравнение наблюдения в (2.1) и ограничение (3.1). Отметим, что полученная оценка не зависит от ξ .

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Используя найденные оценки, подберем $q(\varepsilon)$ так, чтобы

$$2g^2 \|R\| T \alpha^2 (b^2 T k + 1) q^{-1} + 2^{3/2} g \alpha \sqrt{\|R\| T (b^2 T k + 1) q^{-1}} < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Теперь для всякого $q > q(\varepsilon)$ равномерно по ξ будем иметь $\mathcal{J}_1^q(\xi, y) - \mathcal{J}^q(\xi, y) < \varepsilon$. Так как $\bar{\mathcal{J}}^q(\xi, y) \leq \mathcal{J}_1^q(\xi, y)$, то неравенство теоремы установлено. \square

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства теоремы 3 видно, что аппроксимация СИМ равномерна по финальному времени T , не превышающему конечного предела. Следовательно, оценка неизвестного фазового вектора может производиться в динамике путем интегрирования уравнений (2.7).

З а м е ч а н и е 2. Теорему 3 можно интерпретировать еще и так. Пусть предположение 1 не выполняется, но при достаточно большом q реализовался сигнал и построено соответствующее СИМ. Тогда, беря в качестве ε левую часть $\varepsilon(q)$ неравенства (3.4), получим неравенство теоремы и включение (3.3) для СИМ в следствии 1.

З а м е ч а н и е 3. Центром множества $\bar{\mathcal{X}}^q(T, y)$ является вектор $\bar{\xi}_T = \mathcal{L}^{-1}(T)d(T)$. Его можно принять за *квазиоптимальную оценку* состояния системы в случае малых коэффициентов диффузии. Нетрудно проверить, что выполняется дифференциальное уравнение

$$d\bar{\xi}_t/dt = A(t)\bar{\xi}_t + f(t) + \mathcal{L}^{-1}(t)G'(t)R(y(t) - G(t)\bar{\xi}_t),$$

аналогичное фильтру Калмана — Бьюси.

П р и м е р 4. Пусть малые возмущенные колебания осциллятора описываются системой

$$dx_1 = x_2 dt + z_1(t)dw(t), \quad dx_2(t) = -x_1 dt + z_2(t)dw(t), \quad t \in [0, T],$$

с финальным состоянием $x(T) = \xi \in L_2^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ в виде произвольного допустимого вектора. Ограничения выберем в виде (3.1), где $R = 1$, а q — достаточно большое число. Уравнение измерения следующее: $y(t) = x_1(t) + \eta(t)$, $\eta(\cdot) \in L_{1, \mathcal{F}}^2(0, T)$. Подсчитаем левую часть формулы (3.4), т.е. $\varepsilon(q)$. Здесь $\alpha = 1$, поскольку фундаментальная матрица ортогональна. Кроме того, $b = 0$, $g = 1$. Значит, $\varepsilon(q) = 2Tq^{-1} + 2^{3/2}\sqrt{Tq^{-1}}$. Отсюда $q(\varepsilon) = 2T/(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)^2$. Сформируем сигнал из помехи $\eta^*(t) = (\chi(T/2 - t) - \chi(t - T/2))w(t)/T$, где функция $\chi(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\chi(t) = 0$ при $t < 0$, начального условия $x_0 = 0$ и функции $Z(t) = [\cos t; \sin t]/r$. Поскольку $E \int_0^T (\eta^*(t))^2 dt = 1/2$, то $q \leq r^2/T/2$. Приведенным условиям удовлетворяют, например, числовые значения $T = \pi$, $\varepsilon = 0.01$, $q = 3 \times 10^5$, $r = 2 \times 10^3$. Согласно теореме 3 необходимо сформировать функционал (3.2), воспользовавшись уравнениями (2.7), для получения оценки СИМ в виде включения (3.3). Уравнения квазиоптимального фильтра здесь имеют вид

$$\begin{aligned} d\bar{\xi}_{1,t}/dt &= \bar{\xi}_{2,t} + (2t - \sin 2t)(y(t) - \bar{\xi}_{1,t})/(t^2 - \sin^2 t), \\ d\bar{\xi}_{2,t}/dt &= -\bar{\xi}_{1,t} + 2 \sin^2 t (y(t) - \bar{\xi}_{1,t})/(t^2 - \sin^2 t). \end{aligned}$$

4. Случай прямых-обратных СДУ

Рассмотрим случай, когда финальное состояние уравнения (0.6) или (2.1) является не произвольным элементом пространства $L_n^2(\mathcal{F}_T)$, а равно $\xi = g(u(T))$, где $u(t)$ — решение прямого l -векторного СДУ

$$du(t) = b(t, u(t))dt + \sigma(t, u(t))dW(t), \quad u(0) = u_0, \quad (4.1)$$

где $W(t)$ — то же самое броуновское движение, что в (0.6), (2.1). Прямое уравнение (4.1) следует решать в паре с обратным уравнением (0.6). Для их решения обычно используют четырехшаговую схему [6; 11]. Она состоит в следующем.

○ Шаг 1. Полагаем $z(t, u, p) = p\sigma(t, u)$ для всех $(t, u, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n \times l}$.

○ Шаг 2. Находим набор функций $\theta(t, u) = [\theta^1(t, u); \dots; \theta^n(t, u)]$ как классическое решение системы параболических уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \theta_t^i + \text{tr}[\theta_{uu}^i \sigma(t, u) \sigma(t, u)'] / 2 + \theta_u^i \cdot b(t, u) &= h^i(t, \theta, z(t, u, \theta_u)), \quad (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^l, \\ i \in 1 : n, \quad \theta(T, u) &= g(u). \end{aligned} \quad (4.2)$$

○ Шаг 3. Решаем прямое СДУ (4.1).

○ Шаг 4. Полагаем

$$x(t) = \theta(t, u(t)), \quad Z(t) = z(t, u(t), \theta_u(t, u(t))). \quad (4.3)$$

Фактически справедлив следующий результат.

Теорема 4 [6, теорема 7.5.3]. *Предположим, что (4.2) допускает классическое решение $\theta(t, u)$ с ограниченными первыми θ_u и вторыми θ_{uu} производными. Предположим также, что функции $b(t, u)$ и $\sigma(t, u)$ — равномерно липшицевы по u , а значения $b(t, 0)$ и $\sigma(t, 0)$ ограничены. Тогда процесс $(u(\cdot), x(\cdot), Z(\cdot))$, определенный (4.1), (4.3), представляет собой адаптированное к \mathcal{F}_t решение для прямых-обратных уравнений (4.1), (0.6).*

Отметим, что теорема 4 дает достаточные условия совместной разрешимости уравнений (4.1), (0.6). Ее доказательство проводится путем применения формулы Ито к процессу $\theta(t, u(t))$. Необходимые условия разрешимости системы (4.2) и соответствующая литература приведены в [11]. Имеются также и численные схемы решения, изложенные, например, в [12].

Обратимся к задаче 1. Если параметры уравнения (4.1) заданы и выполняются условия теоремы 4, то задача оценивания для ОСДУ (0.6) особого смысла не имеет, поскольку решение $[x(\cdot); Z(\cdot)]$, как случайный процесс, однозначно определяется через решение $u(t)$ прямого СДУ (4.1). Пусть теперь начальное состояние, например, для (4.1) точно не известно и стеснено ограничением

$$u_0 \in \mathbb{U}_0, \quad (4.4)$$

где \mathbb{U}_0 — компактное множество. Обозначим через $u(t, u_0)$ решение уравнения (4.1) с начальным условием $u(0, u_0) = u_0$. Тогда из ограничений (1.1), (1.2) следует, что допустимые начальные условия должны удовлетворять включению

$$\begin{aligned} u_0 \in \hat{\mathbb{U}}_0 = \left\{ u_0 \in \mathbb{U}_0; F(\theta(0, u_0)) + \mathbb{E} \int_0^T \left\{ Q_1(t, y(t) - g(t, \theta(t, u(t, u_0)))) \right. \right. \\ \left. \left. + Q_2(t, \theta_u(t, u(t, u_0)) \sigma(t, u(t, u_0))) \right\} dt \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, из теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *Пусть начальное состояние прямого СДУ (4.1) стеснено ограничением (4.4) и выполняются условия теоремы 4. Тогда задача 1 становится, по существу, конечномерной и состоит в определении множества $\hat{\mathbb{U}}_0$ из соотношения (4.5). СИМ $\mathcal{X}(t, y)$ при $t \leq T$ для ОСДУ (0.6) имеет вид $\mathcal{X}(t, y) = \{u_0 \in \hat{\mathbb{U}}_0; \theta(t, u(t, u_0))\}$. Множество $\mathcal{X}^0(t, y)$ оптимальных оценок состоит из векторов $\theta(t, u(t, u_0))$, для которых u_0 доставляет минимум левой части неравенства в (4.5).*

Рассмотрим примеры.

Пример 5. Пусть в системе примера 4 финальное состояние $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = u_0 + w(T)$, где $w(t)$ — броуновское движение и $|u_0| \leq 1$. Имеем $x(T) = [0; 1]u(T)$, $du(t) = dw(t)$, $u(0) = u_0$. Ограничения зададим в виде $|x_1(0)| + |x_2(0)| \leq 1$ и $E \int_0^T \eta^2(t) dt \leq 1$. Запишем систему (4.2):

$$\theta_t + \theta_{uu}/2 = [\theta^1; -\theta^2], \quad \theta(T, u) = [0; u].$$

Нетрудно проверить, что вектор-столбец $\theta(t, u) = [\sin(t - T); \cos(t - T)]u$ решает эту систему. Следовательно, $z(t) = \theta_u(t, u) = [\sin(t - T); \cos(t - T)]$ и $x(t) = [\sin(t - T); \cos(t - T)](u_0 + w(t))$. Пусть сигнал формируется при $u_0^* = 0$ и $\eta^*(t) = (\chi(T/2 - t) - \chi(t - T/2))w(t)/T$, как в примере 4. Подставив параметры в выражение $E \int_0^T (y(t) - x_1(t))^2 dt$, будем иметь $\hat{U}_0 = \{u_0; |u_0| \leq \min\{1, 1/(|\sin T| + |\cos T|), 1/\sqrt{T + \sin T \cos T}\}\}$. Из этой формулы следует, что разброс параметров u_0 уменьшается до нуля при $T \rightarrow \infty$. Оптимальное значение параметра u_0 равно нулю.

Пример 6. Рассмотрим финансовый рынок с двумя активами — безрисковым (облигация) $s(t)$ и рисковым (акция) $u(t)$, цены которых изменяются согласно уравнениям

$$\dot{s} = rs, \quad s(0) = s_0, \quad du(t) = u(t)(bdt + \sigma dw(t)), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u_0. \quad (4.6)$$

Для упрощения считаем: параметры r, b, σ, s_0, u_0 уравнений — положительные константы. Инвестор, владеющий обоими активами, формирует свое состояние в виде суммы $x(t) = S(t)s(t) + U(t)u(t)$, где (S, U) — портфель инвестора. Если портфель самофинансируемый, то $x(t+h) - x(t) = S(t)(s(t+h) - s(t)) + U(t)(u(t+h) - u(t))$, или, переходя к пределу,

$$dx(t) = rS(t)s(t)dt + U(t)u(t)(bdt + \sigma dw(t)) = rx(t)dt + z(t)(b - r)dt/\sigma + z(t)dw(t), \quad (4.7)$$

где величина $z(t) = U(t)u(t)/\sigma$ — стратегия инвестора. С целью уменьшения риска инвестор выпускает ценную бумагу (опцион-колл) с финальной стоимостью $(u(T) - q)^+$, $q > 0$, и обязуется выплатить держателю опциона сумму $u(T) - q$, если $u(T) > q$. На безарбитражном рынке (без дополнительных доходов) должно выполняться финальное равенство

$$x(T) = (u(T) - q)^+. \quad (4.8)$$

Интерес представляет начальное состояние $x(0) = x_0$ (это также и начальная цена опциона). Эта задача имеет явное решение в виде формулы Блэка — Шоулса [6, с. 396]:

$$x(t) = \theta(t, u) = uN(d_+(t, u)) - qe^{-r(T-t)}N(d_-(t, u)), \quad (4.9)$$

где $d_{\pm}(t, u) = (\ln(u/q) + (r \pm \sigma^2/2)(T - t))/\sigma/\sqrt{T - t}$, $N(u)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $u = u(t)$ — решение прямого уравнения в (4.6). Формула (4.9) получена в [6] путем применения четырехшаговой схемы для прямых-обратных уравнений (4.6), (4.7) с финальным равенством (4.8).

Усложним задачу. Считаем, что стоимость опциона известна с ошибкой:

$$y(t) = x(t) + \eta(t), \quad \eta(\cdot) \in L_{1, \mathcal{F}}^2(0, T), \quad E \int_0^T \eta^2(t) dt \leq \alpha^2, \quad (4.10)$$

а набор параметров $\Gamma = (r, b, \sigma, u_0)$ прямых уравнений точно не задан и стеснен компактными ограничениями $\Gamma \in \mathbb{G}$. Множество допустимых параметров $\hat{\mathbb{G}}$ определится тогда из включений

$$\Gamma \in \mathbb{G}, \quad E \int_0^T (y(t) - \theta(t, u(t)))^2 dt \leq \alpha^2. \quad (4.11)$$

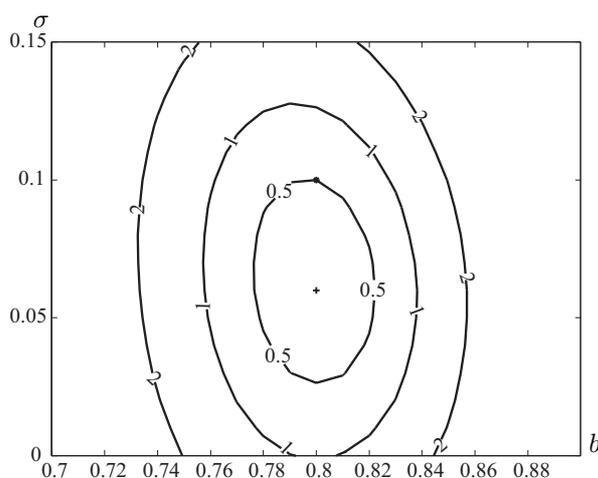


Рис. 1.

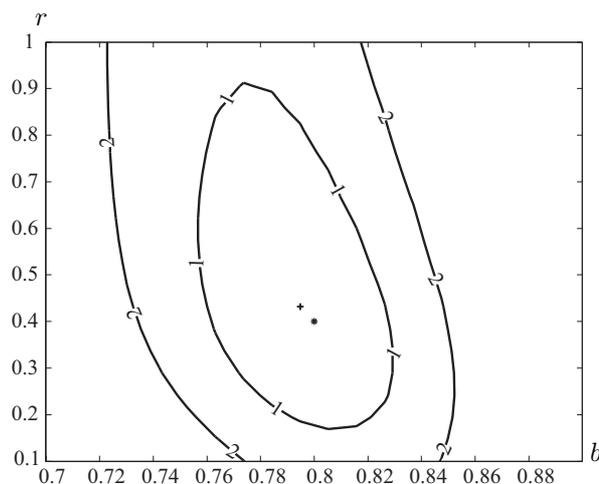


Рис. 2.

Здесь $u(t) = u_0 e^{(b-\sigma^2/2)t + \sigma w(t)}$ — решение прямого уравнения (4.6). Пусть, например, $b \in [0.7, 0.9]$, $\sigma \in [0, 0.15]$, $r \in [0.1, 1]$, $u_0 = \alpha = 1$, $q = 2$. Считаем, что сигнал (4.10) формируется при $b = 0.8$, $r = 0.4$, $\sigma = 0.1$, $T = 3$ и помехе $\eta^*(t)$ из примеров 4, 5.

На рис. 1 изображены линии уровня интегрального функционала из левой части неравенства в (4.11) в зависимости от b , σ ; на рис. 2 — в зависимости от b , r . Цифры на линиях означают значения функционалов вдоль всей линии. Звездочкой обозначено истинное значение параметров, крестиком — оптимальная оценка параметров, дающая минимум функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 306 с.
2. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона — Якоби в теории управления. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
3. Nonsmooth analysis and control theory / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski New York: Springer-Verlag, 1998. 276 p.
4. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 399 с.
5. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987. 318 с.
6. Yong J, Zhou X. Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. New York: Springer-Verlag, 1999. 438 p.
7. Bismut J.M. An introductory approach to duality in optimal stochastic control // SIAM Rev. 1978. Vol. 20. P. 62–78.
8. Ананьев Б.И. Оценивание состояний обратных стохастических дифференциальных уравнений со статистически неопределенными помехами. [Электрон. ресурс] // XII Всероссийское совещание по проблемам управления — ВСПУ-2014 (Москва, 16–19 июня, 2014 г.): сб. докл. С. 2604–2611.
9. Ananyev B.I. State estimation for linear stochastic differential equations with uncertain disturbances via BSDE approach // AIP Conference Proceedings. 2012. Vol. 1487. P. 143–150.
10. Ананьев Б.И. Минимаксная квадратичная задача коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 3. С. 436–445.
11. Jin Ma, Protter P., Yong J.M. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly — a four step scheme. // Probab. Theory Related Fields. 1994. Vol. 98, no. 3. P. 339–359.
12. Bouchard B., Touzi N. Discrete-time approximation and Monte Carlo simulation of backward stochastic differential equations. // Stochastic Process. Appl. 2004. Vol. 111. P. 175–206.

Ананьев Борис Иванович

д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: abi@imm.uran.ru

Поступила 10.07.2014

УДК 517.977.52

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ СКАЧКА РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, Ф. Л. Перейра

В работе исследуются свойства множителей Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач с фазовыми ограничениями. Получены достаточные условия непрерывности решения сопряженного уравнения в зависимости от способа выхода экстремальной траектории на границу фазового ограничения. Доказательство использует понятие замыкания по мере измеримой по Лебегу функции и теорему Каратеодори.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, фазовые ограничения.

A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, F. L. Pereira. Conditions for the absence of jumps of the solution to the adjoint system of the maximum principle for optimal control problems with state constraints.

Properties of Lagrange multipliers from the Pontryagin maximum principle for problems with state constraints are investigated. Sufficient conditions for the continuity of the solution of the adjoint solution depending on how the extremal trajectory approaches the state constraint boundary are obtained. The proof uses the notion of closure by measure of a Lebesgue measurable function and the Caratheodory theorem.

Keywords: optimal control, maximum principle, state constraints.

Введение

В работе исследуется классическая задача оптимального управления с фазовыми ограничениями типа неравенств. Задачи с фазовыми ограничениями часто востребованы в различного рода инженерных приложениях, что обуславливает интерес к ним математиков. Большой вклад в развитие задач с фазовыми ограничениями внесли Р.В. Гамкрелидзе, А.Я. Дубовицкий, В.А. Дубовицкий, М.И. Зеликин, А.Б. Куржанский, А.А. Милютин, Ю.С. Осипов, Н.Т. Тынянский, Ф. Кларк, М.М. Ферейра, Г. Халкин, Г. Маурэр, Р.Б. Винтер и др. (см., например, [1–13]).

В работе получены некоторые достаточные условия гладкого выхода экстремальной траектории на границу допустимой области в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Эти результаты приводят к достаточным условиям отсутствия скачка у решения сопряженной системы принципа максимума Понтрягина. Настоящая работа является продолжением исследований, предпринятых в [14]. Отметим, что вопрос о гладкости выхода экстремальной траектории на границу фазового ограничения ранее также исследовался в [10].

¹Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности (проект 1.333.2014/К), при поддержке РФФИ (проект 13-01-00494) и при поддержке ФСТ (Португалия, проект UID/ЕЕА/00147/2013).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0(p) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad t_1 < t_2, \\ G(x, t) \leq 0, \\ p \in C, \\ p = (x_1, x_2, t_1, t_2), \\ u(t) \in U \text{ п.в. } t \in [t_1, t_2]. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь заданы скалярные функции K_0 , f_0 , отображение $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, отображение $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$, замкнутые множества $C \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Далее $t \in [t_1, t_2]$ — время (моменты времени t_1 и t_2 априори не предполагаются фиксированными), x — фазовая переменная, принимающая значения в n -мерном арифметическом пространстве \mathbb{R}^n , $u \in \mathbb{R}^m$ — управляющий параметр, $\dot{x} = dx/dt$. Вектор $p \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ называется *концевым*. В классе допустимых управлений рассматриваются измеримые существенно ограниченные функции $u(\cdot)$, принимающие значения во множестве U .

Пусть $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, — допустимое управление, $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, — соответствующая ему траектория, а p — соответствующий ей концевой вектор. Тогда тройку (p, x, u) будем называть *допустимым процессом*, если она удовлетворяет концевым ограничениям $p \in C$ и фазовым ограничениям $G(x(t), t) \leq 0 \forall t \in [t_1, t_2]$.

Далее будем предполагать, что все функции, участвующие в постановке задачи, непрерывно дифференцируемы.

Введем необходимые понятия.

Будем говорить, что в точке p^* фазовые ограничения согласованы с концевыми, если $\exists \varepsilon > 0$:

$$\{p \in \mathbb{R}^{2n+2} : |p^* - p| \leq \varepsilon, p \in C\} \subseteq \{p : G(x_1, t_1) \leq 0, G(x_2, t_2) \leq 0\}.$$

Рассмотрим функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H(x, u, \psi, \lambda^0, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - \lambda^0 f_0(x, u, t).$$

Сформулируем принцип максимума Понтрягина (ПМ) для исследуемой задачи (1). Для задач с фазовыми ограничениями существуют различные формы ПМ. Приводимый ПМ называют ПМ в форме Дубовицкого — Милютина (см. [3]) в отличие от ПМ в форме Гамкрелидзе (см. [1; 15]).

О п р е д е л е н и е 1. Допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) , где $p^* = (x_1^*, x_2^*, t_1^*, t_2^*)$, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, если существуют число $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^0 \geq 0$, функция ограниченной вариации $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $T = [t_1^*, t_2^*]$, а также определенные на T неотрицательные борелевские меры η^j , $j = 1, \dots, k$, такие, что λ^0, ψ, η , где $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)$, одновременно не равны нулю и

$$\psi(t) = \psi(t_1^*) - \int_{t_1^*}^t \frac{\partial H}{\partial x}(s) ds + \int_{[t_1^*, t]} \frac{\partial G}{\partial x}(s) d\eta \quad \forall t > t_1^*, \quad (2)$$

$$h(t) = h(t_1^*) + \int_{t_1^*}^t \frac{\partial H}{\partial t}(s) ds - \int_{[t_1^*, t]} \frac{\partial G}{\partial t}(s) d\eta \quad \forall t > t_1^*, \quad (3)$$

$$(\psi(t_1^*), -\psi(t_2^*), -h(t_1^*), h(t_2^*)) \in \lambda^0 \frac{\partial K_0}{\partial p}(p^*) + N_C(p^*), \quad (4)$$

$$\max_{u \in U} H(u, t) = H(t) \quad \text{п.в. } t \in T, \quad (5)$$

$$\text{supp}(\eta^j) \subseteq \{t \in T : G^j(t) = 0\} \quad \forall j, \quad (6)$$

где $h(t) := \max_{u \in U} H(u, t)$, $t \in T$.

Здесь $N_C(p)$ означает предельный нормальный конус ко множеству C в точке p в смысле [16, с. 4], а $\text{supp}(\eta^j)$ — носитель меры η^j . Кроме того, используются следующие обозначения. Во-первых, если у отображений H, G, f (и так далее) и их производных какие-нибудь из аргументов опущены, то вместо них подставлены значения $x^*(t), u^*(t)$ или множители Лагранжа $\psi(t), \lambda^0$ соответственно. Во-вторых, все множители Лагранжа или элементы сопряженных пространств рассматриваются как вектор-строки, в то время как вектор-функции или векторы такие, как f, x, u , рассматриваются как вектор-столбцы. Градиенты функций считаются элементами сопряженных пространств, а элементы матрицы Якоби — отображения $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — имеют вид $\partial F^i / \partial x_j(x)$, и ее строками являются градиенты координатных функций F^i .

Процесс (p^*, x^*, u^*) , удовлетворяющий ПМ, называется *экстремальным*, а набор (λ, ψ, η) — *множителями Лагранжа*. Как известно, любой оптимальный процесс удовлетворяет ПМ, а именно справедлива следующая теорема (см. [3; 11]).

Теорема 1. Пусть процесс (p^*, x^*, u^*) является оптимальным в задаче (1). Предположим, что в точке p^* фазовые ограничения согласованы с концевыми. Тогда процесс (p^*, x^*, u^*) удовлетворяет ПМ.

2. Основной результат

Далее будем предполагать, что функция G дважды непрерывно дифференцируема. Основным результатом работы является следующая теорема, развивающая теорему 2 из [14]. Рассмотрим допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) . Положим $J(t) = \{j : G^j(x^*(t), t) = 0\}$. Через $\eta^j(\tau)$ будем обозначать значение атомарной составляющей (атом) меры η^j в точке τ .

Теорема 2. Пусть (p^*, x^*, u^*) — экстремаль, а множители Лагранжа (λ^0, ψ, η) отвечают ей в силу ПМ. Пусть $\tau \in (t_1^*, t_2^*)$, $j \in J(\tau)$. Если $\eta^j(\tau) > 0$, то функция $G^j(t) = G^j(x^*(t), t)$ дифференцируема в точке τ и, следовательно, ее производная в точке τ равна нулю.

Пусть $\tau \in (t_1^*, t_2^*)$. Поясним, что если $j \in J(\tau)$ и функция G^j дифференцируема в точке τ , то $dG^j/dt(\tau) = 0$. Это, очевидно, вытекает из того, что траектория x^* является допустимой и, значит, функция G^j достигает максимума в точке τ . Далее, из теоремы 2 вытекает, что если функция G^j в точке τ недифференцируема, то $\eta^j(\tau) = 0$. Следовательно, если для любого $j \in J(\tau)$ функция G^j в точке τ дифференцируемой не является, то $\eta(\tau) = 0$ и, значит, решение ψ сопряженной системы (3) в точке τ непрерывно. Таким образом, разрывы функции ψ из принципа максимума возможны лишь в точках гладкого выхода экстремальной траектории на границу.

Доказательство теоремы 2 основано на приводимых ниже утверждениях. Вначале введем необходимые обозначения и понятия. Пусть $\xi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — заданная измеримая ограниченная функция.

Определение 2. Замыканием по мере справа функции $\xi(t)$ в точке τ называется множество $\Xi^+(\tau)$, состоящее из векторов $u \in \mathbb{R}^m$ таких, что

$$\ell(\{t \in [\tau, \tau + \varepsilon] : \xi(t) \in B_\varepsilon(u)\}) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Здесь $B_\varepsilon(u) = \{v \in \mathbb{R}^m : |v - u| \leq \varepsilon\}$, а ℓ — мера Лебега на \mathbb{R} . Соответственно, замыканием по мере слева — множество $\Xi^-(\tau)$ векторов $u \in \mathbb{R}^m$, для которых

$$\ell(\{t \in [\tau - \varepsilon, \tau] : \xi(t) \in B_\varepsilon(u)\}) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Многозначное отображение $\Xi(t) := \Xi^-(t) \cup \Xi^+(t)$ при $t \in \mathbb{R}$ называется замыканием по мере функции $\xi(t)$.

Обозначим через $\mathcal{U}(t)$ замыкание по мере управления $u^*(t)$. Отметим, что имеют место следующие простые свойства замыкания по мере:

- а) $\mathcal{U}^-(t) \neq \emptyset, \mathcal{U}^+(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in T$;
- б) $\mathcal{U}(t) \subseteq U(t) \quad \forall t \in T$;
- в) отображение $\mathcal{U}(t)$ полунепрерывно сверху;
- г) $u^*(t) \in \mathcal{U}(t)$ для п.в. $t \in T$.

Имеет место также следующее важное свойство замыкания по мере. Вектор $u_* \in \mathbb{R}^m$ принадлежит множеству $\mathcal{U}^+(\tau)$ тогда и только тогда, когда существует измеримое множество $E^+ : E^+ \cap [t_1^*, \tau] = \emptyset$ такое, что $\ell(E^+ \cap [\tau, \tau + \varepsilon]) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \tau, t \in E^+} u^*(t) = u_*$. Аналогично $u_* \in \mathcal{U}^-(\tau) \Leftrightarrow \exists E^- : E^- \cap [\tau, t_2^*] = \emptyset, \ell(E^- \cap [\tau - \varepsilon, \tau]) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \tau, t \in E^-} u^*(t) = u_*$.

Определим функцию²

$$\Gamma(x, u, t) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)f(x, u, t) + \frac{\partial G}{\partial t}(x, t)$$

и расширенную функцию Понтрягина

$$\bar{H}(x, u, \psi, \mu, \lambda^0, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - \langle \mu, \Gamma(x, u, t) \rangle - \lambda^0 f_0(x, u, t).$$

Здесь $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^k) \in \mathbb{R}^k$ — это k -мерная переменная.

Предложение 1. Пусть $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$. При положительных Δt имеют место следующие оценки. Если $u_* \in \mathcal{U}^-(t_*)$, то

$$\sum_{j=1}^k \Gamma^j(u_*, t_*) \cdot \eta^j([t_*, t_* + \Delta t]) \leq O(\Delta t). \quad (7)$$

Если $u_* \in \mathcal{U}^+(t_*)$, то

$$\sum_{j=1}^k \Gamma^j(u_*, t_*) \cdot \eta^j([t_* - \Delta t, t_*]) \geq O(\Delta t). \quad (8)$$

Доказательство. Производя замену переменных,

$$\mu(t) = \begin{cases} \int_{[t, t_2^*]} d\eta & \text{при } t < t_2^*, \\ 0 & \text{при } t = t_2^*, \end{cases} \quad \bar{\psi}(t) := \psi(t) + \mu(t) \frac{\partial G}{\partial x}(t).$$

в условиях ПМ (2)–(6) и используя тот факт, что функция G дважды непрерывно дифференцируема, перейдем к ПМ в форме Гамкрелидзе (подробнее см. в [15]). В новых переменных условие максимума (4) приобретает вид

$$\max_{u \in U} \bar{H}(u, \bar{\psi}(t), \mu(t), t) = \bar{H}(\bar{\psi}(t), \mu(t), t) \quad \text{п.в. } t \in T, \quad (9)$$

²Отметим, что функция Γ определяет производную функции G в силу управляемой системы рассматриваемой задачи.

причем функция $\bar{\psi}(t)$ становится абсолютно непрерывной и даже липшицевой, как и функция $\bar{h}(t) = \max_{u \in U} \bar{H}(u, \bar{\psi}(t), \mu(t), t)$.

Докажем оценку (7). Как было указано выше, существует множество E^- такое, что $\ell(E^- \cap [t_* - \varepsilon, t_*]) > 0$ для всех $\varepsilon > 0$ и $u^*(t_i) \rightarrow u_*$, как только $t_i \in E^-$, $t_i \rightarrow t_*$. Для каждого $\varepsilon_i = i^{-1}$ выберем точку $t_i \in E^- \cap [t_* - \varepsilon_i, t_*]$ так, чтобы в ней выполнялось условие максимума (9). Тогда, поскольку функция $\bar{h}(t)$ непрерывна, а функция $\mu(t)$ непрерывна слева в t_* , при $i \rightarrow \infty$ имеем

$$\bar{h}(t_i) = \bar{H}(u^*(t_i), \bar{\psi}(t_i), \mu(t_i), t_i) \rightarrow \bar{H}(u_*, \bar{\psi}(t_*), \mu(t_*), t_*) = \bar{h}(t_*). \quad (10)$$

Поэтому, по определению функции максимума $\bar{h}(t)$, учитывая, что функция $\bar{h}(t)$ липшицева, а также используя условие (10), при малых $\Delta t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}(u_*, \bar{\psi}(t_* + \Delta t), \mu(t_* + \Delta t), t_* + \Delta t) &\leq \bar{h}(t_* + \Delta t) = \bar{h}(t_*) + O(\Delta t) = \bar{H}(u_*, \bar{\psi}(t_*), \mu(t_*), t_*) + O(\Delta t) \\ &\Rightarrow H(u_*, \bar{\psi}(t_* + \Delta t), t_* + \Delta t) - \langle \mu(t_* + \Delta t), \Gamma(u_*, t_* + \Delta t) \rangle \\ &\quad - (H(u_*, \bar{\psi}(t_*), t_*) - \langle \mu(t_*), \Gamma(u_*, t_*) \rangle) \leq O(\Delta t) \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^k \Gamma^j(u_*, t_*) \cdot |\mu^j(t_* + \Delta t) - \mu^j(t_*)| \leq O(\Delta t). \end{aligned}$$

Отсюда, используя определение функции μ и то, что $\mu(t_*) = \mu(t_*^-)$, получаем оценку (7). Оценка (8) устанавливается аналогично, лишь с тем изменением, что вместо $\mu(t_*)$ везде следует писать $\mu(t_*^+)$, и тогда (10) приобретает вид

$$\bar{h}(t_i) = \bar{H}(u^*(t_i), \bar{\psi}(t_i), \mu(t_i), t_i) \rightarrow \bar{H}(u_*, \bar{\psi}(t_*), \mu(t_*^+), t_*) = \bar{h}(t_*). \quad \square$$

Обозначим через $\mathcal{D}^+(t)$ множество всевозможных правых пределов траектории x^* в точке t , т. е.

$$\mathcal{D}^+(t) = \text{Limsup}_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{x^*(t + \Delta t) - x^*(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, множество $\mathcal{D}^+(t)$ — это в некотором смысле обобщение правой производной функции x^* в точке t . Отметим, что если правая производная в классическом смысле существует, то это множество состоит из единственной точки, равной ее значению.

Аналогично положим

$$\mathcal{D}^-(t) = \text{Limsup}_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{x^*(t + \Delta t) - x^*(t)}{\Delta t}.$$

Пусть $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$. Будем говорить, что выход на границу j -го фазового ограничения в точке t_* , $j \in J(t_*)$, является гладким, если

$$\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^-(t_*).$$

Аналогично гладкий сход с границы j -го фазового ограничения в точке t_* , $j \in J(t_*)$, означает, что

$$\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^+(t_*).$$

При всех $t \in (t_1^*, t_2^*)$ из того, что траектория $x^*(t)$ является допустимой, легко вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t) &\geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^-(t) \quad \forall j \in J(t), \\ \left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t) &\leq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^+(t) \quad \forall j \in J(t). \end{aligned}$$

В силу этих неравенств условие гладкого выхода на границу j -го фазового ограничения в точке t_* , $j \in J(t_*)$, эквивалентно тому, что производная слева функции $G^j(t) = G^j(x^*(t), t)$ в точке t_* существует и равна нулю, а условие гладкого схода с границы j -го фазового ограничения в точке t_* , $j \in J(t_*)$, эквивалентно тому, что производная справа функции $G^j(t) = G^j(x^*(t), t)$ в точке t_* существует и равна нулю. Также ясно, что выход на границу j -го фазового ограничения в точке t_* , $j \in J(t_*)$, не является гладким тогда и только тогда, когда существует вектор $v \in \mathcal{D}^-(t_*)$ такой, что $\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) > 0$. Аналогично сход с границы j -го фазового ограничения в точке t_* , $j \in J(t_*)$, не является гладким тогда и только тогда, когда существует вектор $v \in \mathcal{D}^+(t_*)$ такой, что $\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) < 0$. Будем использовать это ниже.

Важная связь между множествами \mathcal{D}^+ , \mathcal{D}^- и замыканием по мере открывается следующим предложением.

Предложение 2. Пусть $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$. Имеют место вложения

$$\mathcal{D}^+(t_*) \subseteq \text{conv } f(\mathcal{U}^+(t_*), t_*),$$

$$\mathcal{D}^-(t_*) \subseteq \text{conv } f(\mathcal{U}^-(t_*), t_*).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать следующее утверждение. Пусть $\xi(t)$ — измеримая ограниченная функция и $\{\alpha_n\}$ — сходящаяся к нулю положительная числовая последовательность такая, что предел

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \int_{t_*}^{t_* + \alpha_n} \xi(t) dt$$

существует. Тогда $L \in \text{conv } \Xi(t_*)$, где $\Xi(t_*)$ — замыкание по мере функции ξ в точке t_* . Сделаем это.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Множество $\Xi(t_*)$ компактно. Покроем его конечной сетью ε -кубов K_i , $i = 1, \dots, N$ (они не предполагаются ни открытыми ни замкнутыми) следующим образом. Каждый куб имеет длину стороны ε , они попарно не пересекаются, а их объединение содержит в себе $\Xi(t_*)$. Положим $T_i(\alpha) := \{t \in [t_*, t_* + \alpha] : \xi(t) \in K_i\}$. Из определения замыкания по мере несложно вытекает существование числа $\delta \in (0, \varepsilon)$ такого, что

$$\ell\left([t_*, t_* + \delta] \setminus \bigcup_{i=1}^N T_i(\delta)\right) = 0. \quad (11)$$

Пусть $\xi_i \in K_i \cap \Xi(t_*)$, $i = 1, \dots, N$. Положим

$$\xi(t; \varepsilon) := \sum_{i=1}^N \xi_i \cdot \chi_{T_i(\delta)}(t).$$

Тогда, очевидно, $|\xi(t) - \xi(t; \varepsilon)| \leq \varepsilon$ для п.в. $t \in [t_*, t_* + \delta]$. Поэтому при больших n число L отличается от чисел

$$L_{\varepsilon, n} := \alpha_n^{-1} \int_{t_*}^{t_* + \alpha_n} \xi(t; \varepsilon) dt$$

не более, чем на ε . В силу определения функций $\xi(t; \varepsilon)$ и условия (11) имеем $L_{\varepsilon, n} \in \text{conv } \Xi(t_*)$ при больших n . В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем искомое утверждение. \square

Лемма. Пусть $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$, $j \in J(t_*)$. Предположим, что существует вектор $v \in \mathcal{D}^-(t_*)$ такой, что $\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) > 0$, т. е. выход на границу j -го фазового ограничения в точке t_* не является гладким.

Тогда существует положительное число C (зависящее от t_*) такое, что при положительных Δt имеет место оценка линейного роста справа

$$\eta^j([t_*, t_* + \Delta t]) \leq C \cdot \Delta t. \quad (12)$$

Если существует вектор $v \in \mathcal{D}^+(t_*)$ такой, что $\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) < 0$, т. е. сход с границы j -го фазового ограничения в точке t_* не является гладким, то существует положительное число C (зависящее от t_*) такое, что при положительных Δt имеет место оценка линейного роста слева

$$\eta^j([t_* - \Delta t, t_*]) \leq C \cdot \Delta t. \quad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем оценку линейного роста справа (12). Пусть существует вектор $v \in \mathcal{D}^-(t_*)$ такой, что $\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) > 0$. Из предложения 2 следует, что $v \in \text{con}v f(\mathcal{U}^-(t_*), t_*)$. Тогда по теореме Каратеодори найдутся векторы $u_i \in \mathcal{U}^-(t_*)$ и числа $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n+1$, такие, что $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, и

$$v = \alpha_1 f(u_1, t_*) + \alpha_2 f(u_2, t_*) + \dots + \alpha_{n+1} f(u_{n+1}, t_*).$$

Применяя к каждому вектору u_i предложение 1, имеем

$$\sum_{l=1}^k \Gamma^l(u_i, t_*) \cdot \eta^l([t_*, t_* + \Delta t]) \leq O(\Delta t).$$

Умножая каждое из полученных неравенств на α_i и затем суммируя их по $i = 1, \dots, n+1$, учитывая определение функции Γ , приходим к неравенству

$$\sum_{l=1}^k \left(\left\langle \frac{\partial G^l}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^l}{\partial t}(t_*) \right) \cdot \eta^l([t_*, t_* + \Delta t]) \leq O(\Delta t). \quad (14)$$

В то же время для каждого индекса $l \in J(t_*)$ имеет место неравенство

$$\left\langle \frac{\partial G^l}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^l}{\partial t}(t_*) \geq 0.$$

Для тех же l , которые не принадлежат множеству индексов $J(t_*)$, в силу условия (6) при всех малых Δt имеет место $\eta^l([t_*, t_* + \Delta t]) = 0$. Таким образом, все слагаемые в левой части (14) неотрицательны. Поэтому из (14) вытекает неравенство

$$\left(\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) \right) \cdot \eta^j([t_*, t_* + \Delta t]) \leq O(\Delta t).$$

Отсюда, поскольку $\left\langle \frac{\partial G^j}{\partial x}(t_*), v \right\rangle + \frac{\partial G^j}{\partial t}(t_*) > 0$, получаем (12).

Оценка линейного роста слева (13) доказывается аналогично. \square

Продолжение доказательства теоремы 2. Доказательство проведем от противного. Итак, пусть $\tau \in (t_1^*, t_2^*)$, $j \in J(\tau)$ и $\eta^j(\tau) > 0$. Предположим, что функция G^j недифференцируема в точке τ . В силу сказанного выше перед леммой для траектории x^* выход и сход с границы j -го фазового ограничения в точке τ одновременно являются гладкими тогда и

только тогда, когда функция G^j дифференцируема в точке τ . Поэтому либо выход на границу, либо сход с границы в точке τ не является гладким. Следовательно, в силу леммы при $t_* = \tau$ существует $C > 0$, для которого выполнено либо (12), либо (13). Но из каждой из этих оценок вытекает, что $\eta^j(\tau) = 0$. Полученное противоречие завершает рассмотрение. Теорема доказана. \square

Из приведенного доказательства вытекает следующий, более общий, результат.

Теорема 3. Пусть (p^*, x^*, u^*) — экстремаль, а множители Лагранжа (λ^0, ψ, η) отвечают ей в силу ПМ. Пусть $\tau \in (t_1^*, t_2^*)$, $j \in J(\tau)$. Предположим, что рост меры η^j в точке τ справа больше, чем линейный, т. е.

$$\forall C > 0 \exists \Delta t > 0: \eta^j([\tau, \tau + \Delta t]) > C \cdot \Delta t.$$

Тогда выход на границу j -го фазового ограничения в точке τ гладкий и, значит, функция $G^j(t) = G^j(x^*(t), t)$ дифференцируема слева в точке τ и ее производная слева в этой точке равна нулю.

Аналогично, если рост меры η^j в точке τ слева больше, чем линейный, т. е.

$$\forall C > 0 \exists \Delta t > 0: \eta^j([\tau - \Delta t, \tau]) > C \cdot \Delta t.$$

Тогда сход с границы j -го фазового ограничения в точке τ гладкий и, значит, функция $G^j(t) = G^j(x^*(t), t)$ дифференцируема справа в точке τ и ее производная справа в этой точке равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 475–478.
2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1983. 393 с.
3. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 4. С. 759–762.
4. Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами // Прикл. математика и механика. 1968. Vol. 32, № 2. С. 194–202.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Физматлит, 1977. 392 с.
6. Куржанский А.Б. Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1047–1050.
7. Maurer H. Differential stability in optimal control problems // Appl. Math. Optim. 1979. Vol. 5, iss. 1. P. 283–295.
8. Арутюнов А.В., Тынянский Н.Т. О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 4. С. 60–68.
9. Арутюнов А.В. К теории принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 1. С. 11–14.
10. Необходимое условие в оптимальном управлении / А.П. Афанасьев, В.В. Дикусар, А.А. Милютин, С.А. Чуканов. М.: Наука, 1990. 320 с.
11. Arutyunov A.V., Aseev S.M. State constraints in optimal control. The degeneracy phenomenon // Systems Control Lett. 1995. Vol. 26, no. 4. P. 267–273.
12. Ferreira M.M.A., Vinter R.B. When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate? // J. Math. Anal. Appl. 1994. Vol. 187, no. 2. P. 438–467.
13. Pereira F.L. A maximum principle for impulsive control problems with state constraints // Comput. Math. Appl. 2000. Vol. 19, no. 2. P. 137–155.
14. Арутюнов А.В. Свойства множителей Лагранжа в принципе максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 12. С. 1621–1630.

-
15. **Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L.** The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: Revisited // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 149. P. 474–493.
 16. **Mordukhovich B.** Variational analysis and generalized differentiation. I: Basic theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 584 p. (Grundlehren Series, Fundamental Principles of Mathematical Sciences; vol. 330.)

Аругюнов Арам Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Российский университет дружбы народов
e-mail: arutun@orc.ru

Поступила 10.07.14

Карамзин Дмитрий Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru

Перейра Фернандо Лобо
профессор
Университет г. Порто, Португалия
e-mail: flp@fe.up.pt

УДК 519.62

ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ¹**В. И. Бердышев**

В задаче о приближении непрерывной на отрезке вектор-функции линейными функциями в чебышевской метрике установлены необходимые и достаточные условия на наилучшую приближающую функцию.

Ключевые слова: вектор-функция, аппроксимация, критерий.

V. I. Berdyshev. Linear approximation of vector functions.

In a problem on the approximation of a vector function continuous on an interval by linear functions in the Chebyshev metric, necessary and sufficient conditions on the best approximation function are established.

Keywords: vector function, approximation, criterion.

Введение

В проблемах навигации автономных аппаратов актуальна задача приближения траектории в трехмерном пространстве линейными или кусочно-линейными функциями. Даже в простейшем случае линейной аппроксимации поиск эффективных характеристических свойств наилучшей аппроксимирующей функции не прост.

В данной работе исследуется задача наилучшего приближения непрерывной вектор-функции

$$Z = Z(t) = (x(t), y(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

классом L линейных функций

$$l(t) = (X_0t + X_1, Y_0t + Y_1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

в метрике

$$\|Z(t)\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |Z(t)|, \quad (0.1)$$

где

$$|Z(t)| = \sqrt{|x(t)|^2 + |y(t)|^2}.$$

Требуется охарактеризовать функцию $l^* = l^*(t) \in L$, для которой

$$\|Z(t) - l^*(t)\| = \min \{ \|Z(t) - l(t)\| : l \in L \}.$$

Для вещественнозначных и комплекснозначных функций характеристические свойства полиномов наилучшего приближения установлены П. Л. Чебышевым и А. Н. Колмогоровым (см., например, [1]). Приведем вариант обобщения [2] классической теоремы А. Н. Колмогорова [3] на случай непрерывной на компакте M вектор-функции:

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УРО РАН (проект 12-П-1-1022) и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

полином l_n^* по системе n линейно независимых функций является полиномом наилучшего приближения в метрике (0.1) для функции Z тогда и только тогда, когда для любого полинома l_n имеет место неравенство

$$\min_{t \in M^*} \langle Z(t) - l_n^*(t), l_n(t) \rangle \geq 0,$$

где $M^* = \{t \in M : |Z(t) - l_n^*(t)| = \|Z - l_n^*\| \}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Представляет интерес задача сужения области поиска функции наилучшего приближения $l^* \in L$, поиска ее характеристических свойств, которые могут быть основой алгоритма построения этой функции.

1. Вспомогательные предложения

Пусть $l \in L$. Представим разность $z(t) = Z(t) - l(t)$ в виде

$$z(t) = r(t)(\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

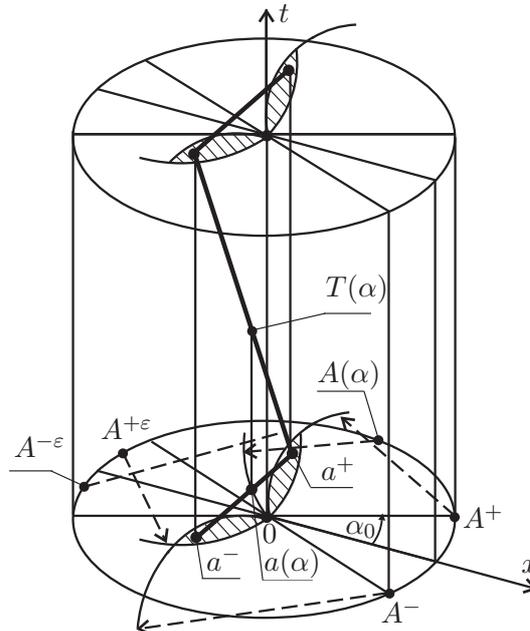
где $r(t)$, $\alpha(t)$ — непрерывные функции, $r(t) \geq 0$, $0 \leq \alpha(t) \leq 2\pi$. Обозначим

$$M = M_z = \{(t, \alpha(t)) : |z(t)| = \|z(t)\|\} \tag{1.1}$$

— множество точек максимального уклонения функции l от Z . Если множество значений $\alpha(t)$ для точек максимального уклонения плотно на отрезке $[0, 2\pi]$, то, как легко видеть, функция l является ближайшей к Z из класса L . Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что имеется интервал из отрезка $[0, 2\pi]$ ненулевой длины

$$(\alpha^* - \alpha_0, \alpha^* + \alpha_0), \quad 0 < \alpha_0 < \pi, \tag{1.2}$$

свободный от точек множества M_z , концы которого принадлежат M . Для дальнейшего изложения удобно осуществить поворот системы координат так, чтобы значение α^* отобразилось в нуль. Не ограничивая общности, будем также предполагать, что $\|z(t)\| = 1$. Введем следующие обозначения (см. рисунок):



Рисунок

$$A(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

$$A^+ = A(\alpha_0), \quad A^- = A(-\alpha_0), \quad A^{+\varepsilon} = A(\pi - \alpha_0 + \varepsilon), \quad A^{-\varepsilon} = A(\pi + \alpha_0 - \varepsilon), \quad \varepsilon < \alpha_0,$$

$V(a)$, $\overset{\circ}{V}(a)$, $S(a)$ — круг, открытый круг и соответственно окружность единичного радиуса с центром в точке a , содержащиеся в плоскости (x, y) . Выберем в этой плоскости точки $a^+ = a^+(\alpha_0, \varepsilon)$, $a^- = a^-(\alpha_0, \varepsilon)$ так, что

$$a^+ \in \overset{\circ}{V}(A^+) \cap \overset{\circ}{V}(A^{-\varepsilon}), \quad a^- \in \overset{\circ}{V}(A^-) \cap \overset{\circ}{V}(A^{+\varepsilon}), \quad (1.3)$$

и зададим линейную функцию l в виде

$$l_*(t) = l_{\alpha^*}(t) = (1-t)(a^+, 0) + t(a^-, 1), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.4)$$

Легко установить справедливость следующих лемм.

Лемма 1. Для любого $\alpha \in (\pi - \alpha_0 + \varepsilon, \pi + \alpha_0 - \varepsilon)$ выполняется включение

$$[a^+, a^-] \subset \overset{\circ}{V}(A(\alpha)).$$

Лемма 2. Пусть $t \in [0, 1]$, $|z(t)| = 1$. Неравенство

$$|z(t) - l_*(t)| < 1$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$(\overset{\circ}{V}(A(\alpha(t)) + t)) \cap [(a^+, 0), (a^-, 1)] \neq \emptyset.$$

Из лемм 1, 2 следует

Лемма 3. Для всех t таких, что $\pi - \alpha_0 + \varepsilon \leq \alpha(t) \leq \pi + \alpha_0 - \varepsilon$ и $|z(t)| = 1$, выполняется неравенство

$$|z(t) - l_*(t)| < 1.$$

2. Основные результаты

Сперва приведем необходимое условие на полином $l = l^* \in L$ наилучшего приближения.

Теорема 1. Пусть функция $z = z(t)$ такова, что

$$|z(t)| < 1 \quad \text{при} \quad -\alpha_0 < \alpha(t) < \alpha_0.$$

Если

$$\sup\{t : \alpha(t) < \pi - \alpha_0\} < \inf\{t : \alpha(t) > \pi + \alpha_0\}, \quad (2.1)$$

то существует линейная функция $l = l(t)$, для которой

$$\|z(t) - l(t)\| < 1.$$

Доказательство. Пусть a^* — точка пересечения отрезка $[a^+, a^-]$ с осью абсцисс. Для любых $T \in (0, 1)$ и $0 < \varepsilon < \alpha_0$ точки a^+ , a^- (1.3) можно выбрать так, что

$$|a^+ - a^*| = T|a^+ - a^-|.$$

Пусть t_* и t^* — левая и, соответственно, правая границы в неравенстве (2.1). Возьмем число T удовлетворяющим условиям

$$t_* < T < t^*, \quad \alpha(T) = \pi.$$

Ввиду (2.1) имеет место неравенство $t < T$, если

$$\alpha_0 \leq \alpha(t) \leq \pi - \alpha_0,$$

а в силу непрерывности функции $\alpha(t)$ неравенство $t < T$ выполняется при условии

$$\alpha_0 \leq \alpha(t) \leq \pi - \alpha_0 + \delta$$

для $0 < \delta < \varepsilon$. Аналогично устанавливается неравенство $t > T$ для t , удовлетворяющего условию

$$\pi + \alpha_0 - \delta \leq \alpha(t) \leq 2\pi - \alpha_0.$$

Ввиду леммы 2

$$|z(t) - l(t)| < 1 \quad \text{при } t \in [\alpha_0, \pi - \alpha_0 + \delta] \cup [\pi + \alpha_0 - \delta, 2\pi - \alpha_0].$$

Для оставшихся t , т. е. для t , удовлетворяющих условию

$$\pi - \alpha_0 + \varepsilon \leq \alpha(t) \leq \pi + \alpha_0 - \varepsilon,$$

неравенство $|z(t) - l(t)| < 1$ следует из леммы 3. Доказательство завершено. \square

Итак, наличие обратного к (2.1) неравенства есть необходимое условие на функцию $l^*(t)$ наилучшего приближения. Далее формулируются необходимые и достаточные условия. Для α из множества

$$[\alpha_0, \pi - \alpha_0] \cup [\pi + \alpha_0, 2\pi - \alpha_0] \tag{2.2}$$

определим точку

$$a(\alpha) = a(\alpha, \varepsilon) = [a^+, a^-] \cap S(A(\alpha))$$

и функцию

$$T = T_*(\alpha) = T_{\alpha^*}(\alpha) = \frac{|a^+ - a(\alpha)|}{|a^+ - a^-|}.$$

Индекс α^* в этом обозначении подчеркивает связь $T(\alpha)$ с исходным интервалом $(\alpha^* - \alpha_0, \alpha^* + \alpha_0)$ (1.2). Функция $T(\alpha)$ определена и в δ -расширении множества (2.2) при $0 < \delta < \varepsilon^*$. Она является непрерывной.

Из леммы 2, определения функций $T_*(\alpha)$ и $l_*(t)$ (см. (1.4)) следует

Лемма 4. *Неравенство*

$$|z(t) - l_*(t)| < 1$$

при $\alpha(t) \in [\alpha_0, \pi - \alpha_0]$ выполняется тогда и только тогда, когда $t < T_*(\alpha(t))$, а при $\alpha(t) \in [\pi + \alpha_0, 2\pi - \alpha_0]$ оно выполняется тогда и только тогда, когда $t > T_*(\alpha(t))$.

З а м е ч а н и е. Ввиду непрерывности функций $\alpha(t)$, $T_*(\alpha)$ лемма 4 останется верной, если в ее формулировке отрезки $[\alpha_0, \pi - \alpha_0]$, $[\pi + \alpha_0, 2\pi - \alpha_0]$ заменить на их δ -расширения.

С помощью лемм 3, 4 и замечания к лемме 4 устанавливается

Теорема 2. *Пусть $l \in L$,*

$$z(t) = Z(t) - l(t) = r(t)(\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) \quad \text{и} \quad \|z(t)\| = 1.$$

Линейная функция $l \in L$ является ближайшей к Z в том и только в том случае, когда не существует функции T_ (и, значит, функции l_* вида (1.4)), для которой при всех $(t, \alpha(t)) \in M_z$ выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} t < T_*(\alpha(t)) \quad \text{при} \quad \alpha_0 \leq \alpha(t) \leq \pi - \alpha_0, \\ t > T_*(\alpha(t)) \quad \text{при} \quad \pi + \alpha_0 \leq \alpha(t) \leq 2\pi - \alpha_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. К вопросу о построении функции l наилучшего приближения

Пусть M_z^α — проекция множества M_z (1.1) на ось α . Определив функцию

$$t_z(\alpha) = \begin{cases} \sup\{t : \alpha = \alpha(t)\} & \text{при } \alpha \in [\alpha_0, \pi - \alpha_0] \cap M_z^\alpha, \\ \inf\{t : \alpha = \alpha(t)\} & \text{при } \alpha \in [\pi + \alpha_0, 2\pi - \alpha_0] \cap M_z^\alpha, \end{cases}$$

перепишем условия (2.3) в виде

$$\begin{aligned} t_z(\alpha) < T_*(\alpha) & \text{ при } \alpha \in [\alpha_0, \pi - \alpha_0] \cap M_z^\alpha, \\ t_z(\alpha) > T_*(\alpha) & \text{ при } \alpha \in [\pi + \alpha_0, 2\pi - \alpha_0] \cap M_z^\alpha. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Функция $t_z(\alpha)$ построена по функции $\alpha(t)$. Функция же $t_*(\alpha)$ зависит только от выбора интервала (1.2) и расположения точек a_ε^+ , a_ε^- (1.3).

Отметим, что точки $a(\alpha)$, $a(\alpha + \pi)$ не принадлежит объединению множеств

$$\overset{\circ}{V}(A^+) \cap \overset{\circ}{V}(A^{-\varepsilon}), \quad \overset{\circ}{V}(A^-) \cap \overset{\circ}{V}(A^{+\varepsilon}) \quad (3.2)$$

и, как легко видеть,

$$|a(\alpha) - a(\alpha + \pi)| = O(\varepsilon^2). \quad (3.3)$$

Функция T строго возрастает на каждом из отрезков (2.2), и

$$T(\pi - \alpha_0) > T(\pi + \alpha_0).$$

Кроме того,

$$T(\alpha) < T(\alpha + \pi) \quad \text{при } \alpha_0 \leq \alpha \leq \pi - \alpha_0$$

и из (3.3) следует, что

$$T(\alpha + \pi) - T(\alpha) = O(\varepsilon). \quad (3.4)$$

Диаметр каждого из множеств (3.2) равен величине

$$\frac{2 \sin \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon},$$

поэтому

$$\|l_*(t)\| \leq 2 \sin \varepsilon.$$

При выборе точек a_ε^+ , a_ε^- естественно намерение удовлетворить обоим неравенствам (3.1). Важно отметить, что

— эта задача усложняется при уменьшении ε ввиду соотношения (3.4),

— при фиксированном α функция T растет при удалении точки a^+ от начала координат и приближении к нему точки a^- .

Если соотношения (3.1) удалось обеспечить, то, используя стандартные рассуждения, связанные с равномерной непрерывностью функции $z(t)$, можно выбрать малое число λ , при котором

$$\|z(t) - \lambda l_*(t)\| < 1. \quad (3.5)$$

Алгоритм решения задачи наилучшей аппроксимации состоит в последовательном переборе отрезков (1.2), свободных от точек максимального уклонения, поиска для каждого из них функции l_* (точек a^+ , a^- (1.3)) с целью удовлетворить условиям (2.3) и поиска числа λ , для которого выполняется неравенство (3.5).

Приведем пример функции $Z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, для которой при $l(t) \equiv 0$ неравенства (3.1) одновременно удовлетворить нельзя и, значит, функция $l(t) \equiv 0$ является наилучшей.

Пример. Пусть $\mu > 0$ — малое число, $0 < \alpha_0 < \pi$, функция $\alpha(t)$ непрерывна, линейна на отрезках $[0, \mu]$, $[\mu, 1 - \mu]$, $[1 - \mu, 1]$,

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \alpha(\mu) = 2\pi, \quad \alpha(1 - \mu) = 0, \quad \alpha(1) = 2\pi - \alpha_0,$$

функция $z(t)$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$z(t) = 1 \quad \text{при} \quad \alpha_0 \leq \alpha(t) \leq 2\pi - \alpha_0, \quad 0 < z(t) < 1 \quad \text{при} \quad -\alpha_0 < \alpha(t) < \alpha_0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
2. **Зуховицкий С.И., Крейн М.Г.** Замечание об одном возможном обобщении теорем Хаара и А. Н. Колмогорова // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 1. С. 217–229.
3. **Колмогоров А.Н.** Замечания по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи мат. наук. 1948. Т. III, вып. 1(23). С. 216–221.

Бердышев Виталий Иванович

Поступила 18.09.2014

академик РАН

директор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: bvi@imm.uran.ru

УДК 519.87

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК¹****М. П. Ващенко, Я. С. Пронин, А. А. Шананин**

Транспортная задача математического программирования модифицирована для анализа экономики железнодорожных грузоперевозок в современных российских условиях. Построен вариационный принцип в форме пары взаимно двойственных задач выпуклого программирования, из которого находится конкурентное равновесие в модели железнодорожных перевозок. Предложен подход к анализу несовершенной конкуренции, распределению посреднической прибыли и роли коммуникационных ограничений в транспортной сети.

Ключевые слова: общественные блага, модель грузоперевозок, коммуникационные ограничения, теорема Фенхеля, преобразование Лежандра — Юнга — Фенхеля, конкурентное равновесие.

M. P. Vashchenko, Ya. S. Pronin, A. A. Shaninin. A mathematical model of the economics of railway cargo transportation.

The transportation mathematical programming problem is modified for the analysis of the economics of railway cargo transportation in modern Russia. A variation principle in the form of a pair of mutually dual convex programming problems is constructed, and a competitive equilibrium in the railway transportation model is found from this principle. An approach to the analysis of imperfect competition, distribution of the intermediary's profit, and the role of communication constraints in a transportation network is proposed.

Keywords: public goods, cargo transportation model, communication constrains, Fenchel theorem, Legendre–Young–Fenchel transform, competitive equilibrium.

Введение

Железнодорожные грузоперевозки играют определяющую роль в сохранении экономической целостности страны. Государственная политика сдерживания потребительской инфляции за счет ограничения тарифов на услуги естественных монополий как следствие порождает дефицит финансовых ресурсов на обновление и модернизацию их основных фондов. В качестве возможного подхода к решению проблемы обычно предлагается выделить некоторый сегмент деятельности естественной монополии и привлечь в него частных инвесторов. В российской системе железнодорожных перевозок недостаток финансовых ресурсов привел к необходимости решать проблему обновления вагонного парка. Эта проблема была решена в процессе начавшегося в 2001 г. реформирования ОАО “РЖД” за счет привлечения частных инвесторов и допуска на рынок грузоперевозок коммерческих компаний, являющихся владельцами вагонного парка и посредниками между ОАО “РЖД” и потребителями услуг по грузоперевозке. Появление таких посредников могло привести к росту тарифов на грузоперевозки, сокращению железнодорожного грузооборота и специализации на перевозке высокодоходных грузов. Поэтому при реформировании ОАО “РЖД” были выделены крупные компании ОАО “Первая грузовая компания”, ОАО “Федеральная грузовая компания” и ОАО “ТрансКонтейнер”. В управлении этими компаниями сохраняется государственное влияние, структура их совокупного грузооборота в целом сохранила дореформенные пропорции, и они осуществляют более 80% грузоперевозок. Это позволило, обновив парк грузовых вагонов и устранив их дефицит, не допустить неконтролируемый рост тарифов и сокращение грузооборота. В частности, за счет перекрестного субсидирования сохраняется перевозка грузов с низкой доходностью, что важно

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-07-13110 офи-м-РЖД).

для сохранения целостности страны. Однако проявились и негативные последствия. Небольшие коммерческие компании повысили тарифы, предложив лучшее качество услуг (более короткие сроки перевозок), и стали специализироваться на перевозке высокодоходных грузов. Такая специализация вызвала увеличение перегона порожняка, увеличила нагрузку на транспортную инфраструктуру в целом, что порождает увеличение сроков обслуживания. Кроме того, увеличение тарифов оказывает влияние на спрос на услуги по железнодорожным грузоперевозкам. В частности, увеличился объем перевозок высокодоходных грузов автотранспортом. Все эти последствия являются упущенной прибылью для системы железнодорожных грузоперевозок в целом и нуждаются в анализе, учитывающем косвенные последствия принимаемых решений. Естественным языком для этого являются математические модели, учитывающие специфику экономических отношений, сложившихся в отрасли. Удачным примером такого анализа может служить знаменитая работа Л.В. Канторовича и М.К. Гавурина [1], которая послужила исходной посылкой для наших исследований. В современных российских условиях модель и постановки задач из [1] нуждаются в модификации, с тем чтобы учесть влияние рыночной конъюнктуры и тарифов на спрос на услуги по железнодорожным грузоперевозкам, а также возможности извлечения сверхприбыли.

1. Конкурендное равновесие и вариационные принципы в модели железнодорожных грузоперевозок

Рассмотрим модель, в которой выделены m видов товаров², пункты потребления товаров I , пункты производства J . Обозначим через X_i^k , $k \in K$, $K = \{1, \dots, m\}$, количество k -го товара, поступившего в пункт потребления $i \in I$, а через Y_j^k — количество k -го товара, вывезенного из пункта производства $j \in J$. Будем считать, что от поступивших товаров в пункте потребления $i \in I$ получается доход³ $F_i(X_i^1, \dots, X_i^m)$, а себестоимость производства товаров в пункте производства $j \in J$ в количестве (Y_j^1, \dots, Y_j^m) равна $G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m)$. Предположим, что эти функции удовлетворяют традиционным требованиям, т. е. непрерывны, монотонно не убывают по своим аргументам, функции $F_i(X_i^1, \dots, X_i^m)$ вогнуты, а функции $G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m)$ выпуклы. Обозначим через c_{ij}^k затраты в денежном выражении на перевозку единицы k -го товара из пункта производства j в пункт потребления i , через z_{ij}^k — объем перевозок k -го товара из j -го пункта производства в i -й пункт потребления, через p_i^k — цену k -го товара в i -м пункте потребления, через \hat{p}_j^k — цену k -го товара в j -м пункте производства.

Рассмотрим сначала функционирование отрасли в условиях совершенной конкуренции, когда экономические агенты не могут влиять своим поведением на цены и максимизируют свою прибыль при заданных ценах.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что набор неотрицательных чисел

$$\left\{ X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k \mid i \in I, j \in J, k \in K \right\}$$

является конкурентным равновесием в модели железнодорожных грузоперевозок, если:

- 1) $\forall i \in I \quad (X_i^1, \dots, X_i^m) \in \text{Arg max} \left\{ F_i(x_i^1, \dots, x_i^m) - \sum_{i=1}^k p_i^k x_i^k \mid (x_i^1, \dots, x_i^m) \geq 0 \right\};$
- 2) $\forall j \in J \quad (Y_j^1, \dots, Y_j^m) \in \text{Arg max} \left\{ \sum_{k=1}^m \hat{p}_j^k y_j^k - G_j(y_j^1, \dots, y_j^m) \mid (y_j^1, \dots, y_j^m) \geq 0 \right\};$
- 3) $\forall i \in I, k \in K \quad X_i^k \leq \sum_{j \in J} z_{ij}^k, \quad p_i^k \left(X_i^k - \sum_{j \in J} z_{ij}^k \right) = 0$, т. е. спрос на k -й товар в пункте

²При идентификации модели железнодорожных грузоперевозок выделяемые товары могут классифицироваться по типам железнодорожных вагонов, используемых для их перевозки.

³Функцию $F_i(X_i^1, \dots, X_i^m)$ можно интерпретировать как производственную функцию в i -м пункте потребления.

потребления i не превосходит суммарных объемов k -го товара завозимых в пункт i , причем отличие возможно лишь в случае нулевых цен на товар k в пункте i ;

$$4) \forall j \in J, k \in K \quad Y_j^k \geq \sum_{i \in I} z_{ij}^k, \quad \hat{p}_j^k \left(Y_j^k - \sum_{i \in I} z_{ij}^k \right) = 0, \text{ т. е. производство } k\text{-го товара в}$$

пункте производства j не меньше суммарных отправляемых из пункта j объемов товара k , причем отличие возможно лишь в случае нулевых цен на товар k в пункте j ;

5) $\forall i \in I, j \in J, \quad p_i^k \leq \hat{p}_j^k + c_{ij}^k, \quad z_{ij}^k \geq 0, \quad z_{ij}^k (\hat{p}_j^k + c_{ij}^k - p_i^k) = 0$, т. е. цены на k -й товар в пункте потребления i не превосходят суммарных издержек на доставку этого товара, включающих цену закупки товара в пункте производства j и затраты на перевозку по маршруту " $j \rightarrow i$ ", и в точности равны им, если перевозка k -го товара осуществляется по маршруту " $j \rightarrow i$ ".

З а м е ч а н и е. Предлагаемое понятие конкурентного равновесия в модели железнодорожных грузоперевозок соответствует вальрасовской концепции совершенного конкурентного равновесия, в которой субъекты экономики максимизируют свои прибыли, считая, что своими решениями они не влияют на сложившиеся цены на товары, а цены устанавливаются так, чтобы спрос на каждый вид товаров соответствовал его предложению. В отличие от традиционных постановок задач о грузоперевозках в модели учитывается эластичность спроса и предложения по ценам. Вычисление конкурентного равновесия может быть сведено к решению следующего вариационного неравенства (стандартной задачи дополненности). Рассмотрим множество $R_+^N = \{ (z_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J) \geq 0 \}$, где $N = |K| \times |I| \times |J|$, а $|K|, |I|, |J|$ — число элементов в множествах K, I, J соответственно. Определим многозначное отображение

$$P(z_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J) = \left\{ (\hat{p}_j^k - p_i^k + c_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J) | \right. \\ \left. (\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) \in \partial G_j \left(\sum_{i \in I} z_{ij}^1, \dots, \sum_{i \in I} z_{ij}^m \right), (p_i^1, \dots, p_i^m) \in \partial F_i \left(\sum_{j \in J} z_{ij}^1, \dots, \sum_{j \in J} z_{ij}^m \right) \right\}$$

из $R_+^N = \{ (z_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J) \geq 0 \}$ в $R^N = \{ (P_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J) \}$.

Здесь $\partial F_i(\bullet)$ — супердифференциал вогнутой функции $F_i(\bullet)$, $\partial G_i(\bullet)$ — субдифференциал выпуклой функции $G_i(\bullet)$.

Напомним, что решением стандартной задачи дополненности $(R_+^N, P(z_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J))$, которая является частным случаем вариационного неравенства [2, с. 157], называется точка $(\tilde{z}_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J) \in R_+^N$, для которой найдется точка $(P_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J) \in P(\tilde{z}_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J)$ такая, что

$$P_{ij}^k \geq 0, \quad P_{ij}^k \tilde{z}_{ij}^k = 0 \quad (k \in K, i \in I, j \in J).$$

Для эффективного анализа и численного решения вариационного неравенства $(R_+^N, P(z_{ij}^k | k \in K, i \in I, j \in J))$ построим пару взаимно двойственных задач выпуклой оптимизации, по решениям которых строится конкурентное равновесие.

Рассмотрим задачу о максимизации прибыли экономической системы с учетом затрат на грузоперевозки:

$$\sum_{i \in I} F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{j \in J} G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) - \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} c_{ij}^k z_{ij}^k \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$X_i^k \leq \sum_{j \in J} z_{ij}^k \quad (i \in I, k \in K), \quad (1.2)$$

$$Y_j^k \geq \sum_{i \in I} z_{ij}^k \quad (j \in J, k \in K), \quad (1.3)$$

$$z_{ij}^k \geq 0 \quad (i \in I, j \in J, k \in K). \quad (1.4)$$

Функция прибыли j -го производителя выражается через функцию его себестоимости с помощью преобразования Лежандра — Юнга — Фенхеля:

$$\pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) = \sup \left\{ \sum_{k \in K} \hat{p}_j^k Y_j^k - G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) \mid (Y_j^1, \dots, Y_j^m) \geq 0 \right\}.$$

Функция прибыли i -го потребителя определяется как

$$\Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) = \sup \left\{ F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{k \in K} p_i^k X_i^k \mid (X_i^1, \dots, X_i^m) \geq 0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что функция $\Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m)$ является непрерывной, выпуклой, монотонно невозрастающей функцией по переменным (p_i^1, \dots, p_i^m) на множестве R_+^m , а функция $\pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m)$ — непрерывной, выпуклой, монотонно неубывающей функцией по переменным $(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m)$ на множестве R_+^m . По теореме Фенхеля — Моро [2, с. 44], имеем

$$F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) = \inf \left\{ \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{k \in K} p_i^k X_i^k \mid (p_i^1, \dots, p_i^m) \geq 0 \right\}, \quad (1.5)$$

$$G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) = \sup \left\{ \sum_{k \in K} \hat{p}_j^k Y_j^k - \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) \mid (\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) \geq 0 \right\}. \quad (1.6)$$

Двойственной по Фенхелю [2, с. 46, 47], экстремальной задачей к задаче (1.1)–(1.4) является задача выпуклого программирования:

$$\sum_{i \in I} \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{j \in J} \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) \rightarrow \min, \quad (1.7)$$

$$p_i^k \leq \hat{p}_j^k + c_{ij}^k, \quad p_i^k \geq 0, \quad \hat{p}_j^k \geq 0 \quad (i \in I, j \in J, k \in K). \quad (1.8)$$

Теорема 1. *Для того чтобы набор неотрицательных векторов*

$$\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$$

являлся конкурентным равновесием в модели железнодорожных грузоперевозок, необходимо и достаточно, чтобы набор $\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$ являлся решением экстремальной задачи (1.1)–(1.4), а $\{p_i^k, \hat{p}_j^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$ — решением двойственной задачи (1.7)–(1.8). При этом оптимальные значения функционалов в задачах (1.1)–(1.4) и (1.7)–(1.8) равны.

Из теоремы 1 следует, что конкурентное равновесие в модели железнодорожных перевозок является экономически эффективным.

2. Несовершенная конкуренция

В условиях совершенной конкуренции при наличии объемов железнодорожных перевозок $z_{ij}^k > 0$ k -го товара из j -го пункта производства в i -й пункт потребления из условий дополняющей нежесткости к ограничениям (1.8) следует выполнение соотношения $p_i^k = \hat{p}_j^k + c_{ij}^k$. Рассмотрим вопрос о характере рыночных отношений в современной России на примере внутренних железнодорожных перевозок зерна в 2013 г. между субъектами РФ. Общий объем внутренних перевозок зерна за 2013 г. в стране составил 140428 вагонов емкостью 65 т, причем данные о ценах производителей и покупателей имелись для 85060 вагонов, (61% от общего объема внутренних железнодорожных грузоперевозок зерна). Тарифы на перевозку вагонов с зерном из j -го пункта производства в i -й пункт потребления определяются расстоянием⁴ ρ_{ij} между ними по формуле

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{cases} 18710.85 + 50.63 \rho_{ij}, & \text{если } \rho_{ij} \leq 2000 \text{ км,} \\ 79197.95 + 20.46 \rho_{ij}, & \text{если } \rho_{ij} > 2000 \text{ км.} \end{cases}$$

⁴Единица измерения расстояния — километр.

Расчеты показывают, что для перевозок зерна в РФ в 2013 г.

$$\frac{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (p_i - \hat{p}_j) z_{ij}}{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \tilde{c}_{ij} z_{ij}} \approx 2,$$

тогда как в условиях совершенной конкуренции это отношение должно было бы равняться 1. При этом “посредническая” прибыль $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (p_i - \hat{p}_j - \tilde{c}_{ij}) z_{ij}$ составила значимую сумму и нуждается в анализе.

Появление на рынке услуг по перевозке грузов частных компаний, инвестировавших средства в обновление вагонного парка, потенциально может привести к повышению тарифов и сокращению объемов перевозок. Для оценки возникающей угрозы рассмотрим задачу, в которой “перевозчик”, пользуясь услугами ОАО “РЖД” по перевозке k -го товара из j -го пункта производства в i -й пункт потребления по тарифу ОАО “РЖД” \tilde{c}_{ij}^k и предоставляя принадлежащие ему вагоны, назначает свой тариф на услугу c_{ij}^k в целях максимизации своего дохода

$$\sum_{k \in K, i \in I, j \in J} (c_{ij}^k - \tilde{c}_{ij}^k) z_{ij}^k(c) \rightarrow \max_{c_{ij}^k \geq \tilde{c}_{ij}^k}. \quad (2.1)$$

Здесь функции спроса $z_{ij}^k(\bullet)$ на услуги по перевозке определяются из решения семейства задач (1.1)–(1.4) при различных значениях тарифов $c = \{c_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$.

Положим $\Phi(c) = \sum_{k \in K, i \in I, j \in J} (c_{ij}^k - \tilde{c}_{ij}^k) z_{ij}^k(c)$ и

$$\begin{aligned} \Lambda(c_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K) = \min & \left\{ \sum_{i \in I} \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{j \in J} \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) \right. \\ & \left. + \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} \tau_{ij}^k (c_{ij}^k + \hat{p}_j^k - p_i^k) \mid p_i^k \geq 0, \hat{p}_j^k \geq 0, \tau_{ij}^k \leq 0 \quad (i \in I, j \in J, k \in K) \right\}. \end{aligned}$$

Функция $\Lambda(c)$ является выпуклой, ее значение равно оптимальному значению функционала задачи (1.1)–(1.4) при значениях параметров $c = \{c_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$, равных значениям аргумента функции $\Lambda(c)$. Кроме того,

$$(z_{ij}^k(c) \mid i \in I, j \in J, k \in K) \in -\partial\Lambda(c),$$

где $\partial\Lambda(\bullet)$ — субдифференциал функции $\Lambda(\bullet)$.

Таким образом, анализ монопольного извлечения сверхприбыли перевозчиком сводится к анализу двухуровневой задачи оптимизации. В силу выпуклости функции $\Lambda(c)$ имеем

$$\Phi(c) = \sum_{k \in K, i \in I, j \in J} (c_{ij}^k - \tilde{c}_{ij}^k) z_{ij}^k(c) \leq \Lambda(\tilde{c}) - \Lambda(c).$$

Величина $\Phi(c)$ равна сверхприбыли (доходу от инвестиций), которую получает посредник на рынке грузоперевозок, назначающий повышенные тарифы $c = \{c_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$ вместо тарифов $\tilde{c} = \{\tilde{c}_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$. Величина $\Lambda(\tilde{c}) - \Lambda(c)$ равна совокупным убыткам потребителей и производителей в результате изменения тарифов. Отношение

$$\theta = \frac{\Phi(c)}{\Lambda(\tilde{c}) - \Lambda(c)}$$

является показателем общесистемных потерь в результате изменения тарифов. Если $\theta = 1$, то сверхприбыль посредника равна совокупным убыткам потребителей и производителей, и общесистемные потери отсутствуют. Если $\theta < 1$, то повышение тарифов не только приводит к перераспределению доходов, но и снижает эффективность функционирования экономической системы в целом. Чем меньше θ , тем больше доля общесистемных потерь по сравнению с величиной перераспределяемой прибыли.

2.1. Монопольный посредник

Рассмотрим пример рынка однородного товара, на котором производитель, имеющий функцию себестоимости

$$G(Y) = \begin{cases} BY + AY^2, & \text{если } Y \leq \hat{Y}, \\ +\infty, & \text{если } Y > \hat{Y}, \end{cases}$$

взаимодействует с потребителем, имеющим функцию дохода от используемого груза

$$F(X) = \begin{cases} bX + aX^2, & \text{если } X \leq \hat{X}, \\ b\hat{X} + a\hat{X}^2, & \text{если } X > \hat{X}, \end{cases}$$

и перевозчиком, имеющим себестоимость перевозки единицы груза \tilde{c} . Здесь

$$a < 0, \quad A > 0, \quad b > 0, \quad B > 0, \quad c > 0, \quad \hat{X} > 0, \quad \hat{Y} > 0, \quad \hat{X} \leq -\frac{b}{2a}.$$

Тогда

$$\Pi(p) = \begin{cases} -\frac{(b-p)_+^2}{4a}, & \text{если } b + 2a\hat{X} \leq p, \\ (b-p)\hat{X} + a\hat{X}^2, & \text{если } b + 2a\hat{X} > p, \end{cases}$$

$$\pi(\hat{p}) = \begin{cases} \frac{(\hat{p}-B)_+^2}{4A}, & \text{если } \hat{p} \leq B + 2A\hat{Y}, \\ (\hat{p}-B)\hat{Y} - A\hat{Y}^2, & \text{если } \hat{p} > B + 2A\hat{Y}. \end{cases}$$

Для рассматриваемого примера задача (1.7)–(1.8) имеет вид

$$\Pi(p) + \pi(\hat{p}) \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$p \leq \hat{p} + c, \quad p \geq 0, \quad \hat{p} \geq 0. \quad (2.2)$$

Поскольку функция $\Pi(p)$ не возрастает по переменной p , можно положить на оптимальном решении $p = \hat{p} + c$. Тогда задача минимизации (2.1)–(2.2) сводится к следующей задаче:

$$\min \{ \Pi(\hat{p} + c) + \pi(\hat{p}) \mid \hat{p} \geq 0 \}.$$

Если потребитель не насыщен и производственные возможности не исчерпаны, т.е. $(b - B - c)_+ < 2(A - a) \min(\hat{X}, \hat{Y})$, то

$$\frac{\partial \Pi(\hat{p} + c)}{\partial \hat{p}} + \frac{\partial \pi(\hat{p})}{\partial \hat{p}} = 0,$$

что эквивалентно

$$\frac{b - \hat{p} - c}{2a} + \frac{\hat{p} - B}{2A} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\hat{p} = \frac{bA - cA - Ba}{A - a}.$$

Такой цене в пункте производства соответствует объем грузоперевозок

$$z(c) = \frac{\partial \pi(\hat{p})}{\partial \hat{p}} = \frac{(\hat{p} - B)_+}{2A} = \frac{(b - c - B)_+}{2(A - a)}. \quad (2.3)$$

В рассматриваемом примере задача (2.1) имеет вид: $(c - \tilde{c}) z(c) \rightarrow \max_{c \geq \tilde{c}}$.

Если $0 < b - B - \tilde{c} < 4(A - a) \min(\hat{X}, \hat{Y})$, то решение этой задачи \check{c} и соответствующий ему объем грузоперевозок $z(\check{c})$ определяются как

$$\check{c} = \frac{b - B + \tilde{c}}{2}, \quad z(\check{c}) = \frac{b - B - \tilde{c}}{4(A - a)}.$$

Подчеркнем, что $z(\check{c}) = z(\tilde{c})/2$, т.е. в рассматриваемом примере появление монопольного посредника (перевозчика) между ОАО «РЖД» и производителем-потребителем товаров приводит к такому повышению тарифов на грузоперевозки, при котором грузооборот уменьшается вдвое. Нетрудно вычислить, что $\theta = 2/3$, т.е. извлечение монопольной сверхприбыли посредником сопровождается большим снижением общесистемной эффективности.

2.2. Олигополия Курно посредников

Будем считать выполненными предположения

$$a < 0, \quad A > 0, \quad b > 0, \quad B > 0, \quad c > 0, \quad \hat{X} > 0, \quad \hat{Y} > 0, \quad \hat{X} \leq -\frac{b}{2a},$$

$$0 < b - B - \tilde{c} < 4(A - a) \min(\hat{X}, \hat{Y}).$$

Из выражения (2.3) можно найти обратные функции спроса на услуги по грузоперевозке, т.е. зависимость между тарифом на перевозки c и спросом на услуги по грузоперевозке z при этом тарифе, в условиях совершенной конкуренции между производителем и потребителем:

$$c(z) = \begin{cases} b - B - 2(A - a)z, & \text{если } 0 \leq z \leq \frac{b - B - \tilde{c}}{2(A - a)}, \\ \tilde{c}, & \text{если } z > \frac{b - B - \tilde{c}}{2(A - a)}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Рассмотрим олигополию Курно, в которой выделено n равноправных перевозчиков. Тогда индекс рыночной концентрации Герфиндаля — Хиршмана⁵ вычисляется по формуле $HHI = 10000/n$. Будем считать, что каждый из них, например перевозчик ξ , выбирает объем оказываемых услуг по грузоперевозкам z_ξ так, чтобы максимизировать свою прибыль:

$$z_\xi \left(c \left(\sum_{\zeta=1}^n z_\zeta \right) - \tilde{c} \right) \rightarrow \max_{z_\xi}. \quad (2.5)$$

Таким образом, прибыль перевозчика ξ зависит не только от его стратегии по выбору объема оказываемых услуг по грузоперевозкам z_ξ , но и от стратегий других перевозчиков. В модели Курно предполагается, что компромиссом между интересами перевозчиков является равновесие по Нэшу в игре в нормальной форме, в которой стратегиями перевозчиков являются объемы грузоперевозок $z_\xi \geq 0$, а функциями выигрыша — их прибыли (2.5). В случае, когда обратные функции спроса имеют вид (2.4), в этой игре существует единственное равновесие по Нэшу (см., например, [3]), и соответствующий суммарный объем грузоперевозок z вычисляется следующим образом:

$$z = \frac{n}{2(n+1)} \frac{(b - B - \tilde{c})}{(A - a)}. \quad (2.6)$$

Определим показатель, характеризующий общесистемные потери при олигополистическом росте тарифов, как

$$\theta = \frac{(c(z) - \tilde{c})z}{\Lambda(\tilde{c}) - \Lambda(c(z))}.$$

⁵Индекс Герфиндаля — Хиршмана является принятым министерством юстиции США измерителем рыночной концентрации. Он равен сумме квадратов процентных долей фирм на рынке.

Нетрудно вычислить, что в случае олигополии Курно $\theta = 2n/(2n + 1)$. Из (2.6) видно, что увеличение числа перевозчиков приводит к увеличению объема грузоперевозок и снижению тарифов на грузоперевозки (к монотонности обратных функций спроса). В случаях, когда $n = 1$, объем грузоперевозок, определяемый по формуле (2.6), равен объему грузоперевозок z (с) монопольного грузоперевозчика. При $n \rightarrow +\infty$ объем грузоперевозок стремится к объему перевозок в условиях совершенной конкуренции: показатель $\theta \rightarrow 1$, т. е. общесистемные потери исчезают. В зависимости от индекса рыночной концентрации Герфиндаля — Хиршмана HHI грузооборот уменьшается в $10000/(10000 + HHI)$ раз, а показатель общесистемных потерь θ — в $20000/(20000 + HHI)$ раз.

Таким образом, монопольный эффект мог бы объяснить посредническую прибыль, которую мы зарегистрировали при анализе железнодорожных перевозок зерна. Возникают вопросы: что препятствует развитию конкуренции и какую роль в этом играют коммуникационные ограничения?

3. Модель железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями

Будем считать, что перевозка k -го товара из j -го пункта производства в i -й пункт потребления осуществляется по маршруту Γ_{ij}^k , который описывается множеством ребер графа, соединяющего соседние узловые станции, через которые проходит маршрут. Обозначим через $\tilde{t}_{\alpha\beta}$ себестоимость для ОАО “РЖД” перевозки единицы груза между соседними узловыми станциями со станции α на станцию β и через $\tilde{\lambda}_\alpha$ — себестоимость для ОАО “РЖД” приема и отправления единицы груза через узловую станцию α . Тогда себестоимость для ОАО “РЖД” перевозки единицы k -го товара из j -го пункта производства в i -й пункт потребления определяется как

$$\tilde{c}_{ij}^k = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{\lambda}_\alpha.$$

Обозначим пропускную способность железной дороги по перевозке грузов из узловой станции α на узловую станцию β через $V_{\alpha\beta}$. Пропускную способность узловой станции α по приему и отправлению грузов обозначим M_α .

Рассмотрим задачу о максимизации прибыли экономической системы с учетом коммуникационных ограничений:

$$\sum_{i \in I} F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{j \in J} G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) - \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{\lambda}_\alpha \right) z_{ij}^k \rightarrow \max, \quad (3.1)$$

$$X_i^k \leq \sum_{j \in J} z_{ij}^k \quad (i \in I, k \in K), \quad (3.2)$$

$$Y_j^k \geq \sum_{i \in I} z_{ij}^k \quad (j \in J, k \in K), \quad (3.3)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{\{i, j\}} z_{ij}^k \leq V_{\alpha\beta} \quad \forall (\alpha, \beta), \quad (3.4)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{\{i, j\}} z_{ij}^k \leq M_\alpha \quad \forall \alpha, \quad (3.5)$$

$$z_{ij}^k \geq 0 \quad (i \in I, j \in J, k \in K). \quad (3.6)$$

Отметим, что при решении задачи (3.1)–(3.6) экстремум следует искать также за счет выбора маршрутов перевозок Γ_{ij}^k .

Двойственной по Фенхелю [2, с. 46, 47] экстремальной задачей к задаче (3.1)–(3.6) является

задача выпуклого программирования:

$$\sum_{i \in I} \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{j \in J} \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_{\alpha} M_{\alpha} \rightarrow \min, \quad (3.7)$$

$$p_i^k \leq \hat{p}_j^k + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (t_{\alpha\beta} + \tilde{t}_{\alpha\beta}) + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (\lambda_{\alpha} + \tilde{\lambda}_{\alpha}), \quad (3.8)$$

$$p_i^k \geq 0, \quad \hat{p}_j^k \geq 0, \quad t_{\alpha\beta} \geq 0, \quad \lambda_{\alpha} \geq 0 \quad (i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k). \quad (3.9)$$

Здесь множители Лагранжа $t_{\alpha\beta}$ к коммуникационным ограничениям (3.4) интерпретируются как теневые наценки при эксплуатации ограниченной пропускной способности железной дороги, соединяющей узловые станции α и β , а множители Лагранжа λ_{α} к коммуникационным ограничениям (3.5) — как теневые наценки при эксплуатации ограниченной пропускной способности узловой станции α .

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что набор неотрицательных чисел

$$\left\{ X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha} \mid i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k \right\}$$

является конкурентным равновесием в модели железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями, если:

- 1) $\forall i \in I \quad (X_i^1, \dots, X_i^m) \in \text{Arg max} \left\{ F_i(x_i^1, \dots, x_i^m) - \sum_{k=1}^m p_i^k x_i^k \mid (x_i^1, \dots, x_i^m) \geq 0 \right\};$
- 2) $\forall j \in J \quad (Y_j^1, \dots, Y_j^m) \in \text{Arg max} \left\{ \sum_{k=1}^m \hat{p}_j^k y_j^k - G_j(y_j^1, \dots, y_j^m) \mid (y_j^1, \dots, y_j^m) \geq 0 \right\};$
- 3) $\forall i \in I, k \in K \quad X_i^k \leq \sum_{j \in J} z_{ij}^k, \quad p_i^k \left(X_i^k - \sum_{j \in J} z_{ij}^k \right) = 0;$
- 4) $\forall j \in J, k \in K \quad Y_j^k \geq \sum_{i \in I} z_{ij}^k, \quad \hat{p}_j^k \left(Y_j^k - \sum_{i \in I} z_{ij}^k \right) = 0;$
- 5) $\forall i \in I, j \in J, k \in K$

$$p_i^k \leq \hat{p}_j^k + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (t_{\alpha\beta} + \tilde{t}_{\alpha\beta}) + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (\lambda_{\alpha} + \tilde{\lambda}_{\alpha}),$$

$$z_{ij}^k \left(\hat{p}_j^k + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (t_{\alpha\beta} + \tilde{t}_{\alpha\beta}) + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (\lambda_{\alpha} + \tilde{\lambda}_{\alpha}) - p_i^k \right) = 0,$$

$$z_{ij}^k \geq 0;$$

- 6) $\forall (\alpha, \beta) \quad \sum_{k \in K} \sum_{\{i, j \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k\}} z_{ij}^k \leq V_{\alpha\beta}, \quad t_{\alpha\beta} \left(\sum_{k \in K} \sum_{\{i, j \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k\}} z_{ij}^k - V_{\alpha\beta} \right) = 0;$
- 7) $\forall (\alpha, \beta) \quad \sum_{k \in K} \sum_{\{i, j \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k\}} z_{ij}^k \leq M_{\alpha}, \quad \lambda_{\alpha} \left(\sum_{k \in K} \sum_{\{i, j \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k\}} z_{ij}^k - M_{\alpha} \right) = 0.$

Здесь условия 3)–7) имеют аналогичную интерпретацию, что и в определении 1.

Теорема 2. Для того чтобы набор неотрицательных векторов

$$\left\{ X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha} \mid i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k \right\} \quad (3.10)$$

являлся конкурентным равновесием в модели железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями, необходимо и достаточно, чтобы набор $\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$ являлся решением экстремальной задачи (3.1)–(3.6), а набор

$$\left\{ p_i^k, \hat{p}_j^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha} \mid i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k \right\}$$

— решением двойственной задачи (3.7)–(3.9)⁶. При этом оптимальные значения функционалов в задачах (3.1)–(3.6) и (3.7)–(3.9) равны.

⁶Будем говорить в этом случае, что конкурентное равновесие (3.10) соответствует паре взаимно двойственных задач выпуклого программирования (3.1)–(3.6) и (3.7)–(3.9).

Конкурентное равновесие в модели железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями является эффективным с экономической точки зрения, если считать, что маршруты грузоперевозок $\{\Gamma_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ зафиксированы. Однако при решении задачи (3.1)–(3.6) увеличить экономический результат рассматриваемой системы можно также за счет выбора маршрутов грузоперевозок $\{\Gamma_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$.

Теорема 3. Для того чтобы конкурентное равновесие в модели железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями $\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha | i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k\}$ соответствовало паре взаимно двойственных задач (3.1)–(3.6) и (3.7)–(3.9) с оптимизацией в задаче (3.1)–(3.6) по выбору маршрутов грузоперевозок $\{\Gamma_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$, необходимо, чтобы:

1. Для любых пунктов производства j и потребления i , для которых существует грузоперевозка $z_{ij}^k > 0$ товара $k \in K$ выполнялось условие (3.8).

2. Для любого маршрута грузоперевозки $\tilde{\Gamma}_{ij}$ из пункта производства j в пункт потребления i выполнялось неравенство

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (t_{\alpha\beta} + \tilde{t}_{\alpha\beta}) + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (\lambda_\alpha + \tilde{\lambda}_\alpha) \leq \sum_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} (t_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + \tilde{t}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}) + \sum_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} (\lambda_{\tilde{\alpha}} + \tilde{\lambda}_{\tilde{\alpha}}),$$

и достаточно, чтобы для любых маршрутов грузоперевозок $\{\Gamma_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ выполнялось условие (3.8).

Рассмотрим вопрос о распределении доходов от результатов экономической деятельности в конкурентном равновесии

$$\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$$

в модели железнодорожных грузоперевозок. Доход от деятельности рассматриваемой системы потребителей и производителей равен

$$\sum_{i \in I} F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{j \in J} G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m).$$

Часть этого дохода

$$\sum_{i \in I, j \in J, k \in K} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{\lambda}_\alpha \right) z_{ij}^k \quad (3.11)$$

идет на оплату услуг по железнодорожным грузоперевозкам. В то же время совокупная прибыль потребителей равна

$$\sum_{i \in I} \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m), \quad (3.12)$$

а совокупная прибыль производителей равна

$$\sum_{j \in J} \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m). \quad (3.13)$$

По теореме Фенхеля [2, с. 46, 47] оптимальные значения функционалов в задаче (3.1)–(3.6) и двойственной к ней задаче (3.7)–(3.9) равны. Откуда следует, что коммуникационные ограничения пропускной способности (3.5), (3.6), влияющие на множители Лагранжа $\{t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha t\}$ и тем самым на разность цен в пунктах потребления и производства, порождают посредническую прибыль:

$$\begin{aligned} & \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_\alpha M_\alpha = \sum_{i \in I} F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{j \in J} G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) \\ & - \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{\lambda}_\alpha \right) z_{ij}^k - \sum_{i \in I} \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) - \sum_{j \in J} \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m). \end{aligned}$$

Из условий 6 и 7 в определении конкурентного равновесия следует, что

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_{\alpha} M_{\alpha} = \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_{\alpha} \right) z_{ij}^k. \quad (3.14)$$

Увеличивая тарифы на услуги по грузоперевозкам с системы тарифов $\{\tilde{t}_{\alpha\beta}, \tilde{\lambda}_{\alpha}\}$, определяемой по стоимости издержек на обслуживание грузоперевозок, до уровня $\{\tilde{t}_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}, \tilde{\lambda}_{\alpha} + \lambda_{\alpha}\}$, ОАО “РЖД” могло бы получить финансовые ресурсы для реализации инвестиционных программ, не изменяя при этом материальных потоков $\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$.

Отметим, что реализация инвестиционных проектов по увеличению пропускной способности коммуникационных ограничений $\{M_{\alpha}, V_{\alpha\beta}t\}$ (сортировочных станций или железнодорожных путей) приводит к уменьшению доходов (3.14). Поэтому для реализации этого предложения потребуется разделить финансовые потоки (3.11) и (3.14) и создать самостоятельную организационную структуру, финансирующую инвестиционные проекты по развитию системы железнодорожного транспорта и получающую денежные средства от ОАО “РЖД” (3.14) и государства. Реализация инвестиционных проектов по увеличению пропускной способности транспортной системы приводит к уменьшению размеров денежного потока (3.14), но увеличивает оптимальное значение функционала в задаче (3.1)–(3.6), а значит, совокупные прибыли потребителей (3.12) и (3.13). Было бы логично, если бы часть увеличивающихся за счет этого поступлений с налога на прибыль государство направляло на инвестиции в систему железнодорожного транспорта.

В экстремальной задаче (3.7)–(3.9) для анализа тарифов на грузоперевозки множители Лагранжа $\{t_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha}\}$ являются оценками экономического эффекта от инвестиций в увеличение пропускной способности железной дороги $V_{\alpha\beta}$ по перевозке грузов из узловой станции α на узловую станцию β и пропускной способности M_{α} узловой станции α по приему и отправлению грузов. Решение задач (3.1)–(3.6) при различных значениях $V_{\alpha\beta}, M_{\alpha}$ позволяет выделить субъектов рассматриваемой экономической системы, заинтересованных в увеличении пропускных способностей и реализации соответствующих инвестиционных проектов.

4. Заключительные замечания об идентификации и обратных задачах в модели железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями

Идентифицируя модель, мы должны разбить железнодорожные станции и территории на группы, интерпретируемые в модели как пункт потребления или производства, а также выделить сортировочные станции и железнодорожные перегоны (например, содержащие мосты), в которых имеются существенные коммуникационные ограничения. Выделяя группу, интерпретируемую в модели как пункт производства или пункт потребления, мы должны стремиться, чтобы Δp_i^k различие в ценах k товара на территории, относящейся к i пункту производства, было существенно меньше разницы в ценах k товара в пунктах потребления и производства, между которыми имеется перевозка k товара. Будем считать, что $p_i^k \in [\hat{p}_i^k, \check{p}_i^k]$, где $\Delta p_i^k = \check{p}_i^k - \hat{p}_i^k$. Кроме того, средние тарифы \tilde{c}_{ij}^k на перевозку k товара между пунктами i и j должны быть существенно больше различия $\Delta \tilde{c}_{ij}^k$ в тарифах на перевозку k товара между различными железнодорожными станциями ξ , входящими в пункт производства j , и железнодорожными станциями η , входящими в пункт потребления i .

Рассмотрим маршрут Γ_{ij}^k перевозки k товара из пункта производства j в пункт потребления i . Тогда согласно разд. 3

$$\tilde{c}_{ij}^k = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{\lambda}_{\alpha}.$$

Отметим, что поскольку каждый пункт производства или потребления содержит несколько различных железнодорожных станций, при идентификации мы получим интервал

$\tilde{c}_{ij}^k \in [\widehat{c}_{ij}^k, \check{c}_{ij}^k]$, где $\Delta \tilde{c}_{ij}^k = \check{c}_{ij}^k - \widehat{c}_{ij}^k$. Если между пунктами производства j и потребления i имеется перевозка k товара, то

$$c_{ij}^k = p_i^k - p_j^k \geq \tilde{c}_{ij}^k, \quad p_i^k - p_j^k - \tilde{c}_{ij}^k = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_{\alpha} \geq 0.$$

Обозначим $f(\Gamma_{ij}^k) = p_i^k - p_j^k - \tilde{c}_{ij}^k \in [\widehat{p}_i^k - \check{p}_j^k - \check{c}_{ij}^k, \check{p}_i^k - \widehat{p}_j^k - \widehat{c}_{ij}^k]$.

Пусть $\Omega = \{\Gamma_{ij}^k | z_{ij}^k > 0\}$, Θ — множество портов и сортировочных станций, а Λ — множество железнодорожных перегонов, по которым имеются коммуникационные ограничения. Обозначим

$$\Theta(\Gamma_{ij}^k | \alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in \Gamma_{ij}^k, \\ 0, & \text{если } \alpha \notin \Gamma_{ij}^k, \end{cases}$$

$$\Lambda(\Gamma_{ij}^k | (\alpha, \beta)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k, \\ 0, & \text{если } (\alpha, \beta) \notin \Gamma_{ij}^k. \end{cases}$$

Справедливость следующего предложения очевидна.

Предложение. Для того чтобы линейная система

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_{\alpha} = f(\Gamma_{ij}^k), \quad \text{если } \Gamma_{ij}^k \in \Omega,$$

$$t_{\alpha\beta} \geq 0, \quad \text{если } (\alpha, \beta) \in \Lambda,$$

$$\lambda_{\alpha} \geq 0, \quad \text{если } \alpha \in \Theta,$$

была совместна, необходимо и достаточно, чтобы вектор $(f(\Gamma_{ij}^k) | \Gamma_{ij}^k \in \Omega)$ принадлежал конической оболочке $\Xi = \text{con} \left(\{\Theta(\Gamma_{ij}^k | \alpha) | \alpha \in \Theta\}, \{\Lambda(\Gamma_{ij}^k | (\alpha, \beta)) | (\alpha, \beta) \in \Theta\} \right)$.

Изучение связи комбинаторных свойств конуса Ξ с архитектурой пространственно распределенных рынков представляется интересной и важной задачей.

Проведенный на языке математических моделей анализ проблемы формирования тарифов на железнодорожные грузоперевозки позволяет сделать ряд выводов.

1. Ограничение пропускной способности может увеличивать разрыв между ценами в пунктах производства и ценами в пунктах потребления и порождает посредническую прибыль.

2. Ограничение на рост тарифов не позволяет системе железнодорожных грузоперевозок участвовать в извлечении посреднической прибыли и порождает недостаток финансовых средств на увеличение пропускной способности, модернизацию и обновление основных средств.

3. Привлечение частных инвестиций в обмен на привилегии в извлечении посреднической прибыли не является «системным решением проблемы», поскольку увеличение пропускной способности железнодорожной сети приводит к уменьшению разницы между ценами в пунктах производства и потребления и уменьшает посредническую прибыль.

4. Модельные примеры показывают, что максимизация посреднической прибыли может приводить к существенному сокращению объемов производства и снижению эффективности грузовых потоков.

5. В отличие от агентов, заинтересованных в извлечении посреднической прибыли, общество в целом (государство), в частности некоторые производители и потребители, заинтересовано в увеличении пропускной способности грузоперевозок.

6. Вычисляемые модели взаимодействия экономических агентов с учетом коммуникационных ограничений могут выявить инвесторов, заинтересованных в увеличении пропускной способности и модернизации железнодорожных грузоперевозок.

Отметим, что вопросам анализа воспроизводства и распределения товаров и услуг, предоставляемых государством и естественными монополиями, посвящена разработанная около ста лет назад концепция равновесия Э. Линдаля (1919) (см, например, [4–6]) в модели с общественными благами. Равновесие по Линдалю предполагает, что вложения экономического агента в

финансирование общественного блага определяются предельной полезностью для него общественного блага. Под общественными благами в этой модели понимаются товары и услуги, которыми могут пользоваться одновременно разные потребители. Примерами отраслей, производящих такие товары и услуги, являются инфраструктурные отрасли (естественные монополии). Основным результатом исследования таких моделей является теорема о механизме конкурентного равновесия, который должен допускать дифференциацию цен (перекрестное субсидирование), т. е. потребители различных типов за предоставленное общественное благо должны платить по разным тарифам. Каким должен быть компромисс между интересами различных экономических агентов? Для анализа этого вопроса можно предложить разные подходы. Отметим, например, цикл работ по исследованию игр с иерархическим вектором интересов [7–11].

5. Приложение

Доказательство теоремы 1. Обозначим множители Лагранжа к ограничениям (1.2) через $p_i^k \geq 0$ ($i \in I, k \in K$), а к ограничениям (1.3) — через $\hat{p}_j^k \geq 0$ ($j \in J, k \in K$). Составим функцию Лагранжа задачи (1.1)–(1.4):

$$\begin{aligned} L(X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k | i \in I, j \in J, k \in K) &= \sum_{i \in I} F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{j \in J} G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) \\ &- \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} c_{ij}^k z_{ij}^k + \sum_{i \in I, k \in K} p_i^k \left(\sum_{j \in J} z_{ij}^k - X_i^k \right) + \sum_{j \in J, k \in K} \hat{p}_j^k \left(Y_j^k - \sum_{i \in I} z_{ij}^k \right) \\ &= \sum_{i \in I} \left(F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{k \in K} p_i^k X_i^k \right) + \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} \hat{p}_j^k Y_j^k - G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) \right) \\ &\quad + \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} z_{ij}^k (p_i^k - \hat{p}_j^k - c_{ij}^k). \end{aligned}$$

По теореме Куна — Таккера набор

$$\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$$

является решением задачи (1.1)–(1.4) тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа $p_i^k \geq 0$ ($i \in I, k \in K$), $\hat{p}_j^k \geq 0$ ($j \in J, k \in K$) такие, что

$$\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$$

является конкурентным равновесием в модели железнодорожных грузоперевозок. Из теоремы Куна — Таккера, примененной к задаче (1.7)–(1.8), следует, что множители Лагранжа $p_i^k \geq 0$ ($i \in I, k \in K$), $\hat{p}_j^k \geq 0$ ($j \in J, k \in K$) являются ее решением. Действительно, обозначим множители Лагранжа к ограничениям (1.8) через $z_{ij}^k \geq 0$ ($i \in I, j \in J, k \in K$) и составим функцию Лагранжа задачи (1.7)–(1.8):

$$\begin{aligned} L(p_i^k, \hat{p}_j^k, z_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K) &= \sum_{i \in I} \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{j \in J} \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) \\ &+ \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} z_{ij}^k (p_i^k - \hat{p}_j^k - c_{ij}^k) = \sum_{i \in I} \left(\Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{j \in J, k \in K} p_i^k z_{ij}^k \right) \\ &+ \sum_{j \in J} \left(\pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) - \sum_{i \in I, k \in K} \hat{p}_j^k z_{ij}^k \right) - \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} z_{ij}^k c_{ij}^k. \end{aligned}$$

Полагая $\check{X}_i^k = \sum_{j \in J} z_{ij}^k$ ($i \in I, k \in K$), $\check{Y}_j^k = \sum_{i \in I} z_{ij}^k$ ($j \in J, k \in K$), получаем с учетом (1.5), (1.6), что множители Лагранжа $p_i^k \geq 0$ ($i \in I, k \in K$), $\hat{p}_j^k \geq 0$ ($j \in J, k \in K$) являются решением задачи (1.7)–(1.8) тогда и только тогда, когда набор $\{\check{X}_i^k, \check{Y}_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ является конкурентным равновесием в модели железнодорожных грузоперевозок.

Равенство функционалов в задачах (1.1)–(1.4) и (1.7)–(1.8) следует из теоремы Фенхеля [2, с. 46, 47]. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим множители Лагранжа к ограничениям (3.2) через $p_i^k \geq 0$ ($i \in I, k \in K$), к ограничениям (3.3) — через $\hat{p}_j^k \geq 0$ ($j \in J, k \in K$), к ограничениям (3.4) — через $t_{\alpha\beta} \geq 0$ ($(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k$), а к ограничениям (3.5) — через $\lambda_\alpha \geq 0$ ($(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k$). Составим функцию Лагранжа задачи (3.1)–(3.6):

$$\begin{aligned} & L(X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha | i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k) \\ &= \sum_{i \in I} F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{j \in J} G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) - \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{\lambda}_\alpha \right) z_{ij}^k \\ & \quad + \sum_{i \in I, k \in K} p_i^k \left(\sum_{j \in J} z_{ij}^k - X_i^k \right) + \sum_{j \in J, k \in K} \hat{p}_j^k \left(Y_j^k - \sum_{i \in I} z_{ij}^k \right) \\ & \quad + \sum_{(\alpha, \beta)} t_{\alpha\beta} \left(V_{\alpha\beta} - \sum_{\{i, j, k\}} z_{ij}^k \right) + \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \left(M_\alpha - \sum_{\{i, j, k\}} z_{ij}^k \right) \\ &= \sum_{i \in I} \left(F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{k \in K} p_i^k X_i^k \right) + \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} \hat{p}_j^k Y_j^k - G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) \right) \\ & \quad + \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} z_{ij}^k \left(p_i^k - \hat{p}_j^k - \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (t_{\alpha\beta} + \tilde{t}_{\alpha\beta}) - \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (\lambda_\alpha + \tilde{\lambda}_\alpha) \right). \end{aligned}$$

Если маршруты грузоперевозок между пунктами производства и потребления $\{\Gamma_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ зафиксированы, то по теореме Куна — Таккера набор $\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ является решением задачи (3.1)–(3.6) тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа

$$p_i^k \geq 0 \quad (i \in I, k \in K), \quad \hat{p}_j^k \geq 0 \quad (j \in J, k \in K), \quad t_{\alpha\beta} \geq 0 \quad ((\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k), \quad \lambda_\alpha \geq 0 \quad ((\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k)$$

такие, что $\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha | i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k\}$ удовлетворяет условиям 1)–7) из определения конкурентного равновесия в модели железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями.

Из теоремы Куна — Таккера, примененной к задаче (3.7)–(3.9), следует, что множители Лагранжа

$$p_i^k \geq 0 \quad (i \in I, k \in K), \quad \hat{p}_j^k \geq 0 \quad (j \in J, k \in K), \quad t_{\alpha\beta} \geq 0 \quad ((\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k), \quad \lambda_\alpha \geq 0 \quad ((\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k)$$

являются ее решением. Действительно, обозначим множители Лагранжа к ограничениям (3.8) через $z_{ij}^k \geq 0$ ($i \in I, j \in J, k \in K$) и составим функцию Лагранжа задачи (3.7)–(3.9):

$$\begin{aligned} & L(p_i^k, \hat{p}_j^k, z_{ij}^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha | i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k) \\ &= \sum_{i \in I} \Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{j \in J} \pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_\alpha M_\alpha \\ & \quad + \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} z_{ij}^k \left(p_i^k - \hat{p}_j^k - \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (t_{\alpha\beta} + \tilde{t}_{\alpha\beta}) - \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} (\lambda_\alpha + \tilde{\lambda}_\alpha) \right) \\ &= - \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} z_{ij}^k \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \tilde{\lambda}_\alpha \right) + \sum_{i \in I} \left(\Pi_i(p_i^1, \dots, p_i^m) + \sum_{j \in J, k \in K} p_i^k z_{ij}^k \right) \\ & \quad + \sum_{j \in J} \left(\pi_j(\hat{p}_j^1, \dots, \hat{p}_j^m) - \sum_{i \in I, k \in K} \hat{p}_j^k z_{ij}^k \right) + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} t_{\alpha\beta} \left(V_{\alpha\beta} - \sum_{k \in K} \sum_{\{i, j\}} z_{ij}^k \right) \\ & \quad + \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k} \lambda_\alpha \left(M_\alpha - \sum_{k \in K} \sum_{\{i, j\}} z_{ij}^k \right). \end{aligned}$$

Полагая

$$\check{X}_i^k = \sum_{j \in J} z_{ij}^k \quad (i \in I, k \in K), \quad \check{Y}_j^k = \sum_{i \in I} z_{ij}^k \quad (j \in J, k \in K),$$

получаем с учетом (3.5), (3.6), что если маршруты грузоперевозок между пунктами производства и потребления $\{\Gamma_{ij}^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ зафиксированы, то множители Лагранжа

$$p_i^k \geq 0 \quad (i \in I, k \in K), \quad \hat{p}_j^k \geq 0 \quad (j \in J, k \in K), \quad t_{\alpha\beta} \geq 0 \quad ((\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k), \quad \lambda_\alpha \geq 0 \quad ((\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k)$$

являются решением задачи (3.7)–(3.9) тогда и только тогда, когда набор

$$\{\check{X}_i^k, \check{Y}_j^k, z_{ij}^k, p_i^k, \hat{p}_j^k, t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha | i \in I, j \in J, k \in K, (\alpha, \beta) \in \Gamma_{ij}^k\}$$

удовлетворяет условиям 1)–7) из определения конкурентного равновесия в модели железнодорожных грузоперевозок с коммуникационными ограничениями. Равенство функционалов в задачах (3.1)–(3.6) и (3.7)–(3.9) следует из теоремы Фенхеля [2, с. 46, 47]. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем значения двойственных переменных $\{t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha\}$ и положим

$$c_{ij} = \min_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \sum_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} (t_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + \tilde{t}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}) + \sum_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} (\lambda_{\tilde{\alpha}} + \tilde{\lambda}_{\tilde{\alpha}}),$$

где $\tilde{\Gamma}_{ij}$ — произвольный возможный маршрут перевозки грузов из пункта производства j в пункт потребления i . Сопоставим задаче оптимизации по переменным $\{p_i^k, \hat{p}_j^k | i \in I, j \in J, k \in K\}$ (3.7)–(3.9) задачу (1.7)–(1.8), значение функционала в которой по теореме 1 равно оптимальному значению функционала в задаче (1.1)–(1.4). Тогда утверждение теоремы 3 следует из замечания о том, что оптимальное значение функционала в задаче (1.1)–(1.4) монотонно не возрастает по параметрам $\{c_{ij} | i \in I, j \in J\}$. Обозначим через $z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij})$ объем перевозок k -го товара из j -го пункта производства в i -й пункт потребления по маршруту $\tilde{\Gamma}_{ij}$ и рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\sum_{i \in I} F_i(X_i^1, \dots, X_i^m) - \sum_{j \in J} G_j(Y_j^1, \dots, Y_j^m) - \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} \sum_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} \tilde{t}_{\alpha\beta} + \sum_{(\alpha, \beta) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} \tilde{\lambda}_\alpha \right) z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) \rightarrow \max, \quad (5.1)$$

$$X_i^k \leq \sum_{j \in J} \sum_{\tilde{\Gamma}_{ij}} z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) \quad (i \in I, k \in K), \quad (5.2)$$

$$Y_j^k \geq \sum_{i \in I} \sum_{\tilde{\Gamma}_{ij}} z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) \quad (j \in J, k \in K), \quad (5.3)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{\{\tilde{\Gamma}_{ij} | (\alpha, \beta) \in \tilde{\Gamma}_{ij}\}} z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq V_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta), \quad (5.4)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{\{\tilde{\Gamma}_{ij} | (\alpha, \beta) \in \tilde{\Gamma}_{ij}\}} z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq M_\alpha \quad \forall \alpha, \quad (5.5)$$

$$z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) \geq 0 \quad (i \in I, j \in J, k \in K) \quad \text{для любого маршрута } \tilde{\Gamma}_{ij}. \quad (5.6)$$

Полагая

$$z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) = \begin{cases} z_{ij}^k, & \text{если } \tilde{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{ij}^k, \\ 0, & \text{если } \tilde{\Gamma}_{ij} \neq \Gamma_{ij}^k, \end{cases}$$

получаем, что

$$\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) | i \in I, j \in J, k \in K, \tilde{\Gamma}_{ij}\}$$

является допустимым решением задачи (5.1)–(5.6). Если множители Лагранжа, являющиеся решением задачи (3.7)–(3.9), удовлетворяют условию 7) определения 2, то по теореме Куна-Таккера выполняются достаточные условия оптимальности решения. Если же $z_{ij}^k > 0$ и условие 7) нарушается для некоторого альтернативного маршрута $\tilde{\Gamma}_{ij}$, то зафиксируем значения двойственных переменных $\{t_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha\}$ и положим

$$c_{ij} = \min_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \sum_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} (t_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + \tilde{t}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}) + \sum_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\Gamma}_{ij}} (\lambda_{\tilde{\alpha}} + \tilde{\lambda}_{\tilde{\alpha}}).$$

Сопоставим задаче оптимизации по переменным $\{p_i^k, \hat{p}_j^k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$ (3.7)–(3.9) задачу (1.7)–(1.8), значение функционала в которой по теореме 1 равно оптимальному значению функционала в задаче (1.1)–(1.4). Заметим, что оптимальное значение функционала в задаче (1.1)–(1.4) монотонно не возрастает по параметрам $\{c_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$. Если же $z_{ij}^k > 0$, то изменение маршрута перевозки k -го товара из j -го пункта производства в i -й пункт потребления с маршрута Γ_{ij}^k на маршрут $\tilde{\Gamma}_{ij}$ увеличивает значение функционала в задаче (1.1)–(1.4), а значит, и в задаче (5.1)–(5.6), т.е. $\{X_i^k, Y_j^k, z_{ij}^k(\tilde{\Gamma}_{ij}) \mid i \in I, j \in J, k \in K, \tilde{\Gamma}_{ij}\}$ не является оптимальным решением. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канторович Л.В., Гавурин М.К.** Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 110–138.
2. **Обен Ж.-П.** Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
3. **Lindahl E.** Just taxation – A positive solution / ed. trans. (English) E. Henderson // *Classes in the Theory of Public Finance* / eds. R.A. Musgrave and A.T. Peacock. New York: Macmillan, 1958. P. 168–176.
4. **Булавский В.А., Калашников В.В.** Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия. // *Экономика и математические методы*. 1994. Т. 30, № 4. С. 129–133.
5. **Стиглиц Дж.Ю.** Экономика государственного сектора. М.: Инфра-М, 1997. 718 с.
6. **Florenzano M., del Mercato E.L.** Edgeworth and Lindahl-Foley equilibria of a general equilibrium model with private provision of pure public goods // *J. Public Economic Theory*. 2006. Vol. 8, no. 5. P. 713–740.
7. **Гермейер Ю.Б., Ватель И.А.** Игры с иерархическим вектором интересов // *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. 1974. № 3. С. 54–69.
8. Устойчивые компромиссы в играх со структурированными функциями выигрыша / Н.С. Кукушкин, И.С. Меньшиков, О.Р. Меньшикова, Н.Н. Моисеев // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1985. Т. 25, № 12. С. 1761–1776.
9. **Кукушкин Н.С.** О существовании устойчивых исходов в теоретико-игровой модели экономики с общественными благами // *Докл. АН ССР*. 1991. Т. 20, № 1. С. 25–28.
10. **Kukushkin N.S.** A condition for existence of Nash equilibrium in games with public and private objectives // *Games and Economic Behavior*. 1994. Vol. 7. P. 177–192.
11. **Kukushkin N.S.** On existence of stable and efficient outcomes in games with public and private objectives // *Internat. J. Game Theory* 1992. Vol. 20, no. 3. P. 295–303.

Шананин Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
декан
МФТИ ГУ
e-mail: alexshan@yandex.ru

Поступила 09.07.2014

Ващенко Михаил Петрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
ВЦ РАН
e-mail: mikhail.vashchenko@gmail.com

Пронин Яков Срегеевич
аспирант
МФТИ ГУ
e-mail: pronin.yakov@gmail.com

УДК 514.17; 532.5

ОДИН КЛАСС РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ТОРЕ С СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ¹

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Рассматривается система уравнений относительно пары (\mathbf{V}, p) векторного и скалярного полей в торе D , состоящая из уравнения Эйлера при заданном векторном поле \mathbf{f} и уравнения соленоидальности поля \mathbf{V} . Изучается проблема существования решений (\mathbf{V}, p) этой системы, у которых линии векторного поля \mathbf{V} внутри D совпадают с меридианами вложенных в D торов с единой осевой окружностью. Установлены условия на векторное поле \mathbf{f} , при которых эта задача разрешима, и описан весь класс таких решений.

Ключевые слова: скалярное и векторное поля, уравнение Эйлера, дивергенция, ротор.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. A solution class of the Euler equation in a torus with solenoidal velocity field.

A system of equations with respect to a pair (\mathbf{V}, p) of a scalar field and a vector field in a torus D is considered. The system consists of the Euler equation with a given vector field \mathbf{f} and the solenoidality equation for the field \mathbf{V} . We seek for solutions (\mathbf{V}, p) of this system for which lines of the vector field \mathbf{V} inside D coincide with meridians of tori embedded in D with the same circular axis. Conditions on the vector field \mathbf{f} under which the problem is solvable are established, and the whole class of such solutions is described.

Keywords: scalar and vector fields, Euler equation, divergence, curl.

Рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \right\}, \quad (1)$$

относительно пары (\mathbf{V}, p) векторного $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ и скалярного $p = p(\mathbf{X}, t)$ полей в $D^4 = \{(\mathbf{X}, t) : \mathbf{X} \in D, t \in [0, \infty)\}$, где D — тор в пространстве R^3 . Далее через $\mathbf{X} = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ обозначается произвольная точка из R^3 , задаваемая радиусом вектором $\mathbf{X} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$, относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с началом O и осью Ox_3 , совпадающими с центром симметрии и осью симметрии тора, и с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; через ρ обозначена положительная постоянная; через $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ — задаваемое в D^4 непрерывное векторное поле; через ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона; через (\mathbf{a}, \mathbf{b}) и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — скалярное и векторное произведения векторов \mathbf{a}, \mathbf{b} включая случай, когда один из них совпадает с символическим вектором $\nabla = \mathbf{e}_1 \partial / \partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial x_2 + \mathbf{e}_3 \partial / \partial x_3$. Для дивергенции и ротора векторного поля \mathbf{a} и градиента скалярного поля используются формулы $\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a})$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}]$, $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

Ясно, что тор $D = D_{r_c, r_0}$ вполне определяется радиусом $r_c > 0$ его осевой окружности L_c и внутренним радиусом $r_0 \in (0, r_c)$ как область в R^3 , образованная вращением открытого круга $\{(x_1 - r_c)^2 + x_3^2 < r_0^2, x_2 = 0\}$ радиуса r_0 вокруг оси Ox_3 .

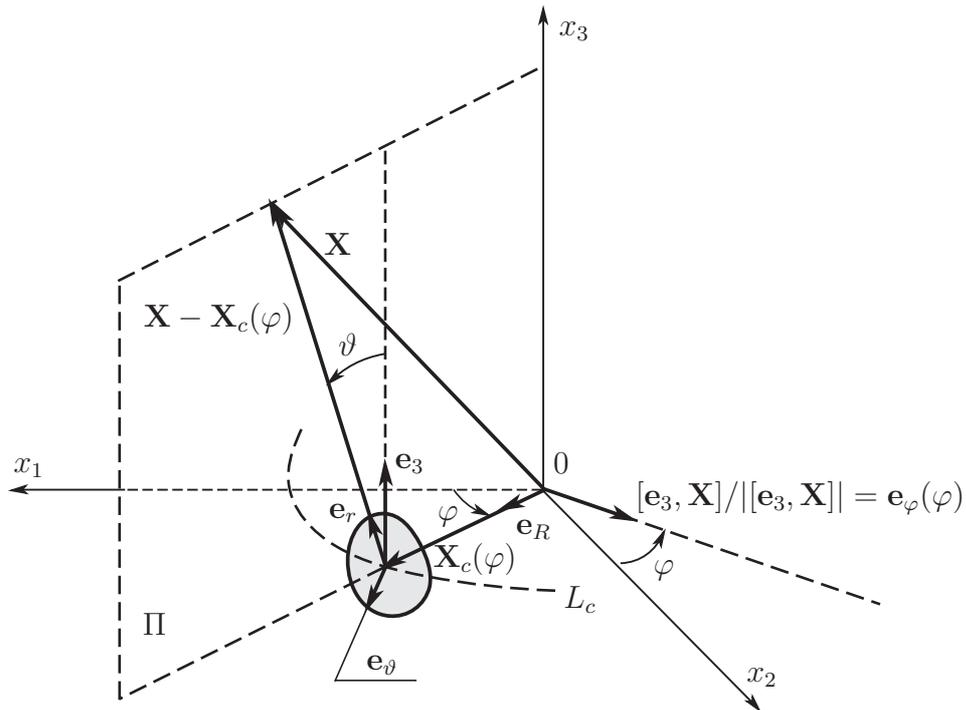
Решение системы (1) будем понимать как непрерывно дифференцируемую в D^4 вектор-функцию \mathbf{V} (короче — гладкую функцию) и непрерывную по t и гладкую по \mathbf{X} в D функцию p , в каждой точке из D^4 обращающую уравнения системы (1) в равенства. При этом на

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

компоненту \mathbf{V} решения (\mathbf{V}, p) системы (1) будем накладывать еще геометрическое условие: линии векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ при каждом $t \geq 0$ лежат в сечениях тора D плоскостями, перпендикулярными осевой окружности L_c тора, и в каждом сечении являются окружностями с центром на L_c . Аналогичные решения для уравнений движения сплошной среды в аксиально симметричном цилиндрическом слое найдены в работе авторов [1].

Отметим, что качественному исследованию динамических потоков на 2-мерном торе после работ Пуанкаре [2] и Колмогорова [3] посвящено много работ (см. [4] и приведенный там список литературы). А построенные в работе векторные поля $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$ порождают потоки специального вида на поверхности каждого вложенного тора $D_{r_c, r}$ ($0 < r < r_0$), согласованные при каждом $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ между собой по непрерывности, образуя возможные движения сплошной среды в объеме тора D , подчиненные уравнению Эйлера.

1. Для описания полей введем в части пространства R^3 , содержащей тор D , специальную систему криволинейных координат, поставив при неизменном $r_c > 0$ в соответствие каждой точке $\mathbf{x} \in (R^3 \setminus L_c) \setminus Ox_3$ тройку чисел $(r, \vartheta, \varphi) = (r(\mathbf{X}), \vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}))$ (которая также будет зависеть от фиксированного во всей работе радиуса r_c) следующим образом. Проведя полуплоскость Π через ось Ox_3 и точку $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) \notin Ox_3$, определяем (см. рисунок) угол $\varphi = \varphi(\mathbf{X})$ между Π и положительным направлением оси Ox_1 и точку $\mathbf{X}_c(\varphi) = r_c(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi)$ ($= L_c \cap \Pi$). Теперь можно определить $r = r(\mathbf{X}) = |\mathbf{X} - \mathbf{X}_c(\varphi)|$ и, при $\mathbf{X} \notin L_c$, угол $\vartheta = \vartheta(\mathbf{X})$ между \mathbf{e}_3 и $(\mathbf{X} - \mathbf{X}_c(\varphi))$, так что пара (r, ϑ) — это полярные координаты точки \mathbf{X} в полярной системе координат в полуплоскости Π с центром в точке $\mathbf{X}_c(\varphi)$ и полярной осью, сонаправленной с ортом \mathbf{e}_3 . Тем самым установлено взаимоднозначное соответствие, в частности, между точками $\mathbf{X} \in D \setminus L_c$ и тройками чисел $(r, \vartheta, \varphi) \in (0, r_0) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ — их криволинейными координатами. Точки из $L_c = \{\mathbf{X}_c(\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi)\}$ вполне определяются парой чисел $(r = 0, \varphi)$ при заданной константе $r_c > 0$ и соответствующем угле φ . Тем не менее, применяя далее обозначение $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)$ для точек $\mathbf{X}(r(\mathbf{X}), \vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}))$, мы для краткости и единообразия сохраним такое обозначение $\mathbf{X}(0, \vartheta, \varphi)$ и для $\mathbf{X} \in L_c$, хотя от параметра ϑ здесь ничего не зависит.



Рисунок

Из приведенной конструкции (см. рисунок) видно, что базис криволинейной системы координат (r, ϑ, φ) образует правая тройка взаимно ортогональных ортов $\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, где

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_3 \cos \vartheta + \mathbf{e}_R(\varphi) \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_3(-\sin \vartheta) + \mathbf{e}_R(\varphi) \cos \vartheta, \\ \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = \mathbf{e}_1(-\sin \varphi) + \mathbf{e}_2 \cos \varphi, \\ (\mathbf{e}_R(\varphi) = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi). \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{X}_c(\varphi) + r\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) = r\mathbf{e}_r + (r_c \cos \varphi)\mathbf{e}_R = (r + r_c \sin \vartheta)\mathbf{e}_r + (r_c \cos \vartheta)\mathbf{e}_\vartheta, \quad (3)$$

где переход к координатам (r, ϑ, φ) от $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$ производится с помощью формул

$$\begin{cases} x_1 = \mathfrak{a}(r, \vartheta) \cos \varphi, & x_2 = \mathfrak{a}(r, \vartheta) \sin \varphi, & x_3 = r \cos \vartheta, \\ \mathfrak{a}(r, \vartheta) = r_c + r \sin \vartheta > 0 \end{cases} \quad (4)$$

и следующего обращения формул (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= [\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta] \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \sin \varphi, \\ \mathbf{e}_2 &= [\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta] \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом соглашения об идентичности обозначений $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)$ будем считать $D = \{\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) : (r, \vartheta, \varphi) \in [0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) &= \mathbf{V}(r, \vartheta, \varphi, t) = \mathbf{V}(r(\mathbf{X}), \vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}), t), \\ p(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) &= p(r, \vartheta, \varphi, t) = p(r(\mathbf{X}), \vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}), t), \\ \mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) &= \mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t) = \mathbf{f}(r(\mathbf{X}), \vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}), t), \end{aligned} \quad (6)$$

не меняя символического обозначения этих и других векторных и скалярных функций при переходе от декартовых координат (x_1, x_2, x_3) к криволинейным (r, ϑ, φ) и наоборот.

В этих обозначениях сформулированное выше условие на линии векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ в аналитической форме означает, что в D^4 должно выполняться равенство

$$\mathbf{V}(r, \vartheta, \varphi, t) = \sigma(r, \vartheta, \varphi, t)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \quad (7)$$

с гладкой правой частью в области D^4 , так что функция σ , естественно, изначально должна быть определенной, 2π -периодической по ϑ и φ и гладкой в $\tilde{D}^4 = [0, r_0] \times R \times R \times R_+ \subset R^4$. Однако в составе формулы (7) функция σ при каждом $t \in R_+$ рассматривается как скалярное поле в D , определяя в точках \mathbf{X} тора D векторное поле \mathbf{V} с помощью подстановки $(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \mathbf{X}$.

2. Отвлекаясь пока от системы уравнений (1), изучим свойства произвольного векторного поля \mathbf{a} вида (7), полагая в $D^4 = D \times R_+$

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \sigma(r, \vartheta, \varphi, t)\boldsymbol{\alpha}(r, \vartheta, \varphi, t), \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — постоянное по t и r единичное векторное поле

$$\boldsymbol{\alpha}(r, \vartheta, \varphi, t) = \boldsymbol{\alpha}(\vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi), \quad (9)$$

так определенное только в части $(D \setminus L_c) \times R_+$ области D^4 , а с помощью гладкой в \tilde{D}^4 функции σ и подстановки $(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \mathbf{X} \in D$ нужно доопределить векторное поле \mathbf{a} до гладкого во всей области D^4 .

Условия на σ для гладкости поля $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ рассмотрим в терминах переменных (x_1, x_2, x_3) , а не (r, ϑ, φ) . Скалярное поле $\vartheta(\mathbf{X})$ в отличие от полей $r(\mathbf{X})$ и $\varphi(\mathbf{X})$ не определено на осевой окружности тора (хотя все точки $(r, \vartheta, \varphi, t)$ и при $r = 0$ лежат в \tilde{D}^4). Поэтому на L_c не определены и векторные поля $\mathbf{e}_r(\vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}))$ и $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}))$. Более того, эти поля нельзя доопределить на L_c до непрерывных в D , так как при $\mathbf{X} = \mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \mathbf{X}_c(\varphi)$ их пределы будут разными для разных ϑ . Но они и их производные по ϑ и φ остаются при этом ограниченными (см. (2)). Отсюда следует, что для непрерывности и гладкости поля (8)–(9) в D^4 помимо оговоренной гладкости функции $\sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(0, \vartheta, \varphi, t) \equiv 0$ в \tilde{D}^4 . Однако для гладкости векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ в D^4 нужно еще, чтобы определенные в D^4 вне L_c частные производные $\partial \mathbf{a} / \partial t$, $\partial \mathbf{a} / \partial x_i$, где

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) + \sigma(\vartheta, \varphi, t) \left(-\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3),$$

за счет $\sigma(\vartheta, \varphi, t)$ были определены и непрерывны на L_c тоже. Дифференцируя равенства (4) неявным образом по x_1, x_2, x_3 , легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= (\delta_{i1} \cos \varphi + \delta_{i2} \sin \varphi) \sin \vartheta + \delta_{i3} \cos \vartheta, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{1}{\mathfrak{a}(r, \vartheta)} (-\delta_{i1} \sin \varphi + \delta_{i2} \cos \varphi), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} &= \frac{1}{r} [(\delta_{i1} \cos \varphi + \delta_{i2} \sin \varphi) \cos \vartheta - \delta_{i3} \sin \vartheta], \end{aligned} \quad (10)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Отсюда видно, что за счет условий $\partial \sigma / \partial \vartheta|_{r=0} = 0$, $\partial \sigma / \partial r|_{r=0} = 0$, $\partial \sigma / \partial \varphi|_{r=0} = 0$ на гладкую в \tilde{D}^4 функцию $\sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ мы устраним ограниченные разрывы при $r \rightarrow 0$ функций $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \partial \sigma / \partial r$, $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \partial r / \partial x_i$ и $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \partial \varphi / \partial x_i$. А для устранения разрыва второго рода (бесконечного) при $r \rightarrow 0$ функций $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \partial \vartheta / \partial x_i$ и $\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \partial \vartheta / \partial x_i$ придется потребовать большего: чтобы были при $r \rightarrow 0$ верны равенства

$$\sigma(r, \vartheta, \varphi, t) = o(r), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}(r, \vartheta, \varphi, t) = o(r). \quad (11)$$

Ясно, что все эти условия на функцию σ вместе с требованием ее гладкости в \tilde{D}^4 являются и необходимыми для гладкости поля $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ в D^4 . Из качественных ограничений на σ самыми сильными являются условия (11). Второе из них не зависит от остальных, а из первого и условия гладкости функции $\sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ вытекают все остальные. Действительно, сразу имеем в \tilde{D}^4

$$\sigma(0, \vartheta, \varphi, t) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \sigma(r, \vartheta, \varphi, t) \equiv 0, \quad (12)$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, \vartheta, \varphi, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma(r, \vartheta, \varphi, t) - 0}{r} \equiv 0, \quad (13)$$

а также

$$\frac{\partial \sigma(0, \vartheta, \varphi, t)}{\partial r} \equiv 0, \quad \frac{\partial \sigma(0, \vartheta, \varphi, t)}{\partial \vartheta} \equiv 0, \quad \frac{\partial \sigma(0, \vartheta, \varphi, t)}{\partial \varphi} \equiv 0. \quad (14)$$

Поэтому справедливо следующее

Предложение 1. Пусть 2π -периодическая по ϑ и φ функция $\sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ непрерывна вместе со всеми частными производными в точках множества $\tilde{D}^4 = [0, r_0] \times R \times R \times R_+$.² Тогда векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi))$ будет гладким в D^4 , если функция σ удовлетворяет условиям (11).

²Производная $\partial \sigma(r, \vartheta, \varphi, t) / \partial r$ в \tilde{D}^4 при $r = 0$ понимается как односторонняя.

Как отмечалось, условие гладкости, наложенное в этом утверждении на функцию σ , для его справедливости является также и необходимым. Будем в дальнейшем считать условия этого утверждения выполненными.

3. Условия на функцию σ , обеспечивающие гладкость поля (8)–(9) в D , удобнее было определить, приведя вектор-функцию $\sigma(r, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$ к декартовым координатам. Однако исследовать систему уравнений (1) в торе удобнее в криволинейных координатах (r, ϑ, φ) , тесно связанных с геометрией тора. Предварительно нужно выразить в этих координатах ряд дифференциальных операторов над векторными и скалярными полями.

Дифференцируя правые части формул (2) и сравнивая результаты с самими формулами (2), выводим равенства

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\vartheta, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \sin \vartheta, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_R(\varphi), \quad (15)$$

(часть которых использовалась выше).

Далее, учитывая, что по правилам дифференцирования сложной функции $u(r(\mathbf{X}), \vartheta(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}))$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) u(r, \vartheta, \varphi) \quad (i = 1, 2, 3),$$

переписываем оператор Гамильтона в виде

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

и, используя формулы (5) и (10), получаем его представление, после приведения подобных, в виде

$$\nabla = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\varpi(r, \vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (\varpi = r_c + r \sin \vartheta). \quad (16)$$

Ради краткости в (15) и часто далее аргументы ϑ, φ ортов $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ опущены. Используя (16) и (15), легко проверить следующие формулы для дивергенции и ротора векторных полей $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta$ и \mathbf{e}_φ в D :

$$(\nabla, \mathbf{e}_r) = \frac{1}{r} + \frac{\sin \vartheta}{\varpi}, \quad (\nabla, \mathbf{e}_\vartheta) = \frac{\cos \vartheta}{\varpi}, \quad (\nabla, \mathbf{e}_\varphi) = 0, \quad (17)$$

$$[\nabla, \mathbf{e}_r] = 0, \quad [\nabla, \mathbf{e}_\vartheta] = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad [\nabla, \mathbf{e}_\varphi] = \frac{1}{\varpi} (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta). \quad (18)$$

4. Теперь легко найти дивергенцию поля \mathbf{a} в D^4 : имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, (\sigma(r, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi))) = (\nabla \sigma, \mathbf{e}_\vartheta) + \sigma(\nabla, \mathbf{e}_\vartheta).$$

В силу (16), (15) и ортонормированности базиса $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ получаем

$$(\nabla \sigma, \mathbf{e}_\vartheta) = \frac{\partial \sigma}{\partial r} (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} (\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\vartheta) + \frac{1}{\varpi(r, \vartheta)} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} (\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta},$$

$$(\nabla, \mathbf{e}_\vartheta) = \left(\mathbf{e}_r, \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\mathbf{e}_\vartheta, \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\varpi} \left(\mathbf{e}_\varphi, \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\varpi} (\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta) = \frac{\cos \vartheta}{\varpi}$$

и, значит, используя (16), (17), имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma}{\varpi} \cos \vartheta, \quad (19)$$

в частности по условиям (11) и (12) $\operatorname{div} \mathbf{a}|_{r=0} = 0$ (см. предложение 1).

Вычислим $\operatorname{rot} \mathbf{a}$. Имеем

$$[\nabla, \mathbf{a}] = [\nabla, \sigma \mathbf{e}_\vartheta] = [\nabla \sigma, \mathbf{e}_\vartheta] + \sigma [\nabla, \mathbf{e}_\vartheta].$$

С помощью (16) и (15) получаем

$$[\nabla \sigma, \mathbf{e}_\vartheta] = \frac{\partial \sigma}{\partial r} [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta] + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} [\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\vartheta] + \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} [\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta] = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r,$$

$$[\nabla, \mathbf{e}_\vartheta] = \left[\mathbf{e}_r, \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta \right] + \frac{1}{r} \left[\mathbf{e}_\vartheta, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta \right] + \frac{1}{\varkappa} \left[\mathbf{e}_\varphi, \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta \right] = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi,$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r \quad (20)$$

и, значит (см. (11), (13), (14)),

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}|_{r=0} = 0.$$

Согласно (20) поле $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ (8)–(9) при условиях предложения 1 при любом $t \geq 0$ всюду в торе D ортогонально полю своего ротора. Такие поля по классификации работы [1] относятся к поперечно вихревым векторным полям. Отметим еще, что при указанных условиях на $\sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ дивергенция и ротор поля \mathbf{a} являются непрерывными в D^4 скалярным и векторным полями.

Найдем еще производную $(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a}$ поля \mathbf{a} (8)–(9) вдоль \mathbf{a} , следуя формулам

$$(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \nabla) \sigma \alpha = (\mathbf{a}, \nabla \sigma) \alpha + \sigma (\mathbf{a}, \nabla) \alpha = \sigma [(\alpha, \nabla \sigma) \alpha + \sigma (\alpha, \nabla) \alpha].$$

При вычислении дивергенции поля \mathbf{a} было уже вычислено, что $(\alpha, \nabla \sigma) = (\nabla \sigma, \mathbf{e}_\vartheta) = (1/r) \partial \sigma / \partial \vartheta$. Далее, в силу (16) и (15) $(\alpha, \nabla) \alpha = (\mathbf{e}_\vartheta, (\mathbf{e}_\vartheta / r) \partial / \partial \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta = (1/r) \partial \mathbf{e}_\vartheta / \partial \vartheta = -\mathbf{e}_r / r$, так что

$$(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a} = \sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{\sigma}{r} \mathbf{e}_r \right] \quad (21)$$

и, в частности, применяя (11), имеем

$$(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a}|_{r=0} = 0.$$

В силу условия (11) из формулы (21) следует, что векторное поле $(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a}$ непрерывно в D^4 .

5. Второе уравнение системы (1) удовлетворяется при $\mathbf{V} = \mathbf{a}$ в D^4 , если и только если (см. (19)) 2π -периодическая по ϑ и φ функция $\sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ помимо предложения 1 удовлетворяет в \tilde{D}^4 дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma}{\varkappa} \cos \vartheta = 0. \quad (22)$$

Перейдем в (22) от поля σ к полю Σ с помощью замены $\sigma = \Sigma / \varkappa$. При этом априори функция $\Sigma = \Sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$, наследуя свойства функции σ , должна быть гладкой 2π -периодической по ϑ и φ в \tilde{D}^4 и удовлетворять условиям

$$\Sigma(r, \vartheta, \varphi, t) = o(r), \quad \frac{\partial \Sigma(r, \vartheta, \varphi, t)}{\partial \vartheta} = o(r) \quad (r \rightarrow 0) \quad (23)$$

с вытекающими отсюда следствиями типа (12)–(14). В результате этой замены получаем уравнение

$$\frac{1}{r \varkappa} \frac{\partial \Sigma}{\partial \vartheta} = 0,$$

которое означает, что скалярное поле

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) = \Sigma(r, \varphi, t), \quad (24)$$

т. е. не зависит от ϑ (и, значит, второе из ограничений (23) выполняется автоматически: $\partial\Sigma/\partial\vartheta \equiv 0$). Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2. Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$ (8)–(9) гладкое и соленоидальное в D^4 , если и только если определяющая его функция $\sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ имеет вид

$$\sigma(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{1}{\varkappa(r, \vartheta)} \Sigma(r, \varphi, t)$$

с гладкой в \tilde{D}^4 функцией Σ , удовлетворяющей условию $\Sigma(r, \varphi, t) = o(r)$ ($r \rightarrow 0$).

Уточним формулу для ротора поля \mathbf{a} (8)–(9) в случае, когда

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) = \frac{1}{\varkappa(r, \vartheta)} \Sigma(r, \varphi, t) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \quad (25)$$

и удовлетворяет предложению 2. В силу (20)

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = -\frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r + \frac{1}{\varkappa} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial r} + \frac{\Sigma}{r} \left(1 - \frac{r \sin \vartheta}{\varkappa} \right) \right] \mathbf{e}_\varphi, \quad (26)$$

откуда по-прежнему видно, что поле \mathbf{a} поперечно вихревое в D^4 и (теперь в силу (13), (14), (23)) $\operatorname{rot} \mathbf{a}|_{r=0} = 0$.

Далее, подставляя (25) в (21), видим, что для векторного поля \mathbf{a} , удовлетворяющего предложению 2, в D^4 справедлива формула

$$(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a} = -\frac{\Sigma^2}{r \varkappa^2} (\mathbf{e}_r + r \frac{\cos \vartheta}{\varkappa} \mathbf{e}_\vartheta), \quad (27)$$

откуда вытекает, в частности, что $(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a}|_{r=0} = 0$ (см. (23)).

6. Вернемся к системе уравнений (1). Последнее ее уравнение удовлетворяется при $\mathbf{V} = \mathbf{a}$ (25) (и только), а первое можно выразить в виде

$$\mathbf{b} = -\nabla \frac{1}{\rho} p, \quad (28)$$

принимая обозначение

$$\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{f}. \quad (29)$$

Правая часть в (28) — потенциальное в D^4 векторное поле. Поэтому уравнение (29) разрешимо, если и только если циркуляция

$$\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{b}(r, \vartheta, \varphi, t), d\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) = 0 \quad \text{при любом } t \geq 0 \quad (30)$$

для любого спрямляемого замкнутого контура $\mathcal{L} \subset D$.

В случае произвольного, стягиваемого в D контура $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ условие (30) эквивалентно в силу теоремы Стокса условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = 0. \quad (31)$$

В случае произвольного, нестягиваемого в торе D контура $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$, если (31) выполнено, условие (30) легко сводится к условию

$$\oint_{\mathcal{L}_{r,\vartheta}} (\mathbf{b}(r, \vartheta, \varphi, t), d\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) = 0 \quad (32)$$

для фиксированного контура $\mathcal{L}_{r,\vartheta}$ вида

$$\mathcal{L}_{r,\vartheta} = \{\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) : r = \text{const} \in [0, r_0), \vartheta = \text{const} \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

7. Обсудим условия (31), (32) более детально. Во-первых, заметим, что эти условия выполняются, если и только если выполняется условие

$$\mathbf{b} = \nabla\Phi, \quad (33)$$

где $\Phi = \Phi(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) = \Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$ — какое-нибудь гладкое в D^4 скалярное поле, 2π -периодическое по ϑ и φ . Во-вторых, учтем, что поле

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \mathbf{e}_\vartheta$$

(см. (25)) и поле $(\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{a}$ (см. (27)) в каждой точке контура $\mathcal{L}_{r,\vartheta}$ ортогональны контуру, поскольку в силу (3) и (15)

$$d\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \Big|_{\mathcal{L}_{r,\vartheta}} = \frac{\partial \mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \varkappa(r, \vartheta) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) d\varphi.$$

Стало быть (см. (29)),

$$(\mathbf{b}(r, \vartheta, \varphi, t), d\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) \Big|_{\mathcal{L}_{r,\vartheta}} = -(\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t), d\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) \Big|_{\mathcal{L}_{r,\vartheta}} = -\varkappa(r, \vartheta) (\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t), \mathbf{e}_\varphi(\varphi)) d\varphi.$$

Следовательно, с учетом того, что $\varkappa(r, \vartheta) > 0$, условие (32) сводится к условию

$$\int_0^{2\pi} f_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) d\varphi = 0, \quad (34)$$

где f_φ — проекция \mathbf{f} на $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$:

$$f_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) = (\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t), \mathbf{e}_\varphi(\varphi)). \quad (35)$$

Представим условие (33) в эквивалентной скалярной и явной форме. Для этого явное выражение для \mathbf{b}

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{\Sigma^2}{r\varkappa^2} (\mathbf{e}_r + r \frac{\cos \vartheta}{\varkappa} \mathbf{e}_\vartheta) - \mathbf{f},$$

полученное из (29), (25), (27), подставим в (33) и умножим обе части полученного равенства скалярно на орты \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ и \mathbf{e}_φ . В результате, применив (16) для представления $\nabla\Phi$, при условиях предложения 2 будем иметь для $0 < r < r_0$

$$\begin{cases} -\frac{1}{r\varkappa^2(r, \vartheta)} \Sigma^2(r, \varphi, t) - f_r(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \vartheta, \varphi, t), \\ \frac{1}{\varkappa(r, \vartheta)} \frac{\partial \Sigma(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\cos \vartheta}{\varkappa^3(r, \vartheta)} \Sigma^2(r, \varphi, t) - f_\vartheta(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi(r, \vartheta, \varphi, t), \\ -f_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{1}{\varkappa(r, \vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(r, \vartheta, \varphi, t). \end{cases} \quad (36)$$

Из непрерывности вектор-функции f и условий на Σ в предложении 2 следует, что эти равенства могут выполняться всюду в \tilde{D}^4 , если только там все частные производные функции $\Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$ непрерывны и существует конечный при всех t, ϑ, φ предел, независимый от ϑ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi(r, \vartheta, \varphi, t),$$

так что при $r = 0$ условия (36) вырождаются в соотношения

$$\begin{cases} f_r(r, \vartheta, \varphi, t)|_{r=0} = -\frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \vartheta, \varphi, t)|_{r=0}, \\ f_\vartheta(r, \vartheta, \varphi, t)|_{r=0} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi(r, \vartheta, \varphi, t)|_{r=0} = \left(-\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \vartheta, \varphi, t)}{\partial \vartheta} \right), \\ f_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t)|_{r=0} = -\frac{1}{\varpi(r, \vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(r, \vartheta, \varphi, t)|_{r=0}. \end{cases} \quad (37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_r(r, \vartheta, \varphi, t) &= (\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi), \mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t)), \\ f_\vartheta(r, \vartheta, \varphi, t) &= (\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi), \mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t)), \end{aligned}$$

а $f_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t)$ определяется формулой (35). Таким образом, условие (33), гарантирующее выполнение условий (31), (32), эквивалентных (30), само эквивалентно соотношениям (36), устанавливающим связь между изначально произвольными достаточно гладкими в D^4 функциями $\Sigma(r, \varphi, t)$, $\Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$ и компонентами непрерывной вектор-функции $\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$, входящей в первое уравнение системы (1) и входящей вместе с \mathbf{a} в левую часть \mathbf{b} (29) уравнения (33) относительно $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$. При этом вследствие соотношений (36), непрерывности \mathbf{f} и предложения 2, функции Σ и Φ должны удовлетворять следующим априорным условиям:

(Σ) Функция $\Sigma = \Sigma(r, \varphi, t)$ не зависит от ϑ , 2π -периодическая по φ , непрерывная вместе с частными производными $\partial \Sigma / \partial r$, $\partial \Sigma / \partial \varphi$ и $\partial \Sigma / \partial t$ в области $\tilde{D}^4 = [0, r_0) \times R \times R \times [0, \infty)$ для любых φ и $t \geq 0$ и $\Sigma(r, \varphi, t) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$.

(Φ) Функция $\Phi = \Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$ 2π -периодическая по ϑ и φ , непрерывная вместе с частными производными $\partial \Phi / \partial r$, $\partial \Phi / \partial \vartheta$, $\partial \Phi / \partial \varphi$ и $\partial \Phi / \partial t$ в \tilde{D}^4 и для любых (ϑ, φ, t) существует конечный предел при $r \rightarrow 0$ функции $1/r \partial \Phi(r, \vartheta, \varphi, t) / \partial \vartheta$, не зависящий от ϑ .

Здесь производные по φ , по ϑ и по t при $r = 0$ понимаются как производные функций $\Sigma(0, \varphi, t)$ и $\Phi(0, \vartheta, \varphi, t)$, а производные по r и по t на границе \tilde{D}^4 при $r = 0$ и $t = 0$ понимаются как односторонние. В силу непрерывности функции Σ в \tilde{D}^4 условие $\Sigma(r, \varphi, t) = o(r)$ влечет условие $\Sigma(0, \varphi, t) \equiv 0$, а условие на производную $\partial \Phi / \partial \vartheta$ означает, что, положив $1/r \partial \Phi / \partial \vartheta|_{r=0} \equiv f_\vartheta(0, \vartheta, \varphi, t)$, мы продолжаем функцию $1/r \partial \Phi / \partial \vartheta$ до непрерывной во всем D^4 .

8. Обозначим через $\mathfrak{M}(D)$ класс гладких векторных полей в $D^4 = D \times [0, \infty)$, линии которых в торе D при каждом $t \in [0, \infty)$ совпадают с окружностями

$$c_{r, \varphi} = \{\mathbf{X}(r', \vartheta, \varphi') : r' = r, \varphi' = \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\}, \quad r \in (0, r_0), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Проведенный анализ векторных полей $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ класса $\mathfrak{M}(D)$ доказывает справедливость следующих двух утверждений. Первое из них есть резюме п. 5 указанного анализа:

Лемма 1. *Множество*

$$A = \left\{ \mathbf{a}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi); t) = \frac{1}{r_c + r \sin \vartheta} \Sigma(r, \varphi, t) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) : \Sigma \in (\Sigma) \right\} \quad (38)$$

векторных полей (25), удовлетворяющих условию (Σ), совпадает с множеством всех решений уравнения соленоидальности

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$$

в классе векторных полей $\mathfrak{M}(D)$. Каждое такое решение является поперечно вихревым: при каждом $t \geq 0$ и $\mathbf{X} \in D$ $\operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{X}; t)$ ортогонален $\mathbf{a}(\mathbf{X}; t)$.

Из этой леммы и анализа, проведенного в п. 7, вытекает

Лемма 2. *Множество решений $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}; t)$ системы дифференциальных уравнений*

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{f} = \nabla \Phi, \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \right\} \quad (39)$$

в классе векторных полей \mathfrak{M} не пусто, только если $\Phi \in (\Phi)$ и пара (\mathbf{f}, Φ) векторного и скалярного полей в D связана между собой соотношениями (36) через какую-либо функцию Σ из класса (Σ) . При выполнении этих условий единственным решением системы (39) в классе $\mathfrak{M}(D)$ будет вектор-функция $\mathbf{a}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$ из множества A (38) с соответствующей функцией Σ .

Отметим, что условия (36) накладывают ограничения не только на вид решения $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}; t) \in \mathfrak{M}(D)$, но и на саму систему (39), связывая элементы \mathbf{f} и Φ первого уравнения в (39). В частных случаях при специально заданных \mathbf{f} и Φ система (36) может оказаться совместной и легко разрешимой относительно Σ , но в общем случае исследовать совместимость первых двух уравнений из (36) как уравнений относительно Σ — нелинейная задача, решение которой наложит ограничения на \mathbf{f} и Φ . Задача упрощается, если на соотношения (36) смотреть как на систему дифференциальных уравнений относительно функции $\Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$. В этом случае по крайней мере можно применить известные результаты о достаточных условиях совместности систем уравнений, разрешимых относительно частных производных искомой функции, накладывая дополнительные ограничения на \mathbf{f} и Σ . Но проще всего считать (36) ограничениями на векторное поле \mathbf{f} , переписав их в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) = & -\nabla \Phi(r, \vartheta, \varphi; t) - \frac{1}{r\alpha^2(r, \vartheta)} \Sigma^2(r, \varphi, t) \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \\ & + \frac{1}{\alpha(r, \vartheta)} \left(\frac{\partial \Sigma(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\cos \vartheta}{\alpha^2(r, \vartheta)} \Sigma^2(r, \varphi, t) \right) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда без дополнительных ограничений на Σ и Φ кроме условий (Σ) и (Φ) система уравнений (39) будет иметь единственное решение (и следовательно, решение \mathbf{a}), и, выбирая различные $\Phi \in (\Phi)$, мы меняем в силу (40) векторное поле \mathbf{f} в первом уравнении системы (39), но формально не меняем как математический объект само уравнение, поскольку его свободный член $-(\mathbf{f} + \nabla \Phi)$ при этом не меняется. Однако, если вернуться к исходной постановке задачи (см. (1)), где, сохраняя терминологию механики, в уравнении Эйлера $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ трактуется как поле сил, $p(\mathbf{X}, t)$ — как давление в сплошной среде плотности ρ , заполняющей тор D , \mathbf{V} — как поле скоростей, а также вспомнить соображения п. 6 (см. (28), (29)), приведшие к уравнению (33), эквивалентному первому уравнению в (39), то мы должны положить $\mathbf{a} = \mathbf{V}$ и $\nabla \Phi = -\nabla(p/\rho)$, определив p как решение

$$p(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) = -\rho \Phi(r, \vartheta, \varphi; t) + \mathcal{P}(t) \quad (41)$$

этого уравнения, где $\mathcal{P}(t)$ — произвольная непрерывная на $[0, \infty)$ функция. В результате мы получаем следующий, как нам представляется, интересный факт.

Теорема. *Система уравнений (1), состоящая из уравнения Эйлера для пары (\mathbf{V}, p) и уравнения соленоидальности для \mathbf{V} , тогда и только тогда имеет решение в D^4 с вектор-функцией скорости $\mathbf{V}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$, принадлежащей классу векторных полей $\mathfrak{M}(D)$, и давлением $p(\mathbf{X}, t)$, гладким по \mathbf{X} в D^4 и непрерывным по t в точках промежутка $[0, \infty)$, когда поле сил $\mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$ задается формулой (40) с любой фиксированной парой функций Φ и Σ , удовлетворяющих условиям (Φ) и (Σ) , соответственно. При этом компонента \mathbf{V} решения не зависит от функции Φ в определении \mathbf{f} (40) и совпадает с вектор-функцией \mathbf{a} из множества (38) с функцией Σ , вошедшей в определение \mathbf{f} (40). А компонента p решения не зависит от функции Σ и определяется формулой (41).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 120–134.
2. **Пуанкаре А.** О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л., 1947. 392 с.
3. **Колмогоров А.Н.** О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93, № 5. С. 763–766.
4. **Negrini P.** Stability problem for the Euler equation on the 2-dimensional torus // S. Paulo J. of Math. Sci. 2011. Vol. 5, no. 1. P. 89–98.

Верещагин Владимир Пантелеевич

Поступила 18.08.2014

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

Субботин Юрий Николаевич

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

УДК 517.977

**ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ В СИСТЕМЕ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ****Л. А. Власенко, А. А. Чикрии**

Рассматривается игровая задача сближения для системы, динамика которой описывается уравнением в частных производных, не принадлежащим типу Ковалевской, т.е. не разрешенным относительно производной по времени. В гильбертовом пространстве функций уравнение с краевыми условиями записывается в абстрактной форме в виде дифференциально-операторного уравнения. С использованием метода разрешающих функционалов получены достаточные условия приведения динамического вектора системы на цилиндрическое терминальное множество. Результаты иллюстрируются на модельном примере, связанном с процессом фильтрации жидкости в трещиновато-пористых породах.

Ключевые слова: дифференциальная игра, многозначное отображение, разрешающий функционал, уравнение в частных производных, оператор.

L.A. Vlasenko, A.A. Chikrii. On a differential game in a distributed system.

We consider the game problem of approach for a system whose dynamics is described by a partial differential equation not of Kovalevskaya type, that is not solved in time derivative. In a Hilbert function space, the equation with boundary conditions are written in an abstract form as a differential operator equation. Using the method of resolving functionals, we obtain sufficient conditions for the approach of a dynamical vector of system to a cylindrical terminal set. Results are exemplified by means of a model problem concerning filtering fluids in fractured-porous rocks.

Keywords: differential game, set-valued mapping, resolving functional, partial differential equation, operator.

Введение

В математической теории управления и теории динамических игр разработаны фундаментальные методы исследования систем с сосредоточенными параметрами [1–7], установлены связи между различными подходами [8]. Динамика этих систем описывается дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах. Динамика систем с распределенными параметрами описывается уравнениями в частных производных. Абстрактной формой этих уравнений являются дифференциально-операторные уравнения в банаховых или гильбертовых пространствах. Работы [9–12] посвящены изучению дифференциальных игр в распределенных системах. В работе [9] используется первый прямой метод Л. С. Понтрягина, в работах [10; 11] изучается правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского, а в работе [12] метод разрешающих функций [13; 14] распространяется на случай гильбертовых пространств (метод разрешающих функционалов).

В общем случае уравнения в частных производных являются не разрешенными относительно старшей производной по времени, т.е. уравнениями, не принадлежащими типу Ковалевской, или типа Соболева [15]. Абстрактной формой этих уравнений являются неявные дифференциально-операторные уравнения, не разрешенные относительно старшей производной. Мы изучаем дифференциальную игру в системе, которая описывается уравнением в частных производных не типа Ковалевской, а также неявным дифференциально-операторным уравнением в абстрактном гильбертовом пространстве. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [12] с помощью метода разрешающих функционалов. Здесь мы изучаем динамические игры в системах, для описания динамики которых используем более широкие классы дифференциально-операторных уравнений и уравнений в частных производных по сравнению с [12].

1. Постановка задачи для системы с распределенными параметрами

В работе [16] при моделировании процесса фильтрации жидкости в трещиновато-пористых породах в отличие от классической теории фильтрации предполагалось, что система трещин достаточно развита. Поэтому рассматривались два давления жидкости — в порах и трещинах. Было получено уравнение в частных производных для давления жидкости в трещинах (см. уравнение (2.8) в [16]), которое не принадлежит типу Ковалевской, так как не разрешено относительно производной по времени. При наличии управляемых несвободных распределенных источника и стока в работе [12] изучалась дифференциальная игра для процесса одномерной фильтрации в трещиновато-пористой слоистой среде.

Смешанная задача (16) из [12] есть частный случай следующей смешанной задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa_1(x)\right) \mathcal{A}y(t, x) + \kappa_2(x)y(t, x) = u(t, x) - v(t, x), \quad x \in \Theta, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

$$y(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Theta, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{A}y(0, x) = q(x), \quad x \in \Theta, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{A}y = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + a_0(x)y, \quad (1.4)$$

где Θ — ограниченная область в \mathbb{R}^n с достаточно гладкой границей $\partial\Theta$, $\bar{\Theta} = \Theta \cup \partial\Theta$; $u(t, x)$ и $v(t, x)$ — управляющие воздействия источника и стока. В разд. 3 мы уточним ограничения на функции $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$, $\kappa_1(x)$, $\kappa_2(x)$, $q(x)$. Заметим, что дифференциальное выражение $\mathcal{A}y$ (1.4) использовалось при описании динамики конфликтно-управляемой системы с распределенными параметрами в [11]. В отличие от работы [11] в настоящей статье дифференциальное выражение $\mathcal{A}y$ (1.4) также присутствует под производной по времени $\partial/\partial t$ в уравнении (1.1) и в начальном условии (1.3). Допустимые управления источника $u(t, x)$ и стока $v(t, x)$ удовлетворяют ограничениям, которые мы также уточним в разд. 3.

При постановке задачи будем учитывать, что для системы не типа Ковалевской (1.1)–(1.4) динамической компонентой является не состояние $y(t, x)$, а функция $\mathcal{A}y(t, x)$, которая входит в уравнение (1.1) под знаком производной по времени и для которой ставится начальное условие (1.3). Цель игры в системе (1.1)–(1.4) состоит в приведении динамической компоненты $\mathcal{A}y(t, x)$ в ноль за конечное время в классе допустимых управлений источника при любом допустимом управлении стока. Момент времени T будем считать достаточно большим, так что игра должна закончиться не позже этого момента.

Будем придерживаться подхода, принятого в [17, гл. V, §2] к исследованию смешанных задач. В гильбертовом пространстве $L_2(\Theta)$ — функций, суммируемых в квадрате на Θ , смешанную задачу (1.1)–(1.4) запишем в виде начальной задачи для дифференциально-операторного уравнения. Роль операторов играют дифференциальные выражения по x из (1.1) с краевыми условиями (1.2); решение $y(t, x)$ трактуется как функция от t со значениями из $L_2(\Theta)$. Детали такого перехода описываются в разд. 3. Заметим, что переход от уравнения в частных производных с краевыми условиями к дифференциально-операторному уравнению в теории дифференциальных игр был использован в [10].

2. Дифференциальная игра в абстрактных гильбертовых пространствах

Смешанная задача (1.1)–(1.4) является частным случаем следующей начальной задачи для дифференциально-операторного уравнения (абстрактного уравнения типа Соболева):

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{A}y(t)] + \mathcal{B}y(t) = K_1u(t) - K_2v(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{A}y(0) = q. \quad (2.2)$$

Здесь A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из сепарабельного вещественного гильбертова пространства H_1 , вообще говоря, в другое сепарабельное вещественное гильбертово пространство H_2 с областями определения D_A, D_B соответственно, $D = D_A \cap D_B \neq \{0\}$; K_1, K_2 — ограниченные линейные операторы из сепарабельных вещественных гильбертовых пространств U, V в пространство H_2 ; управления преследователя $u(t)$ и убегающего $v(t)$ предполагаются сильно измеримыми вектор-функциями, принимающими значения из областей управления U_0 и V_0 , которые предполагаются замкнутыми выпуклыми ограниченными множествами в пространствах U и V . Целью игры в системе (2.1), (2.2) является приведение динамического вектора $Ay(t)$ на терминальное множество M за конечное время (не превосходящее T) в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

Чтобы применить метод разрешающих функционалов [12] к исследованию дифференциальной игры в системе (2.1), (2.2), опишем решения $y(t)$ этой системы при различных допустимых управлениях. Предварительно исследуем вспомогательную начальную задачу (2.2) для уравнения

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)] + By(t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов из H_1 в H_2 , $\mathcal{L}(H_1, H_1) = \mathcal{L}(H_1)$; $L_2(0, T; H_1)$ — пространство H_1 -значных функций, интегрируемых с квадратом нормы на $[0, T]$; $W_2^1(0, T; H_1)$ — пространство Соболева H_1 -значных функций, которые принадлежат $L_2(0, T; H_1)$ вместе со своими обобщенными производными. Функции из $W_2^1(0, T; H_1)$ будем считать непрерывными на $[0, T]$, изменив их, если это необходимо, на множестве меры “ноль”. Пусть $\varphi(t) \in L_2(0, T; H_2)$. Решением начальной задачи (2.3), (2.2) называется функция $y(t) \in L_2(0, T; H_1)$ такая, что $y(t) \in D$ для почти всех $t \in [0, T]$, $Ay(t) \in W_2^1(0, T; H_2)$, $y(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (2.3) и выполнено начальное условие (2.2). Выясним условия разрешимости начальной задачи (2.3), (2.2) и опишем решения.

Пусть \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 — комплексные оболочки вещественных пространств H_1, H_2 , \tilde{A}, \tilde{B} — комплексные расширения операторов A, B [18, гл. XIII, §2]. Предположим, что пучок операторов $\lambda\tilde{A} + \tilde{B} : \tilde{D} = D_{\tilde{A}} \cap D_{\tilde{B}} \rightarrow \tilde{H}_2$ имеет резольвенту $(\lambda\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H}_2, \tilde{H}_1)$ при $|\lambda| \geq C_1$ ($C_1 > 0$) и норма резольвенты удовлетворяет оценке

$$\|(\lambda\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\| \leq C_2|\lambda|^r, \quad |\lambda| \geq C_1, \quad (2.4)$$

с постоянной $C_2 > 0$ и целым числом $r \geq 0$. Тогда можно определить оператор [19]

$$\tilde{Q}_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_1} \tilde{A}(\lambda\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(\tilde{H}_2),$$

его сужение $Q_1 \in \mathcal{L}(H_2)$ на вещественное пространство H_2 и оператор $Q_2 = E - Q_1 \in \mathcal{L}(H_2)$. Через E мы обозначаем единичный оператор. Операторы Q_1, Q_2 являются взаимно дополнительными проекторами в пространстве H_2 . Замкнутый линейный оператор

$$G = Q_1A + Q_2B : D = D_A \cap D_B \rightarrow H_2, \quad D_G = D,$$

имеет ограниченный обратный $G^{-1} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ [20, п. 2.3]. Выполняются равенства

$$AG^{-1}Q_1 = Q_1AG^{-1} = Q_1, \quad BG^{-1}Q_2 = Q_2BG^{-1} = Q_2.$$

Определим операторы

$$W = -Q_1BG^{-1} \in \mathcal{L}(H_2), \quad F = Q_2AG^{-1} \in \mathcal{L}(H_2).$$

Справедливы свойства

$$W = -BG^{-1}Q_1, \quad F = AG^{-1}Q_2, \quad F^{r+1} = 0.$$

Если в ограничении (2.4) показатель степени $r \geq 1$, то предполагаем, что $F^k \varphi(t) \in W_2^k(0, T; X)$, $k = 1, \dots, r$. Тогда, как следует из [20, лемма 3.1], для любого начального вектора q (2.2), удовлетворяющего равенству

$$Q_2 q = \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left[F^{k+1} \varphi(t) \right]_{t=0},$$

существует единственное решение $y(t)$ начальной задачи (2.3), (2.2), и это решение допускает представление

$$y(t) = G^{-1} \left\{ e^{Wt} Q_1 q + \int_0^t e^{W(t-\tau)} Q_1 \varphi(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left[F^k Q_2 \varphi(t) \right] \right\} \quad (2.5)$$

(полагаем $0^0 = E$).

Вернемся к изучению дифференциальной игры в системе (2.1), (2.2). Будем предполагать справедливость ограничения (2.4) и выполнение равенств

$$Q_2 q = 0, \quad FK_1 = 0, \quad FK_2 = 0. \quad (2.6)$$

З а м е ч а н и е. Если оценка (2.4) справедлива с показателем степени $r = 0$, то оператор F является нулевым, поэтому второе и третье равенства в (2.6) выполняются. Этот случай дифференциальной игры был исследован в [12].

Уточним вид терминального множества M , на которое должен быть переведен динамический вектор $Ay(t)$ системы (2.1), (2.2). С помощью соотношения (2.5) и ограничений (2.4), (2.6) получаем представление

$$Ay(t) = e^{Wt} q + \int_0^t e^{W(t-\tau)} Q_1 [K_1 u(\tau) - K_2 v(\tau)] d\tau. \quad (2.7)$$

Учтем, что динамический вектор $Ay(t)$ (2.7) является элементом подпространства $H = Q_1 H_2$ пространства H_2 . Как и в [12–14], терминальное множество имеет цилиндрический вид

$$M = M_0 + M_1, \quad (2.8)$$

где M_0 — замкнутое линейное подпространство в H , M_1 — выпуклое замкнутое ограниченное множество из ортогонального дополнения M_0^\perp к M_0 в H .

Будем придерживаться схемы метода разрешающих функционалов, предложенной в [12]. Обозначим через Π ортопроектор в H на M_0^\perp , $\Pi \in \mathcal{L}(H)$. Рассмотрим многозначное отображение

$$\Omega(t, \tau, v) = \Pi e^{W(t-\tau)} Q_1 [K_1 U - K_2 v], \quad (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0, \quad \Delta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t < \infty\},$$

с выпуклыми замкнутыми ограниченными образами в H . Замкнутость образов устанавливается с помощью следующего факта: выпуклое замкнутое ограниченное множество в гильбертовом пространстве является слабо компактным (следует из [21, разд. 2.9, 2.10]).

Предположим выполнение условия Понтрягина. Символ $*$ обозначает геометрическую разность множеств.

У с л о в и е П о н т р я г и н а. Многозначное отображение

$$\Omega_0(t, \tau) = \bigcap_{v \in V_0} \Omega(t, \tau, v) = \Pi e^{W(t-\tau)} Q_1 K_1 U_0 - \Pi e^{W(t-\tau)} Q_1 K_2 V_0, \quad (t, \tau) \in \Delta,$$

принимает непустые значения на множестве Δ .

С применением теоремы 8.2.2 о выпуклой оболочке [22] устанавливаем, что многозначные отображения $\Omega(t, \tau, v)$ и $\Omega_0(t, \tau)$ при $t \geq 0$ являются измеримыми: $\Omega(t, \tau, v)$ — по совокупности переменных $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$, $\Omega_0(t, \tau)$ — по $\tau \in [0, t]$. Измеримость многозначных отображений $\Omega(t, \tau, v)$ и $\Omega_0(t, \tau)$ мы понимаем относительно σ -алгебр измеримых по Лебегу подмножеств из $[0, t] \times V_0$ и $[0, t]$ соответственно. В силу теоремы 8.1.3 измеримого выбора [22] при любом $t \geq 0$ существует измеримый по $\tau \in [0, t]$ селектор $\gamma(t, \tau)$ такой, что $\gamma(t, \tau) \in \Omega_0(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta$. Положим

$$\xi(t) = \xi(t; q, \gamma) = \text{Pe}^{Wt} Q_1 q + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Многозначное отображение

$$\Lambda(t, \tau, v) = \{ \tilde{\alpha} \geq 0 : [\Omega(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \tilde{\alpha}[M_1 - \xi(t)] \neq \emptyset \}, \quad (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0, \quad (2.10)$$

имеет непустые и замкнутые образы. Действительно, $0 \in \Lambda(t, \tau, v)$ для всех $(t, \tau, v) \in \Delta \times V_0$. Если $\xi(t) \in M_1$, то $\Lambda(t, \tau, v) = [0, \infty)$ является замкнутым множеством. Если $\xi(t) \notin M_1$, то замкнутость образов $\Lambda(t, \tau, v)$ является следствием слабой компактности множества M_1 и образов $\Omega(t, \tau, v)$. Теперь определим разрешающий функционал

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup \{ \tilde{\alpha} \geq 0 : \tilde{\alpha} \in \Lambda(t, \tau, v), (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0 \}, \quad (2.11)$$

который является опорной функцией многозначного отображения $\Lambda(t, \tau, v)$ (2.10). Если $\xi(t) \in M_1$, то $\alpha(t, \tau, v) = \infty$. Если $\xi(t) \notin M_1$, то разрешающий функционал ограничен и в силу компактности множества $\Lambda(t, \tau, v)$ (2.10) точная верхняя грань в (2.11) достигается. Если $\xi(t) \notin M_1$, то с применением теоремы об опорной функции 8.2.14 [22] устанавливаем, что разрешающий функционал является измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$.

Детали доказательств приведенных выше фактов можно найти в [12].

Пусть V_* — множество сильно измеримых вектор-функций $v(\tau): [0, T] \rightarrow V_0 \subset V$. Если $v(\cdot) \in V_*$ и $\xi(t) \notin M_1$, то подобно предыдущим рассуждениям получаем, что измеримы по $\tau \in [0, t]$ многозначное отображение $\Lambda(t, \tau, v(\tau))$ и разрешающий функционал $\alpha(t, \tau, v(\tau))$. Введем множество

$$\Upsilon = \Upsilon(q, \gamma) = \left\{ t \geq 0 : \xi(t) \in M_1 \right\} \cup \left\{ t \geq 0 : \xi(t) \notin M_1 \wedge \inf_{v(\cdot) \in V_*} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1 \right\}. \quad (2.12)$$

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемой системы (2.1), (2.2) с терминальным множеством M (2.8) справедливо ограничение (2.4) с некоторыми положительными постоянными $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и целым числом $r \geq 0$, выполнено условие Понтрягина, начальный вектор q в (2.2) и операторы K_1, K_2 в (2.1) удовлетворяют соотношениям (2.6) и для некоторого селектора $\gamma(t, \tau) \in \Omega_0(t, \tau)$ множество Υ (2.12) имеет непустое пересечение с отрезком $[0, T]$. Тогда динамический вектор $Ay(t)$ системы (2.1), (2.2) может быть приведен на терминальное множество M (2.8) в момент $T_0 \in \Upsilon \cap [0, T]$.

Доказательство теоремы 1 осуществляется по схеме доказательства теоремы из [12]. При этом необходимо учесть, что теорема в [12] доказывается в частном случае оценки (2.4), когда показатель степени $r = 0$. Также в работе [12] операторы K_1, K_2 при управлениях $u(t), v(t)$ в уравнении (2.1) являются единичными и, следовательно, совпадают пространства $H_2 = U = V$. Приведем схему доказательства.

Многозначное отображение

$$U_1(\tau, v) = \{ u \in U_0 : \text{Pe}^{W(T_0 - \tau)} Q_1 [K_1 u - K_2 v] - \gamma(T_0, \tau) = 0 \}, \quad (\tau, v) \in [0, T_0] \times V_0, \quad (2.13)$$

измеримо в силу теоремы 8.2.9 о прообразе [22]. Если $v(\tau)$ — произвольная измеримая функция из $[0, T_0]$ в V_0 , то многозначное отображение $U_1(\tau, v(\tau))$ измеримо по $\tau \in [0, T_0]$. В силу теоремы измеримого выбора 8.1.3 [22] многозначные отображения $U_1(\tau, v)$ и $U_1(\tau, v(\tau))$ имеют измеримые селекторы $u_1(\tau, v)$ и $u_{1v}(\tau)$. Заметим, если многозначное отображение $U_1(\tau, v)$ имеет суперпозиционно измеримый селектор $u_1(\tau, v)$ (см. определение в [23, п. 17.8]), функция $u_{1v}(\tau) = u_1(\tau, v(\tau))$ является измеримым селектором многозначного отображения $U_1(\tau, v(\tau))$. Например, суперпозиционная измеримость будет, если $u_1(\tau, v)$ является отображением Каратеодори, т. е. непрерывным по v .

В случае $\xi(T_0) \in M_1$ управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0, T_0]$ положим равным измеримому селектору $u_{1v}(\tau)$ многозначного отображения $U_1(\tau, v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя динамический вектор $Ay(t)$ системы (2.1), (2.2) будет приведен на терминальное множество M (2.8) в момент T_0 при любых допустимых управлениях убегающего.

Рассмотрим случай $\xi(T_0) \notin M_1$. В силу теоремы 8.2.9 о прообразе [22] многозначное отображение

$$U_2(\tau, v) = \{u \in U_0: \text{Pe}^{W(T_0-\tau)} Q_1[K_1 u - K_2 v] - \gamma(T_0, \tau) \in \alpha(T_0, \tau, v)[M_1 - \xi(T_0)]\}, \quad (\tau, v) \in [0, T_0] \times V_0, \quad (2.14)$$

измеримо. Для произвольной измеримой функции $v(\tau) : [0, T_0] \rightarrow V_0$ многозначное отображение $U_2(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T_0]$, также измеримо. В силу теоремы измеримого выбора 8.1.3 [22] многозначные отображения $U_2(\tau, v)$ и $U_2(\tau, v(\tau))$ имеют измеримые селекторы $u_2(\tau, v)$ и $u_{2v}(\tau)$. Если многозначное отображение $U_2(\tau, v)$ имеет суперпозиционно измеримый селектор $u_2(\tau, v)$, в частности удовлетворяющий условию Каратеодори, то можно положить $u_{2v}(\tau) = u_2(\tau, v(\tau))$.

Введем функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T_0, \tau, v(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T_0].$$

Так как функция $h(t)$ является непрерывной, монотонно невозрастающей, $h(0) = 1$ и $h(T_0) \leq 0$, то существует момент времени $t_* \in (0, T_0]$ такой, что $h(t_*) = 0$ и, следовательно,

$$\int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau)) d\tau = 1. \quad (2.15)$$

Управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0, t_*)$ положим равным измеримому селектору $u_{2v}(\tau)$ многозначного отображения $U_2(\tau, v(\tau))$, а на промежутке $[t_*, T_0]$ — равным измеримому селектору $u_{1v}(\tau)$ многозначного отображения $U_1(\tau, v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя динамический вектор $Ay(t)$ системы (2.1), (2.2) будет приведен на терминальное множество M (2.8) в момент T_0 при любых допустимых управлениях убегающего. На этом изложение схемы доказательства теоремы завершается.

3. Приложение к конфликтно-управляемой задаче фильтрации

Вернемся к смешанной задаче (1.1)–(1.4), которая моделирует процесс фильтрации жидкости в трещиновато-пористых породах. Будем использовать сведения о пространствах Соболева и дифференциальных операторов в частных производных из [17]. Пусть $W_2^k(\Theta)$ — пространство Соболева порядка k функций из $L_2(\Theta)$, обобщенные производные которых до порядка k принадлежат $L_2(\Theta)$; $\overline{W_2^k}(\Theta)$ — замыкание по норме $W_2^k(\Theta)$ множества бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Θ . Предполагаем: функции $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$, $\kappa_1(x)$, $\kappa_2(x)$, $q(x)$ принимают вещественные значения; $q(x) \in L_2(\Theta)$; $u(t, x) \in L_2((0, T) \times \Theta)$, $v(t, x) \in L_2((0, T) \times \Theta)$; функции $\kappa_1(x)$, $\kappa_2(x)$ являются ограниченными и измеримыми в $\overline{\Theta}$,

$\inf_{x \in \bar{\Theta}} \kappa_2(x) > 0$; $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Theta})$, $a_0(x) \in C(\bar{\Theta})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, дифференциальное выражение (1.4) удовлетворяет условию равномерной эллиптичности [17, гл. II]:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varepsilon_i \varepsilon_j \geq \delta |\varepsilon|^2, \quad x \in \bar{\Theta}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \delta > 0. \quad (3.1)$$

Заметим, что $L_2(0, T; L_2(\Theta)) = L_2((0, T) \times \Theta)$. Функцию $w : t, x \rightarrow w(t, x)$ также будем рассматривать как вектор-функцию от t со значениями в пространстве $L_2(\Theta)$ и записывать как $w(t) = w(t, \cdot)$. Также предполагаем, что допустимые управляющие воздействия источника $u(t, x)$ и стока $v(t, x)$ удовлетворяют ограничениям: $\|u(t, \cdot)\|_{L_2(\Theta)} \leq \varrho_1$, $\|v(t, \cdot)\|_{L_2(\Theta)} \leq \varrho_2$, где $\|\cdot\|_{L_2(\Theta)}$ — норма в пространстве $L_2(\Theta)$. В дальнейшем норму $\|\cdot\|$ и скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ рассматриваем в пространстве $L_2(\Theta)$.

В вещественном пространстве $H_1 = H_2 = L_2(\Theta)$ определим операторы

$$Aw = \mathcal{A}w(x), \quad D_A = W_2^2(\Theta) \overset{o}{\cap} W_2^1(\Theta); \quad Bw = [\kappa_1(x)\mathcal{A} + \kappa_2(x)]w(x), \quad D_B = D_A. \quad (3.2)$$

Оператор A является самосопряженным; его спектр состоит из счетного множества вещественных собственных чисел конечной кратности $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ с точкой сгущения $-\infty$ (в этой последовательности каждое собственное число повторяется с учетом кратности); соответствующие собственные функции $\{e_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Theta)$ [17, гл. II].

Смешанную задачу (1.1)–(1.4) будем интерпретировать как абстрактную задачу (2.1), (2.2) в пространстве $H_1 = H_2 = L_2(\Theta)$ с единичными операторами K_1, K_2 . Решение смешанной задачи (1.1)–(1.4) будем понимать в смысле решения абстрактной задачи (2.1), (2.2). Функция $y(t, x) \in L_2((0, T) \times \Theta)$ является *решением смешанной задачи* (1.1)–(1.4), если $y(t, \cdot) \in W_2^2(\Theta) \overset{o}{\cap} W_2^1(\Theta)$ для почти всех $t \in [0, T]$, $\mathcal{A}y(t, \cdot) \in W_2^1(0, T; L_2(\Theta))$, $y(t, x)$ удовлетворяет (1.1)–(1.3) для почти всех $t \in [0, T]$, $x \in \bar{\Theta}$. Терминальное множество (2.8) есть $M = \{0\}$, $M_0^\perp = H = \text{Im}A$, $M_0 = \{0\}$, $M_1 = \{0\}$, $\Pi = E$. Здесь $\text{Im}A$ — образ оператора A . Области управления источника U_0 и стока V_0 представляют собой замкнутые шары в $L_2(\Theta)$ радиусов ϱ_1 и ϱ_2 соответственно. Покажем, что для игровой задачи в системе (1.1)–(1.4) выполнены условия теоремы 1.

Комплексная оболочка $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2$ вещественного пространства $H_1 = H_2$ есть комплексное пространство $L_2(\Theta)$. Комплексные расширения \tilde{A}, \tilde{B} операторов A, B также определяются дифференциальными выражениями (3.2), а их область определения $\tilde{D} = D_{\tilde{A}} = D_{\tilde{B}}$ есть пересечение комплексных пространств $W_2^2(\Theta), W_2^1(\Theta)$. Покажем, что для пучка операторов $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$ справедливо ограничение (2.4) с показателем степени $r = 0$ (ср. с результатами приложений в [24]). Если ноль не является точкой спектра оператора \tilde{A} , то требуемый результат следует из представления $\lambda\tilde{A} + \tilde{B} = (\lambda E + \tilde{B}\tilde{A}^{-1})\tilde{A}$. Если ноль является собственным числом оператора \tilde{A} , то справедливо ортогональное разложение: $\tilde{H}_1 = \text{Ker}\tilde{A} \oplus \text{Im}\tilde{A}$, где $\text{Ker}\tilde{A} = Y_0$ — ядро оператора \tilde{A} , $\text{Im}\tilde{A} = Y_1$ — его образ. Пусть Π_0, Π_1 — операторы ортогонального проектирования на Y_0, Y_1 соответственно. Для операторов \tilde{A}, \tilde{B} введем блоки:

$$\tilde{A}_{jk} = \Pi_j \tilde{A} \Pi_k : \Pi_k \tilde{D} \subset Y_k \rightarrow Y_j, \quad \tilde{B}_{jk} : \Pi_k \tilde{D} \subset Y_k \rightarrow Y_j, \quad j, k = 0, 1.$$

Блоки $\tilde{A}_{00}, \tilde{A}_{01}, \tilde{A}_{10}$ являются нулевыми операторами; существуют ограниченные обратные $\tilde{A}_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(Y_1)$, $\tilde{B}_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(Y_0)$. Справедливы оценки

$$\|\tilde{A}_{11}^{-1}\| = \frac{1}{a}, \quad \|\tilde{B}_{00}^{-1}\| \leq \frac{1}{c}, \quad \|\tilde{B}_{j0}\| \leq d, \quad \|\tilde{B}_{j1}\tilde{A}_{11}^{-1}\| \leq b + \frac{d}{a}, \quad j = 0, 1,$$

$$a = \min_{\lambda_m \neq 0} |\lambda_m|, \quad b = \sup_{x \in \bar{\Theta}} |\kappa_1(x)|, \quad c = \inf_{x \in \bar{\Theta}} \kappa_2(x), \quad d = \sup_{x \in \bar{\Theta}} \kappa_2(x).$$

С помощью полученных оценок устанавливаем существование резольвенты и ее представление в виде

$$\begin{aligned} (\lambda \tilde{A} + \tilde{B})^{-1} &= \left(E - \tilde{B}_{00}^{-1} \tilde{B}_{01} \right) S(\lambda) - \tilde{B}_{00}^{-1} \Pi_0, \quad |\lambda| > (b + d/a)(1 + d/c), \\ S(\lambda) &= \left(\lambda \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_{11} - \tilde{B}_{10} \tilde{B}_{00}^{-1} \tilde{B}_{01} \right)^{-1} \left(\Pi_1 - \tilde{B}_{10} \tilde{B}_{00}^{-1} \Pi_0 \right). \end{aligned}$$

Из этого представления следует оценка (2.4) с показателем степени $r = 0$. В силу сделанного ранее замечания второе и третье равенства в (2.6) выполняются.

Для операторов ортогонального проектирования на $\text{Ker} A$, $\text{Im} A$ в вещественном пространстве $H_1 = H_2 = L_2(\Theta)$ сохраним обозначения Π_0, Π_1 ; сужения блоков $\tilde{A}_{jk}, \tilde{B}_{jk}$ на вещественное пространство будем обозначать через A_{jk}, B_{jk} . Находим операторы

$$Q_1 = \Pi_1 - B_{10} B_{00}^{-1} \Pi_0, \quad Q_2 = B B_{00}^{-1} \Pi_0, \quad G = A + B B_{00}^{-1} \Pi_0 B, \quad W = -Q_1 B A_{11}^{-1} Q_1.$$

Начальная функция $q(x)$ в (1.3) удовлетворяет предположению (2.6) теоремы 1, когда $\Pi_0 q = 0$, т. е. справедливы равенства

$$\int_{\Theta} q(x) e_m(x) dx = 0, \quad m : \lambda_m = 0. \quad (3.3)$$

Исключим тривиальный случай и предположим, что $q(x)$ отлична от нуля на некотором множестве из Θ положительной меры.

Если $\varrho_1 \geq \varrho_2$, то выполняется условие Понтрягина и $0 \in \Omega_0(t, \tau)$. Селектор $\gamma(t, \tau) \in \Omega_0(t, \tau)$ выберем тождественно равным нулю. Тогда находим $\xi(t) = e^{Wt} q$ (2.9). Уточним вид многозначного отображения (2.10):

$$\Lambda(t, \tau, v) = \{ \tilde{\alpha} \geq 0 : \tilde{\alpha} e^{W\tau} q \in Q_1[U_0 + v] \}.$$

Обозначим

$$\beta_1 = \sup_{u \in U_0} \|Q_1 u\|, \quad \beta_2 = \sup_{v \in V_0} \|Q_1 v\|. \quad (3.4)$$

Заметим, что точные верхние грани в определении β_1 и β_2 достигаются, так как множества $Q_1 U_0$ и $Q_1 V_0$ являются замкнутыми (в силу слабой компактности выпуклых замкнутых ограниченных множеств U_0, V_0 в гильбертовом пространстве). Предполагаем, что $\varrho_1 > \varrho_2$. Тогда $\beta_1 > \beta_2$. Разрешающий функционал (2.11) имеет следующий вид:

$$\alpha(t, \tau, v) = \frac{\langle e^{W\tau} q, Q_1 v \rangle + \sqrt{\langle e^{W\tau} q, Q_1 v \rangle^2 + \|e^{W\tau} q\|^2 (\beta_1^2 - \|Q_1 v\|^2)}}{\|e^{W\tau} q\|^2}, \quad (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0. \quad (3.5)$$

Множество V_* — это множество функций $v(t, x) \in L_2((0, T) \times \Theta)$ таких, что $\|v(t, \cdot)\| \leq \varrho_2$. Множество $\Upsilon(q, 0)$ (2.12) есть

$$\Upsilon = \Upsilon(q, 0) = \left\{ t \geq 0 : \inf_{v \in V_*} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1 \right\}.$$

Точная нижняя грань достигается при $v(t, x) = v_*(t, x)$:

$$v_*(t, x) = -\beta_2 \frac{e^{W\tau} q}{\|e^{W\tau} q\|}, \quad \alpha(t, \tau, v_*(\tau)) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\|e^{W\tau} q\|}.$$

Тогда имеем представление для множества Υ :

$$\Upsilon = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \frac{d\tau}{\|e^{W\tau} q\|} \geq \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \right\}. \quad (3.6)$$

Если $\|q\| < \frac{\beta_1 - \beta_2}{\|W\|}$, то $\Upsilon \neq \emptyset$. Это ограничение запишем в виде

$$\int_{\Theta} q^2(x) dx < \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{\|W\|^2}. \quad (3.7)$$

В дальнейшем будем предполагать справедливость (3.7). Множество Υ (3.6) есть $\Upsilon = [T_0, \infty)$, где число T_0 определяется из равенства

$$\int_0^{T_0} \frac{d\tau}{\|e^{W\tau}q\|} = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (3.8)$$

Пересечение $[0, T] \cap \Upsilon$ будет непустым, если $T \geq T_0$.

Таким образом, для игровой задачи в системе (1.1)–(1.4) выполнены условия теоремы 1. Наименьшее время T_0 приведения динамической компоненты системы в ноль определяется из соотношения (3.8). Многозначные отображения (2.13), (2.14) представляют собой следующие выражения:

$$U_1(\tau, v) = \{u(x) \in U_0 : Q_1 u = Q_1 v\},$$

$$U_2(\tau, v) = \{u(x) \in U_0 : Q_1 u = Q_1 v - \alpha(T_0, \tau, v)e^{W\tau}q\}, \quad (\tau, v) \in [0, T_0] \times V_0.$$

Имеем суперпозиционно измеримые селекторы этих отображений

$$u_1(\tau, v) = Q_1 v \in U_1(\tau, v), \quad u_2(\tau, v) = Q_1 v - \alpha(T_0, \tau, v)e^{W\tau}q \in U_2(\tau, v), \quad (\tau, v) \in [0, T_0] \times V_0.$$

Для любого допустимого управления стока $v(\tau, x)$ строим управление источника

$$u(\tau, x) = \begin{cases} Q_1 v(\tau, x) - \alpha(T_0, \tau, v(\tau))e^{W\tau}q(x), & (\tau, x) \in [0, t_*] \times \bar{\Theta}, \\ Q_1 v(\tau, x), & (\tau, x) \in [t_*, T_0] \times \bar{\Theta}, \end{cases} \quad (3.9)$$

где t_* есть момент переключения с управления $u(\tau, x) = u_2(\tau, v(\tau))$ на управление $u(\tau, x) = u_1(\tau, v(\tau))$, который согласно (2.15) определяется с помощью соотношения

$$\int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau)) d\tau = 1. \quad (3.10)$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемой системы (1.1)–(1.4) выполняются следующие предположения: функции $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$, $\kappa_1(x)$, $\kappa_2(x)$, $q(x)$ принимают вещественные значения; функции $\kappa_1(x)$, $\kappa_2(x)$ являются ограниченными и измеримыми на $\bar{\Theta}$, $\inf_{x \in \bar{\Theta}} \kappa_2(x) > 0$; $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Theta})$, $a_0(x) \in C(\bar{\Theta})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, дифференциальное выражение (1.4) удовлетворяет условию равномерной эллиптичности (3.1); области управления источника U_0 и стока V_0 суть замкнутые шары в $L_2(\Theta)$ радиусов ϱ_1 и ϱ_2 , $\varrho_1 > \varrho_2$; функция $q(x) \in L_2(\Theta)$ отлична от нуля на некотором множестве из Θ положительной меры и удовлетворяет соотношениям (3.3), (3.7), где β_1, β_2 определены в (3.4); $T \geq T_0$, где T_0 определено в (3.8). Тогда динамическая компонента $Ay(t, x)$ системы (1.1)–(1.4) может быть приведена в ноль за наименьшее время T_0 при любом допустимом управлении стока $v(t, x) \in V_0$ и допустимом управлении источника $u(t, x) \in U_0$ вида (3.9), где момент t_* переключения управления удовлетворяет соотношению (3.10) с разрешающим функционалом $\alpha(t, \tau, v)$ (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.Н.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. **Isaacs R.** Differential Games. New York: John Wiley, 1965. 480 p.
4. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
5. **Kurzanski A.V., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
6. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamic systems. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
7. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. **Куржанский А.Г., Мельников Н.Б.** О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона — Якоби // *Мат. сб.* 2000. Т. 191, № 6. С. 69–100.
9. **Никольский М.С.** Об управлении при наличии противодействия // *Вестн. Моск. ун-та.* 1972. № 1. С. 67–72.
10. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // *Докл. АН СССР.* 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.
11. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // *Прикл. математика и механика.* 1977. Т. 41, № 2. С. 195–201.
12. **Власенко Л.А., Чикрий А.А.** Метод разрешающих функционалов для одной динамической игры в системе типа Соболева // *Проблемы управления и информатики.* 2014. № 4. С. 5–14.
13. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 424 p.
14. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // *Тр. МИАН.* 2010. Т. 271. С. 76–92.
15. **Соболев С.Л.** Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской // *Докл. АН СССР.* 1952. Т. 82, № 2. С. 205–208.
16. **Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.** Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // *Прикл. математика и механика.* 1960. Т. 24. С. 852–864.
17. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
18. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
19. **Руткас А.Г.** Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // *Дифференц. уравнения.* 1975. Т. 11, № 11. С. 1996–2010.
20. **Власенко Л.А.** Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Изд-во “Системные технологии”, 2006. 273 с.
21. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностран. лит., 1962. 830 с.
22. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
23. **Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский.** М.: Наука, 1966. 500 с.
24. **Rutkas A.G., Vlasenko L.A.** Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // *Nonlinear Anal.* 2003. Vol. 55, no. 1–2. P. 125–139.

Власенко Лариса Андреевна
 д-р тех. наук, профессор
 Харьковский нац. университет им. В. Н. Каразина
 e-mail: lara@rutrus.com

Чикрий Аркадий Алексеевич
 д-р физ.-мат. наук, профессор
 член-корр. НАН Украины
 зав. отделом
 Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАНУ
 e-mail: chik@insyg.kiev.ua

УДК 517.972.2

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПРЕДПОЧТЕНИЯ¹

В. В. Гороховик, М. А. Трофимович

В статье представлены необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядка для точек, доставляющих \prec -минимум отображению со значениями в векторном пространстве, на котором задано нетранзитивное отношение предпочтения \prec . Используя аналитическое представление отношения предпочтения с помощью подходящего семейства сублинейных функций, исследуемая задача векторной оптимизации сводится сначала к скалярному неравенству, из которого затем с помощью средств вариационного анализа выводятся условия \prec -минимальности для допустимых точек исходной задачи.

Ключевые слова: векторная оптимизация, нетранзитивное предпочтение, нелинейная скаляризация, условия оптимальности второго порядка.

V. V. Gorokhovich, M. A. Trofimovich. First and second order optimality conditions in vector optimization problems with nontransitive preference relation.

We present first and second order conditions, both necessary and sufficient, for \prec -minimizers of vector-valued mappings over feasible sets with respect to a nontransitive preference relation \prec . Using an analytical representation of the preference relation \prec by means of a suitable family of sublinear functions, we reduce the vector optimization problem under study to a scalar inequality, from which with the tools of variational analysis we then derive minimality conditions for the initial vector optimization problem.

Keywords: vector optimization, nontransitive preference, nonlinear scalarization, second order optimality conditions.

Введение

В наиболее общем виде задача векторной оптимизации формулируется в настоящее время (см., например, монографии [4; 31], а также обзорную статью [28] и содержащуюся в ней библиографию) как задача минимизации или максимизации отображений, принимающих значения в упорядоченном векторном пространстве, т. е. в вещественном векторном пространстве, на котором задано отношение частичного порядка или предпорядка, согласованное с алгебраическими операциями данного векторного пространства. В такой общей формулировке задачи векторной оптимизации включают в себя целый ряд важных прикладных задач, связанных с рациональным выбором.

Вместе с тем в монографии [15] отмечается, что в приложениях, в частности в экономике и социологии, нередко встречаются такие ситуации, когда рациональный выбор приходится осуществлять, сравнивая возможные альтернативы по нетранзитивному отношению предпочтения, которое, следовательно, не является ни отношением частичного порядка, ни отношением предпорядка. Простой модельный пример такой ситуации приводится в статье [34]. Для математического моделирования таких задач рационального выбора в [34] предлагается обобщить принятую в настоящее время формулировку задачи векторной оптимизации, допустив, что отношение предпочтения, при помощи которого сравниваются значения минимизируемого (или максимизируемого) векторнозначного отображения, может не быть транзитивным. Предлагаемая ниже формулировка задачи векторной оптимизации с нетранзитивным (точнее

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф14Д-002).

говоря, с необязательно транзитивным) отношением предпочтения несколько отличается от той, которая дана в [34], хотя по сути они идентичны.

Начнем с уточнения определения понятия отношения предпочтения.

Под отношением предпочтения, определенным на множестве Y , мы понимаем в данной статье произвольное асимметричное бинарное отношение \prec , заданное на Y . (Асимметричность означает выполнение для любых $y_1, y_2 \in Y$ импликации $y_1 \prec y_2 \implies y_2 \not\prec y_1$, где $\not\prec$ — отрицание отношения \prec .) С содержательной точки зрения свойство асимметричности представляется вполне естественным для отношений предпочтения: если альтернатива A “лучше” альтернативы B , то B не может быть “лучше” A .

Вместе с тем мы не исключаем, что отношение предпочтения \prec может обладать и другими свойствами, в частности быть транзитивным ($y_1 \prec y_2, y_2 \prec y_3 \implies y_1 \prec y_3$), однако априори не предполагаем, вообще говоря, наличие этого свойства у отношений предпочтения.

Если Y является вещественным векторным пространством, то говорят [1], что бинарное отношение (произвольное, не обязательно отношение предпочтения) \prec , определенное на Y , согласовано с алгебраическими операциями, заданными на Y , если для любых $y_1, y_2, y \in Y$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, имеют место следующие импликации:

$$y_1 \prec y_2 \implies \alpha y_1 \prec \alpha y_2 \quad (0.1)$$

и

$$y_1 \prec y_2 \implies y_1 + y \prec y_2 + y. \quad (0.2)$$

Импликации (0.1) и (0.2) равносильны тому, что множество $P_\prec = \{y \in Y \mid 0 \prec y\}$ есть конус и

$$y_1 \prec y_2 \iff y_1 - y_2 \in -P_\prec. \quad (0.3)$$

Конус P_\prec называется при этом *конусом положительных элементов* согласованного бинарного отношения \prec .

Для согласованных асимметричных бинарных отношений \prec соответствующий им конус положительных элементов P_\prec также является асимметричным ($P_\prec \cap (-P_\prec) = \emptyset$). В тех же случаях, когда согласованное бинарное отношение \prec транзитивно, P_\prec является выпуклым конусом.

Таким образом, между совокупностью согласованных отношений предпочтения, определенных на векторном пространстве Y , и семейством асимметричных конусов из Y существует взаимно однозначное соответствие, при этом выпуклым асимметричным конусам и только им соответствуют транзитивные отношения предпочтения.

Пусть $F : X \rightarrow Y$ — отображение из некоторого множества X в вещественное векторное пространство Y , на котором задано отношение предпочтения \prec , согласованное с алгебраическими операциями пространства Y . Пусть, кроме того, задано подмножество Q из X .

Будем говорить, что точка $\bar{x} \in Q$ доставляет отображению $F : X \rightarrow Y$ \prec -минимум на подмножестве $Q \subset X$, если не существует точки $x \in Q$ такой, что $F(x) \prec F(\bar{x})$ или, иначе, если $F(x) \not\prec F(\bar{x})$ для всех $x \in Q$.

Нетрудно видеть, что точка $\bar{x} \in Q$ является точкой \prec -минимума отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве Q в том и только том случае, когда $(F(Q) - F(\bar{x})) \cap (-P_\prec) = \emptyset$.

Предположим далее, что Y является топологическим векторным пространством, а определенное на нем отношение предпочтения \prec таково, что $\text{int}P_\prec \neq \emptyset$ и $\text{cl}P_\prec = \text{cl}(\text{int}P_\prec) \neq Y$. Здесь $\text{int}M$ и $\text{cl}M$ — внутренность и замыкание множества M соответственно.

Считая эти предположения выполненными, введем на векторном пространстве Y наряду с отношением \prec производные отношения \ll и \preceq , определив их следующим образом:

$$y_1 \ll y_2 \iff y_1 - y_2 \in -\text{int}P_\prec$$

и

$$y_1 \preceq y_2 \iff y_1 - y_2 \in -\text{cl}P_\prec.$$

Заметим, что отношение \ll также является асимметричным и, следовательно, является отношением предпочтения на Y , тогда как отношение \preceq не является отношением предпочтения, поскольку оно всегда рефлексивно и, следовательно, не является асимметричным. Более того, асимметричная часть \preceq может, вообще говоря, не совпадать с \prec .

Будем говорить, что точка $\bar{x} \in Q$ является *точкой слабого \prec -минимума* отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве Q , если не существует точки $x \in Q$ такой, что $F(x) \ll F(\bar{x})$, или, иначе, если соотношение $F(x) \not\ll F(\bar{x})$ выполняется при всех $x \in Q$.

Точку $\bar{x} \in Q$ будем называть *точкой сильного \prec -минимума* отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве Q , если не существует точки $x \in Q$ такой, что $F(x) \preceq F(\bar{x})$, $F(x) \neq F(\bar{x})$, или, иначе, если $F(x) \not\preceq F(\bar{x})$ для всех $x \in Q$ таких, что $F(x) \neq F(\bar{x})$.

В данных определениях символы $\not\ll$ и $\not\preceq$ обозначают соответственно отрицания отношений \ll и \preceq .

Из определения отношения \ll следует, что точка $\bar{x} \in Q$ является точкой слабого \prec -минимума отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве Q в том и только том случае, когда

$$(F(Q) - F(\bar{x})) \cap (-\text{int}P_{\prec}) = \emptyset. \quad (0.4)$$

Аналогично из определения отношения \preceq легко установить, что точка $\bar{x} \in Q$ является точкой сильного \prec -минимума отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве Q в том и только том случае, когда

$$(F(Q) - F(\bar{x})) \cap (-\text{cl}P_{\prec}) = \{0\}. \quad (0.5)$$

Так как $\text{int}P_{\prec} \subset P_{\prec} \subset \text{cl}P_{\prec} \setminus \{0\}$, то любая точка сильного \prec -минимума является точкой \prec -минимума, а любая точка \prec -минимума является точкой слабого \prec -минимума. Обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Задачу нахождения точек (слабого, сильного) \prec -минимума отображения $F : X \rightarrow Y$ на подмножестве $Q \subset X$ будем называть *задачей векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения* (если точнее, то следовало бы называть задачей векторной оптимизации с необязательно транзитивным отношением предпочтения).

При исследовании точек \prec -минимума отображений мы будем использовать средства вариационного анализа, которые по своей сути являются локальными, поэтому естественно при проведении таких исследований перейти к локальным понятиям \prec -минимума.

Когда X — топологическое пространство, то говорят, что точка $\bar{x} \in Q$ доставляет отображению $F : X \rightarrow Y$ *локальный \prec -минимум* (соответственно *локальный слабый \prec -минимум*) на множестве Q , если для некоторой окрестности $\mathcal{N}(\bar{x})$ точки \bar{x} соотношение $F(x) \not\ll F(\bar{x})$ (соответственно соотношение $F(x) \not\ll F(\bar{x})$) выполняется при всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$; точка $\bar{x} \in Q$ доставляет отображению $F : X \rightarrow Y$ *локальный сильный \prec -минимум* отображению $F : X \rightarrow Y$ на множестве Q , если для некоторой окрестности $\mathcal{N}(\bar{x})$ точки \bar{x} соотношение $F(x) \not\preceq F(\bar{x})$ выполняется при всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$, $F(x) \neq F(\bar{x})$.

Основная цель настоящей статьи — вывод необходимых, а также достаточных условий первого и второго порядка для точек локального \prec -минимума отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве допустимых точек $Q \subset X$ в задаче векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения \prec . Методика вывода условий \prec -минимальности существенно опирается на то, что любое согласованное отношение предпочтения \prec (точнее, производные от \prec отношения \ll и \preceq) можно представить аналитически при помощи некоторого семейства сублинейных функций, а в случае, когда отношение предпочтения \prec транзитивно, при помощи единственной сублинейной функции. Благодаря такому представлению исследуемая задача векторной оптимизации сводится к скалярному вариационному неравенству (этот этап принято называть сейчас *нелинейной скаляризацией задачи векторной оптимизации*), последующий анализ которого приводит затем к условиям минимальности для допустимых точек исходной задачи. Для задач векторной оптимизации с транзитивным отношением предпочтения подобная методика вывода условий оптимальности первого и второго порядка впервые была предложена

и реализована в [3], ее детальное изложение может быть найдено в монографии [4]. В настоящее время подобная методика получила широкое распространение и используется многими авторами (см., например, [25; 37]).

Завершая введение, отметим, что разработанная в данной статье методика вывода условий оптимальности для решений задач векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения может быть использована также для исследования гарантированно оптимальных решений в задачах векторной оптимизации с неточно заданным отношением предпочтения в случае, когда неточность понимается как множественная неопределенность. Это означает, что лицу, осуществляющему выбор решения, известно лишь семейство (множество) возможных реализаций отношения предпочтения, в то же время конкретная его реализация в момент принятия решения неизвестна. Не вдаваясь в детали, отметим, что идейно определение гарантированно оптимального решения восходит к работам А. Б. Куржанского [13; 14], посвященным исследованию задач оптимизации и оптимального управления в условиях неопределенности.

Авторы посвящают данную работу Александру Борисовичу Куржанскому в связи с его 75-летним юбилеем.

1. Нелинейная скаляризация задачи векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения

Данные выше определения понятий (слабого, сильного) \prec -минимума в задаче векторной оптимизации являются, по существу, теоретико-множественными. Вместе с тем аналитические средства более развиты и приспособлены для анализа функций и отображений, нежели множеств. Естественно поэтому попытаться найти эквивалентные формулировки для данных определений, выраженные в функциональных терминах. Такие формулировки можно получить, представив отношение предпочтения аналитически. Заметим, что аналитические представления существуют для произвольных отношений предпочтения. Для этого достаточно использовать, например, либо индикаторную функцию самого отношения предпочтения, либо индикаторную функцию конуса положительных элементов в случае согласованного отношения предпочтения. Проблема поэтому заключается в том, чтобы выбрать для представления отношения предпочтения такую функцию, дифференциальные свойства которой обеспечивали бы в последующем эффективное проведение вариационного анализа задачи. Ранее было показано (см. [4]), что любое транзитивное согласованное отношение предпочтения с телесным конусом положительных элементов может быть представлено аналитически при помощи сублинейных функций, которые, как известно, являются непрерывными и дифференцируемыми по направлениям в любой точке. При соответствующих предположениях относительно дифференциальных свойств целевого отображения задачи векторной оптимизации такой выбор представляющей функции для транзитивного отношения предпочтения позволил (см., например, [4; 5; 7]) установить условия оптимальности первого и второго порядка, используя для их вывода средства вариационного анализа. Ниже в данном разделе мы показываем, что для представления нетранзитивных согласованных отношений предпочтения с телесным конусом положительных элементов следует вместо сублинейных функций использовать функции из более широкого класса липшицевых положительно однородных функций. Сравнительно недавно [10; 22] было показано что класс липшицевых положительно однородных функций совпадает с классом функций, представимых в виде нижней огибающей компактного (в равномерной метрике) семейства сублинейных функций, поэтому можно говорить о представлении нетранзитивных отношений предпочтения при помощи семейства сублинейных функций. В общем случае, однако, липшицевы положительно однородные функции не являются дифференцируемыми по направлениям в ненулевых точках, что делает невозможным вывод условий оптимальности второго порядка средствами вариационного анализа. Чтобы преодолеть эту трудность, мы вводим в четвертом разделе дополнительное предположение о финитности нетранзитивного согласованного отношения предпочтения.

На этом мы завершим неформальное обсуждение результатов данного раздела и перейдем к их детальному изложению.

Будем предполагать всюду далее, что векторное пространство Y является конечномерным нормированным пространством (это позволит избежать некоторых технических деталей).

Напомним некоторые необходимые в дальнейшем сведения о положительно однородных функциях.

Функция $p : Y \rightarrow \mathbb{R}$ называется *положительно однородной*, если для любого $y \in Y$ и любого вещественного числа $\lambda > 0$ справедливо равенство $p(\lambda y) = \lambda p(y)$.

Выпуклая (вогнутая) положительно однородная функция $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сублинейной* (*суперлинейной*). Очевидно, что если функция $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейна, то $-\varphi$ — суперлинейная функция.

Каждой сублинейной функции $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ в пространстве линейных непрерывных функционалов Y^* однозначно соответствует выпуклое компактное подмножество

$$\partial\varphi = \{y^* \in Y^* \mid y^*(y) \leq \varphi(y) \forall y \in Y\},$$

называемое *субдифференциалом* функции φ , при этом

$$\varphi(y) = \max_{y^* \in \partial\varphi} y^*(y), \quad y \in Y.$$

В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [11; 16] доказали, что положительно однородная функция $p : Y \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной в том и только том случае, когда ее можно представить в виде

$$p(y) = \inf_{\varphi \in \Phi_p} \varphi(y) \quad \text{для всех } y \in Y, \quad (1.1)$$

где $\Phi_p = \{\varphi\}$ — некоторое семейство сублинейных функций $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$, а также в виде

$$p(y) = \sup_{\psi \in \Psi_p} \psi(y) \quad \text{для всех } y \in Y, \quad (1.2)$$

где $\Psi_p = \{\psi\}$ — некоторое семейство суперлинейных функций $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$.

Семейство сублинейных функций $\Phi_p = \{\varphi\}$, удовлетворяющее равенству (1.1), будем называть, следуя [10], *прямым верхним экзостером* положительно однородной функции p , а семейство суперлинейных функций $\Psi_p = \{\psi\}$, удовлетворяющее равенству (1.2), — *прямым нижним экзостером*.

Если Φ_p — прямой верхний экзостер функции p , то семейство $\Phi_p^* := \{\partial\varphi \mid \varphi \in \Phi_p\}$, состоящее из субдифференциалов сублинейных функций φ из Φ_p , назовем [10] *двойственным верхним экзостером* функции p , а семейство $\Psi_p^* := \{-\partial(-\psi) \mid \psi \in \Psi_p\}$, где Ψ_p — прямой нижний экзостер функции p , будем называть [10] *двойственным нижним экзостером* функции p .

Отметим, что в работах В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [11; 16] прямые верхние (нижние) экзостеры называются *исчерпывающими семействами верхних выпуклых (нижних вогнутых) аппроксимаций*. Термин *экзостер* ввел В. Ф. Демьянов [23; 24], применяя его исключительно для двойственных экзостеров.

Символом $\mathcal{P}_C(Y)$ будем обозначать совокупность непрерывных положительно однородных функций, определенных на Y . Относительно стандартных операций поточечного сложения и умножения на вещественное число $\mathcal{P}_C(Y)$ является векторным пространством, которое при введении нормы $\|p\| = \max_{\|y\|=1} |p(y)|$ превращается в банахово пространство.

Как уже отмечалось выше, характеристическим свойством непрерывных положительно однородных функций является существование обоих, верхнего и нижнего, экзостеров. В следующем предложении в терминах экзостеров дается характеристика липшицевых положительно однородных функций.

Предложение 1 [10, теорема 7]. Пусть $p : Y \rightarrow \mathbb{R}$ — положительно однородная функция.

Следующие утверждения эквивалентны:

- а) p является липшицевой на всем пространстве Y ;
- б) для p существует компактный в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ прямой верхний экзостер;
- с) для p существует компактный в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ прямой нижний экзостер.

Ниже мы воспользуемся этим предложением для того, чтобы получить аналитическое описание нетранзитивных согласованных отношений предпочтения при помощи семейства сублинейных функций. Начнем с полного описания таких отношений предпочтения, конус положительных элементов которых является открытым.

Предложение 2. Для любого согласованного отношения предпочтения \prec , конус положительных элементов P_\prec которого является открытым ($P_\prec = \text{int}P_\prec$), существует компактное в пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейство сублинейных функций Φ_\prec такое, что

$$y_1 \prec y_2 \iff \min_{\varphi \in \Phi_\prec} \varphi(y_1 - y_2) < 0. \quad (1.3)$$

Если отношение предпочтения \prec является, кроме того, транзитивным, то семейство Φ_\prec , удовлетворяющее (1.3), может быть выбрано одноэлементным, т. е. существует сублинейная функция $\varphi_\prec : Y \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$y_1 \prec y_2 \iff \varphi_\prec(y_1 - y_2) < 0. \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть \prec — согласованное отношение предпочтения на Y и пусть P_\prec — соответствующий ему конус положительных элементов. Определим на пространстве Y функцию

$$p_\prec(y) := \inf_{z \in P_\prec} \|y + z\| - \inf_{z \in Y \setminus P_\prec} \|y + z\|. \quad (1.5)$$

Величина $p_\prec(y)$ есть симметризованное расстояние² от точки y до конуса $-P_\prec$.

Непосредственно из определения симметризованного расстояния и того, что конус положительных элементов P_\prec является открытым, легко получить, что

$$-P_\prec = \{y \in Y \mid p_\prec(y) < 0\}. \quad (1.6)$$

Кроме того, из свойств симметризованного расстояния (см. [4]) следует, что функция $p_\prec : y \rightarrow p_\prec(y)$ является положительно однородной и липшицевой на всем пространстве Y с константой Липшица, равной единице. Значит, в силу предложения 1 заключаем, что для p_\prec существует компактный в пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ прямой верхний экзостер, т. е. такое компактное в $\mathcal{P}_C(Y)$ семейство сублинейных функций Φ_\prec , что

$$p_\prec(y) = \min_{\varphi \in \Phi_\prec} \varphi(y), \quad y \in Y. \quad (1.7)$$

Используя равенства (1.6) и (1.7), легко видеть, что при предположениях, сделанных относительно \prec , тождество (0.3) эквивалентно тождеству (1.3).

Для доказательства второй части предложения 2 заметим, что в случае, когда отношение предпочтения \prec транзитивно, соответствующий ему конус положительных элементов P_\prec является выпуклым, а это влечет выпуклость функции симметризованного расстояния до $-P_\prec$,

²Симметризованное расстояние от точки до множества введено Ж.-Б. Ириарт-Уррути в [29;30]. Детальная характеристика свойств функции симметризованного расстояния содержится в монографии [4], в которой данная функция впервые была использована в теории векторной оптимизации для аналитического описания транзитивных отношений предпочтения.

т. е. выпуклость функции $p_{\prec} : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Выбрав p_{\prec} в качестве функции φ_{\prec} , приходим к тождеству (1.4). Это завершает доказательство предложения 2.

З а м е ч а н и е. При доказательстве предложения 2 вместо функции расстояния Ириарта-Уррути (1.5) можно воспользоваться и другими положительно однородными функциями, представляющими конус положительных элементов отношения предпочтения \prec , в частности, функцией Красносельского

$$p_{u, P_{\prec}}(x) = \inf\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u \in P_{\prec}\}, \quad (1.8)$$

где u — фиксированный вектор, принадлежащий $\text{int}P_{\prec}$.

Впервые функция (1.8) была введена М. А. Красносельским [12] для описания согласованных отношений частичного порядка. В векторной оптимизации функция (1.8) впервые появилась в работе К. Герштвиц (Таммер) [27]. Детальное описание свойств функции (1.8) можно найти в монографии [36]. Для описания нетранзитивных отношений предпочтения в задачах векторной оптимизации функция (1.8) использовалась в [26; 34].

Предложение 3. Пусть \prec — произвольное согласованное отношение предпочтения такое, что соответствующий ему конус положительных элементов P_{\prec} является телесным, причем $\text{cl}P_{\prec} = \text{cl}(\text{int}P_{\prec})$. Тогда существует компактное в пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейство сублинейных функций Φ_{\prec} такое, что

$$y_1 \ll y_2 \iff \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(y_1 - y_2) < 0 \quad (1.9)$$

и

$$y_1 \preceq y_2 \iff \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(y_1 - y_2) \leq 0. \quad (1.10)$$

Если отношение предпочтения \prec является, кроме того, транзитивным, то семейство Φ_{\prec} , удовлетворяющее (1.9) и (1.10), может быть выбрано одноэлементным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При сделанных предположениях относительно согласованного отношения предпочтения \prec функция p_{\prec} , определенная равенством (1.5), удовлетворяет соотношениям $-\text{int}P_{\prec} = \{y \in Y \mid p_{\prec}(y) < 0\}$ и $-\text{cl}P_{\prec} = \{y \in Y \mid p_{\prec}(y) \leq 0\}$, из которых, учитывая определения (0.4) и (0.5), следуют тождества (1.9) и (1.10). Заключительная часть утверждения доказывается также, как и в предложении 2. Предложение 3 доказано.

Сравнивая тождества (1.9) и (1.10) с определениями слабого и сильного \prec -минимума отображения F на множестве Q , приходим к следующей теореме о скаляризации.

Теорема 1 (теорема о скаляризации). а) Для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла локальный слабый \prec -минимум отображению $F : X \rightarrow Y$ на множестве $Q \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность $\mathcal{N}(\bar{x})$ точки \bar{x} такая, что

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x) - F(\bar{x})) \geq 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(\bar{x}), \quad (1.11)$$

где Φ_{\prec} — произвольное компактное в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейство сублинейных функций, удовлетворяющее тождествам (1.9) и (1.10).

б) Для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла локальный сильный \prec -минимум отображению $F : X \rightarrow Y$ на множестве $Q \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого компактного в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейства сублинейных функций, удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10), и некоторой окрестности $\mathcal{N}(\bar{x})$ точки \bar{x} выполнялось условие

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x) - F(\bar{x})) > 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(\bar{x}), \quad F(x) \neq F(\bar{x}). \quad (1.12)$$

Условие (1.11) является, по существу, необходимым, а условие (1.12) — достаточным для точек локального \prec -минимума отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве Q .

Важно отметить также то, что условия (1.11) и (1.12) не зависят от конкретного выбора семейства $\Phi_{\prec} : Y \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10).

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что условия (1.11) и (1.12) сводят задачу \prec -минимизации векторнозначного отображения F на множестве точек Q к задаче минимизации скалярной целевой функции $x \rightarrow \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x) - F(\bar{x}))$ на том же множестве Q и в этом смысле скаляризуют исходную задачу векторной оптимизации. Ценность условий (1.11) и (1.12) в том, что они позволяют перейти от теоретико-множественного по своему содержанию определения точек \prec -минимума к их аналитическим характеристикам, более удобным для вариационного анализа.

Дальнейшая часть работы посвящена вариационному анализу неравенств (1.11) и (1.12), в результате которого будут получены как необходимые, так и достаточные условия первого и второго порядка для точек локального \prec -минимума отображения F на множестве Q . Случай, когда отношение предпочтения является транзитивным, достаточно подробно изучен нами ранее в работах [2–5; 7]. Настоящая работа является непосредственным продолжением и развитием исследований работ [8; 9], в которых представлены необходимые условия для точек \prec -минимума в задаче векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения и негладким целевым отображением $F : X \rightarrow Y$.

Рассматривая далее задачу \prec -минимизации отображения $F : X \rightarrow Y$ на множестве $Q \subset X$, будем предполагать всюду в данной статье, даже если это не оговорено специально, что отношение предпочтения \prec удовлетворяет условиям $\text{int}P_{\prec} \neq \emptyset$ и $\text{cl}(\text{int}P_{\prec}) = \text{cl}P_{\prec} \neq Y$.

Кроме того, будем предполагать всюду далее, что X является вещественным нормированным пространством. Это позволит нам при выводе условий \prec -минимальности допустимых точек задачи векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения использовать в качестве локальных аппроксимаций множества допустимых точек совокупности касательных векторов первого и второго порядка, а в качестве локальных аппроксимаций целевого отображения различные его производные (по направлениям) первого и второго порядка, которые определены, главным образом, именно в нормированных пространствах.

2. Условия \prec -минимальности первого порядка

Напомним определения касательного (контингентного) конуса первого порядка к множеству и первых производных (по направлениям) отображений (более детальную информацию об этих понятиях и их свойствах можно получить в [4–6; 18; 21; 33]).

Символом $S(0)$ будем обозначать ниже семейство последовательностей положительных вещественных чисел (t_n) , $t_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, сходящихся к нулю.

Для любого подмножества M из вещественного нормированного пространства X символом U_M будем обозначать семейство всех последовательностей (x_n) таких, что $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots$, а символом $U_M(\bar{x})$ — подсемейство из U_M , состоящее из последовательностей (x_n) , сходящихся (в смысле нормы, заданной на X) к точке \bar{x} .

Говорят, что вектор $h \in X$ является *касательным вектором первого порядка* к множеству M в точке $\bar{x} \in \text{cl}M$, если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_M(\bar{x})$ такие, что $\frac{x_n - \bar{x}}{t_n} \rightarrow h$ при $n \rightarrow \infty$.

Совокупность всех векторов из X , касательных (первого порядка) к множеству M в точке $\bar{x} \in \text{cl}M$, образует замкнутый конус, который мы будем обозначать символом $T(\bar{x} | M)$ и называть *касательным конусом к множеству M в точке \bar{x}* .

Приведем определения используемых ниже локальных аппроксимаций отображений.

Отображение $F : X \rightarrow Y$ из нормированного пространства X в нормированное пространство Y называется *дифференцируемым в точке $\bar{x} \in X$ по направлению $h \in X$* , если существует

предел

$$F'(\bar{x} | h) := \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{F(\bar{x} + th) - F(\bar{x})}{t}.$$

Если $F'(\bar{x} | h)$ существует для любого $h \in X$, то отображение $F'(\bar{x} | \cdot) : h \rightarrow F'(\bar{x} | h)$ называется *производной по направлениям отображения F в точке \bar{x}* .

Говорят, что отображение $F : X \rightarrow Y$ *H -дифференцируемо по направлениям в точке $\bar{x} \in X$* , если оно дифференцируемо по направлениям в точке \bar{x} и при этом для всех $h \in X$ справедливо равенство

$$F'(\bar{x} | h) = \lim_{(t, z) \rightarrow (0^+, h)} \frac{F(\bar{x} + tz) - F(\bar{x})}{t}.$$

Если отображение $F : X \rightarrow Y$ *H -дифференцируемо по направлениям в точке $\bar{x} \in X$* , то производная по направлениям $F'(\bar{x} | \cdot) : X \rightarrow Y$, как функция направления, непрерывна на всем пространстве X .

Отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *дифференцируемым по Фреше* в точке $\bar{x} \in X$, если существует непрерывное линейное отображение $F'(\bar{x}) : X \rightarrow Y$ такое, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) - F'(\bar{x})h}{\|h\|} = 0,$$

при этом линейное отображение $F'(\bar{x}) : X \rightarrow Y$ называется *производной Фреше* отображения F в точке \bar{x} .

Очевидно, что дифференцируемое по Фреше отображение является *H -дифференцируемым по направлениям*, причем $F'(\bar{x} | h) = F'(\bar{x})h$ для всех $h \in X$.

Используя стандартные методы вариационного анализа, непосредственно из теоремы о скаляризации (теоремы 1) приходим к следующим условиям \prec -минимальности первого порядка.

Теорема 2 (условия первого порядка для точек \prec -минимума). Пусть $\bar{x} \in Q$ и пусть отображение $F : X \rightarrow Y$ является *H -дифференцируемым по направлениям в точке \bar{x}* . Тогда

а) для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла отображению $F : X \rightarrow Y$ локальный слабый \prec -минимум на множестве Q , необходимо, чтобы для любого компактного в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейства сублинейных функций Φ_{\prec} , удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10), выполнялось неравенство

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in T(\bar{x} | Q) \quad (2.1)$$

или, эквивалентно, чтобы

$$SK_F(\bar{x}) \cap T(\bar{x} | Q) = \emptyset,$$

где $SK_F(\bar{x}) := \{h \in X \mid \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h)) < 0\}$.

б) если нормированные пространства X и Y конечномерны, то для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла отображению $F : X \rightarrow Y$ локальный сильный \prec -минимум на множестве Q , достаточно, чтобы для некоторого компактного в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейства сублинейных функций Φ_{\prec} , удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10), выполнялось неравенство

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h)) > 0 \text{ для всех } h \in T(\bar{x} | Q), h \neq 0 \quad (2.2)$$

или, эквивалентно, чтобы

$$K_F(\bar{x}) \cap T(\bar{x} | Q) = \{0\},$$

где $K_F(\bar{x}) := \{h \in X \mid \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h)) \leq 0\}$.

Доказательство. Поскольку функция $x \rightarrow \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x) - F(\bar{x}))$ как композиция липшицевой положительно однородной функции $p_{\prec} : y \rightarrow \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(y)$ и H -дифференцируемого по направлениям отображения $x \rightarrow F(x) - F(\bar{x})$ также является H -дифференцируемой по направлениям и ее H -производная по направлениям в точке \bar{x} равна $h \rightarrow \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h))$, то условия (2.1) и (2.2) элементарно следуют соответственно из условий (1.11) и (1.12). Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть отображение $F : X \rightarrow Y$ является дифференцируемым по Фреше в точке $\bar{x} \in X$ и пусть $F'(\bar{x}) : X \rightarrow Y$ — производная Фреше отображения F в точке \bar{x} . Тогда

а) для того чтобы точка $\bar{x} \in X$ доставляла отображению $F : X \rightarrow Y$ локальный слабый \prec -минимум на всем пространстве X , необходимо, чтобы для любого компактного в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейства сублинейных функций Φ_{\prec} , удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10), выполнялись включения

$$0 \in \partial(\varphi \circ F'(\bar{x})) \text{ для всех } \varphi \in \Phi_{\prec};$$

б) если нормированные пространства X и Y конечномерны, то для того чтобы точка $\bar{x} \in X$ доставляла отображению $F : X \rightarrow Y$ локальный сильный \prec -минимум на всем пространстве X , достаточно, чтобы для некоторого компактного в банаховом пространстве $\mathcal{P}_C(Y)$ семейства сублинейных функций Φ_{\prec} , удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10), выполнялись включения

$$0 \in \text{int}[\partial(\varphi \circ F'(\bar{x}))] \text{ для всех } \varphi \in \Phi_{\prec}.$$

3. Условия локальной \prec -минимальности второго порядка

При выводе условий \prec -минимальности второго порядка мы будем исходить, также как и при выводе условий \prec -минимальности первого порядка, из теоремы скаляризации, а точнее, из условий (1.11) и (1.12), используя для вариационного анализа входящих в них множеств и отображений локальные аппроксимации второго порядка.

Вектор $w \in X$ называется (см., например, [4; 5; 7; 18; 21; 33]) *касательным вектором второго порядка* к множеству $M \subset X$ в точке $\bar{x} \in \text{cl}M$ по направлению $h \in X$ (или просто в $(\bar{x}, h) \in \text{cl}M \times X$), если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_M(\bar{x})$ такие, что

$$\frac{x_n - \bar{x} - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2} \rightarrow w.$$

Множество всех касательных векторов второго порядка к множеству $M \subset X$ в точке $\bar{x} \in \text{cl}M$ по направлению $h \in X$ будем обозначать символом $T^2(\bar{x}, h | M)$.

Известно, что $T^2(\bar{x}, h | M)$ является замкнутым (возможно, пустым) подмножеством в X .

Говорят [2; 21; 35], что множество $M \subset X$ удовлетворяет *условию регулярности второго порядка* в точке $\bar{x} \in \text{cl}M$ по направлению $h \in X$, если для любых последовательностей $(x_n) \in U_M(\bar{x})$ и $(t_n) \in S(0)$ таких, что $\frac{x_n - \bar{x}}{t_n} \rightarrow h$, выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist} \left(\frac{x_n - \bar{x} - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2}, T^2(\bar{x}, h | M) \right) = 0,$$

где $\text{dist}(z, M) := \inf_{u \in M} \|z - u\|$ — расстояние от точки z до множества M .

Напомним сейчас понятия производных по направлениям второго порядка для отображений.

Следуя [19; 20] (см. также [4; 21]), отображение $F : X \rightarrow Y$ будем называть *дважды параболически дифференцируемым* в точке \bar{x} по направлению $h \in X$ с отклонением $w \in X$, если F дифференцируемо в точке \bar{x} по направлению h и, кроме того, существует предел

$$F''(\bar{x} | h, w) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F\left(\bar{x} + th + \frac{1}{2}t^2w\right) - F(\bar{x}) - tF'(\bar{x} | h)}{\frac{1}{2}t^2}.$$

Если предел $F''(\bar{x} | h, w)$ существует и, кроме того,

$$F''(\bar{x} | h, w) = \lim_{(t, z) \rightarrow (0^+, w)} \frac{F\left(\bar{x} + th + \frac{1}{2}t^2z\right) - F(\bar{x}) - tF'(\bar{x} | h)}{\frac{1}{2}t^2}, \quad (3.1)$$

то будем говорить, что отображение F *дважды параболически H -дифференцируемо* в точке \bar{x} по направлению h с отклонением w .

В том случае, когда $F''(\bar{x} | h, w)$ существует для всех $h \in X$ и $w \in X$, отображение $F''(\bar{x} | \cdot, \cdot) : (h, w) \rightarrow F''(\bar{x} | h, w)$ называется *второй параболической производной* (или, если выполняется (3.1), *второй параболической H -производной*) отображения F в точке \bar{x} .

Нетрудно убедиться, что сужение второй параболической производной $F''(\bar{x} | \cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow Y$ на $\{0\} \times X$ совпадает с первой производной по направлениям, т. е. имеет место равенство $F''(\bar{x} | 0, w) = F'(\bar{x} | w)$ для всех $w \in X$.

Будем говорить [17], что отображение $F : X \rightarrow Y$ является *дважды дифференцируемым по Фреше — Тэйлору* в точке $\bar{x} \in X$, если оно дифференцируемо по Фреше в этой точке и, кроме того, существует непрерывное симметричное билинейное отображение $F''(\bar{x}) : X \times X \rightarrow Y$ такое, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) - F'(\bar{x})h - \frac{1}{2}F''(\bar{x})[h, h]}{\|h\|^2} = 0,$$

при этом соответствующее квадратичное отображение $h \rightarrow F''(\bar{x})[h, h]$ будем называть *второй производной Фреше — Тэйлора* отображения F в точке \bar{x} .

Очевидно, что дважды дифференцируемое по Фреше — Тэйлору отображение является дважды параболически H -дифференцируемым по направлениям с отклонениями, причем

$$F''(\bar{x} | h, w) = F'(\bar{x})w + F''(\bar{x})[h, h] \text{ для всех } h \in X \text{ и } w \in X.$$

Заметим, что понятие второй производной Фреше — Тэйлора слабее классического понятия второй производной Фреше, которая, как известно, вводится как производная первой производной Фреше и в этом смысле является последовательной. В данном выше определении понятия производной Фреше — Тэйлора фактически постулируется лишь одно из свойств второй производной Фреше, связанное с формулой Тэйлора.

Перейдем к выводу условий \prec -минимальности второго порядка. Для этого предположим дополнительно, что отношение предпочтения \prec не только согласовано с алгебраическими операциями векторного пространства Y , но, кроме того, удовлетворяет следующему условию финитности.

Будем говорить, что согласованное отношение предпочтения \prec , определенное на векторном пространстве Y , удовлетворяет *условию финитности*, если оно представимо в виде объединения конечного числа согласованных транзитивных отношений предпочтения, каждому из которых соответствует телесный (и выпуклый, вследствие транзитивности) конус положительных элементов.

Другими словами, согласованное отношение предпочтения \prec , определенное на векторном пространстве Y , удовлетворяет *условию финитности*, если соответствующий ему конус положительных элементов P_{\prec} представим в виде объединения конечного числа телесных выпуклых конусов.

Предположение о финитности согласованного отношения предпочтения \prec эквивалентно существованию конечного семейства Φ_{\prec} сублинейных функций, удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10).

Теорема 3 (необходимое условие второго порядка для точек слабого \prec -минимума).

Пусть отображение $F : X \rightarrow Y$ является дважды параболически H -дифференцируемым по направлениям с отклонениями в точке $\bar{x} \in Q$ и пусть отношение предпочтения \prec , определенное на векторном пространстве Y , является согласованным с алгебраическими операциями пространства Y и удовлетворяет условию финитности. Тогда для того чтобы точка \bar{x} доставляла отображению $F : X \rightarrow Y$ локальный слабый \prec -минимум на множестве Q , необходимо, чтобы для любого конечного семейства сублинейных функций Φ_{\prec} , удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10), и любого $h \in T(\bar{x} | Q)$ такого, что $\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h)) = 0$, выполнялось неравенство

$$\inf_{w \in T^2(\bar{x}, h | Q)} \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h)} \max_{y^* \in \partial \varphi(F'(\bar{x})h)} y^*(F''(\bar{x} | h, w)) \geq 0, \quad (3.2)$$

где $\Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h) := \{\varphi \in \Phi_{\prec} | \varphi(F'(\bar{x})h) = 0\}$, $\partial \varphi(F'(\bar{x})h) = \{y^* \in \partial \varphi | y^*(F'(\bar{x})h) = \varphi(F'(\bar{x})h)\}$.

Доказательство. В силу финитности отношения предпочтения \prec существует конечное семейство сублинейных функций Φ_{\prec} , удовлетворяющее тождествам (1.9) и (1.10). Определим на Y функцию $p_{\prec} : y \rightarrow \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(y)$. Заметим, что в силу конечности Φ_{\prec} функция $p_{\prec}(y)$ определена при любом $y \in Y$ и, кроме того (см., например, [6]), дифференцируема по направлениям в любой точке $\bar{y} \in Y$, причем $p'_{\prec}(\bar{y} | y) = \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}(\bar{y})} \varphi'(\bar{y} | y) = \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}(\bar{y})} \max_{y^* \in \partial \varphi(\bar{y})} y^*(y)$, $y \in Y$, где $\Phi_{\prec}(\bar{y}) = \{\varphi \in \Phi_{\prec} | p_{\prec}(\bar{y}) = \varphi(\bar{y})\}$, $\partial \varphi(\bar{y}) = \{y^* \in \partial \varphi | y^*(\bar{y}) = \varphi(\bar{y})\}$.

Рассмотрим произвольный вектор $h \in T(\bar{x} | Q)$, удовлетворяющий равенству

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h)) = 0,$$

и произвольный вектор $w \in T^2(\bar{x}, h | Q)$. Выберем последовательности $(x_n) \in U_Q(\bar{x})$ и $(t_n) \in S(0)$ такие, что

$$\frac{x_n - \bar{x} - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2} \rightarrow w.$$

Положим

$$w_n := \frac{x_n - \bar{x} - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2}.$$

Тогда

$$x_n = \bar{x} + t_n h + \frac{1}{2} t_n^2 w_n.$$

Так как $x_n \in Q$ для всех n и $x_n \rightarrow \bar{x}$, то из утверждения а) теоремы 1 заключаем, что $p_{\prec}(F(x_n) - F(\bar{x})) = \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x_n) - F(\bar{x})) \geq 0$ при достаточно больших n . Воспользовавшись тем, что отображение F дважды параболически H -дифференцируемо в точке \bar{x} и $p_{\prec}(F'(\bar{x} | h)) = \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x} | h)) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\prec}(F(x_n) - F(\bar{x}))}{\frac{1}{2} t_n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\prec}\left(F'(\bar{x} | h) + \frac{1}{2} t_n \left(F''(\bar{x} | h, w) + \frac{o(t_n, w_n)}{t_n^2}\right)\right) - p_{\prec}(F'(\bar{x} | h))}{\frac{1}{2} t_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p'_{\prec}(F'(\bar{x}|h) | F''(\bar{x}|h, w)) = \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}(F'(\bar{x}|h))} \varphi'(F'(\bar{x}|h) | F''(\bar{x}|h, w)) \\
 &= \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}(F'(\bar{x}|h))} \max_{y^* \in \partial\varphi(F'(\bar{x}|h))} y^*(F''(\bar{x}|h, w)) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Заметим, что при выполнении предположений теоремы 3 условие (3.2) содержит в себе необходимое условие первого порядка (2.1). Действительно, положив в (3.2) $h = 0$, получим (2.1).

Теорема 4 (достаточное условие второго порядка для точек локального \prec -минимума).

Предположим, что нормированные пространства X и Y конечномерны и пусть в точке $\bar{x} \in Q$ отображение $F : X \rightarrow Y$ является дважды дифференцируемым по Фреше – Тэйлору, а согласованное отношение предпочтения \prec , определенное на векторном пространстве Y , удовлетворяет условию финитности.

Тогда, для того чтобы точка $\bar{x} \in Q$ доставляла отображению $F : X \rightarrow Y$ локальный сильный \prec -минимум на множестве Q , достаточно, чтобы для некоторого конечного семейства сублинейных функций Φ_{\prec} , удовлетворяющего тождествам (1.9) и (1.10), выполнялись следующие условия:

1) было справедливо неравенство

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x})h) \geq 0 \text{ для всех } h \in T(\bar{x}|Q); \tag{3.3}$$

2) для любого $h \in C(\bar{x}) := \{h \in T(\bar{x}|Q) \mid \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x})h) = 0\}$, $h \neq 0$, имело место неравенство

$$\gamma(\bar{x}, h) := \inf_{w \in T^2(\bar{x}, h|Q)} \min_{\varphi \in \Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h)} \max_{y^* \in \partial\varphi(F'(\bar{x})h)} y^*(F'(\bar{x})w + F''(\bar{x})[h, h]) > 0, \tag{3.4}$$

где $\Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h) := \{\varphi \in \Phi_{\prec} \mid \varphi(F'(\bar{x})h) = 0\}$, $\partial\varphi(F'(\bar{x})h) = \{y^* \in \partial\varphi \mid y^*(F'(\bar{x})h) = \varphi(F'(\bar{x})h)\}$;

3) множество Q удовлетворяло условию регулярности второго порядка в точке \bar{x} по любому направлению $h \in C(\bar{x})$, $h \neq 0$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что условия 1)–3) выполнены, а \bar{x} не является локально сильно \prec -минимальной точкой отображения F на множестве Q . Тогда в силу утверждения б) из теоремы 1 найдется последовательность $(x_n) \in U_Q(\bar{x})$, $F(x_n) \neq F(\bar{x})$, такая, что $\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x_n) - F(\bar{x})) \leq 0$ для всех n . Покажем, что существование такой последовательности противоречит условиям 1)–3).

Без ограничения общности можем считать, что последовательность (x_n) такова, что соответствующая ей последовательность $h_n = \frac{x_n - \bar{x}}{t_n}$, где $t_n = \|x_n - \bar{x}\|$, сходится к некоторому вектору h , $\|h\| = 1$, который, как это следует непосредственно из определения касательного конуса первого порядка, принадлежит $T(\bar{x}|Q)$. Так как отображение F дифференцируемо по Фреше в точке \bar{x} , то из условия $\frac{\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x_n) - F(\bar{x}))}{t_n} \leq 0$, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x})h) \leq 0$. С другой стороны, поскольку $h \in T(\bar{x}|Q)$, то в силу условия (3.3) имеем $\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x})h) \geq 0$ и, значит, $\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F'(\bar{x})h) = 0$. Таким образом, $h \in C(\bar{x})$, причем $h \neq 0$.

Из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(F(x_n) - F(\bar{x}))}{t_n} = \varphi(F'(\bar{x})h),$$

справедливого для любой сублинейной функции φ , а также из неравенства

$$\varphi(F'(\bar{x})h) > 0 \text{ для всех } \varphi \in \Phi_{\prec} \setminus \Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h),$$

которое следует из условия (3.3) и определения подсемейства $\Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h)$, приходим к заключению, что для любого $\varphi \in \Phi_{\prec} \setminus \Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h)$ можно указать номер $n_{\varphi} \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\varphi(F(x_n) - F(\bar{x})) > 0 \text{ для всех } n \geq n_{\varphi}. \quad (3.5)$$

Так как семейство Φ_{\prec} конечно, то для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать такую сублинейную функцию $\varphi_n \in \Phi_{\prec}$, что $\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x_n) - F(\bar{x})) = \varphi_n(F(x_n) - F(\bar{x}))$. Вследствие конечности семейства Φ_{\prec} найдется $\widehat{\varphi} \in \Phi_{\prec}$ такая, что $\varphi_n = \widehat{\varphi}$ для бесконечно многих номеров n . Выберем из последовательности (x_n) подпоследовательность, соответствующую таким номерам, перенумеруем ее натуральными числами и отождествим с исходной последовательностью (x_n) . В результате получим, что последовательность (x_n) удовлетворяет условиям

$$\min_{\varphi \in \Phi_{\prec}} \varphi(F(x_n) - F(\bar{x})) = \widehat{\varphi}(F(x_n) - F(\bar{x})) \leq 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Сравнивая последние неравенства с (3.5), заключаем, что $\widehat{\varphi} \in \Phi_{\prec}(F'(\bar{x})h)$.

Положим $w_n = \frac{x_n - \bar{x} - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2}$. Поскольку в силу условия 3) множество Q удовлетворяет

условию регулярности второго порядка в точке \bar{x} по любому направлению $h \in C(\bar{x})$, $h \neq 0$, то найдется последовательность $(u_n) \in T^2(\bar{x}, h | Q)$ такая, что $w_n - u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Выберем из множества $\partial\widehat{\varphi}(F'(\bar{x})h) := \{y^* \in \partial\widehat{\varphi} | y^*(F'(\bar{x})h) = 0\}$ последовательность $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\max_{y^* \in \partial\widehat{\varphi}(F'(\bar{x})h)} y^*(F'(\bar{x})u_n + F''(\bar{x})[h, h]) = y_n^*(F'(\bar{x})u_n + F''(\bar{x})[h, h]).$$

Существование таких y_n^* следует из компактности множества $\partial\widehat{\varphi}(F'(\bar{x})h)$ и непрерывности линейной функции $y^* \rightarrow y^*(F'(\bar{x})u_n + F''(\bar{x})[h, h])$. Заметим, что так как $\partial\widehat{\varphi}(F'(\bar{x})h)$ — компакт, то последовательность $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Кроме того, из условия (3.4) следует, что для всех n выполняется неравенство

$$y_n^*(F'(\bar{x})u_n + F''(\bar{x})[h, h]) \geq \gamma(\bar{x}, h) > 0.$$

Воспользовавшись далее тем, что отображение $F : X \rightarrow Y$ дважды дифференцируемо по Фреше — Тэйлору в точке \bar{x} , получим

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(\bar{x}) &= t_n F'(\bar{x})h + \frac{1}{2} t_n^2 (F'(\bar{x})w_n + F''(\bar{x})[h, h]) + o(t_n^2) \\ &= t_n F'(\bar{x})h + \frac{1}{2} t_n^2 (F'(\bar{x})u_n + F''(\bar{x})[h, h]) + \frac{1}{2} t_n^2 F'(\bar{x})(w_n - u_n) + o(t_n^2), \end{aligned}$$

откуда приходим к неравенству

$$\begin{aligned} y_n^*(F(x_n) - F(\bar{x})) &= \frac{1}{2} t_n^2 y_n^*(F'(\bar{x})u_n + F''(\bar{x})[h, h]) + y_n^* \left(\frac{1}{2} t_n^2 F'(\bar{x})(w_n - u_n) + o(t_n^2) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \|x_n - \bar{x}\|^2 \left(\gamma(\bar{x}, h) + y_n^*(F'(\bar{x})(w_n - u_n)) + 2 \frac{y_n^*(o(\|x_n - \bar{x}\|^2))}{\|x_n - \bar{x}\|^2} \right), \end{aligned}$$

из которого следует, что $y_n^*(F(x_n) - F(\bar{x})) > 0$ при достаточно больших n .

Поскольку $y_n^* \in \partial\widehat{\varphi}$, то $\widehat{\varphi}(F(x_n) - F(\bar{x})) = \max_{y^* \in \partial\widehat{\varphi}} y^*(F(x_n) - F(\bar{x})) > 0$ для достаточно больших n , что противоречит (3.6).

Полученное противоречие доказывает теорему 4.

Авторы благодарят рецензента за сделанные замечания, которые позволили улучшить изложение результатов статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акилов Г.П., Кутателадзе С.С.** Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978. 368 с.
2. **Бахтин В.И., Гороховик В.В.** Условия оптимальности первого и второго порядка в задачах векторной оптимизации на метрических пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 32–43.
3. **Гороховик В.В.** Условия оптимальности первого и второго порядков в общей задаче векторной оптимизации: препринт № 1(351) / Ин-т математики АН БССР. Минск, 1989. 44 с.
4. **Гороховик В.В.** Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.; 2-е изд.: Москва: УРСС, 2012. 251 с.
5. **Гороховик В.В.** Касательные векторы второго порядка к множествам и условия минимальности для точек подмножеств упорядоченных нормированных пространств // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2006. Т. 14, № 2. С. 35–47.
6. **Гороховик В.В.** Конечномерные задачи оптимизации. Минск : Изд. центр БГУ, 2007. 239 с.
7. **Гороховик В.В.** Условия минимальности в задачах векторной оптимизации с нетелесным конусом положительных элементов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 7. С. 1192–1214.
8. **Гороховик В.В.** Условия оптимальности первого порядка в задачах векторной оптимизации с квазидифференцируемым целевым отображением и нетранзитивным отношением предпочтения // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 13–19.
9. **Гороховик В.В.** Необходимые условия оптимальности первого порядка в задаче управления дискретной системой по нетранзитивному векторному показателю качества // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2014. Т. 22, № 1. С. 35–50.
10. **Гороховик В.В., Старовойтова М.А.** Характеристические свойства прямых экзостеров различных классов положительно однородных функций // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 2. С. 12–25.
11. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 479 с.
12. **Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.** Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
13. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.
14. **Куржанский А.Б.** Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
15. **Левин М. И., Макаров В. Л., Рубинов А.М.** Математические модели экономических механизмов. М.: Наука, 1993. 373 с.
16. Негладкие задачи теории оптимизации и управления / В.Ф. Демьянов [и др.]. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 323 с.
17. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. М.: Наука, 1969. 456 с.
18. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.
19. **Ben-Tal A.** Second order and related extremality conditions in nonlinear programming // J. Optim. Theory Appl. 1980. Vol. 31, no. 2. P. 143–165.
20. **Ben-Tal A., Zowe J.** A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces // Math. Programming Study. 1982. Vol. 19. P. 39–76.
21. **Bonnans J.F., Shapiro A.** Perturbation analysis of optimization problems. Berlin: Springer, 2000. 601 p.
22. **Castellani M.** A dual representation for proper positively homogeneous functions // J. Global Optim. 2000. Vol. 16, no. 4. P. 393–400.
23. **Demyanov V.F.** Exhausters of a positively homogeneous function // Optimization. 1999. Vol. 45, no. 1. P. 13–29.
24. **Demyanov V.F.** Exhausters and convexifiers — new tools in nonsmooth analysis // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. Demyanov and A. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 85–137. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 43).
25. **Florez-Bazan F., Hernandez E.** A unified vector optimization problem: complete scalarizations and applications // Optimization. 2011. Vol. 60, no. 12. P. 1399–1419.

26. **Florez-Bazan F., Hernandez E.** Optimality conditions for a unified vector optimization problem with not necessarily preordering relations // *J. Global Optim.* 2013. Vol. 56, no. 2. P. 229–315.
27. **Gerstewitz (Tammer) C.** Nichtkonvexe Dualität in der Vektoroptimierung // *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg.* 1983. Vol. 25, no. 3. P. 357–364.
28. **Göpfert A., Tammer Chr.** Theory of vector optimization // *Multiple criteria optimization: state of the art annotated bibliographic surveys* / eds. X. Ehrgott and X. Gandibleux. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2002. P. 1–70. (Internat. Ser. Oper. Res. Management Sci.; vol. 52).
29. **Hiriart-Urruty J.B.** Tangent cones, generalized gradients, and mathematical programming in Banach spaces // *Math. Oper. Research.* 1979. Vol. 4, no. 1. P. 79–97.
30. **Hiriart-Urruty J.B.** New concepts in nondifferentiable programming // *Bull. Soc. Math. France Mém.* 1979. Vol. 60. P. 57–85.
31. **Jahn J.** Vector optimization. Theory, applications, and extensions. 2nd ed. Berlin: Springer, 2011. 498 p.
32. **Mordukhovich B.S.** Variational analysis and generalized differentiation. Vol. I: Basic theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 592 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 330).
33. **Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.** Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 734 p.
34. **Rubinov A.M., Gasimov R.N.** Scalarization and nonlinear scalar duality for vector optimization with preferences that are not necessarily a pre-order relation // *J. Global Optim.* 2004. Vol. 29, no. 4. P. 455–477.
35. **Shapiro A.** Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions // *Optimization.* 2009. Vol. 58, no. 2. P. 133–161.
36. Variational methods in partially ordered spaces / A. Göpfert [et al.]. New York: Springer, 2003. 365 p.
37. **Zaffaroni A.** Degrees of efficiency and degrees of minimality // *SIAM J. Control Optim.* 2003. Vol. 42, no. 3. P. 1071–1086.

Гороховик Валентин Викентьевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики НАН Беларуси

e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Трофимович Марина Александровна

аспирантка

Белорусского государственного университета

e-mail: marvoitova@tut.by

Поступила 9.06.2014

УДК 517.977

**ПОСТРОЕНИЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДЛЯ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ¹****Н. Л. Григоренко, А. В. Анисимов, Л. Н. Лукьянова**

Рассматривается задача терминального управления при наличии фазовых ограничений и дополнительных ограничений на качественный характер терминальной траектории для системы второго порядка в двумерном евклидовом пространстве при геометрических ограничениях на параметры управления. Предложен класс управляющих функций, решающий такую задачу управления. Приведены результаты численных расчетов задачи управления для модельных параметров системы.

Ключевые слова: терминальное управление, задача управления с фазовыми ограничениями, теория уклонения.

N. L. Grigorenko, A. V. Anisimov, L. N. Luk'yanova. Construction of a terminal control for a second-order system with phase constraints.

We consider a terminal control problem with phase constraints and additional constraints on the qualitative behavior of the terminal trajectory for a second-order system in a two-dimensional Euclidean space under geometric constraints on control parameters. A class of control functions solving this control problem is proposed. Numerical results for the control system with model parameters are presented.

Keywords: terminal control, control problem with phase constraints, evasion theory.

Введение

Задачи приведения траектории системы линейных дифференциальных уравнений с управлением на терминальное множество и задачи уклонения от встречи с препятствием по отдельности изучались в работах [1–13]. Управление, совмещающее эти две функции, построено для игровой задачи управления с простыми движениями игроков в работе [14]. В настоящей работе для системы второго порядка приведен способ построения управления, совмещающий эти функции и позволяющий получить траекторию, удовлетворяющую ряду дополнительных ограничений на качественный характер терминальной траектории, например условию “гамма” обхода траекторией заданного множества.

Решение задачи терминального управления для рассматриваемой в данной работе управляемой системы осуществляется в классе квазимногочленов. В работе [10] приведены аргументы, характеризующие управление в виде многочлена как “хорошее”, основанные на том факте, что управляющая функция в виде многочлена переводит объект из начального фазового состояния в конечное и является оптимальной по критерию $I = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$ при числе конечных условий, равных порядку системы. Рассмотрение управления в виде квазимногочлена для исследуемой в данной работе управляемой системы позволяет записать явный вид управлений в компактной форме и выделить коэффициенты, определяющие выполнение краевых условий, и коэффициенты, отвечающие за выполнение фазовых ограничений.

Рассматриваемая динамическая управляемая система встречается в задачах управления мобильными роботами [10; 12], задачах управления динамическими процессами экономики [15]. Полученные управления и траектории таких задач могут быть использованы в качестве начального приближения при численном решении задач оптимального управления [10; 16].

¹Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 14-11-00539).

1. Постановка задачи

Пусть движение векторов $S, V \in \mathbb{R}^2$ описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = V(t), & S(0) = S_0, \\ \dot{V}(t) = -\alpha V(t) + u(t), & V(0) = V_0, \quad \|u(t)\| \leq \rho, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.1)$$

где $u(t) \in \mathbb{R}^2$ — параметр управления, S_0, V_0 — заданные вектора, α, ρ — положительные константы, $\|u\| = (\sum_{i=1}^2 |u^i|^2)^{1/2}$ — евклидова норма вектора.

Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}^2$ — векторная функция, компоненты которой принадлежат заданному конечномерному линейному семейству аналитических функций на отрезке времени $[0, T]$: Σ . Векторная функция $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, известна перед началом управления.

Рассмотрим следующую задачу терминального управления при наличии фазового ограничения: найти измеримое по Лебегу управление $u(t)$, $\|u(t)\| \leq \rho$, при котором $S(T) = S_*$, $V(T) = V_*$, $S(t) \neq \xi(t)$, $t \in [0, T]$; указать оценку снизу для расстояния $\|S(t) - \xi(t)\|$ при таком управлении, т. е. предложить скалярную положительную функцию $\ell(t) > 0$: $S(t) \notin B_{\ell(t)}^2(\xi(t))$, $t \in [0, T]$, где $B_{\ell(t)}^2(\xi(t))$ — шар радиуса $\ell(t) > 0$ с центром в точке $\xi(t)$. Момент окончания процесса управления T не фиксирован.

2. Программное терминальное управление

Для решения задачи терминального управления с фазовым ограничением будем искать управление $u(t)$ в классе квазимногочленов. В момент времени T координаты S и V должны принять заданные значения S_* , V_* . Для этого управляющая функция должна содержать два свободных, подлежащих определению вектора: $c_0, c_1 \in \mathbb{R}^2$ (по количеству налагаемых условий) и вектор $c_2 \in \mathbb{R}^2$ для обеспечения обхода множества $B_{\ell}^2(\xi)$:

$$u(t) = e^{-\alpha t} (c_0 + c_1 t + c_2 t^2), \quad c_i \in \mathbb{R}^2, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.1)$$

Векторные функции $V(t)$, $S(t)$ при таком управлении и краевых условиях имеют вид

$$V(t) = e^{-\alpha t} \left(V_0 + c_0 t + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 \frac{t^3}{3} \right),$$

$$S(t) = S_0 + A_0(t)V_0 + A_1(t)c_0 + A_2(t)c_1 + A_3(t)c_2,$$

где

$$A_0(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}, \quad A_1(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t} \alpha t}{\alpha^2},$$

$$A_2(t) = \frac{1}{2\alpha^3} (2 - 2e^{-\alpha t} - 2e^{-\alpha t} \alpha t - 2e^{-\alpha t} \alpha^2 t^2),$$

$$A_3(t) = \frac{1}{3\alpha^4} (-6 - 6e^{-\alpha t} - 6e^{-\alpha t} \alpha t - 3e^{-\alpha t} \alpha^2 t^2 - e^{-\alpha t} \alpha^3 t^3).$$

С учетом конечных значений фазовых координат $S(T) = S_*$, $V(T) = V_*$ параметры c_0, c_1 выражаются следующим образом:

$$c_0 = -\frac{-T^2 G_2 + 2 G_1 A_2(T)}{T(-2 A_2(T) + A_1(T) T)}, \quad c_1 = 2 \frac{-T G_2 + A_1(T) G_1}{T(-2 A_2(T) + A_1(T) T)}, \quad (2.2)$$

где

$$G_1 = G_1(T, V_0, V_*, c_2) = V_* e^{\alpha T} - V_0 - \frac{T^3}{6} c_2,$$

$$G_2 = G_2(T, S_0, S_*, V_0, c_2) = S_* - S_0 - A_0(T)V_0 - A_3(T)c_2.$$

Соотношения (2.2) определяют c_0, c_1 как функции краевых условий и параметров T, c_2 . Учитывая приведенные формулы, нетрудно показать, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Для выполнения неравенства $\|u(t)\| \leq \rho, t \in [0, T]$ достаточно соблюдения соотношений $T \geq \max\{T_*, T_{**}\}, \|c_2\| \leq \frac{\rho}{3T^2}$, где $T_* = \frac{6M_3}{\rho}, T_{**} = \sqrt[3]{\frac{6M_3}{\rho}}, M_3 = \max(M_1, M_2), M_1 = \|S_*\| + \|S_0\| + \frac{\|V_0\|}{\alpha} + \frac{\rho}{3}, M_2 = \|V_*\| + \|V_0\| + \frac{\rho}{3}$.

Таким образом, при выполнении неравенств утверждения управление (2.1) при векторах c_0, c_1 , выбранных согласно (2.2), порождает траекторию системы (1.1) с краевыми условиями $S(0) = S_0, V(0) = V_0, S(T) = S_*, V(T) = V_*$ и удовлетворяет, при достаточно большом T , ограничению $\|u(t)\| \leq \rho$ при любом векторе $c_2, \|c_2\| \leq \frac{\rho}{3T^2}$.

3. Терминальное управление (2.1), (2.2) с компонентой c_2 , гарантирующей избежание столкновения

При управлении (2.1), (2.2) для координаты $S(t)$ имеет место соотношение

$$S(t) = \eta(t, T) + c_2\varphi(t, T), \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \eta(t, T) &= S_0 + A_0(t)V_0 + A_1(t) \left(\frac{-T^2 G_2^1(T) + 2A_2(T)G_1^1(T)}{T(-2A_2(T) + A_1(T)T)} \right) \\ &\quad + 2A_2(t) \left(\frac{-T G_2^1(T) + A_1(T)G_1^1(T)}{T(-2A_2(T) + A_1(T)T)} \right), \\ \varphi(t, T) &= A_1(t) \left(\frac{T^2 A_3(T) - 2A_2(T) \frac{T^3}{6}}{T(-2A_2(T) + A_1(T)T)} \right) + A_2(t) \left(\frac{T A_3(T) - A_1(T) \frac{T^3}{6}}{T(-2A_2(T) + A_1(T)T)} \right) + A_3(t), \quad (3.2) \\ G_1^1(T) &= V_* e^{\alpha T} - V_0, \quad G_2^1(T) = S_* - S_0 - A_0(T)V_0. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Используя явный вид (3.2) функции

$$\begin{aligned} \varphi(t, T) &= -\frac{1}{3} \frac{(4e^{-\alpha T} \alpha T^3 + 6e^{-\alpha T} T^2 + 2\alpha T^3 + e^{-\alpha T} T^4 \alpha^2 - 6T^2)(-1 + e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \alpha t)}{\alpha^3 (\alpha T + e^{-\alpha T} \alpha T + 2e^{-\alpha T} - 2) T} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{(2e^{-\alpha T} T^3 \alpha^2 - 6T + 6e^{-\alpha T} T + \alpha^2 T^3 + 6e^{-\alpha T} \alpha T^2)(-2 + 2e^{-\alpha t} + 2e^{-\alpha t} \alpha t + e^{-\alpha t} t^2 \alpha^2)}{\alpha^4 (\alpha T + e^{-\alpha T} \alpha T + 2e^{-\alpha T} - 2) T} \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{-6 + 6e^{-\alpha t} + 6e^{-\alpha t} \alpha t + 3e^{-\alpha t} t^2 \alpha^2 + e^{-\alpha t} t^3 \alpha^3}{\alpha^4}, \end{aligned}$$

можно показать, что $\varphi(0, T) = \varphi(T, T) = 0, \varphi(t, T) > 0, t \in (0, T)$.

Для построения вектора c_2 , гарантирующего уклонение траектории (3.1) от встречи с вектором $\xi(t)$, применим маневр обхода Понтрягина из работы [1, с. 379].

Лемма. Пусть Σ — конечномерное линейное семейство аналитических функций на отрезке $0 \leq t \leq T; \xi(t) \in \mathbb{R}^2, \varphi(t, T) \in \mathbb{R}^1$ — функции, компоненты которых принадлежат Σ, W — двумерное векторное евклидово пространство с фиксированной в нем ортогональной системой координат; $\omega = (\omega^1, \omega^2) \in W, \Gamma$ — квадрат, определяемый неравенствами

$$|\omega^i| \leq a, \quad i = 1, 2, \quad a > 0.$$

Тогда существует такое положительное число γ , что для любого вектора $\eta(t, T) = (\eta^1(t, T), \eta^2(t, T))$, компоненты которого принадлежат Σ и функции $\varphi(t, T)$, найдется такой квадрат $\Gamma' \subset \Gamma$ со стороной 2γ , что точка $v(t) \in W$, задаваемая равенствами

$$v^i(t) = \eta^i(t, T) - \xi^i(t) - c_2^i \varphi(t, T), \quad i = 1, 2,$$

при $t \in [0, T]$, $c_2 = (c_2^1, c_2^2)$, выбранном как центр квадрата Γ' , удовлетворяет условию

$$\|v(t)\| \geq \gamma \varphi(t, T), \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Обозначим через m натуральное число, ограничивающее сверху число нулей любой функции семейства Σ , отличной от тождественного нуля [1]. Пусть

$$p = 2m + 2.$$

Разобьем квадрат Γ равно отстоящими друг от друга вертикальными и горизонтальными прямыми

$$\omega^i = a_j^i, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1, \dots, p, \quad a_0^i = -a, \quad a_p^i = a, \quad (3.3)$$

на p^2 малых квадратов со стороной $2a/p$. В плоскости W рассмотрим кривую

$$\omega^i = \omega^i(t) = \frac{\eta^i(t, T) - \xi^i(t)}{\varphi(t, T)}, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Покажем, что кривая (3.4) не может проходить через все построенные малые квадраты. В самом деле, при входе в любой из этих малых квадратов кривая должна пересечь одну из его сторон, т. е. либо одну из вертикальных, либо одну из горизонтальных прямых системы (3.4). Таким образом, число пересечений с вертикальными прямыми должно быть не меньше чем $(p^2 - 1)/2$ или же число пересечений с горизонтальными прямыми должно быть не меньше чем $(p^2 - 1)/2$. Допустим для определенности, что имеет место первое. Так как вертикальных прямых в системе (3.4) имеется $p + 1$, то хотя бы одну из них, например прямую $\omega^1 = a_j^1$, она должна пересечь не менее чем $(p - 1)/2$ раз. Это означает, что функция $\eta^1(t, T) - \xi^1(t) - a_j^1 \varphi(t, T)$ имеет не менее $(p - 1)/2 > m$ нулей (см. (3.3)). Поскольку эта функция принадлежит семейству Σ , то она тождественно равна нулю, а это значит, что кривая (3.4) вся лежит на вертикальной прямой $\omega^1 = a_j^1$ и поэтому не может проходить через все малые квадраты. Обозначим через Γ'' тот малый квадрат Γ' из Γ , через который кривая (3.4) не проходит, через γ — половину стороны квадрата Γ'' . Так как кривая (3.4) не проходит через квадрат Γ'' , то при выборе α как центра квадрата Γ'' при каждом фиксированном t хотя бы одно из чисел $|\omega^i(t) - a^i|$, $i = 1, 2$, больше или равно γ . Из этого непосредственно вытекает $\|v(t)\| \geq \gamma \varphi(t, T)$.

Лемма доказана.

Перейдем к получению оценки снизу для расстояния от $S(t)$ до $\xi(t)$.

Теорема. Управление (2.1), выбранное для задачи (1.1) с параметрами c_0, c_1 в виде (2.2) и параметром c_2 , определенным согласно лемме, гарантирует следующую оценку снизу для расстояния $\|S(t) - \xi(t)\|$: $\|S(t) - \xi(t)\| \geq l(t)$,

$$l(t) = \begin{cases} \frac{\|S_0 - \xi(0)\|}{6}, & t \in [0, t_1], \quad t_1 = \|S_0 - \xi(0)\| \min \left(\frac{1}{3 \left(\|V_0\| - \frac{\rho}{\alpha} + \frac{\rho}{\alpha} \right)}, \frac{1}{3k} \right), \\ \gamma \varphi(t, T), & t \in [t_1, T - t_2], \quad t_2 = \|S_* - \xi(T)\| \min \left(\frac{1}{3 \left(\|V_1\| - \frac{\rho}{\alpha} + \frac{\rho}{\alpha} \right)}, \frac{1}{3k} \right), \\ \frac{\|S_1 - \xi(T)\|}{6}, & t \in [T - t_2, T], \end{cases} \quad (3.5)$$

где k — константа Липшица для функции $\xi(t)$: $\|\xi(\tau_1) - \xi(\tau_2)\| \leq k|\tau_1 - \tau_2|$.

Доказательство. Из формулы Коши для системы (1.1) имеем

$$\|S(t) - S_0\| \leq \|V_0\|A(t) + \rho B(t), \quad A(t) = t, \quad B(t) = \frac{t}{\alpha}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|S(t) - \xi_0\| &= \|S(t) - S_0 + S_0 - \xi_0\| \geq \|S_0 - \xi_0\| - \|S(t) - S_0\| \\ &\geq \|S_0 - \xi_0\| - (\|V_0\|A(t) + \rho B(t)) \geq \frac{2\|S_0 - \xi_0\|}{3} \quad \text{при } t \in [0, t_{11}], \quad t_{11} = \frac{\|S_0 - \xi_0\|}{3\left(\|V_0\| + \frac{\rho}{\alpha}\right)}, \end{aligned}$$

$$\|\xi(t) - \xi_0\| \leq kt \leq \frac{\|S_0 - \xi_0\|}{3} \quad \text{при } t \in [0, t_{12}], \quad t_{12} = \frac{\|S_0 - \xi_0\|}{3k},$$

то справедлива оценка

$$\|S(t) - \xi(t)\| \geq \frac{\|S_0 - \xi_0\|}{3}, \quad t \in [0, t_1], \quad t_1 = \min(t_{11}, t_{12}). \quad (3.6)$$

Так как

$$\begin{aligned} \|S(t) - \xi(T)\| &= \|S(t) - S_* + S_* - \xi(T)\| \geq \|S_* - \xi(T)\| - \|S(t) - S_*\| \\ &\geq \|S_* - \xi(T)\| - (\|V_1\|A(t) + \rho B(t)) \geq \frac{2\|S_* - \xi(T)\|}{3} \quad \text{при } t \in [T - t_{21}, T], \quad t_{21} = \frac{\|S_* - \xi(T)\|}{3\left(\|V_*\| + \frac{\rho}{\alpha}\right)}, \end{aligned}$$

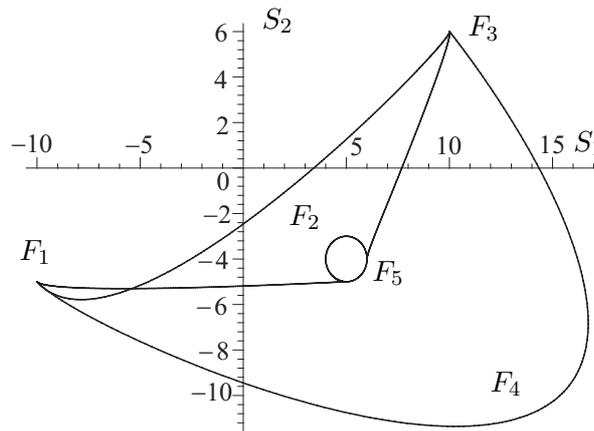
$$\|\xi(t) - \xi(T)\| \leq k(T - t) \leq \frac{\|S_* - \xi(T)\|}{3} \quad \text{при } T - t \leq t_{22} = \frac{\|S_* - \xi(T)\|}{3k},$$

то справедлива оценка

$$\|S(t) - \xi(t)\| \leq \frac{\|S_* - \xi(T)\|}{3}, \quad t \in [T - t_{22}, T], \quad t_2 = \min(t_{21}, t_{22}). \quad (3.7)$$

Из (3.6),(3.7) следует утверждение теоремы 1.

На рисунке приведены траектории системы (1.1) при управлении (2.1) с параметрами c_0, c_1 , выбранными согласно (2.2) для $S_0 = (-10, -5)$, $S_* = (10, 6)$, $V_0 = (1, -1)$, $V_* = (-1, 1)$, $\xi = (2, -1)$, $T = 13$, $\rho = 19$. Обозначения рисунка F_1, F_2, F_3 соответствуют S_0, ξ, S_* . Траектория $F_1F_2F_3$ соответствует параметру $c_2 = (0, 0)$, удовлетворяет крайним условиям и проходит через точку $\xi = (2, -1)$. Траектория $F_1F_4F_3$ соответствует параметру $c_2 = (0.09, -0.06)$, выбранному согласно лемме, и удовлетворяет оценке (3.5) для расстояния до точки $\xi = (2, -1)$.



$F_1F_5F_3$ траектория γ -обхода точки $(5, -4)$.

4. γ -обход фиксированной точки η в \mathbb{R}^2

Управление (2.1),(2.2) с параметром c_2 , выбранным согласно лемме, позволяет рассмотреть следующую дополнительную задачу о γ -обходе фиксированной точки в \mathbb{R}^2 . Пусть $\eta \in \mathbb{R}^2$ — фиксированная точка.

О п р е д е л е н и е. Скажем, что траектория $x(t) \in \mathbb{R}^2$ совершает γ -обход точки $\eta \in \mathbb{R}^2$ при $t \in [t_1, t_2]$, если вектор $\|x(t) - \eta\| > 0$ и угол между векторами $x(t) - \eta$ и $x(t_1) - \eta$ непрерывно увеличивается от нуля до $\beta \geq 2\pi$ при t , возрастающем от t_1 до t_2 .

К задаче терминального управления, сформулированной в разд. 1, добавим требование к терминальной траектории: в процессе движения совершить γ -обход точки η . Такая постановка мотивирована задачами управления мобильными роботами, движущимися вокруг множества с целью осмотра его видеокамерой.

В первом варианте построения управления для γ -обхода точки η рассмотрим параметрическое уравнение эллипса с центром в точке η в \mathbb{R}^2 , полуосями a, b и углом поворота осей эллипса ψ

$$\eta(\tau) = \eta + \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \cos(\tau) \\ b & \sin(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, \theta], \quad \theta \geq 2\pi, \quad (4.1)$$

и будем считать, что для параметров процесса выполнено условие

$$\rho^2 \geq (a^2 + b^2)(1 + \alpha^2). \quad (4.2)$$

На эллипсе определим точку входа на эллипс $S_3 = \eta(\tau_1)$, $\tau_1 \in [0, 2\pi]$, и точку схода с эллипса $S_4 = \eta(\tau_2)$, $\tau_2 > \tau_1$.

Векторы V_2, V_3 выберем из условий $V_3 = V(\tau_1)$, $V_4 = V(\tau_2)$, где

$$V(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & \sin(\tau) \\ b & \cos(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, \theta].$$

Построение управления, переводящего систему (1.1) из начального положения S_0, V_0 в конечное положение S_*, V_* и порождающего траекторию, совершающую γ -обход точки η , проведем на трех последовательных временных интервалах.

На первом интервале $t \in [0, T_1]$ выберем управление (2.1), (2.2) для начальных и конечных параметров $S(0) = S_0, V(0) = V_0, S(T_1) = S_3, V(T_1) = V_3$, гарантирующее соотношение $S(t) \neq \eta, t \in [0, T_1]$.

На втором интервале $t \in [T_1, T_1 + \tau_2 - \tau_1]$ выберем управление в виде

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & (\cos(\tau_1 + t - T_1) - \alpha \sin(\tau_1 + t - T_1)) \\ -b & (\sin(\tau_1 + t - T_1) - \alpha \cos(\tau_1 + t - T_1)) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

При (4.2) такое управление допустимо и траектория системы (1.1) следует по кривой $\eta(t)$ (4.1).

На третьем интервале выберем управление (2.1),(2.2) для начальных и конечных параметров $S(T_1 + \tau_2 - \tau_1) = S_4, V(T_1 + \tau_2 - \tau_1) = V_4, S(T_2) = S_*, V(T_2) = V_*, T_2 > T_1 + \tau_2 - \tau_1$, гарантирующее соотношение $S(t) \neq \eta, t \in [T_1 + \tau_2 - \tau_1, T_2]$.

На рисунке выше приведена траектория $F_1 F_5 F_3$ системы (1.1), соответствующая такому способу выбора управления:

1) для $t \in [0, 2]$ — при управлении (2.1) с параметрами c_0, c_1 , выбранными согласно (2.2) и параметром $c_2 = (0.09, -0.06)$, выбранным согласно лемме, для $S_0 = (-10, -5), S_3 = (5, -5), V_0 = (1, -1), V_3 = (1, 0), \eta = (5, -4), T_1 = 2, \rho = 19$;

2) для $t \in [2, 9/4\pi]$ — при управлении (4.3) с параметрами $a = 1, b = 1, \rho = 2, \psi = 1$, для $S_3 = (5, -5), S_4 = (6, -4), V_3 = (1, 0), V_4 = (0, 1), \eta = (5, -4), \rho = 19, \tau_1 = 1, \tau_2 = 1.5 + 2\pi$;

3) для $t \in [9/4\pi, 9.065]$ — при управлении (2.1) с параметрами c_0, c_1 , выбранными согласно (2.2), и параметром $c_2 = (0, 0)$, выбранным согласно лемме, для $S_4 = (6, -4)$, $S_* = (10, 6)$, $V_4 = (0, 1)$, $V_* = (-1, 1)$, $\eta = (5, -4)$, $\rho = 19$, $T_2 = 10$;

Траектория F_1, F_5, F_3 (см. рисунок) выходит из точки $S_0 = (-10, -5)$, $V_0 = (1, -1)$, избегает столкновения с точкой $\eta = (5, -4)$, в момент $T = 2$ приходит в точку $S_3 = (5, -5)$, $V_3 = (1, 0)$; далее, в течение времени $9/4\pi$ траектория совершает γ -обход точки $\eta = (5, -4)$: движется по окружности (против часовой стрелки) из точки $S_3 = (5, -5)$, $V_3 = (1, 0)$ до точки $S_4 = (6, -4)$, $V_4 = (0, 1)$; далее, на отрезке времени $[T_1 + 9/4\pi, 9.065]$ избегает столкновения с точкой $\eta = (5, -4)$, в момент $T = 9.065$ приходит в точку $S_* = (10, 6)$, $V_* = (-1, 1)$.

Во втором варианте построения управления для γ -обхода точки η рассмотрим параметрическое уравнение петлеобразной кривой с центром в точке η в \mathbb{R}^2 , параметром d , $d \leq \rho/10$ (d — сторона описанного квадрата) и углом поворота осей квадрата ψ

$$\eta(\tau) = \eta + d \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2(\pi/6 + \tau) \\ \cos 3(\pi/6 + \tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, 2/3\pi],$$

и будем считать, что для параметров процесса выполнено условие

$$\rho^2 \geq d^2(97 + 13\alpha^2). \quad (4.4)$$

На кривой $\eta(\tau)$ определим точку входа $S_5 = \eta(0)$ и точку выхода $S_6 = \eta(2/3\pi)$.

Векторы V_5, V_6 выберем из условий $V_5 = V(0)$, $V_6 = V(2/3\pi)$:

$$V(\tau) = d \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \sin 2(\pi/6 + \tau) \\ -3 \sin 3(\pi/6 + \tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, 2/3\pi].$$

На первом интервале выберем управление (2.1),(2.2) для начальных и конечных параметров $S(0) = S_0$, $V(0) = V_0$, $S(T_1) = S_5$, $V(T_1) = V_5$, гарантирующее соотношение $S(t) \neq \eta$, $t \in [0, T_1]$.

На втором интервале выберем управление на отрезке $t \in [T_1, T_1 + 2/3\pi]$ в виде

$$u(T_1 + \tau) = d \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \cos 2(\pi/6 + \tau) - 2\alpha \sin 2(\pi/6 + \tau) \\ -9 \cos 3(\pi/6 + \tau) - 3\alpha \sin 3(\pi/6 + \tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in [0, 2/3\pi].$$

При (4.4) управление $u(T_1 + \tau)$ допустимо, и соответствующая траектория системы (1.1) $S(T_1 + \tau)$ при $\tau \in [0, 2/3\pi]$, следует по кривой $\eta(\tau)$.

На третьем интервале выберем управление (2.1),(2.2) для начальных и конечных параметров $S(T_1 + 2/3\pi) = S_6$, $V(T_1 + 2/3\pi) = V_6$, $S(T_2) = S_*$, $V(T_2) = V_*$, $T_2 > T_1 + 2/3\pi$, гарантирующее соотношение $S(t) \neq \eta$, $t \in [T_1 + 2/3\pi, T_2]$.

З а м е ч а н и е. Выбор варианта γ -обхода часто связан с видом дополнительных фазовых ограничений задачи.

5. Позиционное терминальное управление

Для построения позиционного управления, доставляющего приближенное решение рассмотренных ранее задач терминального управления при наличии фазовых ограничений, воспользуемся правилом “экстремального прицеливания” из работы [3] и полученным в предыдущих разделах программным управлением. Введем систему “поводырь”, описываемую уравнением

$$\ddot{w} + \alpha \dot{w} = \chi(t), \quad w(0) = S_0, \quad \dot{w}(0) = V_0, \quad (5.1)$$

для которой управление $\chi(t)$ задано в программном виде (2.1), (2.2). Решение уравнения (5.1) — абсолютно непрерывная функция $w(t)$. Позиционное управление выберем в виде

$$u(\dot{S}(t), \dot{w}(t)) = \begin{cases} -\rho \frac{\dot{S}(t) - \dot{w}(t)}{\|\dot{S}(t) - \dot{w}(t)\|}, & \|\dot{S}(t) - \dot{w}(t)\| \neq 0, \\ 0, & \|\dot{S}(t) - \dot{w}(t)\| = 0. \end{cases}$$

Уравнение (1.1) приобретает вид

$$\ddot{S} + \alpha \dot{S} = u(\dot{S}(t), \dot{w}(t)), \quad \bar{S}(0) = S_0, \quad \dot{\bar{S}}(0) = V_0. \quad (5.2)$$

Для определения решения уравнения (5.2) введем разбиение $t_i, i = 0, \dots, N$ отрезка $[0, T]$: $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N = T$ с диаметром δ . Решение уравнения (5.2), следуя [4], зададим в виде ломанной Эйлера, последовательно на отрезках $[t_i, t_{i+1}], i = 0, \dots, N - 1$, при постоянном значении правой части $u(\dot{S}(t_i), \dot{w}(t_i))$ для отрезка $[t_i, t_{i+1}]$. Решение уравнения (5.2) будет отслеживать решение уравнения (5.1) в следующем смысле. Положим $d(t) = \bar{S}(t) - w(t)$. Справедлива оценка [4, гл. 2, §3]: $\max_{t \in [0, T]} \|d(t)\|^2 \leq 2\zeta(\delta)(e^T - 1)$, где $\zeta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Здесь $\zeta(\delta)$ — величина из оценки $\|\dot{S}(t_1) - \dot{S}(t_2)\| \leq \zeta(\delta)$. Таким образом, при достаточно малом δ , компонента $\bar{S}(t)$ системы (5.1), (5.2) будет близка к траектории $S(t)$, $t \in [0, T]$.

Заключение

Применение математических технологий работ [1–7] позволяет предложить способы построения позиционных управлений, реализующих дополнительные условия на качественный характер терминальной траектории. Явный вид терминального управления при наличии фазовых ограничений может быть полезен в качестве первого приближения при численном нахождении решения задачи оптимального управления для процесса (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понtryгин Л.С. Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2009. 551 с.
2. Понtryгин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 3. С. 436–445.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. Куржанский А.Б. Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 3. С. 491–494.
6. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 756 с.
8. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев.: Наук. Думка, 1992. 384 с.
9. Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Экстремальное прицеливание в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 573–586.
10. Батенко А.П., Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
11. Никольский М.С. Некоторые линейные задачи управления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2010. № 1. С. 14–21.
12. Лукьянова Л.Н. Задача уклонения от столкновения. М.: МАКС Пресс, 2009. 216 с.
13. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 188 с.
14. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.

15. **Колемаев В.А.**, Математическая экономика. Москва, ЮНИТИ, 2005. 400 с.
16. **Григорьев И.С., Заплетин М.П.** Проблема построения экстремалей Понтрягина в задачах оптимизации перелетов космического аппарата к астероидам // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 69–84.

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Поступила 10.07.2014

Анисимов Александр Владимирович
аспирант
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: alexx91@mail.ru

Лукьянова Лиля Николаевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: lln@cs.msu.su

УДК 517.977.1

О СНЯТИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ¹

М. И. Гусев

Работа посвящена приближенному построению множеств достижимости нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями, которые заданы как множество решений нелинейного неравенства. Предлагается процедура снятия фазовых ограничений, основанная на введении вспомогательной управляемой системы без ограничений, правая часть которой зависит от малого параметра. Доказана сходимость множеств достижимости вспомогательной управляемой системы в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы при стремлении малого параметра к нулю, даны оценки скорости сходимости.

Ключевые слова: множество достижимости, фазовые ограничения, функция штрафа, аппроксимация, метрика Хаусдорфа.

M. I. Gusev. On elimination of state constraints in the construction of reachable sets.

The paper is devoted to the problem of approximating reachable sets of a nonlinear control system with state constraints given as a solution set of a nonlinear inequality. A state constraint elimination procedure based on the introduction of an auxiliary constraint-free control system is proposed. The equations of the auxiliary system depend on a small parameter. It is shown that the reachable set of the original system can be approximated in the Hausdorff metric by reachable sets of the auxiliary control system as the small parameter tends to zero. Estimates of the convergence rate are given.

Keywords: reachable set, state constraints, penalty function, approximation, Hausdorff metric.

1. Введение

Множества достижимости и их аналоги играют важную роль при решении различных задач управления и оценивания в условиях неопределенности и дифференциальных игр (см. [1–5]). В данной работе рассматривается алгоритм построения множеств достижимости управляемой системы с фазовыми ограничениями. Вопросы приближенного построения множеств достижимости, в том числе для систем с фазовыми ограничениями, рассматривались в работах [5–12] и многих других. Предлагаемый в данной статье алгоритм основан на снятии фазовых ограничений путем замены исходной системы вспомогательной системой, которая получается посредством модификации множества скоростей исходной системы. В правую часть системы добавляется корректирующее слагаемое, направляющее вектор скорости внутрь множества ограничений при пересечении его границы. Правая часть вспомогательной системы зависит от малого параметра, определяющего область действия корректирующей добавки. Область достижимости этой системы, построенная без учета фазовых ограничений, содержит множество достижимости исходной системы с фазовыми ограничениями. При стремлении малого параметра к нулю имеет место сходимость множеств достижимости в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы.

Метод снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости для дифференциальных включений был предложен в работах А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филиппо-

¹Работа выполнена в рамках программы президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при поддержке проекта УРО РАН 12-П-1-1019 и интеграционного проекта СО и УРО РАН (проект 12-П-1-1017).

вой [13; 14], где трубки траекторий дифференциального включения с выпуклым фазовым ограничением

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t) \in Y(t), \quad t \in [t_0, \theta], \quad (1.1)$$

аппроксимировались решениями семейства дифференциальных включений без фазовых ограничений

$$\dot{x} \in F_L(t, x) = F(t, x) + L(x - Y(t)), \quad t \in [t_0, \theta],$$

зависящих от матричного параметра L . Было установлено, что при выполнении некоторых не очень обременительных условий пересечение пучков траекторий семейства по L дает пучок траекторий исходного дифференциального включения, удовлетворяющих фазовым ограничениям. Для множества достижимости пересечение по L позволяет получить его верхнюю оценку. Отметим, что операция пересечения пучков траекторий или множеств достижимости по параметру в общем случае не обеспечивает близость получаемых множеств в метрике Хаусдорфа. В работах [15; 16] был предложен способ снятия фазовых ограничений путем сужения множества скоростей исходной системы вблизи границы ограничений. При этом правая часть аппроксимирующей системы зависит от скалярного параметра, ее траектории не пересекают границу ограничений и множество достижимости аппроксимирующей системы приближает множество достижимости системы с фазовыми ограничениями изнутри. Доказательство этого факта потребовало наложения достаточно жесткого условия на систему и ограничения: в любой граничной точке фазовых ограничений должен существовать вектор скорости управляемой системы, направленный строго внутрь ограничений.

При аналогичном условии в данной работе предлагается другая процедура снятия фазовых ограничений, основанная на введении вспомогательной управляемой системы без ограничений, правая часть которой зависит от малого параметра. При конструировании данной системы не используются операции пересечения множеств, ее множество достижимости содержит множество достижимости исходной системы с фазовыми ограничениями. Вместе с результатами [15; 16] это дает возможность построения двусторонних оценок множеств достижимости. В работе доказана сходимость множеств достижимости вспомогательной управляемой системы в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы при стремлении малого параметра к нулю, даны оценки скорости сходимости.

2. Определения и постановка задачи

Рассматривается нелинейная управляемая система

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t_0 \leq t \leq \theta, \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр. Ограничение на управление имеет вид

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, \theta], \quad (2.2)$$

где U — компакт в \mathbb{R}^r , в качестве управлений рассматриваются измеримые функции $u: [t_0, \theta] \rightarrow U$, множество управлений обозначаем через \mathcal{U} .

Далее используются следующие обозначения. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ (x, y) — скалярное произведение, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма, $B_r(\bar{x})$: $B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - \bar{x}\| \leq r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке \bar{x} . Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символами ∂S , $\text{Int}S$, $\text{co}S$ обозначаются соответственно граница, внутренность и выпуклая оболочка S , $\nabla g(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x , $h(A, B)$ — хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ — семейство выпуклых компактных подмножеств \mathbb{R}^n . Далее считаем, что правая часть системы (2.1) удовлетворяет следующим условиям.

Предположение 1. *Отображение $f(x, u) : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям*

- 1) $f(x, u)$ непрерывно и локально липшицево по x равномерно по $u \in U$;
- 2) условие подлинейного роста: существует $C > 0$ такое, что

$$\|f(x, u)\| \leq C(1 + \|x\|), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U;$$

- 3) множество скоростей $F(x) := f(x, U)$ выпукло для каждого x .

Систему (2.1) можно представить в виде эквивалентного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(t_0) = x^0, \quad (2.3)$$

где многозначное отображение $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ локально липшицево в метрике Хаусдорфа. Решениями дифференциального включения являются абсолютно непрерывные функции $x : [t_0, \theta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ для почти всех t .

Фазовые ограничения имеют вид

$$x(t) \in S, \quad t \in [t_0, \theta], \quad (2.4)$$

где S — замкнутое множество в \mathbb{R}^n , содержащее вектор x^0 . Далее мы рассматриваем в качестве S множество, заданное в следующем виде:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}, \quad (2.5)$$

где $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Обозначим через $x(t, u(\cdot), x^0)$ решение системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$. Множеством (областью) достижимости системы (2.1) с фазовым ограничением (2.4) в момент времени θ назовем множество

$$G_0(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}, x = x(\theta, u(\cdot), x^0), x(t, u(\cdot), x^0) \in S, t_0 \leq t \leq \theta\}.$$

Таким образом, $G_0(\theta)$ — множество всех точек, в которые можно перевести систему (2.1) в момент времени θ из начального состояния x^0 при ограничениях (2.2), (2.4). Через $G(\theta)$ обозначим множество достижимости системы (2.1) без учета фазовых ограничений:

$$G(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}, x = x(\theta, u(\cdot), x^0)\}.$$

При выполнении условий предположения 1 $G(\theta)$ — компакт в \mathbb{R}^n и траектории системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ лежат внутри некоторого шара $B_R(\bar{x})$, который далее будем обозначать через B_R .

Мы в данной работе рассматриваем следующую задачу: построить управляемую систему

$$\dot{x} = f_\varepsilon(x, u), \quad x(t_0) = x^0, \quad (2.6)$$

правая часть которой зависит от малого параметра ε , такую, что

- 1) отображение $f_\varepsilon(x, u)$ определено для x из некоторой окрестности $S \cap B_R$ и $u \in U$, непрерывно по x , u и локально липшицево по x равномерно по $u \in U$;
- 2) $f_\varepsilon(x, U) = f(x, U)$ при $x \in S \cap B_R$, $f_\varepsilon(x, U) \subset f(x, U)$;
- 3) $G_\varepsilon(\theta) \rightarrow G_0(\theta)$ в метрике Хаусдорфа при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $G_\varepsilon(\theta)$ — множество достижимости системы (2.6) без фазовых ограничений.

Таким образом, исходная управляемая система заменяется семейством управляемых систем без фазовых ограничений, зависящих от параметра ε , множества достижимости которых аппроксимируют $G_0(\theta)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будем управляемую систему (2.6) называть аппроксимирующей для (2.1).

3. Аппроксимация множеств достижимости

Дальнейшие построения опираются на следующее условие (см. [17–20]).

Предположение 2. Для каждого $x \in \partial S \cap B_R$

$$\min_{u \in U} (\nabla g(x), f(x, u)) < 0. \quad (3.1)$$

Данное условие обеспечивают непустоту множества достижимости $G_0(\theta)$. Так как из (3.1) следует, что $\nabla g(x) \neq 0$ при $x \in \partial S \cap B_R$, то

$$\partial S \cap B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \cap B_R.$$

В силу того что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \cap B_R$ компактно и функция

$$\eta(x) = \min_{u \in U} (\nabla g(x), f(x, u))$$

непрерывна по x , найдется $\sigma > 0$ такое, что неравенство (3.1) выполняется в пересечении σ -окрестности множества $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ с B_R . Градиент функции $g(x)$ отличен от нуля в точках данного множества, поэтому найдется $K > 0$ такое, что

$$d(x) \leq K|g(x)|,$$

где $d(x)$ — расстояние от точки x до границы множества S (см. [16]). Отсюда следует

Утверждение. Если выполнено предположение 2, то существует $\sigma > 0$ такое, что неравенство (3.1) справедливо для всех точек множества

$$S_R^\sigma = \{x : 0 \leq g(x) \leq \sigma\} \cap B_R.$$

Далее мы будем использовать следующее усиление предположения 2.

Предположение 3. Существуют $\sigma > 0$ и функция $\bar{u} : S_R^\sigma \rightarrow U$ такие, что $f(x, \bar{u}(x))$ удовлетворяет условию Липшица на S_R^σ и

$$(\nabla g(x), f(x, \bar{u}(x))) < 0 \quad \forall x \in S_R^\sigma. \quad (3.2)$$

Считая последнее предположение выполненным, правую часть $f_\varepsilon(x, u)$ управляемой системы (2.6) определим на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \sigma\} \cap B_R$ следующим образом. Выберем $0 < \varepsilon < \sigma$. Пусть $h_\varepsilon(\tau) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $0 \leq h_\varepsilon(\tau) \leq 1$, $h_\varepsilon(\tau) = 1$ при $\tau < 0$, $h_\varepsilon(\tau) = 0$ при $\tau > \varepsilon$. Положим

$$f_\varepsilon(x, u) = \begin{cases} h_\varepsilon(g(x))f(x, u) + (1 - h_\varepsilon(g(x)))f(x, \bar{u}(x)) & \text{при } g(x) > 0, \\ f(x, u) & \text{при } g(x) \leq 0. \end{cases}$$

В качестве $h_\varepsilon(\tau)$ можно, например, использовать следующую линейно-квадратичную функцию:

$$h_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau < 0, \\ 1 - a\tau^2 & \text{при } 0 \leq \tau \leq d\varepsilon, \\ 1 - a(d\varepsilon)^2 - b(\tau - d\varepsilon) & \text{при } d\varepsilon < \tau < (1 - d)\varepsilon, \\ a(\tau - \varepsilon)^2 & \text{при } (1 - d)\varepsilon \leq \tau \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \tau > \varepsilon, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $0 < d < 1$ — не зависящий от ε параметр, $a = 1/(2d(1 - d)\varepsilon^2)$, $b = 1/((1 - d)\varepsilon)$.

Теорема 1. Пусть $f(x, u)$ и ограничения задачи удовлетворяют предположениям 1, 3. Тогда

1) при $0 < \varepsilon < \sigma$ отображение $f_\varepsilon(x, u)$ непрерывно на $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \sigma\} \cap B_R \times U$ и липшицево по x равномерно по $u \in U$;

2) для любого $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ решение $x_\varepsilon(t)$ системы (2.6) с начальным условием $x_\varepsilon(t_0) = x^0$ продолжимо на $[t_0, \theta]$ и удовлетворяет неравенству

$$g(x_\varepsilon(t)) \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \theta]; \quad (3.4)$$

3) для каждого $0 < \varepsilon < \sigma$ имеет место включение $G_0(\theta) \subset G_\varepsilon(\theta)$. Существует константа $L > 0$ такая, что

$$h(G_0(\theta), G_\varepsilon(\theta)) \leq L\varepsilon. \quad (3.5)$$

Доказательство. На множестве $S_1 \times U$, где $S_1 = \{x : g(x) \leq 0\} \cap B_R$, функция $f_\varepsilon(x, u)$ совпадает с $f(x, u)$, поэтому непрерывна. При $(x, u) \in S_2 \times U$, $S_2 = \{x : 0 \leq g(x) \leq \sigma\} \cap B_R$, $f_\varepsilon(x, u)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций. Остается доказать непрерывность $f_\varepsilon(x, u)$ в точках “склейки” этих областей, т. е. для тех x , где $g(x) = 0$. Поскольку эти точки принадлежат каждому из множеств S_1, S_2 , непрерывность $f_\varepsilon(x, u)$ в них доказывается при помощи очевидных аргументов. Для доказательства условия Липшица для $f_\varepsilon(x, u)$ заметим, что существуют константы $L_1, L_2 > 0$, не зависящие от u , такие что $\forall i = 1, 2$

$$|f_\varepsilon(x, u) - f_\varepsilon(y, u)| \leq L_i \|x - y\| \quad \forall x, y \in S_i, \quad \forall u \in U.$$

Для $x, y \in S_1$ неравенство следует из липшицевости по x функции $f(x, u)$, с которой $f_\varepsilon(x, u)$ совпадает на $S_1 \times U$. На $S_2 \times U$ неравенство выполняется, так как $f_\varepsilon(x, u)$ есть суперпозиция липшицевых по x функций. Константа L_2 , естественно, зависит от ε . Пусть $x \in S_1, y \in S_2$. Соединим x, y отрезком прямой. В концах отрезка функция g принимает значения разных знаков, поэтому на отрезке найдется точка z , в которой $g(z) = 0$. Учитывая, что $z \in S_i, i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x, u) - f_\varepsilon(y, u)| &\leq |f_\varepsilon(x, u) - f_\varepsilon(z, u)| + |f_\varepsilon(z, u) - f_\varepsilon(y, u)| \\ &\leq L_1 \|x - z\| + L_2 \|y - z\| \leq \max\{L_1, L_2\} (\|x - z\| + \|y - z\|) = \max\{L_1, L_2\} \|x - y\| \quad \forall u \in U. \end{aligned}$$

Рассмотрим решение $x_\varepsilon(t)$ системы (2.6), отвечающее управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Так как $f_\varepsilon(x, u)$ является, очевидно, выпуклой комбинацией векторов $f(x, u)$ и $f(x, \bar{u}(x))$, принадлежащих выпуклому множеству $f(x, U)$, то для почти всех t имеет место включение $\dot{x}_\varepsilon(t) \in f(x_\varepsilon(t), U)$. Из леммы Филиппова (см. [21]) тогда следует, что найдется управление $u_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{U}$ такое, что

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = f(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)),$$

т. е. всякая траектория вспомогательной системы является траекторией системы (2.1), порождаемой некоторым управлением, отличным от $u(\cdot)$. Остается доказать, что эта траектория не покидает множества $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \sigma\} \cap B_R$, на котором определена правая часть системы (2.6) — $f_\varepsilon(x, u)$. Пусть γ^* — максимальное из чисел γ , не превосходящих θ , таких что решение $x_\varepsilon(t)$ определено на отрезке $[t_0, \gamma]$. Докажем выполнение неравенства $g(x_\varepsilon(t)) \leq \varepsilon$ во всех точках $[t_0, \gamma^*]$. Допустим от противного, что $g(x_\varepsilon(\hat{t})) > \varepsilon$ для некоторого $\hat{t} \in [t_0, \gamma^*]$. Положим $\delta = (g(x_\varepsilon(\hat{t})) - \varepsilon)/2$, тогда $g(x_\varepsilon(\hat{t})) > \varepsilon + \delta$. Пусть

$$t^* = \min\{t : t \in [t_0, \gamma^*], g(x_\varepsilon(t)) = \varepsilon + \delta\}.$$

Тогда $g(x_\varepsilon(t^*)) = \varepsilon + \delta$ и в силу непрерывности $g(x_\varepsilon(t))$ найдется $\beta > 0$ такое, что $g(x_\varepsilon(t)) > \varepsilon$ при $t^* - \beta \leq t \leq t^*$. Следовательно, для данных значений t имеем равенство $h_\varepsilon(x_\varepsilon(t)) = 0$, поэтому

$$\frac{d}{dt} g(x_\varepsilon(t)) = (\nabla g(x_\varepsilon(t)), f(x_\varepsilon(t), \bar{u}(x_\varepsilon(t)))) < 0.$$

Из последнего неравенства получаем $g(x_\varepsilon(t)) \geq \varepsilon + \delta$ при $t^* - \beta \leq t \leq t^*$, что противоречит определению t^* . Таким образом, $\gamma^* = \theta$ и на отрезке $[t_0, \theta]$ выполняется неравенство $g(x_\varepsilon(t)) \leq \varepsilon$.

Для доказательства заключительной части теоремы заметим, что при $g(x) \leq 0$ $f_\varepsilon(x, u) = f(x, u) \forall u \in U$ и, следовательно, $G_0(\theta) \subset G_\varepsilon(\theta)$. Из NFT теорем [17–19] об аппроксимации траекторий управляемой системы траекториями, удовлетворяющими фазовым ограничениям (neighboring feasible trajectories), следует, что при выполнении предположения 2 существует константа L со следующим свойством. Для любой траектории системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ существует траектория $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{x}(t_0) = x^0$, удовлетворяющая фазовым ограничениям, для которой выполняется неравенство

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C[t_0, \theta]} \leq L \max_{t_0 \leq t \leq \theta} \max\{g(x(t)), 0\}.$$

Так как любая траектория $x_\varepsilon(t)$ системы (2.6) является траекторией исходной системы, то из последнего неравенства получим, что для любого $x_\varepsilon(\theta) \in G_\varepsilon(\theta)$ найдется $\hat{x}(\theta) \in G_0(\theta)$ такой, что

$$\|x_\varepsilon(\theta) - \hat{x}(\theta)\| \leq L \max_{t_0 \leq t \leq \theta} \max\{g(x_\varepsilon(t)), 0\} \leq L\varepsilon.$$

Отсюда с учетом включения $G_0(\theta) \subset G_\varepsilon(\theta)$ следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Оценка вида (3.5) является равномерной для всех θ из ограниченного множества. Если вместо множеств достижимости в момент θ рассматривать множества достижимости к моменту θ :

$$\bar{G}_0(\theta) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq \theta} G_0(\tau), \quad \bar{G}_\varepsilon(\theta) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq \theta} G_\varepsilon(\tau),$$

то оценка (3.5) справедлива и для этих множеств.

З а м е ч а н и е 2. Используя варианты NFT теорем для нестационарного случая (см. [17–19]), приведенные выше результаты можно распространить на нестационарные управляемые системы с фазовыми ограничениями, зависящими от времени.

З а м е ч а н и е 3. От предположения выпуклости множества скоростей $f(x, U)$ в доказанной теореме можно отказаться. Опишем кратко схему доказательства в данном случае. Наряду с системой (2.1) рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \bar{f}(x, w(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad w(t) \in W, \quad (3.6)$$

с управлением w , полученную стандартным образом путем овыпукления множества скоростей исходной системы: $\bar{f}(x, W) = \text{co}f(x, U)$. Множество траекторий системы (2.1) содержится во множестве траекторий системы (3.6) и плотно в нем в равномерной метрике. Пусть $g(t_0) < 0$ и выполнено предположение 2. Тогда, опираясь на результаты работы [20], можно показать, что любую удовлетворяющую фазовому ограничению траекторию системы (3.6) можно сколь угодно точно в равномерной метрике аппроксимировать траекториями (2.1), также удовлетворяющими фазовому ограничению. Опираясь на данный факт и применяя к системе (3.6) теорему 1, нетрудно получить оценку вида (3.5) для системы (2.1) уже без предположения выпуклости множества $f(x, U)$.

4. Линейные по управлению системы с эллипсоидальными ограничениями на управление

Рассмотрим линейную по управлению систему

$$\dot{x} = f(x, u) = f_1(x) + f_2(x)u, \quad u(t) \in U, \quad x(t_0) = x^0,$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывно дифференцируемые отображения, в предположении, что ограничения на управление u заданы невырожденным эллипсоидом в \mathbb{R}^r :

$$U = \{u \in \mathbb{R}^r : (u - \hat{u})^\top Q(u - \hat{u}) \leq 1\},$$

здесь Q — положительно определенная симметричная матрица, $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$ — центр эллипсоида. Будем также считать, что $\nabla g(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Предположение 2 для данной системы можно переписать в виде

$$(\nabla g(x), f_1(x)) + \nabla^\top g(x) f_2(x) \hat{u} + \min_{v \in V} \nabla^\top g(x) f_2(x) v < 0 \quad (4.1)$$

при $x \in S_R^\sigma$. Здесь $V = \{v : v^\top Q v \leq 1\}$ — эллипсоид с центром в нуле.

Введем следующие обозначения:

$$a(x) = (\nabla g(x), f_1(x)) + \nabla^\top g(x) f_2(x) \hat{u}, \quad b^\top(x) = \nabla^\top g(x) f_2(x).$$

Имеем

$$\min_{v \in V} b^\top(x) v = \min_{(w, w) \leq 1} b^\top(x) Q^{-1/2} w = -\|Q^{-1/2} b(x)\| = -\sqrt{b^\top(x) Q^{-1} b(x)},$$

где $Q^{-1/2} = (Q^{-1})^{1/2}$ — квадратный корень из положительно определенной матрицы Q^{-1} . С учетом введенных обозначений условие (4.1) примет следующий вид:

$$a(x) + \min_{v \in V} b^\top(x) v = a(x) - \sqrt{b^\top(x) Q^{-1} b(x)} < 0. \quad (4.2)$$

Минимум в (4.1) достигается на векторе $v = v(x)$, где

$$v(x) = \frac{Q^{-1} b(x)}{\sqrt{b^\top(x) Q^{-1} b(x)}}. \quad (4.3)$$

Таким образом, функция $\bar{u}(x) = v(x) + \hat{u}$ обеспечивает выполнение неравенства $(\nabla g(x), f(x), \bar{u}(x)) < 0$. Однако данная функция не является, вообще говоря, липшицевой и даже может иметь разрывы в точках x , в которых $b(x) = 0$. Покажем, что, модифицируя формулу (4.3), можно добиться, чтобы соответствующая функция $\bar{u}(x)$ удовлетворяла условию Липшица.

Теорема 2. Пусть на множестве S_R^σ выполнено условие (4.2), эквивалентное условию (4.3). Тогда существует липшицева функция $\bar{u}(x)$ такая, что

$$(\nabla g(x), f_1(x) + f_2(x) \bar{u}(x)) < 0 \quad \forall x \in S_R^\sigma. \quad (4.4)$$

Доказательство. Из неравенства (4.3) следует, что $a(x) < 0$ в тех точках, где $b(x) = 0$. Сделаем замену $w = Q^{1/2} v$, тогда $a(x) + b^\top(x) v = a(x) + b_1^\top(x) w$, где $b_1(x) = Q^{-1/2} b(x)$. Эллипсоид V при данном преобразовании перейдет в шар $\{w : (w, w) \leq 1\}$. Рассмотрим неотрицательную функцию $p(x)$, определенную на S_R^σ равенством

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a(x) + \sqrt{a^2(x) + (b_1^\top(x) b_1(x))^2}}{b_1^\top(x) b_1(x)} & \text{при } b_1(x) \neq 0, \\ 0 & \text{при } b_1(x) = 0. \end{cases}$$

Так как $a(x) < 0$ при $b_1(x) = 0$, то функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема [22]. Управление Зонтага² $\bar{w}(x) = -p(x) b_1(x)$ удовлетворяет неравенству $a(x) + b_1^\top(x) \bar{w}(x) < 0$, и, значит,

²Формула для \bar{w} совпадает с формулой для регулятора Зонтага, стабилизирующего управляемую систему, если в последней вместо функции Ляпунова (CLF) подставить $g(x)$.

при $\bar{u}(x) = Q^{-1/2}\bar{w}(x) + \hat{u}$ выполняется неравенство $(\nabla g(x), f(x, \bar{u}(x))) < 0$. Функция $\bar{u}(x)$ является, очевидно, липшицевой, однако ее значения не обязательно принадлежат U . Для того чтобы обеспечить выполнение условия $\bar{u}(x) \in U$, поступим следующим образом. Пусть $\pi(w)$ — оператор метрического проектирования на единичный евклидов шар в \mathbb{R}^r , $\pi(w)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, равной единице. Модифицируем управление Зонтага, полагая

$$\bar{w}(x) = \pi(-p(x)b_1(x)) = \begin{cases} -p(x)b_1(x) & \text{при } \|p(x)b_1(x)\| \leq 1, \\ \frac{-p(x)b_1(x)}{\|p(x)b_1(x)\|} = -\frac{b_1(x)}{\|b_1(x)\|} & \text{при } \|p(x)b_1(x)\| > 1. \end{cases}$$

При $\|p(x)b_1(x)\| \leq 1$ $\bar{w}(x) = -p(x)b_1(x)$ и, следовательно, $a(x) + b_1^\top(x)\bar{w}(x) < 0$. При $\|p(x)b_1(x)\| > 1$ имеем

$$a(x) + b_1^\top(x)\bar{w}(x) = a(x) - \|b_1(x)\| = a(x) - \sqrt{b^\top(x)Q^{-1}b(x)} < 0$$

в силу (4.2). Таким образом,

$$\bar{u}(x) = Q^{-1/2}\pi(-p(x)Q^{-1/2}f_2^\top(x)\nabla g(x)) + \hat{u}$$

есть искомое управление. Теорема доказана.

5. Примеры

В качестве первого из примеров рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = (0, 0), \quad |u| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (5.1)$$

фазовые ограничения пусть заданы неравенством $|x_2| \leq 1$. Функция $g(x) = |x_2| - 1$ не дифференцируема при $x_2 = 0$, что не является препятствием для применения предлагаемого метода, так как, по сути, дифференцируемость $g(x)$ нужна только в окрестности границы S , т. е. при x_2 , близких к 1 и -1 .

Выберем функцию $h_\varepsilon(\tau)$ в виде (3.3). В качестве управления $\bar{u}(x)$, обеспечивающего выполнение неравенства $g'(x_2)\bar{u}(x) < 0$ в окрестности прямых $|x_2| = 1$, можно взять, например,

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x_2 \geq 1, \\ -x_2 & \text{при } -1 < x_2 < 1, \\ 1 & \text{при } x_2 \leq -1. \end{cases}$$

Аппроксимирующая система принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p_\varepsilon(x_2, u), \quad (5.2)$$

где $p_\varepsilon(x_2, u) = h_\varepsilon(|x_2| - 1)u + (1 - h_\varepsilon(|x_2| - 1))\bar{u}(x)$. Заметим, что первое из уравнений системы (5.1) не меняется, так как не содержит u .

Известно, что управления, переводящие траектории системы на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (см., например, [23]). Выпишем соотношения принципа максимума. Гамильтониан системы имеет вид

$$H(x, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_2 p_\varepsilon(x_2, u).$$

Из принципа максимума имеем $u(t) = \text{sign } \psi_2(t)$, где $\psi_2(t)$ — координата решения сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 - \psi_2 p'_\varepsilon(x_2, u), \end{aligned}$$

$p'_\varepsilon(x_2, u)$ — производная p_ε по x_2 .

Таким образом, получаем нелинейную систему 4-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= p_\varepsilon(x_2, \text{sign } \psi_2), \\ \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - \psi_2 p'_\varepsilon(x_2, \text{sign } \psi_2).\end{aligned}$$

Интегрируя данную систему при начальном условии $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\psi_1(0) = \sin \alpha$, $\psi_2(0) = \cos \alpha$, где α пробегает значения от 0 до 2π , мы получим семейство точек $(x_1(2, \alpha), x_2(2, \alpha))$ на плоскости, среди которых содержатся все граничные точки множества достижимости $G_\varepsilon(2)$ системы (5.2). На рис. 1 приведены результаты численного моделирования по приведенному алгоритму. Здесь показаны границы аппроксимирующих множеств. Толстой линией показаны границы множества $G_\varepsilon(2)$ для различных значений ε . Для сравнения тонкой линией обозначены границы внутренних аппроксимирующих множеств, полученных по описанному в работе [24] алгоритму.

Во втором примере управляемая система имеет вид

$$\dot{x}_1 = 1 - p x_2^2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad x(0) = (0, 0), \quad 0 \leq t \leq 3, \quad (5.3)$$

где $p > 0$, ограничения заданы условиями $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, $x_2 \leq 1$. В качестве $\bar{u}(x)$ можно взять $\bar{u}(x) \equiv (0, -1) \forall x$. Тогда вспомогательную систему можно записать в виде

$$\dot{x}_1 = 1 - p x_2^2 + h_\varepsilon(x_2 - 1)u_1, \quad \dot{x}_2 = h_\varepsilon(x_2 - 1)(1 + u_2) - 1.$$

Алгоритм построения границы множеств достижимости здесь аналогичен первому примеру. На рис. 2 приведен результат построения границ аппроксимаций множеств достижимости $G_\varepsilon(3)$ при $p = 0.5$ для различных значений ε . Границы этих множеств в нижней части рисунка совпадают.

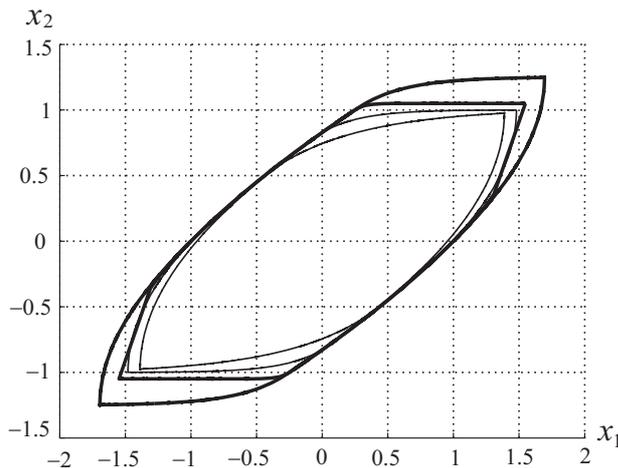


Рис. 1. Внутренние и внешние аппроксимирующие множества системы (5.1).

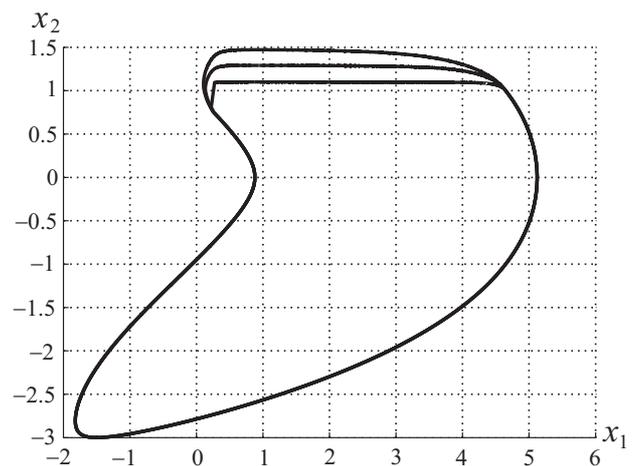


Рис. 2. Внешние аппроксимирующие множества для различных значений ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

3. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
4. Krasovski N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
5. Kurzanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
6. Лотов А. В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 67–78.
7. Матвийчук А.Р., Ушаков В.Н. О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.
8. Kurzanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P. Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems // J. Optim. Theory Appl. 2006. Vol. 128, no. 3. P. 499–521.
9. Baier R., Chahma I. A., Lempio F. Stability and convergence of Euler’s method for state-constrained differential inclusions // SIAM J. Optim. 2007. Vol. 18, no. 3. P. 1004–1026.
10. Bonneuil N. Computing reachable sets as capture-viability kernels in reverse time // Appl. Math. 2012. Vol. 3, no. 11. P. 1593–1597. (DOI: 10.4236/am.2012.311219).
11. Костоусова Е.К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
12. Гусев М.И. Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
13. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
14. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
15. Гусев М.И. О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 81–86.
16. Гусев М.И. Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
17. Forcellini F., Rampazzo F. On nonconvex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set // Differential Integral Equations. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 471–497.
18. Frankowska H., Vinter R. B. Existence of neighboring feasible trajectories: applications to dynamic programming for state-constrained optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 2000. Vol. 104, no. 1. P. 21–40.
19. Bettiol P., Bressan A., Vinter R. Trajectories satisfying a state constraint: $W^{(1,1)}$ estimates and counterexamples // SIAM J. Control Optim. 2010. Vol. 48, no. 7. P. 4664–4679.
20. Stern R.J. Characterization of the state constrained minimal time function // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 2. P. 697–707.
21. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
22. Sontag E.D. A ‘universal’ construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization // System and Control Letters. 1989. Vol. 13, iss. 2. P. 117–123.
23. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
24. Гусев М.И. О задаче достижимости при фазовых ограничениях [Электрон. ресурс] // XII Всерос. совещание по проблемам управления — ВСПУ-2014 (Москва, 16–19 июня, 2014 г.): сб. докл. С. 610–621.

Гусев Михаил Иванович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: gmi@imm.uran.ru

Поступила 05.08.2014

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОМ ЧЕРЕЗ ЧАСТЬ ГРАНИЦЫ¹

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального управления через часть границы решениями уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей с малым коэффициентом при операторе Лапласа и интегральными ограничениями на управление. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения задачи.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin. Solution asymptotics in a problem of optimal boundary control of a flow through a part of the boundary.

We consider a problem of optimal control through a part of the boundary of solutions to an elliptic equation in a bounded domain with smooth boundary with a small parameter at the Laplace operator and integral constraints on the control. A complete asymptotic expansion of the solution to this problems in powers of the small parameter is constructed.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega := \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_2 \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) — ограниченная двухсвязная область ($\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$) с границей $\Gamma := \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 =: \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, удовлетворяющей условию: граница Γ области Ω есть бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n - 1$, расположенное локально по одну сторону от Γ (иными словами, мы рассматриваем $\overline{\Omega}$ как многообразие с краем Γ класса C^∞).

Рассматривается следующая задача граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x)z_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega, & z_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g(x) + u_\varepsilon(x), & x \in \Gamma, & u_\varepsilon \in \mathcal{U}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}_1, \text{ где } \mathcal{U}_r := \left\{ u(\cdot) \in L_2(\Gamma) : \| \|u\| \|_1 \leq r, \| \|u\| \|_2 = 0 \right\}, \quad (1.2)$$

$$J(u_\varepsilon) := \|z_\varepsilon - z_d\|^2 + \nu^{-1} \| \|u_\varepsilon(\cdot)\| \|_1^2 \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}. \quad (1.3)$$

Здесь $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к Γ , а через $\| \cdot \|$, $\| \| \cdot \| \|$, $\| \| \cdot \| \|_i$ ($i = 1, 2$) обозначены нормы в пространствах $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и $L_2(\Gamma_i)$ соответственно. Скалярные произведения в этих пространствах будем обозначать через (\cdot, \cdot) , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ соответственно.

¹Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (проекты 14-01-00322 и 13-01-00090) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” (при финансовой поддержке УРО РАН, проект 12-П-1-1009).

Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad g(\cdot)|_{\Gamma_1} \in C^\infty(\Gamma_1), \quad g(\cdot)|_{\Gamma_2} = 0, \\ \forall x \in \bar{\Omega} \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а решение краевой задачи (1.1) понимается в обобщенном смысле (см., например, [1, гл. 1, § 3, п. 3.4.]): для любого $\varphi \in H^1(\Omega)$ (с учетом (1.2) и (1.4)) справедливо равенство

$$\varepsilon^2(\nabla z_\varepsilon, \nabla \varphi) + (a(\cdot)z_\varepsilon, \varphi) - \langle g + u_\varepsilon, \varphi \rangle_1 = (f, \varphi).$$

Данная статья является обобщением работы [2] на случай управления потоком через часть границы двухсвязных областей. Отметим, что в [2] многосвязность области не исключается, однако в ней изучается случай, когда управляющее воздействие осуществляется через всю границу и при условии $\|g\| > 1$.

Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [3–6].

2. Определяющие соотношения и априорные оценки

В этом случае единственное оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ находятся как решение следующей задачи [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.36), (2.49)]:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x)z_\varepsilon = f(x), & -\varepsilon^2 \Delta p_\varepsilon + a(x)p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d, & x \in \Omega, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g(x) + u_\varepsilon(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{U} \quad \langle p_\varepsilon + \nu^{-1}u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle_1 \geq 0.$$

В работе [7, лемма 1, соотношение (2.5)] было доказано, что условие (2.1) с $\mathcal{U} \stackrel{(1.2)}{=} \mathcal{U}_r$ эквивалентно следующему: существует $\lambda_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon|_{\Gamma_1}, \quad \lambda_\varepsilon \in (0; \nu], \quad \lambda_\varepsilon \| \|p_\varepsilon\| \|_1 \leq r, \\ (\nu - \lambda_\varepsilon)(r - \lambda_\varepsilon \| \|p_\varepsilon\| \|_1) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.3) эквивалентна краевой задаче

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x)z_\varepsilon = f(x), & -\varepsilon^2 \Delta p_\varepsilon + a(x)p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d, & x \in \Omega, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = g(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

зависящей от скалярного параметра λ_ε с дополнительным соотношением (2.2) при $r = 1$.

Цель работы — изучить поведение $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ и λ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области Ω и коэффициента $a(\cdot)$, часто будем обозначать одной и той же буквой K (возможно, с индексами).

В [7, лемма 2] доказано, что если выполнено условие (1.4), $f \in L_2(\Omega)$, $q \in L_2(\Gamma)$ и y_ε есть решение задачи

$$-\varepsilon^2 \Delta y_\varepsilon + a(x)y_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega, \quad y_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial n} = q(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2.4)$$

то существует $K > 0$ такое, что

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|y\|, \varepsilon\|y\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla y\|\} \leq K(\|q\| + \varepsilon^{1/2}\|f\|) =: KD(f, q). \quad (2.5)$$

Поскольку z_ε — решение задачи (1.1), (1.2) есть решение задачи (2.4) с функцией $q = g + u_\varepsilon$, то $\|g + u\| \leq 1 + \|g\|$. Применяя (2.5), получим, что

$$\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\| \leq K(\|g\| + 1 + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \quad (2.6)$$

Но p_ε удовлетворяет (2.4) с $f = -z_d$ и $q = 0$, поэтому в силу (2.5) получим, что

$$D(-z_d, 0) = \varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon + z_d\| \leq \varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\| + \varepsilon^{1/2}\|z_d\| \stackrel{(2.6)}{\leq} K(\|g\| + 1 + \varepsilon^{1/2}\|f\|) + \varepsilon^{1/2}\|z_d\|.$$

Таким образом, если $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ — решение задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$, то существует $K > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \max\{\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\|, \varepsilon\|z_\varepsilon\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_\varepsilon\|\} &\leq K(\|g\| + \varepsilon^{1/2}\|f\| + \varepsilon^{1/2}\|z_d\|), \\ \max\{\varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon\|, \varepsilon\|p_\varepsilon\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_\varepsilon\|\} &\leq K(\|g\| + \varepsilon^{1/2}\|f\| + \varepsilon^{1/2}\|z_d\|). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тем самым, в частности,

$$\|z_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1/2}), \quad \|p_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1/2}), \quad \|z_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1}), \quad \|p_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

В [8, теорема 1] показано, что если

$$f_j \in L_2(\Omega), \quad g_{j,i} \in H^{1/2}(\Gamma_i), \quad j, i = 1, 2, \quad (2.9)$$

то при любом $\lambda > 0$ задача

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z + a(x)z = f_1(x), & -\varepsilon^2 \Delta p + a(x)p - z = f_2(x), & x \in \Omega, & z, p \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \lambda p = g_{1,1}(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,1}(x), & x \in \Gamma_1, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g_{1,2}(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,2}(x), & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.10)$$

разрешима единственным образом и функции $\{z, p\}$ — ее решение — удовлетворяют соотношению $z, p \in H^2(\Omega)$.

При этом если $f_j \in C^\infty(\bar{\Omega})$, а $g_{j,i} \in C^\infty(\Gamma_i)$ ($j, i = 1, 2$), то $z, p \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Лемма. Пусть $\{z, p\}$ — решение задачи (2.10). Тогда

$$\|z\|^2 + \lambda \cdot \|p\|_1 = (f_1, p) - (f_2, z) + \langle g_{1,1}, p \rangle_1 - \langle g_{2,1}, z \rangle_1 + \langle g_{2,2}, p \rangle_2 - \langle g_{1,2}, z \rangle_2. \quad (2.11)$$

Доказательство. В силу определения обобщенного решения задачи (2.10) для любых $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 (\nabla z, \nabla \varphi) + (a(\cdot)z, \varphi) + \langle \lambda p - g_{1,1}, \varphi \rangle_1 - \langle g_{1,2}, \varphi \rangle_2 &= (f_1, \varphi), \\ \varepsilon^2 (\nabla p, \nabla \psi) + (a(\cdot)p, \psi) - (z, \psi) - \langle g_{2,1}, \psi \rangle_1 - \langle g_{2,2}, \psi \rangle_2 &= (f_2, \psi). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Положив $\varphi = p$ в (2.12), а $\psi = z$ и вычитая из первого получившегося равенства второе, получим (2.11). \square

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.4) и (2.9). Если $\{z, p\}$ — решение задачи (2.10), то существует $K > 0$ такое, что справедливы оценки

$$\max\{\varepsilon^{3/2}\|z\|, \varepsilon^2\|z\|, \varepsilon^{5/2}\|\nabla z\|\} \leq K(\varepsilon + \lambda)(\|g\|_0 + \varepsilon^{1/2}\|f\|_0),$$

$$\max\{\varepsilon\|p\|, \varepsilon^{3/2}\|p\|, \varepsilon^2\|\nabla p\|\} \leq K(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\lambda})(\|g\|_0 + \varepsilon^{1/2}\|f\|_0),$$

где $\|f\|_0 := \|f_1\| + \|f_2\|$, а $\|g\|_0 := \sum_{j,i=1}^2 \|g_{j,i}\|_i$.

Доказательство. Сначала рассмотрим z_1 и p_1 — решение задачи

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z_1 + a(x)z_1 = f_1(x), & -\varepsilon^2 \Delta p_1 + a(x)p_1 - z_1 = f_2(x), & x \in \Omega, & z, p \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g_{1,1}(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,1}(x), & x \in \Gamma_1, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g_{2,1}(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,2}(x), & x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Тогда в силу (2.5)

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_1\|, \varepsilon\|z_1\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_1\|\} \leq K(\|g_1\|_0 + \varepsilon^{1/2}\|f_1\|) =: K D(f_1, g_1), \quad (2.13)$$

где $\|g_1\|_0 := \|g_{1,1}\|_1 + \|g_{1,2}\|_2$.

Так как p_1 удовлетворяет (2.4) с $f = f_2 + z_1$ и $g = g_{2,2}$, определяемыми $g_{2,1}$ и $g_{2,2}$, то

$$D(f_2 + z_1, g_2) \leq \|g_2\|_0 + \varepsilon^{1/2}\|f_1\| + \varepsilon^{1/2}\|z_1\| \stackrel{(2.13)}{\leq} \|g_2\|_0 + \varepsilon^{1/2}\|f_1\| + K D(f_1, g_1).$$

Таким образом, в силу (2.5) для функции p_1 тоже справедливы оценки вида (2.13):

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|p_1\|, \varepsilon\|p_1\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_1\|\} \leq K_1(\|g\|_0 + \varepsilon^{1/2}\|f\|_0) =: K_1 D_1(f, g). \quad (2.14)$$

Теперь функции $z_2 := z - z_1$ и $p_2 := p - p_1$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z_2 + a(x)z_2 = 0, & -\varepsilon^2 \Delta p_2 + a(x)p_2 - z_2 = 0, & x \in \Omega, & z, p \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \lambda p_2 = -\lambda p_1, & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = 0, & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Соотношение (2.11), примененное к z_2 и p_2 , с учетом вида системы (2.15) дает неравенство $\|z_2\|^2 + \lambda\|p_2\|_1^2 \leq \lambda\|p_2\|_1 \cdot \|p_1\|_1$. Тем самым

$$\|p_2\|_1 \leq \|p_1\|_1, \quad \|z_2\| \leq \sqrt{\lambda}\|p_1\|_1. \quad (2.16)$$

Применив оценки (2.5) для z_2 ($D(0, \lambda p_1 + \lambda p_2) \stackrel{(2.16)}{\leq} 2\lambda\|p_1\|_1 \stackrel{(2.14)}{\leq} 2\lambda D_1(f, g)\varepsilon^{-1}$) и p_2 ($D(z_2, 0) = \varepsilon^{1/2}\|z_2\| \stackrel{(2.16)}{\leq} \varepsilon^{1/2}\sqrt{\lambda}\|p_1\|_1 \stackrel{(2.14)}{\leq} \sqrt{\lambda} D_1(f, g)\varepsilon^{-1/2}$), получим

$$\max\{\varepsilon^{3/2}\|z_2\|, \varepsilon^2\|z_2\|, \varepsilon^{5/2}\|\nabla z_2\|\} \leq K_2 \lambda D_1(f, g),$$

$$\max\{\varepsilon\|z_2\|, \varepsilon^{1/2}\|z_2\|, \varepsilon^2\|\nabla z_2\|\} \leq K_2 \sqrt{\lambda} D_1(f, g).$$

Теперь для получения итоговых оценок осталось применить неравенство треугольника для норм функций $z = z_1 + z_2$ и $p = p_1 + p_2$. \square

3. Аппроксимационные теоремы

Для обоснования асимптотических разложений решений задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$ нужны теоремы об оценке уклонения точного решения $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ этой задачи от решений аппроксимационной задачи

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z_m + a(x)z_m = f(x) + f_{1,m}(x), & x \in \Omega, \\ -\varepsilon^2 \Delta p_m + a(x)p_m - z_m = -z_d + f_{2,m}(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_m}{\partial n} + \lambda_m p_m = g_{1,1,m}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,1,m}(x), & x \in \Gamma_1, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g_{1,2,m}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,2,m}(x), & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

в случае, когда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f_{j,m} \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad g_{j,i,m} \in C^\infty(\Gamma_i), \quad \|f_{j,m}\| = O(\varepsilon^m), \quad \|g_{j,i,m}\|_j = O(\varepsilon^m), \quad j, i = 1, 2, \quad (3.2)$$

и аппроксимации условия (2.2) при $r = 1$.

Если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\lambda_\varepsilon \| \|p_\varepsilon\| \| < 1, \quad (3.3)$$

то в этом случае условие (2.2) при $r = 1$ переходит в равенство $\lambda_\varepsilon = \nu$.

Если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\lambda_\varepsilon < 1, \quad (3.4)$$

то в этом случае условие (2.2) при $r = 1$ переходит в равенство

$$\lambda_\varepsilon \| \|p_\varepsilon\| \|_1 = 1. \quad (3.5)$$

Утверждение. Пусть выполнены условия (1.4) и $\{z_{\varepsilon,\nu}, p_{\varepsilon,\nu}\}$ — решение задачи (2.10) с $\lambda = \nu$, $f_1 = f$, $f_2 = -z_d$, $g_{1,1} = g$ и $g_{j,i} = 0$ для остальных пар j, i . Тогда

1) Если $\nu \cdot \| \|p_{\varepsilon,\nu}\| \|_1 < 1$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то реализуется случай (3.3).

2) Если $\nu \cdot \| \|p_{\varepsilon,\nu}\| \|_1 > 1$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то реализуется случай (3.5).

Доказательство. В первом случае $\{z_{\varepsilon,\nu}, p_{\varepsilon,\nu}\}$ есть решение задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$ с $\lambda_\varepsilon = \nu$, а невыполнение условия (3.5) приводит к тому, что $\{z_{\varepsilon_n,\nu}, p_{\varepsilon_n,\nu}\}$ есть решение задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$ с $\lambda_{\varepsilon_n} = \nu$ для некоторой последовательности $\{\varepsilon_n\}$. \square

При выполнении (3.3) теорема 1 дает необходимые оценки погрешности аппроксимаций.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.4), (3.2) и (3.3). Если $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ — решение задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$, а $\{z_{m,\nu}, p_{m,\nu}\}$ — решение задачи (3.1) с $\lambda_m = \nu$, то

$$\max\{\varepsilon^{3/2} \|z_\varepsilon - z_{m,\nu}\|, \varepsilon^2 \| \|z_\varepsilon - z_{m,\nu}\| \|, \varepsilon^{5/2} \|\nabla(z_m - z_{\varepsilon,\nu})\|\} = O(\varepsilon^m),$$

$$\max\{\varepsilon \|p_\varepsilon - p_{m,\nu}\|, \varepsilon^{3/2} \| \|p_\varepsilon - p_{m,\nu}\| \|, \varepsilon^2 \|\nabla(p_\varepsilon - p_{m,\nu})\|\} = O(\varepsilon^m)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

В случае (3.4) аппроксимация условия (2.2) при $r = 1$ имеет вид

$$\lambda_m \| \|p_m\| \|_1 = 1 + O(\varepsilon^m) \quad (3.6)$$

и для получения аппроксимационной теоремы требуется вспомогательное утверждение о зависимости от r оптимального $u_{\varepsilon,r}$ в задаче (1.1)–(1.3) при условии: $\| \|u_{\varepsilon,r}\| \|_1 = r$.

Теорема 3. Пусть $A : U \rightarrow V$ — линейный ограниченный оператор, U, V — гильбертовы пространства,

$$J(u) := \|Au - v_0\|^2 + \nu^{-1}\|u\|^2$$

и при всех $r \in [r_*; r^*]$ решения u_r экстремальной задачи $\min_{\|u\| \leq r} J(u)$ таковы, что $\|u\| = r$.

Тогда существует $K > 0$ такое, что

$$\forall r, r' \in [r_*; r^*] \quad \|u_r - u_{r'}\| \leq K\|A\|^2(\|A\| + \|v_0\|)^4|r - r'|. \quad (3.7)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что J — выпуклый и дифференцируемый функционал. При этом его производная Фреше $J'(u)$ определена формулой

$$J'(u)(v) = 2(A^*Au - A^*v_0 + \nu^{-1}u, v),$$

где A^* — оператор, эрмитово сопряженный к A . Пусть $q := A^*Au - A^*v_0 + \nu^{-1}u$. Тогда u_r характеризуется соотношением (см., например, [1, гл. 1, формула (1.22)])

$$\forall v : \|v\| \leq r \quad (q, v - u) \geq 0.$$

Отсюда $-r\|q\| \geq (q, u) \geq -\|q\| \cdot \|u\| \geq -r\|q\|$. Последнее соотношение эквивалентно условию: либо $q = 0$, либо $\|u\| = r$ и $q = -\lambda u$ при некотором $\lambda > 0$. Таким образом, элемент u_r определяется следующим образом:

$$u_r = (\mathcal{A} + \mu I)^{-1}w_0 := \mathcal{R}(\mu)w_0, \quad \mu = \lambda + \nu^{-1}, \quad \lambda \geq 0, \quad w_0 := A^*v_0, \quad \mathcal{A} := A^*A \geq 0. \quad (3.8)$$

Отметим, что поскольку $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ есть линейный самосопряженный неотрицательный ограниченный оператор, то и $\mathcal{R}(\mu)$ есть линейный самосопряженный неотрицательный ограниченный оператор при любом $\mu > 0$.

В ходе дальнейшего доказательства мы будем использовать известные соотношения для самосопряженных ограниченных операторов (см., например, [9, гл. 7]):

$$A \geq B \geq 0 \implies \|A\| \geq \|B\|, \quad \|\mathcal{A} + \mu I\| \geq \|\mathcal{A}\|, \quad \|\mathcal{R}(\mu)\| \leq \frac{1}{\mu}, \quad (3.9)$$

прямым вычислением проверяемые тождества

$$\mathcal{R}(\mu_1) - \mathcal{R}(\mu_2) = (\mu_2 - \mu_1)\mathcal{R}(\mu_1)\mathcal{R}(\mu_2), \quad \mathcal{R}(\mu_1) + \mathcal{R}(\mu_2) = (2\mathcal{A} + \mu_1 + \mu_2)\mathcal{R}(\mu_1)\mathcal{R}(\mu_2), \quad (3.10)$$

неравенство

$$\|B^{-1}w\| \geq \|B\|^{-1}\|w\| \quad (3.11)$$

и понятие $\sqrt{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{A} \geq 0$. Отметим, что $\|\sqrt{\mathcal{A}}\|^2 = \|\mathcal{A}\|$.

Пусть (в силу (3.8)) $u_r = \mathcal{R}(\mu)w_0$ и $u_{r'} = \mathcal{R}(\mu')w_0$. Тогда

$$r = \|u_r\| \leq \|\mathcal{R}(\mu)\| \cdot \|w_0\| \stackrel{(3.9)}{\leq} \frac{1}{\mu}\|w_0\| \stackrel{(3.8)}{\leq} \nu\|w_0\|.$$

С другой стороны, $w_0 = (\mathcal{A} + \mu I)u_r$ или $\mu u_r = w_0 - \mathcal{A}u_r$. Тем самым $\mu r \leq \|w_0\| + r\|\mathcal{A}\|$. Поэтому

$$\|w_0\| \geq \frac{r_*}{\nu}, \quad \mu \leq \frac{\|w_0\|}{r_*} + \|\mathcal{A}\|. \quad (3.12)$$

Из (3.8) получим

$$\|u_r - u_{r'}\| \leq \|\mathcal{R}(\mu) - \mathcal{R}(\mu')\| \cdot \|w_0\| = |\mu - \mu'| \cdot \|w_0\| \cdot \|\mathcal{R}(\mu) \cdot \mathcal{R}(\mu')\| \stackrel{(3.8), (3.9)}{\leq} \nu^2 |\mu - \mu'| \cdot \|w_0\|. \quad (3.13)$$

Оценим величину $|\mu - \mu'|$:

$$\begin{aligned}
|r^2 - r'^2| &= \left| \|\mathcal{R}(\mu)w_0\|^2 - \|\mathcal{R}(\mu')w_0\|^2 \right| = \left| \left((\mathcal{R}(\mu)^2 - \mathcal{R}(\mu')^2)w_0, w_0 \right) \right| \\
&\stackrel{(3.10)}{=} \left| \left((2\mathcal{A} + \mu + \mu')(\mu' - \mu)\mathcal{R}(\mu)^2\mathcal{R}(\mu')^2w_0, w_0 \right) \right| \\
&= |\mu - \mu'| \cdot \left\| \sqrt{2\mathcal{A} + \mu + \mu'}\mathcal{R}(\mu)\mathcal{R}(\mu')w_0 \right\|^2 \\
&\stackrel{(3.8),(3.11)}{\geq} 2\|\mathcal{A}\| \cdot |\mu - \mu'| \cdot \|\mathcal{A} + \mu I\|^{-2} \cdot \|\mathcal{A} + \mu' I\|^{-2} \|w_0\|^2 \\
&\stackrel{(3.9),(3.12)}{\geq} 2\|\mathcal{A}\| \cdot |\mu - \mu'| \left(2\|\mathcal{A}\| + \frac{\|w_0\|}{r_*} \right)^{-4} \|w_0\|^2.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$|\mu - \mu'| \leq \frac{|r^2 - r'^2|}{2\|\mathcal{A}\| \cdot \|w_0\|^2} \left(2\|\mathcal{A}\| + \frac{\|w_0\|}{r_*} \right)^4.$$

Подставив это соотношение в (3.13), получим

$$\|u_r - u_{r'}\| \leq \frac{\nu|r - r'|r^*}{\|\mathcal{A}\| \cdot \|w_0\|} \left(2\|\mathcal{A}\| + \frac{\|w_0\|}{r_*} \right)^4.$$

Поскольку $\|w_0\| \stackrel{(3.8)}{\leq} \|A^*\| \cdot \|v_0\| = \|A\| \cdot \|v_0\|$, а $\|\mathcal{A}\| = \|A\|^2$, то с учетом (3.12) выводим неравенство

$$\|u_r - u_{r'}\| \leq \frac{\nu^2 r^* |r - r'|}{r_* \|A\|^2} \left(2\|A\|^2 + \frac{1}{r_*} \|A\| \cdot \|v_0\| \right)^4.$$

Тем самым при некотором $K > 0$ справедливо неравенство (3.7). \square

Следствие. Пусть выполнены условия (1.4), а $u_{\varepsilon, r}$ — решение задачи (1.1), (1.3) с $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ и $\|u_{\varepsilon, r}\|_1 = r$ при всех $r \in [r_*; r^*]$. Тогда при некоторых $K > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$

$$\forall r, r' \in [r_*; r^*] \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0] \quad \|u_r - u_{r'}\| \leq K\varepsilon^{-3}|r - r'|. \quad (3.14)$$

Доказательство. Пусть $z_{\varepsilon, 0}$ — решение задачи (1.1) с $u = 0$, а оператор $A: L_2(\Gamma_1) \rightarrow L_2(\Omega)$ ставит в соответствие функции u_ε решение задачи (1.1) с $f = 0$ и $g = 0$. Тогда $z_\varepsilon = z_{\varepsilon, 0} + Au_\varepsilon$ и функционал качества примет вид $J(u_\varepsilon) = \|Au_\varepsilon + v_0\|^2 + \nu^{-1}\|u_\varepsilon\|_1$, где $v_0 := z_{\varepsilon, 0} - z_d$. По теореме 3

$$\|u_r - u_{r'}\|_1 \leq K|r - r'| \cdot \|A\|^2 (\|A\| + \|v_0\|)^4.$$

По определению $\|A\|$ в силу оценок (2.5) получим $\|A\| \leq K(\varepsilon^{-1/2} \cdot 1 + 0) = K\varepsilon^{-1/2}$. При этом $\|v_0\| \leq \|z_{\varepsilon, 0}\| + \|z_d\| \stackrel{(2.5)}{\leq} K(\varepsilon^{-1/2}\|g\| + \|f\|) + \|z_d\|$. Тем самым

$$\begin{aligned}
\|u_r - u_{r'}\|_1 &\leq K|r - r'|K^2\varepsilon^{-1}(K\varepsilon^{-1/2} + K(\varepsilon^{-1/2}\|g\| + \|f\|) + \|z_d\|)^4 \\
&= K^2\varepsilon^{-3}|r - r'| (K + K(\|g\| + \varepsilon^{1/2}\|f\|) + \varepsilon^{1/2}\|z_d\|)^4 \leq K_1\varepsilon^{-3}|r - r'|
\end{aligned}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. \square

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.4), (3.2) и (3.4). Если $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ — решение задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$, а $\{z_m, p_m\}$ — решение задачи (3.1) с (3.6), то

$$\max \{ \varepsilon^{1/2} \|z_\varepsilon - z_m\|, \varepsilon \|z_\varepsilon - z_m\|, \varepsilon^{3/2} \|\nabla z_\varepsilon - z_m\| \} = O(\varepsilon^{m-3}),$$

$$\max \{ \varepsilon^{1/2} \|p_\varepsilon - p_m\|, \varepsilon \|p_\varepsilon - p_m\|, \varepsilon^{3/2} \|\nabla p_\varepsilon - p_m\|, |\lambda_\varepsilon - \lambda_m| \} = O(\varepsilon^{m-3})$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $m > 4$. \square

Доказательство. Функции $z_{\varepsilon,m} := z_m - z_\varepsilon$ и $p_{\varepsilon,m} := p_m - p_\varepsilon$ являются решением системы

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta z_{\varepsilon,m} + a(x)z_{\varepsilon,m} = f_{1,m}(x), & -\varepsilon^2 \Delta p_{\varepsilon,m} + a(x)p_{\varepsilon,m} - z_{\varepsilon,m} = f_{2,m}(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_{\varepsilon,m}}{\partial n} = g_{1,1,m}(x) + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_m p_m, & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,1,m}(x), & x \in \Gamma_1, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g_{2,1,m}(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,2,m}(x), & x \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Поскольку

$$\| \lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_m p_m \|_1 \stackrel{(3.14)}{\leq} K \varepsilon^{-2} \left| \lambda_\varepsilon \| p_\varepsilon \|_1 - \lambda_m \| p_m \|_1 \right| \stackrel{(3.5),(3.6)}{=} O(\varepsilon^{m-3}) \quad (3.16)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, то, применяя к решению системы (3.15) оценки (2.13) и (2.14), получим все оценки доказываемой теоремы, кроме оценки величины $|\lambda_\varepsilon - \lambda_m|$.

Так как $\lambda_\varepsilon \stackrel{(3.5)}{=} \| p_\varepsilon \|_1^{-1} \stackrel{(2.2)}{\leq} \nu$, то

$$\| p_\varepsilon \|_1 \geq \nu^{-1}. \quad (3.17)$$

Из уже полученных оценок следует, что

$$\| p_m \|_1 \geq \| p_\varepsilon \|_1 - \| p_\varepsilon - p_m \|_1 \stackrel{(3.17)}{\geq} \nu^{-1} + O(\varepsilon^{m-4}) \stackrel{m \geq 4}{\geq} \frac{1}{2\nu} \quad (3.18)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\lambda_m \stackrel{(3.6)}{=} \frac{1 + O(\varepsilon^m)}{\| p_m \|_1} \stackrel{(3.18)}{=} O(1) \quad (3.19)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тогда $|\lambda_m - \lambda_\varepsilon| \cdot \| p_\varepsilon \|_1 \leq \| \lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \lambda_m p_m \|_1 + |\lambda_m| \cdot \| p_\varepsilon - p_m \|_1 \stackrel{(3.16),(3.19)}{=} O(\varepsilon^{m-4}) \stackrel{(3.17)}{\implies} |\lambda_m - \lambda_\varepsilon| = O(\varepsilon^{m-4})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

4. Построение асимптотики

В силу теорем 2 и 4 для построения асимптотического разложения рассматриваемой задачи нужно построить ее *формальное асимптотическое решение* (см., например, [10, введение]). Его построение осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения (см., например, [11; 12]).

Внешнее разложение ищем в виде рядов

$$z_{out}(x, \varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_{2k}(x), \quad p_{out}(x, \varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_{2k}(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

коэффициенты которых находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$z_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)}, \quad p_0(x) = \frac{z_0 - z_d}{a(x)}, \quad z_{2k}(x) = \frac{\Delta z_{2k-2}}{a(x)}, \quad p_{2k} = \frac{\Delta p_{2k-2}}{a(x)}, \quad k \geq 1. \quad (4.2)$$

В силу (1.4) все $z_{2k}, p_{2k} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и ряды (4.1) хорошо аппроксимируют уравнения из (2.3) но, вообще говоря, не аппроксимируют граничных условий (и дополнительного условия (2.2) в случае (3.5)).

Для аппроксимации граничных условий (и дополнительного условия (2.2)) в малых окрестностях границ Γ_i (пограничные слои) вводятся новые переменные (это можно сделать в силу гладкости границ) (s_i, τ_i) , где s_i — это координата на многообразии Γ_i , а τ_i — расстояние по нормали к Γ_i , исходящей из точки на Γ_i с координатой s_i .

В пограничных слоях стандартно (см., например, [11; 10, с. 31–34]) перейдем к растянутым переменным $\xi_i := \tau_i \varepsilon^{-1}$ и к следующему виду внутреннего разложения:

$$\overset{i}{Z}(s_i, \tau_i \varepsilon) := \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^k \overset{i}{Z}_m(s_i), \quad \overset{i}{P}(s_i, \tau_i \varepsilon) := \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^k \overset{i}{P}_m(s_i), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

аппроксимирующего однородную систему из (2.3) и подправляющего граничные условия. При этом асимптотическое разложение λ_ε будем искать в виде следующего ряда:

$$\Lambda(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_m, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отметим, что в случае (3.3)

$$\lambda_0 = \nu, \quad \lambda_m = 0, \quad m \geq 1. \quad (4.4)$$

При переходе к новым координатам (s_i, ξ_i) оператор $L_\varepsilon y := -\varepsilon^2 \Delta y + a(x)y$ перейдет в оператор

$$\overset{i}{\mathcal{L}}_\varepsilon \overset{i}{Y} = -\frac{\partial^2 \overset{i}{Y}}{\partial \xi_i^2} + \varepsilon \overset{i}{L}_1 \frac{\partial \overset{i}{Y}}{\partial \xi_i} + \varepsilon^2 \overset{i}{L}_2 \overset{i}{Y} + \overset{i}{a}(s_i, \varepsilon \xi_1) \overset{i}{Y}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\overset{i}{L}_1$ и $\overset{i}{L}_2$ — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s_i , с гладкими коэффициентами от s_i и $\tau_i = \varepsilon \xi_i$.

Подставляя в однородную систему, соответствующую системе из (2.3), ряды (4.3) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и операторов $\overset{i}{\mathcal{L}}_\varepsilon$ в ряды Тейлора по переменной $\tau_i = \varepsilon \xi_i$, получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \overset{i}{Z}_{-1}}{\partial \xi_i^2} - \overset{i}{a}_0(s) \overset{i}{Z}_{-1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \overset{i}{P}_{-1}}{\partial \xi_i^2} - \overset{i}{a}_0(s) \overset{i}{P}_{-1} + \overset{i}{Z}_{-1} = 0, \\ \frac{\partial^2 \overset{i}{Z}_m}{\partial \xi_i^2} - \overset{i}{a}_0(s) \overset{i}{Z}_m = \overset{i}{F}_m(s_i, \xi_i), \quad m \geq 0, \\ \frac{\partial^2 \overset{i}{P}_m}{\partial \xi_i^2} - \overset{i}{a}_0(s) \overset{i}{P}_m + \overset{i}{Z}_m = \overset{i}{G}_m(s_i, \xi_i), \quad m \geq 0, \quad i = 1, 2, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

где $\overset{i}{F}_m(s, \xi)$ и $\overset{i}{G}_m(s, \xi)$ линейно выражаются через предыдущие $\overset{i}{Z}_k, \overset{i}{P}_k$ и их производные и полиномиально зависят от ξ_i и гладко от s_i , а функция

$$a(x) = \overset{i}{a}(s_i, \varepsilon \xi_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \xi_i^m \overset{i}{a}_m(s_i)$$

разложена в ряд по степеням малого параметра ε в окрестности границы Γ_i ($i = 1, 2$).

Подстановка соответствующих рядов в граничные условия приводит к следующим системам:

$$\begin{cases} \lambda_0 \overset{1}{P}_{-1}(s_1, 0) = 0, \\ -\frac{\partial \overset{1}{Z}_{-1}}{\partial \xi_1}(s_1, 0) + \lambda_0(\overset{1}{P}_0(s_1, 0) + \overset{1}{p}_0(s_1, 0)) + \lambda_1 \overset{1}{P}_{-1}(s_1, 0) = \overset{1}{g}(s_1), \\ \dots \\ -\frac{\partial \overset{1}{Z}_m}{\partial \xi_1}(s_1, 0) + \lambda_0 \overset{1}{P}_m(s_1, 0) + \lambda_{m+2} \overset{1}{P}_{-1}(s_1, 0) = \overset{1}{g}_{m,1,1}(s_1), \quad m \geq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \overset{2}{Z}_{-1}}{\partial \xi_2}(s_2, 0) = 0, & -\frac{\partial \overset{i}{P}_{-1}}{\partial \xi_i}(s_i, 0) = 0, \\ \dots \\ -\frac{\partial \overset{2}{Z}_m}{\partial \xi_2}(s_2, 0) = \overset{2}{g}_{m,1,2}, & -\frac{\partial \overset{i}{P}_m}{\partial \xi_i}(s_i, 0) = \overset{2}{g}_{m,2,i}, \end{cases} \quad (4.7)$$

где $\overset{1}{g}$ есть $g(\cdot)$ в новых координатах, а функции $\overset{i}{g}_{m,1,2}$ определяются внешним разложением, $\overset{i}{Z}_k$, $\overset{i}{P}_k$ и λ_k при $k < m$, при этом $\overset{i}{Z}_m$ и $\overset{i}{P}_m$ должны экспоненциально убывать при $\xi_i \rightarrow +\infty$ ($i = 1, 2$).

Дополнительное условие (2.2) при $r = 1$ в случае (3.5) имеет вид (4.4), а в случае (3.5) получается из асимптотического равенства

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_m \right)^2 \cdot \left\langle \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m (\overset{1}{P}_m + \overset{1}{p}_m), \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m (\overset{1}{P}_m + \overset{1}{p}_m) \right\rangle_1 = 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

где $\overset{1}{p}_{2k}$ — это p_{2k} в координатах многообразия Γ_1 , а $\overset{1}{p}_{2k+1} \equiv 0$.

В силу (4.5) и (4.7) все $\overset{2}{Z}_m$ и $\overset{2}{P}_m$ находятся однозначно. В частности, $\overset{2}{Z}_{-1} \equiv 0 = \overset{2}{P}_{-1}$.

Рассмотрим подробнее $\overset{1}{Z}_m$, $\overset{1}{P}_m$ и λ_0 .

Если $\lambda_0 \neq 0$, в частности в случае (3.3), то из (4.6) получим $\overset{1}{P}_{-1}(s_1, 0) \equiv 0$, а из (4.7) $-\frac{\partial \overset{1}{P}_{-1}}{\partial \xi_1}(s_1, 0) \equiv 0$, что в силу равенств из первой строки в (4.5) дает $\overset{1}{Z}_{-1} \equiv 0 = \overset{1}{P}_{-1}$. Тогда из второго равенства в (4.6) получим, что

$$\lambda_0(\overset{1}{P}_0(s_1, 0) + \overset{1}{p}_0(s_1, 0)) = \overset{1}{g}(s_1). \quad (4.9)$$

В случае (4.4) из (4.6) однозначно находятся $\overset{1}{P}_m(s_1, 0)$, что вместе с известными величинами $\frac{\partial \overset{1}{P}_m}{\partial \xi_1}(s_1, 0)$ дает однозначную разрешимость системы (4.5)–(4.7) для $\overset{1}{Z}_m(s_1, \xi_1)$ и $\overset{1}{P}_m(s_1, \xi_1)$. Таким образом, все коэффициенты рядов (4.3) однозначно находятся и в силу теоремы 2 ряды

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_{2k}(x) + \sum_{i=1}^2 \eta_i(s_i, \tau_i) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \overset{i}{Z}_m(s_i, \tau_i/\varepsilon), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_{2k}(x) + \sum_{i=1}^2 \eta_i(s_i, \tau_i) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \overset{i}{P}_m(s_i, \tau_i/\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.10)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ суть асимптотические разложения компонент $\{z_{\varepsilon, \nu}, p_{\varepsilon, \nu}\}$ решения задачи (2.10) с $\lambda = \nu$, $f_1 = f$, $f_2 = -z_d$, $g_{1,1} = g$ и $g_{j,i} = 0$ для остальных пар j, i .

Здесь $\eta_i(s_i, \tau_i)$ — срезающие функции пограничных слоев, т. е. бесконечно дифференцируемые функции, равные 1 в некоторой окрестности границ Γ_i , соответственно, и равные 0 вне чуть больших окрестностей границ Γ_i . В частности,

$$\nu \|\| \overset{1}{p}_{\varepsilon, \nu}(\cdot, 0) \|\|_1 \longrightarrow \nu \|\| (\overset{1}{P}_0(s_1, 0) + \overset{1}{p}_0(s_1, 0)) \|\| \stackrel{(4.9)}{=} \|\| \overset{1}{g} \|\|_1, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Таким образом, при выполнении неравенства

$$\|\| \overset{1}{g} \|\|_1 < 1 \quad (4.12)$$

в силу (4.12) и утверждения (см. разд. 3) при всех малых $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение (3.3), а ряды (4.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ дают асимптотическое разложение решения задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$. Тем самым доказана теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (1.4) и (4.12). Тогда ряды (4.10) с коэффициентами, однозначно определенными из систем (4.2), (4.6), (4.7) и (4.4), при $\varepsilon \rightarrow 0$ суть асимптотические разложения компонент решения задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$. \square

Пусть теперь выполнено неравенство

$$\|\| \overset{1}{g} \|\|_1 > 1. \quad (4.13)$$

Тогда в силу (4.11) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо следующее неравенство: $\nu \|\| \overset{1}{p}_{\varepsilon, \nu}(\cdot, 0) \|\|_1 > 1$, и по утверждению (см. разд. 3) реализуется случай (3.5).

Покажем, что $\lambda_0 = 0$ в случае (4.13).

Иначе в силу тождеств $\overset{1}{P}_{-1}(s_1, 0) \equiv 0 - \frac{\partial \overset{1}{P}_{-1}}{\partial \xi_1}(s_1, 0)$ получим

$$1 \stackrel{(4.8)}{=} \lambda_0 \|\| (\overset{1}{P}_0(s_1, 0) + \overset{1}{p}_0(s_1, 0)) \|\|_1 \stackrel{(4.9)}{=} \|\| \overset{1}{g} \|\|_1,$$

что противоречит (4.13).

Итак, $\lambda_0 = 0$ в случае (4.13), а соотношение (4.8) принимает вид, аналогичный соотношениям (3.6) из [2]:

$$\begin{cases} \lambda_1 \|\| \overset{1}{P}_{-1}(s, 0) \|\|_1 = 1, \\ \lambda_m + \frac{\lambda_1}{\|\| \overset{1}{P}_{-1}(s_1, 0) \|\|_1^2} \langle \overset{1}{P}_{m-2}(s, 0), \overset{1}{P}_{-1}(s_1, 0) \rangle_1 = q_m, \quad m > 1, \end{cases} \quad (4.14)$$

где константы q_m определяются внешним разложением, предыдущими $\overset{1}{Z}_k, \overset{1}{P}_k$ и λ_k при помощи операций сложения, умножения и взятия скалярного произведения в пространстве $L_2(\Gamma_1)$.

Алгоритм нахождения $\overset{1}{Z}_k, \overset{1}{P}_k$ и λ_k для рассматриваемой задачи в случае (3.5) совпадает с алгоритмом из [2] с заменой Γ на Γ_1 . Тем самым справедлива теорема

Теорема 6. Пусть выполнены условия (1.4) и (4.13). Тогда ряды (4.10) с коэффициентами, однозначно определенными из систем (4.2), (4.6), (4.7) и (4.14), при $\varepsilon \rightarrow 0$ суть асимптотические разложения компонент решения задачи (2.3), (2.2) при $r = 1$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления в ограниченной области // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 75–82.
3. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
4. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
5. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. 1992. № 2. С. 70–74. (Математика, естествознание, технические науки.)
6. **Капустян В.Е.** Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением // Докл. АН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
7. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
8. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87–100.
9. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа М.: Наука, 1965. 520 с.
10. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
11. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.
12. **Ильин А.М.** Пограничный слой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 34. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР.)

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 16.05.14

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО СТАБИЛЬНОГО МОСТА В ИГРАХ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ НА ПЛОСКОСТИ¹

Л. В. Камнева, В. С. Пацко

Для антагонистических дифференциальных игр с динамикой простых движений, фиксированным моментом окончания, геометрическими ограничениями на управления первого и второго игроков и выпуклым терминальным множеством известно, что множество разрешимости (максимальный стабильный мост) может быть построено при помощи оператора программного поглощения. При этом в попятной по времени процедуре конструирования t -сечений множества разрешимости не требуется введения дополнительных моментов разбиения. В статье подобное свойство устанавливается для игр с простыми движениями на плоскости при многоугольном терминальном множестве (не обязательно выпуклом) и многоугольными ограничениями на управления игроков. Используемый оператор в частном случае выпуклого терминального множества совпадает с оператором программного поглощения.

Ключевые слова: дифференциальные игры с простыми движениями на плоскости, множество разрешимости, попятная процедура

L. V. Kamneva, V. S. Patsko. Stable bridge construction in games with simple motions in the plane.

It is known that the solvability set (the maximal stable bridge) in a zero-sum differential game with simple motions, fixed terminal time, geometric constraints on the controls of the first and second players, and convex terminal set can be constructed by means of a program absorption operator. In this case, a backward procedure for the construction of t -sections of the solvability set does not need any additional partition times. We establish the same property for a game with simple motions, polygonal terminal set (which is generally nonconvex), and polygonal constraints on the players's controls in the plane. In the particular case of a convex terminal set, the operator used in the article coincides with the program absorption operator.

Keywords: differential games with simple motions in the plane, solvability set, backward procedure.

Введение

При численном решении антагонистических дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания часто используется попятная по времени конструкция построения множеств уровня (множеств Лебега) функции цены. Как правило, на каждом шаге $[t_{j-1}, t_j]$, $t_{j-1} < t_j$, попятной процедуры динамика игры локально или глобально во всем фазовом пространстве подменяется динамикой вида $\dot{x} = u + v$, $u \in \mathcal{P}$, $v \in \mathcal{Q}$, где x — фазовый вектор; u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков; \mathcal{P} , \mathcal{Q} — выпуклые компакты. Такая динамика называется динамикой простых движений [1]. Если размерность x равна 2 (т. е. исходная или эквивалентная ей игра происходит на плоскости), то при глобальной подмене множество уровня $W_c(t_j)$, соответствующее значению c функции цены в момент t_j , аппроксимируется многоугольником $W_c(t_j)$, компакты \mathcal{P} , \mathcal{Q} — выпуклыми многоугольниками P , Q . В результате действия попятной процедуры в момент t_{j-1} получаем многоугольник $W_c(t_{j-1})$, приближающий “истинное” множество $W_c(t_{j-1})$ уровня функции цены.

Переход от $W_c(t_j)$ к $W_c(t_{j-1})$ часто осуществляется при помощи оператора “программного поглощения” [3, с. 122]. Если множество $W_c(t_j)$ является выпуклым, то множество $W_c(t_{j-1})$, получаемое в этом случае, совпадает с точным решением дифференциальной игры перевода на множество $W_c(t_j)$ для динамики простых движений. Если выпуклым является дополнение $W'_c(t_j) = \mathbb{R}^2 \setminus W_c(t_j)$, то меняем роли игроков в записи оператора программного поглощения и

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УРО РАН (проект 12-П-1-1012) и РФФИ (проект 12-01-00537).

применяем его к множеству $W'_c(t_j)$. Таким образом, в выпуклом случае существует оператор (а именно оператор программного поглощения), который позволяет получить точное решение аппроксимирующей задачи без введения дополнительных точек разбиения промежутка $[t_{j-1}, t_j]$.

Естественным является вопрос о существовании оператора с аналогичным свойством, который дает точное решение $W_c(t_{j-1})$ на основе $W_c(t_j)$ в случае, когда множество $W_c(t_j)$ или его дополнение не являются выпуклыми.

Этому вопросу посвящена статья. Показывается, что в случае динамики простых движений при произвольном многоугольном множестве $M \subset \mathbb{R}^2$, взятом в момент ϑ , произвольных выпуклых многоугольных ограничениях P, Q на управления первого и второго игроков существует момент времени $t_* < \vartheta$ такой, что построение множества $W_c(t)$ при любом $t \in [t_*, \vartheta]$ может быть осуществлено точно без дополнительного дробления промежутка $[t, \vartheta]$ на более мелкие части и использования их в качестве элементов понятной процедуры.

Предлагаемый в статье оператор не совпадает, вообще говоря, с оператором программного поглощения, но использует его в качестве “фрагмента” в более сложной конструкции.

1. Дифференциальная игра с простыми движениями

Рассмотрим на плоскости управляемую систему с простыми движениями [1]:

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \vartheta > 0. \quad (1.1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, каждое из множеств P и Q — выпуклый замкнутый многоугольник или отрезок. (Многоугольником будем называть ограниченное замкнутое множество, границей которого является ломаная без самопересечений и с конечным числом вершин.)

Пусть задано множество M , являющееся многоугольником. Дифференциальная игра образована задачей M -сближения для первого игрока и задачей M' -сближения для второго игрока, $M' = \overline{\mathbb{R}^2} \setminus M$.

Постановка задачи M -сближения для первого игрока изложена в [2, § 13.1, с. 150–152] и состоит в следующем. Из начальной позиции (t_0, x_0) первый игрок стремится гарантировать выполнение условия $x(\vartheta) \in M$. Предполагается, что игрок знает текущую позицию $(t, x(t))$ и формирует управление $u(t) \in P$ по принципу обратной связи. Для решения задачи M -сближения используется понятие u -стабильного моста.

Мнозначное отображение $[0, \vartheta] \ni t \mapsto W(t) \subset \mathbb{R}^2$ определяет u -стабильный мост (график отображения) $W = \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in W(t)\}$ в задаче M -сближения, если $W(\vartheta) \subset M$, множество W замкнуто в $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ и при любом $v \in Q$ множество W слабо инвариантно относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in P + v. \quad (1.2)$$

Условие слабой инвариантности означает, что для любой точки $(t_0, x_0) \in W$ существует движение $x(\cdot) : [t_0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое удовлетворяет дифференциальному включению (1.2), начальному условию $x(t_0) = x_0$ и условию выживаемости: $x(t) \in W(t)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$. В теории дифференциальных игр это свойство (в эквивалентной формулировке) называется условием u -стабильности.

Аналогично формулируется задача M' -сближения для второго игрока и вводится понятие v -стабильного моста в задаче M' -сближения.

Первоначальные (эквивалентные) понятия стабильных мостов были введены в [3, с. 52–54; 4, с. 53, 58].

Символом W_0 обозначим максимальный (по включению) u -стабильный мост в задаче M -сближения.

Известно [3, § 16], что множество W является максимальным u -стабильным мостом в задаче M -сближения тогда и только тогда, когда W есть u -стабильный мост в задаче M -сближения и множество $W' = \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus W(t)}\}$ есть v -стабильный мост в задаче M' -сближения. Стало быть, построив максимальный u -стабильный мост W_0 , получаем как решение задачи M -сближения, так и решение задачи M' -сближения.

Справедливо следующее свойство. Предположим, что для любого $t \in [t_1, t_2]$ сечение $W_0(t)$ максимального стабильного моста W_0 является многоугольником. Тогда многозначное отображение $[t_1, t_2] \ni t \rightarrow W_0(t)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Цель работы — исследование возможности построения максимального стабильного моста на некотором промежутке $[t_*, \vartheta]$ при помощи оператора однократного действия, сопоставляющего множеству $M = W_0(\vartheta)$ и моменту $t \in [t_*, \vartheta)$ множество $W_0(t)$ и не требующего разбиения промежутка $[t, \vartheta]$ на дополнительные более мелкие части.

2. Спирали на плоскости, полупроницаемые трубки и поверхности

2.1. Спиральные ломаные на плоскости

Ломаной линией (или просто *ломаной*) $\gamma = a_0 a_1 \dots a_{n_\gamma}$ на плоскости называется объединение конечного числа отрезков $[a_i, a_{i+1}]$, $i = \overline{0, n_\gamma - 1}$, $a_i \neq a_{i+1}$, в котором конец каждого отрезка (кроме, быть может, последнего) является началом следующего отрезка, причем отрезки, имеющие общий конец, не лежат на одной прямой. Один отрезок также считаем ломаной. Точки $a_0, a_1, \dots, a_{n_\gamma}$ называются *вершинами* ломаной; отрезки $[a_i, a_{i+1}]$, $i = \overline{0, n_\gamma - 1}$, — *звенья* ломаной; отрезки, имеющие общую вершину, — *смежные звенья* ломаной. Ломаная γ называется *замкнутой*, если конец последнего звена ломаной совпадает с началом первого звена, т. е. $a_{n_\gamma} = a_0$.

Обычно ломаную γ называют *выпуклой*, если она лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей звено (в этом случае замкнутая выпуклая ломаная ограничивает выпуклый многоугольник). Границу невыпуклого многоугольника будем представлять как объединение незамкнутых ломаных нескольких типов. Для этого обобщим понятие незамкнутой выпуклой ломаной.

О п р е д е л е н и е 1. *Углом ломаной γ в вершине a_i , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, называется ориентированный (с учетом знака) угол меньший π , образованный лучами с направляющими векторами $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$, $\overrightarrow{a_i a_{i-1}}$ и вершиной в точке a_i . *Смежным углом ломаной γ в вершине a_i , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, называется ориентированный угол, образованный лучами с направляющими векторами $\overrightarrow{a_{i-1} a_i}$, $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ и вершиной в точке a_i . [Угол называется положительным (отрицательным), если переход от первого направляющего вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки (по часовой стрелке). Угол ломаной в вершине a_i , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, и соответствующий смежный угол в сумме образуют угол величиной $\pm\pi$.]**

О п р е д е л е н и е 2. Незамкнутая ломаная без самопересечений называется *выпуклой*, если все смежные углы в вершинах этой ломаной имеют один и тот же знак.

О п р е д е л е н и е 3. *Одинарной левой (правой) спиралью* называется такая незамкнутая выпуклая ломаная без самопересечений, что все смежные углы в вершинах этой ломаной положительны (отрицательны) и ее первое звено $[a_0, a_1]$ принадлежит границе выпуклой оболочки ломаной.

Каждому звену $[a_i, a_{i+1}]$, $i = \overline{0, n_\gamma - 1}$, одинарной спирали γ припишем вектор единичной нормали, направление которого получается поворотом вектора $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ на угол $-\pi/2$ ($+\pi/2$) для левой (правой) спирали. Заметим, что нормали к звеньям, лежащим на границе выпуклой оболочки ломаной, направлены вовне выпуклой оболочки (рис. 1, (а), (б)). “Внешнюю” крайнюю вершину одинарной спирали γ обозначим через a_γ , “внутреннюю” — через b_γ .

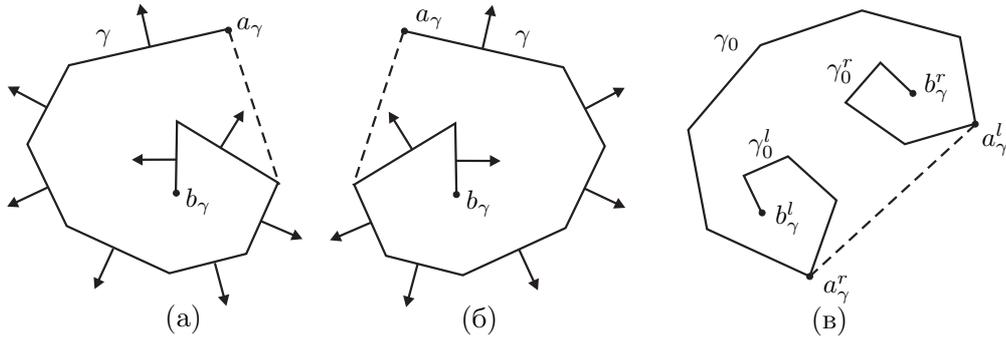


Рис. 1. Одинарные левая (а) и правая (б) спирали; двойная спираль (в).

О п р е д е л е н и е 4. Ломаная γ называется *двойной спиралью*, если справедливо ее представление в виде объединения $\gamma = \gamma_0^l \cup \gamma_0 \cup \gamma_0^r$, где $\gamma_0^l, \gamma_0, \gamma_0^r$ — незамкнутые ломаные, $\gamma_0 = \gamma \cap \partial(\text{co } \gamma)$, $\gamma_0^l \cap \gamma_0^r = \emptyset$, $\gamma_0 \cup \gamma_0^l = \gamma^l$ — левая спираль, $\gamma_0 \cup \gamma_0^r = \gamma^r$ — правая спираль. Крайние вершины спирали γ^l обозначим через a_γ^l, b_γ^l ; крайние вершины спирали γ^r — через a_γ^r, b_γ^r (рис. 1, (в)).

Изменяя нумерацию вершин, любую незамкнутую выпуклую ломаную можно рассматривать либо как одинарную (правую или левую) спираль, либо как двойную спираль.

2.2. Полупроницаемая трубка

Пусть $O(z, \varepsilon)$ — открытый круг в \mathbb{R}^2 радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке z .

При $\varepsilon > 0$ определим такое значение $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $z \in \mathbb{R}^2$ любая траектория системы (1.1) с начальной точкой в множестве $O(z, \varepsilon/2)$ не покидает множества $O(z, \varepsilon)$ на отрезке времени $[0, \Delta(\varepsilon)]$.

Пусть $0 \leq t_1 < t_2 \leq \vartheta$ и задано непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение $[t_1, t_2] \ni t \mapsto W(t) \subset \mathbb{R}^2$, такое что $W(t)$ — многоугольник для всех $t \in [t_1, t_2]$. Отображение $W(\cdot)$ определяет множество (график) $W = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in W(t)\}$. На множестве W выделим боковую границу

$$\Gamma = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in \partial W(t)\}.$$

Множество Γ будем называть *трубкой* на отрезке $[t_1, t_2]$. Пусть $\Gamma(t) = \partial W(t)$ — сечение трубки Γ в момент t . Определим ε -окрестность трубки Γ :

$$O_\varepsilon(\Gamma) = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in O(z, \varepsilon), z \in \Gamma(t)\}.$$

О п р е д е л е н и е 5. Трубка Γ называется *полупроницаемой* на отрезке $[t_1, t_2]$, если найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие открытые множества $O_\varepsilon^+(\Gamma)$ и $O_\varepsilon^-(\Gamma)$, что

$$O_\varepsilon(\Gamma) = O_\varepsilon^+(\Gamma) \cup \Gamma \cup O_\varepsilon^-(\Gamma), \quad O_\varepsilon^+(\Gamma) \cap O_\varepsilon^-(\Gamma) = \emptyset$$

и справедливы следующие свойства:

1) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\Gamma) \cap (O_\varepsilon^+(\Gamma) \cup \Gamma)$ и любого $v \in Q$ существует такое измеримое программное управление $u(t) \in P$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u(t) + v$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^+(\Gamma) \cup \Gamma$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$;

2) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\Gamma) \cap (O_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma)$ и любого $u \in P$ существует такое измеримое программное управление $v(t) \in Q$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u + v(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$.

Учитывая определение, будем говорить о стороне (+) и стороне (−) полупроницаемой трубки. Выделим два типа полупроницаемых трубок: если сторона (+) внутренняя, а сторона (−) внешняя, то полупроницаемая трубка имеет тип \pm ; если наоборот, то тип \mp .

Получаем, что если боковая поверхность $\Gamma_0 = \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in \partial W_0(t)\}$ максимального u -стабильного моста W_0 является трубкой, то Γ_0 — полупроницаемая трубка типа \pm . Справедливо и обратное утверждение:

Лемма 1. *Предположим, что Γ — полупроницаемая трубка типа \pm на некотором отрезке $[t_1, \vartheta]$, $t_1 \in [0, \vartheta]$, и $\Gamma(\vartheta) = \partial M$. Тогда Γ — боковая поверхность максимального u -стабильного моста W_0 на отрезке $[t_1, \vartheta]$ в задаче M -сближения.*

2.3. Полупроницаемые поверхности

Пусть $0 \leq t_1 < t_2 \leq \vartheta$ и задано непрерывное (по Хаусдорфу) многозначное отображение $[t_1, t_2] \ni t \mapsto \sigma(t) \subset \mathbb{R}^2$, такое что для всех $t \in [t_1, t_2]$ множество $\sigma(t)$ — незамкнутая ломаная без самопересечений. Дополнительно предположим, что крайние вершины ломаных $\sigma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, дают две непересекающиеся непрерывные траектории. Отображение $\sigma(\cdot)$ определяет множество (график) $\sigma = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in \sigma(t)\}$, которое будем называть *поверхностью*. Обозначив крайние траектории через $\hat{\xi}(\cdot)$ и $\check{\xi}(\cdot)$, говорим о поверхности σ с краями $\hat{\xi}(\cdot)$ и $\check{\xi}(\cdot)$.

Если $\sigma(t)$ — спираль для всех $t \in [t_1, t_2]$, то поверхность σ будем называть *спиральной*.

Для $\varepsilon > 0$ определим ε -окрестность поверхности σ : $O_\varepsilon(\sigma) = \{(t, x) : t \in [t_1, t_2], x \in O(z, \varepsilon), z \in \sigma(t)\}$.

О п р е д е л е н и е 6. Поверхность σ называется *полупроницаемой* на отрезке $[t_1, t_2]$, если найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие открытые множества $O_\varepsilon^+(\sigma)$, $O_\varepsilon^-(\sigma)$ и поверхность $[\sigma]_\varepsilon$, что

$$O_\varepsilon(\sigma) = O_\varepsilon^+(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon \cup O_\varepsilon^-(\sigma), \quad O_\varepsilon^+(\sigma) \cap O_\varepsilon^-(\sigma) = \emptyset, \quad \sigma \subset [\sigma]_\varepsilon, \quad (2.1)$$

и справедливы следующие свойства:

1) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\sigma) \cap (O_\varepsilon^+(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon)$ и любого $v \in Q$ существует такое измеримое программное управление $u(t) \in P$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u(t) + v$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^+ \cup [\sigma]_\varepsilon$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$;

2) для любой точки $(t_0, x_0) \in O_{\varepsilon/2}(\sigma) \cap (O_\varepsilon^-(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon)$ и любого $u \in P$ существует такое измеримое программное управление $v(t) \in Q$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u + v(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ верно включение $(t, x(t)) \in O_\varepsilon^- \cup [\sigma]_\varepsilon$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta(\varepsilon)] \cap [t_1, t_2]$.

Учитывая определение, будем говорить о стороне (+) и стороне (−) полупроницаемой поверхности.

Выделим *два типа спиральных поверхностей*: если нормали спирали направлены от стороны (+) в сторону (−), то спиральную поверхность называем поверхностью типа \pm ; если от стороны (−) в сторону (+), то — поверхностью типа \mp .

Определим $S^+(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma, [t_1, t_2], \hat{\xi}(\cdot), \check{\xi}(\cdot))$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие значению $t \in [t_1, t_2]$ ломаную $S^+(t)$, которая есть часть сечения $\Gamma(t)$ трубки Γ , получаемая при обходе $\Gamma(t)$ от точки $\hat{\xi}(t)$ до точки $\check{\xi}(t)$ в направлении *против часовой стрелки*. Аналогично определяем многозначное отображение $S^-(\cdot) = S^-(\cdot; \Gamma, [t_1, t_2], \hat{\xi}(\cdot), \check{\xi}(\cdot))$, но берем направление обхода от точки $\hat{\xi}(t)$ до точки $\check{\xi}(t)$ в направлении *по часовой стрелке*.

Непосредственно из определений полупроницаемой трубки и полупроницаемой поверхности получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть Γ — полупроницаемая трубка на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда для любых непрерывных непересекающихся траекторий $\hat{\xi}(t)$, $\check{\xi}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, идущих по трубке Γ , отображение $\sigma(\cdot) = S^+(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma, [t_1, t_2], \hat{\xi}(\cdot), \check{\xi}(\cdot))$ задает полупроницаемую поверхность σ с краями $\hat{\xi}(\cdot)$, $\check{\xi}(\cdot)$. Аналогичное свойство справедливо для отображения $S^-(\cdot)$.*

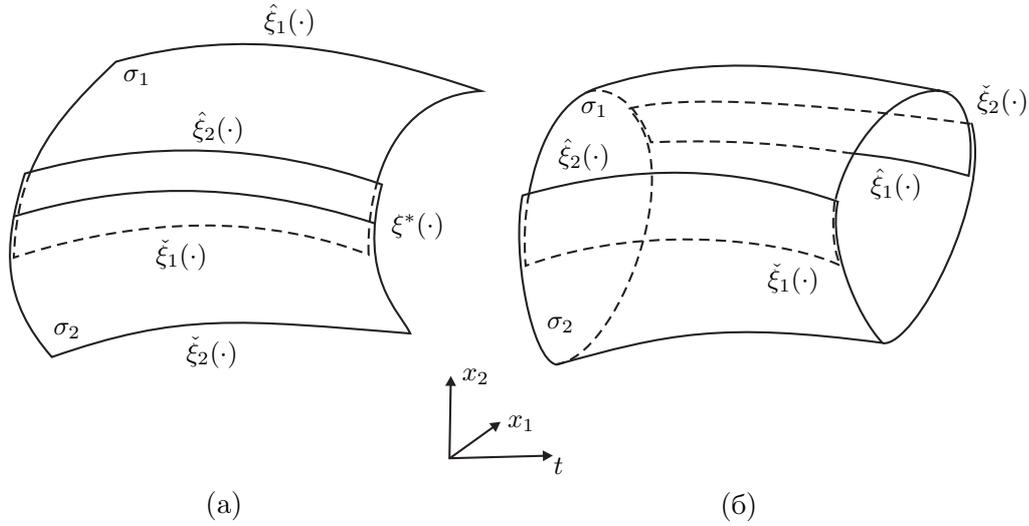


Рис. 2. Склейка полупроницаемых поверхностей в полупроницаемую поверхность (а); в полупроницаемую трубку (б).

Сформулируем и докажем лемму о склейке полупроницаемых поверхностей.

Лемма 3. Пусть

- а) σ_i — полупроницаемая поверхность с краями $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, $i = 1, 2$;
 - б) $\sigma_1 \cap \sigma_2$ — поверхность с краями $\hat{\xi}_2(\cdot)$, $\check{\xi}_1(\cdot)$ на отрезке $[t_1, t_2]$;
 - в) $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ — поверхность с краями $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$;
 - г) сторона (+) (сторона (-)) поверхности σ_1 переходит в сторону (+) (сторону (-)) поверхности σ_2 через пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$, образуя сторону (+) (сторону (-)) поверхности σ .
- Тогда σ — полупроницаемая поверхность с соответствующими сторонами (+) и (-).

Доказательство. Для $t \in [t_1, t_2]$ определим $\xi^*(t)$ как точку, делящую ломаную $\sigma_1(t) \cap \sigma_2(t)$ на две ломаные равной длины. “Средняя” траектория $\xi^*(\cdot)$ является непрерывной линией и разделяет поверхность σ на две части σ_1^* и σ_2^* с краями $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\xi^*(\cdot)$ и $\xi^*(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$ соответственно; условное изображение показано на рис. 2, (а).

Пусть h_0 — минимальное на отрезке $[t_1, t_2]$ расстояние между точками $\hat{\xi}_2(t)$, $\check{\xi}_1(t)$ (крайними вершинами ломаной $\sigma_1(t) \cap \sigma_2(t)$), ε_i — число, определяемое в формуле (2.1) свойством полупроницаемости поверхности σ_i , $i = 1, 2$. Выберем $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, h_0/2\})$. Имеем

$$O(\xi^*(t), \varepsilon) \cap \sigma_i(t) = O(\xi^*(t), \varepsilon) \cap \sigma(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно, $O_\varepsilon(\sigma) = O_\varepsilon(\sigma_1^*) \cup O_\varepsilon(\sigma_2^*)$.

Поскольку $O_\varepsilon(\sigma_i^*) \subset O_{\varepsilon_i}(\sigma_i)$, $\sigma_i^* \subset \sigma_i$, то

$$O_\varepsilon(\sigma_i^*) = O_\varepsilon^+(\sigma_i^*) \cup [\sigma_i^*]_\varepsilon \cup O_\varepsilon^-(\sigma_i^*),$$

где

$$O_\varepsilon^\pm(\sigma_i^*) := O_{\varepsilon_i}^\pm(\sigma_i) \cap O_\varepsilon(\sigma_i^*), \quad [\sigma_i^*]_\varepsilon := [\sigma_i]_{\varepsilon_i} \cap O_\varepsilon(\sigma_i^*), \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Положим

$$O_\varepsilon^\pm(\sigma) := O_\varepsilon^\pm(\sigma_1^*) \cup O_\varepsilon^\pm(\sigma_2^*), \quad [\sigma]_\varepsilon := [\sigma_1^*]_\varepsilon \cup [\sigma_2^*]_\varepsilon.$$

Множества $O_\varepsilon^\pm(\sigma)$ открытые, $O_\varepsilon^+(\sigma) \cap O_\varepsilon^-(\sigma) = \emptyset$, $\sigma \subset [\sigma]_\varepsilon$.

Таким образом, получаем представление

$$O_\varepsilon(\sigma) = O_\varepsilon^+(\sigma) \cup [\sigma]_\varepsilon \cup O_\varepsilon^-(\sigma).$$

Свойства 1), 2) из определения полупроницаемой поверхности выполнены в силу определений (2.2).

Аналогично доказывается следующая лемма, см. рис. 2, (б).

Лемма 4. Пусть

- а) σ_i — полупроницаемая поверхность с краями $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, $i = 1, 2$;
 - б) пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$ состоит из двух непересекающихся поверхностей с краями $\hat{\xi}_2(\cdot)$, $\check{\xi}_1(\cdot)$ и $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$ соответственно;
 - в) $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ — трубка;
 - г) сторона (+) (сторона (-)) поверхности σ_1 переходит в сторону (+) (сторону (-)) поверхности σ_2 через пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$, образуя сторону (+) (сторону (-)) трубки σ .
- Тогда σ — полупроницаемая трубка с соответствующими сторонами (+) и (-).

3. Оператор программного поглощения и его действие на выпуклые многоугольники

Будем набирать полупроницаемые поверхности, склеивая их из кусков, лежащих на границе максимальных стабильных мостов, построенных от выпуклых многоугольников. В связи с этим сформулируем несколько утверждений, используемых при анализе t -сечений таких мостов. Некоторые утверждения являются известными фактами выпуклого анализа.

Пусть $\Pi(\alpha, \nu) := \{x \in \mathbb{R}^2: \langle x, \nu \rangle \leq \alpha\}$ — полуплоскость, задаваемая числом $\alpha \in \mathbb{R}$ и единичным вектором $\nu \in \mathbb{R}^2$ — внешней нормалью к границе; $\mathcal{N}(A)$ — множество единичных внешних нормалей к сторонам выпуклого многоугольника A ; $\rho(\eta; A) = \sup\{\langle a, \eta \rangle: a \in A\}$ — значение опорной функции множества A на векторе η . Тогда $\Pi(\rho(\eta; A), \eta)$ — полуплоскость с внешней нормалью η , опорная к множеству A .

Для $\tau \in [0, \vartheta]$ определим оператор $A \rightarrow T_\tau(A)$ программного поглощения для множества $A \subset \mathbb{R}^2$:

$$T_\tau(A) := (A - \tau P) * \tau Q = \bigcap_{q \in Q} (A - \tau(P + q)).$$

Отметим следующие свойства оператора T_τ [5; 6]:

- 1) если $A \subset B$, то $T_\tau(A) \subset T_\tau(B)$ для всех $\tau > 0$;
- 2) имеет место вложение

$$T_\tau(A \cap B) \subset T_\tau(A) \cap T_\tau(B); \quad (3.1)$$

- 3) для полуплоскости $\Pi(\alpha, \nu)$ и $r \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$T_\tau(\Pi(\alpha, \nu) + r\nu) = T_\tau(\Pi(\alpha, \nu)) + r\nu;$$

- 4) если множество A выпукло, $\tau_1, \tau_2 > 0$, то $T_{\tau_1}(T_{\tau_2}(A)) = T_{\tau_1 + \tau_2}(A)$.

Лемма 5. Для $\tau \geq 0$ уравнение прямой $\partial T_\tau(\Pi(\alpha, \nu))$ на плоскости $x \in \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\langle x, \nu \rangle + \tau \langle p_* + q_*, \nu \rangle = \alpha,$$

где

$$p_* \in \text{Arg} \min_{p \in P} \langle p, \nu \rangle, \quad q_* \in \text{Arg} \max_{q \in Q} \langle q, \nu \rangle.$$

Кроме того,

$$T_\tau(\Pi(\alpha, \nu)) = \Pi(\alpha, \nu) - \tau(p_* + q_*).$$

Из леммы 5 следует, что множество $\{(\tau, x): \tau > 0, x \in \partial T_\tau(\Pi(\alpha, \nu))\}$ является полуплоскостью в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ переменных (τ, x) .

Лемма 6. Пусть A — выпуклый многоугольник, P — либо выпуклый многоугольник, либо невырожденный отрезок, $y \in \mathbb{R}^2$, $\tau > 0$ и $(y + \tau P) \cap A = \emptyset$. Тогда существует такое $\eta_* \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)$, что

$$\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) \cap (y + \tau P) = \emptyset.$$

Лемма 7. Пусть A — выпуклый многоугольник, каждое из множеств P и Q — либо выпуклый многоугольник, либо отрезок, $\tau > 0$. Тогда

$$T_\tau(A) = \bigcap \{T_\tau(\Pi(\rho(\eta, A), \eta)) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\}.$$

Доказательство. Поскольку A — выпуклый многоугольник, то справедливо представление

$$A = \bigcap \{\Pi(\rho(\eta, A), \eta) : \eta \in \mathcal{N}(A)\}. \quad (3.2)$$

Добавим в пересечение (3.2) полуплоскости с внешними нормальными из множества $\mathcal{N}(-P)$, опорные к A :

$$A = \bigcap \{\Pi(\rho(\eta, A), \eta) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\}.$$

Следовательно, по свойству (3.1)

$$T_\tau(A) \subset \bigcap \{T_\tau(\Pi(\rho(\eta, A), \eta)) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\} =: Y.$$

Докажем противоположное включение от противного. Предположим, что существует $y \in Y \setminus T_\tau(A)$. Поскольку $y \notin T_\tau(A)$, то найдется такое $\tilde{q} \in Q$, что $(y + \tau(P + \tilde{q})) \cap A = \emptyset$, т. е. для $z = y + \tau\tilde{q}$ имеем $(z + \tau P) \cap A = \emptyset$.

По лемме 6 найдется такое $\eta_* \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)$, что

$$\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) \cap (z + \tau P) = \emptyset. \quad (3.3)$$

В силу леммы 5 устанавливаем соотношение

$$y \in T_\tau(\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*)) = \Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) - \tau(p_* + q_*),$$

где

$$p_* \in \text{Arg} \min_{p \in P} \langle p, \eta_* \rangle, \quad q_* \in \text{Arg} \max_{q \in Q} \langle q, \eta_* \rangle.$$

Таким образом, $y + \tau(p_* + q_*) \in \Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*)$, т. е. $\langle y + \tau(p_* + q_*), \eta_* \rangle \leq \rho(\eta_*, A)$.

По определению q_* для любого $q \in Q$ выполнено неравенство $\langle q, \eta_* \rangle \leq \langle q_*, \eta_* \rangle$. Следовательно, $\langle y + \tau(p_* + \tilde{q}), \eta_* \rangle \leq \rho(\eta_*, A)$, откуда получаем $y + \tau\tilde{q} + \tau p_* \in \Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*)$. Поскольку $p_* \in P$, то

$$\Pi(\rho(\eta_*, A), \eta_*) \cap (y + \tau\tilde{q} + \tau P) \neq \emptyset.$$

Учитывая определение точки z , приходим к противоречию с (3.3).

Введем обозначение

$$\mathcal{R}_P(A) := \{\Pi(\rho(\eta; A), \eta) : \eta \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}(-P)\} \quad (3.4)$$

для расширенного набора полуплоскостей, опорных к множеству A .

Лемма 8. Пусть A, B — выпуклые многоугольники, $B \subset A$. Тогда

$$T_\tau(B) = T_\tau(A) \bigcap \left(\bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(B) \setminus \mathcal{R}_P(A)\} \right). \quad (3.5)$$

Доказательство. В силу леммы 7 верны формулы

$$T_\tau(A) = \bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(A)\}, \quad T_\tau(B) = \bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(B)\},$$

где наборы полуплоскостей $\mathcal{R}_P(A)$, $\mathcal{R}_P(B)$ определяются формулой (3.4). Отсюда с учетом включения $B \subset A$ получаем представление (3.5).

4. Построение полупроницаемых спиральных поверхностей

4.1. Спиральная система $\mathcal{A}^l(\gamma, P)$ выпуклых множеств для одинарной левой спирали

Пусть $\gamma = a_0 a_1 \dots a_{n_\gamma}$ — одинарная левая спираль. Обозначим через ν_i единичную нормаль к звену $[a_{i-1} a_i]$ спирали γ , $\mathcal{N}_\gamma = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n_\gamma}\}$. Напомним, что для левой спирали вектор нормали к звену $[a_{i-1} a_i]$ получается поворотом вектора $\overrightarrow{a_{i-1} a_i}$ на угол $(-\pi/2)$. Вектор ν_i при возрастании индекса вращается *против часовой стрелки* (для левой спирали).

Образуем новый набор нормалей \mathcal{N}_γ^P , дополнив набор \mathcal{N}_γ нормальями из множества $\mathcal{N}(-P)$ следующим образом. Перебирая все пары соседних нормалей ν_i и ν_{i+1} , $i = \overline{1, n_\gamma - 1}$, находим все векторы из набора $\mathcal{N}(-P)$, которые попадают в открытый конус, образованный векторами ν_i и ν_{i+1} , и упорядочиваем их *против часовой стрелки* (для левой спирали): $\eta_i^1, \eta_i^2, \dots, \eta_i^{\beta_i}$. Такое множество может быть пустым. Вставим полученные наборы векторов между соответствующими парами нормалей ν_i и ν_{i+1} и обозначим полученное множество через \mathcal{N}_γ^P :

$$\mathcal{N}_\gamma^P = \{\nu_1, \eta_1^1, \dots, \eta_1^{\beta_1}, \nu_2, \eta_2^1, \dots, \eta_2^{\beta_2}, \nu_3, \dots, \nu_{n_\gamma-1}, \eta_{n_\gamma-1}^1, \dots, \eta_{n_\gamma-1}^{\beta_{n_\gamma-1}}, \nu_{n_\gamma}\}.$$

Для каждого вектора $h \in \mathcal{N}_\gamma^P$ зададим полуплоскость $\Pi^\gamma(h)$:

$$\Pi^\gamma(h) = \{z \in \mathbb{R}^2: \langle z - a_i, h \rangle \leq 0\} \quad \text{при } h = \nu_i \text{ или } h = \eta_i^j, \quad j = \overline{1, \beta_i}.$$

Здесь подразумевается, что индекс i определяется по вектору h .

Введем единую нумерацию для обозначения элементов набора \mathcal{N}_γ^P : $\mathcal{N}_\gamma^P = \{h_1, \dots, h_m\}$. Поставим в соответствие спирали γ *спиральную систему*

$$\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n\}$$

вложенных выпуклых множеств A_i , $i = \overline{1, n}$, следующим образом. Пусть $A_1 := \text{co } \gamma$. Если $\gamma \subset \partial A_1$, то полагаем $n = 1$ и $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1\}$. В случае $\gamma \not\subset \partial A_1$ для величины $n_1 = \max\{i \in \overline{1, m}: A_1 \subset \Pi^\gamma(h_i)\}$ справедливо неравенство $n_1 < m$ (рис. 3). Рассмотрим вспомогательные множества

$$A_{n_1}^* = A_1, \quad A_j^* = A_{j-1}^* \cap \Pi^\gamma(h_j), \quad j = \overline{n_1 + 1, m}.$$

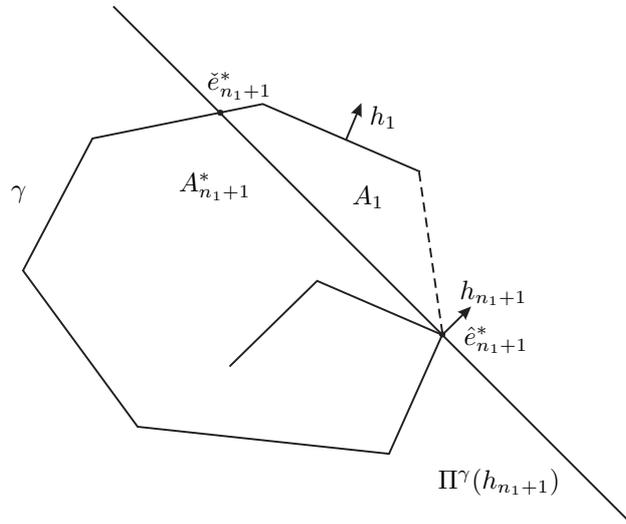


Рис. 3. Определение множества $A_{n_1+1}^*$ в случае $\gamma \not\subset \partial A_1$.

Для всех $j = \overline{n_1 + 1, m}$ граница $\partial\Pi^\gamma(h_j)$ полуплоскости $\Pi^\gamma(h_j)$ разбивает множество A_{j-1}^* на два непустых подмножества по отрезку $[\hat{e}_j^*, \check{e}_j^*] = \partial\Pi^\gamma(h_j) \cap A_{j-1}^*$. Обозначения для вершин отрезка выбраны так, что при движении от \hat{e}_j^* к \check{e}_j^* полуплоскость $\Pi^\gamma(h_j)$ остается *слева* (для левой спирали). Заметим, что

$$A_j^* = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^j \Pi^\gamma(h_i) \right), \quad j = \overline{n_1 + 1, m}.$$

Определим множество A_2 на основе множества A_1 . Введем обозначение

$$\Phi_2^j := \bigcap_{i=n_1+1}^j \Pi^\gamma(h_i) = \bigcap \{ \Pi : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_j^*) \setminus \mathcal{R}_P(A_1) \}, \quad j = \overline{n_1 + 1, m}.$$

Заметим, что множество $\Phi_2^{n_1+1}$ является полуплоскостью и, следовательно, не ограничено. Определим такой наибольший номер $n_2 \in \overline{n_1 + 1, m}$, что для всех $j = \overline{n_1 + 1, n_2}$ множество Φ_2^j не ограничено.

Положим

$$A_2 := A_{n_2}^* = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^{n_2} \Pi^\gamma(h_i) \right) = A_1 \cap \Phi_2^{n_2}, \quad \hat{e}_2(\vartheta) := \hat{e}_{n_1+1}^*, \quad \check{e}_2(\vartheta) := \check{e}_{n_2}^*.$$

Если $n_2 = m$, то $n = 2$ и $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2\}$.

В случае $n_2 < m$ определяем множество A_3 на основе множества A_2 . Опишем общий случай задания множества A_k на основе множества A_{k-1} , если $n_{k-1} < m$.

Пусть

$$\Phi_k^j := \bigcap_{i=n_{k-1}+1}^j \Pi^\gamma(h_i) = \bigcap \{ \Pi : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_j^*) \setminus \mathcal{R}_P(A_{k-1}) \}, \quad j = \overline{n_{k-1} + 1, m}. \quad (4.1)$$

Множество $\Phi_k^{n_{k-1}+1}$ – полуплоскость. Определим такой наибольший номер $n_k \in \overline{n_{k-1} + 1, m}$, что для всех $j = \overline{n_{k-1} + 1, n_k}$ множество Φ_k^j не ограничено.

Положим

$$A_k := A_{n_k}^* = A_{k-1} \cap \left(\bigcap_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \Pi^\gamma(h_i) \right) = A_{k-1} \cap \Phi_k^{n_k}, \quad \hat{e}_k(\vartheta) := \hat{e}_{n_{k-1}+1}^*, \quad \check{e}_k(\vartheta) := \check{e}_{n_k}^*.$$

В случае $n_k = m$ имеем $n = k$ и $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k\}$.

4.2. Построение полупроницаемой спиральной поверхности типа \pm для одинарной левой спирали

Для одинарной левой спирали γ определим спиральную систему $\mathcal{A}^l(\gamma, P) = \{A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n\}$. Рассмотрим невырожденный случай $n \geq 2$. Обозначим через $a_\gamma(\vartheta)$ и $b_\gamma(\vartheta)$ начальную и конечную точки спирали (закручивание из начальной точки внутрь *против часовой стрелки* (для левой спирали)).

Известно [5], что для задачи A_i -сближения ($i = \overline{1, n}$) максимальный u -стабильный мост W_i определяется формулой

$$W_i := \{(t, x) : t \in [0, \vartheta], x \in T_{\vartheta-t}(A_i; P, Q)\},$$

где

$$T_\tau(A; P, Q) := T_\tau(A) = (A - \tau P) * \tau Q, \quad \tau = \vartheta - t.$$

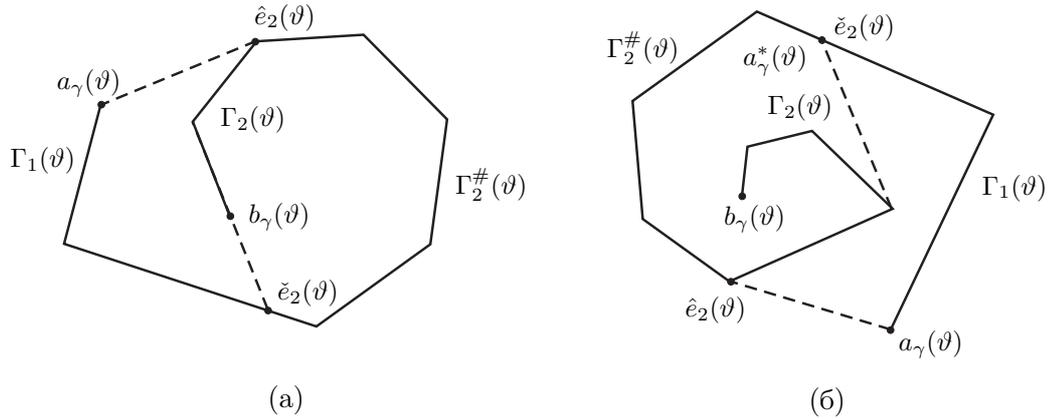


Рис. 4. Построение полупроницаемой спиральной поверхности: база (а) и шаг (б) индукции.

Боковые поверхности мостов W_i , $i = \overline{1, n}$, являются полупроницаемыми трубками. Используя их, опишем построение полупроницаемой спиральной поверхности σ типа \pm , для которой $\sigma(\vartheta) = \gamma$.

Зададим длину $\tau_* = \tau_*(\gamma)$ промежутка времени построения полупроницаемой поверхности σ условием $\text{int } T_\tau(A_n) \neq \emptyset$, $\tau \in (0, \tau_*]$. Поскольку A_n — невырожденный многоугольник (не точка и не отрезок), то такое $\tau_* > 0$ существует. Положим $t_* = t_*(\gamma) = \vartheta - \tau_*$.

Пусть Γ_i — боковая поверхность моста W_i на отрезке времени $[t_*, \vartheta]$, $\Gamma_i^\#(t) := \Gamma_i(t) \cap \Gamma_{i-1}(t)$, $i = \overline{2, n}$. Поверхности Γ_i , $i = \overline{1, n}$, являются полупроницаемыми трубками типа \pm .

В силу леммы 8 для $i = \overline{2, n}$, $t \in [t_*, \vartheta]$, $\tau = \vartheta - t$ справедливо представление

$$T_\tau(A_i) = T_\tau(A_{i-1}) \cap \left(\bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_i) \setminus \mathcal{R}_P(A_{i-1})\} \right).$$

Здесь набор полуплоскостей $\mathcal{R}_P(A_i)$ определяется формулой (3.4). Учитывая определение множества A_i на основе множества A_{i-1} и числа n_i , имеем

$$\Phi_i^{n_i} = \bigcap \{\Pi : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_i) \setminus \mathcal{R}_P(A_{i-1})\}.$$

Множество $\Phi_i^{n_i}$ задается формулой (4.1) и является неограниченным. Согласно лемме 5 образ $T_\tau(\Pi)$ полуплоскости Π является ее сдвигом на вектор $-\tau(p_* + q_*)$. Следовательно, пересечение

$$\bigcap \{T_\tau(\Pi) : \Pi \in \mathcal{R}_P(A_i) \setminus \mathcal{R}_P(A_{i-1})\}$$

полуплоскостей также не ограничено и, учитывая невырожденность множества A_i , получаем, что множество $\Gamma_i^\#(t)$ является ломаной (незамкнутой или замкнутой) и многозначное отображение $t \rightarrow \Gamma_i^\#(t)$ непрерывно.

Используя символы $\hat{e}_i(t)$, $\check{e}_i(t)$, обозначим края ломаной $\Gamma_i^\#(t)$ (если она незамкнута) так, чтобы при движении по $\Gamma_i^\#(t)$ из $\check{e}_i(t)$ в $\hat{e}_i(t)$ множество $W_i(t)$ оставалось слева, $i = \overline{2, n}$. Функции $\hat{e}_i(\cdot)$ и $\check{e}_i(\cdot)$ непрерывны. Вводимые обозначения поясняются на рис. 4 при $t = \vartheta$.

Зафиксируем некоторые непересекающиеся непрерывные траектории $a_\gamma(t)$, $b_\gamma(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, с конечными точками $a_\gamma(\vartheta)$, $b_\gamma(\vartheta)$, такие что траектория $a_\gamma(\cdot)$ идет по трубке Γ_1 , а траектория $b_\gamma(\cdot)$ — по трубке Γ_n . Мы не накладываем каких-либо условий геометрического характера, связанных с расположением кривых $a_\gamma(\cdot)$, $b_\gamma(\cdot)$ относительно поверхностей $\Gamma_i^\#$.

Переходим к построению (индукцией по n) полупроницаемой спиральной поверхности σ типа \pm (с краями $a_\gamma(\cdot)$, $b_\gamma(\cdot)$).

1) База индукции: рассмотрим случай $n = 2$ (рис. 4, (а)). Имеем две полупроницаемые трубки Γ_1 , Γ_2 .

1а) Предположим сначала, что $W_1(t) \neq W_2(t)$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$. В этом случае непересекающиеся траектории $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ (края поверхности $\Gamma_2^\#$) заданы на всем промежутке $[t_*, \vartheta]$.

Определим непересекающиеся траектории $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ на отрезке $[t_*, \vartheta]$, идущие по трубке Γ_i , $i = 1, 2$. Для $t \in [t_*, \vartheta]$ положим

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1(t) &= a_\gamma(t), & \check{\xi}_1(t) &= \begin{cases} \hat{e}_2(t), & \text{если } b_\gamma(t) \notin \Gamma_2^\#(t), \\ b_\gamma(t) & \text{иначе,} \end{cases} \\ \hat{\xi}_2(t) &= \begin{cases} \check{e}_2(t), & \text{если } a_\gamma(t) \notin \Gamma_2^\#(t), \\ a_\gamma(t) & \text{иначе,} \end{cases} & \check{\xi}_2(t) &= b_\gamma(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку траектории $a_\gamma(\cdot)$, $b_\gamma(\cdot)$, $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ непрерывны и $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ – края поверхности $\Gamma_2^\#$, то траектории $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ также будут непрерывны.

Пусть

$$\sigma_i(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma_i, [t_*, \vartheta], \hat{\xi}_i(\cdot), \check{\xi}_i(\cdot)), \quad i = 1, 2; \quad \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2.$$

Поверхности $\sigma_1 \subset \Gamma_1$ и $\sigma_2 \subset \Gamma_2$ полупроницаемы в силу полупроницаемости трубок Γ_1 , Γ_2 и леммы 2. Заметим, что $\sigma_1 \cap \sigma_2$ – полупроницаемая поверхность с краями $\hat{\xi}_2(\cdot)$ и $\check{\xi}_1(\cdot)$, а множество $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ – поверхность с краями $\hat{\xi}_1(\cdot)$, $\check{\xi}_2(\cdot)$.

Поскольку $W_2(t) \subset W_1(t)$ и Γ_1 , Γ_2 – полупроницаемые трубки типа \pm , то стороны (+) и (–) поверхностей σ_1 и σ_2 определяют стороны (+) и (–) поверхности σ . В силу леммы 3 поверхность σ является полупроницаемой поверхностью типа \pm с соответствующими сторонами (+) и (–).

1б) Рассмотрим оставшийся случай: найдется такое $\bar{t} \in [t_*, \vartheta)$, что $W_1(\bar{t}) = W_2(\bar{t})$. Заметим, что в этом случае $W_1(t) = W_2(t)$ при $t \in [t_*, \bar{t}]$.

Для $t \in (\bar{t}, \vartheta)$ заданы несовпадающие значения $\hat{e}_2(t)$, $\check{e}_2(t)$ – концы ломаной $\Gamma^\#(t)$. Поэтому значения $\hat{\xi}_i(t)$, $\check{\xi}_i(t)$, $i = 1, 2$, определяем по формулам (4.2).

При $t \in [t_*, \bar{t}]$ имеем $\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)$, поэтому полагаем $\hat{\xi}_1(t) = \hat{\xi}_2(t) = a_\gamma(t)$, $\check{\xi}_1(t) = \check{\xi}_2(t) = b_\gamma(t)$.

Докажем, что траектории $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, непрерывны на отрезке $[t_*, \vartheta]$. В силу определения функций $\hat{\xi}_i(\cdot)$, $\check{\xi}_i(\cdot)$ доказательство сводится к проверке непрерывности $\hat{\xi}_1(\cdot)$ и $\hat{\xi}_2(\cdot)$ в точке $t = \bar{t}$ справа.

Введем обозначение

$$a_* = \lim_{t \rightarrow \bar{t}+0} \hat{e}_2(t) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}+0} \check{e}_2(t).$$

Второе равенство не является тривиальным. Его доказательство опускаем. Имеем $a_* \in \Gamma_2(\bar{t}) = \Gamma_1(\bar{t})$.

Начнем с функции $\check{\xi}_1(\cdot)$. Предположим, что найдется последовательность $\{t_k\}$, для которой $t_k \rightarrow \bar{t}+0$, $\check{\xi}_1(t_k) = \hat{e}_2(t_k) \not\rightarrow b_\gamma(\bar{t})$. Тогда $b_\gamma(t_k) \in \Gamma_2(t_k) \setminus \Gamma_2^\#(t_k)$. Но ломаная $\Gamma_2(t_k) \setminus \Gamma_2^\#(t_k)$ стягивается в точку a_* , т. е. $b_\gamma(t_k) \rightarrow a_*$. Следовательно, $b_\gamma(\bar{t}) \neq a_*$ и точка $b_\gamma(\bar{t})$ не принадлежит некоторой окрестности G_* точки a_* . В окрестность G_* при достаточно больших k обязательно попадут точки $\hat{e}_2(t_k)$ и $\check{e}_2(t_k)$. Таким образом, учитывая непрерывность траектории $b_\gamma(\cdot)$, получаем $b_\gamma(t_k) \in \Gamma_2^\#(t_k)$, т. е. $\hat{\xi}_1(t_k) = b_\gamma(t_k)$, что противоречит предположению. Непрерывность функции $\check{\xi}_1(\cdot)$ в точке $t = \bar{t}$ справа доказана.

Рассмотрим теперь функцию $\hat{\xi}_2(\cdot)$ и предположим, что найдется последовательность $\{t_k\}$, для которой $t_k \rightarrow \bar{t}+0$, $\hat{\xi}_2(t_k) = \check{e}_2(t_k) \not\rightarrow a_\gamma(\bar{t})$. Следовательно, $a_\gamma(t_k) \in \Gamma_1(t_k) \setminus \Gamma_2(t_k)$. Поскольку множество $\Gamma_1(t_k) \setminus \Gamma_2(t_k)$ стягивается в точку a_* , то $a_\gamma(t_k) \rightarrow a_*$. Вместе с тем, $a_\gamma(t_k) \rightarrow a_\gamma(\bar{t})$ и $\check{e}_2(t_k) \rightarrow a_*$. Таким образом, $a_\gamma(\bar{t}) = a_*$ и $\check{e}_2(t_k) \rightarrow a_\gamma(\bar{t})$, что противоречит предположению. Получаем, что и функция $\hat{\xi}_2(\cdot)$ непрерывна в точке $t = \bar{t}$ справа.

Дальнейшие рассуждения в случае 1б) аналогичны случаю 1а).

2) Шаг индукции: предположим, что найден алгоритм построения полупроницаемой поверхности для $n = k$, $k \geq 2$; построим ее для $n = k + 1$.

Имеем последовательность $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$ полупроницаемых трубок на отрезке времени $[t_*, \vartheta]$. Рассмотрим два возможных случая аналогично доказательству базы индукции.

2а) Предположим сначала, что $W_1(t) \neq W_2(t)$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$. В этом случае непересекающиеся траектории $\hat{e}_2(\cdot)$, $\check{e}_2(\cdot)$ (края поверхности $\Gamma_2^\#$) заданы на всем промежутке $[t_*, \vartheta]$. Для $t \in [t_*, \vartheta]$ положим

$$a_\gamma^*(t) = \begin{cases} \check{e}_2(t), & \text{если } a_\gamma(t) \notin \Gamma_2^\#(t), \\ a_\gamma(t) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Рисунок 4, (б) поясняет используемые обозначения при $t = \vartheta$. Заметим, что траектория $a_\gamma^*(\cdot)$ определена аналогично траектории $\hat{\xi}_2(\cdot)$ из п. 1б) и, следовательно, также является непрерывной.

Применяя предположение индукции для последовательности k трубок $\Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$, строим полупроницаемую поверхность σ_* с крайними траекториями $a_\gamma^*(\cdot)$ и $b_\gamma(\cdot)$.

Траектории $a_\gamma(\cdot)$ и $a_\gamma^*(\cdot)$ лежат на трубке Γ_1 и непрерывны. Пусть

$$\sigma_1(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma_1, [t_*, \vartheta], a_\gamma(\cdot), \hat{e}_2(\cdot)), \quad \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_*.$$

В силу леммы 3, применяемой к поверхностям σ_1 и σ_* , поверхность σ является полупроницаемой поверхностью.

2б) Пусть найдется такое $\bar{t} \in [t_*, \vartheta]$, что $W_1(\bar{t}) = W_2(\bar{t})$. Тогда для $t \in (\bar{t}, \vartheta]$ значение $a_\gamma^*(t)$ определим по формуле (4.3), для $t \in [t_*, \bar{t}]$ положим $a_\gamma^*(t) = a_\gamma(t)$.

Аналогично случаю 2а) строим полупроницаемую поверхность на промежутке $(\bar{t}, \vartheta]$. На отрезке $[t_*, \bar{t}]$ полупроницаемая поверхность построена по предположению индукции на основе трубок $\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1}$, поскольку $\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)$, $t \in [t_*, \bar{t}]$. В целом на отрезке $[t_*, \vartheta]$ получаем полупроницаемую поверхность.

4.3. Построение полупроницаемых спиральных поверхностей типов \pm и \mp для других исходных спиралей

а) При построении полупроницаемой спиральной поверхности типа \pm для одинарной правой спирали определяем правую спиральную систему $\mathcal{A}^r(\gamma, P)$, упорядочивая все нормали *по часовой стрелке* и обходя границы множеств в отрицательном направлении (множество справа). Построение спиральной поверхности проводим так же, как и для одинарной левой спирали, заменив оператор $S^+(\cdot)$ на оператор $S^-(\cdot)$.

б) При построении полупроницаемой спиральной поверхности типа \mp для одинарной левой (правой) спирали определяем спиральную систему $\mathcal{A}^l(\gamma, Q)$ (соответственно $\mathcal{A}^r(\gamma, Q)$). Построение спиральной поверхности типа \mp проводим аналогично построению поверхности типа \pm , заменив оператор $T_\tau(\cdot; P, Q)$ на оператор $T_\tau(\cdot; Q, P)$, а наборы полуплоскостей $\mathcal{R}_P(A)$ на наборы $\mathcal{R}_Q(A)$.

в) Рассмотрим построение полупроницаемой спиральной поверхности типа \pm для двойной спирали γ . По определению имеем представление $\gamma = \gamma_0^l \cup \gamma_0 \cup \gamma_0^r$, где $\gamma_0^l, \gamma_0, \gamma_0^r$ — невырожденные ломаные,

$$\gamma_0 = \gamma \cap \partial A_0, \quad A_0 = \text{co } \gamma, \quad \gamma_0^l \cap \gamma_0^r = \emptyset,$$

$\gamma_0 \cup \gamma_0^l = \gamma^l$ — левая спираль, $\gamma_0 \cup \gamma_0^r = \gamma^r$ — правая спираль (см. рис. 1, (в)).

Пусть $a_\gamma^l(\vartheta) = \gamma_0 \cap \gamma_0^r$, $a_\gamma^r(\vartheta) = \gamma_0 \cap \gamma_0^l$ — начальные в порядке обхода вершины спиралей γ^l и γ^r , а $b_\gamma^l(\vartheta)$, $b_\gamma^r(\vartheta)$ — их последние вершины. Отметим, что $b_\gamma^l(\vartheta) \in \gamma_0^l$, $b_\gamma^r(\vartheta) \in \gamma_0^r$ — крайние вершины спирали γ (обе “внутренние”).

Введем траектории $a_\gamma^l(\cdot)$, $a_\gamma^r(\cdot)$. Для левой спирали γ^l и правой спирали γ^r определены левая и правая спиральные системы множеств:

$$\mathcal{A}^l(\gamma^l) = \{A_1^l \supset A_2^l \supset \dots \supset A_{n_l}^l\}, \quad \mathcal{A}^r(\gamma^r) = \{A_1^r \supset A_2^r \supset \dots \supset A_{n_r}^r\}.$$

Имеем $A_1^l = A_1^r = A_0$.

Выберем момент $t_*^{l,r} < \vartheta$ так, что $\text{int } T_\tau(A_{n_l}^l) \neq \emptyset$ и $\text{int } T_\tau(A_{n_r}^r) \neq \emptyset$ при $\tau \in (0, \vartheta - t_*^{l,r}]$.

Пусть W_0, W_2^l, W_2^r — максимальные u -стабильные мосты в задачах A_0 -, A_2^l -, A_2^r -сближения соответственно; $\Gamma_0, \Gamma_2^l, \Gamma_2^r$ — боковые поверхности мостов W_0, W_2^l, W_2^r .

Траекторию $a_\gamma^l(\cdot)$ (соответственно, $a_\gamma^r(\cdot)$) зададим как край (вдоль оси времени) множества $\overline{\Gamma_0 \setminus \Gamma_2^r}$ (соответственно $\overline{\Gamma_0 \setminus \Gamma_2^l}$), выходящий в обратном времени из точки $a_\gamma^l(\vartheta)$ (соответственно $a_\gamma^r(\vartheta)$).

Определим момент $\tilde{t} \in [t_*^{l,r}, \vartheta)$ из условия непересечения траекторий $a_\gamma^l(\cdot), a_\gamma^r(\cdot)$ на $[\tilde{t}, \vartheta]$. Положим

$$\sigma_0(\cdot) = S^+(\cdot; \Gamma_0, [\tilde{t}, \vartheta], a_\gamma^l(\cdot), a_\gamma^r(\cdot)).$$

На отрезке $[\tilde{t}, \vartheta]$ зададим траектории $b_\gamma^l(\cdot), b_\gamma^r(\cdot)$ — “внутренние” края конструируемой полупроницаемой поверхности — и определим полупроницаемые поверхности σ^l и σ^r типа \pm с краями $a_\gamma^l(\cdot), b_\gamma^l(\cdot)$ и $a_\gamma^r(\cdot), b_\gamma^r(\cdot)$ соответственно. Значение $t^* = t^*(\gamma) \in [\tilde{t}, \vartheta)$ находим из условия непересечения множеств $\sigma^l(t)$ и $\sigma^r(t)$ вне множества $\sigma_0(t)$ для $t \in [t^*, \vartheta]$.

Поверхность $\sigma = \sigma^l \cup \sigma^r$ — искомая полупроницаемая поверхность.

5. Склейка полупроницаемой трубки из полупроницаемых спиральных поверхностей

Рассмотрим многоугольную границу $\gamma = \partial M$ невыпуклого терминального множества. Закрытую ломаную γ представим в виде такого упорядоченного объединения четного числа спиралей $\gamma_i, i = \overline{1, 2k}$, что последнее звено одной спирали совпадает с первым звеном следующей спирали (звенья зацепления), при этом соответствующие нормали к этим звеньям противоположно направлены (рис. 5).

Для определенности будем считать, что нормали спирали γ_i при нечетном i направлены вовне множества M (дуга выпуклости на границе множества). В этом случае будем строить полупроницаемую спиральную поверхность типа \pm . При четном i считаем, что нормали направлены внутрь множества M (дуга вогнутости). Для такой спирали будем строить полупроницаемую спиральную поверхность типа \mp .

В соответствие каждой отдельной одинарной спирали γ_i поставим значение $t^b(\gamma_i) = t_*(\gamma_i)$, где $t_*(\gamma_i)$ введено в разд. 4.2. В случае отдельной двойной спирали положим $t^b(\gamma_i) = t^*(\gamma_i)$, где $t^*(\gamma_i)$ введено в конце разд. 4.3. На отрезке $[t^b(\gamma_i), \vartheta]$ построим полупроницаемую поверхность σ_i , исходящую в обратном времени из спиральной ломаной γ_i , т. е. $\sigma_i(\vartheta) = \gamma_i$.

Найдем такое значение

$$t_M \geq \max_{i \in \overline{1, 2k}} t^b(\gamma_i),$$

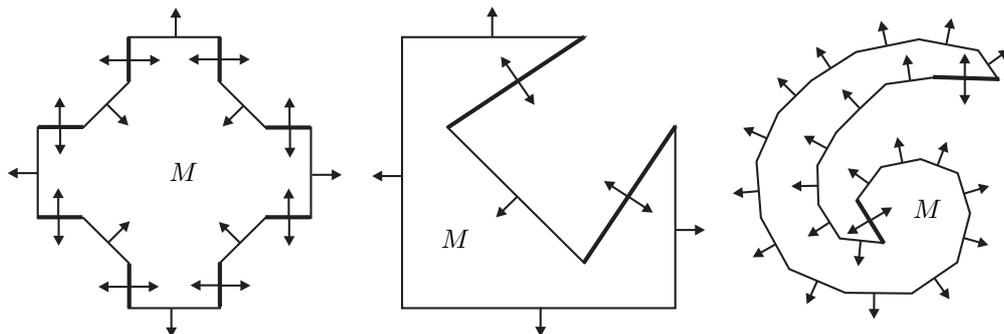


Рис. 5. Разбиение границы терминального множества M на дуги выпуклости и вогнутости, пересекающиеся по звеньям зацепления.

что на отрезке $[t_M, \vartheta]$ множество $\sigma = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{2k}$ является трубкой. Момент t_M задают следующие условия: 1) не вырождаются звенья зацепления; 2) сечения $\sigma_i(t)$, $t \in [t_M, \vartheta]$ пересекаются только с соседними поверхностями и только по звеньям зацепления. Условие 1) означает, что для любых двух соседних дуг выпуклости и вогнутости на исходной кривой γ общее для них звено зацепления в процессе развития в обратном времени соответствующих двух спиральных поверхностей может изменять свою длину в сечении при $t \in [t_M, \vartheta]$, но не стягивается в точку.

В силу лемм 3 и 4 получаем, что трубка σ является полупроницаемой на отрезке $[t_M, \vartheta]$ и $\sigma(\vartheta) = \gamma$. Следовательно, по лемме 1 трубка σ на отрезке $[t_M, \vartheta]$ представляет собой боковую поверхность максимального u -стабильного моста W_0 , т. е. определяет решение дифференциальной игры на указанном отрезке.

Заключение

В статье исследуется антагонистическая дифференциальная игра на плоскости с динамикой простых движений и фиксированным моментом окончания. Показано, что при многоугольном терминальном множестве и выпуклых многоугольных ограничениях на управления игроков существует промежуток времени, примыкающий к моменту окончания, такой что множество разрешимости (максимальный стабильный мост) на этом промежутке может быть построено при помощи программных конструкций без дополнительного дробления промежутка на более мелкие части и последующего предельного перехода. В работе нет оценки снизу длины указанного промежутка.

Авторы благодарят Д.А.Серкова за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М., Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М., Наука, 1974. 456 с.
4. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York etc.: Springer, 1988. 517 p.
5. **Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.** О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
6. **Камнева Л.В., Пацко В.С.** Полугрупповое свойство оператора программного поглощения в играх с простыми движениями на плоскости // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1399–1409.

Камнева Людмила Валерьевна

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Поступила 9.08.2014

УДК 512.542+519.175

СТАБИЛИЗАТОРЫ ВЕРШИН ГРАФОВ С ПРИМИТИВНЫМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ И УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ ГИПОТЕЗЫ СИМСА. I¹

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

Первая из цикла статей, результаты которого влекут справедливость усиленной версии гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок, представленной в работе авторов “Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса” (Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743). Данная статья посвящена рассмотрению случая не почти простых примитивных групп и случая примитивных групп со знакопеременным цокелем.

Ключевые слова: конечная примитивная группа подстановок, стабилизатор точки, граф, гипотеза Симса.

A. S. Kondrat'ev, V. I. Trofimov. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. I

This is the first in a series of papers whose results imply the validity of a strengthened version of the Sims conjecture on finite primitive permutation groups from the authors' article “Stabilizers of graph's vertices and a strengthened version of the Sims conjecture”, Dokl. Math. **59** (1), 113–115 (1999). In this paper, the case of non almost simple primitive groups and the case of primitive groups with alternating socle are considered.

Keywords: finite primitive permutation group, stabilizer of a point, graph, Sims conjecture.

Введение

В середине 1960-х гг. Ч. Симс выдвинул следующую гипотезу (см., например, [11]).

Гипотеза Симса. *Существует функция $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что если G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , G_x — стабилизатор в G точки x из X и d — длина некоторой G_x -орбиты на $X \setminus \{x\}$, то $|G_x| \leq \varphi(d)$.*

До классификации конечных простых групп эта гипотеза была подтверждена в некоторых частных случаях. С использованием классификации конечных простых групп ее справедливость была доказана в [10]. Из этого доказательства следует, что в качестве функции $\varphi(d)$ в гипотезе Симса можно взять функцию вида $\exp(Cd^3)$, где C — некоторая константа.

Более наглядно гипотезу Симса можно сформулировать на геометрическом языке следующим образом.

Для неориентированного (без петель и кратных ребер) связного графа Γ с множеством вершин $V(\Gamma)$, $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$, $x \in V(\Gamma)$ и $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ будем обозначать через $G_x^{[i]}$ поэлементный стабилизатор в G (замкнутого) шара радиуса i графа Γ с центром x в естественной метрике d_Γ на $V(\Gamma)$.

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , $|X| > 1$, $x \in X$ и $M = G_x$. Зафиксируем элемент $a \in G$ с $a(x) \neq x$. Рассмотрим граф Γ с множеством вершин $V(\Gamma) = X$ и множеством ребер $E(\Gamma) = \{\{g(x), ga(x)\} \mid g \in G\}$. Тогда Γ есть неориентированный связный граф, G — его группа автоморфизмов, действующая примитивно на $V(\Gamma)$, и длина M -орбиты, содержащей $a(x)$, равна либо валентности графа Γ (если в G найдется

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы РНФ для отдельных научных групп (проект 14-11-00061).

элемент, переставляющий точки x и $a(x)$), либо половине валентности графа Γ (в противном случае). Поэтому гипотеза Симса равносильна следующему утверждению.

Гипотеза Симса (геометрическая форма). *Существует функция $\psi : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что если Γ — неориентированный связный конечный граф и G — примитивная на $V(\Gamma)$ группа его автоморфизмов, то $G_x^{[\psi(d)]} = 1$ для $x \in V(\Gamma)$, где d — валентность графа Γ .*

Авторами в [2], также с использованием классификации конечных простых групп, был получен следующий результат, устанавливающий справедливость усиленной версии гипотезы Симса.

Теорема 1 [2, теорема 1]. *Если Γ — неориентированный связный конечный граф и G — примитивная на $V(\Gamma)$ группа его автоморфизмов, то $G_x^{[6]} = 1$ для $x \in V(\Gamma)$.*

Другими словами, автоморфизмы связных конечных графов с вершинно-примитивными группами автоморфизмов определяются образами вершин любого шара радиуса 6.

В [2] был получен также результат (см. теорему 2 ниже), формулируемый в терминах подгруппового строения групп, из которого непосредственно следует теорема 1. Для формулировки этого результата нам потребуются следующие определения.

Напомним, что для $H \leq G$ подгруппа $H_G = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ называется ядром подгруппы H в группе G .

Для группы G и ее подгрупп M_1 и M_2 индуктивно определим для каждого $i \in \mathbb{N}$ подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из $M_1 \cap M_2$, называемые нами i -ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}.$$

Для $i \in \mathbb{N}$, предполагая, что $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ уже определены, положим

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}.$$

Ясно, что

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_2, M_1)^i)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i)_{M_2}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$.

Взаимные ядра подгрупп M_1 и M_2 группы G обладают следующими очевидными свойствами. Для $i \in \mathbb{N}$ равенство $(M_1, M_2)^i = (M_2, M_1)^i$ означает, что эта подгруппа есть наибольшая нормальная как в M_1 , так и в M_2 подгруппа группы $M_1 \cap M_2$, а все группы $(M_1, M_2)^{i+j}$ и $(M_2, M_1)^{i+j}$ для $j \in \mathbb{N}$ совпадают с ней. Для $k \in \{1, 2\}$ и $i \in \mathbb{N}$ равенство $(M_k, M_{3-k})^{i+1} = (M_k, M_{3-k})^i$ эквивалентно включению $(M_k, M_{3-k})^i \leq (M_{3-k}, M_k)^i$, а равенство $(M_k, M_{3-k})^{i+2} = (M_k, M_{3-k})^i$ влечет равенство $(M_1, M_2)^{i+1} = (M_2, M_1)^{i+1}$.

Теорема 2 [2, теорема 2]. *Пусть G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G . Тогда подгруппы $(M_1, M_2)^6$ и $(M_2, M_1)^6$ совпадают и нормальны в G .*

Если в условиях теоремы 1 при $|V(\Gamma)| > 1$ положить $M_1 = G_x$ и $M_2 = G_y$, где x и y — смежные вершины графа Γ , то $G_x^{[i]} \leq (M_1, M_2)^i$ и $G_y^{[i]} \leq (M_2, M_1)^i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, теорема 1 следует из теоремы 2.

Кроме теоремы 1 из теоремы 2 выводится (см. разд. 3) следующее утверждение.

Следствие. *Пусть G — конечная группа, M_1 — максимальная подгруппа в G и M_2 — подгруппа в G , содержащая $(M_1)_G$ и не содержащаяся в M_1 . Тогда подгруппа $(M_1, M_2)^{12}$ совпадает с $(M_1)_G$.*

З а м е ч а н и е 1. Пример 1 из разд. 3 настоящей работы показывает, что константу 6 в теоремах 1 и 2 нельзя уменьшить.

З а м е ч а н и е 2. Пример 2 из разд. 3 настоящей работы показывает, что константу 12 в следствии нельзя уменьшить.

З а м е ч а н и е 3. В следствии условие максимальности подгруппы M_1 в группе G существенно. Как показывает пример 3 из разд. 3 настоящей работы, существует такая последовательность троек $(G_n, M_{1,n}, M_{2,n})$, где $n \in \mathbb{N}$, G_n — конечная группа, $M_{1,n}$ и $M_{2,n}$ — немаксимальные подгруппы в G_n , порождающие G_n , что $(M_{1,n}, M_{2,n})^n \neq (M_{2,n}, M_{1,n})^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 непосредственно получается из более сильного результата (см. ниже), который мы и будем доказывать в цикле статей, первой из которых является настоящая работа.

Пусть G, M_1, M_2 удовлетворяют условию теоремы 2. Нас будет интересовать случай, когда $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. Множество всех таких троек (G, M_1, M_2) обозначим через Π (мы рассматриваем как одинаковые тройки (G, M_1, M_2) и (G', M'_1, M'_2) , для которых существует изоморфизм G на G' , отображающий M_1 на M'_1 и M_2 на M'_2).

Группа G действует сопряжениями точно и примитивно на множестве $X = \{gM_1g^{-1} \mid g \in G\}$. Согласно полученному в [3, предложение 1] уточнению для рассматриваемого нами случая теоремы Томпсона — Виланда произведение

$$(M_1, M_2)^2(M_2, M_1)^2$$

является нетривиальной p -группой для некоторого простого числа p (см. предложение 1.1(a) ниже).

В зависимости от вида цоколя $\text{Soc}(G)$ группы G разобьем множество Π на следующие подмножества:

Π_0 — множество троек (G, M_1, M_2) из Π таких, что $\text{Soc}(G)$ не является простой неабелевой группой, т. е. G не является почти простой группой;

Π_1 — множество троек (G, M_1, M_2) из Π с простым $\text{Soc}(G)$, изоморфным знакопеременной группе;

Π_2 — множество троек (G, M_1, M_2) из $\Pi \setminus \Pi_1$ с простым $\text{Soc}(G)$, изоморфным группе лиева типа над полем характеристики, отличной от p ;

Π_3 — множество троек (G, M_1, M_2) из $\Pi \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2)$ с простым $\text{Soc}(G)$, изоморфным группе лиева типа над полем характеристики p ;

Π_4 — множество троек (G, M_1, M_2) из Π с простым $\text{Soc}(G)$, изоморфным одной из 26 конечных простых спорадических групп.

Для непустого множества Σ троек вида (G, M_1, M_2) , где G — конечная группа, M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G , положим $c(\Sigma)$ равным максимальному натуральному числу c такому, что $(M_1, M_2)^{c-1} \neq 1$ или $(M_2, M_1)^{c-1} \neq 1$ для некоторой тройки $(G, M_1, M_2) \in \Sigma$, или равным ∞ , если такого максимального числа не существует. Положим также $c(G, M_1, M_2) = c(\{(G, M_1, M_2)\})$ и $c(\emptyset) = 0$. Кроме того, для конечной группы G и ее максимальной подгруппы M_1 положим $c(G, M_1) = c(\Sigma)$, где Σ — множество всех троек вида (G, M_1, M_2) , где M_2 — сопряженная в G с M_1 подгруппа, отличная от M_1 .

В [2] было анонсировано, что $c(\Pi_0) \leq \max_{1 \leq i \leq 4} c(\Pi_i)$, $c(\Pi_1) = 0$, $c(\Pi_2) = 3$, $c(\Pi_3) = 6$ и $c(\Pi_4) = 5$. Теорема 2 следует из равенства $c(\Pi) = 6$.

Цель начинающегося данной статьей цикла — описать более точно множество Π (и как следствие получить указанные соотношения для $c(\Pi_i)$, $0 \leq i \leq 4$). В этой первой статье в направлении реализации указанной цели доказываются следующие две теоремы.

Теорема 3 (теорема редукции). *Если $(G, M_1, M_2) \in \Pi_0$, то $\text{Soc}(G) = T^k$, где T — простая неабелева группа, $k > 1$, и для некоторой группы H такой, что $\text{Soc}(H) \cong T$, и некоторых ее различных сопряженных максимальных подгрупп H_1, H_2 справедливо неравенство $c(G, M_1, M_2) \leq c(H, H_1, H_2)$. В частности, $c(\Pi_0) \leq \max_{1 \leq i \leq 4} c(\Pi_i)$.*

Теорема 4. *Множество Π_1 пусто и, следовательно, $c(\Pi_1) = 0$.*

Настоящая статья включает, кроме введения, три раздела. В разд. 1 доказывается теорема 3. В разд. 2 доказывается теорема 4. В разд. 3 доказывается следствие и приводятся

примеры 1–3, показывающие неулучшаемость в общем случае констант в утверждениях теорем 1 и 2 и следствия.

Последующие статьи нашего цикла будут посвящены описанию множеств Π_2 , Π_3 и Π_4 .

Используемые в дальнейшем терминология и обозначения из теории групп в основном стандартны (см., например, [4; 5]). Напомним некоторые из них.

Через $F^*(G)$ обозначается обобщенная подгруппа Фиттинга конечной группы G . Симметрическая и знакопеременная группы на множестве X обозначаются через $\text{Sym}(X)$ и $\text{Alt}(X)$ соответственно. Через $A \rtimes B$ обозначается расщепляемое расширение (полупрямое произведение) группы A посредством группы B (на группу B). Если G — группа подстановок на множестве X и σ — сохраняемое G разбиение множества X , то через G^σ обозначается группа подстановок на σ , индуцируемая группой G .

1. Предварительные результаты и доказательство теоремы редукции

Следующее предложение содержит используемые нами в дальнейшем результаты из [3; 8]. Эти результаты уточняют для рассматриваемого нами случая теорему Томпсона — Виланда (см. [12, теорема 6.6]).

Предложение 1.1. Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(а) $(M_1, M_2)^2(M_2, M_1)^2$ является нетривиальной p -группой для некоторого простого числа p . Следовательно, $1 < (M_i, M_{3-i})^2 \leq (M_1, M_2)^2(M_2, M_1)^2 \leq O_p((M_i, M_{3-i})^1) \leq O_p(M_i)$ и $(M_i, M_{3-i})^2 < O_p(M_i)$ для $i \in \{1, 2\}$.

(б) Если $(M_i, M_{3-i})^1 \leq X \leq M_i$, где $i \in \{1, 2\}$, то $F^*(X) = O_p(X) \neq 1$. В частности, $F^*(M_i) = O_p(M_i) \neq 1$ для $i \in \{1, 2\}$.

(в) $F((M_1 \cap M_2)/(M_i, M_{3-i})^1) \neq 1$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из [3, предложение 1]. Для удобства читателя мы приведем его доказательство. Согласно [12, теорема 6.6] хотя бы одна из групп $(M_1, M_2)^2$, $(M_2, M_1)^2$ является p -группой для некоторого простого числа p . Положим $\{H, K\} = \{M_1, M_2\}$, причем $(K, H)^2$ — p -группа. Предположим, что $O^p((H, K)^2) \neq 1$. Тогда $N_G(O^p((H, K)^2)) = H$. Обозначим через C подгруппу группы G , состоящую из всех элементов группы G , нормализующих $(K, H)^1$ и тривиально действующих (сопряжениями) на $(K, H)^1/O_p((K, H)^1)$. Тогда $C \trianglelefteq K$. Кроме того, поскольку C нормализует подгруппу $O^p((H, K)^2)O_p((K, H)^1)$ и, следовательно, нормализует подгруппу $O^p((H, K)^2) = O^p(O^p((H, K)^2)O_p((K, H)^1))$, то $C \leq H$. Таким образом, $C \leq (K, H)^1$. С учетом $O_p(H \cap K) \leq C$ и $O_p(K) \leq C$ это влечет $O_p(H \cap K) = O_p((K, H)^1) = O_p(K)$. В частности, $O_p(H) \cap N_G(O_p(H \cap K)) = O_p(H) \cap K \leq O_p(H \cap K)$, откуда следует, что нормализатор подгруппы $O_p(H \cap K)$ в p -группе $O_p(H)O_p(H \cap K)$ совпадает с ней самой, и потому $O_p(H) \leq O_p(H \cap K)$. Но тогда в силу $O_p(H \cap K) = O_p(K)$ и сопряженности подгрупп H и K группы G получаем $O_p(H) = O_p(K)$, что невозможно.

Утверждения (б) и (в) следуют из теоремы 2.1 и следствия 2.2 работы [8] соответственно. Предложение доказано.

Следующий простой результат хорошо известен (см., например, [7, упражнение 4.4.8]).

Предложение 1.2. Если G — примитивная группа подстановок на множестве X , сохраняющая регулярную нормальную подгруппу, то $c(G, G_x) \leq 1$ для $x \in X$.

Предложение 1.3. Пусть T — простая неабелева группа и l — натуральное число, большее 1. Положим $W = R \rtimes S_l$, где

$$R = \{(a_1, \dots, a_l) \in (\text{Aut}(T))^l \mid a_i a_j^{-1} \in \text{Inn}(T) \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq l\} \leq (\text{Aut}(T))^l$$

и S_l действует на R естественным образом перестановкой координат (если $(a_1, \dots, a_l) \in R$ и $s \in S_l$, то $s : (a_1, \dots, a_l) \mapsto (a_{s^{-1}(1)}, \dots, a_{s^{-1}(l)})$). Ясно, что

$$(\text{Inn}(T))^l \rtimes S_l \leq W \leq (\text{Aut}(T))^l \rtimes S_l,$$

где $(\text{Inn}(T))^l = \text{Soc}(W) \cong T^l$ и S_l действует на $(\text{Aut}(T))^l$ перестановкой координат, а действие группы W левыми сдвигами на множестве X своих левых смежных классов по подгруппе

$$\{(a_1, \dots, a_l) \in (\text{Aut}(T))^l \mid a_1 = \dots = a_l\} \rtimes S_l$$

есть точное примитивное действие степени $|T|^{l-1}$. Если G — примитивная подгруппа группы W в этом действии, содержащая $\text{Soc}(W)$ и действующая (сопряжениями) примитивно на множестве изоморфных $\text{Inn}(T)$ множителей разложения $\text{Soc}(W) = (\text{Inn}(T))^l$, то $c(G, G_x) \leq 2$ для $x \in X$.

Доказательство. Предположим, что $c(G, G_x, G_y) > 2$ для некоторой точки $y \in X$. Поскольку $G = (\text{Inn}(T))^l G_x = (\text{Inn}(T))^l G_y$ (что следует из транзитивности на X нормальной подгруппы $(\text{Inn}(T))^l$ примитивной группы G), то группа G_x , как и группа G_y , индуцирует на множестве множителей разложения $(\text{Inn}(T))^l$ ту же примитивную группу \overline{G} , что и группа G . Каждая из групп $(G_x, G_y)^1$, $(G_y, G_x)^1$ действует (сопряжениями) точно на множестве изоморфных $\text{Inn}(T)$ множителей разложения $(\text{Inn}(T))^l$ и индуцирует на нем регулярную нормальную подгруппу группы \overline{G} (см. [10, с. 500, 501]). В частности, $|(G_x, G_y)^1| = |(G_y, G_x)^1|$, что влечет $(G_x, G_y)^2 < (G_x, G_y)^1$ и $(G_y, G_x)^2 < (G_y, G_x)^1$. Если $(G_x, G_y)^2 \neq 1$, то (так как $(G_x, G_y)^2 < (G_x, G_y)^1$ и $(G_x, G_y)^2 \trianglelefteq G_x$) группа $(G_x, G_y)^2$ индуцирует на множестве изоморфных $\text{Inn}(T)$ множителей разложения $(\text{Inn}(T))^l$ неединичную интранзитивную нормальную подгруппу примитивной группы \overline{G} , что невозможно. Аналогично, если $(G_y, G_x)^2 \neq 1$, то (поскольку $(G_y, G_x)^2 < (G_y, G_x)^1$ и $(G_y, G_x)^2 \trianglelefteq G_y$) группа $(G_y, G_x)^2$ индуцирует на этом множестве неединичную интранзитивную нормальную подгруппу примитивной группы \overline{G} , что невозможно.

Предложение доказано.

Предложение 1.4. Пусть H — примитивная группа подстановок на множестве Y , $|Y| > 1$, l — натуральное число и $X = Y^l$. Обозначим через W группу $H^l \rtimes S_l$, естественным образом действующую на X (H^l действует по координатам, S_l переставляет координаты). Каждый элемент группы W представим единственным образом в виде $(h_1, \dots, h_l)a$, где $(h_1, \dots, h_l) \in H^l$ и $a \in S_l$. Обозначим через ρ отображение $(h_1, \dots, h_l)a \mapsto h_1$ группы W в группу H . Тогда если G — примитивная подгруппа группы W , не имеющая регулярных нормальных подгрупп и содержащая $\text{Soc}(W)$, и Q — подгруппа группы G , состоящая из всех таких элементов $(h_1, \dots, h_l)a$ группы G , что a нормализует первый множитель заданного разложения H^l , то $\tilde{H} := \rho(Q)$ — примитивная подгруппа группы H , $\text{Soc}(H) = \text{Soc}(\tilde{H})$ и $c(G, G_x) \leq c(\tilde{H}, \tilde{H}_y)$ для $x \in X$, $y \in Y$.

Доказательство. В силу отсутствия у примитивной группы G регулярных нормальных подгрупп таковые отсутствуют и у примитивных групп H , W . В частности, у групп G , W , H отсутствуют неединичные абелевы нормальные подгруппы и, следовательно, каждая из этих групп порождается всеми ее субнормальными простыми подгруппами. Отсюда и из $\text{Soc}(W) = \text{Soc}(H)^l \trianglelefteq G \leq W$ вытекает $\text{Soc}(G) = \text{Soc}(W) = \text{Soc}(H)^l$. Кроме того, отсюда же ввиду $\text{Soc}(H) \trianglelefteq \tilde{H} \leq H$ следует $\text{Soc}(H) \trianglelefteq \text{Soc}(\tilde{H})$, что влечет

$$\text{Soc}(\tilde{H}) = \text{Soc}(H) \times C_{\text{Soc}(\tilde{H})}(\text{Soc}(H)) = \text{Soc}(H)$$

(в силу транзитивности $\text{Soc}(H)$ и отсутствия у H регулярных нормальных подгрупп группа $C_H(\text{Soc}(H))$ тривиальна). В частности, группа $\text{Soc}(\tilde{H})$ транзитивна на Y .

Далее, для $x = (y_1, \dots, y_l) \in X$ ввиду максимальности подгруппы G_x группы G имеем $G = \text{Soc}(G)G_x = \text{Soc}(H)^l G_x$ и $G_x \cap \text{Soc}(G) = G_x \cap \text{Soc}(H)^l = \text{Soc}(H)_{y_1} \times \dots \times \text{Soc}(H)_{y_l}$ — максимальная собственная G_x -допустимая подгруппа группы $\text{Soc}(H)^l$. Отсюда вытекает транзитивность действия группы G_x (сопряжениями) на множестве множителей разложения H^l . Для каждого $1 \leq i \leq l$ пусть g_i — элемент группы G_x , отображающий (при сопряжении) первый множитель разложения H^l в его i -й множитель. Тогда $G = \cup_{1 \leq i \leq l} g_i Q$ — разбиение группы G на множество левых смежных классов по подгруппе Q и $G_x = \cup_{1 \leq i \leq l} g_i Q_x$ — разбиение группы G_x на множество левых смежных классов по подгруппе Q_x . Заметим, что в силу $\text{Soc}(H)^l \leq Q$ имеем $\rho(Q_x) = \tilde{H}_{y_1}$.

Предположим, что $\tilde{H}_{y_1} < L < \tilde{H}$ для некоторой подгруппы L группы \tilde{H} . Тогда в силу $\tilde{H} = \text{Soc}(\tilde{H})\tilde{H}_{y_1}$ имеем

$$\text{Soc}(H)_{y_1} = \text{Soc}(\tilde{H})_{y_1} = \tilde{H}_{y_1} \cap \text{Soc}(\tilde{H}) < L \cap \text{Soc}(\tilde{H}) = L \cap \text{Soc}(H).$$

Отождествим группу \tilde{H} естественным образом с подгруппой первого множителя разложения H^l . Тогда с учетом Q_x -допустимости $L \cap \text{Soc}(\tilde{H})$ имеем

$$\langle g(L \cap \text{Soc}(\tilde{H}))g^{-1} \mid g \in G_x \rangle = (L \cap \text{Soc}(\tilde{H}))^{g_1} \times \dots \times (L \cap \text{Soc}(\tilde{H}))^{g_l} > \text{Soc}(H)_{y_1} \times \dots \times \text{Soc}(H)_{y_l},$$

что противоречит максимальности $\text{Soc}(H)_{y_1} \times \dots \times \text{Soc}(H)_{y_l}$ среди собственных G_x -допустимых подгрупп группы $\text{Soc}(H)^l$. Итак, \tilde{H}_{y_1} — максимальная подгруппа группы \tilde{H} , т. е. \tilde{H} — примитивная подгруппа группы H .

Для завершения доказательства предложения остается установить справедливость неравенства $c(G, G_x) \leq c(\tilde{H}, \tilde{H}_y)$ для $x = (y_1, \dots, y_l) \in X$, $y \in Y$. В силу транзитивности действий группы G_x на множестве множителей разложения H^l и группы \tilde{H} на Y для этого достаточно показать, что $c(G, G_x, G_{x'}) \leq c(\tilde{H}, \tilde{H}_{y_1}, \tilde{H}_{y'_1})$ при $x' = (y'_1, \dots, y'_l) \in X$, $y'_1 \neq y_1$. Положим $M_1 = G_x$, $M_2 = G_{x'}$ и $P_1 = \tilde{H}_{y_1}$, $P_2 = \tilde{H}_{y'_1}$. Неравенство $c(G, G_x, G_{x'}) \leq c(\tilde{H}, \tilde{H}_{y_1}, \tilde{H}_{y'_1})$ будет доказано, если будет показано, что $(M_1, M_2)^1$, $(M_2, M_1)^1$ содержатся в H^l и для каждого целого $j \geq 1$ имеют место включения

$$\rho((M_1, M_2)^j) \leq (P_1, P_2)^j, \quad \rho((M_2, M_1)^j) \leq (P_2, P_1)^j.$$

(Действительно, для произвольного натурального j из $(M_1, M_2)^j \neq 1$ или $(M_2, M_1)^j \neq 1$, с учетом $(M_1, M_2)^j \leq (M_1, M_2)^1 \leq H^l$, $(M_2, M_1)^j \leq (M_2, M_1)^1 \leq H^l$, $(M_1, M_2)^j \trianglelefteq M_1$, $(M_2, M_1)^j \trianglelefteq M_2$, и транзитивности действий групп M_1 , M_2 на множестве множителей разложения H^l следует, что $\rho((M_1, M_2)^j) \neq 1$ или $\rho((M_2, M_1)^j) \neq 1$.)

Покажем, что $(M_1, M_2)^1 \leq H^l$. Предположим, что $(M_1, M_2)^1 \not\leq H^l$. Тогда из $(M_1, M_1)^1 \trianglelefteq M_1$ и транзитивности действия M_1 на множестве множителей разложения H^l следует существование в $(M_1, M_2)^1$ такого элемента $g = (h_1, \dots, h_l)a$, что при сопряжении элементом a первый множитель разложения H^l отображается в множитель с некоторым номером $k \neq 1$. При этом из $g \in M_1 = G_x$ и $g \in M_2 = G_{x'}$ вытекает $y_k = h_k(y_1)$ и $y'_k = h_k(y'_1)$, что в силу $y_1 \neq y'_1$ влечет $y_k \neq y'_k$. Но из $y_k \neq y'_k$ следует существование в группе $M_1 \cap H^l$ такого элемента $g' = (h'_1, \dots, h'_l)$, что $h'_1 = 1$ и $h'_k(y'_k) \neq y'_k$. (Действительно, $\text{Soc}(H)_{y_1} \times \dots \times \text{Soc}(H)_{y_l} \leq M_1 \cap H^l$, причем $\text{Soc}(H)_{y_k}$ не стабилизирует отличных от y_k точек множества Y в силу $\text{Soc}(H)_{y_k} \neq 1$ и примитивности группы H .) Для так выбранных элементов g и g' элемент $(g')^{-1}gg'$ не стабилизирует точку (y'_1, \dots, y'_l) , т. е. $(g')^{-1}gg' \notin M_2$, что противоречит $(g')^{-1}gg' \in (M_1, M_2)^1 \leq M_2$. Таким образом, $(M_1, M_2)^1 \leq H^l$. Аналогично доказывается, что $(M_2, M_1)^1 \leq H^l$.

Покажем, что

$$\rho((M_1, M_2)^1) \leq (P_1, P_2)^1.$$

В силу $(M_1, M_2)^1 \leq H^l \cap M_2$ имеем $\rho((M_1, M_2)^1) \leq (P_1)_{y'_1} = P_1 \cap P_2$. Так как $(M_1, M_2)^1 \trianglelefteq M_1$, то, кроме того, $\rho((M_1, M_2)^1)$ нормализуется подгруппой $\rho(M_1 \cap Q) = \rho(Q_x) = (\tilde{H})_{y_1} = P_1$. Следовательно, $\rho((M_1, M_2)^1) \leq (P_1 \cap P_2)_{P_1} = (P_1, P_2)^1$. Аналогично доказывается, что $\rho((M_2, M_1)^1) \leq (P_2, P_1)^1$.

Покажем, наконец, что если для некоторого целого $j > 1$ справедливы включения

$$\rho((M_1, M_2)^{j-1}) \leq (P_1, P_2)^{j-1} \quad \text{и} \quad \rho((M_2, M_1)^{j-1}) \leq (P_2, P_1)^{j-1},$$

то

$$\rho((M_1, M_2)^j) \leq (P_1, P_2)^j \quad \text{и} \quad \rho((M_2, M_1)^j) \leq (P_2, P_1)^j.$$

С учетом $(M_1, M_2)^{j-1} \leq (M_1, M_2)^1 \leq H^l \leq Q$, $(M_2, M_1)^{j-1} \leq (M_2, M_1)^1 \leq H^l \leq Q$ и $\rho(M_1 \cap Q) = P_1$ имеем

$$\begin{aligned} \rho((M_1, M_2)^j) &= \rho(((M_2, M_1)^{j-1})_{M_1}) \leq \rho(((M_2, M_1)^{j-1})_{M_1 \cap Q}) = (\rho((M_2, M_1)^{j-1}))_{\rho(M_1 \cap Q)} \\ &= (\rho((M_2, M_1)^{j-1}))_{P_1} \leq ((P_2, P_1)^{j-1})_{P_1} = (P_1, P_2)^j. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\rho((M_2, M_1)^j) \leq (P_2, P_1)^j$.

Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 4. Можно показать (см. [9, Section 2]), что в условиях предложения 1.4 группа подстановок G подстановочно изоморфна такой примитивной подгруппе G^* группы $\tilde{H}^l \rtimes S_l$, действующей естественным образом на Y^l , что $\text{Soc}(\tilde{H}^l) \leq G^*$ и для каждого $h_1 \in \tilde{H}$ найдутся такие элементы $h_2, \dots, h_l \in \tilde{H}$ и элемент $a \in S_l$, нормализующий первый множитель разложения \tilde{H}^l , что $(h_1, \dots, h_l)a \in G^*$.

Из теоремы О'Нэна — Скотта (см. [9]) и предложений 1.2–1.4 вытекает следующий основной результат настоящего раздела.

Теорема 1.1. Пусть G — примитивная группа подстановок на множестве X , $x \in X$ и $c(G, G_x) \geq 3$. Тогда G может быть реализована как группа подстановок G из предложения 1.4, причем примитивная группа \tilde{H} на множестве Y такова, что $\text{Soc}(\tilde{H}) = \text{Soc}(H)$ — простая неабелева группа и $c(G, G_x) \leq c(\tilde{H}, \tilde{H}_y)$ для $x \in X$, $y \in Y$.

Теорема редукции (см. теорему 3 во введении) является непосредственным следствием теоремы 1.1.

2. Доказательство теоремы 4

Предположим, что теорема 4 неверна. Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi_1$, где $M_2 = aM_1a^{-1}$ для некоторого $a \in G$. Тогда $\text{Soc}(G) \cong A_n$ для некоторого $n \geq 5$. Используя [5], легко показать, что $n > 6$. В частности, группа G изоморфна A_n или S_n . В дальнейшем группа G рассматривается в естественном подстановочном представлении на множестве $X = \{1, \dots, n\}$.

С л у ч а й 1. M_1 — интранзитивная подгруппа группы G .

В этом случае M_1 является стабилизатором в группе G некоторого собственного подмножества X_1 множества X , а $M_2 = aM_1a^{-1}$ — стабилизатором в группе G множества $X_2 = a(X_1) \neq X_1$. Ясно, что $\text{Alt}(X_i) \leq M_i^{X_i}$ и $\text{Alt}(X \setminus X_i) \leq M_i^{X \setminus X_i}$ для $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, при $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ получаем $((M_i, M_{3-i})^1)^{X_i} = 1$ для $i \in \{1, 2\}$, а при $X_1 \cup X_2 \neq X$ имеем $((M_i, M_{3-i})^1)^{X \setminus X_i} = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Таким образом, если $(M_1, M_2)^1 \cap (M_2, M_1)^1 \neq 1$, то $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $X_1 \cup X_2 = X$. Но тогда $M_1 = M_2$, вопреки условию теоремы. Рассмотрение случая 1 завершено.

С л у ч а й 2. M_1 — транзитивная импримитивная подгруппа группы G .

Пусть k — минимальная из мощностей нетривиальных блоков импримитивности группы M_1 на X . Тогда $n = kl$ для некоторого целого $l > 1$ и M_1 состоит из всех подстановок группы G , сохраняющих некоторое разбиение σ_1 множества $\{1, \dots, n\}$ на k -элементные подмножества. Подгруппа $M_2 = aM_1a^{-1}$ состоит из всех подстановок группы G , сохраняющих разбиение $\sigma_2 = a(\sigma_1) \neq \sigma_1$ множества $\{1, \dots, n\}$. Очевидно, найдутся такие $X_1, X'_1 \in \sigma_1$, $X_1 \neq X'_1$, и $X_2 \in \sigma_2$, что $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \neq X'_1 \cap X_2$.

Предположим, что $((M_1, M_2)^1)^{\sigma_1} = 1$ и $((M_2, M_1)^1)^{\sigma_2} = 1$. Тогда группа $(M_1, M_2)^1 \cap (M_2, M_1)^1$ стабилизирует множество $X_1 \cap X_2$, так как стабилизатор множества X_1 в M_1 индуцирует на X_1 группу $\text{Sym}(X_1)$, отсюда следует, что $(M_1, M_2)^2$ стабилизирует множество X_1 поточечно. Ввиду $(M_1, M_2)^2 \trianglelefteq M_1$ это дает $(M_1, M_2)^2 = 1$. Противоречие.

Предположим, что $((M_1, M_2)^1)^{\sigma_1} \neq 1$ (случай $((M_2, M_1)^1)^{\sigma_2} \neq 1$ рассматривается аналогично). Тогда либо $\text{Alt}(\sigma_1) \leq ((M_1, M_2)^1)^{\sigma_1}$, либо $l = 4$ и $((M_1, M_2)^1)^{\sigma_1}$ есть регулярная группа, изоморфная $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Обозначим через H поточечный стабилизатор множества $X \setminus X'_1$ в группе M_1 . Тогда H индуцирует на X'_1 группу $\text{Sym}(X'_1)$ при $G = S_n$ и группу $\text{Alt}(X'_1)$ при $G = A_n$.

Предположим, что $l > 2$. Тогда в группе $(M_1, M_2)^1$ найдется такой элемент h , что блок $h^{-1}(X'_1)$ системы импримитивности σ_1 группы M_1 отличен как от X_1 , так и от X'_1 . При этом подгруппа $[h, H]$ группы $(M_1, M_2)^1$ поточечно стабилизирует множество X_1 , стабилизирует множество X'_1 и индуцирует на X'_1 группу $\text{Sym}(X'_1)$ при $G = S_n$ и группу $\text{Alt}(X'_1)$ при $G = A_n$. Но из $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ и из тривиальности действия подгруппы $[h, H]$ группы $(M_1, M_2)^1$ на X_1 следует, что $[h, H]$ стабилизирует блок X_2 системы импримитивности σ_2 группы M_2 . В то же время, из $X'_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ и из $\text{Sym}(X'_1) \leq [h, H]^{X'_1}$ при $G = S_n$ и из $\text{Alt}(X'_1) \leq [h, H]^{X'_1}$ при $G = A_n$ следует, что при $G = S_n$, а также при $k > 2$ и $G = A_n$, имеет место равенство $[h, H](X'_1 \cap X_2) = X'_1$. Таким образом, $k = 2$, $l > 3$ и $G = A_n$. Далее, в группе M_1 содержится элемент h_1 , который есть произведение транспозиции, меняющей местами элементы множества X_1 , и транспозиции, меняющей местами элементы множества X'_1 . Если $l > 4$, то в группе $(M_1, M_2)^1$ найдется элемент h_2 такой, что $h_2(X_1) = X_1$ и $h_2(X'_1) \neq X'_1$. При этом элемент $[h_2, h_1]$ группы $(M_1, M_2)^1$, с одной стороны, поточечно стабилизирует множество X_1 и, следовательно, стабилизирует блок X_2 системы импримитивности σ_2 группы M_2 , а с другой стороны, меняет местами элементы X'_1 и, следовательно, не стабилизирует X_2 ; противоречие. Таким образом, $l = 4$ и $G = A_8$. Но подгруппа группы A_8 , состоящая из всех ее подстановок, сохраняющих разбиение σ_1 на четыре двухэлементных множества, не является максимальной (она содержится в подгруппе, изоморфной расширению элементарной группы порядка 8 посредством группы $SL_3(2)$). Противоречие с максимальной подгруппы M_1 в G .

Пусть теперь $l = 2$ (и $k > 3$). В группе $(M_1, M_2)^1$ найдется такой элемент h , что $h(X_1) = X'_1$. Так как подгруппа $[h, H]$ группы $(M_1, M_2)^1$ индуцирует на X_1 и на X'_1 примитивные группы (содержащие $\text{Alt}(X_1)$ и $\text{Alt}(X'_1)$ соответственно), то $|X_1 \cap X_2| = 1 = |X'_1 \cap X_2|$ и, следовательно, $k = 2$. Противоречие.

Рассмотрение случая 2 завершено.

С л у ч а й 3. M_1 — примитивная подгруппа группы G .

Поскольку $(G, M_1, M_2) \in \Pi_1$, по предложению 1.1 найдется такое простое число p , что $1 \neq (M_1, M_2)^2 \leq O_p(M_1)$. По предположению случая отсюда следует, что $(M_1, M_2)^2$ — регулярная элементарная абелева p -группа, а группа $M_1/(M_1, M_2)^2$ изоморфна содержащей $\text{SL}((M_1, M_2)^2)$ подгруппе группы $\text{GL}((M_1, M_2)^2)$. Если $(M_1 \cap M_2)/(M_1, M_2)^2$ содержит подгруппу, изоморфную $\text{SL}((M_1, M_2)^2)$, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ и $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_2$, т.е. $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$, что невозможно. Следовательно, $(M_1 \cap M_2)/(M_1, M_2)^2$ не содержит подгрупп, изоморфных $\text{SL}((M_1, M_2)^2)$. Но тогда каждая из групп $(M_1, M_2)^1$, $(M_2, M_1)^1$ есть расширение элементарной абелевой p -группы порядка n посредством циклической группы порядка, делящего $p - 1$. Поскольку $(M_1, M_2)^2 \leq (M_1, M_2)^1 \cap (M_2, M_1)^1$, отсюда следует, что $(M_1, M_2)^2 = O_p((M_1, M_2)^1) = O_p((M_2, M_1)^1)$, и потому $M_1 = N_G(O_p((M_1, M_2)^1)) = N_G(O_p((M_2, M_1)^1)) = M_2$. Противоречие. Рассмотрение случая 3 завершено.

Теорема 4 доказана.

3. Доказательство следствия и примеры

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Пусть выполняются условия следствия. Не теряя общности, будем предполагать, что $(M_1)_G = 1$. Пусть Γ — граф с $V(\Gamma) = \{gM_1, gM_2 \mid g \in G\}$, $E(\Gamma) = \{\{gM_1, gM_2\} \mid g \in G\}$ и группа G действует на $V(\Gamma)$ левыми сдвигами. Тогда Γ —

связный двудольный граф с долями $V_1 = \{gM_1 \mid g \in G\}$ и $V_2 = \{gM_2 \mid g \in G\}$, $G \leq \text{Aut } \Gamma$, G действует примитивно на V_1 и транзитивно на V_2 . Обозначим через x и y вершины M_1 и M_2 графа Γ соответственно. Тогда группы M_1 и M_2 действуют транзитивно на окрестностях вершин x и y (в графе Γ) соответственно. Индукцией по натуральному параметру i доказываются равенства $(M_1, M_2)^i = G_x^{[i]}$ и $(M_2, M_1)^i = G_y^{[i]}$. Рассмотрим граф Γ' с $V(\Gamma') = V_1$ и $E(\Gamma') = \{\{u, v\} \mid u, v \in V_1, d_\Gamma(u, v) = 2\}$. Тогда G^{V_1} — примитивная группа автоморфизмов графа Γ' , и по теореме 1 поточечный стабилизатор в G шара радиуса 6 графа Γ' с центром x тривиален. Но в этом стабилизаторе содержится поточечный стабилизатор в G шара радиуса 12 графа Γ с центром x .

Следствие доказано.

Пример 1. Пусть $G = E_8(q)$, где q — степень простого числа p , M_1 — параболическая максимальная подгруппа в G , полученная удалением корня α_4 из диаграммы Дынкина для E_8 , и a — элемент мономиальной подгруппы из G , соответствующий отражению s_{α_4} (см. [1]). Положим $Q = O_p(M_1)$ и $M_2 = aM_1a^{-1}$. Пусть Γ — граф с множеством вершин $\{hM_1h^{-1} \mid h \in G\}$ и множеством ребер $\{\{hM_1h^{-1}, hM_2h^{-1}\} \mid h \in G\}$. Тогда Γ и G удовлетворяют условиям теоремы 1. С использованием [6] и [1, табл. VII] можно показать, что ряд

$$1 = (M_1, M_2)^6 < (M_1, M_2)^5 < (M_1, M_2)^4 < (M_1, M_2)^3 < (M_1, M_2)^2 < O_p((M_1, M_2)^1) < Q$$

совпадает с рядом

$$1 = G_x^{[6]} < G_x^{[5]} < G_x^{[4]} < G_x^{[3]} < G_x^{[2]} < O_p(G_x^{[1]}) < Q,$$

где $x = M_1 \in V(\Gamma)$, а также с верхним и нижним центральными рядами группы Q . Соответствующие рассуждения будут приведены в дальнейшем при описании множества Π_3 .

Пример 2. Пусть G , M_1 , a взяты как в примере 1. Положим $M_2 = (M_1 \cap aM_1a^{-1})\langle a \rangle$. Тогда, используя свойства примера 1, легко проверить, что $(M_1, M_2)^{11} \neq 1$ и $(M_1, M_2)^{12} = 1$.

Пример 3. Для любого натурального числа n рассмотрим элементарную абелеву 2-группу A порядка 2^{2n+3} с базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}\}$ и ее инволютивные автоморфизмы t_1 и t_2 , индуцированные подстановками $(a_1a_2)(a_3a_4) \dots (a_{2n+1}a_{2n+2})(a_{2n+3})$ и $(a_1)(a_2a_3) \dots (a_{2n+2}a_{2n+3})$ на этом базисе соответственно. Определим подгруппы $G_n = A\langle t_1, t_2 \rangle$, $M_{1,n} = \langle a_1, \dots, a_{2n+2}, t_1 \rangle$, $M_{2,n} = \langle a_2, \dots, a_{2n+3}, t_2 \rangle$ в голоморфе группы A . Тогда $M_{1,n}$ и $M_{2,n}$ — неинцидентные немаксимальные подгруппы в G_n , порождающие G_n . Легко проверить, что

$$|(M_{1,n}, M_{2,n})^i| = |(M_{2,n}, M_{1,n})^i| = 4^{n+1-i}$$

для $1 \leq i \leq n+1$. Отсюда, в частности, следует, что $(M_{1,n}, M_{2,n})^n \neq (M_{2,n}, M_{1,n})^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 334 с.
2. Кондратьев А.С., Трофимов В.И. Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гиптезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743.
3. Фомин А.Н. Свойства подорбит конечных примитивных групп подстановок // Теоретико-групповые исследования: сб. тр. Свердловск: Изд-во УрО РАН, 1990. С. 87–94.
4. Aschbacher M. Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. Azad H., Barry M., Seitz G.M. On the structure of parabolic subgroups // Commun. Algebra. 1990. Vol. 18, no. 2. P. 551–562.
7. Dixon J.D., Mortimer B. Permutation groups. New York: Springer-Verlag, 1996. 346 p.
8. Knapp W. On the point stabilizer in a primitive permutation group // Math. Z. 1973. Vol. 133, no. 2. P. 137–168.
9. Liebeck M.W., Praeger Ch.E., Saxl J. On the O’Nan–Scott theorem for finite primitive permutation groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. Vol. 44, no. 3. P. 389–396.

10. On the Sims conjecture and distance transitive graphs / P.J. Cameron, Ch.E. Praeger, J. Saxl, G.M. Seitz // Bull. London Math. Soc. 1983. Vol. 15, no. 5. P. 499–506.
11. **Thompson J.G.** Bounds for the orders of maximal subgroups // J. Algebra. 1970. Vol. 14, no. 1. P. 135–138.
12. **Wielandt H.** Subnormal subgroups and permutation groups: Ohio State Univ. Lecture Notes. Columbus, 1971. 35 p.

Кондратьев Анатолий Семенович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 20.08.14

Трофимов Владимир Иванович

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: trofimov@imm.uran.ru

УДК 517.977

**О ПОЛИЭДРАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ СИНТЕЗА СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ¹****Е. К. Костоусова**

Рассмотрены задачи синтеза управлений для линейных и билинейных дифференциальных систем. Изучены два типа задач: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы. Для обеих задач рассмотрены случаи как без неопределенностей, так и с неопределенностями, включая аддитивные параллелотопо-значные неопределенности и интервальные неопределенности в коэффициентах системы. В работе продолжено развитие методов “полиэдрального” синтеза управлений с использованием полиэдральных (параллелотопо-значных) трубок разрешимости. Представлены нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие указанные полиэдральные трубки разрешимости. Предложены новые стратегии управления, которые могут быть вычислены по явным формулам на основе упомянутых трубок. Рассмотрены аналогичные задачи синтеза для многошаговых систем.

Ключевые слова: синтез управлений, трубки разрешимости, полиэдральные оценки, параллелотопы, интервальный анализ.

E. K. Kostousova. On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis.

We consider control synthesis problems for linear and bilinear differential systems. Two types of problems are studied: when controls are additive and when they enter the matrix of the system. For both types we consider cases without uncertainty and cases with uncertainty, including additive parallelotope-valued uncertainties and interval uncertainties in the coefficients of the system. We continue to develop the methods of “polyhedral” synthesis of controls with the use of polyhedral (parallelotope-valued) solvability tubes. We propose new control strategies, which can be calculated by explicit formulas based on the mentioned tubes, and consider similar synthesis problems for multistep systems.

Keywords: control synthesis, solvability tubes, polyhedral estimates, parallelotopes, interval analysis.

Введение

В работе рассмотрены задачи терминального целевого управления по принципу обратной связи для линейных и билинейных дифференциальных систем без неопределенности и в условиях неопределенности. Известны подходы к решению задач такого рода, в частности методы, основанные на построении трубок разрешимости и стратегий экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [11; 13]. Постановка задачи для линейных систем и подходы к ее решению, а также тесные взаимосвязи между трубками разрешимости, многозначными интегралами (интегралом Ауманна и альтернированным интегралом Понтрягина — соответственно для случаев без и в присутствии неопределенностей), уравнениями Гамильтона — Якоби — Беллмана и уравнениями интегральной воронки могут быть найдены, например, в [14; 15; 26]. Поскольку практическое построение упомянутых трубок может оказаться достаточно затруднительным, разрабатываются различные численные методы, в частности методы для аппроксимации многозначных интегралов и численного решения упомянутых уравнений, включая методы, основанные на аппроксимации множеств политопами с большим количеством вершин и граней [21; 23; 28; 29] (здесь и ниже для примера дано только несколько ссылок из большого числа ра-

¹Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 12-П-1-1019) и грантов РФФИ (проекты 12-01-00043 и 13-01-90419).

бот). Такие методы предназначены для получения как можно более точных аппроксимаций, но могут требовать большого объема вычислений, особенно для систем большой размерности. Другой подход основан на аппроксимации множеств более простыми областями фиксированной формы (в частности, эллипсоидами, параллелепипедами, в том числе параллелепипедами с гранями, параллельными координатным плоскостям, как в интервальном анализе — см., например, [3; 5–10; 12; 14; 18; 20; 21; 24–27] и приведенную там библиографию). Основное преимущество таких методов состоит в том, что они позволяют получать решения относительно простыми средствами (вплоть до явных формул). Для получения более точных аппроксимаций А.Б. Куржанским было предложено использовать целые семейства таких простых оценок [10; 14; 24; 26; 27].

В частности, для решения линейных задач целевого синтеза управлений были предложены вычислительные схемы с использованием эллипсоидальных [6; 14; 26], а затем и полиэдральных [8; 24] методов. Здесь мы продолжаем развитие методов “полиэдрального” синтеза управлений с использованием полиэдральных (параллелотопо-значных) трубок разрешимости. Для дифференциальных систем с линейной/билинейной структурой рассмотрены два типа задач синтеза: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы. Для обеих задач рассмотрены случаи как без неопределенностей, так и с таковыми, включая аддитивные неопределенности с параллелотопо-значными ограничениями и неопределенности интервального типа в коэффициентах системы. Представлены нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающие упомянутые полиэдральные трубки разрешимости. Предложены новые стратегии управления, которые могут быть вычислены по явным формулам на основе этих трубок. В отличие от [6; 14; 24; 26] такие стратегии являются однозначными и определяются явными формулами. Рассмотрены аналогичные задачи синтеза для многошаговых систем. Выведены нелинейные рекуррентные соотношения, описывающие соответствующие полиэдральные трубки разрешимости. Выделены случаи, при которых указанные соотношения задаются явными формулами. В противном случае, при некоторых предположениях (которые естественным образом выполняются для многошаговых систем, полученных из дифференциальных систем с помощью аппроксимаций Эйлера), предложены численные методы решения с помощью последовательных приближений. Найдены стратегии управления, которые могут быть вычислены по явным формулам на основе упомянутых трубок. Указаны связи с результатами, полученными ранее [8; 24]. Результаты численного моделирования будут представлены в другой публикации.

В заключение упомянем для примера ряд работ, посвященных другим подходам к решению различных задач управления в условиях неопределенности и исследованию систем с билинейной (мультипликативной) неопределенностью [1; 16–18; 21; 22].

В работе используются следующие обозначения: \triangleq — знак равенства по определению; \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{n \times m}$ — линейные пространства вещественных n -векторов и $n \times m$ -матриц соответственно; \top — знак транспонирования; $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — разные нормы вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — единичный орт вдоль оси $0x_i$ (единица стоит на i -м месте), $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$; $A = \{a_i^j\} = \{a^1 \dots a^n\}$ — матрица с элементами a_i^j и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов); 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; I — единичная матрица; $\text{Abs } A$ — матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$; $\text{diag } \pi$, $\text{diag } \{\pi_i\}$ — диагональная матрица с компонентами π_i вектора π на диагонали; $\det A$ — определитель матрицы A ; $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_i^i$ — след матрицы A ; $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_i^j|$ — норма матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, индуцированная нормой $\|x\|_\infty$; $A * B = \{a_i^j b_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произведение $n \times n$ -матриц $A = \{a_i^j\}$ и $B = \{b_i^j\}$ в смысле Адамара (поэлементное произведение); $\text{int } \mathcal{X}$ — совокупность внутренних точек множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$; $\mathbf{E}(\mathcal{X})$ совокупность крайних точек [4, с. 121] множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$; $\text{sign } z$ — функция знака числа: равна -1 , 0 , 1 соответственно при $z < 0$, $z = 0$, $z > 0$. Кроме того, используем для краткости обозначения типа $k = 1, \dots, n$ вместо $k = 1, 2, \dots, n$.

1. Постановка задач

Пусть состояние $x(t) \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$\dot{x} = (A(t) + U(t) + V(t))x + u(t) + v(t), \quad t \in T = [0, \theta], \quad (1.1)$$

где $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — известная матричная функция; функции $U(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $u(t) \in \mathbb{R}^n$ — управления, удовлетворяющие одному из следующих ограничений (1.2) и (1.3):

$$U(t) \equiv 0, \quad u(t) \in \mathcal{R}(t), \quad \text{п.в. } t \in T; \quad (1.2)$$

$$U(t) \in \mathcal{U}(t) = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(U - \tilde{U}(t)) \leq \hat{U}(t)\}, \quad u(t) \equiv 0, \quad \text{п.в. } t \in T, \quad (1.3)$$

(т.е. считаем, что в системе может действовать только одно из управлений $u(t) \in \mathbb{R}^n$ или $U(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$); измеримые (по Лебегу) функции $V(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $v(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестные заранее возмущения, удовлетворяющие ограничениям

$$V(t) \in \mathcal{V}(t) = \{V \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(V - \tilde{V}(t)) \leq \hat{V}(t)\}, \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t), \quad \text{п.в. } t \in T; \quad (1.4)$$

матричные и векторные неравенства ($\leq, <, \geq, >$) здесь и ниже понимаются покомпонентно; $\tilde{U}, \hat{U}, \tilde{V}, \hat{V}$ и \mathcal{R}, \mathcal{Q} — известные матричные и многозначные функции соответственно. Задано целевое терминальное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что множества \mathcal{M} и $\mathcal{R}(t), \mathcal{Q}(t)$ являются параллелепипедом и параллелотопами соответственно.

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, |\xi_i| \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p^i\} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособая матрица ($\det P \neq 0$) со столбцами p^i единичной длины ($\|p^i\|_2 = 1$)²; $\pi \in \mathbb{R}^n, \pi \geq 0$. Можно сказать, что p — центр параллелепипеда, P — матрица ориентации, p^i — направления, π_i — величины его “полуосей”. Называем параллелепипед невырожденным, если $\pi > 0$.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, а матрица $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}, m \leq n$, может быть особой (p определяет центр параллелотопа, \bar{P} — форму). Называем параллелотоп невырожденным, если $m = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ — это параллелотоп $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$ с $\bar{P} = P \text{diag } \pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P} \text{diag } \{\|\bar{p}^i\|_2^{-1}\}, \pi_i = \|\bar{p}^i\|_2$ или, иначе, с $P = \bar{P}, \pi = e$, где $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

Итак, везде ниже считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. \mathcal{M} — это невырожденный параллелепипед, $\mathcal{R}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — параллелотопы:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{P}(p_f, P_f, \pi_f) = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f], \quad \bar{P}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det \bar{P}_f \neq 0, \\ \mathcal{R}(t) &= \mathcal{P}[r(t), \bar{R}(t)], \quad \bar{R}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_1}, \quad \mathcal{Q}(t) = \mathcal{P}[q(t), \bar{Q}(t)], \quad \bar{Q}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$r(\cdot), \bar{R}(\cdot), q(\cdot), \bar{Q}(\cdot)$, а также $A(\cdot), \tilde{U}(\cdot), \hat{U}(\cdot) \geq 0, \tilde{V}(\cdot), \hat{V}(\cdot) \geq 0$ — непрерывные векторные и матричные функции.

В дальнейшем при изучении системы иногда будет удобно выделять следующие случаи: (I) система без неопределенности, когда функции v и $V \equiv 0$ известны, т.е. $\bar{Q} \equiv 0, \tilde{V} \equiv \hat{V} \equiv 0$; (II) система в условиях неопределенности, включая следующие возможности: (II, i) — имеется только аддитивная неопределенность ($V \equiv 0$); (II, ii) — только матричная (билинейная) неопределенность ($\bar{Q} \equiv 0$); (II, iii) — имеются оба типа неопределенностей.

В [14; 15; 26] для случаев (I) и (II, i) с управлениями (1.2) была исследована следующая задача целевого синтеза управлений (без и в условиях неопределенности).

²Условие нормировки может быть опущено с целью упрощения формул (оно, в частности, обеспечивает единственность представления параллелепипеда с ненулевыми величинами полуосей).

Задача 1. Для системы (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) в случаях (I) и (II, i) найти множество разрешимости $\mathcal{W}(\tau, \theta, \mathcal{M}) = \mathcal{W}(\tau)$ и такую многозначную позиционную стратегию управления $u = u(t, x)$, $u(\cdot, \cdot) \in U_{\mathcal{R}}^c$, чтобы все решения $x(t)$ дифференциального включения $\dot{x} \in A(t)x + u(t, x) + \mathcal{Q}(t)$, $t \in T$, выпущенные из любой позиции $\{\tau, x_\tau\}$, $x_\tau = x(\tau) \in \mathcal{W}(\tau, \theta, \mathcal{M})$, $\tau \in [0, \theta)$, достигали терминального множества \mathcal{M} в момент θ : $x(\theta) \in \mathcal{M}$. Здесь множество $U_{\mathcal{R}}^c$ состоит из многозначных отображений $u(t, x)$, измеримых по t , полунепрерывных сверху по x , значения которых представляют собой выпуклые компактные множества $u(t, x) \subseteq \mathcal{R}(t)$, $t \in T$.

Многозначную функцию $\mathcal{W}(t)$, $t \in T$, называют *трубкой разрешимости*.

Решение задачи 1 известно [14; 15; 26]. В частности, в [6; 14; 26] разработаны методы “эллипсоидального синтеза” управлений; в [24] введены семейства внешних $\mathcal{P}^+(\cdot)$ и внутренних $\mathcal{P}^-(\cdot)$ параллелепипедо-значных и параллелотопо-значных (короче, *полиэдральных*) оценок для $\mathcal{W}(\cdot)$ и предложен “полиэдральный синтез” управлений. При этом использовались стратегии экстремального прицеливания Н.Н. Красовского. Соответствующие стратегии управления в [24] находились в аналитическом виде на основе решения специфической задачи квадратичного программирования (минимизации квадратичной функции на единичном кубе). Ниже будут рассмотрены задачи 2 и 3 двух типов: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы; обе задачи касаются всех упомянутых случаев неопределенностей: (I), (II, i), (II, ii) и (II, iii). В отличие от задачи 1 будут использованы однозначные стратегии управления. Это оказывается возможным, поскольку предлагаемые стратегии будут непрерывными и даже линейными по x . Более того, они будут построены по явным формулам. Однако следует иметь в виду, что использование предлагаемых для задачи 3 стратегий исчерпывает, вообще говоря, не все потенциальные возможности управления в системе (1.7), (1.3)–(1.5).

Задача 2. Для системы (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}[p^-(t), \bar{P}^-(t)]$, $t \in T$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-(\theta) = \mathcal{M}$ и соответствующую стратегию управления $u = u(t, x)$, удовлетворяющую ограничению $u(t, x) \in \mathcal{R}(t)$ при $x \in \mathcal{P}^-(t)$, п.в. $t \in T$, чтобы каждое решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = (A(t) + V(t))x + u(t, x) + v(t), \quad t \in T, \quad (1.6)$$

с $x(0) = x_0 \in \text{int } \mathcal{P}^-(0)$ было определено на интервале T и не выходило из трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$: $x(t) \in \mathcal{P}^-(t)$, $t \in T$, каковы бы ни были реализации $v(\cdot)$ и $V(\cdot)$, удовлетворяющие (1.4). Более того, ввести целое семейство таких трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$.

Задача 3. Для системы (1.1), (1.3)–(1.5) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}[p^-(t), \bar{P}^-(t)]$, $t \in T$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-(\theta) = \mathcal{M}$ и соответствующую стратегию управления $U = U(t, x)$, удовлетворяющую ограничению $U(t, x) \in \mathcal{U}(t)$ при $x \in \mathcal{P}^-(t)$, п.в. $t \in T$, чтобы каждое решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = (A(t) + U(t, x) + V(t))x + v(t), \quad t \in T, \quad (1.7)$$

с $x(0) = x_0 \in \text{int } \mathcal{P}^-(0)$ было определено на интервале T и не выходило из трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$: $x(t) \in \mathcal{P}^-(t)$, $t \in T$, каковы бы ни были реализации $v(\cdot)$ и $V(\cdot)$, удовлетворяющие (1.4). Ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$.

Рассмотрим также аналогичные задачи синтеза управлений для многошаговых систем вида

$$\begin{aligned} x[k] &= (A[k] + U[k] + V[k])x[k-1] + u[k] + v[k], \quad k = 1, \dots, N, \\ x[N] &\in \mathcal{M} = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f], \quad \det \bar{P}_f \neq 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $U[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $u[k] \in \mathbb{R}^n$ — управления, удовлетворяющие одному из следующих ограничений (1.9) и (1.10):

$$U[k] \equiv 0, \quad u[k] \in \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]], \quad k = 1, \dots, N; \quad (1.9)$$

$$U[k] \in \mathcal{U}[k] = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(U - \tilde{U}[k]) \leq \hat{U}[k]\}, \quad u[k] \equiv 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.10)$$

а $V[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $v[k] \in \mathbb{R}^n$ — неизвестные, но ограниченные возмущения:

$$V[k] \in \mathcal{V}[k] = \{V \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(V - \tilde{V}[k]) \leq \hat{V}[k]\}, \quad v[k] \in \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]], \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.11)$$

Это может представлять как самостоятельный интерес, так и быть полезным с точки зрения построения разностных схем для ОДУ, возникающих при решении задач синтеза для дифференциальных систем (см. (2.1), (2.2) и (3.1), (3.2)).

Задача 4. Для системы (1.8), (1.9), (1.11) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$ и соответствующую стратегию управления $u = u[k, x]$, удовлетворяющую ограничению $u[k, x] \in \mathcal{R}[k]$ при $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + V[k])x[k-1] + u[k, x[k-1]] + v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

с $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ не выходило из трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$: $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были реализации $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$, удовлетворяющие (1.11). Ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

Задача 5. Для системы (1.8), (1.10), (1.11) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$ и соответствующую стратегию управления $U = U[k, x]$, удовлетворяющую ограничению $U[k, x] \in \mathcal{U}[k]$ при $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + U[k, x[k-1]] + V[k])x[k-1] + v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.13)$$

с $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ не выходило из трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$: $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были реализации $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$, удовлетворяющие (1.11). Ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

2. Решение задачи 2

Рассмотрим следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику центров и матриц параллелотопов $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}[p^-(t), \bar{P}^-(t)]$:

$$\frac{dp^-}{dt} = (A(t) + \tilde{V}(t))p^- + r(t) + q(t), \quad p^-(\theta) = p_f, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}^-}{dt} &= (A(t) + \tilde{V}(t))\bar{P}^- + \bar{P}^- \text{diag} \beta(t, \bar{P}^-) + \bar{R}(t)\Gamma(t) + \bar{P}^- \text{diag} \gamma(t, \bar{P}^-), \\ \beta(t, \bar{P}^-) &= \max\{\text{Abs}((\bar{P}^-)^{-1})\tilde{V}(t)\text{Abs}(p^-(t) + \bar{P}^-\xi) \mid \xi \in \mathbf{E}(\mathcal{C})\}, \\ \gamma(t, \bar{P}^-) &= \text{Abs}((\bar{P}^-)^{-1}\bar{Q}(t))e, \quad \bar{P}^-(\theta) = \bar{P}_f. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь (и ниже) операция максимума для векторов понимается покомпонентно; $\mathbf{E}(\mathcal{C})$ — множество всех вершин единичного куба $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e)$, т. е. точек ξ с $\xi_j \in \{-1, 1\}$; $\Gamma(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$ — произвольная измеримая по Лебегу матричная функция, удовлетворяющая

$$\Gamma(t) \in \mathcal{G} \text{ при п.в. } t \in T, \quad \mathcal{G} = \{\Gamma = \{\gamma_i^j\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n} \mid \|\Gamma\| \leq 1\}, \quad \|\Gamma\| = \max_{1 \leq i \leq n_1} \sum_{j=1}^n |\gamma_i^j| \leq 1. \quad (2.3)$$

Будем обозначать множество всех таких функций $\Gamma(\cdot)$ через \mathbb{G} .

Рассмотрим следующую стратегию управления, связанную с трубкой $\mathcal{P}^-(\cdot)$ из (2.1), (2.2):

$$u(t, x) = r(t) + \bar{R}(t)\Gamma(t)\bar{P}^-(t)^{-1}(x - p^-(t)). \quad (2.4)$$

Теорема 1. Пусть для системы (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) выполнено предположение 1 и $\Gamma(\cdot) \in \mathbb{G}$. Тогда система (2.1), (2.2) имеет единственное решение $(p^-(\cdot), \bar{P}^-(\cdot))$ по крайней мере на некотором подынтервале $T_1 = [\tau_1, \theta] \subseteq T$, где $0 \leq \tau_1 < \theta$, причем $\det \bar{P}^-(t) \neq 0$, $t \in T_1$. Если $T_1 = T$, то трубка $\mathcal{P}^-(\cdot)$ и стратегия управления (2.4) дают частное решение задачи 2; в случаях (I) и (II, i) все решения $x(\cdot)$ системы (1.6) с начальными условиями $x(0) \in \mathcal{P}^-(0)$ (а не только с $x(0) \in \text{int} \mathcal{P}^-(0)$) удовлетворяют $x(t) \in \mathcal{P}^-(t)$, $t \in T$.

Для доказательства нам потребуется две леммы, касающиеся свойств решений следующих ОДУ (2.5) и (2.6) относительно $\zeta(t) \in \mathbb{R}^1$ и $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{\zeta} = -b(t)\zeta + c(t), \quad t \in T = [0, \theta], \quad \zeta(0) = \zeta_0; \quad (2.5)$$

$$\dot{\zeta}_i = -b_i(t)\zeta_i + c_i(t, \zeta), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in T = [0, \theta], \quad \zeta(0) = \zeta_0 \quad (2.6)$$

соответственно при условиях (2.7) и (2.8):

$$|\zeta_0| \leq 1, \quad b(t) \geq 0, \quad |c(t)| \leq b(t) \quad \text{при } t \in T; \quad (2.7)$$

$$\zeta_0 \in \text{int } \mathcal{C}, \quad b(t) \geq 0, \quad \text{Abs } c(t, \zeta) \leq b(t) \quad \text{при } \zeta \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e). \quad (2.8)$$

Лемма 1. Пусть $b(t)$ и $c(t)$ в уравнении (2.5) — измеримые ограниченные на T функции. Тогда при условиях (2.7) имеем $|\zeta(t)| \leq 1$ при всех $t \in T$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть в какой-то момент решение вышло на границу области $|\zeta| \leq 1$, а затем за ее пределы, т. е. найдется промежуток $[t_1, t_2] \subseteq T$ такой, что

$$|\zeta(t_1)| = 1, \quad \text{sign } \zeta(t) = \text{sign } \zeta(t_1) \text{ и } |\zeta(t)| > 1 \quad \text{при } t \in (t_1, t_2]. \quad (2.9)$$

Пусть $\text{sign } \zeta(t_1) = 1$ (случай $\text{sign } \zeta(t_1) = -1$ рассматривается аналогично). С учетом (2.7), (2.9)

$$\zeta(t_2) = \zeta(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (-b(\tau)\zeta(\tau) + c(\tau))d\tau \leq 1 + \int_{t_1}^{t_2} b(\tau)(1 - \zeta(\tau))d\tau \leq 1,$$

что противоречит последнему неравенству в (2.9). \square

Лемма 2. Пусть функции $b_i(t)$ и $c_i(t, \zeta)$ в системе (2.6) ограничены и измеримы по t в области $T \times \mathcal{C}$, а $c_i(t, \zeta)$ удовлетворяют условию Липшица по ζ . Тогда при условиях (2.8) $\zeta(t) \in \text{int } \mathcal{C}$ при всех $t \in T$, т. е. $\|\zeta(t)\|_\infty < 1$ при $t \in T$.

Доказательство. Сначала убедимся, что любое решение $\xi(t) = \xi(t, \zeta_0; \varepsilon)$ системы

$$\dot{\xi}_i = -(b_i(t) + \varepsilon)\xi_i + c_i(t, \xi), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in T = [0, \theta], \quad \xi(0) = \zeta_0$$

с $\varepsilon > 0$ и $\zeta_0 \in \text{int } \mathcal{C}$ не может при $t \in T$ выйти за пределы области $(1 - \delta)\mathcal{C} \subset \text{int } \mathcal{C}$, где

$$0 < \delta < \min\{1 - \|\zeta_0\|_\infty, \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon / (\bar{b}_i + \varepsilon)\}, \quad \bar{b}_i = \sup_{t \in T} b_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Предположив противное, получаем, что можно найти такой промежуток $[t_1, t_2] \subseteq T$, что $\xi(t) \in \mathcal{C}$, $t \in [t_1, t_2]$, и хотя бы для одной, пусть i_* -й, компоненты вектор-функции $\xi(t)$ имеем $|\xi_{i_*}(t_1)| = 1 - \delta$; $\text{sign } \xi_{i_*}(t) = \text{sign } \xi_{i_*}(t_1)$ и $|\xi_{i_*}(t)| > 1 - \delta$ при $t \in (t_1, t_2]$. Пусть, для определенности,

$$\xi_{i_*}(t_1) = 1 - \delta, \quad \xi_{i_*}(t) > 1 - \delta, \quad t \in (t_1, t_2], \quad (2.11)$$

(случай $\xi_{i_*}(t) = -1 + \delta$ рассматривается аналогично). Тогда аналогично оценкам из леммы 1 имеем с учетом (2.8), (2.11), (2.10):

$$\xi_{i_*}(t_2) \leq 1 - \delta + \int_{t_1}^{t_2} (-(b_{i_*}(\tau) + \varepsilon)(1 - \delta) + b_{i_*}(\tau))d\tau \leq 1 - \delta + (t_2 - t_1)(\delta(\bar{b}_{i_*} + \varepsilon) - \varepsilon) < 1 - \delta,$$

что противоречит (2.11). Таким образом, действительно, $\xi(t) \in (1 - \delta)\mathcal{C} \subset \text{int } \mathcal{C}$, $t \in T$.

Теперь в силу непрерывной зависимости решения $\xi(t, \zeta_0; \varepsilon)$ от параметра ε (см., например, [19, с. 13, теорема 6]) получаем, что и для решения $\zeta(t)$ системы (2.6) с $\zeta(0) = \zeta_0 \in \text{int } \mathcal{C}$ имеем $\zeta(t) \in \text{int } \mathcal{C}$, $t \in T$. \square

Доказательство теоремы 1. Система ОДУ (2.1), (2.2) распадается на линейную подсистему для p^- и подсистему для \bar{P}^- , в которой непрерывную функцию $p^-(t)$, $t \in T$, можно считать известной. Существование и единственность решения \bar{P}^- на некотором промежутке $T_1 = [\tau_1, \theta] \subseteq T$ следуют из известных результатов [19] аналогично [9; 24].

Предположим, что функция \bar{P}^- определена на всем отрезке T и $\det \bar{P}^-(t) \neq 0$, $t \in T$. Пусть $x_0 \in \text{int } \mathcal{P}^-(0)$ ($x_0 \in \mathcal{P}^-(0)$ для случаев (I) и (II, i)). Пусть $x(\cdot)$ — решение системы (1.6), соответствующее стратегии управления $u = u(t, x)$ из (2.4) и произвольным допустимым функциям $v(\cdot)$ и $V(\cdot)$ (т.е. $v(t) = q(t) + \bar{Q}(t)\chi(t)$, $\|\chi(t)\|_\infty \leq 1$, а $V(\cdot)$ удовлетворяет (1.4)), с начальным условием $x(0) = x_0$, т.е. имеем $x(0) = p^-(0) + \bar{P}^-(0)\zeta_0$, где $\|\zeta_0\|_\infty < 1$ (соответственно, $\|\zeta_0\|_\infty \leq 1$). Представим $x(t) - p^-(t)$ в виде $x(t) - p^-(t) = \bar{P}^-(t)\zeta(t)$ (иначе говоря, разложим $x(t) - p^-(t)$ по векторам базиса, составленного из столбцов матрицы $\bar{P}^-(t)$, невырожденной по условию теоремы³). Дифференцируя это равенство, получаем следующее соотношение для функции ζ : $\frac{d}{dt}\zeta = -(\bar{P}^-)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\bar{P}^-\right)\zeta + (\bar{P}^-)^{-1}\frac{d}{dt}(x - p^-)$ (здесь и в ряде мест ниже в доказательствах для сокращения опущены аргументы у функций). Принимая во внимание (2.2) и равенство $\frac{d}{dt}(x - p^-) = (A + \tilde{V})(x - p^-) + (V - \tilde{V})x + u - r + v - q$, которое следует из (1.6), (2.1), несложно видеть, что

$$\dot{\zeta} = -(\text{diag } \beta + \text{diag } \gamma)\zeta - (\bar{P}^-)^{-1}\bar{R}\Gamma\zeta + (\bar{P}^-)^{-1}((V - \tilde{V})x + u - r + v - q).$$

Обозначим $b(t) = \beta(t, \bar{P}^-(t)) + \gamma(t, \bar{P}^-(t))$, $c(t, \zeta) = \bar{P}^-(t)^{-1}((V(t) - \tilde{V}(t)) \cdot (p^-(t) + \bar{P}^-(t)\zeta) + \bar{Q}(t)\chi(t))$. Тогда ввиду (2.4), (1.4) и (1.5) получаем, что ζ удовлетворяет системе (2.6), для которой выполнены условия (2.8), и, следовательно, ввиду леммы 2 имеем $\zeta(t) \in \mathcal{C}$, $t \in T$. Если же $c(t, \zeta) \equiv c(t)$ (т.е., не зависит от ζ), то по лемме 1 $\zeta(t) \in \mathcal{C}$, $t \in T$, при $\zeta(0) \in \mathcal{C}$. Таким образом, доказано, что $x(t) \in \mathcal{P}^-(t)$, $t \in T$.

Включения $u(t, x) \in \mathcal{R}(t)$ выполняются при $x \in \mathcal{P}^-(t)$ в силу того, что для таких x имеем $\|\Gamma(t)\bar{P}^-(t)^{-1}(x - p^-(t))\|_\infty \leq \|\Gamma(t)\| \|\bar{P}^-(t)^{-1}(x - p^-(t))\|_\infty \leq 1 \cdot 1 = 1$. \square

Теорема 1 описывает целое семейство трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$ (параметром служит функция $\Gamma(\cdot)$). Таким образом, множество $\mathcal{W}^0 = \bigcup\{\text{int } \mathcal{P}^-(0) \mid \Gamma(\cdot) \in \mathbb{G}, \Gamma(\cdot) \text{ — такие что } \det \mathcal{P}^-(t) \neq 0, t \in T\}$ (а в случаях (I) и (II, i) — аналогичное множество $\mathcal{W}^0 = \bigcup \mathcal{P}^-(0)$) дает множество начальных состояний, из которых система может быть переведена на целевое множество \mathcal{M} за время θ при помощи решения задачи 2. Но, вообще говоря, нельзя утверждать, что $\det \mathcal{P}^-(0) \neq 0$ или даже что $\mathcal{P}^-(0) \neq \emptyset$ для каждой функции $\Gamma(\cdot) \in \mathbb{G}$.

З а м е ч а н и е 1. Для случаев (I) и (II, i) упомянутое семейство трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$ совпадает с семейством внутренних оценок для $\mathcal{W}(\cdot)$, введенным в [24]. Из [24; 25] следует, что для случая (I) имеем $T_1 = T$ для каждой $\Gamma(\cdot) \in \mathbb{G}$ и $\mathcal{W}(0) = \bigcup\{\mathcal{P}^-(0) \mid \Gamma(\cdot) \in \mathbb{G}\}$. Но отсюда нельзя сделать вывод, что $\mathcal{W}^0 = \mathcal{W}(0)$, поскольку нельзя исключить ситуацию, когда сечение трубки становится вырожденным параллелотопом, и тогда стратегия управления (2.4) неприменима.

Привлекательным свойством стратегий управления (2.4) является их явный вид. Такой закон управления, вообще говоря, зависит от начального состояния x_0 , так как он зависит от трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$, начальное сечение $\mathcal{P}^-(0)$ которой содержит x_0 , но он одинаков для всех $x_0 \in \mathcal{P}^-(0)$.

З а м е ч а н и е 2. Один из возможных эвристических способов выбора параметра $\Gamma(\cdot)$ основан на использовании “локальной оптимизации” объема сечений трубки аналогично [24]. А именно пусть, без ограничения общности, $\det \bar{P}_f > 0$ (в противном случае положительности легко добиться умножением какого-либо столбца \bar{P}_f на -1). Введем произвольное конечное разбиение T_N отрезка T точками τ_k , например $\tau_k = kh_N$, $k = 0, \dots, N$, $h_N = \theta N^{-1}$. Интегрируя

³Заметим, что условие невырожденности матриц $\bar{P}^-(t)$ накладывается даже в простейшем случае (I) (без неопределенности), когда система (2.2) оказывается линейной и, следовательно, ее решение определено на всем T .

систему (2.1), (2.2) справа налево, будем в моменты $\tau \in T_N$ решать оптимизационную задачу $\min_{\Gamma} \text{tr}(\Xi(\tau, \bar{P}^-(\tau))\Gamma)$, $\Gamma \in \mathcal{G}$, где $\Xi(\tau, \bar{P}^-) = (\bar{P}^-)^{-1}\bar{R}(\tau)$. Это эквивалентно нахождению (локально) максимально возможной, за счет выбора значения Γ , скорости возрастания (справа налево) $\det \bar{P}^-(\tau)$ (а значит, и $\text{vol } \mathcal{P}^-(\tau)$) в момент τ при уже вычисленном и зафиксированном значении $\bar{P}^-(\tau)$. Так можем последовательно построить кусочно-постоянную функцию $\Gamma(t) \equiv \Gamma(\tau_k) \in \text{Argmin}_{\Gamma \in \mathcal{G}} \text{tr}(\Xi(\tau_k, \bar{P}^-(\tau_k))\Gamma)$, $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k = N, \dots, 1$, и найти $\bar{P}^-(\cdot)$.

З а м е ч а н и е 3. В случае (I) можно также, подобно [25], находить $\Gamma(\cdot)$, минимизируя $\text{tr}(\Xi(\tau, \bar{P}^-(\tau))\Gamma)$ по Γ , удовлетворяющим не только $\Gamma \in \mathcal{G}$, но еще некоторым дополнительным ограничениям, вводимым для того, чтобы внутренние оценки $\mathcal{P}^-(t)$ для $\mathcal{W}(t)$ получались тугими [27]. Заметим, решения обеих оптимизационных задач известны в явном виде [24; 25].

3. Решение задачи 3

Рассмотрим теперь следующую систему нелинейных ОДУ для $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}[p^-(t), \bar{P}^-(t)]$:

$$\frac{dp^-}{dt} = (A(t) + \tilde{U}(t) + \tilde{V}(t))p^- + q(t), \quad p^-(\theta) = p_f, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}^-}{dt} &= (A(t) + \tilde{U}(t) + \tilde{V}(t))\bar{P}^- - \Phi(t, \bar{P}^-)\bar{P}^- + \bar{P}^- \text{diag}(\beta(t, \bar{P}^-) + \gamma(t, \bar{P}^-)), \\ \Phi(t, \bar{P}^-) &= \Phi(t, \bar{P}^-; \Omega(t), J(t)) = (\hat{U}(t) * \Omega(t)) \text{diag} \eta(t, \bar{P}^-) \Pi(t) \text{diag} \kappa(\bar{P}^-), \\ \eta(t, \bar{P}^-) &= \max\{0, \text{Abs } p^-(t) - (\text{Abs } \bar{P}^-)e\}, \\ \kappa_i(\bar{P}^-) &= ((e^i)^\top (\text{Abs } \bar{P}^-) e)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \beta(t, \bar{P}^-) &= \max\{\text{Abs}((\bar{P}^-)^{-1})\hat{V}(t) \text{Abs}(p^-(t) + \bar{P}^- \xi) \mid \xi \in \mathbf{E}(\mathcal{C})\}, \\ \gamma(t, \bar{P}^-) &= \text{Abs}((\bar{P}^-)^{-1}\bar{Q}(t))e, \quad \bar{P}^-(\theta) = \bar{P}_f. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $\Omega(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произвольная измеримая матричная функция, удовлетворяющая

$$\Omega(t) \in \mathcal{O} \text{ при п.в. } t \in T, \quad \mathcal{O} = \{\Omega = \{\omega_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid |\omega_i^j| \leq 1, i, j = 1, \dots, n\}; \quad (3.3)$$

символом $*$ обозначена операция поэлементного произведения матриц; $\Pi(t) = \Pi(J(t)) = \{e^{j_i}\}$ — матрица, полученная перестановкой столбцов единичной матрицы, где $\{j_1, \dots, j_n\} \stackrel{\Delta}{=} J$ — произвольная перестановка чисел $\{1, \dots, n\}$, которую также можно считать измеримой (векторной) функцией. Обозначим через \mathbb{O} и \mathbb{J} множества всех таких функций $\Omega(\cdot)$ и $J(\cdot)$ соответственно. Рассмотрим стратегию управления $U(\cdot, \cdot)$, связанную с трубкой $\mathcal{P}^-(\cdot)$ из (3.1), (3.2) и определяемую следующими формулами для столбцов матричной функции $U(t, x)$:

$$U(t, x)e^i = \tilde{U}(t)e^i - \begin{cases} (x_{j_i} - p_{j_i}^-(t))(x_i)^{-1}\Phi(t, \bar{P}^-(t))e^{j_i}, & \text{если } x_i \neq 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Лемма 3. Если $\det \bar{P}^-(t) \neq 0$, то значения матрицы $\Phi(t, \bar{P}^-(t)) = \{\varphi^i(t, \bar{P}^-(t))\}$, задаваемой формулами (3.2), определены. При этом для $x \in \mathcal{P}^-(t)$ стратегия (3.4) действует по правилу

$$U(t, x)x = \tilde{U}(t)x - \Phi(t, \bar{P}^-(t))(x - p^-(t)). \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если матрица $\bar{P}^-(t)$ неособая, то она не может иметь нулевых строк и, значит, знаменатели всех компонент Φ отличны от нуля: $(e^i)^\top (\text{Abs } \bar{P}^-) e \neq 0$. Для доказательства (3.5) достаточно убедиться, что при $x_i = 0$ имеем $\varphi^{j_i} = 0$. Покажем, от противного, что $\varphi^{j_i} \neq 0$ невозможно. В силу (3.2) и соотношений $\Pi e^{j_i} = e^i$, j_i -й столбец матрицы Φ может быть представлен в виде $\varphi^{j_i} = (\hat{U} * \Omega) \text{diag} \eta \Pi e^{j_i} \kappa_{j_i} = (\hat{U} * \Omega) e^i \eta_i \kappa_{j_i}$. Отсюда видно, что из $\varphi^{j_i} \neq 0$ следует $\eta_i \neq 0$ и в силу формулы для η имеем $|p_i^-| - (e^i)^\top (\text{Abs } \bar{P}^-) e > 0$. Включение $x \in \mathcal{P}^-(t)$ означает, что $x = p^- + \bar{P}^- \zeta$, где $\|\zeta\|_\infty \leq 1$, и, следовательно, $|x_i| \geq |p_i^-| - |(e^i)^\top \bar{P}^- \zeta| \geq |p_i^-| - (e^i)^\top (\text{Abs } \bar{P}^-) e > 0$, что противоречит равенству $x_i = 0$. \square

Теорема 2. Пусть для системы (1.1), (1.3)–(1.5) выполнено предположение 1 и $\Omega(\cdot) \in \mathbb{O}$, $J(\cdot) \in \mathbb{J}$. Тогда система (3.1), (3.2) имеет единственное решение $(p^-(\cdot), \bar{P}^-(\cdot))$ по крайней мере на некотором подынтервале $T_1 = [\tau_1, \theta] \subseteq T$, где $0 \leq \tau_1 < \theta$, причем $\det \bar{P}^-(t) \neq 0$, $t \in T_1$. Если $T_1 = T$, то трубка $\mathcal{P}^-(\cdot)$ и стратегия управления (3.4) (действие которой может быть записано также в виде (3.5)) дают частное решение задачи 3; в случаях (I) и (II, i) все решения $x(\cdot)$ системы (1.7) с начальными условиями $x(0) \in \mathcal{P}^-(0)$ (а не только $x(0) \in \text{int } \mathcal{P}^-(0)$) удовлетворяют $x(t) \in \mathcal{P}^-(t)$, $t \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема доказательства подобна схеме для теоремы 1. Существование и единственность решения $\bar{P}^-(\cdot)$ и, значит, соответствующей трубки $\mathcal{P}^-(\cdot)$ на некотором промежутке $T_1 = [\tau_1, \theta] \subseteq T$ следуют из известных результатов [19] аналогично [9; 24].

При условии, что параллелотопы $\mathcal{P}^-(t)$ определены и невырождены на всем отрезке T , пусть $x(\cdot)$ — решение системы (1.7), соответствующее таким же, как при доказательстве теоремы 1, x_0 , $v(\cdot)$ и $V(\cdot)$ и стратегии управления $U(t, x)$ вида (3.4). В силу леммы 3 до тех пор, пока $x(t)$ не выходят за пределы соответствующих сечений $\mathcal{P}^-(t)$, значение $U(t, x)x$ определяется также формулой (3.5), и, следовательно, система (1.7) фактически превращается в линейную по x . Записывая опять $x(t) - p^-(t)$ в виде $x(t) - p^-(t) = \bar{P}^-(t)\zeta(t)$, конкретизируем правые части соотношений $\frac{d}{dt}\zeta = -(\bar{P}^-)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\bar{P}^-\right)\zeta + (\bar{P}^-)^{-1}\frac{d}{dt}(x - p^-)$ в условиях теоремы 2. Учитывая (3.2) и соотношение $\frac{d}{dt}(x - p^-) = (A + \tilde{U} + \tilde{V})(x - p^-) - \Phi(x - p^-) + (V - \tilde{V})x + v - q$, которое следует из (1.7), (3.1), (3.5), нетрудно видеть, что $\dot{\zeta} = -(\text{diag } \beta + \text{diag } \gamma)\zeta + (\bar{P}^-)^{-1}((V - \tilde{V})x + v - q)$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем, что $x(t) \in \mathcal{P}^-(t)$ при $t \in T$.

Осталось проверить, что $\text{Abs}(U(t, x) - \tilde{U}(t)) \leq \hat{U}(t)$ при $x \in \mathcal{P}^-(t)$. Рассмотрим произвольное $i \in \{1, \dots, n\}$ и убедимся, что для соответствующих i -х столбцов действительно $\text{Abs}(u^i(t, x) - \tilde{u}^i(t)) \leq \hat{u}^i(t)$. Если точка x такова, что $x_i = 0$, то это неравенство выполняется, поскольку в силу (3.4) $\text{Abs}(u^i - \tilde{u}^i) = 0 \leq \hat{u}^i$. Пусть $x \in \mathcal{P}^-(t)$ и $x_i \neq 0$. Тогда $x - p^- = \bar{P}^-\zeta$, где $\text{Abs } \zeta \leq e$, и $x_j = p_j^- + (e^j)^\top(x - p^-) = p_j^- + (e^j)^\top \bar{P}^-\zeta$, $j = 1, \dots, n$, откуда, с учетом (3.4), (3.2) и $\Pi e^{j_i} = e^i$,

$$\text{Abs}(u^i - \tilde{u}^i) = \frac{\text{Abs}(\hat{U} * \Omega)e^i \max\{0, |p_i^-| - (e^i)^\top(\text{Abs } \bar{P}^-)e\}}{(e^{j_i})^\top(\text{Abs } \bar{P}^-)e} \cdot \frac{|(e^{j_i})^\top \bar{P}^-\zeta|}{|p_i^- + (e^i)^\top \bar{P}^-\zeta|}.$$

Если $|p_i^-| < (e^i)^\top(\text{Abs } \bar{P}^-)e$, то $\text{Abs}(u^i - \tilde{u}^i) = 0 \leq \hat{u}^i$. В противном случае, ввиду (3.3), опять

$$\text{Abs}(u^i - \tilde{u}^i) \leq \hat{u}^i \cdot \frac{|p_i^-| - (e^i)^\top(\text{Abs } \bar{P}^-)e}{(e^{j_i})^\top(\text{Abs } \bar{P}^-)e} \cdot \frac{(e^{j_i})^\top(\text{Abs } \bar{P}^-)e}{|p_i^-| - (e^i)^\top(\text{Abs } \bar{P}^-)e} = \hat{u}^i. \quad \square$$

Теорема 2 описывает целое семейство трубок $\mathcal{P}^-(\cdot)$, где параметрами служат функции $\Omega(\cdot)$ и $J(\cdot)$. Таким образом, множество $\mathcal{W}^0 = \bigcup\{\text{int } \mathcal{P}^-(0) \mid \Omega(\cdot) \in \mathbb{O}, J(\cdot) \in \mathbb{J}, \Omega(\cdot) \text{ и } J(\cdot) \text{ такие что } \det \mathcal{P}^-(t) \neq 0, t \in T\}$ (а в случаях (I) и (II, i) — аналогичное множество $\mathcal{W}^0 = \bigcup \mathcal{P}^-(0)$) дает множество начальных состояний, из которых система может быть переведена на целевое множество \mathcal{M} за время θ при помощи решения задачи 3.

З а м е ч а н и е 4. Полагая $\Omega(t) \equiv \Pi(t)^\top$, получаем подсемейство трубок, зависящих от одного параметра $J(\cdot)$; при этом матрицы Φ из (3.2) превращаются в диагональные:

$$\Phi(t, \bar{P}^-) = \text{diag } \alpha(t, \bar{P}^-), \quad \alpha_i(t, \bar{P}^-) = \alpha_i(t, \bar{P}^-; J(t)) = \hat{u}_i^{j_i}(t) \eta_{j_i}(t, \bar{P}^-) \kappa_i(\bar{P}^-), \quad i=1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Конструкции такого рода использовались в [9] для построения внутренних оценок множеств достижимости систем с билинейной неопределенностью. Там же приведены некоторые условия, при которых предлагаемые конструкции могут оказаться наиболее/наименее эффективными. В частности, следует иметь в виду, что при $\mathcal{P}^-(t) \ni 0$ получается $\eta(t, \bar{P}^-) = 0$ и, значит, $\Phi(t, \bar{P}^-) = 0$.

З а м е ч а н и е 5. Один из возможных эвристических способов выбора параметров $\Omega(\cdot)$, $J(\cdot)$ основан на использовании “локальной оптимизации” объема сечений трубки аналогично [9]. А именно при $\det \bar{P}_f > 0$, будем, подобно замечанию 2, при интегрировании системы (3.1), (3.2) справа налево решать в моменты $\tau \in T_N$ задачу максимизации значения $\text{tr} \Phi(\tau, \bar{P}^-(\tau); \Omega, J) = \sum_{i=1}^n \omega_i^{j_i} \alpha_i(\tau, \bar{P}^-(\tau); J)$ по всем возможным $\Omega \in \mathcal{O}$ и перестановкам $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ (значения α_i указаны в (3.6)). Это эквивалентно нахождению (локально) максимально возможной, за счет выбора Ω, J , скорости возрастания (справа налево) $\det \bar{P}^-(\tau)$ в момент τ при уже найденном значении $\bar{P}^-(\tau)$. Очевидно, что максимум по Ω достигается на матрицах, удовлетворяющих $\omega_i^{j_i} = 1, i=1, \dots, n$, и в частности при $\Omega \equiv \Pi(J)^\top$. В результате можем последовательно построить кусочно-постоянные функции $J(t) \equiv J(\tau_k) \in \text{Argmax}_J \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau_k, \bar{P}^-(\tau_k); J)$, $\Omega(t) \equiv \Pi(J(\tau_k))^\top, t \in (\tau_{k-1}, \tau_k], k = N, \dots, 1$, и найти $\bar{P}^-(\cdot)$.

Процедуры из замечаний 2 и 5 не гарантируют получение параллелотопов $\mathcal{P}^-(0)$ с наибольшими возможными (при варьировании $\Gamma(\cdot)$ и $\Omega(\cdot), J(\cdot)$) объемами даже при $N \rightarrow \infty$.

4. Решение задачи 4

Для решения задачи 4 рассмотрим следующую систему нелинейных рекуррентных соотношений для параллелотопов $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$:

$$p^-[k-1] = B[k]^{-1}(p^-[k] - r[k] - q[k]), \quad B[k] = A[k] + \tilde{V}[k], \quad k=N, \dots, 1, \quad p^-[N] = p_f, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}^-[k-1] &= P^1[k] - P^0[k] \text{diag} \beta[k], \quad P^1[k] = B[k]^{-1}(\bar{P}^-[k] \text{diag} (e - \gamma[k]) - \bar{R}[k] \Gamma[k]), \\ P^0[k] &= B[k]^{-1} \bar{P}^-[k], \quad \gamma[k] = (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1} \bar{Q}[k]))e, \quad k = N, \dots, 1, \quad \bar{P}^-[N] = \bar{P}_f, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\beta[k]$ удовлетворяет одной из двух следующих систем (либо неравенств (4.3), либо уравнений (4.4)):

$$\beta[k] = \beta^{(1)}[k], \quad H[k, \beta^{(1)}[k]] \leq \beta^{(1)}[k] \leq e - \gamma[k], \quad k = N, \dots, 1; \quad (4.3)$$

$$\beta[k] = \beta^{(2)}[k], \quad \beta^{(2)}[k] = H[k, \beta^{(2)}[k]]. \quad (4.4)$$

Здесь

$$H[k, \beta] = \max_{\xi \in \mathbf{E}(C)} (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1})) \hat{V}[k] \text{Abs}(p^-[k-1] + P^1[k] \xi - P^0[k] \text{diag} \xi \cdot \beta), \quad C = \mathcal{P}(0, I, e). \quad (4.5)$$

Теорема 3. Пусть в управляемой системе (1.8), (1.9), (1.11) целевое множество \mathcal{M} — это невырожденный параллелепипед и все матрицы $B[k]$ из (4.1) неособые. Пусть $\Gamma[k]$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие условиям $\Gamma[k] \in \mathcal{G}, k = N, \dots, 1$, (множества \mathcal{G} определены в (2.3)), и система (4.1)–(4.3), (4.5) (система (4.1), (4.2), (4.4), (4.5)) имеет решение $(p^-[k], \bar{P}^-[k])$, удовлетворяющее соотношениям $\det \bar{P}^-[k] \neq 0$ (и $e - \gamma[k] - \beta[k] \geq 0$ во втором случае), $k = N, \dots, 1$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-[k]$ и стратегия управления⁴

$$u[k, x] = r[k] + \bar{R}[k] \Gamma[k] \bar{P}^-[k-1]^{-1} (x - p^-[k-1]), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

дают частное решение задачи 4. Для случаев (I), (II, i), аналогичных указанным в разд. 1 (т. е. при $\hat{V}[k] \equiv 0$), имеем $H[k, \beta] = 0$ и уравнения (4.4) превращаются в явные формулы $\beta[k] = 0$.

Для доказательства потребуются две леммы. Первая показывает, что значения $H[k, \beta]$ в (4.5) совпадают со значениями, получающимися при максимизации по $\xi \in C$.

Лемма 4. Пусть $a \in \mathbb{R}^n, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \geq 0, \phi(\xi) = B \text{Abs}(a + A\xi)$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\max_{\xi \in C} \phi(\xi) = \max_{\xi \in \mathbf{E}(C)} \phi(\xi)$, где максимум понимается покомпонентно.

⁴Здесь индекс k у $u[k, x]$ указывает, что $u[k, x]$ применяется в системе (1.12) на k -м шаге. Формулы (4.6) показывают, что $u[k, x]$ определяется множеством $\mathcal{R}[k]$ и параметром $\Gamma[k]$ в момент k и параллелотопом $\mathcal{P}^-[k-1]$ в момент $k-1$. Зависимость u от $k-1$ не указываем для упрощения обозначений.

Доказательство следует из выпуклости каждой компоненты функции ϕ и того, что \mathcal{C} совпадает с выпуклой комбинацией своих крайних точек $\xi^j \in \mathbf{E}(\mathcal{C})$. \square

Следующая лемма касается свойств решений рекуррентных соотношений типа

$$\zeta[k] = (1 - b[k])\zeta[k-1] + c[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad \zeta[0] = \zeta_0, \quad (4.7)$$

где

$$0 \leq b[k] \leq 1, \quad |c[k]| \leq b[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad \zeta_0 \in [-1, 1]. \quad (4.8)$$

Лемма 5. Если $\zeta[k] \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяют (4.7), (4.8), где $b[k]$ и $c[k]$ — известные числа (причем $c[k]$ могут также зависеть от $\zeta[k-1]$), то имеем $\zeta[k] \in [-1, 1]$ при всех $k = 1, \dots, N$.

Доказательство по индукции: $|\zeta[k]| \leq |1 - b[k]| \cdot 1 + |c[k]| = 1 - b[k] + |c[k]| \leq 1$. \square

Доказательство теоремы 3 подобно доказательству теоремы 1. Пусть $x[\cdot]$ — решение системы (1.8), соответствующее $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^- [0]$ (где $x_0 = p^- [0] + \bar{P}^- [0]\zeta_0$, $\|\zeta_0\|_\infty \leq 1$), стратегии управления $u = u[k, x]$ из (4.6) и произвольным допустимым $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$ (т.е. $v[k] = q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k]$, $\|\chi[k]\|_\infty \leq 1$; $\text{Abs}(V[k] - \tilde{V}[k]) \leq \hat{V}[k]$ при всех k). Представим векторы $x[k]$ в виде

$$x[k] = p^- [k] + \bar{P}^- [k]\zeta[k], \quad k = 0, \dots, N. \quad (4.9)$$

Тогда с учетом (1.8) при $U[k] = 0$, (4.1) и (4.6) получаем следующие соотношения для $\zeta[\cdot]$:

$$\begin{aligned} \zeta[k] &= \bar{P}^- [k]^{-1}(x[k] - p^- [k]) \\ &= \bar{P}^- [k]^{-1}(B[k](p^- [k-1] + \bar{P}^- [k-1]\zeta[k-1]) + \Delta V[k]x[k-1] + u[k, x[k-1]] + q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k] - p^- [k]) \\ &= \bar{P}^- [k]^{-1}(B[k]\bar{P}^- [k-1]\zeta[k-1] + \Delta V[k]x[k-1] + \bar{R}[k]\Gamma[k]\zeta[k-1] + \bar{Q}[k]\chi[k]), \end{aligned}$$

где $\Delta V[k] = V[k] - \tilde{V}[k]$, $\text{Abs} \Delta V[k] \leq \hat{V}[k]$, $\text{Abs} \chi[k] \leq e$. Обозначая $c[k, x] = \bar{P}^- [k]^{-1}(\Delta V[k]x + \bar{Q}[k]\chi[k])$ и учитывая (4.2), имеем

$$\zeta[k] = \text{diag}(e - \gamma[k] - \beta[k])\zeta[k-1] + c[k, x[k-1]]. \quad (4.10)$$

При этом, очевидно, $\text{Abs}(\bar{P}^- [k]^{-1}\bar{Q}[k]\chi[k]) \leq \gamma[k]$. С учетом формул (4.2), (4.5), $(\text{diag} \xi)\beta = (\text{diag} \beta)\xi$ и леммы 4 имеем $\text{Abs}(\bar{P}^- [k]^{-1}\Delta V[k]x) \leq H[k, \beta[k]]$ при $x \in \mathcal{P}^- [k-1]$. Поэтому если $\beta[k]$ удовлетворяет либо первому неравенству в (4.3), либо (4.4), то

$$\text{Abs} c[k, x] \leq \beta[k] + \gamma[k] \quad \text{при } x \in \mathcal{P}^- [k-1]. \quad (4.11)$$

При $e - \gamma[k] - \beta[k] \geq 0$ каждая компонента $\zeta[k]$ удовлетворяет условиям леммы 5 и, значит, имеем $\|\zeta[k]\|_\infty \leq 1$, $k = 1, \dots, N$, т.е. $x[k] \in \mathcal{P}^- [k]$ при всех k .

Включения $u[k, x] \subseteq \mathcal{R}[k]$ при $x \in \mathcal{P}^- [k-1]$ проверяются аналогично теореме 1. \square

З а м е ч а н и е 6. Из принципа сжимающих отображений вытекает [2, с. 319], что если оператор $H[k, \beta]$ вида (4.5) в системе уравнений (4.4) сжимающий, т.е.

$$\|H[k, \beta^1] - H[k, \beta^2]\|_\infty \leq L[k]\|\beta^1 - \beta^2\|_\infty \quad (4.12)$$

при любых $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{R}^n$, где $0 < L[k] < 1$, то уравнение $\beta = H[k, \beta]$ имеет единственное решение $\beta = \beta[k]$, неотрицательное с учетом (4.5), и оно может быть найдено методом простой итерации $\beta^{l+1} = H[k, \beta^l]$, $l=0, 1, \dots$, начиная с произвольного $\beta^0 \in \mathbb{R}^n$; если $\beta^0 = 0$, то $\|\beta^l - \beta\|_\infty \leq L[k]^l(1 - L[k])^{-1}\|(\text{Abs}(\bar{P}^- [k]^{-1}))\hat{V}[k]\|(\|p^- [k-1]\|_\infty + \|P^1[k]\|)$ (используем матричную норму вида $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}^j|$, индуцированную векторной нормой $\|x\|_\infty$).

Это замечание полезно иметь в виду при рассмотрении многошаговых систем (1.8)–(1.11), получающихся при аппроксимации дифференциальных систем (1.1)–(1.5) по схеме Эйлера⁵:

$$\begin{aligned} A[k] &= I + h_N A(t_{k-1}), \quad \tilde{U}[k] = h_N \tilde{U}(t_{k-1}), \quad \hat{U}[k] = h_N \hat{U}(t_{k-1}), \\ \tilde{V}[k] &= h_N \tilde{V}(t_{k-1}), \quad \hat{V}[k] = h_N \hat{V}(t_{k-1}), \quad \mathcal{R}[k] = h_N \mathcal{R}(t_{k-1}), \quad \mathcal{Q}[k] = h_N \mathcal{Q}(t_{k-1}), \\ t_k &= kh_N, \quad k = N, \dots, 1, \quad h_N = \theta N^{-1}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

— с таким же целевым множеством $\mathcal{M} = \mathcal{P}(p_f, P_f, \pi_f) = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f]$, как и в исходной системе. Действительно, рассмотрим систему уравнений (4.4) при фиксированном k . Если $\det \bar{P}^- [k] \neq 0$, то, используя определение субградиента выпуклой функции [4, с. 230] и правила субдифференцирования 8, 7, 4 из [4, с. 236–238], можно проверить, что $H[k, \beta]$ удовлетворяет (4.12), где

$$L[k] = \|(\text{Abs}(\bar{P}^- [k]^{-1})) \hat{V}[k] \text{Abs}(P^0[k])\|, \quad (4.14)$$

матрица $P^0[k]$ введена в (4.2). Из (4.13), (4.14) и (4.2) видно, что при достаточно малом h_N оператор $H[k, \beta]$ в системе (4.4), (4.5) оказывается сжимающим ($L[k] < 1$) и выполнено желаемое соотношение $\gamma[k] + \beta[k] < \epsilon$. Поэтому для многошаговых систем такого типа, по-видимому, удобнее находить $\beta[k]$ из (4.4), а не решать системы неравенств (4.3).

Для случаев (I) и (II, i) (без неопределенности в матрицах) семейство трубок $\mathcal{P}^- [\cdot]$, описываемых соотношениями (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) (где получается $\beta[k] = 0$), совпадает с семейством внутренних оценок трубки разрешимости $\mathcal{W}[\cdot]$ для многошагового аналога задачи 1, описанным в [8, теорема 3.3] (где эта задача рассматривалась в несколько более общей постановке — при наличии в системе фазовых ограничений)⁶. Однако стратегии управления в [8, формула (3.5)] конструировались в ином виде (с помощью решения систем линейных неравенств, задающих пересечение двух параллелотопов); привлекательным же свойством стратегий (4.6) является их явный вид.

З а м е ч а н и е 7. Как и выше для задач синтеза для дифференциальных систем, вообще говоря, нельзя утверждать, что $\det \mathcal{P}^- [0] \neq 0$ или даже что $\mathcal{P}^- [0] \neq \emptyset$ для каждой допустимой функции $\Gamma[\cdot]$. В условиях (4.13) и $\det \bar{P}_f > 0$ один из возможных эвристических способов выбора параметра $\Gamma[\cdot]$ основан на использовании “локальной оптимизации” объема сечений трубки и соотношении типа $\det(I + hA) = 1 + h \text{tr} A + o(h)$ аналогично [24, с. 300–301]. В силу (4.2) имеем $\bar{P}^- [k-1] = B[k]^{-1} \bar{P}^- [k] (I - \text{diag}(\gamma[k] + \beta[k]) - \Xi[k] \Gamma[k])$, где $\Xi[k] = \bar{P}^- [k]^{-1} \bar{R}[k]$. В предположении (4.13) при достаточно малом h_N и выборе $\beta[k]$ в виде (4.4) величины $\gamma[k]$, $\bar{R}[k]$ и $\beta[k]$ оказываются порядка h_N , и можно считать, что все три сомножителя в $\bar{P}^- [k-1]$ имеют положительные определители. Поэтому можно пытаться увеличивать значения $\det \bar{P}^- [k-1]$ за счет выбора $\Gamma[k]$ путем решения оптимизационной задачи $\min_{\Gamma[k] \in \mathcal{G}} \text{tr}(\Xi[k] \Gamma[k])$, аналогичной указанной в замечании 2. Ее решение аналогично приведенному в [24, формулы (5.14)–(5.16)].

5. Решение задачи 5

Для решения задачи 5 рассмотрим следующую систему нелинейных рекуррентных соотношений для параллелотопов $\mathcal{P}^- [k] = \mathcal{P}[p^- [k], \bar{P}^- [k]]$ (сравните с (3.1), (3.2)):

$$p^- [k-1] = B[k]^{-1} (p^- [k] - q[k]), \quad B[k] = A[k] + \tilde{U}[k] + \tilde{V}[k], \quad k = N, \dots, 1, \quad p^- [N] = p_f, \quad (5.1)$$

⁵Здесь и ниже мы описываем некоторые особенности многошаговых систем, полученных по схеме Эйлера, однако вопросы сходимости в настоящей статье не рассматриваются.

⁶Можно заметить также, что формулы (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) (эквивалентно, [8, формула (3.4)]) отличаются от формул из [24, формула (6.2)], использовавшихся в [24, разд. 6] для численного моделирования синтеза управлений в дифференциальных системах, порядком выполнения операций с множествами — суммы Минковского и геометрической разности. Однако для систем, полученных по схеме Эйлера (4.13), результаты сближаются при $h_N \rightarrow 0$. Это обусловлено тем, что при определенных предположениях альтернированный интеграл Понтрягина совпадает с альтернированным интегралом второго рода [14, теорема 3.1].

$$\bar{P}^-[k-1] = H[k, \bar{P}^-[k-1]], \quad k = N, \dots, 1, \quad \bar{P}^-[N] = \bar{P}_f, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} H[k, P] &= (B[k] - \Phi[k, P])^{-1} \bar{P}^-[k] \operatorname{diag} (e - \beta[k, P] - \gamma[k]), \\ \Phi[k, P] &= \Phi[k, P; \Omega[k], J[k]] = (\hat{U}[k] * \Omega[k]) \operatorname{diag} \eta[k, P] \Pi[J[k]] \operatorname{diag} \{(e^{i^\top} (\operatorname{Abs} P) e)^{-1}\}, \\ \eta[k, P] &= \max\{0, \operatorname{Abs} p^-[k-1] - (\operatorname{Abs} P) e\}, \\ \beta[k, P] &= \max\{(\operatorname{Abs} (\bar{P}^-[k]^{-1})) \hat{V}[k] \operatorname{Abs} (p^-[k-1] + P\xi) \mid \xi \in \mathbf{E}(\mathcal{C})\}, \\ \gamma[k] &= (\operatorname{Abs} (\bar{P}^-[k]^{-1} \bar{Q}[k])) e, \quad k = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Заметим, что (5.1) — это система явных рекуррентных соотношений, а (5.2), (5.3) — система рекуррентных соотношений, где на каждом шаге $k \in \{N, \dots, 1\}$ нужно решать систему нелинейных уравнений $P = H[k, P]$ относительно неизвестной матрицы $P = \bar{P}^-[k-1]$.

Рассмотрим стратегию управления $U[\cdot, \cdot]$, связанную с трубкой $\mathcal{P}^-[\cdot]$ из (5.1)–(5.3) и определяемую следующими формулами для столбцов матричной функции $U[k, x]$:

$$U[k, x]e^i = \tilde{U}[k]e^i - \begin{cases} (x_{j_i} - p_{j_i}^-[k-1])(x_i)^{-1} \Phi[k, \bar{P}^-[k-1]]e^{j_i}, & \text{если } x_i \neq 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Несложно видеть, что справедлив аналог леммы 3, так что при $\det \bar{P}^-[k-1] \neq 0$ и $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$ стратегия (5.4) действует в соответствии со следующим правилом:

$$U[k, x]x = \tilde{U}[k]x - \Phi[k, \bar{P}^-[k-1]](x - p^-[k-1]), \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

Теорема 4. Пусть в управляемой системе (1.8), (1.10), (1.11) целевое множество \mathcal{M} — это невырожденный параллелепипед и все матрицы $B[k]$ в (5.1) неособые. Пусть $\Omega[k]$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие $\Omega[k] \in \mathcal{O}$, $k = N, \dots, 1$ (множества \mathcal{O} определены в (3.3)); $J[k] = \{j_1, \dots, j_n\}$ — произвольные перестановки чисел $\{1, \dots, n\}$, $k = N, \dots, 1$, а $\Pi[J[k]] = \{e^{j_i}\}$ — соответствующие им матрицы перестановок. И пусть система (5.1)–(5.3) имеет решение $(p^-[\cdot], \bar{P}^-[\cdot])$, удовлетворяющее соотношениям $\det \bar{P}^-[k] \neq 0$ и $e - \beta[k, \bar{P}^-[k-1]] - \gamma[k] > 0$, $k = N, \dots, 1$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и стратегия управления (5.4) (действие которой может быть записано также в виде (5.5)) дают частное решение задачи 5.

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 3 и используя аналогичные обозначения, приведем выкладки для решения $x[\cdot]$ системы (1.13), соответствующего $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$, стратегии управления $U = U[k, x]$ из (5.4) и произвольным допустимым $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$. Представляя векторы $x[k]$ в виде (4.9), получаем с учетом (1.8) и (5.1), что

$$\begin{aligned} x[k] &= B[k] (p^-[k-1] + \bar{P}^-[k-1]\zeta[k-1]) + (U[k, x[k-1]] - \tilde{U}[k] + \Delta V[k])x[k-1] + v[k] \\ &= p^-[k] + B[k]\bar{P}^-[k-1]\zeta[k-1] + (U[k, x[k-1]] - \tilde{U}[k] + \Delta V[k])x[k-1] + v[k] - q[k]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (5.5) и (4.9), имеем

$$\zeta[k] = \bar{P}^-[k]^{-1} (B[k] - \Phi[k, \bar{P}^-[k-1]]) \bar{P}^-[k-1] \zeta[k-1] + c[k, x[k-1]].$$

Используя (5.2), (5.3), (1.11) и лемму 4, приходим к соотношениям типа (4.10), (4.11) (где $\beta[k] = \beta[k, \bar{P}^-[k-1]]$), и в силу леммы 5 опять получаем, что из $x[k-1] \in \mathcal{P}^-[k-1]$ и $e - \beta[k, \bar{P}^-[k-1]] - \gamma[k] \geq 0$ следует, что $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$ ⁷. Неравенства $\operatorname{Abs} (U[k, x] - \tilde{U}[k]) \leq \tilde{U}[k]$ для $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$ проверяются аналогично теореме 2. \square

З а м е ч а н и е 8. Пусть система (1.8), (1.10), (1.11) получена по схеме Эйлера (4.13). Рассмотрим систему уравнений (5.2), (5.3) при фиксированном k в предположении, что $\det \bar{P}^-[k] \neq 0$ и шаг h_N достаточно мал. Тогда оператор $H[k, P]$ оказывается сжимающим в некоторой области $\mathcal{D}[k] = \{P \mid \|P - \bar{P}^-[k]\| \leq \delta[k]\}$, т. е. $\|H[k, P^1] - H[k, P^2]\| \leq L[k]\|P^1 - P^2\|$

⁷Более сильное условие $e - \beta[k, \bar{P}^-[k-1]] - \gamma[k] > 0$, указанное в формулировке теоремы, необходимо в силу (5.1), (5.2) для невырожденности $\bar{P}^-[k-1]$.

для любых $P^1, P^2 \in \mathcal{D}[k]$, где $0 < L[k] < 1$, и, следовательно [2, с. 319–320], уравнение $P = H[k, P]$ из (5.2), (5.3) имеет единственное решение $P = \bar{P}^-[k-1]$, и оно может быть найдено методом простой итерации $P^{l+1} = H[k, P^l]$, $l = 0, 1, \dots$, начиная с $P^0 = \bar{P}^-[k]$, и $\|P^l - P\| \leq L[k]^l(1-L[k])^{-1}\|P^1 - P^0\|$. Кроме того, выполнено желаемое неравенство $\beta[k, \bar{P}^-[k-1]] + \gamma[k] < \epsilon$. Однако отсюда, вообще говоря, не следует существование неособых матриц $\bar{P}^-[k]$ для всех $k = N, \dots, 1$, поскольку величина такого “малого” h_N зависит от k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.** Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 3. С. 319–323.
2. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
3. **Важнецев А.Ю.** О внутренних эллипсоидальных аппроксимациях для задач синтеза управления при ограниченных координатах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 70–77.
4. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2 кн. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
5. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
6. **Дарьин А.Н., Куржанский А.Б.** Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределенных возмущениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 1. С. 47–57.
7. **Комаров В.А.** Синтез ограниченных управлений для линейных неавтономных систем // Автоматика и телемеханика. 1984. № 10. С. 44–50.
8. **Костоусова Е.К.** О полиэдральных оценках в задачах синтеза стратегий управления в линейных многошаговых системах // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2006. Вып. 9. С. 84–105.
9. **Костоусова Е.К.** О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 195–210.
10. **Костоусова Е.К., Куржанский А.Б.** Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 1. С. 19–27.
11. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
12. **Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.** Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управления ими // Пробл. управления и информатики. 2010. № 1. С. 5–21.
13. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
14. **Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.** О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона — Якоби // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 6. С. 69–100.
15. **Куржанский А.Б., Никонов О.И.** К задаче синтеза стратегий управления. Эволюционные уравнения и многозначное интегрирование // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 4. С. 788–793.
16. **Лисин Д.В., Филиппова Т.Ф.** Об оценивании траекторных трубок дифференциальных включений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 435–445.
17. **Мазуренко С.С.** Дифференциальное уравнение на калибровочную функцию Минковского звездного множества достижимости дифференциального включения // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 2. С. 139–142.
18. **Поляк Б.Т., Щербаков П.С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
19. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
20. **Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.** Алгоритмы оценивания множеств достижимости импульсных управляемых систем с эллипсоидальными фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 127–141.
21. **Черноузько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
22. **Ananiev V.I.** Some problems of observations' control // AIP Conf. Proc. 2011. Vol. 1404. P. 235–241.

23. **Baier R., Lempio F.** Computing Aumann's integral // Modeling Techniques for Uncertain Systems: Proc. Conf. (Sopron, 1992) / eds. A.B. Kurzhanski, V.M. Veliov. Boston: Birkhäuser, 1994. P. 71–92. (Progr. Systems Control Theory; vol. 18).
24. **Kostousova E.K.** Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 2001. Vol. 14, no. 4. P. 267–310.
25. **Kostousova E.K.** On tight polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems // AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1493. P. 579–586. DOI: 10.1063/1.4765545. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4765545>.
26. **Kurzhanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
27. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimiz. Methods & Software. I. 2002. Vol. 17, no 2. P. 177–206. II. 2002. Vol. 17, no 2. P. 207–237.
28. **Taras'yev A.M., Uspenskiy A.A., Ushakov V.N.** Approximation shemas and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations // J. Comput. Systems Sci. Internat. 1995. Vol. 33, no. 6. P. 127–139.
29. **Veliov V.M.** Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // Systems & Control Letters. 1989. Vol. 13, no. 3. P. 263–269.

Костоусова Елена Кирилловна

Поступила 17.02.2014

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: kek@imm.uran.ru.

УДК 517.977

ЗАДАЧА ГАРАНТИРОВАННОГО ПОЗИЦИОННОГО НАВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ К ЗАДАННОМУ МОМЕНТУ ВРЕМЕНИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ. ПРОГРАММНЫЙ КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ¹

А. В. Кряжимский, Н. В. Стрелковский

В данной работе метод пакетов программ применяется для характеристики условий разрешимости задачи о гарантированном позиционном наведении линейной частично наблюдаемой управляемой системы на одно из выпуклых целевых множеств к заданному моменту времени. Множество допустимых начальных состояний системы считается конечным. Вопрос сводится к задаче о программном наведении расширенной управляемой системой, условия разрешимости последней описываются в терминах конечномерных задач выпуклой оптимизации.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы.

A. V. Kryazhimskii, N. V. Strelkovskii. A problem of guaranteed closed-loop guidance by a fixed time for a linear control system with incomplete information. Program solvability criterion.

The method of open-loop control packages is applied to identify solvability conditions in a problem of guaranteed closed-loop guidance of a linear partially observed control system to one of convex target sets by a specified time. The set of admissible initial states is assumed to be finite. The task is reduced to a problem of open-loop guidance of an extended control system, and solvability conditions for this system are described in terms of finite-dimensional convex optimization problems.

Keywords: control, incomplete information, linear systems.

Введение

В настоящей работе, следующей в русле теории гарантирующего позиционного управления [1–10], мы продолжаем исследование метода пакетов программ [11–14] применительно к задачам гарантирующего позиционного управления при неполной информации. Метод восходит к технике неупреждающих стратегий (квазистратегий) из теории дифференциальных игр [8; 15–18]. Здесь мы используем данный метод для вывода программного критерия разрешимости задачи о гарантированном позиционном наведении частично наблюдаемой линейной управляемой системы на одно из предписанных выпуклых целевых множеств до заданного момента окончания.

1. Описание задачи гарантированного позиционного наведения

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + c(t); \quad (1.1)$$

здесь $t \in [t_0, \vartheta]$ — переменная времени, $t_0 < \vartheta < \infty$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент t ; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значение управления в этот момент времени; $A(\cdot), B(\cdot), c(\cdot)$ — функции, заданные и непрерывные на $[t_0, \vartheta]$, принимающие значения в пространствах матриц размерностей $n \times n$ и $n \times m$ и в \mathbb{R}^n соответственно. Мы предполагаем, что управляющей стороне известно

¹Работа поддержана РФФ (проект 14-11-00539).

априори, что истинное начальное состояние системы содержится в заданном конечном множестве $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ *допустимых начальных состояний*, само истинное начальное состояние системы управляющей стороне не известно. Под *программным управлением (программой)* (для системы (1.1)) понимается, как обычно, всякая измеримая по Лебегу функция $u(\cdot) : [t_0, \vartheta] \rightarrow P$; здесь $P \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, описывающий мгновенный ресурс управления. Множество всех программных управлений обозначим через \mathcal{U} . *Движение* системы (1.1), соответствующее допустимому начальному состоянию $x_0 \in X_0$ и программе $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, есть решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения (1.1), определенное на $[t_0, \vartheta]$ и удовлетворяющее начальному условию $x_0(t_0) = x_0$; для этого движения принимаем обозначение $x(\cdot | x_0, u(\cdot))$.

Пусть заданы непустое множество $S \subset (t_0, \vartheta]$ *допустимых моментов наведения* и для каждого $t \in S$ — непустое выпуклое замкнутое *целевое* множество $M(t) \in \mathbb{R}^n$. Пусть также для каждого $t \in [t_0, \vartheta]$ задана *матрица наблюдения* $Q(t)$ размерности $n \times q$.

Перед управляющей стороной стоит задача *гарантированного позиционного наведения* к моменту ϑ : привести состояние $x(t)$ системы в какой-либо допустимый момент $t \in S$ наведения в малую окрестность целевого множества $M(t)$. В процессе движения управляющая сторона формирует свое программное управление позиционно, наблюдая текущий сигнал $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии $x(t)$ системы. В соответствии с формализацией, принятой в теории позиционного управления [2], позиционная стратегия управления позволяет управляющей стороне корректировать значения управляющей программы $u(\cdot)$ в заранее заданные моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_m = \vartheta$. В каждый момент t_j ($j = 0, \dots, m-1$) значения управляющей программы на полуинтервале $t \in [t_j, t_{j+1}]$ определяются исходя из предыстории $t \mapsto y(t)$ наблюдения на отрезке $[t_0, t_j]$ и предыстории $t \mapsto u(t)$ управления на полуинтервале $[t_0, t_j]$ (при $j = 0$ предыстория управления отсутствует).

Таким образом, задача гарантированного позиционного наведения состоит в том, чтобы по произвольному, наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления, что для любого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ движение $x(\cdot)$ системы (1.1), исходящее из этого состояния под действием выбранной позиционной стратегии, в некоторый момент времени $t \in S$ приходит в ε -окрестность целевого множества $M(t)$.

2. Задача пакетного наведения

Для случая $S = \{\vartheta\}$ точная постановка задачи гарантированного позиционного наведения дана в [11; 12]. Эта постановка естественным образом распространяется на рассматриваемый здесь случай; в целях компактности изложения мы ее не приводим. В [13] для случая $S = \{\vartheta\}$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи описаны в терминах пакетов и квазипакетов программ. В [14] данный результат изложен с использованием упрощенной терминологии (см. замечание 2 этой работы). Эту терминологию мы используем в воспроизводимом ниже (для удобства чтения) определении пакетов программ (повторяя частично содержание работы [14]).

Введем фундаментальную матрицу $F(\cdot, \cdot)$ однородной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Для каждого $x_0 \in X_0$ обозначаем

$$g_{x_0}(t) = Q(t)F(t, t_0)x_0 \quad (t \in [t_0, \vartheta]);$$

функцию $g_{x_0}(\cdot)$ называем *однородным сигналом*, соответствующим допустимому начальному состоянию x_0 . Однородный сигнал, соответствующий какому-либо допустимому начальному состоянию, называем просто *однородным сигналом*. Множество всех допустимых начальных состояний x_0 , соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in [t_0, \vartheta]$, обозначаем через $X_0(\tau | g(\cdot))$; таким образом,

$$X_0(\tau | g(\cdot)) = \{x_0 \in X_0 : g(\cdot)|_{[t_0, \tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0, \tau]}\};$$

здесь и далее $g(\cdot)|_{[\tau_0, \tau]}$, где $\tau \in [\tau_0, \vartheta]$, — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\tau_0, \tau]$. Семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет следующему условию *неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [\tau_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$. Пакет $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ называем *наводящим*, если для любого $x_0 \in X_0$ найдется момент $t \in S$ такой, что $x(t|x_0, u_{x_0}(\cdot)) \in M(t)$. Если существует наводящий пакет программ, говорим, что *разрешима задача пакетного наведения*.

В [13, теорема 2.1] для случая $S = \{\vartheta\}$ установлено, что задача гарантированного позиционного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения. Данное утверждение справедливо и для рассматриваемого здесь более общего случая; обоснование этого факта (подобное приведенному в [13]) для краткости опускаем.

В связи со сказанным далее исследуем условия разрешимости задачи пакетного наведения.

Всякое семейство $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ элементов множества S будем называть *семейством допустимых моментов наведения*. Будем говорить, что пакет $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ является *наводящим с семейством* $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ допустимых моментов наведения, если для любого $x_0 \in X_0$ выполняется $x(s_{x_0}|x_0, u_{x_0}(\cdot)) \in M(s_{x_0})$. Если существует пакет программ, являющийся наводящим с семейством s допустимых моментов наведения, будем говорить, что *разрешима задача пакетного наведения с семейством s допустимых моментов наведения*.

Очевидно следующее.

Лемма 1. 1) *Пакет программ является наводящим тогда и только тогда, когда он является наводящим с некоторым семейством допустимых моментов наведения.*

2) *Задача пакетного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения с некоторым семейством допустимых моментов наведения.*

В связи с последним утверждением основное внимание далее уделим вопросу о разрешимости задачи о наведении с заданным семейством моментов наведения.

3. Расширенная задача программного наведения

Следуя [14], мы представляем пакеты программ как расширенные программные управления (для удобства чтения повторяем фрагмент этой работы). Пусть G — множество всех однородных сигналов. Рассматривая произвольный однородный сигнал $g(\cdot)$, вводим множество

$$G_0(g(\cdot)) = \left\{ g'(\cdot) \in G : \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (g'(t_0 + \varepsilon) - g(t_0 + \varepsilon)) = 0 \right\}$$

изначально эквивалентных ему однородных сигналов и *первый момент*

$$\tau_1(g(\cdot)) = \max \left\{ \tau \in [t_0, \vartheta] : \max_{g'(\cdot) \in G_0(g(\cdot))} \max_{t \in [t_0, \tau]} |g'(t) - g(t)| = 0 \right\}$$

его расслоения. Если $\tau_1(g(\cdot)) < \vartheta$ и для какого-либо натурального $i \geq 1$ определена строго убывающая последовательность $G_0(g(\cdot)) \supset \dots \supset G_{i-1}(g(\cdot))$ множеств и строго возрастающая последовательность $\tau_1(g(\cdot)) < \dots < \tau_i(g(\cdot))$ моментов из $[t_0, \vartheta]$ (*моментов расслоения* однородного сигнала $g(\cdot)$), полагаем

$$G_i(g(\cdot)) = \left\{ g'(\cdot) \in G_{i-1}(g(\cdot)) : \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (g'(\tau_i(g(\cdot)) + \varepsilon) - g(\tau_i(g(\cdot)) + \varepsilon)) = 0 \right\}$$

и определяем момент

$$\tau_{i+1}(g(\cdot)) = \max \left\{ \tau \in (\tau_i(g(\cdot)), \vartheta] : \max_{g'(\cdot) \in G_i(g(\cdot))} \max_{t \in [\tau_i(g(\cdot)), \tau]} |g'(t) - g(t)| = 0 \right\}$$

$(i+1)$ -го *расслоения* однородного сигнала $g(\cdot)$. Ввиду конечности множества всех однородных сигналов для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \geq 1$ такой, что

$\tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$. Для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ вводим множество $T(g(\cdot)) = \{\tau_j(g(\cdot)) : j = 1, \dots, k_{g(\cdot)}\}$ всех моментов его расслоения и полагаем $T = \cup_{g(\cdot) \in G} T(g(\cdot))$. Представляем T в виде

$$T = \{\tau_1, \dots, \tau_K\},$$

где $\tau_i < \tau_{i+1}$ ($i = 1, \dots, K-1$). Принимаем $\tau_0 = t_0$. Для каждого $k = 1, \dots, K$ вводим множество

$$\mathcal{X}_0(\tau_k) = \{X_0(\tau_k | g(\cdot)) : g(\cdot) \in G\}.$$

Элементы X_{0k} множества $\mathcal{X}_0(\tau_k)$ называем *кластерами начальных состояний* в момент τ_k . Для каждого $k = 1, \dots, K$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества X_0 всех допустимых начальных состояний, т. е. (см. [14, замечание 4]):

$$X_0 = \bigcup_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} X_{0k}, \quad X'_{0k} \cap X''_{0k} = \emptyset \quad (X'_{0k}, X''_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k), \quad X'_{0k} \neq X''_{0k}). \quad (3.1)$$

Легко также видеть, что каждый кластер $X_{0k-1} \in \mathcal{X}_0(\tau_{k-1})$, где $k = 2, \dots, K$, представляет собой объединение некоторого числа кластеров из последующей кластерной позиции: существует непустое множество $\mathcal{X}_0(\tau_k | X_{0k-1}) \subset \mathcal{X}_0(\tau_k)$ такое, что

$$X_{0k-1} = \bigcup_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k | X_{0k-1})} X_{0k}. \quad (3.2)$$

Лемма 2 [14, лемма 2]. *Семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ является пакетом программ тогда и только тогда, когда для всякого $k = 1, \dots, K$, всякого кластера $X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и любых начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_{0k}$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$.*

Пусть \mathcal{P} — множество всех семейств $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ векторов из мгновенного ресурса P управления. Любую измеримую функцию $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} : [t_0, \vartheta] \mapsto \mathcal{P}$ называем *расширенным программным управлением (расширенной программой)* (измеримость данной функции понимается как измеримость по Лебегу функции $u_{x_0}(\cdot) : [t_0, \vartheta] \mapsto P$ для каждого $x_0 \in X_0$). Семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ и расширенную программу $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ отождествляем.

Для каждого $k = 1, \dots, K$ вводим множество \mathcal{P}_k всех семейств $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и произвольных начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_{0k}$ выполняется $u_{x'_0} = u_{x''_0}$. Расширенную программу $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ называем *допустимой*, если для каждого $k = 1, \dots, K$ выполняется $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$; множество \mathcal{P}_k при этом называем *допустимым расширенным ресурсом управления* на полуинтервале $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Лемма 3 [14, лемма 3]. *Расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является пакетом программ тогда и только тогда, когда она допустима.*

Для $j = 1, 2, \dots$ определяем *расширенное пространство* \mathcal{R}_j как конечномерное гильбертово пространство всех семейств $l = (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ векторов из \mathbb{R}^j со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{R}_j}$ вида

$$\langle l', l'' \rangle_{\mathcal{R}_j} = \sum_{x_0 \in X_0} \langle l'_{x_0}, l''_{x_0} \rangle \quad (l' = (l'_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_j, \quad l'' = (l''_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_j);$$

здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве. Значения расширенных программ трактуем как элементы \mathcal{R}_m . Для произвольного непустого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_j$ ($j = 1, 2, \dots$) вводим его нижнюю $\rho^-(\cdot | \mathcal{E}) : \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}$ и верхнюю $\rho^+(\cdot | \mathcal{E}) : \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}$ опорные функции:

$$\rho^-(l | \mathcal{E}) = \inf_{e \in \mathcal{E}} \langle l, e \rangle_{\mathcal{R}_j}, \quad \rho^+(l | \mathcal{E}) = \sup_{e \in \mathcal{E}} \langle l, e \rangle_{\mathcal{R}_j} \quad (l \in \mathcal{R}_j). \quad (3.3)$$

Рассмотрим *расширенную систему*, которая состоит из экземпляров системы (1.1), параметризованных начальными состояниями $x_0 \in X_0$; экземпляр системы, отвечающий параметру x_0 , исходит из начального состояния x_0 под действием программного управления $u_{x_0}(\cdot)$. Запишем расширенную систему в виде

$$\dot{x}_{x_0}(t) = A(t)x_{x_0}(t) + B(t)u_{x_0}(t) + c(t), \quad x_{x_0}(t_0) = x_0 \quad (x_0 \in X_0).$$

За фазовое пространство расширенной системы принимаем \mathcal{R}_n . Управление расширенной системой выбираем из класса всех допустимых расширенных программ. Для каждой допустимой расширенной программы $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ под соответствующим ей *движением* расширенной системы понимаем функцию $t \mapsto (x(t|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} : [\tau_0, \vartheta] \mapsto \mathcal{R}_n$, которую отождествляем с функциональным семейством $(x(\cdot|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$.

Дальнейшее изложение посвящено собственно исследованию условий разрешимости задачи пакетного наведения, введенной в предыдущем разделе.

Расширенным целевым множеством для семейства $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ допустимых моментов наведения будем называть множество $\mathcal{M}(s)$ всех семейств $(z_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $z_{x_0} \in M(s_{x_0})$ для всех $x_0 \in X_0$.

З а м е ч а н и е 1. Из выпуклости и замкнутости целевых множеств $M(t)$ ($t \in S$) вытекает, что для всякого семейства s допустимых моментов наведения множество $\mathcal{M}(s)$ выпукло и замкнуто в \mathcal{R}_n .

Будем говорить, что допустимая расширенная программа $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является *наводящей для расширенной системы с семейством $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ допустимых моментов наведения*, если для движения $(x(\cdot|x_0, u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$, выполняется условие $(x(s_{x_0}|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{M}(s)$.

Будем говорить, что разрешима *расширенная задача программного наведения* с семейством s допустимых моментов наведения, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы с семейством s допустимых моментов наведения.

Из леммы 3 с очевидностью вытекает следующее.

Теорема 1. 1) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ с семейством s допустимых моментов наведения тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы с этим же семейством допустимых моментов наведения.*

2) *Задача пакетного наведения с семейством s допустимых моментов наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима расширенная задача программного наведения с этим же семейством допустимых моментов наведения.*

4. Критерий разрешимости

Рассмотрим критерий разрешимости расширенной задачи программного наведения с заданным семейством допустимых моментов наведения. Для каждого семейства $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}$ допустимых моментов наведения введем соответствующее ему *множество достижимости*

$$\mathcal{A}(s) = \left\{ (x(s_{x_0}|x_0, u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} : (u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \text{ext } \mathcal{U} \right\} \quad (4.1)$$

расширенной системы; здесь $\text{ext } \mathcal{U}$ — множество всех допустимых расширенных программ.

Лемма 4. *Для каждого семейства s допустимых моментов наведения множество $\mathcal{A}(s)$ есть выпуклый компакт в \mathcal{R}_n .*

Доказательство леммы с небольшими модификациями копирует доказательство аналогичной ей леммы 5 из [14].

Для каждого $t \in S$ обозначим через $R(t)$ подпространство пространства \mathbb{R}^n , ортогональное всем $l \in \mathbb{R}^n$ таким, что $\rho^+(l|M(t)) = \infty$. Для каждого $t \in S$ зафиксируем выпуклый компакт $L(t) \subset R(t)$ со следующим свойством: существуют $r_1(t), r_2(t) > 0$, удовлетворяющие неравенству $r_2(t) \geq r_1(t)$ и такие, что для каждого вектора $z \in R(t)$ единичной нормы при некотором $r \in [r_1, r_2]$ выполняется $rz \in L$. Для каждого семейства $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ допустимых моментов наведения через $\mathcal{L}(s)$ обозначим множество всех $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $l_{x_0} \in L(s_{x_0})$ при всех $x_0 \in X_0$.

Из свойств множества достижимости расширенной системы и расширенного целевого множества (см. лемму 4 и замечание 1) на основании теоремы об отделимости выпуклых множеств вытекает следующий критерий разрешимости расширенной задачи программного наведения с заданным семейством допустимых моментов наведения.

Теорема 2. *Расширенная задача программного наведения с семейством s допустимых моментов наведения разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\max_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{L}(s)} [\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A}(s)) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{M}(s))] \leq 0. \quad (4.2)$$

Из теоремы 2, эквивалентности расширенной задачи программного наведения с семейством s допустимых моментов наведения и задачи пакетного наведения с этим же семейством допустимых моментов наведения (утверждение 2 теоремы 1), а также из того факта, что разрешимость задачи пакетного наведения с некоторым семейством допустимых моментов наведения равносильна разрешимости задачи пакетного наведения (лемма 1), вытекает следующий критерий разрешимости задачи пакетного наведения (напомним, что последняя задача равносильна исходной задаче о гарантированном позиционном наведении к моменту ϑ — см. разд. 1).

Следствие. *Задача пакетного наведения разрешима тогда и только тогда, когда неравенство (4.2) выполняется для некоторого семейства s допустимых моментов наведения.*

В следующей ниже теореме 3, представляющей основной результат настоящей работы, мы конкретизируем значения, записанные в (4.2) под знаком супремума, в терминах верхних опорных функций целевых множеств $M(t)$ ($t \in S$) и нижней опорной функции мгновенного ресурса P управления.

Примем ряд обозначений. Для всякого семейства $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ допустимых моментов наведения введем множество

$$\bar{X}_k(s) = \left\{ x_0 \in X_0 : s_{x_0} \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \right\} \quad (k = 1, \dots, K) \quad (4.3)$$

и при любом $l = (l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{L}(s)$ положим

$$l_{x_0, s}(t) = \begin{cases} l_{x_0}, & t \leq s_{x_0} \\ 0, & t > s_{x_0} \end{cases} \quad (t \in [t_0, \vartheta], \quad x_0 \in X_0). \quad (4.4)$$

Обозначим

$$p_0(r, x_0) = \langle r, F(s_{x_0}, t_0)x_0 \rangle + \left\langle r, \int_{t_0}^{s_{x_0}} F(s_{x_0}, t)c(t)dt \right\rangle \quad (r \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in X_0). \quad (4.5)$$

Для произвольного семейства $(h_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ элементов какого-либо линейного пространства и произвольной числовой функции $f(\cdot)$, определенной на этом линейном пространстве, будем использовать следующие краткие записи:

$$\Sigma^1 f(\Sigma_{x_0}^{1,k} h_{x_0}) = \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} f \left(\sum_{x_0 \in X_{01} \cap \bar{X}_k(s)} h_{x_0} \right) \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$\begin{aligned} \Sigma^j f(\Sigma_{x_0}^{j,k} h_{x_0}) &= \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{X_{02} \in \mathcal{X}(\tau_2|X_{01})} \cdots \sum_{X_{0j} \in \mathcal{X}(\tau_j|X_{0j-1})} f\left(\sum_{x_0 \in X_{0j} \cap \bar{X}_k(s)} h_{x_0}\right) \\ &\quad (j, k = 1, \dots, K, k \geq j), \\ \Sigma^1 f\left(\sum_{k=1}^i \Sigma_{x_0}^{1,k} h_{x_0}\right) &= \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} f\left(\sum_{k=1}^i \sum_{x_0 \in X_{01} \cap \bar{X}_k(s)} h_{x_0}\right) \quad (i = 1, \dots, K), \\ \Sigma^j f\left(\sum_{k=j}^i \Sigma_{x_0}^{j,k} h_{x_0}\right) &= \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{X_{02} \in \mathcal{X}(\tau_2|X_{01})} \cdots \sum_{X_{0j} \in \mathcal{X}(\tau_j|X_{0j-1})} f\left(\sum_{k=j}^i \sum_{x_0 \in X_{0j} \cap \bar{X}_k(s)} h_{x_0}\right) \\ &\quad (j, i = 1, \dots, K, i \geq j). \end{aligned}$$

Здесь и далее, как обычно, сумма индексированных значений по пустому множеству индексов принимается равной нулю. Ниже * — знак транспонирования матрицы и

$$D(s_{x_0}, t) = F(s_{x_0}, t)B(t) \quad (x_0 \in X_0, \quad t \in [t_0, \vartheta]).$$

Теорема 3. Пусть $s = (s_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ — семейство допустимых моментов наведения и $l = (l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{L}(s)$. Справедливы равенства

$$\rho^+(l|\mathcal{M}(s)) = \sum_{x_0 \in X_0} \rho^+(l_{x_0}|M(s_{x_0})), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \rho^-(l|\mathcal{A}(s)) &= \sum_{x_0 \in X_0} p_0(l_{x_0}, x_0) + \sum_{j=1}^{K-1} \Sigma^j \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \rho^-\left(D^*(s_{x_0}, t) \left(\Sigma_{x_0}^{j,j} l_{x_0, s}(t) + \sum_{k=j+1}^K \Sigma_{x_0}^{j,k} l_{x_0} \right) | P\right) \\ &\quad + \Sigma^K \int_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} \rho^-(D^*(s_{x_0}, t) \Sigma_{x_0}^{K,K} l_{x_0, s}(t) | P) dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

З а м е ч а н и е 2. В типичном случае, когда целевые множества $M(t)$ ($t \in S$) и мгновенный ресурс P управления имеют простую геометрическую структуру (например, являются многогранниками либо эллипсоидами), их опорные функции имеют явные аналитические представления. В этом случае в связи с представлениями (4.6) и (4.7) проверка критерия (4.2) разрешимости расширенной задачи программного наведения с заданным семейством s моментов наведения сводится к конечномерной задаче максимизации явно заданной вогнутой функции по выпуклому компактному.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Представление (4.6) следует непосредственно из определений расширенного целевого множества $\mathcal{M}(s)$ и верхней опорной функции подмножества пространства \mathcal{R}_n (см. (3.3)).

Докажем (4.7). Пусть $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ — произвольная допустимая расширенная программа. По определению для произвольного $k = 1, \dots, K$ выполняется $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$; последнее, по определению расширенного ресурса, \mathcal{P}_k означает, что для всякого $X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)$ значения $u_{x_0}(t) \in P$ для всех $x_0 \in X_{0k}$ совпадают между собой при любом $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$; их общее значение будем далее обозначать через $u_{X_{0k}}(t)$. Таким образом,

$$u_{x_0}(t) = u_{X_{0k}}(t) \in P \quad (4.8)$$

$$(x_0 \in X_{0k}, \quad X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k), \quad t \in (\tau_{k-1}, \tau_k], \quad k = 1, \dots, K);$$

отсюда ввиду (3.2)

$$u_{x_0}(t) = u_{X_{0k-1}}(t) \quad (4.9)$$

$$(x_0 \in X_{0k}, \quad X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k|X_{0k-1}), \quad X_{0k-1} \in \mathcal{X}_0(\tau_{k-1}), \quad t \in (\tau_{k-2}, \tau_{k-1}], \quad k = 2, \dots, K).$$

Используя для $x(\cdot|x_0, u_{x_0}(\cdot))$ ($x_0 \in X_0$) представление по формуле Коши, имеем

$$\sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, x(s_{x_0}|x_0, u_{x_0}(\cdot)) \rangle = I_0 + I_1, \quad (4.10)$$

где (4.5)

$$I_0 = \sum_{x_0 \in X_0} p_0(l_{x_0}, x_0), \quad (4.11)$$

$$I_1 = \sum_{x_0 \in X_0} \left\langle l_{x_0}, \int_{t_0}^{s_{x_0}} D(x_0, t) u_{x_0}(t) dt \right\rangle.$$

Рассмотрим I_1 . Очевидно (см. (4.3)),

$$I_1 = \sum_{k=1}^K I_{1k}, \quad (4.12)$$

где

$$I_{1k} = \sum_{x_0 \in \bar{X}_k(s)} \left\langle l_{x_0}, \int_{t_0}^{s_{x_0}} D(s_{x_0}, t) u_{x_0}(t) dt \right\rangle.$$

В связи с (3.1), (4.8), (4.9), (4.4) имеем

$$I_{11} = \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{x_0 \in X_{01} \cap \bar{X}_1(s)} \left\langle l_{x_0}, \int_{t_0}^{s_{x_0}} D(s_{x_0}, t) u_{X_{01}}(t) dt \right\rangle = \Sigma^1 \int_{t_0}^{\tau_1} \langle \Sigma_{x_0}^{1,1} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0, s}(t), u_{X_{01}}(t) \rangle dt,$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{x_0 \in X_{01} \cap \bar{X}_2(s)} \left\langle l_{x_0}, \int_{t_0}^{\tau_1} D(s_{x_0}, t) u_{X_{01}}(t) dt \right\rangle \\ &+ \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{X_{02} \in \mathcal{X}(\tau_2|X_{01})} \sum_{x_0 \in X_{02} \cap \bar{X}_2(s)} \left\langle l_{x_0}, \int_{\tau_1}^{s_{x_0}} D(s_{x_0}, t) u_{X_{02}}(t) dt \right\rangle \\ &= \Sigma^1 \int_{t_0}^{\tau_1} \langle \Sigma_{x_0}^{1,2} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{01}}(t) \rangle dt + \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle \Sigma_{x_0}^{2,2} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0, s}(t), u_{X_{02}}(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{13} &= \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{x_0 \in X_{01} \cap \bar{X}_3(s)} \left\langle l_{x_0}, \int_{t_0}^{\tau_1} D(s_{x_0}, t) u_{X_{01}}(t) dt \right\rangle \\ &+ \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{X_{02} \in \mathcal{X}(\tau_2|X_{01})} \sum_{x_0 \in X_{02} \cap \bar{X}_3(s)} \left\langle l_{x_0}, \int_{\tau_1}^{\tau_2} D(s_{x_0}, t) u_{X_{02}}(t) dt \right\rangle \\ &+ \sum_{X_{01} \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{X_{02} \in \mathcal{X}(\tau_2|X_{01})} \sum_{X_{03} \in \mathcal{X}(\tau_3|X_{02})} \sum_{x_0 \in X_{03} \cap \bar{X}_3(s)} \left\langle l_{x_0}, \int_{\tau_2}^{s_{x_0}} D(s_{x_0}, t) u_{X_{03}}(t) dt \right\rangle \\ &= \Sigma^1 \int_{t_0}^{\tau_1} \langle \Sigma_{x_0}^{1,3} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{01}}(t) \rangle dt + \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle \Sigma_{x_0}^{2,3} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{02}}(t) \rangle dt \\ &+ \Sigma^3 \int_{\tau_2}^{\tau_3} \langle \Sigma_{x_0}^{3,3} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0, s}(t), u_{X_{03}}(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Продолжая аналогичным образом, получаем

$$\begin{aligned}
I_{1k} &= \Sigma^1 \int_{t_0}^{\tau_1} \langle \Sigma_{x_0}^{1,k} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{01}}(t) \rangle dt + \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle \Sigma_{x_0}^{2,k} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{02}}(t) \rangle dt + \dots \\
&+ \Sigma^{k-1} \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} \langle \Sigma_{x_0}^{k-1,k} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{0k-1}}(t) \rangle dt + \Sigma^k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \langle \Sigma_{x_0}^{k,k} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0,s}(t), u_{X_{0K}}(t) \rangle dt \\
&\quad (k = 3, \dots, K).
\end{aligned}$$

Суммируя полученные выражения, приходим к следующему представлению для I_1 (см. (4.12)):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \Sigma^1 \int_{t_0}^{\tau_1} \left\langle \Sigma_{x_0}^{1,1} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0,s}(t) + \sum_{k=2}^K \Sigma_{x_0}^{1,k} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{01}}(t) \right\rangle dt \\
&+ \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle \Sigma_{x_0}^{2,2} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0,s}(t) + \sum_{k=3}^K \Sigma_{x_0}^{2,k} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{02}}(t) \right\rangle dt + \dots \\
&+ \Sigma^{K-1} \int_{\tau_{K-2}}^{\tau_{K-1}} \left\langle \Sigma_{x_0}^{K-1,K-1} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0,s}(t) + \Sigma_{x_0}^{K-1,K} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0}, u_{X_{0K-1}}(t) \right\rangle dt \\
&\quad + \Sigma^K \int_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} \left\langle \Sigma_{x_0}^{K,K} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0,s}(t), u_{X_{0K}}(t) \right\rangle dt \\
&= \sum_{j=1}^{K-1} \Sigma^j \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \left\langle D^*(s_{x_0}, t) \left(\Sigma_{x_0}^{j,j} l_{x_0,s}(t) + \sum_{k=j+1}^K \Sigma_{x_0}^{j,k} l_{x_0} \right), u_{X_{0j}}(t) \right\rangle dt \\
&\quad + \Sigma^K \int_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} \left\langle \Sigma_{x_0}^{K,K} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0,s}(t), u_{X_{0K}}(t) \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Возвращаясь к (4.10) и (4.11), запишем

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, x(s_{x_0} | x_0, u_{x_0}(\cdot)) \rangle = \sum_{x_0 \in X_0} p_0(l_{x_0}, x_0) \\
&+ \sum_{j=1}^{K-1} \Sigma^j \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \left\langle D^*(s_{x_0}, t) \left(\Sigma_{x_0}^{j,j} l_{x_0,s}(t) + \sum_{k=j+1}^K \Sigma_{x_0}^{j,k} l_{x_0} \right), u_{X_{0j}}(t) \right\rangle dt \\
&\quad + \Sigma^K \int_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} \left\langle \Sigma_{x_0}^{K,K} D^*(s_{x_0}, t) l_{x_0,s}(t), u_{X_{0K}}(t) \right\rangle dt. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Из определения множества $\mathcal{A}(s)$ достижимости расширенной системы, соответствующего семейству s допустимых моментов наведения (см. (4.1)), и определения нижней опорной функции подмножества пространства \mathcal{R}_n (см. (3.3)) вытекает, что $\rho^-(l | \mathcal{A}(s))$ есть точная нижняя грань значений, записанных в левой части (4.13), по всем расширенным программам $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$. Как показывает (4.13), данная точная нижняя грань достигается взятием минимума по $u_{X_{0j}}(t) \in P$ при всех $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$ в подынтегральном выражении интеграла по каждому из промежутков $(\tau_{j-1}, \tau_j]$, записанных в правой части (4.13) ($j = 1, \dots, K$). Выполняя эту операцию, получаем представление (4.7). Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 546 с.
4. **Krasovskii A.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New-York: Springer Verlag, 1988. 517 с.
5. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995. 322 p.
6. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order PDEs. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
8. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
9. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** Задача управления с неполной информацией // Механика тверд. тела. 1973. № 4. С. 5–14.
10. **Куржанский А.Б.** О синтезе управлений по результатам наблюдений // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 547–563.
11. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
12. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
13. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
14. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
15. **Elliott R.J., Kalton N.** Values in differential games // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78, no. 3. P. 291–486.
16. **Roxin E.** Axiomatic approach in differential games // J. Opt. Theory Appl. 1969. Vol. 3. P. 156–163.
17. **Rull-Nardzevski C.** A theory of pursuit and evasion // Advances in Game Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1964. P. 113–126.
18. **Quincampoix M., Veliov V.** Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances // SIAM J. Control Optim. 2005. Vol. 43, no. 4. P. 1373–1399.

Кряжимский Аркадий Викторович

Поступила 10.10.2014

д-р физ.-мат. наук, академик РАН

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва,

Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

e-mail: kryazhim@mi.ras.ru

Стрелковский Никита Витальевич

аспирант

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

УДК 519.8

УПРАВЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОМЕХАМИ**В. М. Кунцевич**

Рассматривается задача синтеза управления нелинейными динамическими системами в условиях параметрической неопределенности и наличия ограниченных помех измерений. Сформулированная первоначально задача синтеза управления семейством нелинейных систем как обобщенная задача Зубова из-за наличия ограниченных помех при измерении вектора состояния и нелинейности в объекте управления трансформировалась в симбиоз обобщенных задач Зубова — Булгакова. Основным результатом статьи — аналитическое решение минимаксной задачи синтеза, позволившее получить конструктивный метод определения инвариантного множества.

Ключевые слова: управление, неопределенность, функции Ляпунова, ограниченные помехи, робастная устойчивость, инвариантные множества.

V. M. Kuntsevich. Control of a family of nonlinear dynamic systems under measurements with bounded disturbances.

We consider a control synthesis problem for nonlinear dynamic systems under parametric uncertainty and bounded measurement noises. Because of bounded disturbances in measurements of the state vector and the nonlinearity in the control object, the initially formulated control synthesis problem for a family of nonlinear systems as a generalized Zubov problem is transformed into a symbiosis of generalized Zubov–Bulgakov problems. The main result of the paper is the analytic solution of a minimax synthesis problem, which yields a constructive method for finding an invariant set.

Keywords: control, uncertainty, Lyapunov functions, bounded disturbances, robust stability, invariant sets.

Введение

Под семейством динамических систем понимается их совокупность, в которой один элемент семейства отличается от другого лишь значением параметров, для которых задана их априорная гарантированная оценка.

Задачей определения управления таким семейством нелинейных динамических систем является определение такого управления в классе управлений с обратной связью, которое обеспечивает в каком-то смысле наименьшее ограниченное инвариантное множество замкнутой системы управления, порождаемое наличием ограниченных помех измерения вектора состояния. При этом принимается, что вектор состояния системы измеряется полностью, но при ограниченных помехах, для которых задана априорная множественная оценка.

1. Постановка задачи

Принимается, что измерение вектора состояния и реализация управления осуществляются в дискретные моменты времени и что от исходного дифференциального уравнения, описывающего динамику системы, по известным правилам осуществлен переход к разностному уравнению

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n, L) + BU_n, \quad (1)$$

аппроксимирующему поведение исходной непрерывной системы.

В (1) вектор состояния $X_n \in \mathbb{R}^m$; вектор управления $U_n \in \mathbb{R}^m$; A — матрица $(m \times m)$, для строк A_i^T которой заданы интервальные оценки

$$A_i^T \in \mathbf{A}_i = \text{conv}_{j=1;2^m} \{A_i^j\}, \quad i = \overline{1; m}, \quad (2)$$

где A_i^j — j -я вершина многогранника \mathbf{A}_i , B — числовая матрица ($m \times m$).

Из (2) для матрицы A следует ее оценка

$$A \in \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \dots \times \mathbf{A}_m. \quad (3)$$

Компоненты $f_i(X_n, L)$, $i = \overline{1; m}$, нелинейной вектор-функции $F(X_n, L)$ заданы с точностью до параметров l_i ; $f_i(X_n, L) = l_i \tilde{f}_i(X_n)$, где $\tilde{f}_i(X_n)$ — заданные однозначные функции, такие что $\tilde{f}_i(0) = 0$. Остальные их свойства будут оговорены ниже.

Для параметров l_i справедливы оценки

$$l_i \in \mathbf{l}_i = \{l_i: \underline{l}_i \leq l_i \leq \overline{l}_i\}, \quad i = \overline{1; m}, \quad (4)$$

где $\underline{l}_i, \overline{l}_i$ — заданные числа. Из (4) для вектора $L^T = (l_1, \dots, l_m)$ получаем его оценку

$$L \in \mathbf{L} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 \times \dots \times \mathbf{l}_m.$$

Примем, что вектор состояния X_n измеряется полностью, но с помехами и результат измерений имеет вид

$$Y_n = X_n + Z_n. \quad (5)$$

Следуя работам А. Б. Куржанского [1; 2], примем, что для вектора помех Z_n задана его априорная множественная оценка

$$Z_n \in \mathbf{Z} = \{Z: \|Z\|_{II} \leq \Delta\}, \quad \text{где } \|Z\|_{II} = \sum_{i=1}^m |z_i|.$$

Из (5) следует, что для вектора X_n имеем лишь его оценку

$$X_n \in \mathbf{X}_n = Y_n + \mathbf{Z}. \quad (6)$$

По известной теореме о независимости решения задачи определения оптимальной точечной оценки $\overset{*}{X}_n$ вектора X_n от решения задачи управления (см., например, [1; 2]) для центрально симметрического множества \mathbf{Z} из (5) имеем $\overset{*}{X}_n = Y_n$.

В качестве цели управления системой (1)–(3) в соответствии с [3; 4] примем минимизацию первой разности функции Ляпунова, вычисляемой в силу уравнения (1), которую зададим в виде $v_n = \|X_n\|_{II}$.

Так как

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \|AX_n + F(X_n, L) + BU_n\|_{II} - \|X_n\|_{II}, \quad (7)$$

то задача минимизации функции Δv_n сводится к задаче минимизации первого слагаемого в (7). Но в силу наличия лишь оценок для матрицы A и вектора L такая задача некорректна и для получения гарантированного результата следует решать задачу

$$\min_{U_n} \max_{A \in \mathbf{A}, L \in \mathbf{L}} \|AX_n + F(X_n, L) + BU_n\|_{II}. \quad (8)$$

Так как вектор X_n неизмеряем, а для него в силу (5), (6) имеем лишь оценку (6), то в (8) выразим его через измеряемый вектор Y_n и тогда задачу (8) заменим задачей

$$\min_{U_n} \max_{Z_n \in \mathbf{Z}, A \in \mathbf{A}, L \in \mathbf{L}} \|A(Y_n + Z_n) + F(Y_n + Z_n, L) + BU_n\|_{II}. \quad (9)$$

Известно, что, как правило, минимаксные задачи не имеют аналитического решения, но задача (9) при $Z_n = 0$ — счастливое исключение из этого правила. Покажем это, представив множества \mathbf{A}_i в центрированной форме

$$\mathbf{A}_i = \overset{\circ}{A}_i + \delta \mathbf{A}_i, \quad i = \overline{1; m},$$

где $\overset{\circ}{A}_i$ — центр сферы минимального радиуса $r(\mathbf{A}_i)$, описанной вокруг множества \mathbf{A}_i , а множество $\delta\mathbf{A}_i$ имеет вид

$$\delta\mathbf{A}_i = \operatorname{conv}_{j=\overline{1;2^m}} \{ \Delta A_i^j = A_i^j - \overset{\circ}{A}_i \}, \quad i = \overline{1; m}, \quad \delta\mathbf{A} = \delta\mathbf{A}_1 \times \dots \times \delta\mathbf{A}_m, \quad \overset{\circ}{A} = \|\overset{\circ}{A}_i\|_{i=1}^m.$$

Множество \mathbf{l}_i также представим в центрированной форме

$$l_i \in \mathbf{l}_i = \overset{\circ}{l}_i + \delta\mathbf{l}_i, \quad \delta\mathbf{l}_i = \{ \Delta l_i: |\Delta l_i| \leq 0.5(\bar{l}_i - \underline{l}_i) \}, \quad \overset{\circ}{l}_i = 0.5(\bar{l}_i + \underline{l}_i), \quad i = \overline{1; m},$$

где

$$\delta\mathbf{l} = \delta\mathbf{l}_1 \times \dots \times \delta\mathbf{l}_m, \quad \overset{\circ}{L} = \|\overset{\circ}{l}_i\|_{i=1}^m.$$

С учетом введенных обозначений перепишем (9) в виде

$$\min_{U_n} \max_{Z_n \in \mathbf{Z}, \Delta A_i \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta L \in \delta\mathbf{L}} \left\| (\overset{\circ}{A} + \Delta A)(Y_n + Z_n) + F[Y_n + Z_n, (\overset{\circ}{L} + \Delta L)] + BU_n \right\|_{II}. \quad (10)$$

После введения обозначений $u_{i,n} = B_i^T U_n$ задача (10) сводится к совокупности задач ($i = \overline{1; m}$)

$$\min_{u_{i,n}} \max_{Z_n \in \mathbf{Z}, \Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} \left| (\overset{\circ}{A}_i + \Delta A_i)^T Y_n + (\overset{\circ}{A}_i + \Delta A_i)^T Z_n + (\overset{\circ}{l}_i + \Delta l_i) \tilde{f}_i(Y_n + Z_n) + u_{i,n} \right|.$$

Найти решения этих задач в аналитической форме не представляется возможным, но оптимальное управление системой, в которой вектор состояния измеряется без помех ($Z_n \equiv 0$), как решение задач

$$\min_{u_{i,n}} \max_{\Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} \left| (\overset{\circ}{A}_i + \Delta A_i)^T Y_n + (\overset{\circ}{l}_i + \Delta l_i) \tilde{f}_i(Y_n) + u_{i,n} \right|, \quad i = \overline{1; m}, \quad (11)$$

дает

Теорема 1. Минимаксные задачи (11) имеют аналитические решения

$$u_{i,n} = \overset{*}{u}_{i,n} = -[\overset{\circ}{A}_i^T Y_n + \overset{\circ}{l}_i \tilde{f}_i(Y_n)], \quad i = \overline{1; m}. \quad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим доказательство по схеме от противного и пусть управления $\overset{*}{u}_{i,n}$ ($i = \overline{1; m}$) не являются решениями задач (11). Тогда примем, что

$$\overset{\vee}{u}_{i,n} = \overset{*}{u}_{i,n} + \Delta u_{i,n}, \quad i = \overline{1; m},$$

где $\Delta u_{i,n}$ — произвольные функции. Подставив управления $\overset{\vee}{u}_{i,n}$ в (11), получим

$$\max_{\Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} \left| \Delta A_i^T Y_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(Y_n) + \Delta u_{i,n} \right|, \quad i = \overline{1; m}.$$

Среди вершин центрально-симметрических интервальных множеств $\delta\mathbf{A}_i$, $\delta\mathbf{l}_i$ существуют такие векторы $\Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i$ и величины $\Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i$, что

$$\operatorname{sign} [\Delta A_i^T Y_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(Y_n)] = \operatorname{sign} \Delta u_{i,n}, \quad i = \overline{1; m},$$

и, следовательно, для всех $i = \overline{1; m}$ выполняется

$$\max_{\Delta A_i \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} \left| \Delta A_i^T Y_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(Y_n) + \Delta u_{i,n} \right| > \max_{\Delta A_i \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} \left| \Delta A_i^T Y_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(Y_n) \right|,$$

что и требовалось доказать.

Поскольку, как уже отмечалось выше, аналитически найти решение задачи синтеза оптимального управления при $Z_n \neq 0$ не представляется возможным, то для управления неавтономным семейством систем (1)–(5) примем полученное в аналитической форме управление (12).

Если условие $\|Z_n\|_{II} \leq \varepsilon$ выполняется $\forall n \in [0, \infty)$, где ε — достаточно малая величина, то управление (12) является субоптимальным.

Примем далее, что $\det B \neq 0$. Тогда по уже определенному вектору $U_n^{*T} = (u_{1,n}^*, u_{2,n}^*, \dots, u_{m,n}^*)$ определяем искомый вектор управления

$$U_n = B^{-1} U_n^*. \quad (13)$$

Подставив (13) в (1) и приняв во внимание (9), окончательно получим уравнение замкнутой неавтономной системы

$$X_{n+1} = \Delta A X_n + D(\Delta L) \tilde{F}(X_n) + \Psi(X_n, Z_n), \quad (14)$$

где

$$D(\Delta L) = \text{diag} \{ \Delta l_i \}_{i=1}^m, \quad \Psi(X_n, Z_n) = -\overset{\circ}{A} Z_n + \overset{\circ}{D}_L [\tilde{F}(X_n) - \tilde{F}(X_n + Z_n)], \quad (15)$$

$$\overset{\circ}{D}_L = \text{diag} \{ \overset{\circ}{l}_i \}_{i=1}^m.$$

В (15) $\overset{\circ}{A}$ — матрица $(m \times m)$, составленная из строк $\overset{\circ}{A}_i^T$, $i = \overline{1; m}$.

Из (14), (15) следует, что из-за наличия в системе (1) нелинейной вектор-функции $F(\cdot)$ помеха Z_n действует на семейство систем (14), (15) аддитивно и мультипликативно. Покажем это на простейшем примере, когда $\tilde{f}_i(\cdot) = l_i x_i^2$. При этом

$$\psi_i(x_i, z_i) = l_i [x_i^2 - (x_i + z_i)^2] = -l_i z_i (2x_i + z_i), \quad i = \overline{1; m}.$$

При определенных условиях семейство систем (14), (15) имеет ограниченное инвариантное множество, т.е. такое множество, что если $X_n \in \overset{*}{\mathbf{X}}$, то и $X_{n+1} \in \overset{*}{\mathbf{X}}$ при всех возможных значениях $Z_n \in \mathbf{Z}$, порождаемое наличием ограниченной помехи Z_n .

2. Обсуждение полученных результатов

Использование определенного в аналитической форме управления (12), являющегося для системы с $Z_n = 0$ оптимальным, дает возможность провести анализ ее качественных свойств (ее устойчивости). Из (14), (15) следует, что при $Z_n = 0$ семейство систем (14), (15) вырождается в семейство нелинейных автономных систем. Для того чтобы семейство систем (14), (15) имело ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}_n$, семейство нелинейных автономных систем

$$X_{n+1} = \Delta A X_n + D(\Delta L) \tilde{F}(X_n), \quad \text{где } \Delta A \in \delta \mathbf{A}, \quad \Delta L \in \delta \mathbf{L}, \quad (16)$$

должно быть асимптотически устойчиво в целом или в заданной области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$.

В том частном случае, когда $\Delta L = 0$, семейство систем (16) вырождается в семейство линейных систем. В [5] показано, что если

$$\max_{\Delta A \in \delta \mathbf{A}} \|\Delta A\|_{II} \leq q < 1,$$

то это неравенство является достаточным условием асимптотической устойчивости семейства линейных систем. Если множество $\delta \mathbf{A}$ таково, что это неравенство не выполняется, то рассматриваемое семейство систем необходимо тем или иным образом сузить настолько, чтобы это неравенство выполнялось.

При $\Delta L \neq 0$ семейство систем (16) — семейство нелинейных систем и для анализа его устойчивости “в области” воспользуемся результатами [5] и эволюцию этого семейства систем запишем в терминах разностных включений

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{H}(X_n, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{H}(\cdot) = \bigcup \left\{ \Delta A X_n + D(\Delta L) \tilde{F}(X_n) + \Psi(X_n, Z_n) : X_n \in \mathbf{X}_n, Z_n \in \mathbf{Z}, \Delta A \in \delta \mathbf{A}, \Delta L \in \delta \mathbf{L} \right\}. \quad (18)$$

В общем случае преобразование $\mathbf{H}(\cdot)$ определяет невыпуклое множество \mathbf{X}_{n+1} , точное определение которого связано с существенными трудностями вычислительного характера. Поэтому, как это было предложено в совместной работе с А. Б. Куржанским [6], введем его оценку сверху, аппроксимировав его интервальным множеством минимального объема, и далее будем анализировать устойчивость полученного автономного нелинейного разностного включения. Откажемся при этом от избыточного в приложениях требования об устойчивости “в целом” и ограничимся требованием устойчивости в заданной области

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \left\{ X : \|X\|_{II} \leq \overset{\circ}{\rho} \right\}, \quad \text{где } \overset{\circ}{\rho} \text{ — заданное число.} \quad (19)$$

Примем, что $X_n \in \mathbf{X}_n \subset \overset{\circ}{\mathbf{X}}$.

При $\mathbf{Z} = \emptyset$ заменим множество \mathbf{X}_{n+1} , определенное соотношениями (17), (18), его оценкой сверху в виде интервального множества

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{H}}(X_n, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}) = \overline{x}_{1,n+1} \times \overline{x}_{2,n+1} \times \dots \times \overline{x}_{m,n+1}, \quad (20)$$

где

$$\overline{x}_{i,n+1} = \bigcup \left\{ (\Delta A_i)^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) : X_n \in \mathbf{X}_n, \Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta l_i \right\}, \quad i = \overline{1; m}.$$

Отметим, что множества $\overline{x}_{i,n+1}$ ($i = \overline{1; m}$) — проекции множества \mathbf{X}_{n+1} на соответствующую координатную ось Ox_i . Для определения множеств $\overline{x}_{i,n+1}$ ($i = \overline{1; m}$) рассмотрим задачи

$$\min_{X_n \in \mathbf{X}_n} \min_{\Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i} \min_{\Delta l_i \in \delta l_i} \left[(\Delta A_i)^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) \right] = \underline{x}_{i,n+1}, \quad i = \overline{1; m}; \quad (21)$$

$$\max_{X_n \in \mathbf{X}_n} \max_{\Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i} \max_{\Delta l_i \in \delta l_i} \left[(\Delta A_i)^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) \right] = \overline{x}_{i,n+1}, \quad i = \overline{1; m}. \quad (22)$$

Полученные значения $\underline{x}_{i,n+1}$, $\overline{x}_{i,n+1}$ ($i = \overline{1; m}$) определяют интервальные множества $\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1}$

$$\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \left\{ x_i : \underline{x}_{i,n+1} \leq x_{i,n+1} \leq \overline{x}_{i,n+1} \right\}, \quad i = \overline{1; m},$$

подставив которые в (20), получим множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Задачи отыскания (в общем случае) глобальных экстремумов функций $\tilde{f}_i(X_n)$ могут оказаться слишком трудоемкими в вычислительном отношении. В приложениях часто известны некоторые важные свойства этих функций, которые позволяют конструктивно решать задачи отыскания экстремумов (21), (22). Так, если ограничиться рассмотрением только выпуклых (вогнутых) на множестве \mathbf{X}_n функций, то решения задач (21), (22) можно эффективно отыскать с помощью известных программ решения задач нелинейной оптимизации.

Поскольку результатом преобразования $\mathbf{H}(\cdot)$ множества \mathbf{X}_n общего вида является интервальное множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$, то ниже примем, что оценка (20) имеет вид

$$\mathbf{X}_n = \text{conv}_{k=\overline{1; 2^m}} \{ X_n^k \}, \quad (23)$$

где X_n^k — k -я вершина m -мерного куба \mathbf{X}_n .

Введем такую скалярную характеристику множества \mathbf{X} :

$$\rho(\mathbf{X}) = \max_{X \in \mathbf{X}} \|X\|_I, \quad \text{где } \|X\|_I = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}. \quad (24)$$

Для анализа устойчивости нелинейного разностного включения

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) \quad (25)$$

воспользуемся теоремой [5] и ее следствием.

Так как функция (24) является положительно определенной, то она принята в качестве функции Ляпунова, и в [5] было введено обобщение достаточного условия асимптотической устойчивости Ляпунова.

Теорема 2 [5, теорема 1]. *Если первая разность функции Ляпунова*

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \rho[\mathbf{F}(\mathbf{X}_n)] - \rho(\mathbf{X}_n) < 0 \quad \forall n \quad (26)$$

отрицательно определенная, то тривиальное решение разностного включения (25) асимптотически устойчиво.

Следствие 1. *Если начало координат — центр множества \mathbf{X}_n , т. е. центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг \mathbf{X}_n , является началом координат, то значение функции $\rho(\mathbf{X}_n)$, вычисленной по соотношению (24) при использовании нормы $\|X\|_I$, совпадает с радиусом описанной сферы, и из выполнения неравенства (26) следует, что имеет место включение*

$$\mathbf{X}_{n+1} \subset \mathbf{X}_n. \quad (27)$$

Нетрудно показать, что для интервальных множеств \mathbf{X}_n и \mathbf{X}_{n+1} с центрами в начале координат строгое включение (27) имеет место тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одно из системы нестрогих неравенств $\underline{x}_{i,n+1} \geq \underline{x}_{i,n}$, $\bar{x}_{i,n+1} \leq \bar{x}_{i,n}$ ($i = \overline{1; m}$) является строгим.

Примем, что свойства вектор-функции $F(\cdot)$ и множества \mathbf{A} и \mathbf{L} таковы, что для множества $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ имеет место включение

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} \subset \mathbf{X}_n, \quad (28)$$

что является достаточным условием устойчивости нелинейного разностного включения (20). При этом как следствие этого включения справедливо неравенство

$$\rho(\overline{\mathbf{X}}_{n+1}) < \rho(\mathbf{X}_n).$$

Если включение (28) имеет место, то неавтономная система (14), (15), (5) имеет ограниченное инвариантное множество $\overline{\mathbf{X}}^*$, т. е. такое множество, что если $X_n \in \overline{\mathbf{X}}^*$, то и $X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}^*$ при всех допустимых $Z_n \in \mathbf{Z}$.

Перейдем теперь к определению инвариантного множества неавтономной системы (14), (15), (5). Запишем уравнение эволюции этой системы. Из (14), (15), (5), (23) следует, что

$$X_{n+1} \subset \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{G}(\overline{\mathbf{X}}_n, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}), \quad (29)$$

где

$$\mathbf{G}(\overline{\mathbf{X}}_n, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}) = \bigcup \left\{ \Gamma(X_n, Z_n, \Delta A, \Delta L) : X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n, Z_n \in \mathbf{Z}, \Delta A \in \delta \mathbf{A}, \Delta L \in \delta \mathbf{L} \right\},$$

$$\Gamma(X_n, Z_n, \Delta A, \Delta L) = \Delta A X_n + D(\Delta L) \tilde{F}(X_n) - \overset{\circ}{A} Z_n + \overset{\circ}{D}_L [\tilde{F}(X_n) - \tilde{F}(X_n + Z_n)].$$

В силу изложенных выше причин аппроксимируем множество общего вида \mathbf{X}_{n+1} интервальным множеством минимального объема

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{X}}_n, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}),$$

где

$$\overline{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{X}}_n, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}) = \overline{g}_{1,n+1} \times \overline{g}_{2,n+1} \times \dots \times \overline{g}_{m,n+1}, \quad (30)$$

$$\overline{g}_{i,n+1} = \bigcup \left\{ \gamma_i(X_n, Z_n, \Delta A_i^T, \Delta l_i) : X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n, Z_n \in \mathbf{Z}, \Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta \mathbf{l}_i \right\},$$

$$\gamma_i(X_n, Z_n, \Delta A_i^T, \Delta l_i) = \Delta A_i^T X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) - \overset{\circ}{A}_i^T Z_n + \overset{\circ}{l}_i [\tilde{f}_i(X_n) - \tilde{f}_i(X_n + Z_n)], \quad i = \overline{1; m}.$$

Определив с помощью стандартных программ оптимизации решения задач

$$\min_{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n, Z_n \in \mathbf{Z}} \min_{\Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta \mathbf{l}_i} \gamma_i(X_n, Z_n, \Delta A_i^T, \Delta l_i) = \underline{x}_{i,n+1},$$

$$\max_{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n, Z_n \in \mathbf{Z}} \max_{\Delta A_i^T \in \delta \mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta \mathbf{l}_i} \gamma_i(X_n, Z_n, \Delta A_i^T, \Delta l_i) = \overline{x}_{i,n+1}, \quad i = \overline{1; m},$$

запишем множества $\overline{g}_{i,n+1}$ в виде

$$\overline{g}_{i,n+1} = \{x_i : \underline{x}_{i,n+1} \leq x_{i,n+1} \leq \overline{x}_{i,n+1}\}, \quad i = \overline{1; m},$$

подставив которые в (30), найдем множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Обозначив через $\overset{*}{\mathbf{X}}$ инвариантное множество системы (29) и приняв $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, после подстановки этих обозначений в (29) получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{G}}(\overset{*}{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L}), \quad (31)$$

решением которого является искомое множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Найти в аналитической форме решение уравнения (31) невозможно, поэтому воспользуемся предложенной в [7] итерационной процедурой. Из равенства множеств следует равенство их радиусов $\rho[\overline{\mathbf{G}}(\overset{*}{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L})] = \rho(\overset{*}{\mathbf{X}})$. Для определения величины $\rho(\overset{*}{\mathbf{X}})$ из уравнения (31) воспользуемся итерационной процедурой. На первом шаге итерации примем $\overset{*}{\mathbf{X}}_1$ в виде m -мерного куба с центром в начале координат со сторонами, равными единице, т. е. $\rho_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,1}) = 0.5, i = \overline{1; m}$. Далее определяем $\overline{\mathbf{G}}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L})$, находим величины $\rho_i[\overline{\mathbf{G}}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L})], i = \overline{1; m}$ и величины $\Delta \rho_i = \rho_i[\overline{\mathbf{G}}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1, \mathbf{Z}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{L})] - \rho_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,1}), i = \overline{1; m}$. Затем действуем по правилу деления отрезков $\Delta \rho_i$ пополам и величины $\rho_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_k), i = \overline{1; m}$, изменяем по алгоритму:

$$\rho_{i+1}(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,k+1}) = \rho_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,k}) + 0.5 \Delta \rho_i, \quad i = \overline{1; m}.$$

Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены неравенства $|\Delta \rho_i| \leq \varepsilon_i, i = \overline{1; m}$, где ε_i — заданная допустимая погрешность.

Полученные выше результаты очевидным образом распространяются на другие виды оценок нелинейных функций $\tilde{f}_i(X)$. Как известно, исследование устойчивости нелинейных непрерывных, а впоследствии и дискретных систем управления началось с работы А. И. Лурье и В. Н. Постникова [8] (см. также [9]), опубликованной в середине прошлого столетия, в которой рассматривалась система с нелинейной знакопеременной скалярной “секториальной” функцией скалярного аргумента, удовлетворяющей ограничениям

$$\underline{k}x^2 \leq xf(x) \leq \overline{k}x^2, \quad \text{где } 0 \leq \underline{k} < \overline{k}, \quad (32)$$

что эквивалентно $\underline{k}x \operatorname{sign} x \leq f(x) \operatorname{sign} x \leq \bar{k}x \operatorname{sign} x$ или $\underline{k}|x| \leq f(x) \operatorname{sign} x \leq \bar{k}|x|$.

Для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (32), справедливо равенство $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} x$.

Так как для знакопеременных функций $f(X)$ векторного аргумента X многомерного аналога этого равенства не существует, то это вынуждает для такого класса функций $f(X)$ вводить их оценки иным образом.

Для положительно определенной функции $f(X)$ ее оценку примем в виде

$$\underline{k}\|X\| \leq f(X) \leq \bar{k}\|X\|, \quad \text{где } 0 \leq \underline{k} < \bar{k}.$$

Аналогично вводится оценка для отрицательно определенной функции $f(X)$

$$-\underline{k}\|X\| \geq f(X) \geq -\bar{k}\|X\|, \quad \text{где } 0 \leq \underline{k} < \bar{k}.$$

Для однозначной знакопеременной функции $f(X)$ по априорным сведениям о ее свойствах определяются те непересекающиеся между собой области \mathbf{X}^+ , в которых $f(X) \geq 0$, и области \mathbf{X}^- , в которых $f(X) \leq 0$. Для области \mathbf{X}^+ оценка функции $f(X)$ принимается в виде

$$\underline{k}\|X\| \leq f(X) \leq \bar{k}\|X\|, \quad X \in \mathbf{X}^+,$$

и соответственно для области \mathbf{X}^- оценка функции $f(X)$ принимается в виде

$$-\underline{k}\|X\| \geq f(X) \geq -\bar{k}\|X\|, \quad X \in \mathbf{X}^-.$$

Таковыми областями \mathbf{X}^+ и \mathbf{X}^- могут быть, в частности, те или иные ортанты \mathbf{X}_j , где $j = \overline{1, 2^m}$, пространства \mathbb{R}^m или их объединения.

Отдельного рассмотрения заслуживает тот важный для приложений случай, когда на компоненты вектора управления U_n наложены ограничения, например в виде $|u_i| \leq \sigma_i$, $i = \overline{1, m}$, так как наличие ограничения на управление существенно влияет на свойства синтезированной системы управления.

3. Заключение

Для класса систем, описываемых нелинейными разностными включениями, использовано обобщение дискретных аналогов теории Ляпунова об устойчивости нелинейных динамических систем. Условия устойчивости носят характер достаточных, так как множества возможных значений вектора состояния погружаются в интервальные минимального размера.

Проверка выполнения достаточных условий устойчивости в общем случае нетривиальна, так как для получения верхних и нижних оценок координат вектора состояния требуется решать задачи отыскания глобальных экстремумов. Однако в частных случаях, встречающихся на практике, эта проверка не представляет вычислительной сложности. В частности, это справедливо для случая априорных оценок нелинейных неизвестных функций функциями, обладающими свойствами выпуклости/вогнутости на заданных множествах вектора состояний.

Сформулированная первоначально задача синтеза управления семейством нелинейных систем как обобщенная задача Зубова из-за наличия ограниченных помех при измерении вектора состояния и нелинейности в объекте управления трансформировалась в симбиоз обобщенных задач Зубова — Булгакова [3–10], так как управление, минимизирующее норму вектора состояния, минимизирует тем самым радиус инвариантного множества семейства систем.

Основной результат статьи — аналитическое субоптимальное решение минимаксной задачи синтеза, что позволило предложить конструктивный метод определения оценки инвариантного (предельного) множества семейства нелинейных неавтономных дискретных систем — аналога дисперсии при стохастической природе возмущений.

Все этапы анализа (проверка достаточного условия устойчивости “в области” автономного нелинейного разностного включения и определение радиуса инвариантного множества), а также определение параметров алгоритма управления выполняются в режиме “off-line”. Реализация полученного алгоритма управления в режиме “on-line” требует выполнения элементарных операций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.
2. Избранные труды А.Б. Куржанского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 756 с.
3. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 494 с.
4. **Кунцевич В.М., Лычак М.М.** Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 399 с.
5. **Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.** Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 5. С. 51–59.
6. **Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.** Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управления ими // Проблемы управления и информатики. 2010. № 1. С. 5–21.
7. **Кунцевич В.М., Кунцевич А.В.** Инвариантные множества семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 92–106.
8. **Лурье А.И., Постников В.Н.** К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, № 3. С. 246–248.
9. **Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.** Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 261 с.
10. **Булгаков Б.В.** О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51, № 5. С. 7–15.

Кунцевич Всеволод Михайлович

Поступила 10.07.2014

д-р тех. наук, профессор, академик НАН Украины

главный научный сотрудник

Институт космических исследований НАН Украины и ГКА Украины

e-mail: vm_kuntsev@mail.ru

УДК 519.6

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ПРАВИЛ УПРАВЛЕНИЯ КАСКАДОМ ГИДРОЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ¹

А. В. Лотов, А. И. Рябиков

Предлагается метод построения правил управления динамической системой при наличии нескольких критериев выбора решения. Выбор правила основывается на аппроксимации оболочки Эджворта — Парето (ОЭП) и интерактивной визуализации границы Парето в виде карт решений — совокупностей двумерных сечений ОЭП, которые изображаются по запросу исследователя. Описывается использование предложенного метода для построения правил управления ангарским каскадом водохранилищ.

Ключевые слова: динамические системы, правила управления, многокритериальная оптимизация, аппроксимация границы Парето, оболочка Эджворта — Парето, управление каскадом водохранилищ.

A. V. Lotov, A. I. Ryabikov. Multiobjective feedback control and its application to the construction of control rules for a cascade of hydroelectric power stations.

A method for the construction of control rules in a dynamic system in the case of several decision criteria is proposed. The choice of a rule is based on the approximation of the Edgeworth–Pareto hull (EPH) and the interactive visualization of the Pareto frontier in the form of decision maps, i.e., families of two-dimensional sections of the EPH shown at a researcher’s request. The application of the proposed method to the construction of control rules for the Angara reservoir system is described.

Keywords: dynamic systems, control rules, multiobjective optimization, approximation of the Pareto frontier, Edgeworth–Pareto hull, management of a reservoir system.

1. Введение

В статье предлагается метод поддержки специалистов в процессе выбора правила управления нелинейной динамической системой в случае нескольких критериев качества управления системой. В отличие от классических подходов к этой задаче [1] статья основывается на концепциях многокритериальной оптимизации (МКО) (подробнее см. в [2]). Пусть W — произвольное пространство решений (например, конечномерное векторное пространство решений либо пространство возможных управлений — измеримых почти всюду ограниченных на $[0, T]$ вектор-функций времени). Через w обозначим элементы пространства W , а через X — заданную совокупность возможных (допустимых) решений. В задачах МКО совокупность y критериев выбора решения является элементом пространства \mathbb{R}^m , причем векторы y связаны с решениями заданным отображением $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$. Для определенности будем предполагать, что для лица, принимающего решение, представляет интерес уменьшение значения каждого из m критериев (при прочих неизменных). Такое предпочтение в рамках МКО формализуется на основе бинарного отношения Парето (доминирования по Парето): критериальная точка y' является более предпочтительной, чем точка y (принято говорить, что y' доминирует y по Парето), когда $y' \leq y$ и $y' \neq y$. Задача МКО такого типа записывается в стандартной форме

$$y = F(w), \quad w \in X, \quad y \rightarrow \min. \quad (1.1)$$

Под решением задачи МКО понимается множество недоминируемых по Парето (Парето-оптимальных, неуплощаемых) критериальных векторов, которое определяется как

$$P(Y) = \{y \in Y : \{y' \in Y : y' \leq y, y' \neq y\} = \emptyset\}, \quad (1.2)$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 13-01-00235) и ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18.

где $Y = F(X)$ — множество достижимых критериальных векторов, а также множество эффективных по Парето решений $P(X)$, под которыми понимаются решения из X , отображающиеся в множество $P(Y)$. Важно, что множество $P(Y)$ имеет простое геометрическое содержание — оно является частью границы множества Y и называется границей Парето. С теоретической точки зрения, решение задачи МКО состоит в нахождении $P(Y)$ и $P(X)$.

В отличие от задач с единственным критерием выбора теоретическое решение не является удовлетворительным с точки зрения практики. Действительно, множество $P(X)$ обычно состоит более чем из одной точки и представляет собой совокупность математически эквивалентных решений. Таким образом, для практического применения результата теоретического решения задачи МКО требуется дополнительно осуществить выбор единственного решения из $P(X)$. Возникает вопрос о том, что может служить основой для такого выбора. В методах принятия решений при нескольких критериях (см., например, [3]) считается, что такой основой являются неформализованные предпочтения человека, участвующего в процессе принятия решения — так называемого лица, принимающего решение (ЛПР). Было предложено большое число методов МКО, по-разному использующих предпочтения ЛПР в процессе выбора единственного решения. Методы решения задач МКО обычно разбивают на группы, принципиально отличающиеся ролью ЛПР (см. подробнее в [4; 5]):

- методы без участия ЛПР, в рамках которых на основе некоторых характеристик задачи строится свертка (т.е. скалярная функция) критериев. Далее выбор единственного варианта основывается на решении задачи оптимизации этой свертки критериев;
- методы, основанные на вовлечении ЛПР в процесс построения свертки критериев. При этом часто строится функция полезности (ценности), позволяющая сравнить два любых возможных варианта решения по их полезности для ЛПР. Построенная свертка применяется для решения задачи выбора с использованием скалярной оптимизации;
- интерактивные (итеративные) методы, в рамках которых от итерации к итерации осуществляется вариация параметров свертки критериев: на каждой итерации ЛПР оценивает результаты решения задачи оптимизации свертки и дает рекомендации по изменению ее параметров. Процесс останавливается при согласии ЛПР остановиться на полученном варианте или в случае его отказа менять параметры свертки;
- методы границы Парето: ЛПР изучает аппроксимацию границы Парето и прямо на ней указывает наиболее предпочтительную точку, по которой компьютер находит соответствующий вариант решения, оптимальный по Парето.

К математическому пониманию решения задачи МКО наиболее близко стоит последний подход. Наиболее распространенными, однако, являются второй и третий подходы, поскольку они обходят трудные задачи аппроксимации границы Парето и информирования ЛПР об этой границе, а в плане вычислений требуют решения стандартных задач скалярной оптимизации. Вопрос о том, может ли ЛПР правильно отвечать на вопросы о своих предпочтениях и, следовательно, в какой степени предпочтениям ЛПР соответствуют свертки, используемые в методах второго и третьего подходов, является вопросом из области психологии, который авторы методов многокритериальной оптимизации обычно игнорируют. По мнению многих психологов [4; 6], большинство предлагаемых ЛПР вопросов слишком сложны для человека, так что ответы на них ненадежны, а полученное решение может не соответствовать предпочтениям ЛПР. Поэтому в последнее время все большее внимание практиков привлекают методы, основанные на аппроксимации и изучении границы Парето. Востребованность таких методов увеличивается в связи с тем, что они применимы для поддержки переговоров [7–9].

В методах границы Парето возникает вопрос о том, как информировать ЛПР об этой границе. В случае двух критериев граница Парето обычно изображается кривой на плоскости, на которой ЛПР может указать предпочтительное решение. В случае более чем двух критериев проблема информирования ЛПР не так проста. В многокритериальном случае граница Парето часто аппроксимируется конечным набором критериальных точек, которые затем предоставляются ЛПР в виде списка. Анализ большого списка многомерных альтернатив и выбор из

него оказался слишком трудоемким для ЛПР [4; 6], поэтому постоянно делаются попытки и в этом случае использовать визуализацию.

В данной статье для поиска предпочтительного варианта правил управления в нелинейных динамических задачах МКО используется метод диалоговых карт решений (ДКР) [10; 11], позволяющий осуществить аппроксимацию и визуализацию многомерной границы Парето для случая от трех до дюжины критериев. На основе ДКР реализуется метод достижимых целей (МДЦ), в рамках которого ЛПР изучает границу Парето и указывает предпочтительную точку ее границы прямо на экране компьютера, после чего решение находится по указанной точке.

В данной статье ДКР/МДЦ применяется в задаче построения правила управления нелинейной динамической системой. В следующем разделе дается математическая формулировка задачи МКО для непрерывных нелинейных многошаговых систем с критериями логического типа. Далее приводится прикладная задача, послужившая исходной точкой исследования — задача управления каскадом водохранилищ реки Ангары, после чего описывается применяемый метод аппроксимации границы Парето. В заключительном разделе излагаются результаты исследования прикладной задачи.

2. Формулировка задачи

Считается, что динамика изучаемой системы описывается многошаговым уравнением

$$x(t) = x(t-1) + f(x(t-1), u(t), v(t)), \quad t = 1, \dots, \quad (2.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний в момент времени t , $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор управлений на отрезке времени t , который начинается в момент $t-1$ и завершается в момент t , $v(t) \in \mathbb{R}^s$ — значение вектора случайных величин на отрезке времени t . Начальное состояние $x(0)$ задано.

Рассматривается проблема выбора правила управления, т. е. требуется разработать формулу или вычислительный алгоритм, с помощью которых по состоянию $x(t-1)$ и, может быть, вспомогательной информации можно рассчитать вектор управления $u(t)$. Предполагается, что структура правила управления задана, т. е.

$$u(t) = h(x(t-1), p(t), t), \quad t = 1, \dots, \quad (2.2)$$

где $h(\cdot, \cdot, \cdot)$ — заданная вектор-функция, $p(t) \in \mathbb{R}^q$ — вектор параметров, значения которых требуется назначить. Предполагается, что это правило является периодическим с заданным периодом τ , т. е. $h(\cdot, \cdot, t) = h(\cdot, \cdot, t + \tau)$. Параметры также предполагаются периодическими с тем же периодом, т. е. $p(t) = p(t + \tau)$. Поэтому параметры $p(t)$ соотношения (2.2) достаточно найти при $t = 1, \dots, \tau$. Обратим внимание на то, что функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $h(\cdot, \cdot, \cdot)$ могут быть заданы таблицами и вычислительными алгоритмами.

Предполагается, что векторы параметров должны принадлежать заданным множествам

$$p(t) \in P(t), \quad t = 1, \dots, \tau, \quad (2.3)$$

где $P(t)$ компактны. Таким образом, задача выбора правила управления сводится к задаче выбора набора параметров, являющегося допустимым, т. е. удовлетворяющим (2.3).

Предполагается, что заранее построена последовательность векторов $v(t), t = 1, \dots, T$, отражающая свойства случайных величин и достаточно продолжительная для того, чтобы на ее основе можно было оценивать математическое ожидание значений критериев выбора решения для любого заданного правила управления, т. е. набора параметров (2.3). Способы построения такой последовательности будут обсуждены при изучении конкретного примера описываемой задачи — задачи управления каскадом ГЭС.

В качестве критериев выбора параметров правила управления в данной работе берется число отрезков времени, на которых происходит нарушение априорно заданных требований к значениям характеристик функционирования системы. Пусть значение j -й характеристики на отрезке времени t , $j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T$, задается непрерывной функцией $s^j(x(t), u(t), v(t), t)$, а совокупность ее удовлетворительных значений задается множеством G_t^j . Отклонение значения j -й характеристики от G_t^j измеряется на основе заданной функции $\varrho(\cdot, \cdot)$, т. е.

$$z_t^j = \varrho(s^j(x(t), u(t), v(t), t), G_t^j). \quad (2.4)$$

Функции (2.4) таковы, что $z_t^j \geq 0$ для $j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T$. Тогда критерий y_j имеет вид

$$y_j = \sum_{t=1}^T \Theta(z_t^j), \quad (2.5)$$

где $\Theta(z)$ — функция Хевисайда, т. е. $\Theta(z) = 0$ при $z \leq 0$ и $\Theta(z) = 1$ при $z > 0$. Значение каждого из критериев (2.5) требуется минимизировать. Критерии такого типа типичны, например, для водохозяйственных задач. Причины использования именно таких критериев обсуждаются в следующем разделе.

В процессе многокритериального выбора наиболее предпочтительного варианта параметров $p(t), t = 1, \dots, \tau$, используется следующая особенность рассматриваемой системы: благодаря наличию построенной заранее последовательности $v(t), t = 1, \dots, T$, для любого допустимого варианта параметров $p(t) \in P(t), t = 1, \dots, \tau$, на основе соотношений (2.2) и (2.1) можно рассчитать функции времени $u(\cdot)$ и $x(\cdot)$. В свою очередь, по функциям $x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)$ на основе (2.4) и (2.5) можно рассчитать значения критериев. Таким образом, для изучаемой системы можно применять методы оптимизации, основанные на расчете критериев по допустимому варианту параметров, т. е. методы изучения систем типа черного ящика.

Обозначим через w совокупность векторов $\{p(1), \dots, p(\tau)\}$, а через X — прямое произведение множеств $P(1), \dots, P(\tau)$. Тогда условие допустимости варианта параметров принимает вид $w \in X$, а зависимость значений критериев от параметров можно записать в виде $y = F(w)$, где зависимость вектора критериев $y \in \mathbb{R}^m$ от параметров $w = \{p(1), \dots, p(\tau)\}$ задается соотношениями (2.2), (2.1), (2.4) и (2.5). Тогда полученную задачу многокритериальной минимизации (предпочтительно уменьшение числа нарушений требования по каждой из характеристик при неизменных остальных) можно записать в виде (1.1). Напомним, что теоретическим решением задачи (1.1) является граница Парето.

Таким образом, получена сложная динамическая нелинейная задача МКО с непрерывно меняющимися значениями переменных и логическими критериями, принимающими конечное число значений на компактном множестве решений. Еще раз подчеркнем, что функции, использованные в соотношениях (2.2), (2.1), (2.4), могут быть заданы алгоритмически или таблично, поэтому методы анализа модели, отличающиеся от расчета траекторий по заданному набору параметров правила управления, могут быть неприменимы. Целью данного исследования является разработка методики построения правила управления рассматриваемой системой на основе аппроксимации и визуализации многомерной границы Парето. Рассмотрим прикладную задачу, явившейся исходной точкой при формулировке изучаемой проблемы.

3. Задача построения правил управления каскадом ГЭС

Рассматривается каскад действующих водохранилищ, расположенных в основном русле реки. Сразу уточним, что расчеты проводились на основе информации для каскада водохранилищ, расположенных на реке Ангара, где имеются три действующих водохранилища, а именно: Иркутское, включающее в себя озеро Байкал, Братское и Усть-Илимское. Рассматриваемая модель каскада является стандартной, она построена на основе использования соотношений, приведенных, например, в работах [12; 13], и является частным случаем динамической системы с дискретным временем (2.1).

В модели календарный год разбит на I интервалов. Характерное число интервалов — порядка 20–25. Обозначим номера интервалов в году через $\tau = 1, \dots, I$. Продолжительность интервала времени в модели зависит от его номера. Будем считать, что динамическая модель каскада рассматривается в течение периода времени продолжительностью в T' лет. Тогда рассматриваемый период времени состоит из отрезков числом $T = I * T'$. Для каждого отрезка времени с номером t можно найти соответствующий ему календарный интервал $\tau(t)$.

Обозначим через i номер водохранилища, где $i = 1, \dots, n_0$, причем i -е водохранилище находится ниже $i - 1$ -го водохранилища. Состояние динамической системы задается объемом воды в водохранилищах $W_i^t, i = 1, \dots, n_0$, в момент $t, t = 1, \dots, T$.

Динамика величин $W_i^t, i = 1, \dots, n_0$, описывается балансовым уравнением

$$W_i^t = W_i^{t-1} + Q_i^t + R_{i-1}^t - R_i^t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.1)$$

где через Q_i^t обозначена боковая приточность к i -му водохранилищу, через R_i^t — попуск из i -го водохранилища, обе величины за отрезок времени t . При этом $R_0^t = 0$.

По рассчитанным значениям состояний и попусков можно найти другие характеристики системы. В частности, можно рассчитать средние значения уровней верхнего \overline{H}_i^t и нижнего \underline{H}_i^t бьефов водохранилищ за отрезок времени t

$$\overline{H}_i^t = \overline{F}_i(W_i^t, R_i^t), \quad \underline{H}_i^t = \underline{F}_i(R_i^t), \quad (3.2)$$

где $\overline{F}_i(\cdot, \cdot), \underline{F}_i(\cdot), i = 1, \dots, n_0$, — функции, заданные таблично. На основе величин \overline{H}_i^t и \underline{H}_i^t может быть рассчитана средняя выработка электроэнергии в единицу времени на i -м гидроузле за интервал времени t по формуле

$$N_i^t = F_i^N(\overline{H}_i^t - \underline{H}_i^t, R_i^t), \quad (3.3)$$

где $F_i^N(\cdot, \cdot), i = 1, \dots, n_0$, — заданные непрерывные нелинейные функции. В них учитываются КПД турбин, фильтрационный расход воды через плотину, потери на водоводах и так далее.

Приведем пример расчета выработки электроэнергии для Братского водохранилища. Выработка электроэнергии N_{Br}^t задается формулой $N_{Br}^t = \min(k \cdot S_{Br}^t \cdot \Delta H_{Br}^t, N_{Br}^{\max})$, где S_{Br}^t — расход воды через турбины за отрезок времени t , $\Delta H_{Br}^t = \overline{H}_{Br}^t - \underline{H}_{Br}^t$, N_{Br}^{\max} — константа, равная максимально возможной величине выработки электроэнергии на данном гидроузле. Величина S_{Br}^t задается формулой

$$S_{Br}^t = \min\left(\frac{L_1(\Delta H_{Br}^t)}{L_2(\Delta H_{Br}^t) \cdot \Delta H_{Br}^t}, R_{Br}^t - F_{Br}\right), \quad (3.4)$$

где $L_1(\cdot)$ и $L_2(\cdot)$ — заданные кусочно-линейные непрерывные функции, F_{Br} — фильтрационный расход через плотину Братской ГЭС.

Попуски через плотину $R_i^t, i = 1, \dots, n_0$, являются управляющими воздействиями в задаче управления каскадом. Решения о величине попуска воды через плотину приходится выбирать с учетом неопределенности будущего притока воды в водохранилище. Поэтому при управлении водохранилищами принято не планировать попуск заранее, а строить так называемые диспетчерские правила — правила выбора величины попуска в зависимости от уровня водохранилища и, может быть, прогноза некоторых величин (скажем, объема притока воды в ближайший период). Наиболее распространенным подходом к решению этой задачи является назначение попуска на основе требований водопользователей (см., например, [14]). Применение такого подхода, однако, встречает затруднения в случае конфликта требований различных водопользователей. В том случае, когда удается построить функцию, которая позволяет свести потери всех водопользователей в единственный критерий выбора решения, можно использовать оптимизационный подход к поиску оптимальной в смысле данного критерия зависимости попуска от уровня водохранилища [15]. При использовании терминологии теории оптимального управления в этом случае решается задача синтеза управления. Если же потери различных

водопользователей невозможно свести к единственному критерию, приходится рассматривать задачу многокритериального синтеза правил управления.

В данном исследовании предполагается, что в диспетчерском правиле выбора попусков используется информация об объеме воды в водохранилище W_i^{t-1} в начале отрезка времени t , о попуске водохранилища, лежащего выше по течению, т. е. R_{i-1}^t , а также прогноз боковой приточности к рассматриваемому водохранилищу Q_i^t за текущий отрезок времени t . Величина Q_i^t может быть известна в момент времени $t-1$ достаточно точно, в отличие от всего ряда будущей приточности, прогноз которого обычно недостоверен. Для того чтобы учесть попуск водохранилища выше по течению и боковую приточность, в диспетчерских правилах считается (см. [16]), что попуск зависит от объема воды в водохранилище не в начале отрезка времени (как это бывает в правилах пуска без учета прогноза приточности), а в его конце:

$$R_i^t = f_{\tau(t)}^i(W_i^t), \quad (3.5)$$

где $f_{\tau(t)}^i(W)$ — непрерывная неубывающая функция. Индекс $\tau(t)$ показывает, что функция зависит от календарного интервала, соответствующего t .

Важный класс правил пуска составляют диспетчерские правила, которые основываются на кусочно-линейной зависимости пуска от объема воды в водохранилище. Для этого множество состояний водохранилища разбивается на зоны, в каждой из которых используется определенный тип управления попуском. Это приводит к тому, что функции $f_{\tau}^i(W)$, $\tau = 1, \dots, I$, являются непрерывными неубывающими кусочно-линейными функциями объема W . Далее при описании правила управления для простоты обозначений опущен номер водохранилища. Предположим, что число точек излома кусочно-линейных функций $f_{\tau}(\cdot)$ для всех τ является одинаковым, равным $K+1$. Для всех $\tau = 1, \dots, I$ обозначим через $L_{\tau}^{(k)}$, где $k = 0, \dots, K$, значения аргумента функции $f_{\tau}(\cdot)$, при которых происходит излом этой функции. Величины $L_{\tau}^{(k)}$ назначают в процессе разработки диспетчерского правила. При этом для всех $\tau = 1, \dots, I$ значение $L_{\tau}^{(0)}$ совпадает с так называемым уровнем мертвого объема водохранилища, а $L_{\tau}^{(K)}$ совпадает с так называемым форсированным подпорным уровнем. Эти два особых значения аргумента определяются на этапе проектирования гидроузлов и в процессе разработки диспетчерского правила не меняются. Таким образом, значения $L_{\tau}^{(0)}$ и $L_{\tau}^{(K)}$ не зависят от индекса τ , поэтому обозначим их через L^{\min} и L^{\max} соответственно. При значениях аргумента, меньших L^{\min} либо больших L^{\max} , попуск не зависит от W и задан заранее. Он равен нулю при $W \leq L^{\min}$ и некоторой достаточно большой величине при $W \geq L^{\max}$. Дополнительно предполагается, что при $L^{\min} \leq W \leq L^{\max}$ функции $f_{\tau}(\cdot)$ для всех τ являются монотонно возрастающими функциями своего аргумента, причем значения $f_{\tau}(L_{\tau}^{(k)})$ заданы. Таким образом, варьируемыми параметрами правил являются величины

$$L_{\tau}^{(k)}, \quad \tau = 1, \dots, I, \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (3.6)$$

Значения числа K обычно лежат в диапазоне от трех до шести.

Правило (3.5) задает попуск R_i^t в неявном виде, поскольку объем воды в водохранилище в конце отрезка времени t сам зависит от пуска. Правило (3.5) и балансовое соотношение (3.1) дают уравнение для величины пуска

$$R_i^t = f_{\tau(t)}(W_i^{t-1} + Q_i^t + R_{i-1}^t - R_i^t).$$

В соответствии с описанными выше свойствами непрерывной функции $f_{\tau}(W)$ правая часть уравнения принимает положительное значение при нулевом попуске i -го водохранилища и является невозрастающей функцией этого пуска, достигающей нуля при больших значениях пуска R_i^t . Поэтому уравнение имеет единственное решение, зависящее от W_i^{t-1} , Q_i^t и R_{i-1}^t . Это решение может быть легко найдено. Таким образом, для заданных функций $f_{\tau}(\cdot)$, т. е. заданных значений параметров $L_{\tau}^{(k)}$, $k = 1, \dots, K-1$, для i -го водохранилища на отрезке времени t оказывается алгоритмически задана зависимость пуска R_i^t от W_i^{t-1} , Q_i^t и R_{i-1}^t . Расчет

попуска требуется проводить последовательно, начиная с первого водохранилища. Задание значений параметров $L_{\tau(t)}^{(k)}, k = 1, \dots, K - 1$, для всех водохранилищ и знание приточности и объемов воды в водохранилищах в начале отрезка t позволяют последовательно найти попуски всех водохранилищ на этом отрезке времени.

Проверка качества правил управления попуском, т.е. наборов параметров (3.6) для всех водохранилищ, основана на использовании построенной заранее достаточно продолжительной последовательности величин приточности $Q_i^t, i = 1, \dots, n_0, t = 1, \dots, T$. Знание такой последовательности позволяет для любого допустимого набора параметров (3.6) построить попуски и объемы всех водохранилищ как функции времени на весь рассматриваемый период времени T . В свою очередь, это позволяет рассчитать значения критериев выбора параметров. Таким образом, задача выбора правила управления каскадом водохранилищ сводится к нелинейной многокритериальной задаче выбора решения, в которой значения критериев для каждого решения могут быть рассчитаны на основе имитации решения. Точнее, критерии выбора в рассматриваемой задаче оказываются связаны с решением некоторой нелинейной модели, заданной в виде вычислительного модуля, на вход которого можно подать конкретный вектор параметров (3.6), а на выходе получить значения критериев.

Построение последовательности величин $Q_i^t, i = 1, \dots, n_0, t = 1, \dots, T$, основывается на информации о наблюдении приточности, обычно имеющейся в форме многолетних гидрологических рядов наблюдений. Предполагается, что в гидрологическом ряду находят отражение основные вероятностные закономерности, присущие реальному течению процесса формирования водных ресурсов региона [17; 18]. Многолетний гидрологический ряд используется непосредственно (причем допускаются различные операции с исходным рядом, см., например, [19]) либо на основе такой информации строится случайный процесс, который можно использовать для генерирования искусственных гидрологических рядов требуемой продолжительности [20]. Мы не останавливаемся на этой проблеме и считаем, что многолетний гидрологический ряд достаточной продолжительности (исторический или искусственный) уже задан. На его основе будем делать выводы о результатах применения правил управления водохранилищем.

Критерии выбора параметров правил попуска отражают экономические, экологические и коммунальные требования, сформулированные экспертами: производство электроэнергии на ГЭС в единицу времени (отдаваемая мощность) должно быть достаточно велико; уровни нижних и верхних бьефов водохранилищ должны находиться в определенном диапазоне; попуски не должны нарушать определенных ограничений снизу и сверху и так далее. В качестве критериев бралось число отрезков времени, на которых происходило нарушение указанных выше требований. Выбор именно таких критериев обусловлен требованиями специалистов-водохозяйственников, для которых разрабатывалась описываемая здесь методика. При выборе правил управления водохранилищами специалисты основываются на методических указаниях по разработке правил использования водохранилищ, утвержденных приказом Минприроды России [21]. В методических указаниях приведены несколько показателей, которые могут быть использованы при выборе правил управления водохранилищами. Первые строки списка занимают показатели обеспеченности, определяемые по числу бесперебойных лет (число лет без нарушений требований) или числу бесперебойных периодов (месяцев, декад, суток, часов). В нашем исследовании мы используем оба этих показателя, но в данной статье описываем результаты, связанные только со вторым из них. Отметим, что часто используемый и удобный для оптимизации критерий типа суммы квадратов отклонений от требований (см., например, [34]) не входит в список Минприроды России.

Приведем теперь описание конкретных типов критериев, используемых в соответствии с методическими указаниями. К первому типу критериев относятся критерии, равные числу отрезков времени, в течение которых нарушены требования к производству электроэнергии. Задав требуемую отдаваемую мощность на i -м водохранилище N_i^* и обозначив недопроизводство энергии в единицу времени на отрезке времени t через $z_N^{i,t} = \max(N_i^* - N_i^t, 0)$, построим критерий выполнения требований к производству электроэнергии $y_N^i = \sum_{t=1}^T \Theta(z_N^{i,t})$.

Критерии второго типа равны числу отрезков времени, в течение которых нарушены требования к уровню верхнего и нижнего бьефов. Например, задав для i -го водохранилища максимальное и минимальное желательные значения уровня одного из бьефов H_i^{\max} и H_i^{\min} , которые определяются с учетом требований лесопромышленного комплекса, водного транспорта, коммунального хозяйства и др., и обозначив их нарушение на отрезке времени t через $z_H^{i,t} = \max(H_i^t - H_i^{\max}, H_i^{\min} - H_i^t, 0)$, построим критерий выполнения требований к уровню рассматриваемого бьефа i -го водохранилища

$$y_H^i = \sum_{t=1}^T \Theta(z_H^{i,t}).$$

К еще одному типу относятся критерии, равные числу отрезков времени, в течение которых нарушены границы допустимого диапазона попусков. Например, задав желательный диапазон величин попусков $[R_i^{\min}, R_i^{\max}]$, можно рассчитать на отрезке времени t величину отклонения от заданного диапазона $z_R^{i,t} = \max(R_i^t - R_i^{\max}, R_i^{\min} - R_i^t, 0)$ и найти значение критерия

$$y_R^i = \sum_{t=1}^T \Theta(z_R^{i,t}).$$

Значения величин R_i^{\min} и R_i^{\max} эксперты выбирают, учитывая требования нормального режима работы гидроузла, отсутствия наводнений и др.

По этой схеме строятся все 26 критериев выбора решения, рассматриваемых в исследовании. Учитывая число параметров излома правила попуска на каждом интервале (5–6) и число интервалов в году (20–25), получаем, что нелинейная математическая модель одного водохранилища имеет порядка 100–150 параметров. Поскольку ангарский каскад водохранилищ в настоящее время включает три водохранилища, получаем задачу аппроксимации ОЭП для нелинейной модели с 300–400 параметрами (переменными модели) и 26 критериями выбора, причем значения критериев связаны с параметрами с помощью модели типа черного ящика, единственным способом использования которой является вариантный расчет.

4. Метод решения задачи

В данном разделе описывается метод решения задачи (1.1), в которой связь между решениями и критериями задается соотношениями (2.2), (2.1), (2.4) и (2.5). В частности, этот метод пригоден для решения прикладной задачи, описанной в предыдущем разделе.

Визуализация многомерной границы Парето в методе осуществляется в рамках технологии диалоговых карт решений и реализованного на ее основе метода достижимых целей (ДКР/МДЦ), которые подробно описаны в книгах [10; 11]. В ДКР/МДЦ вместо непосредственной аппроксимации границы Парето осуществляется аппроксимация оболочки Эджворта — Парето (ОЭП) множества Y , определяемой в задачах многокритериальной минимизации как

$$H(Y) = Y + \mathbf{R}_+^m,$$

где \mathbf{R}_+^m — неотрицательный ортант \mathbf{R}^m . Множество $H(Y)$, наряду с точками множества Y , содержит все точки \mathbf{R}^m , доминируемые точками Y по Парето. Легко заметить, что ОЭП — наибольшее (по включению) множество, удовлетворяющее соотношению $P(H(Y)) = P(Y)$. Обратим внимание на то, что граница Парето в общем случае неустойчива по отношению к возмущениям параметров задачи МКО [22], поэтому задача ее аппроксимации является поставленной некорректно. Переход к аппроксимации ОЭП является одним из способов регуляризации этой задачи. Использование оболочки Эджворта — Парето, устойчивой, как правило, по отношению к возмущениям, позволяет разработать устойчивые процедуры ее аппроксимации и осуществить ее диалоговую визуализацию.

Информирование о границе Парето осуществляется на основе изображения серий двумерных (двухкритериальных) сечений ОЭП, выбранных по желанию ЛПР. Двумерные сечения ОЭП определяются следующим образом. Пусть (y_1, y_2) — два критерия, параллельно плоскости координат которых будет взято двумерное сечение, а z — совокупность остальных критериев, значения которых зафиксированы на некоторых величинах z^* . Двумерное сечение $G(H(Y))$ многомерного множества $H(Y) \subset \mathbb{R}^m$, параллельное критериальной плоскости (y_1, y_2) с заданными величинами остальных критериев z^* , определяется как

$$G(H(Y), z^*) = \{(y_1, y_2) : (y_1, y_2, z^*) \in H(Y)\}.$$

Известно [5], что двумерное сечение $H(Y)$ содержит все такие точки двух координатных критериев, которые достижимы при значениях z , не худших z^* . Поэтому двумерное сечение ОЭП дает представление о возможных значениях двух критериев при значениях остальных (некоординатных) критериев, ограниченных величинами z^* . В частности, его граница дает представление о границе Парето, т. е. представление о том, как требуется ухудшить значение одного из координатных критериев для улучшения значения другого при $z \leq z^*$.

В ДКР двумерные сечения ОЭП используются для изображения карт решений, представляющих собой наложение двумерных сечений при изменении одного из некоординатных критериев и неизменных остальных. В этом случае границы Парето разных сечений не пересекаются, поэтому карта решений позволяет легко изучить связь между недоминируемыми значениями трех критериев. Для того чтобы оценить влияние остальных критериев, возможна анимация карты решений при изменении одного из критериев, оставшихся пока без рассмотрения. Также возможно изучить матрицу карт решений, которая содержит совокупность карт решений, каждая из которых соответствует некоторому значению четвертого и пятого критериев. Если число критериев превосходит пять, то возможна анимация матрицы карт решений. Эти вопросы подробно рассмотрены в [5; 10; 11].

Обратимся к вопросу об аппроксимации ОЭП. Для выпуклых задач многокритериальной оптимизации в конце прошлого века был предложен метод полиэдральной аппроксимации (метод уточнения оценок), имеющий оптимальную скорость сходимости. Этот метод показал свою эффективность в разнообразных прикладных исследованиях [10; 11]. В невыпуклом случае проблема аппроксимации ОЭП является гораздо более сложной, чем в выпуклом. Основная трудность состоит в том, что задача оптимизации в этом случае не может быть решена так же легко, как в выпуклом случае. Вопросу о реализации ДКР/МДЦ в случае невыпуклых нелинейных моделей посвящены работы [23–25]. В этих работах ОЭП аппроксимируется конечным числом конусов доминирования с вершинами в точках множества Y . Точнее, внутренняя аппроксимация ОЭП дается множеством

$$H(\Gamma) = \Gamma + \mathbf{R}_+^m,$$

где $\Gamma \subset Y$ — конечное множество точек, называемое базой аппроксимации. Отметим, что для заданного Γ задача построения двумерных сечений $H(\Gamma)$ достаточно проста.

Для построения множества Γ , в принципе, можно использовать различные методы аппроксимации границы Парето для нелинейных многокритериальных моделей. Наиболее простым часто используемым подходом является аппроксимация границы Парето, основанная на идеях глобального стохастического зондирования множества допустимых решений (см, например, [26]). Такие методы, однако, применимы для аппроксимации границы Парето только в случае малых размерностей пространства решений. Другим важным направлением аппроксимации границы Парето является применение классических методов непрерывной оптимизации, которые используются для нахождения глобального оптимума свертки критериев [27; 28]. Эти методы могут быть применены для аппроксимации границы Парето при использовании достаточно простых моделей, для которых возможно решение большого числа задач глобальной оптимизации. Теоретически наиболее обоснованными являются методы, основанные на покрытии множества допустимых решений простыми фигурами (параллелепипедами, шарами и

др.) с оцениванием вектора критериев для этих фигур [29–31]. Эти методы требуют знания постоянных Липшица и применимы при достаточно малой размерности пространства решений. В последнее время широкое распространение получили биоинспирированные (эволюционные) методы аппроксимации границы Парето, среди которых главную роль играют генетические методы [32; 33]. Эти методы, однако, эффективны при малом числе критериев и переменных, а в случае большого числа переменных дают аппроксимацию, не имеющую отношения к реальной границе Парето. Таким образом, перечисленные методы не применимы для решения рассматриваемой нами задачи в силу того, что модель задана в виде черного ящика, причем пространство решений имеет большую размерность (порядка 300–400 переменных).

Для аппроксимации ОЭП в задачах МКО рассматриваемого типа, в принципе, пригоден гибридный метод аппроксимации ОЭП для нелинейных систем, описываемых моделями типа черного ящика [23; 24]. Этот метод основан на локальной оптимизации сверток критериев при старте из случайных точек допустимого множества (двухфазном методе), дополненном сжатием области случайного поиска и генетическим методом "оптукатурирования". В двухфазном методе, являющемся основой гибридного метода, параметры сверток определяются случайной точкой, из которой стартует процедура локальной оптимизации, градиент рассчитывается с помощью проведения вариантных расчетов в точках, близких к текущей точке, а для локальной оптимизации сверток используется программное обеспечение метода сопряженного градиента системы оптимизации ДИСО [36]. Большое достоинство двухфазного метода заключается в том, что его составляющей является стохастический метод оценки качества построенной аппроксимации, позволяющий также изучить сходимость двухфазного метода [37; 38]. Опыт применения такого гибридного метода показал, что он позволяет достаточно точно аппроксимировать ОЭП для задач МКО с сотнями переменных, если число локальных максимумов не слишком велико [25; 34; 39].

К сожалению, двухфазный метод не может быть непосредственно использован для построения границы Парето для задачи (1.1) рассматриваемого типа (2.2, 2.1, 2.3, 2.4, 2.5), поскольку градиентные методы здесь не применимы в силу кусочной постоянности критериев (2.5). Для решения задач скалярной оптимизации с критерием такого типа в работе [35] было предложено воспользоваться оптимизацией так называемых эрзац-функций, принадлежащих к классу степенных функций отклонения от требований к системе. В результате экспериментов и теоретических исследований в работе [35] было выявлено влияние степени на качество решения: было, в частности, показано, что использование степени от 0.5 до 1 позволяет найти достаточно хорошее решение исходной задачи. Так, например, для минимизации j -го критерия (2.4) можно использовать эрзац-функцию

$$c_j = \sum_{t=1}^T z_t^j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Для минимизации некоторой скалярной свертки $\phi_\mu(y)$ критериев y , где μ — коэффициенты свертки, можно использовать эрзац-функцию $\phi_\mu(c)$, где $c = (c_1, \dots, c_m)$ задается (4.7), а коэффициенты эрзац-функции могут быть заданы различным образом в зависимости от вида функции $\phi_\mu(y)$. Поскольку свертка является скалярной функцией переменных $w \in X$, можно поставить задачу нахождения ее экстремума.

Первая задача, которая была решена с использованием эрзац-функций для системы (2.2, 2.1, 2.3, 2.4, 2.5), — задача многокритериального поиска предпочтительной точки границы Парето на основе диалога с ЛПР. С использованием различных коэффициентов свертки, выбираемых в диалоге со специалистами, с помощью оптимизации эрзац-функции были найдены критериальная точка и соответствующее допустимое решение, получившие положительную оценку специалистов. Ими было предложено построить границу Парето в данной задаче. Полученный результат позволял надеяться, что с использованием эрзац-функций удастся применить гибридный метод [23; 24] для аппроксимации ОЭП в задаче, рассматриваемой в данной работе. К сожалению, экспериментальные исследования показали, что двухфазный метод не

в состоянии приблизить случайную точку допустимого множества $w \in X$ к множеству оптимальных решений, поскольку наличие большого числа локальных минимумов эрзац-функции препятствует эффективной работе двухфазного метода.

Для преодоления этой сложности вместо двухфазного метода аппроксимации границы Парето в данной работе используется метод локальной оптимизации решений со специально подготовленным исходным множеством, среди точек которого случайным образом выбираются начальные точки процесса скалярной оптимизации. Наличие случайного механизма выбора точек и использование итеративной схемы метода позволяет применить стохастическое оценивание качества аппроксимации. В то же время к множеству начальных точек выдвигается жесткое требование — его точки должны быть ближе к оптимальным решениям, чем случайные точки множества X , для того чтобы ловушки в виде локальных экстремумов не препятствовали методам локальной оптимизации приблизить текущую точку к множеству Парето.

Таким образом, в гибридном методе появляется новый ответственный шаг — формирование множества начальных точек для локальной оптимизации. В качестве средства формирования такого множества в данной работе предлагается использовать генетические методы аппроксимации границы Парето, для которых наличие локальных максимумов свертки критериев не является помехой. Генетические методы позволяют генерировать огромное число точек, не доминирующих одна другую. Это свойство генетических методов, считающееся недостатком и заставляющее разрабатывать способы отбрасывания лишних точек, в данном случае обеспечивает возможность случайного выбора начальной точки процесса градиентной локальной оптимизации. В то же время главный недостаток генетических методов, а именно прекращение улучшения текущей недоминируемой границы задолго до ее приближения к границе Парето, компенсируется в нашем гибридном методе использованием локальной оптимизации.

На последнем шаге нового гибридного метода, аналогично методу [23; 24], после завершения локальной оптимизации осуществляется уточнение аппроксимации с помощью простого генетического метода “оштукатуривания”. Рассмотрим перечисленные шаги нового гибридного метода аппроксимации ОЭП более подробно.

Шаг 1. Формирование множества начальных точек для локальной оптимизации.

Шаг 1а. Формирование предварительного множества начальных точек.

На допустимом множестве X генерируется случайная равномерная выборка точек (порядка сотни точек). Для каждой точки из этой выборки решается задача локальной скалярной минимизации критериальных функций. Для каждого критерия выбираем точку локального минимума с минимальным значением этого критерия. Совокупность таких точек пространства решений (по одной на каждый критерий) составляет предварительное множество исходных точек в пространстве решений.

Шаг 1б. Улучшение предварительного множества начальных точек.

На этом шаге генетический метод используется для улучшения качества исходных точек и увеличения их количества за счет пополнения множества новыми точками, более близкими к оптимальным по Парето. В качестве такого метода пополнения множества использован метод NSGA, который считается одним из лучших генетических методов МКО [32]. В результате его применения строится множество начальных точек для процедуры локальной оптимизации, которое обозначим через X_{ini} .

Шаг 2. Построение аппроксимации ОЭП с помощью локальной скалярной оптимизации, стартующей из подготовленного множества начальных точек.

Этот шаг является основным шагом гибридного метода. Как уже говорилось, генерирование случайной выборки начальных точек для локальной оптимизации происходит не на всем множестве допустимых решений X , а на его подмножестве X_{ini} . Как и двухфазный метод, метод локальной скалярной оптимизации, стартующий из подготовленного множества начальных точек, состоит из итераций. Кроме множества исходных точек X_{ini} перед началом шага 2 должно быть задано семейство сверток критериев $\phi_\mu(y)$. Перед началом k -й итерации должны быть также заданы база аппроксимации Γ_{k-1} и множество прообразов ее точек X_{k-1} .

Итерация состоит из следующих шагов:

- На X_{ini} генерируется случайная равномерная выборка из N точек, обозначенная H_N .
- Для каждой точки выборки осуществляется локальная скалярная минимизация свертки эрзац-функций. Совокупность полученных решений обозначим через $\Phi(H_N)$.
- Проверяется условие останова алгоритма, возможно с использованием статистической оценки качества базы Γ_{k-1} .
- В том случае, когда остановка алгоритма не происходит, новая база аппроксимации Γ_k строится на основе объединения Γ_{k-1} и $F(\Phi(H_N))$ и исключения доминируемых точек.

Обозначим базу аппроксимации ОЭП, построенную на шаге 2, через Γ_{opt} , а множество ее прообразов — через X_{opt} .

Шаг 3. Уточнение аппроксимации ОЭП, полученной на предыдущем шаге, с помощью метода “оштукатуривания”.

Метод “оштукатуривания” [24; 39] является методом генетического типа и направлен на улучшение точности базы аппроксимации на основе пополнения ее новыми недоминируемыми точками. Исходная информация для метода — множество недоминируемых решений X_{opt} и их критериальных образов T_{opt} . Кроме того, должны быть заданы параметры метода: $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и целое положительное число q .

Метод состоит из итераций. Перед началом k -й итерации должны быть также заданы база аппроксимации Γ_{k-1} и множество ее прообразов X_{k-1} . На первой итерации в качестве этих множеств берутся Γ_{opt} и X_{opt} . Итерация состоит из трех шагов:

- среди всех пар точек X_{k-1} отбирается достаточное большое число пар решений $\{w, w'\}$, удовлетворяющих соотношению $\varepsilon_1 \leq \varrho(y(w), y(w')) \leq \varepsilon_2$, где числа ε_1 и ε_2 берутся из каких-либо эвристических соображений;
- на отрезке, соединяющем точки каждой пары $\{w, w'\}$, случайным образом выбирается q новых точек, в которых вычисляются значения критериев;
- новая база аппроксимации Γ_k получается из объединения старых и новых критериальных точек путем исключения доминируемых точек.

Вопрос о проведении новой итерации или завершении расчета решается исследователем. В результате осуществления этого шага получаем базу аппроксимации Γ_{fin} и множество ее прообразов, обозначенное через X_{fin} . На этом процесс аппроксимации ОЭП завершается.

5. Построение правил управления каскадом водохранилищ

Предлагаемая методика применялась для разработки правил управления каскадом водохранилищ реки Ангары. В модели, описанной выше, каждый год был разбит на 22 интервала (5 месяцев разбиты на три декады, а для 7 месяцев интервалом является месяц целиком). Число параметров (3.6) для одного интервала времени было равно 6, так что правило пуска воды для одного водохранилища содержало 132 параметра, а весь каскад описывался 396 параметрами. Для расчета значений 26 критериев по заданным наборам параметров были подготовлены два гидрологических ряда: исторический, продолжительностью 103 года, и сгенерированный, продолжительностью в 1000 лет. В настоящее время завершены работы на основе первого ряда, т. е. для получения значений критериев правила пуска должны быть проверены на значениях приточности за 103 лет, т. е. на 2266 отрезках времени. Опишем кратко итоги исследования.

Процесс построения аппроксимации ОЭП. На допустимом множестве была сгенерирована случайная равномерная выборка объемом в 100 точек. Для каждой точки из этой выборки с использованием эрзац-функций решались задачи локальной скалярной минимизации отдельных критериев. В результате были найдены 26 решений таких задач с наименьшими значениями исходных критериев $y_j, j = 1, \dots, 26$. На их основе генетический алгоритм NSGA за 13 итераций построил около 100 000 недоминируемых точек.

Далее применялся итерационный метод локальной скалярной оптимизации, использующий в качестве начальных точек решения, полученные генетическим алгоритмом. Объем случайной выборки на каждой итерации составлял 100 точек пространства решений из 100 000 точек, полученных генетическим алгоритмом. В качестве правила останова было взято требование: значения отклонения критериальных точек, полученных на итерации, от предыдущей аппроксимации ОЭП не должны были превышать 10 % от характерного размера $P(Y)$. Напомним, что на каждой итерации решались задачи локальной скалярной оптимизации для сверток эрзац-функций. В среднем за одну итерацию метода приходилось рассчитывать около 100 000 значений свертки. Всего было проведено 16 итераций метода. При этом отклонение полученных критериальных точек падало от 25 % характерного размера $P(Y)$ на первой итерации до 7% на последней. В полученной базе аппроксимации Γ_{opt} оказалось 1076 точек.

База аппроксимации Γ_{opt} улучшалась с помощью метода "оштукатуривание". В результате предварительных экспериментов с этим методом в рамках изучаемой модели было получено, что наиболее эффективны значения параметров $\varepsilon_1 = 0.01$ и $\varepsilon_2 = 0.07$. Для каждой родительской пары точек генерировалось по 5 потомков. Правило останова было тем же, что и в методе локальной скалярной оптимизации. Всего было проведено 4 итерации метода. За одну итерацию метода в среднем рассчитывалось около 28 000 значений критериальных функций. Отклонение получаемых точек от предыдущей аппроксимации ОЭП менялось от 22 % на первой итерации до 10 % на четвертой. Было получено 1393 точки базы аппроксимации и соответствующих им наборов параметров управления. На этом процесс аппроксимации был завершен.

Анализ аппроксимации ОЭП. Анализ аппроксимации ОЭП, являющейся объединением 1393 конусов в 26-мерном критериальном пространстве, основывался на визуализации границы Парето для 11 наиболее важных критериев. Это

- критерий y_1 , равный числу нарушений требований к уровню озера Байкал, который, согласно постановлению Правительства РФ, должен находиться в заданных пределах от 456 м до 457 м над уровнем моря;
- критерии y_2 , y_4 и y_6 , описывающие число нарушений требований к попуску и уровню верхнего бьефа Иркутской ГЭС;
- критерии y_5 , y_{15} и y_{24} , равные числу нарушений требуемого уровня производства электроэнергии в единицу времени на Иркутской, Братской и Усть-Илимской ГЭС;
- критерии y_7 и y_8 , описывающие число нарушений рыбохозяйственных требований к уровню Байкала в апреле и сентябре;
- критерии y_{19} и y_{25} , описывающие число нарушений нормального навигационного уровня в верхнем и нижнем бьефе Усть-Илимского водохранилища.

Эти 11 критериев играли роль ведущих; как показал опыт, для каждого из остальных 15 критериев нашелся такой ведущий критерий, что при улучшении его значения попутно улучшалось значение рассматриваемого критерия. Благодаря этому предполагалось, что при нахождении удовлетворительных значений 11 наиболее важных критериев значения остальных также будут удовлетворительны. Решение, найденное в данном разделе, подтверждает сделанное предположение.

Главная проблема, возникающая при использовании водных ресурсов бассейна Ангары, состоит в том, что в бассейне не хватает воды для того, чтобы одновременно выполнить требования всех пользователей ресурса. Целью исследования является нахождение возможного компромисса среди найденных недоминируемых критериальных точек. Выбор компромисса должен быть осуществлен в результате переговоров лиц, имеющих право на принятие соответствующих решений, здесь же мы кратко проиллюстрируем способ исследования.

Начнем с экологических проблем озера Байкал, представленных в исследовании критериями y_1 , y_7 и y_8 . На рис. 1 приведена карта решений — наложенные одно на другое сечения аппроксимации ОЭП в координатах y_7 и y_8 , соответствующие различным величинам y_1 . По горизонтальной оси отложена величина y_8 , по вертикальной оси — величина y_7 . Величина y_1

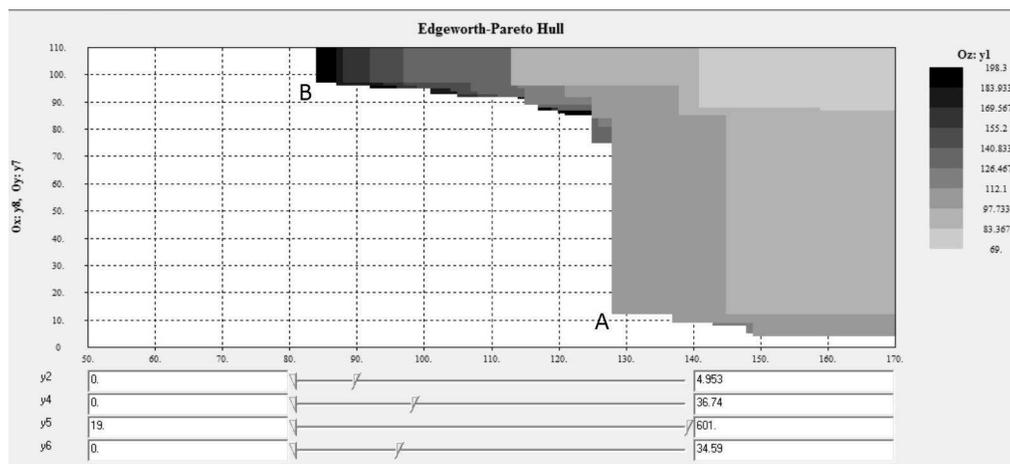


Рис. 1.

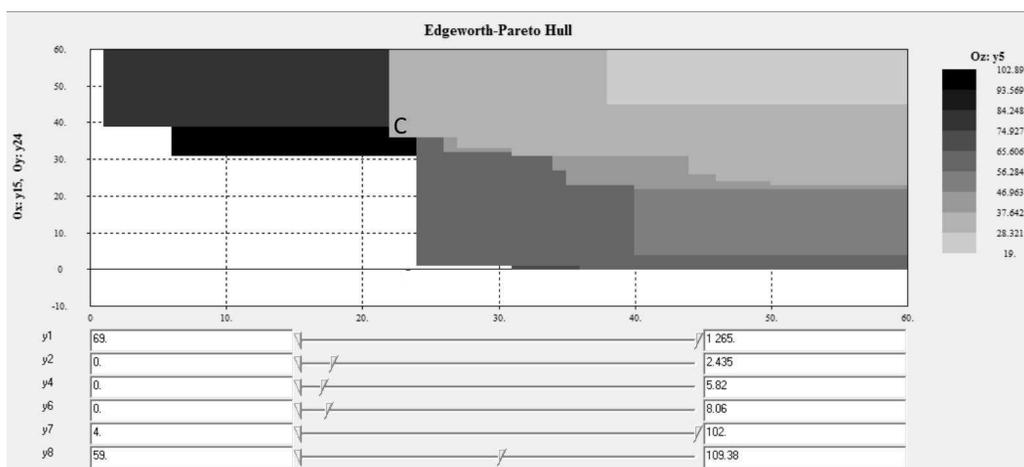


Рис. 2.

дана оттенком серого цвета (на дисплее компьютера вместо оттенков серого используются яркие контрастные краски). Соответствие между оттенком серого и диапазоном величин y_1 дано в шкале, расположенной справа. На прокрутках отражены ограничения $y_2 < 5$, $y_4 < 36$ и $y_6 < 34$, задающие для этих критериев удовлетворительные значения (напомним, что общее число отрезков времени равно 2266, так что $y_6 < 36$ означает нарушение требований примерно в 1.5 % случаев). Эти ограничения были получены при уменьшении значений y_2 , y_4 и y_6 без существенного изменения карты решений, т. е. потенциальных возможностей выбора решения по критериям y_1 , y_7 и y_8 .

В правом верхнем углу находится светло-серый прямоугольник, соответствующий минимальным значениям y_1 на карте решений (между 69 и 83). Как легко оценить, недоминируемой вершине этого прямоугольника соответствуют посредственные значения y_8 (чуть больше 140) и y_7 (около 90). Рассмотрим другие сечения ОЭП. В точке А, например, имеем $98 < y_1 < 112$, $y_8=128$ и $y_7=13$, т. е. отличное значение по y_7 , но посредственные по y_1 и y_8 . Наоборот, в точке В имеем $184 < y_1 < 198$, $y_8=85$ и $y_7=97$, т. е. минимальное (на данной карте решений) значение y_8 . Эта точка плоха по y_1 и посредственна по y_7 . Таким образом, имеет место явный конфликт между административным критерием y_1 и рыбохозяйственными критериями y_7 и y_8 . В связи с тем что все три критерия направлены на защиту экологии озера Байкал, возникает вопрос об их совместимости. Создается впечатление, что административное ограничение уровня озера является более далеким от реальных потребностей, чем рыбохозяйственные ограничения, разработанные специалистами. Поэтому далее будем рассматривать величину y_1 не

как критерий, а лишь как полезную информацию. Критерии y_7 и y_8 в дальнейшем ограничим сверху величиной в 110 нарушений, но будем стараться уменьшить их значения. Обратим внимание на то, что критерии y_7 и y_8 отличаются от остальных критериев по общему числу отрезков времени: каждый из них действует только один месяц в году, разбитый на три отрезка длиной в декаду. Поэтому за 103 года общее число отрезков времени равно 309, так что 110 нарушений для критериев y_7 и y_8 — это большая величина, превосходящая 35 % всех отрезков.

Обратимся к рис. 2. Здесь изображены наложенные одно на другое сечения аппроксимации ОЭП в координатах y_{15} и y_{24} , соответствующие различным величинам критерия y_5 . Критерии характеризуют число нарушений требуемых уровней производства электроэнергии в единицу времени для Иркутской, Братской и Усть-Илимской ГЭС. По горизонтальной оси отложена величина y_{15} , по вертикальной оси — величина y_{24} , в то время как величина y_5 дана оттенком серого. На прокрутках отражены ограничения, наложенные на критерии y_2 , y_4 и y_6 . Эти ограничения были установлены из тех же соображений, что и на рис. 1. Как видно, имеет место конфликт между тремя показателями — малые значения y_{15} (порядка 3–4 нарушений) соответствуют относительно большим значениям y_{24} (более 50 нарушений) и y_5 (порядка 65 нарушений), а малые значения y_{24} (порядка 1–2 нарушений) соответствуют относительно большим значениям y_{15} (более 30 нарушений) и y_5 (порядка 65 нарушений). В связи с этим было решено остановиться на сбалансированной точке С, соответствующей $28 < y_5 < 38$.

Если рассмотреть значения всех 26 критериев в точке С, то можно увидеть, что большинство критериев (за исключением критериев y_1 , y_7 , y_8 , y_5 , y_{15} , y_{24} и y_{19}) имеют не более 11 нарушений, т. е. не более 0.5 % от общего числа отрезков времени. Значения всех критериев, превышающие 11 нарушений, кроме критерия y_{19} , уже обсуждались ранее. Критерий y_{19} , описывающий число нарушений нормального навигационного уровня в верхнем бьефе Усть-Илимского водохранилища, выбран равным 76 (около 6 %), поскольку его дальнейшее улучшение приводит к резкому увеличению числа нарушений энергетических требований. Напомним, что мы отказались вести борьбу за уменьшение y_1 в пользу других критериев, поэтому этот критерий имеет в точке С большое значение: $y_1 = 206$. Для энергетических критериев y_5 , y_{15} , y_{24} выбрано примерно одинаковое число нарушений — не более 3 %. Наконец, значения критериев $y_7 = 95$ и $y_8 = 98$, не могут быть уменьшены без резкого ухудшения значений энергетических критериев. Эти величины составляют порядка 32 % от общего числа временных отрезков, что представляет собой значительную величину. По-видимому, столь большое число нарушений связано с очень жесткой формулировкой рыбохозяйственных ограничений, не соответствующих условиям, существовавшим до строительства Иркутской ГЭС.

Приведенный здесь анализ границы Парето является условным. В реальном исследовании лицам, принимающим решение, требуется изучить десятки карт решений на основе их анимации с помощью прокруток.

6. Заключительное замечание

Описанный здесь подход к аппроксимации ОЭП требует вычисления критериальных векторов для большого числа наборов параметров. В связи с этим при большой продолжительности периода расчета критериев для одного набора параметров (например, в случае периода в 1000 лет) метод требует использования параллельных вычислений. Это делает задачу решаемой даже в случае достаточно сложных моделей. Статья [34] дает представление о реализации методов аппроксимации ОЭП для нелинейных моделей в многопроцессорных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 255 с.

3. **Ларичев О.И.** Теория и методы принятия решения. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 392 с.
4. **Ларичев О.И.** Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987. 143 с.
5. **Лотов А.В., Поспелова И.И.** Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.
6. **Larichev O.** Cognitive validity in design of decision-aiding techniques // *J. Multi-Criteria Decision Analysis*. 1992. Vol. 1, no. 3. P. 127–138.
7. Water resource conflict resolution based on interactive tradeoffs display / A.V. Lotov [et al.] // *Rehabilitation of Degraded Rivers: Challenges, Issues and Experiences* / ed. D.P. Loucks. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 446–470.
8. **Dietrich J., Schumann A.H., Lotov A.V.** Workflow oriented participatory decision support for integrated river basin planning // *Topics on System Analysis and Integrated Water Resource Management* / eds. A. Castelletti and R. Soncini Sessa. New York: Elsevier, 2007. P. 207–221.
9. **Efremov R.V., Lotov A.V.** Multi-criteria remote asynchronous group decision screening: an experimental study // *Group Decisions and Negotiations*. 2014. Vol. 23, iss. 1. P. 31–48.
10. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей / А.В. Лотов [и др.]. М.: Наука, 1997. 239 с.
11. **Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.** Interactive decision maps. Approximation and visualization of Pareto frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. 310 p.
12. **Пряжинская В.Г., Ярошевский Д.М., Левит-Гуревич Л.К.** Компьютерное моделирование в управлении водными ресурсами. М.: Физматлит, 2002. 494 с.
13. **Хранович И.Л.** Управление водными ресурсами. Поточковые модели. М.: Научный мир, 2001. 393 с.
14. **Loucks D.P., van Beek E.** Water resources systems planning and management. An introduction to methods, models and applications. Paris: UNESCO Publishing, 2005. 680 p.
15. **Castelletti A., Pianosi F., Soncini-Sessa R.** Water reservoir control under economic, social and environmental constraints // *Automatica*. 2008. Vol. 44. P. 1595–1607.
16. **Асарин А.Е., Бестужева К.Н.** Водноэнергетические расчеты. М.: Энергоатомиздат, 1986. 224 с.
17. Гидрологические основы гидроэнергетики / А.Ш. Резниковский, А.Ю. Александровский, В.В. Атурин [и др.]. М.: Энергия, 1979. 232 с.
18. **Крицкий С.Н., Менкель М.Ф.** Гидрологические основы управления водохозяйственными системами. М.: Наука, 1982. 271 с.
19. **Агасандян Г.А.** Алгоритмы построения диспетчерских правил управления для каскадов водохранилищ // *Водные ресурсы*. 1985. № 5. С. 34–46.
20. **Болгов М.В., Сарманов И.О., Сарманов О.В.** Марковские процессы в гидрологии. М.: Изд-во РАН, 2009. 211 с.
21. Методические указания по разработке правил использования водохранилищ. Утв. приказом Мин-природы России от 26 января 2011 г., № 17. URL: <http://img.rg.ru/pril/76/46/95/20655.doc>.
22. **Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.** Theory of multiobjective optimization. Orlando: Acad. Press, 1985. 296 p. (Mathematics in Science and Engineering; vol. 176.)
23. **Лотов А.В., Каменев Г.К., Березкин В.Е.** Аппроксимация и визуализация паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач // *Докл. АН*. 2002. Vol. 386, № 6. С. 738–741.
24. **Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.** Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 2006. Т. 46, № 11. С. 2009–2023.
25. Optimal control of cooling process in continuous casting of steel using a visualization-based multi-criteria approach / A. Lotov, V. Berezkin, G. Kamenev, K. Miettinen. // *Appl. Math. Modelling*. 2005. Vol. 29, no. 7. P. 653–672.
26. **Соболь И.М., Статников Р.Б.** Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006. 182 с.
27. **Краснощеков П.С., Морозов В.В., Попов Н.М.** Оптимизация в автоматизированном проектировании. М.: МАКС Пресс, 2008. 323 с.
28. Hierarchical multiobjective analysis of large-scale systems / Y.Y. Haimes [et al.]. New York: Hemisphere Publishing, 1990. 323 p.
29. **Евтушенко Ю.Г., Потапов М.А.** Методы численного решения многокритериальных задач // *Докл. АН*. 1986. Т. 291, № 1. С. 25–29.

30. **Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А.** Применение метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично целочисленных нелинейных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1376–1389.
31. **Scholz D.** Deterministic global optimization. New York etc.: Springer, 2010. 153 p.
32. **Deb K.** Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. Chichester, UK: Wiley, 2001. 515 p.
33. **Deb K.** Introduction to evolutionary multiobjective optimization // Multiobjective Optimization. Interactive and Evolutionary Approaches / eds. J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Slowinski. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. P. 59–96. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 5252.)
34. **Лотов А.В., Рябиков А.И., Бубер А.Л.** Визуализация границы Парето при разработке правил управления ГЭС // Искусственный интеллект и принятие решений. 2013. № 1. С. 70–83.
35. **Рябиков А.И.** О методе эрзац-функций для минимизации конечнозначной функции на компактном множестве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 2. С. 195–207.
36. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
37. **Березкин В.Е., Каменев Г.К.** Исследование сходимости двухфазных методов аппроксимации оболочки Эджворта — Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 6. С. 990–998.
38. **Каменев Г.К.** Исследование сходимости и эффективности двухфазных методов аппроксимации оболочки Эджворта — Парето // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 4. С. 507–519.
39. **Березкин В.Е., Лотов А.В., Лотова Е.А.** Изучение гибридных методов аппроксимации оболочки Эджворта — Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 6. С. 905–918.

Лотов Александр Владимирович

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный научный сотрудник

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

e-mail: avlotov@mail.ru

Рябиков Андрей Игоревич

младший науч. сотрудник

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

e-mail: ariabikov@gmail.com

Поступила 07.08.14

УДК 517.977

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА¹**Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин**

Рассмотрены аппроксимации систем нелинейных уравнений нейтрального типа в форме Дж. Хейла системами обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Дана процедура взаимного отслеживания по принципу обратной связи между движением исходной конфликтно-управляемой системы нейтрального типа и движением аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенная процедура взаимного отслеживания позволяет использовать аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве конечномерных моделирующих поведений систем нейтрального типа.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, теория управления, дифференциальные игры.

N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. On the approximation of nonlinear conflict-controlled systems of neutral type.

We consider approximations of systems of nonlinear neutral-type conflict-controlled equations in Hale's form by systems of high-order ordinary differential equations. A procedure is given for the mutual feedback tracking between the motion of the original neutral-type conflict-controlled system and the motion of the approximating system of ordinary differential equations. The proposed mutual tracking procedure makes it possible to use approximating systems of ordinary differential equations as finite-dimensional modeling guides for neutral-type systems.

Keywords: neutral systems, control theory, differential games.

Введение

Ранее в работах [1–3] были даны решения некоторых задач об устойчивости и об управлении в системах дифференциальных уравнений с запаздыванием, основанные на их аппроксимации обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обоснование такой аппроксимации для линейных стационарных систем и постоянных запаздываний дано в [1]. В [2] этот результат распространен на нелинейные нестационарные системы, а в [4] — на случай переменных запаздываний. Позднее подобные конечномерные аппроксимации функционально-дифференциальных систем, их обобщения и приложения к различным задачам развивались в работах [5–12], в том числе в [9–12] рассматривались аппроксимации различных уравнений нейтрального типа. Данная работа посвящена конечномерной аппроксимации конфликтно-управляемых систем нелинейных уравнений нейтрального типа. Развивается подход, представленный в работе [13], где было предложено использовать аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве конечномерных моделей-поводырей [14] для решения задач конфликтного управления движением динамических систем с запаздыванием. При этом возникает вспомогательная задача взаимного отслеживания по принципу обратной связи между движением исходной конфликтно-управляемой системы и движением подходящей аппроксимирующей системы, трактуемой как моделирующий поводырь. В [15] дано решение этой задачи для конфликтно-управляемых динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, в [16] — для систем, описываемых линейными уравнениями нейтрального типа, в [17] — для нелинейных систем

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”, при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00290а, 14-01-31319 мол_а).

нейтрального типа в форме Дж. Хейла [18]. Настоящая статья продолжает эти исследования, уточняя и обобщая результаты [17].

1. Конфликтно-управляемая система

Рассматривается динамическая система, описываемая функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{d}{dt} \left(x[t] - g(t, x_t[\cdot]) \right) = f(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}, \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$x_{t_0}[\zeta] = x[t_0 + \zeta] = z[\zeta], \quad \zeta \in [-h, 0]. \quad (1.2)$$

Здесь t — переменная времени; $x[t]$ — вектор состояния в момент времени t ; $h = \text{const} > 0$; $x_t[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке $[t-h, t]$, причем $x_t[\zeta] = x[t + \zeta]$, $\zeta \in [-h, 0]$; $u[t]$ — текущее управляющее воздействие; $v[t]$ — неконтролируемое воздействие помехи или противодействие; \mathbb{U} и \mathbb{V} — известные компакты конечномерных пространств.

Допустимыми считаются измеримые по Борелю реализации

$$u[t_0[\cdot]\vartheta] = \{u[t] \in \mathbb{U}, t_0 \leq t < \vartheta\}, \quad v[t_0[\cdot]\vartheta] = \{v[t] \in \mathbb{V}, t_0 \leq t < \vartheta\}.$$

Всюду ниже угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ используем для обозначения скалярного произведения векторов, а двойные скобки $\|\cdot\|$ — для обозначения евклидовой нормы. Через $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных функций, действующих из $[-h, 0]$ в \mathbb{R}^n , оснащенное равномерной нормой $\|\cdot\|_C$.

Полагаем, что выполнены следующие условия:

(У.1) Отображение $[t_0, \vartheta] \times C \ni (t, x[\cdot]) \mapsto g = g(t, x[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$ непрерывно.

(У.2) Существуют такие числа $\alpha > 0$ и h_i , $i = \overline{1, k}$, $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_k = h$, что при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ и $x'[\cdot], x''[\cdot] \in C$ имеет место оценка

$$\|g(t, x'[\cdot]) - g(t, x''[\cdot])\| \leq \alpha \left(\int_{-h}^0 \|x'[\zeta] - x''[\zeta]\| d\zeta + \sum_{i=1}^k \|x'[-h_i] - x''[-h_i]\| \right).$$

Кроме того, для удобства будем полагать, что для числа α справедливо неравенство

$$\alpha > 1/(2h + 2k). \quad (1.3)$$

(У.3) Найдется такое число $\beta > 0$, что для любых $t', t'' \in [t_0, \vartheta]$ и $x[\cdot] \in C$ справедливо неравенство

$$\|g(t', x[\cdot]) - g(t'', x[\cdot])\| \leq \beta(1 + \|x[\cdot]\|_C) |t' - t''|.$$

(У.4) Для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ отображение $C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \ni (x[\cdot], u, v) \mapsto f = f(t, x[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$ непрерывно. При любых $(x[\cdot], u, v) \in C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V}$ отображение $[t_0, \vartheta] \ni t \mapsto f = f(t, x[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$ измеримо.

(У.5) Существует такая константа $\gamma > 0$, что для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $x[\cdot] \in C$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ имеет место оценка

$$\|f(t, x[\cdot], u, v)\| \leq \gamma(1 + \|x[\cdot]\|_C).$$

(У.6) Для любого компактного множества $D \subset C$ существует число $L(D) > 0$ такое, что для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ и $x'[\cdot], x''[\cdot] \in D$ справедливо неравенство

$$\|f(t, x'[\cdot], u, v) - f(t, x''[\cdot], u, v)\| \leq L(D) \|x'[\cdot] - x''[\cdot]\|_C.$$

(У.7) Начальная функция $z[\cdot]$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет оценкам

$$\|z[\zeta]\| \leq R_0, \quad \zeta \in [-h, 0], \quad \|\dot{z}[\zeta]\| \leq R_0 \text{ при п.в. } \zeta \in [-h, 0], \quad R_0 = \text{const} > 0.$$

Здесь и всюду далее точка над символом обозначает производную.

При указанных условиях, действуя, например, по схеме из [19] (см. также [18; 20; 21]), можно показать, что для любых допустимых реализаций $u[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta]$ и любой начальной функции $z[\cdot]$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) — абсолютно непрерывная функция $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta] = \{x[t] \in \mathbb{R}^n, t_0 - h \leq t \leq \vartheta\}$, которая удовлетворяет начальному условию (1.2) и вместе с $u[t]$ и $v[t]$ почти всюду удовлетворяет уравнению (1.1). Кроме того, найдется такое число $R_x > 0$, что для любого решения $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ будут справедливы неравенства

$$\|x[t]\| \leq R_x, \quad t \in [t_0 - h, \vartheta], \quad \|\dot{x}[t]\| \leq R_x \text{ при п.в. } t \in [t_0 - h, \vartheta]. \quad (1.4)$$

2. Аппроксимирующая система

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ и $\Delta h = h/m$. На основе системы (1.1) построим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}^{[0]}[t] = f(t, S(Y[t])[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]), \\ \dot{y}^{[1]}[t] = (y^{[0]}[t] + g(t, S(Y[t])[\cdot]) - y^{[1]}[t])/\Delta h, \\ \dot{y}^{[i]}[t] = (y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t])/\Delta h, \quad i = \overline{2, m}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad y^{[i]}[t] \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}, \quad \tilde{u}[t] \in \mathbb{U}, \quad \tilde{v}[t] \in \mathbb{V},$$

с начальным условием

$$y^{[i]}[t_0] = y_0^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}. \quad (2.2)$$

Здесь $Y[t] = (y^{[1]}[t], y^{[2]}[t], \dots, y^{[m]}[t])$, символ $S(Y)[\cdot]$, где $Y = (y^{[1]}, y^{[2]}, \dots, y^{[m]})$, $y^{[i]} \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, m}$, обозначает следующий линейный сплайн на отрезке $[-h, 0]$:

$$S(Y)[\zeta] = y^{[1]}, \quad \zeta \in [-\Delta h, 0], \quad (2.3)$$

$$S(Y)[\zeta] = y^{[i+1]} + (y^{[i]} - y^{[i+1]})(i + 1 + \zeta/\Delta h), \quad \zeta \in [-(i + 1)\Delta h, -i\Delta h], \quad i = \overline{1, m-1}.$$

В силу условий (У.1)–(У.6) для любых допустимых реализаций $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$ существует единственное решение $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta] = \{\bar{Y}[t] = (y^{[0]}[t], y^{[1]}[t], \dots, y^{[m]}[t]), t \in [t_0, \vartheta]\}$ задачи (2.1), (2.2) — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая начальному условию (2.2) и почти всюду системе уравнений (2.1).

Полагаем, что начальная функция $z[\cdot]$ из (1.2) и начальные значения $y_0^{[i]}$, $i = \overline{0, m}$, из (2.2) связаны следующим условием:

(У.8) Справедливы неравенства

$$\|y_0^{[0]} - z[0] + g(t_0, z[\cdot])\| \leq R_* \Delta h, \quad \|y_0^{[i]} - z[-i\Delta h]\| \leq R_* \Delta h, \quad i = \overline{1, m}, \quad R_* = \text{const} > 0.$$

По решению $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) определим функцию $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ согласно правилу

$$y[t] = \begin{cases} S(Y[t_0])[t - t_0] \text{ при } t \in [t_0 - h, t_0 - \Delta h), \\ y^{[1]}[t_0] + \frac{y^{[0]}[t_0] + g(t_0, S(Y[t_0])[\cdot]) - y^{[1]}[t_0]}{\Delta h} (t - t_0 + \Delta h) \text{ при } t \in [t_0 - \Delta h, t_0), \\ y^{[0]}[t] + g(t, S(Y[t])[\cdot]) \text{ при } t \in [t_0, \vartheta]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Отметим, что эта функция непрерывна на отрезке $[t_0 - h, \vartheta]$, а на отрезке $[t_0 - h, t_0]$ является линейным сплайном с узлами $t_0 - i\Delta h$, $i = \overline{0, m}$. Следовательно для оценки $y[t]$ на $[t_0 - h, t_0]$ достаточно определить ее значения в этих узлах. С учетом условий (У.2), (У.7) и (У.8) имеем

$$\|y[t_0]\| = \|y^{[0]}[t_0] + g(t_0, S(Y[t_0])[\cdot])\| \leq R_0 + R_*\Delta h + \alpha(h+k)\|z[\cdot] - S(Y[t_0])[\cdot]\|_C, \quad (2.5)$$

$$\|y[t_0 - i\Delta h]\| = \|y^{[i]}[t_0]\| \leq R_0 + R_*\Delta h, \quad i = \overline{1, m}.$$

Оценим величину $\|z[\zeta] - S(Y[t_0])[\zeta]\|$, $\zeta \in [-h, 0]$. Обозначим $Z = (z[-\Delta h], z[-2\Delta h], \dots, z[-h])$. Прибавляя и вычитая под знаком нормы значение $S(Z)[\zeta]$, определяемое соотношениями (2.3), в согласии с условиями (У.7) и (У.8) выводим

$$\begin{aligned} \|z[\zeta] - S(Y[t_0])[\zeta]\| &\leq R_*\Delta h + \|z[\zeta] - z[-i\Delta h]\| + \|S(Z)[\zeta] - S(Z)[-i\Delta h]\| \leq (R_* + 2R_0)\Delta h, \\ \zeta &\in [-i\Delta h, -(i-1)\Delta h], \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть $R_1 = R_0 + R_*h + \alpha(h+k)(R_* + 2R_0)h$. Тогда из оценок (2.5) и (2.6) получаем

$$\|y[t]\| \leq R_0 + R_*\Delta h + \alpha(h+k)(R_* + 2R_0)\Delta h \leq R_1, \quad t \in [t_0 - h, t_0]. \quad (2.7)$$

Лемма 1. *Каковы бы ни были натуральное $m \geq 2$ и допустимые реализации $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$, при условиях (У.1)–(У.8) решение $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) и построенная по нему в согласии с (2.4) функция $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ будут удовлетворять оценке*

$$\|y^{[i]}[t]\| \leq \|S(Y[t])[\cdot]\|_C \leq R_1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\|, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Справедливость леммы непосредственно вытекает из леммы 1 работы [15] и оценки (2.7).

Определим множество

$$I = \{m_1 - 1, m_1, m_2 - 1, m_2, \dots, m_k - 1, m_k\}, \quad m_i \in \mathbb{N}, \quad h_i/\Delta h \leq m_i < h_i/\Delta h + 1, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.8)$$

Для удобства записи положим $h_0 = 0$. Предполагаем, что выполнено следующее условие:

(У.9) Справедливо неравенство

$$m \geq 2h / \min\{|h_i - h_{i-1}|, i = \overline{1, k}\}.$$

Тогда имеют место соотношения

$$1 \leq m_1 - 1 < m_1 < m_2 - 1 < m_2 < \dots < m_k - 1 < m_k = m. \quad (2.9)$$

Лемма 2. *Существует такое число $\beta_1 > 0$, что, каковы бы ни были число $m \in \mathbb{N}$, функция $z[\cdot]$, начальные значения $y_0^{[i]}$ в (2.2) и допустимые реализации $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$, при условиях (У.1)–(У.9) для решения $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) и соответствующей ему функции $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$, определенной в (2.4), справедливо неравенство*

$$\|\dot{y}[t]\| \leq 2\alpha\Delta h \sum_{i=1}^m \|\dot{y}^{[i]}[t]\| + \alpha \sum_{i \in I} \|\dot{y}^{[i]}[t]\| + \beta_1(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\|) \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.10)$$

Доказательство. В согласии с определением (2.3) сплайна $S(Y)[\cdot]$ имеем

$$\int_{-h}^0 \|S(Y[t'])[\zeta] - S(Y[t''])[\zeta]\| d\zeta \leq 2\Delta h \sum_{i=1}^m \|y^{[i]}[t'] - y^{[i]}[t'']\|, \quad t', t'' \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.11)$$

В силу определения (2.8) множества I для чисел h_i , $i = \overline{1, k}$ справедливы неравенства $(m_i - 1)\Delta h < h_i \leq m_i\Delta h$. Тогда, принимая во внимание соотношения (2.9), получаем

$$\sum_{i=1}^k \|S(Y[t'])[-h_i] - S(Y[t''])[-h_i]\| \leq \sum_{i \in I} \|y^{[i]}[t'] - y^{[i]}[t'']\|, \quad t', t'' \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.12)$$

Пусть $t \in [t_0, \vartheta]$, $t + \Delta t \in [t_0, \vartheta]$ и $t_* = \max\{t, t + \Delta t\}$. Пользуясь определением (2.4) функции $y[t]$, условиями (У.2), (У.3) и (У.5), леммой 1 и оценками (2.11), (2.12), выводим

$$\begin{aligned} \|y[t + \Delta t] - y[t]\| &\leq \|y^{[0]}[t + \Delta t] - y^{[0]}[t]\| + \|g(t + \Delta t, S(Y[t + \Delta t])[\cdot]) - g(t + \Delta t, S(Y[t])[\cdot])\| \\ &\quad + \|g(t + \Delta t, S(Y[t])[\cdot]) - g(t, S(Y[t])[\cdot])\| \leq (\beta + \gamma) \left(1 + R_1 + \max_{\zeta \in [t_0, t_*]} \|y[\zeta]\|\right) |\Delta t| \\ &\quad + 2\alpha\Delta h \sum_{i=0}^m \|y^{[i]}[t + \Delta t] - y^{[i]}[t]\| + \alpha \sum_{i \in I} \|y^{[i]}[t + \Delta t] - y^{[i]}[t]\|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Функции $y^{[i]}[t]$, $i = \overline{0, m}$, абсолютно непрерывны на $[t_0, \vartheta]$. В силу условий (У.2), (У.3) функция $y[t]$ также обладает этим свойством. Поэтому функции $y^{[i]}[t]$, $i = \overline{0, m}$, и $y[t]$ дифференцируемы почти всюду на $[t_0, \vartheta]$. Разделив обе части неравенства (2.13) на $|\Delta t|$ и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ в тех точках t , где эти функции дифференцируемы, получаем оценку (2.10). Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует такое число $R_y > 0$, что, каковы бы ни были число $m \in \mathbb{N}$, функция $z[\cdot]$, начальные значения $y_0^{[i]}$ в (2.2) и допустимые реализации $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$, при условиях (У.1)–(У.9) для решения $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) и соответствующей ему функции $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$, определенной в (2.4), имеют место оценки*

$$\|y[t]\| \leq R_y, \quad t \in [t_0 - h, \vartheta], \quad \|\dot{y}[t]\| \leq R_y \quad \text{при п.в. } t \in [t_0 - h, \vartheta], \quad (2.14)$$

$$\|y^{[i]}[t]\| \leq R_y, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \|\dot{y}^{[i]}[t]\| \leq R_y \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Определим функции

$$q^{[1]}[t] = (y[t] - y^{[1]}[t])/\Delta h, \quad q^{[i]}[t] = (y^{[i]}[t] - y^{[i-1]}[t])/\Delta h, \quad i = \overline{2, m}, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.15)$$

Тогда в силу системы (2.1) и определения (2.4) функции $y[t]$ имеем

$$\dot{y}^{[i]}[t] = q^{[i]}[t] \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.16)$$

Обозначим $R_2 = R_0 + 2R_* + \alpha(k + h)(R_* + 2R_0)$. Тогда из условий (У.2), (У.7) и (У.8) с учетом оценки (2.6) выводим

$$\begin{aligned} \|q^{[1]}[t_0]\| &= \|y_0^{[0]} + g(t_0, S(Y[t_0])[\cdot]) - y_0^{[1]}\|/\Delta h \leq R_0 + 2R_* + \alpha(k + h)(R_* + 2R_0) = R_2, \\ \|q^{[i]}[t_0]\| &= \|y_0^{[i-1]} - y_0^{[i]}\|/\Delta h \leq R_0 + 2R_* \leq R_2, \quad i = \overline{2, m}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Как уже отмечалось выше, функции $y[t]$ и $y^{[i]}[t]$, $i = \overline{1, m}$, абсолютно непрерывны на $[t_0, \vartheta]$. Следовательно, функции $q^{[i]}[t]$, $i = \overline{1, m}$ также обладают этим свойством. Обозначим

$$w_i[t] = \|q^{[i]}[t_0]\| + \int_{t_0}^t \left\| \frac{d}{d\xi} \left(q^{[i]}[\xi] e^{(\xi - t_0)/\Delta h} \right) \right\| d\xi, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.18)$$

Тогда, с учетом равенства (2.16) имеем

$$\|\dot{y}^{[i]}[t]\| = \|q^{[i]}[t]\| \leq w_i[t] e^{-(t-t_0)/\Delta h} \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.19)$$

В силу леммы 2 существует такое число $\beta_1 > 0$, что справедлива оценка (2.10). Пользуясь этой оценкой и неравенствами (2.17), (2.19), а также равенствами (2.15), (2.18), получаем

$$\dot{w}_1[t] \leq 2\alpha \sum_{i=1}^m w_i[t] + \frac{\alpha}{\Delta h} \sum_{i \in I} w_i[t] + \beta_1 \left(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\|\right) e^{(t-t_0)/\Delta h} / \Delta h,$$

$$w_i[t] \leq w_{i-1}[t] / \Delta h, \quad i = \overline{2, m} \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad w_i[t_0] \leq R_2, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.20)$$

Пусть $j = \overline{1, m}$ и $t \in (t_0, \vartheta]$. Определим скалярные функции $\varphi_i^j[t, \xi]$, $\xi \in [t_0, t]$, $i = \overline{1, m}$, как решение следующей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} d\varphi_i^j[t, \xi]/d\xi = -2\alpha\varphi_1^j[t, \xi] - \varphi_{i+1}^j[t, \xi]/\Delta h, & i \in \{1, \dots, m-1\} \setminus I, \\ d\varphi_i^j[t, \xi]/d\xi = -(2\alpha + \alpha/\Delta h)\varphi_1^j[t, \xi] - \varphi_{i+1}^j[t, \xi]/\Delta h, & i \in \{1, \dots, m-1\} \cap I, \\ d\varphi_m^j[t, \xi]/d\xi = -(2\alpha + \alpha/\Delta h)\varphi_1^j[t, \xi] \end{cases} \quad (2.21)$$

при условии

$$\varphi_i^j[t, t] = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Заметим, что $\varphi_i^j[t, \xi] \geq 0$, $\xi \in [t_0, t]$. Тогда, применяя формулу Ньютона — Лейбница к функции $\sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, \xi] w_i[\xi]$, $\xi \in [t_0, t]$, с учетом соотношений (2.20), (2.21) имеем

$$\begin{aligned} w_j[t] &= \sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, t] w_i[t] = \sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, t_0] w_i[t_0] + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m \left(\varphi_i^j[t, \xi] \dot{w}_i[\xi] + \frac{d}{d\xi} \varphi_i^j[t, \xi] w_i[\xi] \right) d\xi \quad (2.22) \\ &\leq R_2 \sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, t_0] + \beta_1 \left(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\|\right) \int_{t_0}^t \varphi_1^j[t, \xi] \frac{e^{(\xi-t_0)/\Delta h}}{\Delta h} d\xi. \end{aligned}$$

Из (2.9) следует, что множество I , определенное в (2.8), имеет $2k$ элементов. Учитывая это, из (2.21) вытекает равенство

$$\frac{d}{d\xi} \left(e^{(\xi-t_0)/\Delta h} \sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, \xi] \right) = (1 - 2\alpha(h+k)) \varphi_1^j[t, \xi] \frac{e^{(\xi-t_0)/\Delta h}}{\Delta h}. \quad (2.23)$$

Обозначим $\beta_2 = \beta_1(2\alpha(h+k) - 1)$. Тогда в силу неравенства (1.3) имеем $\beta_2 > 0$. Принимая во внимание равенство (2.23), из оценки (2.22) выводим

$$\begin{aligned} w_j[t] &\leq R_2 \sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, t_0] + \beta_2 \left(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\|\right) \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, t_0] - e^{(t-t_0)/\Delta h} \right) \\ &\leq \left(R_2 + \beta_2 \left(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\|\right) \right) \sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, t_0], \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in (t_0, \vartheta]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Рассмотрим многочлен

$$\kappa(\lambda) = \lambda^m - 2\alpha\Delta h \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i - \alpha \sum_{i \in I} \lambda^{m-i}. \quad (2.25)$$

Обозначим

$$\sigma = 2\alpha\Delta h + 1, \quad \alpha_1 = 2\alpha(h+k), \quad \lambda_1 = \alpha_1^{1/(m_1-1)} \sigma, \quad (2.26)$$

где число m_1 взято из (2.8). Покажем, что $\kappa(\lambda_1) > 0$. В силу (1.3) имеем $\lambda_1 > 1$. Учитывая это и соотношения (2.8), (2.9), выводим

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda_1) &= \lambda_1^m - 2\alpha\Delta h \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_1^i - \alpha \sum_{i \in I} \lambda_1^{m-i} > \lambda_1^{m-m_1+1} \left(\lambda_1^{m_1-1} - 2\alpha\Delta h \sum_{i=0}^{m_1-2} \lambda_1^i - \alpha_1 \right) \quad (2.27) \\ &= \lambda_1^{m-m_1+1} \left(\alpha_1 \sigma^{m_1-1} - 2\alpha\Delta h \sum_{i=0}^{m_1-2} \alpha_1^{i/(m_1-1)} \sigma^i - \alpha_1 \right) > \alpha_1 \lambda_1^{m-m_1+1} \left(\sigma^{m_1-1} - 2\alpha\Delta h \sum_{i=0}^{m_1-2} \sigma^i - 1 \right). \end{aligned}$$

По формуле суммы геометрической прогрессии получаем

$$\sigma^{m_1-1} - 2\alpha\Delta h \sum_{i=0}^{m_1-2} \sigma^i - 1 = \sigma^{m_1-1} - 2\alpha\Delta h \frac{\sigma^{m_1-1} - 1}{\sigma - 1} - 1 = 0. \quad (2.28)$$

Таким образом, из соотношений (2.27) и (2.28) заключаем, что $\kappa(\lambda_1) > 0$. С другой стороны, в силу (1.3) имеем $\kappa(1) = 1 - 2\alpha(h+k) < 0$. Следовательно, существует такое число λ_0 , что

$$\kappa(\lambda_0) = 0, \quad 1 < \lambda_0 < \lambda_1 = \alpha_1^{1/(m_1-1)} \sigma. \quad (2.29)$$

Для $j = \overline{1, m}$ и $t \in (t_0, \vartheta]$ рассмотрим функцию $\Phi_j[t, \xi] = \sum_{i=1}^m \lambda_0^{m-i} \varphi_i^j[t, \xi]$, $\xi \in [t_0, t]$. В силу (2.21), (2.25) и (2.29) имеем

$$\frac{d}{d\xi} \Phi_j[t, \xi] = \sum_{i=1}^m \lambda_0^{m-i} \frac{d}{d\xi} \varphi_i^j[t, \xi] = -\frac{\lambda_0}{\Delta h} \Phi_j[t, \xi], \quad \Phi_j[t, t] = \lambda_0^{m-j}.$$

Учитывая эти соотношения, далее выводим

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i^j[t, t_0] \leq \sum_{i=1}^m \lambda_0^{m-j} \varphi_i^j[t, t_0] = \Phi_j[t, t_0] = \lambda_0^{m-j} e^{\lambda_0(t-t_0)/\Delta h} \leq \lambda_1^m e^{\lambda_1(t-t_0)/\Delta h}. \quad (2.30)$$

Объединяя оценки (2.19), (2.24) и (2.30), получаем

$$\|\dot{y}^{[j]}[t]\| \leq \left(R_2 + \beta_2 \left(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\| \right) \right) \lambda_1^m e^{(\lambda_1-1)(t-t_0)/\Delta h} \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.31)$$

Заметим, что величина $\mu_m = \lambda_1^m e^{(\lambda_1-1)(\vartheta-t_0)/\Delta h}$ имеет конечный предел при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, найдется такое число $\Gamma > 0$, что для всех натуральных m , удовлетворяющих условию (У.9), будет справедливо неравенство $\mu_m \leq \Gamma$. Обозначим $\beta_3 = (R_2 + \beta_2)\Gamma$. Тогда из (2.31) вытекает неравенство

$$\|\dot{y}^{[j]}[t]\| \leq \beta_3 \left(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\| \right) \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.32)$$

Пользуясь этой оценкой вместе с леммой 2, выводим

$$\|y[t]\| \leq \beta_4 \left(1 + \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y[\zeta]\| \right) \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.33)$$

где $\beta_4 = \beta_1 + 2\alpha(h+k)\beta_3$. По лемме Гронуолла — Беллмана [22, с.43], с учетом оценки (2.7), из неравенства (2.33) следует существование такого числа $R_3 > R_1$, что $\|y[t]\| \leq R_3$, $t \in [t_0 - h, \vartheta]$. В силу соотношений (2.4), (2.17) получаем

$$\|y[t]\| = \max_{i=\overline{1, m}} q^{[i]}[t_0] \leq R_2 \text{ при п.в. } t \in [t_0 - h, t_0]. \quad (2.34)$$

Положим $R_y = \max \{R_3, R_2 + \beta_3(1 + R_3)(\vartheta - t_0), \beta_4(1 + R_3)\}$. Тогда из неравенств (2.32), (2.33) и (2.34) получаем оценки (2.14). Лемма доказана.

Теорема 1. *Существует такое число $K_1 > 0$, что, каковы бы ни были число $m \in \mathbb{N}$, функция $z[\cdot]$, начальные значения $y_0^{[i]}$ в (2.2) и допустимые реализации $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$, при условиях (У.1)–(У.9) для решения $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) и соответствующей ему функции $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$, определенной в (2.4), имеет место оценка*

$$\|y_t[\cdot] - S(Y[t])[\cdot]\|_C \leq K_1 m^{-1/2}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.35)$$

где $y_t[\zeta] = y[t + \zeta]$, $\zeta \in [-h, 0]$.

Доказательство. Взяв R_y из леммы 3, определим компакт $P_y \subset C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, состоящий из абсолютно непрерывных функций $\tilde{y}[t] \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0 - h, \vartheta]$, которые удовлетворяют оценкам

$$\|\tilde{y}[t]\| \leq R_y, \quad t \in [t_0 - h, \vartheta], \quad \|\dot{\tilde{y}}[t]\| \leq R_y \text{ при п.в. } t \in [t_0 - h, \vartheta].$$

Тогда $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ содержится в P_y . Отсюда заключаем [2], что справедливы неравенства

$$\|y[t - i\Delta h] - y^{[i]}[t]\| \leq 4R_y h m^{-1/2}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.36)$$

В силу леммы 3 и определения сплайна (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \|y_t[\zeta] - S(Y[t])[\zeta]\| &\leq \|y[t + \zeta] - y[t - i\Delta h]\| + \|y[t - i\Delta h] - S(Y[t])[-i\Delta h]\| \\ &\quad + \|S(Y[t])[-i\Delta h] - S(Y[t])[\zeta]\| \\ &\leq 2R_y \Delta h + \|y[t - i\Delta h] - y^{[i]}[t]\|, \quad \zeta \in [-i\Delta h, -(i-1)\Delta h], \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Положим $K_1 = 6R_y h$. Тогда требуемая оценка (2.35) вытекает из соотношений (2.36) и (2.37). Теорема доказана.

3. Теорема о близости

В этом разделе будем предполагать, что реализации $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$, $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$ в системе (2.1) удовлетворяют равенствам

$$\tilde{u}[t] = u[t], \quad \tilde{v}[t] = v[t], \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.1)$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (У.1)–(У.9). Тогда найдется такое число $K > 0$, что при любых допустимых реализациях $u[t_0[\cdot]\vartheta]$, $v[t_0[\cdot]\vartheta]$ и реализациях $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$, $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$, удовлетворяющих (3.1), для решения $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ задачи (1.1), (1.2) и функции $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$, построенной по решению $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) согласно (2.4), будет справедлива оценка*

$$\|x[t] - y[t]\| \leq K m^{-1/4}, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.2)$$

Доказательство. Обозначим

$$s[t] = x[t] - y[t], \quad t \in [t_0 - h, \vartheta], \quad r[t] = \left(x[t] - g(t, x_t[\cdot]) \right) - \left(y[t] - g(t, S(Y[t])[\cdot]) \right), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.3)$$

Выберем число $\tau \in (0, \min\{h_1, 1/(2\alpha)\})$. В силу условия (У.2) имеем

$$\|g(t, x'[\cdot]) - g(t, x''[\cdot])\| \leq \alpha(h + k) \max_{\zeta \in [-h, -\tau]} \|x'[\zeta] - x''[\zeta]\| + \frac{1}{2} \max_{\zeta \in [-\tau, 0]} \|x'[\zeta] - x''[\zeta]\|.$$

Учитывая это, для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ выводим

$$\begin{aligned} \|s[t]\| &\leq \|r[t]\| + \|g(t, x_t[\cdot]) - g(t, y_t[\cdot])\| + \|g(t, y_t[\cdot]) - g(t, S(Y[t])[\cdot])\| \\ &\leq \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\| + \frac{1}{2} \max_{\zeta \in [t_0 - \tau, t]} \|s[\zeta]\| + \alpha(h + k) \max_{\zeta \in [t_0 - h, t - \tau]} \|s[\zeta]\| \end{aligned}$$

$$+ \left(\alpha(h+k) + \frac{1}{2} \right) \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|y_\zeta[\cdot] - S(Y[\zeta])[\cdot]\|_C. \quad (3.4)$$

В силу неравенства (1.4), условия (У.8) и леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} \|s[t_0 + \zeta]\| &\leq \|x[t_0 + \zeta] - x[t_0 - i\Delta h]\| + \|y[t_0 + \zeta] - y[t_0 - i\Delta h]\| + \|x[t_0 - i\Delta h] - y[t_0 - i\Delta h]\| \\ &\leq (R_x + R_y)\Delta h + \|z[-i\Delta h] - y_0^{[i]}\| \leq (R_x + R_y + R_*)\Delta h, \quad \zeta \in [-i\Delta h, -(i-1)\Delta h], \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим $\alpha_2 = 2 + 2\alpha(h+k)$, $K_2 = K_1 + (R_x + R_y + R_*)h$, где константа K_1 взята из теоремы 1. Из оценок (3.4) и (3.5), пользуясь теоремой 1, получаем

$$\max_{\zeta \in [t_0 - h, t]} \|s[\zeta]\| \leq \alpha_2 \left(\max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\| + \max_{\zeta \in [t_0 - h, t - \tau]} \|s[\zeta]\| + K_2 m^{-1/2} \right), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.6)$$

Пусть l — минимальное целое число такое, что $(\vartheta - t_0)/\tau < l$. Докажем неравенство

$$\max_{\zeta \in [t_0 - h, t]} \|s[\zeta]\| \leq (j+1)\alpha_2^j \left(\max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\| + K_2 m^{-1/2} \right), \quad t \in [t_0, \min\{t_0 + j\tau, \vartheta\}], \quad j = \overline{1, l}. \quad (3.7)$$

При $j = 1$ это неравенство следует из оценок (3.5) и (3.6). Далее по индукции предположим, что неравенство (3.7) справедливо при $j = p$, $1 \leq p < l$. Пользуясь неравенством (3.6) при $t \in [t_0, \min\{t_0 + (p+1)\tau, \vartheta\}]$, получаем

$$\begin{aligned} \max_{\zeta \in [t_0 - h, t]} \|s[\zeta]\| &\leq \alpha_2 \left(\max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\| + (p+1)\alpha_2^p \left(\max_{\zeta \in [t_0, t - \tau]} \|r[\zeta]\| + K_2 m^{-1/2} \right) + K_2 m^{-1/2} \right) \\ &\leq (p+2)\alpha_2^{p+1} \left(\max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\| + K_2 m^{-1/2} \right), \end{aligned}$$

т. е. неравенство (3.7) верно и для $j = p+1$, а следовательно, и для всех $j = \overline{1, l}$. Обозначим $\alpha_3 = (l+1)\alpha_2^l$, $K_3 = \alpha_3 K_2$. Тогда из неравенств (3.7) вытекает оценка

$$\max_{\zeta \in [t_0 - h, t]} \|s[\zeta]\| \leq \alpha_3 \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\| + K_3 m^{-1/2}, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.8)$$

Взяв константы R_x и R_y соответственно из неравенств (1.4) и леммы 3, определим компакт $D_* \subset C$, состоящий из абсолютно непрерывных функций $\tilde{x}[t] \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-h, 0]$, которые удовлетворяют оценкам

$$\|\tilde{x}[\zeta]\| \leq R_x + R_y, \quad \zeta \in [-h, 0], \quad \|\dot{\tilde{x}}[\zeta]\| \leq R_x + R_y \quad \text{при п.в. } \zeta \in [-h, 0]. \quad (3.9)$$

Тогда, принимая во внимание равенства

$$\|S(Y[t])[\cdot]\|_C = \max_{i=\overline{1, m}} \|y^{[i]}[t]\|, \quad \max_{\zeta \in [-h, 0]} \left\| \frac{d}{d\zeta} S(Y[t])[\zeta] \right\| = \max_{i=\overline{2, m}} \|\dot{y}^{[i]}[t]\|,$$

будем полагать справедливыми включения

$$x_t[\cdot] \in D_*, \quad S(Y[t])[\cdot] \in D_*. \quad (3.10)$$

В соответствии с условием (У.3) определим числа

$$L_* = L(D_*), \quad \eta = \alpha_3 L_*. \quad (3.11)$$

Положим

$$V[t] = \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\|^2 e^{-2\eta(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.12)$$

Функция $V[t]$ абсолютно непрерывна и при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \dot{V}[t] &= 2e^{-2\eta(t-t_0)} \left(\max \{0, \langle \dot{r}[t], r[t] \rangle\} - \eta \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\|^2 \right) \\ &\leq 2 \max \left\{ 0, \langle \dot{r}[t], r[t] \rangle - \eta \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Кроме того в согласии с (2.4), (3.3) и (3.12) из условия (У.8) следует неравенство

$$V[t_0] = \|r[t_0]\|^2 \leq (R_* \Delta h)^2. \quad (3.14)$$

Обозначим $\alpha_4 = \sqrt{2(\vartheta - t_0)} \alpha_3 e^{\eta(\vartheta - t_0)}$, $K_4 = \alpha_3 e^{\eta(\vartheta - t_0)} R_* h + K_3$. Учитывая соотношения (3.12)–(3.14), из оценки (3.8) при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ получаем

$$\begin{aligned} \max_{\zeta \in [t_0 - h, t]} \|s[\zeta]\| &\leq \alpha_3 e^{\eta(\vartheta - t_0)} (V[t_0])^{1/2} + \alpha_3 e^{\eta(\vartheta - t_0)} \left(\int_{t_0}^t \dot{V}[\xi] d\xi \right)^{1/2} + K_3 m^{-1/2} \\ &\leq \frac{\alpha_4}{\sqrt{\vartheta - t_0}} \left(\int_{t_0}^t \max \left\{ 0, \langle \dot{r}[\xi], r[\xi] \rangle - \eta \max_{\zeta \in [t_0, \xi]} \|r[\zeta]\|^2 \right\} d\xi \right)^{1/2} + K_4 m^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В силу (1.1), (2.1) и (3.3) имеем

$$\dot{r}[t] = f(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]) - f(t, S(Y[t])(\cdot), \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]) \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.16)$$

По условию (У.3) существует такая константа $R_f > 0$, что

$$\|f(t, w[\cdot], u, v)\| \leq R_f, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot] \in D_*, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

Обозначим $R_r = R_* h + 2R_f(1 + \vartheta - t_0)$. Тогда из (3.16), учитывая (3.10), получаем

$$\|\dot{r}[t]\| \leq 2R_f \leq R_r \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \quad \|r[t]\| \leq R_* \Delta h + 2R_f(\vartheta - t_0) \leq R_r, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (3.17)$$

Пользуясь соотношением (3.16) и условием (У.6), с учетом включений (3.10), равенств (3.1) и выбора числа L_* из (3.11) имеем

$$\langle \dot{r}[t], r[t] \rangle \leq L_* \|x_t[\cdot] - S(Y[t])(\cdot)\|_C \|r[t]\|. \quad (3.18)$$

Применяя оценки (3.8) и (3.17), получаем

$$\begin{aligned} L_* \|x_t[\cdot] - S(Y[t])(\cdot)\|_C \|r[t]\| &\leq L_* \|s_t[\cdot]\|_C \|r[t]\| + L_* \|y_t[\cdot] - S(Y[t])(\cdot)\|_C \|r[t]\| \\ &\leq \eta \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\|^2 + L_* R_r (K_1 + K_3) m^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Положим

$$K = \alpha_4 (L_* R_r (K_1 + K_3))^{1/2} + K_4. \quad (3.20)$$

Тогда, объединяя соотношения (3.15), (3.18) и (3.19), с учетом определения (3.3) функций $s[t]$ приходим к оценке (3.2). Теорема доказана.

4. Взаимное отслеживание

В этом разделе вместо условия (У.4) будем предполагать выполнение более сильного условия

(У.4*) Отображение $[t_0, \vartheta] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \ni (t, x[\cdot], u, v) \mapsto f = f(t, x[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$ непрерывно.

Кроме того, будем предполагать выполненным следующее условие:

(У.10) Для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $x[\cdot] \in C$ и $r \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, x[\cdot], u, v), r \rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, x[\cdot], u, v), r \rangle.$$

Опишем процедуру взаимного отслеживания между системами (1.1), (1.2) и (2.1), (2.2). Реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$ будем формировать по принципу обратной связи как кусочно-постоянные функции по шагам разбиения

$$\Delta_\delta = \{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j < \delta, j = \overline{0, J-1}, t_J = \vartheta\}, \quad (4.1)$$

полагая

$$u[t] = u_j^\circ, \quad \tilde{v}[t] = \tilde{v}_j^\circ, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (4.2)$$

где

$$u_j^\circ \in \arg \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle,$$

$$\tilde{v}_j^\circ \in \arg \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle.$$

Здесь величина $r[t]$ определяется согласно (3.3).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (У.1)–(У.3), (У.4*), (У.5)–(У.10). Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $M = M(\varepsilon) > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого натурального $m > M$ при любых допустимых реализациях $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$, $v[t_0[\cdot]\vartheta]$ и реализациях $u[t_0[\cdot]\vartheta]$, $\tilde{v}[t_0[\cdot]\vartheta]$, формируемых по шагам разбиения (4.1) по правилу (4.2), для решения $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ задачи (1.1), (1.2) и функции $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$, построенной по решению $\bar{Y}[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) согласно (2.4), будет справедлива оценка

$$\|x[t] - y[t]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Доказательство. Взяв константы R_x и R_y соответственно из неравенств (1.4) и леммы 3, определим компакт $D_* \subset C$ в согласии с соотношениями (3.9) и, далее, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, получаем включения (3.10), оценки (3.15), (3.17), (3.19) и равенство (3.16). Дальнейшее доказательство будет опираться на эти соотношения.

Выберем $\varepsilon > 0$. По условию (У.4*) отображение f непрерывно. Поэтому найдется такое число $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$, что для всех $t', t'' \in [t_0, \vartheta]$ и $w'[\cdot], w''[\cdot] \in D_*$ при условии $|t' - t''| \leq \nu$, $\|w'[\cdot] - w''[\cdot]\|_C \leq \nu$ будет справедливо неравенство

$$\|f(t', w'[\cdot], u, v) - f(t'', w''[\cdot], u, v)\| \leq \varepsilon^2 / (16\alpha^2 R_r), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}, \quad (4.3)$$

где константа R_r взята из (3.17). Положим $\delta_1 = \min\{\nu/R_x, \nu/R_y\}$. В силу неравенств (1.4) и леммы 3 для любых $t', t'' \in [t_0, \vartheta]$ при $|t' - t''| \leq \delta_1$ справедливы соотношения

$$\|x_{t'}[\cdot] - x_{t''}[\cdot]\|_C = \max_{\vartheta \in [-h, 0]} \|x[\vartheta + t'] - x[\vartheta + t'']\| \leq R_x |t' - t''| \leq \nu, \quad (4.4)$$

$$\|S(Y[t'])[\cdot] - S(Y[t''])[\cdot]\|_C = \max_{i=1, m} \|y^{[i]}[t'] - y^{[i]}[t'']\| \leq R_y |t' - t''| \leq \nu.$$

Возьмем $\delta_2 = \varepsilon^2/(16\alpha^2 R_r)$. В силу оценок (3.17) для любых $t', t'' \in [t_0, \vartheta]$ при $|t' - t''| \leq \delta_2$ выводим

$$\|r[t'] - r[t'']\| \leq R_r |t' - t''| \leq \varepsilon^2/(16\alpha_4^2). \quad (4.5)$$

Положим $\delta = \min\{\nu, \delta_1, \delta_2\}$. Тогда, прибавляя и вычитая к скалярному произведению $\langle \dot{r}[t], r[t] \rangle$ выражение $\langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u[t], v[t]) - f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]), r[t] - r[t_j] \rangle$ и учитывая соотношения (3.16), (4.1) и (4.3)–(4.5), получаем оценку

$$\langle \dot{r}[t], r[t] \rangle \leq \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u[t], v[t]) - f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]), r[t_j] \rangle + \varepsilon^2/(4\alpha_4^2). \quad (4.6)$$

В согласии с равенствами (4.2) и условием (У.10) при $t \in [t_j, t_{j+1})$ имеем

$$\begin{aligned} & \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u[t], v[t]) - f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]), r[t_j] \rangle \\ & \leq \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u_j^\circ, v), r[t_j] \rangle - \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], u, \tilde{v}_j^\circ), r[t_j] \rangle \\ & = \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle - \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle \\ & = \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle - \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Выбирая константу L_* из (3.11) и пользуясь оценкой (3.17), выводим

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, x_t[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle - \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, S(Y[t])[\cdot], u, v), r[t_j] \rangle \\ & \leq L_* \|x_t[\cdot] - S(Y[t])[\cdot]\|_C \|r[t_j]\|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Объединяя по порядку оценки (4.6)–(4.8) и (3.19), получаем

$$\langle \dot{r}[t], r[t] \rangle \leq \eta \max_{\zeta \in [t_0, t]} \|r[\zeta]\|^2 + L_* R_r (K_1 + K_3) m^{-1/2} + \varepsilon^2/(4\alpha_4^2).$$

Отсюда и из оценки (3.15), учитывая обозначение (3.20), заключаем

$$\|s[t]\| \leq \alpha_4 (L_* R_r (K_1 + K_3) m^{-1/2} + \varepsilon^2/(4\alpha_4^2))^{1/2} + K_4 m^{-1/2} \leq K m^{-1/4} + \varepsilon/2, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (4.9)$$

Положим $M(\varepsilon) = (2K/\varepsilon)^4$. Тогда правая часть неравенства (4.9) меньше ε . Теорема доказана.

Заметим, что теорема 3 позволяет опосредовано, через аппроксимирующую систему (2.1), (2.2), трактуемую как моделирующий поводыр [13; 14], сводить различные задачи об управлении системами нейтрального типа вида (1.1), (1.2), включая задачи управления в условиях помех или противодействия (воздействия v), к задачам об управлении системами обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом требуемое качество всей системы “функциональный исходный объект — моделирующий поводыр”, будет достигаться за счет выбора управляющего воздействия \tilde{u} , не задействованного в процедуре (4.1), (4.2) взаимного отслеживания.

5. Пример

Рассмотрим следующее функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа в форме Дж. Хейла:

$$\frac{d}{dt} \left(x[t] - 2 \int_{t-1}^t \sin(x[\xi]) d\xi + 1.5 \sin(0.5t)x[t-1] \right) = 0.5x[t] - 2 \int_{t-1}^t x[\xi] e^{-0.3|x[\xi]|} d\xi + u[t] + v[t]x[t-1],$$

$$t \in [0, 5], \quad x[t] \in \mathbb{R}, \quad |u[t]| \leq 1, \quad |v[t]| \leq 1,$$

с начальным условием $x[\zeta] = \cos(6\zeta)$, $\zeta \in [-1, 0]$.

Для этой системы в соответствии с (2.1), (2.2) построим аппроксимирующую систему и по правилу (4.1), (4.2) реализуем процедуру взаимного отслеживания. При этом реализации $v[t_0[\cdot]\vartheta]$ и $\tilde{u}[t_0[\cdot]\vartheta]$ будем формировать наихудшим для указанной процедуры способом с точки зрения близости функций $x[t]$ и $y[t]$.

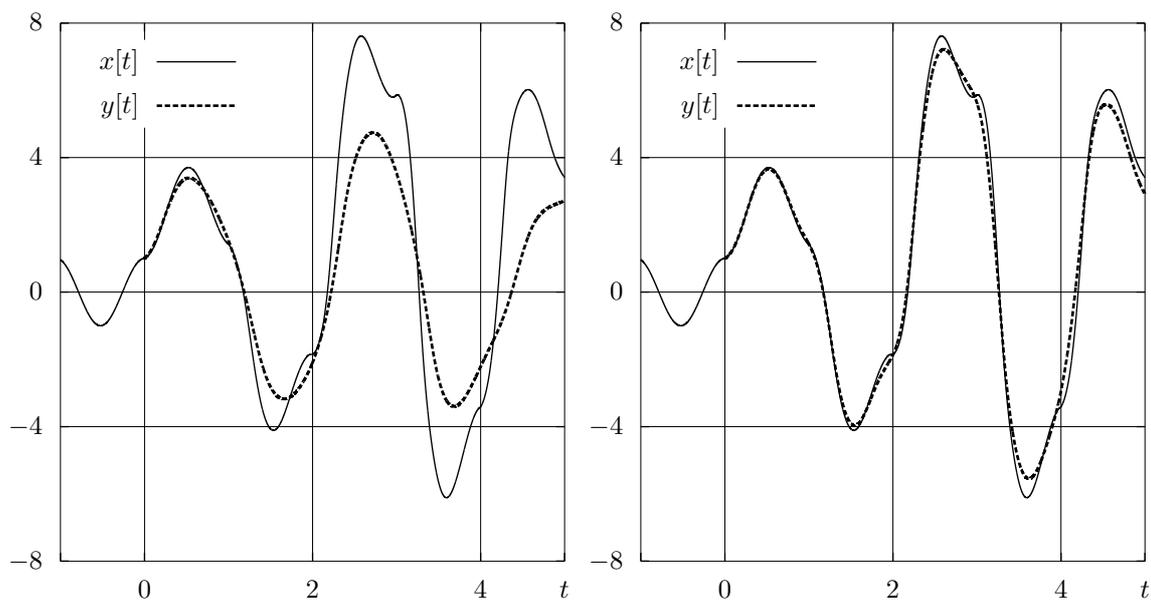


Рис. 1.

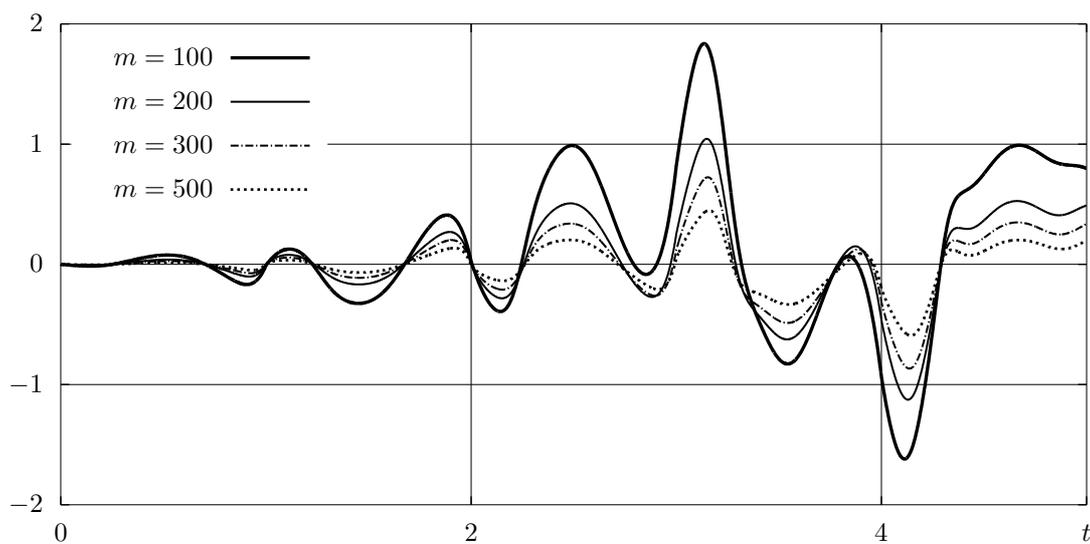


Рис. 2.

На рис. 1 изображены результаты моделирования для параметров $\delta = 0.001$, $m = 20$ (слева) и для параметром $\delta = 0.001$, $m = 200$ (справа).

На рис. 2 изображены графики разности $x[t] - y[t]$, полученные при $\delta = 0.001$ и различных значениях m .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
2. **Резин Ю.М.** О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
3. **Салуквадзе М.Е.** К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 12. С. 1595–1601.

4. Куржанский А.Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. С. 2094–2107.
5. Banks Н.Т., Burns J.A. Hereditary control problems: Numerical methods based on averaging approximations // SIAM J. Control Optim. 1978. Vol. 16, no. 2. P. 169–208.
6. Banks Н.Т., Kappel F. Spline approximations for functional differential equations // J. Differential Equations. 1979. Vol. 34, no. 3. P. 496–522.
7. Кряжимский А.В., Максимов В.И. Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 2. С. 202–209.
8. Максимов В.И. Аппроксимация нелинейных дифференциально-разностных игр // Оптим. упр. в динам. системах: сб. ст. / ИММ УрО РАН. 1979. Вып. 30. С. 49–65.
9. Опарин Н.П. Об аппроксимации систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения с отклоняющимися аргументами. 1979. Т. 11. С. 52–60.
10. Kunisch K. Approximation schemes for nonlinear neutral optimal control systems // J. Math. Anal. Appl. 1981. Vol. 82, no. 1. P. 112–143.
11. Matvii O.V., Cherevko I.M. On approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations // Nonlinear Oscillations. 2007. Vol. 10, no. 3. P. 330–338.
12. Fabiano R.H. A semidiscrete approximation scheme for neutral delay-differential equations // Int. J. Numer. Anal. Model. 2013. Vol. 10, no. 3. P. 712–726.
13. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. Стохастический поводырь для объекта с последствием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.
14. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
15. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Конечномерные моделирующие поводыри в системах с запаздыванием // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2013. Т. 19, № 1. С. 182–195.
16. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Об аппроксимации конфликтно-управляемых функционально-дифференциальных систем // Вестн. Тамбов. ун-та. 2013. Т. 18, № 5-2. С. 2579–2582. (Естественные и технические науки.)
17. Плаксин А.Р. Об аппроксимации конфликтно-управляемых систем нейтрального типа [Электрон. ресурс] // XII Всерос. совещание по проблемам управления — ВСПУ-2014 (Москва, 16–19 июня, 2014 г.): сб. докл. С. 2078–2088.
18. Hale J.K., Cruz. M.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // App. Mat. Pura Appl. 1970. Vol. 85, no. 1. P. 63–81.
19. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225с.
20. Куржанский, А.Б. О существовании решений уравнений с последствием // Дифференц. уравнения, 1970. Т. 6, № 10. С. 1800–1809.
21. Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011. 243 с.
22. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Лукоянов Николай Юрьевич

Поступила 29.07.2014

д-р физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович

ведущий математик

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

УДК 517.977

**ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ
ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ КООРДИНАТ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА¹****В. И. Максимов**

Рассматривается задача управления по принципу обратной связи в условиях измерения части фазовых координат системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Указывается устойчивый к помехам алгоритм ее решения, который основан на сочетании конструкций теорий динамического обращения и гарантированного управления. Алгоритм состоит из двух блоков: блока динамического восстановления неизмеряемых координат и блока управления.

Ключевые слова: управление, часть координат, линейные системы.

V. I. Maksimov. On a control algorithm for a linear system with measurements of a part of coordinates of the phase vector.

We consider a feedback control problem for a system of ordinary differential equations in the case when only a part of coordinates of the phase vector are measured and propose a solution algorithm that is stable to perturbations. The algorithm is based on the combination of the theories of dynamical inversion and guaranteed control. It consists of two blocks: a block for the dynamical reconstruction of unmeasured coordinates and a control block.

Keywords: control, part of coordinates, linear systems.

1. Введение

В статье рассматривается задача реконструкции-управления системой линейных дифференциальных уравнений. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы заданное качество управляемого процесса, а именно в отслеживании траекторией заданной системы предписанной траектории некоторой эталонной системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Методы решения подобного типа задач хорошо известны и излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления [1–3]. В настоящей работе мы исследуем задачу, которая имеет две особенности. Во-первых, предполагается, что измеряются (с ошибкой) в дискретные, достаточно частые, моменты времени не все, а часть фазовых координат заданной управляемой системы. Во-вторых, относительно неизвестного возмущения, действующего на эталонную систему, известно лишь, что оно является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т. е. может быть неограниченным. Указанные предположения ведут к невозможности точного отслеживания траекторией заданной управляемой системы траектории эталонной системы. Учитывая данную особенность задачи, мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения, который основан на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига. Предлагаемый алгоритм содержит два блока: блок реконструкции в темпе «реального времени» ненаблюдаемых координат, а также блок управления, использующий результаты работы блока реконструкции в качестве входа.

¹Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 14-11-00539).

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + By(t) + f_1(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \\ \dot{y}(t) &= Cx(t) + Dy(t) + Eu(t) + f(t), \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $0 \leq \vartheta \leq +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$; $f_1(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^n)$ и $f(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$ — заданные функции, u — управление, A , B , C , D и E — стационарные матрицы соответствующих размерностей. Наряду с системой (2.1) имеется еще одна система того же вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + By_1(t) + f_1(t), \quad t \in T, \\ \dot{y}_1(t) &= Cx_1(t) + Dy_1(t) + Ev(t) + f(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

с начальным состоянием $x_1(0) = x_{10}$, $y_1(0) = y_{10}$. Эта система (назовем ее в дальнейшем эталонной) подвержена воздействию некоторого эталонного управления $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$. Эталонное управление $v(\cdot)$, а также отвечающее ему решение системы (2.2) $z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)) = \{x_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot)), y_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))\}$, где $z_{10} = \{x_{10}, y_{10}\}$, заранее неизвестны. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (\tau_0 = 0, \tau_m = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$$

измеряется часть фазовых состояний системы (2.1), а именно состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; z_0, u(\cdot))$, где $z_0 = \{x_0, y_0\}$, $z(\cdot; z_0, u(\cdot)) = \{x(\cdot; z_0, u(\cdot)), y(\cdot; z_0, u(\cdot))\}$ — решение системы (2.1), а также состояния $z_1(\tau_i) = z_1(\tau_i; z_{10}, v(\cdot))$ эталонной системы (2.2). Состояния $x(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$, $i \in [0 : m - 1]$, — удовлетворяют неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h. \quad (2.3)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — уровень погрешности измерения, символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве \mathbb{R}^n . Для простоты ограничимся случаем, когда состояния $x_1(\tau_i)$ и $y_1(\tau_i)$ эталонной системы измеряются точно. Будем предполагать

$$|x_0 - x_{10}|_n \leq h, \quad |y_0 - y_{10}|_N \leq h. \quad (2.4)$$

Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u(\cdot)$ в системе (2.1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ этой системы решением $z_1(\cdot) = \{x_1(\cdot), y_1(\cdot)\}$ системы (2.2). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x(\tau_i)$ и $z_1(\tau_i)$ в «реальном времени» формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u(\cdot)$ в правой части системы (2.1) такое, что отклонение решения системы (2.1) $z(\cdot) = z(\cdot; z_0, u(\cdot))$ от решения эталонной системы (2.2) $z_1(\cdot) = z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))$ в метрике пространства $C(T; \mathbb{R}^{n+N})$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h .

В случае, когда $v(t)$ стеснено мгновенными ограничениями и измеряются все фазовые координаты системы (2.1), обсуждаемая задача может быть решена на основе конструкций работ [1; 2]. В данной работе мы, в отличие от [1; 2], рассмотрим случай измерения части координат. При этом укажем алгоритм решения задачи, который основан на методе динамического обращения, развитом в [4–6], а также известном в теории позиционного управления методе экстремального сдвига [1]. В связи с неполнотой информации (а именно с возможностью измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы $\{x(\tau_i), y(\tau_i)\}$, а лишь его части — $x(\tau_i)$) наряду с блоком управления нами будет использоваться дополнительный блок — блок

динамического восстановления неизвестной координаты. Последний будет играть роль поставщика недостающей информации о текущем фазовом состоянии системы (2.1). Эта информация оперативно передается на блок управления, формирующий u по закону обратной связи. Если априори известно, что эталонное управление стеснено мгновенными ограничениями, т.е. $v(t) \in P$ при почти всех (п. в.) $t \in T$ (P — заданный компакт в \mathbb{R}^r), описанная задача может быть решена с помощью конструкций работ [6–9].

Пусть для каждого $h \in (0, 1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0, 1). \quad (2.5)$$

Всякую кусочно-постоянную функцию $\xi^h(\cdot): T \mapsto \mathbb{R}^n$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, удовлетворяющую ограничениям (2.3), будем называть *допустимым измерением точности h* , а всякую функцию $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$ — *допустимым управлением*.

Блок динамического восстановления состоит из управляемой системы (назовем ее моделью) и закона формирования управления $u^h(\cdot)$ этой системой по принципу обратной связи U . Динамика модели описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bu^h(t) + f_1(t), \quad w(0) = x_0, \quad t \in T, \quad (2.6)$$

где управление $u^h(\cdot)$ находится по формуле

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, \xi_i^h, w(\tau_i)) \quad \text{при } t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1], \quad \tau_i = \tau_{h,i},$$

ξ_i^h — результат измерения компоненты $x(\tau_i)$ (см. (2.3)). Закон U конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta(h)$ управление $u^h(\cdot)$ аппроксимирует в среднеквадратичном ненаблюдаемую компоненту $y(\cdot)$. Всякие функции

$$U(\cdot, \cdot, \cdot): T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r, \quad V(\cdot, \cdot, \cdot): T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$$

будем называть *допустимыми обратными связями* (для системы (2.1)).

Итак, решение $z = z^h(\cdot)$ системы (2.1) наблюдается в дискретные моменты $\tau_{h,i}$ с ошибкой и изменяется под воздействием некоторых обратных связей $u^h(\cdot) = U(\cdot, \xi^h(\cdot), w(\cdot))$ и $u(\cdot) = V(\cdot, u^h(\cdot), y_1(\cdot))$. Решение системы (2.1), $z(\cdot) = z^h(\cdot) = \{x^h(\cdot), y^h(\cdot)\}$, таким образом, зависит от результатов $\xi^h(\cdot)$ измерения компоненты $x^h(\cdot)$ (т.е. допустимых измерений точности h) и удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений и начальному условию:

$$\begin{aligned} \dot{x}^h(t) &= Ax^h(t) + By^h(t) + f_1(t), \quad t \in T, \\ \dot{y}^h(t) &= Cx^h(t) + Dy^h(t) + Eu(t) + f(t), \quad x^h(0) = x_0, \quad y^h(0) = y_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$u(t) = u_i = V(\tau_i, u_i^h, y_1(\tau_i)) \quad \text{при } t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h - 1].$$

Для любых допустимых обратных связей $U(\cdot, \cdot, \cdot)$, $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ и любого допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности h решение $z^h(\cdot)$ задачи Коши (2.7) будем называть *траекторией реальной системы*, соответствующей допустимым обратным связям $U(\cdot, \cdot, \cdot)$, $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ и допустимому измерению $\xi^h(\cdot)$.

Управляемым процессом, соответствующим допустимым обратным связям $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$, допустимому управлению $v(\cdot)$ и измерительной точности h ($h \in (0, 1)$), будем называть всякую пятерку $(z_1(\cdot), z^h(\cdot), \xi^h(\cdot), u^h(\cdot), u(\cdot))$, где $z_1(\cdot) = z_1(\cdot; z_{10}, v(\cdot))$ ($z_1 = \{x_1, y_1\}$) — решение эталонной системы (2.2), $\xi^h(\cdot)$ — допустимое измерение точности h компоненты $x^h(\cdot)$, $z^h(\cdot) = z^h(\cdot; z_0, u(\cdot))$ ($z^h = \{x^h, y^h\}$) — траектория реальной системы (2.1), соответствующая

$U(\cdot, \cdot, \cdot)$, $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $\xi^h(\cdot)$ (т.е. решение (2.7)), функции $u^h(\cdot): T \mapsto \mathbb{R}^N$ и $u(\cdot): T \mapsto \mathbb{R}^r$ задаются соотношениями

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, \xi_i^h, w(\tau_i)), \quad u(t) = u_i = V(\tau_i, u_i^h, y_1(\tau_i)), \quad \xi_i^h = \xi^h(\tau_i), \quad (2.8)$$

$$\text{при } t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h - 1].$$

Функции $u^h(\cdot)$ и $u(\cdot)$ будем при этом называть *реализациями* допустимых обратных связей $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$, соответствующими допустимому управлению $v(\cdot)$ и допустимому измерению точности h .

Инструментом решения рассматриваемой задачи являются допустимые обратные связи $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$. Будем называть такие обратные связи *отслеживающими*, если найдутся число $h_0 \in (0, 1)$ и функция $\gamma(\cdot): (0, 1) \mapsto [0, +\infty)$ такие, что $\gamma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и для всякого допустимого управления $v(\cdot)$, всякого $h \in (0, h_0)$, всякого семейства Δ_h (см. (2.5)), всяких реализаций $u^h(\cdot)$ и $u(\cdot)$ допустимых обратных связей $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ вида (2.8), всякой траектории реальной системы (2.1) $z^h(\cdot) = z^h(\cdot; t_0, z_0, u(\cdot))$ (т.е. решения (2.7)), соответствующей управлению $u^h(\cdot)$ вида (2.8) и всякого допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности $h \in (0, 1)$, выполняется неравенство

$$\max_{i \in [0 : m_h]} |z_1(\tau_{h,i}) - z^h(\tau_{h,i})|_{n+N} \leq \gamma(h), \quad (2.9)$$

т.е. неравенство (2.9) выполняется для управляемого процесса $(z_1(\cdot), z^h(\cdot), \xi^h(\cdot), u^h(\cdot), u(\cdot))$. Функцию $\gamma(\cdot)$ будем при этом называть *оценкой точности* допустимых обратных связей $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Рассматриваемая задача об устойчивом отслеживании решения системы (2.1) состоит в построении отслеживающих допустимых обратных связей U и V .

3. Алгоритм решения

Возьмем две функции $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ и $\alpha_1(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$. В дальнейшем нам понадобится следующее

У с л о в и е 1. Пусть семейство разбиений Δ_h , $h \in (0, 1)$, отрезка T и функции $\alpha(h)$, $\alpha_1(h)$ обладают следующими свойствами

$$h\delta^{-1}(h) \leq C_0, \quad \delta(h) = C_{(0)}\alpha^3(h),$$

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha_1(h) \rightarrow 0, \quad \alpha^{1/8}(h)\alpha_1^{-2}(h) \leq C_{00} \quad \text{при } h \rightarrow 0+.$$

Здесь C_0 , $C_{(0)}$ и C_{00} — постоянные, не зависящие от h .

Пусть $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ — фундаментальные матрицы систем уравнений $\dot{x}(t) = Ax(t)$ и $\dot{y}(t) = Dy(t)$ соответственно. Тогда справедливы неравенства

$$|\mathcal{X}(t)| \leq \exp(\omega t), \quad |\mathcal{Y}(t)| \leq \exp(\chi t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

где $\omega = |A|$, $\chi = |D|$. Символ $|\cdot|$ означает евклидову норму матрицы.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (2.5). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , вычисляются элементы u_i^h и u_i по формулам (2.8), в которых

$$\begin{aligned} U(\tau_i, \xi_i^h, w(\tau_i)) &= \alpha^{-1} \exp(-2\omega\tau_{i+1})B'(\xi_i^h - w(\tau_i)), \\ V(\tau_i, u_i^h, y_1(\tau_i)) &= \alpha_1^{-1} \exp(-2\chi\tau_{i+1})E'(y_1(\tau_i) - u_i^h). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь штрих означает транспонирование, $\alpha = \alpha(h)$, $\alpha_1 = \alpha_1(h)$. Затем на вход системы (2.7) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $u(t)$ вида (2.8), а на вход модели (2.6) — управление $u^h(t)$ (см. также (2.8)). Под действием этих управлений решение системы (2.7) переходит из состояния $z^h(\tau_i)$ в состояние $z^h(\tau_{i+1})$, а решение модели — из состояния $w(\tau_i)$ в состояние $w(\tau_{i+1})$.

Покажем, что допустимые обратные связи $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ вида (3.2) являются отслеживающими.

Теорема. Пусть выполнено условие 1. Пусть также $(z_1(\cdot), \xi^h(\cdot), z^h(\cdot), u(\cdot), u^h(\cdot))$, $h \in (0, 1)$, — управляемый процесс, соответствующий допустимым обратным связям $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ вида (3.2), допустимому управлению $v(\cdot)$ и допустимому измерению точности $h - \xi^h(\cdot)$. Пусть $n \geq N$, $\text{rank } B = N$. Тогда обратные связи $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ являются отслеживающими и при всех $t \in T$ имеет место неравенство (2.9), в котором оценка точности указанных обратных связей имеет вид

$$\gamma(h) = d_0 \{ \alpha_1(h) + \alpha^{1/8}(h) \}^{1/2}, \quad (3.3)$$

где d_0 — некоторая постоянная, не зависящая от h , δ , α и α_1 .

Доказательство. Доказательство теоремы состоит из трех этапов. На первом этапе оценивается изменение величины $\lambda_h(\tau_i)$, где $\lambda_h(t) = \exp(-2\omega t) |w(t) - x^h(t)|_n^2$. На втором этапе устанавливаются оценки величин $|y^h(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2([0, \tau_{i+1}]; \mathbb{R}^N)}^2$. На третьем этапе выводится неравенство (3.3). Встречающиеся ниже коэффициенты C_j , c_j , $c^{(j)}$ могут быть выписаны явно, они не зависят от h .

Этап 1. Оценим изменение функционала

$$\varepsilon_h(t) = \lambda_h(t) + \alpha \int_0^t \{ |u^h(\tau)|_N^2 - |y^h(\tau)|_N^2 \} d\tau.$$

В силу формулы Коши при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} x^h(t) &= \mathcal{X}(t - \tau_i) x^h(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t - \tau) \{ B y^h(\tau) + f_1(\tau) \} d\tau, \\ w(t) &= \mathcal{X}(t - \tau_i) w(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t - \tau) \{ B u^h(\tau) + f_1(\tau) \} d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Учитывая равенства (3.4), легко видеть, что при всех $i \in [0 : m - 1]$ верна оценка

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \exp(-2\omega\tau_{i+1}) |w(\tau_i) - x^h(\tau_i)|_n^2 + \lambda_i + \mu_i + \alpha \int_0^{\tau_{i+1}} \{ |u^h(\tau)|_N^2 - |y^h(\tau)|_N^2 \} d\tau, \quad (3.5)$$

где

$$\lambda_i = 2 \left(S_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B \{ u^h(\tau) - y^h(\tau) \} d\tau \right), \quad (3.6)$$

$$\mu_i = \delta \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B (u^h(\tau) - y^h(\tau))|_n^2 d\tau, \quad \delta = \tau_{i+1} - \tau_i, \quad (3.7)$$

$$S_i = \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i) (w(\tau_i) - x^h(\tau_i)). \quad (3.8)$$

Из (3.5) в силу неравенства $\exp(-2\omega\delta) \leq 1$ следует оценка

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + \lambda_i + \mu_i + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_N^2 - |y^h(\tau)|_N^2\} d\tau. \quad (3.9)$$

Рассмотрим величину λ_i (см. (3.6)). Воспользовавшись (3.1), (2.3), (3.8) нетрудно вывести неравенство

$$\begin{aligned} |(S_i, \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bu) - \exp(-2\omega\tau_{i+1})(s_i, Bu)| &\leq C_1 \delta \lambda_h^{1/2}(\tau_i) |Bu|_n \\ &+ C_2 h |Bu|_n \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad s_i = w(\tau_i) - \xi_i^h. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В свою очередь, воспользовавшись (3.6) и (3.10), устанавливаем оценку

$$\lambda_i \leq 2 \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s_i, B\{u^h(\tau) - y^h(\tau)\}) d\tau + \rho_i, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_i &= C_3 \{\delta \lambda_h^{1/2}(\tau_i) + h\} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B\{u^h(\tau) - y^h(\tau)\}|_n d\tau \\ &\leq C_4 \left\{ \delta^2 \lambda_h(\tau_i) + h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |y^h(\tau)|_N^2) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее, имеем (см. (3.7))

$$\mu_i \leq C_5 \delta \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_N^2 + |y^h(\tau)|_N^2\} d\tau. \quad (3.13)$$

Заметим, что вектор u_i^h (см. (2.8), (3.2)) находится из условия

$$u_i^h = \arg \min \{2 \exp(-2\omega\tau_{i+1})(s_i, Bu) + \alpha |u|_N^2 : u \in \mathbb{R}^N\}. \quad (3.14)$$

Следовательно, в силу (3.11), (3.14)

$$\lambda_i + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_N^2 - |y^h(\tau)|_N^2\} d\tau \leq \rho_i. \quad (3.15)$$

Таким образом из (3.9), (3.11), (3.13)–(3.15) выводим

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + C_6 \left\{ \delta \lambda_h(\tau_i) + h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |y^h(\tau)|_N^2) d\tau \right\},$$

т. е.

$$\lambda_h(\tau_{i+1}) \leq (1 + C_6 \delta) \lambda_h(\tau_i) + C_6 \left\{ h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |y^h(\tau)|_N^2) d\tau \right\} + \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau.$$

Из правила определения u_i^h (см. (3.2)) вытекает

$$|u_i^h|_N^2 \leq 2b^2 \exp\{-2\omega(\tau_{i+1} + \delta)\} (\lambda_h(\tau_i) + h^2) \alpha^{-2} \leq C_7 (\lambda_h(\tau_i) + h^2) \alpha^{-2}, \quad (3.16)$$

где b — евклидова норма матрицы B . Кроме того, ввиду (2.4) верно неравенство

$$\lambda_h(0) \leq h^2. \quad (3.17)$$

Учитывая вытекающее из (3.16) неравенство

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq C_7 \delta (\lambda_h(\tau_i) + h^2) \alpha^{-2}, \quad (3.18)$$

устанавливаем (при $\delta(h) \in (0, 1)$, $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \leq C_*$) соотношение

$$\begin{aligned} \lambda_h(\tau_{i+1}) &\leq (1 + C_8 \delta) \lambda_h(\tau_i) + C_9 \left\{ h^2 \delta^2 \alpha^{-2} + h^2 + (\alpha + \delta) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau + \delta^2 \alpha^{-2} \lambda_h(\tau_i) \right\} \\ &\leq (1 + C_{10} \delta) \lambda_h(\tau_i) + C_{11} \left\{ h^2 + (\alpha + \delta) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда аналогично [1] получаем

$$\lambda_h(\tau_{i+1}) \leq C_{12} \left\{ \lambda_h(0) + h^2 \delta^{-1} + (\alpha + \delta) \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right\}. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.17), а также соотношения $h\delta^{-1}(h) \leq C_0$ и $\delta(h)\alpha^{-3}(h) = C_{(0)}$, выводим из (3.19)

$$\lambda_h(\tau_{i+1}) \leq C_{13} \alpha \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right), \quad i \in [0 : m - 1]. \quad (3.20)$$

Э т а п 2. Нетрудно видеть, что верны неравенства

$$\delta \lambda_h^{1/2}(\tau_i) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B\{u^h(\tau) - y^h(\tau)\}|_n d\tau \leq \delta^2 \lambda_h(\tau_i) + 0.5b^2 \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_n^2 + |y^h(\tau)|_n^2\} d\tau, \quad (3.21)$$

$$h \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B\{u^h(\tau) - y^h(\tau)\}|_n d\tau \leq h^2 + 0.5b^2 \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u^h(\tau)|_n^2 + |y^h(\tau)|_n^2\} d\tau. \quad (3.22)$$

Воспользовавшись (3.9), (3.11)–(3.13), (3.15), (3.21), (3.22), будем иметь

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + c_0 \left\{ \delta^2 \lambda_h(\tau_i) + h^2 + \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u^h(\tau)|_N^2 + |y^h(\tau)|_N^2) d\tau \right\}. \quad (3.23)$$

Далее имеем

$$\delta \sum_{j=1}^{i+1} \int_0^{\tau_j} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq c_1 \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau. \quad (3.24)$$

В свою очередь, воспользовавшись (3.18), (3.20), (3.24), а также снова учитывая соотношения $h\delta^{-1} \leq C_0$ и $\delta(h)\alpha^{-3}(h) = C_{(0)}$, получаем

$$\delta \int_0^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq \frac{c_2 \delta^2}{\alpha^2} \left(\delta + \alpha(\delta^{-1} + \sum_{j=0}^{i+1} \int_0^{\tau_j} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau) \right)$$

$$\leq C_7 \delta^2 \alpha^{-2} \left\{ C_{13} \alpha \sum_{j=0}^i \left(1 + \int_0^{\tau_{j+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) + \vartheta \delta^{-1} h^2 \right\} \leq c_3 \delta \alpha^{-1} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right). \quad (3.25)$$

Просуммировав (3.23) по i от 0 до j , будем иметь в силу (3.17), (3.20), (3.25), а также неравенства $h\delta^{-1}(h) \leq C_0$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_{i+1}) &\leq c_4 h^2 + c_5 \left\{ \delta \alpha \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) + h^2 \delta^{-1} \right. \\ &\left. + \delta \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau + \delta \alpha^{-1} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) \right\} \leq c_6 \delta \alpha^{-1} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

В таком случае из (3.26) выводим

$$\int_0^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq k_1(h) \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau + k_2(h), \quad i \in [0 : m-1], \quad (3.27)$$

где

$$k_1(h) = 1 + c_7 \delta^{1/3}(h), \quad k_2(h) = c_8 \delta^{1/3}(h). \quad (3.28)$$

Анализ приведенного выше доказательства неравенств (3.23) и (3.26) позволяет сделать вывод, что эти неравенства останутся справедливыми, если в них заменить τ_{i+1} числом t , причем в случае неравенства (3.23) последнее должно принадлежать отрезку $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. В таком случае из (3.26) вытекает неравенство

$$\lambda_h(t) \leq c_9 \alpha \left(1 + \int_0^t |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right), \quad t \in T.$$

В свою очередь отсюда получаем

$$|z(t)|_n \leq c_{10} \alpha^{1/2} \left(1 + \int_0^t |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad t \in T,$$

где $z(t) = w(t) - x^h(t)$. Пусть символ \tilde{B} означает $(N \times N)$ -мерную матрицу, составленную из N столбцов матрицы B , ранг которой равен N . Заметим, что для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$, в силу последнего неравенства верна оценка (см. (2.6), (2.7))

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} \tilde{B}(y^h(t) - u^h(t)) dt \right|_N &\leq c_{11} \left\{ |z(t_2) - z(t_1)|_n + \int_{t_1}^{t_2} |z(\tau)|_n d\tau \right\} \\ &\leq c_{12} \alpha^{1/2} \left(1 + \int_0^{t_2} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Кроме того, при п. в. $t \in T$

$$|\dot{y}^h(t)|_N \leq c_{13} \left(1 + |u(t)|_r + |y^h(t)|_N + \int_0^t |y^h(\tau)|_N d\tau \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_i} |\dot{y}^h(\tau)|_n d\tau &\leq c_{14} \left(1 + \int_0^{\tau_i} \{|u(\tau)|_r + |y^h(\tau)|_N\} d\tau \right) \\ &\leq c_{15} \left\{ 1 + \left(\int_0^{\tau_i} |u(\tau)|_r^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\int_0^{\tau_i} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Далее, после интегрирования по частям имеем

$$I_{i,h} = \left((\tilde{B}^{-1})' y^h(\tau_i), \int_0^{\tau_i} \tilde{B}(y^h(\tau) - u^h(\tau)) d\tau \right) - \int_0^{\tau_i} \left((\tilde{B}^{-1})' y^h(\tau), \int_0^{\tau} \tilde{B}(y^h(p) - u^h(p)) dp \right) d\tau,$$

где

$$I_{i,h} = \int_0^{\tau_i} \left((\tilde{B}^{-1})' y^h(\tau), \tilde{B}(y^h(\tau) - u^h(\tau)) \right)_N d\tau.$$

Отсюда, учитывая (3.29), (3.30), получаем

$$I_{h,i} \leq c_{17} \alpha^{1/2} \left(1 + \int_0^{\tau_i} \{|y^h(\tau)|_N^2 + |u(\tau)|_r^2\} d\tau \right).$$

Воспользовавшись последним неравенством, а также (3.27) и (3.28), получаем

$$\begin{aligned} &|y^h(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2([0, \tau_i]; \mathbb{R}^N)}^2 \\ &\leq 2|y^h(\cdot)|_{L_2([0, \tau_i]; \mathbb{R}^N)}^2 - 2 \int_0^{\tau_i} (y^h(\tau), u^h(\tau)) d\tau + k_2(h) + (k_1(h) - 1) \int_0^{\tau_i} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \\ &= 2I_{i,h} + k_2(h) + (k_1(h) - 1) \int_0^{\tau_i} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \\ &\leq c_{18} \left\{ \alpha^{1/2} + k_2(h) + (k_1(h) + \alpha^{1/2} - 1) \int_0^{\tau_i} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau + \alpha^{1/2} \int_0^{\tau_i} |u(\tau)|_r^2 d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.28) следует неравенство

$$|y^h(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2([0, \tau_i]; \mathbb{R}^N)}^2 \leq K_i(\alpha, h), \quad (3.31)$$

где $K_i(\alpha, h) = c_{19} \alpha^{1/2} \left(1 + \int_0^{\tau_i} \{|y^h(\tau)|_N^2 + |u(\tau)|_r^2\} d\tau \right)$, $\alpha = \alpha(h)$.

Э т а п 3. Оценим изменение величины

$$\varepsilon(t) = \lambda(t) + \alpha_1 \int_0^t \{|u(\tau)|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\} d\tau,$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_1(h), \quad \lambda(t) = \exp(-2\omega t) |x^h(t) - x_1(t)|_n^2 + \exp(-2\chi t) |y^h(t) - y_1(t)|_N^2.$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + \lambda_{1i} + \mu_{1i} + \lambda_{2i} + \mu_{2i} + \alpha_1 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u(\tau)|_r^2 - |v(\tau)|_r^2\} d\tau, \quad (3.32)$$

где

$$\lambda_{1i} = 2 \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \left(\mathcal{X}(\delta)(x^h(\tau_i) - x_1(\tau_i)), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B \{y^h(\tau) - y_1(\tau)\} d\tau \right),$$

$$\mu_{1i} = \delta \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B (y^h(\tau) - y_1(\tau))|_n^2 d\tau,$$

$$\lambda_{2i} = 2 \exp(-2\chi\tau_{i+1}) \left(\mathcal{Y}(\delta)(y^h(\tau_i) - y_1(\tau_i)), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{Y}(\tau_{i+1} - \tau) \{C(x^h(\tau) - x_1(\tau)) + E(u(\tau) - v(\tau))\} d\tau \right),$$

$$\mu_{2i} = \delta \exp(-2\chi\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\mathcal{Y}(\tau_{i+1} - \tau) \{C(x^h(\tau) - x_1(\tau)) + E(u(\tau) - v(\tau))\}|_N^2 d\tau.$$

Далее имеем

$$\lambda_{1i} \leq c^{(1)} |x^h(\tau_i) - x_1(\tau_i)|_n \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau) - y_1(\tau)|_N d\tau, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2i} &\leq 2 \exp(-2\chi\tau_{i+1}) \left(|u_i^h - y_1(\tau_i)|, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} E \{u_i - v(\tau)\} d\tau \right) + c^{(2)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h - y^h(\tau_i)|_N |u_i - v(\tau)|_r d\tau \\ &+ c^{(3)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau_i) - y_1(\tau_i)|_N |x^h(\tau) - x_1(\tau)|_n d\tau + c^{(4)} \delta |y^h(\tau_i) - y_1(\tau_i)|_N \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u(\tau) - v(\tau)|_r d\tau, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\mu_{1i} \leq \delta c^{(5)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau) - y_1(\tau)|_N^2 d\tau, \quad (3.35)$$

$$\mu_{2i} \leq \delta c^{(6)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|x^h(\tau) - x_1(\tau)|_n^2 + |u_i|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau. \quad (3.36)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h - y^h(\tau_i)|_N |u_i - v(\tau)|_r d\tau \\ &\leq |u_i^h - y^h(\tau_i)|_N \delta^{1/2} \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i - v(\tau)|_r^2 d\tau \right)^{1/2} \leq 0.5 \delta^{7/8} |u_i^h - y^h(\tau_i)|_N^2 + \delta^{1/8} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u_i|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau. \end{aligned}$$

При $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верно неравенство

$$|y^h(t) - y^h(\tau_i)|_N \leq c^{(7)} \delta \left(1 + |y^h(\tau_i)|_N + \int_{\tau_i}^t \{|u_i|_r + |y^h(\tau)|_N\} d\tau \right).$$

Поэтому, учитывая это неравенство, а также (3.30), имеем

$$\begin{aligned} \delta^{7/8} |u_i^h - y^h(\tau_i)|_N^2 &\leq 2\delta^{-1/8} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau) - y^h(\tau)|_N^2 d\tau + 2\delta^{-1/8} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau) - y^h(\tau_i)|_N^2 d\tau \\ &\leq 2\delta^{-1/8} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau) - y^h(\tau)|_N^2 d\tau + \delta^{23/8} c^{(8)} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} \{|u(\tau)|_r^2 + |y^h(\tau)|_N^2\} d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Из (3.32), учитывая правило определения u_i (см. (2.8), (3.2)), а также (3.33)–(3.36), выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_{i+1}) &\leq \varepsilon(\tau_i) + c^{(9)} \delta \lambda(\tau_i) + \delta^{1/8} c^{(10)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u_i|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau \\ &+ c^{(11)} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|x^h(\tau) - x_1(\tau)|_n^2 + |y^h(\tau) - y_1(\tau)|_N^2\} d\tau + c^{(12)} \delta^{-1/8} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau) - y^h(\tau)|_N^2 d\tau \\ &+ c^{(13)} \delta^{23/8} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} \{|u(\tau)|_r^2 + |y^h(\tau)|_N^2\} d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Заметим, что при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо неравенство

$$|x^h(t) - x_1(t)|_n^2 + |y^h(t) - y_1(t)|_N^2 \leq c^{(14)} \left\{ \lambda(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|u(\tau)|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau \right\}.$$

Из (3.38), учитывая последнее неравенство, выводим

$$\begin{aligned} \lambda(\tau_{i+1}) &\leq (1 + c^{(15)} \delta) \lambda(\tau_i) + \alpha_1 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2 d\tau + c^{(16)} \delta^{1/8} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|v(\tau)|_r^2 + |u(\tau)|_r^2\} d\tau \\ &+ c^{(12)} \delta^{-1/8} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau) - y^h(\tau)|_N^2 d\tau + c^{(13)} \delta^{23/8} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} \{|u(\tau)|_r^2 + |y^h(\tau)|_N^2\} d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Аналогично (3.19) из (3.39) получаем

$$\begin{aligned} \lambda(\tau_{i+1}) &\leq \lambda(0) + c^{(17)} \left\{ \delta^{-1/8} K_i(h, \alpha) + \alpha_c 1 \int_0^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_r^2 d\tau + \delta^{1/8} \int_0^{\tau_{i+1}} \{|u(\tau)|_r^2 + |v(\tau)|_r^2\} d\tau \right. \\ &\left. + \delta^{15/8} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) \right\}. \end{aligned}$$

В таком случае, учитывая (3.17), а также включение $v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$, из последнего неравенства выводим

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leq c^{(18)} \left\{ h^2 + \delta^{1/8} + \delta^{-1/8} K_i(h, \alpha) + \alpha_1 + \delta^{9/8} \sum_{j=0}^i |u_j|_r^2 + \delta^{15/8} \int_0^{\tau_i} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right\}. \quad (3.40)$$

В свою очередь, в силу (2.8), (3.2) имеем

$$|u_i|_r^2 \leq \alpha_1^{-2} c^{(19)} \{ |u_i^h - y^h(\tau_i)|_N^2 + |y^h(\tau_i) - y_1(\tau_i)|_N^2 \} \leq \alpha_1^{-2} c^{(20)} \{ \lambda(\tau_i) + |u_i^h - y^h(\tau_i)|_N^2 \}.$$

Воспользовавшись (3.31) и (3.37), устанавливаем

$$\delta \sum_{j=0}^i |u_j^h - y^h(\tau_j)|_N^2 \leq c^{(21)} (\delta^2 + \alpha^{1/2}) \left(1 + \delta \sum_{j=0}^i |u_j|_r^2 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right).$$

Кроме того, $\delta^2(h) \leq c^{(22)} \alpha^{1/2}(h)$. Следовательно (см. два последних неравенства),

$$\delta \sum_{j=0}^i |u_j|_r^2 \leq c^{(23)} \left(\delta \alpha_1^{-2} \sum_{j=0}^i \lambda(\tau_j) + \alpha_1^{-2} \alpha^{1/2} \left(1 + \delta \sum_{j=0}^i |u_j|_r^2 + \int_0^{\tau_i} |u^h(\tau) - y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) \right).$$

Таким образом,

$$\delta (1 - c^{(23)} \alpha_1^{-2} \alpha^{1/2}) \sum_{j=0}^i |u_j|_r^2 \leq c^{(23)} \left(\delta \alpha_1^{-2} \sum_{j=0}^i \lambda(\tau_j) + \alpha_1^{-2} \alpha^{1/2} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) \right).$$

Поэтому, учитывая условие $\alpha^{1/2}(h) \alpha_1^{-2}(h) \leq c^{(24)}$ при $h \in (0, 1)$, заключаем: найдется число $h_* \in (0, 1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_*)$ справедлива оценка

$$\delta \sum_{j=0}^i |u_j|_r^2 \leq c^{(25)} \left(\delta \alpha_1^{-2} \sum_{j=0}^i \lambda(\tau_j) + \alpha_1^{-2} \alpha^{1/2} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) \right). \quad (3.41)$$

В силу условия 1 справедливы неравенства

$$\alpha^{1/2}(h) \delta^{-1/8}(h) \leq c^{(26)} \alpha^{1/8}(h), \quad \delta^{1/8}(h) \leq c^{(27)} \alpha^{1/8}(h).$$

В таком случае ввиду (3.31), (3.41) получаем

$$\delta^{-1/8} K_i(h, \alpha) + \delta^{1/8} \sum_{j=0}^i |u_j|_r^2 \leq c^{(27)} \alpha^{1/8} \left(\delta \alpha_1^{-2} \sum_{j=0}^i \lambda(\tau_j) + 1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right). \quad (3.42)$$

Из (3.40), воспользовавшись (3.42), выводим

$$\lambda(\tau_{i+1}) \leq c^{(28)} \left\{ \alpha_1 + \delta \alpha^{1/8} \alpha_1^{-2} \sum_{j=0}^i \lambda(\tau_j) + \alpha^{1/8} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) \right\}.$$

Отсюда в силу дискретного неравенства Гронуолла [10, с. 311] получаем

$$\begin{aligned} \lambda(\tau_{i+1}) &\leq c^{(29)} \left\{ \alpha_1 + \alpha^{1/8} \left(1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right) \right\} \exp(c^{(28)}(\vartheta - t_0) \alpha^{1/8} \alpha_1^{-2}) \\ &\leq c^{(29)} \left\{ \alpha_1 + \alpha^{1/8} + \alpha^{1/8} \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Значит

$$|y^h(\tau_i) - y_1(\tau_i)|_N^2 \leq c^{(30)} \left\{ \alpha_1 + \alpha^{1/8} + \alpha^{1/8} \int_0^{\vartheta} |y^h(\tau) - y_1(\tau)|_N^2 d\tau \right\}.$$

Воспользовавшись (3.41) и (3.43), можно проверить справедливость при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ оценки

$$|y^h(t) - y^h(\tau_i)|_N^2 \leq c^{(31)} \alpha^{1/8} \left(1 + \alpha^{1/8} + \alpha_1 + \int_0^{\tau_{i+1}} |y^h(\tau)|_N^2 d\tau \right).$$

Кроме того, имеем

$$|y_1(t) - y_1(\tau_i)|_N^2 \leq c^{(32)} \delta \leq c^{(33)} \alpha^{1/8}.$$

Следовательно, при всех $t \in T$ имеет место неравенство

$$|y^h(t) - y_1(t)|_N^2 \leq c^{(34)} \left\{ \alpha_1 + \alpha^{1/8} + \alpha^{1/8} \int_0^{\vartheta} |y^h(\tau) - y_1(\tau)|_N^2 d\tau \right\}.$$

В силу последнего неравенства существует число $h_0 \in (0, h_*)$ такое, что множество $\{y^h(\cdot)\}_{h \in (0, h_0)}$ равномерно ограничено в среднем квадратичном. В таком случае из (3.43) (см. условие 1) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры М.: Физматлит, 1974. 458 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Куржанский А.Б., Точилин П.А.** Задача слежения в пределах интервала времени по данным финитных наблюдателей // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 656–666.
4. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с.
5. **Максимов В.И., Пандолфи Л.** О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, Вып. 3. С. 385–390.
6. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
7. **Каппель Ф., Кряжимский Н.Н., Максимов В.И.** Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой реакции-диффузии // Докл. АН. 2000. Т. 370, № 5. С. 599–601.
8. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002.
9. **Близорукова М. С., Максимов В. И.** О одном алгоритме отслеживания движения эталонной системы с последствием при измерении части координат // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 3. С. 415–426.
10. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.

Максимов Вячеслав Иванович

Поступила 25.04.2014

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

УДК 519.6

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ,
СВЯЗАННОЙ С УПРАВЛЯЕМОЙ МОДЕЛЬЮ СОЛОУ¹****М. С. Никольский**

В статье изучается модель оптимального экономического роста Солоу. В постановке рассматриваемой задачи оптимального управления присутствуют смешанные ограничения на управление. С помощью специальной замены управления задача сведена к изучению нового управляемого объекта с обычным геометрическим ограничением. В работе получено описание множества достижимости для исходной управляемой системы, доказана теорема существования оптимального управления и получены достаточные условия для отсутствия особых режимов.

Ключевые слова: модель Солоу, оптимальное управление, смешанные ограничения на управление, принцип максимума Понтрягина.

M. S. Nikol'skii. Study of an optimal control problem related to the Solow control model.

We study the Solow model of optimal economic growth. The statement of the optimal control problem under consideration contains mixed constraints on the control. A special change of the control is used to reduce the problem to the study of a new controlled object with a usual geometric constraint. The reachable set of the original control system is found, an existence theorem for the optimal control is proved and sufficient conditions for absence of singular regimes are obtained.

Keywords: Solow model, optimal control, mixed constraints on control, Pontryagin's maximum principle.

В литературе по математической экономике уделяется большое внимание изучению модели оптимального экономического роста Солоу (см., например, пункты 16.1, 16.2 в монографии М. Интрилигатора [1] и пункты 4.1., 4.3 в монографии В. А. Колемаева [2]). Отметим, что у различных авторов в постановке оптимизационных задач по модели Солоу различие состоит, в частности, в выборе максимизируемого функционала и виде ограничений на управление. Данная работа продолжает исследования Н. Л. Григоренко и его соавторов. Изложение ведется на традиционном языке математической теории оптимального управления с небольшими пояснениями из математической экономики. В постановке рассматриваемой оптимизационной задачи присутствуют смешанные ограничения на управление. В литературе известны различные варианты принципа максимума Понтрягина для случая смешанных ограничений на управление, но все они весьма сложны для конкретных приложений. Здесь посредством специальной замены управления мы приходим к изучению нового управляемого объекта, для которого управление стеснено обычным геометрическим ограничением. С помощью новой оптимизационной задачи получено простое описание множества достижимости исходного управляемого объекта, доказана теорема существования оптимального управления и получены конструктивные достаточные условия, обеспечивающие отсутствие особых режимов для эквивалентной оптимизационной задачи.

В статье продолжают исследования работ [2, § 4.3; 3] по управляемой модели Солоу экономического роста со смешанными ограничениями на управление. Изложение ведется в стандартных обозначениях теории оптимального управления (см., например, [4; 5]), в отличие от [2; 3], и при более слабых предположениях относительно функций $f(x)$, $F(u)$, определяющих оптимизационную задачу, чем в [2; 3].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00175-а, 12-01-00506, 13-01-00685, 13-01-12446 офи-м2, научный проект 14-00-90408 Укр-а и НАН Украины 03-01-14).

Рассматривается одномерный управляемый объект вида

$$\dot{x} = f(x) - u - \mu x, \quad (1)$$

где x, u — скалярные величины, константа $\mu > 0$. Скалярная функция $f(x)$ предполагается определенной и непрерывной при $x \geq 0$, причем $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x > 0$. Отметим, что дифференцируемость функции $f(x)$ при $x = 0$ не предполагается. Это делается для того, чтобы учесть характерное для математической экономики поведение функции $f(x)$ в точке $x = 0$ (в [2; 3] требуется, чтобы $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$).

Предположим еще, что функция $f(x)$ при $x \geq 0$ удовлетворяет условию подлинейного роста вида $f(x) \leq c_1(1+x)$, где c_1 — положительная константа. При $x < 0$ доопределим функцию $f(x)$ нулем. Отметим, что теперь при всех $x \in \mathbb{R}^1$ выполняются неравенства

$$0 \leq f(x) \leq c_1(1 + |x|). \quad (2)$$

Далее фиксируются начальное условие

$$x(0) = x_0 > 0 \quad (3)$$

и конечное (терминальное) условие

$$x(T) = x_1 > 0, \quad (4)$$

где $T > 0$ — заданное число. Обозначим $\Delta = [0, T]$. Из известной теоремы Каратеодори (см., например, [6]) при сделанных предположениях относительно функции $f(x)$ вытекает, что для произвольного ограниченного по модулю измеримого управления $u(t)$, $t \in \Delta$, при достаточно малых $t \geq 0$ определено абсолютно непрерывное решение $x(t, u(\cdot))$ задачи Коши (1), (3) (возможно, неединственное из-за особенности поведения функции $f(x)$ при $x = 0$). Используя неравенство (2), можно обосновать продолжимость решения $x(t, u(\cdot))$ на весь отрезок Δ . Заметим, что если $x(t, u(\cdot)) > 0$ при $t \in \Delta$, то это решение единственно на Δ (см., например, [5, с. 66, 67, теорема IA]).

В дальнейшем мы будем накладывать на измеримое управление $u(t)$, $t \in \Delta$, смешанные ограничения вида

$$\alpha f(x(t, u(\cdot))) \leq u(t) \leq \beta f(x(t, u(\cdot))), \quad (5)$$

где положительные константы α, β удовлетворяют условиям

$$0 < \alpha < \beta \leq 1. \quad (6)$$

Такого рода ограничения представляют интерес для экономических приложений (см. [2; 3]).

Обсудим вопрос о непустоте множества U ограниченных измеримых функций $u(t)$, $t \in \Delta$, удовлетворяющих неравенствам (5), (6) при $t \in \Delta$. Для этого рассмотрим новый управляемый процесс (ср. с (1)) вида

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (1 - v)f(y) - \mu y, \\ y(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где скалярное управление v стеснено ограничением (ср. с (5), (6))

$$v \in [\alpha, \beta]. \quad (8)$$

Отметим, что при $y \in \mathbb{R}^1$ и $v \in [\alpha, \beta]$ выполняется неравенство $(1 - v)f(y) \geq 0$. Рассмотрим далее произвольное измеримое управление $v(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, и соответствующее ему решение задачи Коши (7) $y(t, v(\cdot))$, $t \in \Delta$. Вопрос о существовании решения $y(t, v(\cdot))$ и его продолжимости решается в положительном смысле с помощью теоремы Каратеодори (см. [6, с. 54, теорема 1.1]) и неравенств (2). Изучим корни функции $y(t, v(\cdot))$ при $t \in \Delta$. Пусть существует

у этой функции хотя бы один корень на $(0, T]$. Обозначим через τ наименьший из таких корней. Очевидно, что $\tau \in (0, T]$ и что функция $y(t, v(\cdot)) > 0$ при $t \in [0, \tau)$. Используя известную теорему о сравнении решений дифференциальных уравнений (см. [7, теорема 1.1.2]), теперь можно с помощью уравнения сравнения $\dot{y} = -\mu y$ обосновать неравенство

$$y(t, v(\cdot)) \geq e^{-\mu t} x_0 \quad (9)$$

при $t \in [0, \tau)$. Переходим к пределу по $t \rightarrow \tau - 0$, получаем, что $y(\tau, v(\cdot)) \geq e^{-\mu \tau} x_0$. Таким образом, мы пришли к противоречию с предположением о наличии корня у функции $y(t, v(\cdot))$ на $(0, T]$ и попутно получаем, что имеет место неравенство (9) при всех $t \in \Delta$. Итак, при $t \in \Delta$ $y(t, v(\cdot)) > 0$, и поэтому из-за гладкости функции $f(y)$ при $y > 0$ решение $y(t, v(\cdot))$ обладает свойством единственности при $t \in \Delta$ (см. [5, с. 66, 67, теорема IA]).

З а м е ч а н и е. В рассматриваемом случае (см. (7)) функция $v = v(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, является лишь измеримой. Поэтому ссылка здесь и далее в подобных случаях на теорему сравнения 1.1.2 из [7] требует пояснения. Дело в том, что эту теорему с небольшими изменениями можно доказать (используя интеграл Лебега) и в случае измеримой функции $v = v(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, в уравнении (7). Условимся в дальнейшем теорему 1.1.2 из [7] коротко обозначать ТС.

Фиксируем произвольное измеримое управление $\hat{v}(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$. Обозначим при $t \in \Delta$

$$\hat{u}(t) = \hat{v}(t)f(y(t, \hat{v}(\cdot))). \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что $\hat{u}(t)$ — измеримая на Δ функция, ограниченная по модулю, и что функция $y(t, \hat{v}(\cdot))$ при $t \in \Delta$ удовлетворяет уравнению (1) с $u(t) = \hat{u}(t)$, $t \in \Delta$. Так как $y(t, \hat{v}(\cdot)) > 0$ при $t \in \Delta$, то применяя теорему о единственности решения задачи Коши, получаем, что при $t \in \Delta$

$$x(t, \hat{u}(\cdot)) \equiv y(t, \hat{v}(\cdot)).$$

Отсюда и из формулы (10) вытекает, что управление $\hat{u}(t)$ при $t \in \Delta$ удовлетворяет неравенствам (5). Таким образом, вопрос о непустоте класса функций U решается положительно.

Теперь рассмотрим произвольное ограниченное измеримое управление $\tilde{u}(\cdot) \in U$ и соответствующее решение $x(t, \tilde{u}(\cdot))$ задачи Коши (1), (3). Отметим, что $\tilde{u}(t) \geq 0$ при $t \in \Delta$. Допустим, что $x(t_1, \tilde{u}(\cdot)) = 0$ при некотором $t_1 \in (0, T]$. Тогда найдется наименьшее $\tau \in (0, T]$ среди таких моментов t_1 . Очевидно, при $t \in [0, \tau)$ $x(t, \tilde{u}(\cdot)) > 0$. С помощью ТС и уравнения сравнения $\dot{x} = -\mu x$ приходим при $t \in [0, \tau)$ к неравенству

$$x(t, \tilde{u}(\cdot)) \geq e^{-\mu t} x_0. \quad (11)$$

Переходом к пределу при $t \rightarrow \tau - 0$ отсюда получаем неравенство

$$x(\tau, \tilde{u}(\cdot)) \geq e^{-\mu \tau} x_0.$$

Таким образом, предположив, что у функции $x(t, \tilde{u}(\cdot))$ есть корень на $(0, T]$, мы пришли к противоречию с этим предположением, т. е. при $t \in \Delta$ $x(t, \tilde{u}(\cdot)) > 0$. Более того, применяя ТС, можно обосновать, что неравенство (11) выполняется при всех $t \in \Delta$. Обозначим теперь при $t \in \Delta$

$$\tilde{v}(t) = \tilde{u}(t)/f(x(t, \tilde{u}(\cdot))).$$

С помощью неравенства (11), где $t \in \Delta$, обосновывается ограниченность и измеримость функции $\tilde{v}(t)$ на Δ . Нетрудно видеть (см. (5)), что при $t \in \Delta$ выполняется включение $\tilde{v}(t) \in [\alpha, \beta]$. Из сказанного получаем, что функция $x(t, \tilde{u}(\cdot))$ удовлетворяет при $t \in \Delta$ уравнению

$$\dot{y} = (1 - \tilde{v}(t))f(y) - \mu y$$

с начальным условием $y(0) = x_0$. Отсюда с помощью теоремы о единственности решения задачи Коши выводим, что при $t \in \Delta$

$$x(t, \tilde{u}(\cdot)) \equiv y(t, \tilde{v}(\cdot)),$$

где $y(t, \tilde{v}(\cdot))$ — решение задачи Коши (7) при $v(t) = \tilde{v}(t)$ на Δ . Таким образом, управляемый процесс (1), (3) при смешанных ограничениях (5), (6) тесно связан с управляемым процессом (7), (8).

Теперь мы займемся вопросом о достижимости терминального состояния $x_1 > 0$ (см. (4)) в момент времени T из начального состояния $x_0 > 0$ (см. (3)) по траектории управляемого объекта (1) с помощью ограниченного измеримого управления $u(t)$, $t \in \Delta$, удовлетворяющего смешанным ограничениям (5), (6). Для этого желательно описать множество достижимости $D_1(x_0, T)$ управляемого объекта (1) с учетом смешанных ограничений (5), (6) на измеримые управления $u(t)$, $t \in \Delta$. Из предшествующих наших рассуждений следует, что это множество совпадает с множеством достижимости управляемого объекта (7) $D_2(x_0, T)$, где на измеримые управления $v(t)$ при $t \in \Delta$ накладывается ограничение (8). Множеству достижимости $D_2(x_0, T)$ принадлежит множество достижимости $D_3(x_0, T)$ управляемого объекта (7) при постоянных управлениях $v(t) \equiv w$, $t \in \Delta$, где $w \in [\alpha, \beta]$. Из вышесказанного вытекает, что $y(t, w) > 0 \forall w \in [\alpha, \beta]$ при $t \in \Delta$. Используя ТС, нетрудно обосновать неравенство $y(T, w_1) \leq y(T, w_2)$, где $w_1, w_2 \in [\alpha, \beta]$ и $w_1 \geq w_2$. Из сказанного следует, что

$$D_3(x_0, T) \subset [y(T, \beta), y(T, \alpha)].$$

Используя непрерывность функции $y(T, w)$ по $w \in [\alpha, \beta]$, из этого включения получаем равенство

$$D_3(x_0, T) = [y(T, \beta), y(T, \alpha)]. \quad (12)$$

Опять применяя ТС, можно обосновать равенство $D_2(x_0, T) = D_3(x_0, T)$. Таким образом,

$$D_1(x_0, T) = [y(T, \beta), y(T, \alpha)] \quad (13)$$

и точка x_1 достижима за время T , если и только если $x_1 \in [y(T, \beta), y(T, \alpha)]$.

Теперь перейдем к постановке оптимизационной задачи для управляемого объекта (1), (3), (4) на множестве ограниченных по модулю измеримых функций $u(t)$, $t \in \Delta$, удовлетворяющих смешанным ограничениям (5), (6). В качестве максимизируемого функционала рассмотрим интегральный функционал

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\delta s} F(u(s)) ds, \quad (14)$$

где константа $\delta > 0$, функция $F(u)$ положительна, вогнута и непрерывно дифференцируема при $u > 0$.

Оптимизационную задачу, описываемую соотношениями (1), (3)–(6), (14), будем называть *задачей А*. Для ее исследования полезно перейти к другой задаче оптимального управления, описываемой соотношениями (7), (8) и с максимизируемым интегральным функционалом (ср. с (14))

$$J_1(v(\cdot)) = \int_0^T e^{-\delta s} G(y(s), v(s)) ds, \quad (15)$$

где

$$G(y, v) = F(vf(y)), \quad (16)$$

$y \in \mathbb{R}^1$, $v \in [\alpha, \beta]$, а $v(s) \in [\alpha, \beta]$, $s \in \Delta$, — произвольная измеримая функция. Эту новую оптимизационную задачу назовем *задачей В*. Из вышесказанного вытекает, что задачи А, В эквивалентны в следующем смысле: 1) значения максимумов функционалов в обеих задачах совпадают; 2) если $\tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$, — оптимальное управление в задаче А, то управление

$$\tilde{v}(t) = \tilde{u}(t)/f(x(t, \tilde{u}(\cdot))), \quad t \in \Delta,$$

оптимально в задаче В; 3) если $\tilde{v}(t)$, $t \in \Delta$, — оптимальное управление в задаче В, то управление

$$\tilde{u}(t) = \tilde{v}(t)f(y(t, \tilde{v}(\cdot))), \quad t \in \Delta,$$

оптимально в задаче А.

Переходим к анализу задачи В. Следующая теорема дает достаточные условия для существования оптимального управления в задаче В.

Теорема 1. Пусть для терминальной точки $x_1 > 0$ выполняется условие (ср. с (13))

$$x_1 \in [y(T, \beta), y(T, \alpha)]. \quad (17)$$

Тогда для оптимизационной задачи В существует оптимальное управление.

Доказательство. Из (12), (13), (17) вытекает, что существует такое измеримое управление $\tilde{v}(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, для которого $y(T, \tilde{v}(\cdot)) = x_1$. Заметим, что при произвольных измеримых управлениях $v(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, выполняется на Δ неравенство (9), т. е. $y(t, v(\cdot)) \geq e^{-\mu T} x_0 > 0$. Так как $v(t) \in [\alpha, \beta]$ и $\alpha > 0$, то

$$v(t)y(t, v(\cdot)) \geq \alpha e^{-\mu T} x_0 > 0$$

при $t \in \Delta$. Напомним, что функция $F(u)$ в (14) непрерывно дифференцируема и вогнута при $u > 0$. Отсюда вытекает, что функция $G(y, v) = F(vf(y))$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных (y, v) , где $y > 0$, $v \in [\alpha, \beta]$, и вогнутой по $v \in [\alpha, \beta]$ при любом $y > 0$. Рассмотрим максимизирующую в задаче В последовательность измеримых функций $v_k(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, $k = 1, 2, \dots$, для которых выполняются краевые условия

$$y(0, v_k(\cdot)) = x_0, \quad y(T, v_k(\cdot)) = x_1.$$

При сделанных нами предположениях относительно функции $f(y)$ (см., в частности, неравенство (2)) с помощью результатов из [8] вытекает, что, переходя к подпоследовательности и производя соответствующую перенумерацию, можно считать, что последовательность функций $y(t, v_k(\cdot))$ сходится в метрике пространства непрерывных функций $C[0, T]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $y_*(t)$, которая является решением задачи Коши (7) при некоторой измеримой функции $\hat{v}(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, и для которой выполняется терминальное условие $y_*(T) = x_1$. Из последовательности измеримых функций $v_k(\cdot)$ можно выделить подпоследовательность $v_{k_j}(\cdot)$, которая слабо сходится к некоторой измеримой функции $v_*(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$. По поводу обоснования этого факта см. в [5, с. 65, 169–173]. Производя, если надо, перенумерацию, можно считать, что последовательность $v_k(\cdot)$ сходится слабо к измеримой функции $v_*(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$. Переходя от задачи Коши (7) к интегральному уравнению при $v(t) = v_k(t)$, $t \in \Delta$, получим при $t \in \Delta$ равенство

$$y_k(t) = x_0 + \int_0^t [(1 - v_k(s))f(y_k(s)) - \mu y_k(s)] ds, \quad (18)$$

где $y_k(t) = y(t, v_k(\cdot))$, $k = 1, 2, \dots$. Нетрудно показать, что последовательность измеримых и равномерно ограниченных функций $v_k(t)f(y_k(t))$ слабо сходится к измеримой функции $v_*(t)f(y_*(t))$ на Δ . Переходя к пределу в (18) по $k \rightarrow \infty$ при фиксированном $t \in \Delta$, получаем для абсолютно непрерывной функции $y_*(t)$ при $t \in \Delta$ равенство

$$y_*(t) = x_0 + \int_0^t [(1 - v_*(s))f(y_*(s)) - \mu y_*(s)] ds.$$

Отсюда следует, что $y_*(t)$ является решением задачи Коши (7) при $v(t) = v_*(t)$, $t \in \Delta$. Покажем теперь, что на управлении $v_*(\cdot)$ достигается максимум функционала (15), (16). Для этого мы используем известное неравенство для вогнутых функций:

$$F(\eta) - F(\rho) \leq F'(\rho)(\eta - \rho), \quad (19)$$

где $\eta > 0$, $\rho > 0$ (отметим, что функция $(-1)F(\xi)$ при $\xi > 0$ — выпуклая и непрерывно дифференцируемая функция, а соответствующее неравенство для выпуклых функций хорошо известно (см., например, [9])). Из формул (15), (16), (19) при $k = 1, 2, \dots$ получаем неравенство

$$J_1(v_k(\cdot)) \leq J_1(v_*(\cdot)) + \int_0^T e^{-\delta s} F'(v_*(s)f(y_*(s))) (v_k(s)f(y_k(s)) - v_*(s)f(y_*(s))) ds. \quad (20)$$

Здесь используется неравенство $v_*(s)f(y_*(s)) > 0$ при $s \in \Delta$. По определению максимизирующей последовательности последовательность $J_1(v_k(\cdot))$ при $k \rightarrow \infty$ стремится к искомому супремуму γ функционала (15). Последовательность ограниченных измеримых функций $v_k(s)f(y_k(s))$ сходится слабо при $k \rightarrow \infty$ к функции $v_*(s)f(y_*(s))$ на Δ . Из сказанного с помощью неравенств (20) получаем, что $\gamma \leq J_1(v_*(\cdot))$ и, следовательно, $\gamma = J_1(v_*(\cdot))$. \square

Согласно вышесказанному управление $u_*(t) = v_*(t)f(y_*(t))$, $t \in \Delta$, является оптимальным для задачи А.

Пусть $\tilde{v}(t) \in [\alpha, \beta]$, $t \in \Delta$, — оптимальное управление для задачи В и $\tilde{y}(t)$, $t \in \Delta$, — соответствующее ему решение задачи Коши (7). Посмотрим, какую дополнительную информацию о свойствах $\tilde{v}(t)$ можно извлечь с помощью принципа максимума Понтрягина (см. [4;5]). Для этого рассмотрим функцию

$$H(\psi_0, \psi, t, y, v) = \psi_0 e^{-\delta t} F(vf(y)) + \psi[(1-v)f(y) - \mu y],$$

где константа $\psi_0 \geq 0$, $v \in [\alpha, \beta]$, $y > 0$, $t \in \Delta$, и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(\psi_0, \psi, t, \tilde{y}(t), \tilde{v}(t))}{\partial y}. \quad (21)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина (см. [4;5]) для оптимальной пары $(\tilde{v}(t), \tilde{y}(t))$, $t \in \Delta$, найдется такая пара $(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}(t))$, где $\tilde{\psi}_0 \geq 0$, а абсолютно непрерывная функция $\tilde{\psi}(t)$ удовлетворяет уравнению (21), причем $\tilde{\psi}_0 + |\tilde{\psi}(t)| > 0 \forall t \in \Delta$, что почти всюду при $t \in \Delta$

$$\max_{v \in [\alpha, \beta]} h(t, v) = h(t, \tilde{v}(t)),$$

где

$$h(t, v) = \tilde{\psi}_0 e^{-\delta t} F(vf(\tilde{y}(t))) - v\tilde{\psi}(t)f(\tilde{y}(t)).$$

Теорема 2. Пусть функция $(-1)F(\xi)$ при $\xi > 0$ строго выпукла (определение и свойства см. в [9]). Тогда оптимальное управление $\tilde{v}(t)$ эквивалентно в смысле Лебега на Δ однозначной непрерывной функции

$$\omega(t) = \text{Arg max}_{v \in [\alpha, \beta]} h(t, v). \quad (22)$$

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая: 1) $\tilde{\psi}_0 > 0$; 2) $\tilde{\psi}_0 = 0$. Отметим, что из вышесказанного следуют неравенства: $\tilde{y}(t) > 0$, $f(\tilde{y}(t)) > 0$ при $t \in \Delta$. В первом случае функция $h(t, v)$ при каждом $t \in \Delta$ строго вогнута по $v \in [\alpha, \beta]$ и поэтому функция $\omega(t)$ (см. (22)) однозначна. Используя непрерывность функции $h(t, v)$ по совокупности переменных при $t \in \Delta$, $v \in [\alpha, \beta]$, нетрудно показать, что функция $\omega(t)$ непрерывна на Δ . Во втором случае $h(t, v) = -v\tilde{\psi}(t)f(\tilde{y}(t))$, где $\tilde{\psi}(t) \neq 0$ и $f(\tilde{y}(t)) > 0 \forall t \in \Delta$. Таким образом, функция $\omega(t)$ (см. (22)) принимает постоянное значение на Δ : либо α , либо β . \square

Из теоремы 2 вытекает, что при строгой выпуклости функции $(-1)F(\xi)$ при $\xi > 0$ в исследуемой задаче В нет особых режимов.

Приношу благодарность Н.Л. Григоренко за внимание к моей работе и М.К. Горкушенко за полезные замечания по тексту рукописи статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. 2-е изд., стер. М.: Айрис-Пресс, 2002. 553 с.
2. **Колемаев В.А.** Математическая экономика. 3-е изд., стер. М.: Юнити-Дана, 2005. 399 с.
3. **Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н.** Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикл. математика и информатика: тр. фак. МВК МГУ им. М. В. Ломоносова. М. : МАКС Пресс, 2013. № 44. С. 5–21.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1983. 393 с.
5. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
6. **Коддингтон Э., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.
7. **Денисов А. М., Разгулин А. В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб.-метод. пособие / МГУ им. М. В. Ломоносова, фак. ВМиК [Электр. ресурс]. Ч. 2. М., 2009. 114 с.
8. **Филиппов А. Ф.** О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вест. МГУ. 1959. Т. 2, № 1. С. 25–38. (Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия.)
9. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
МИ РАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 15.07.2014

УДК 517.977

О СЛАБОМ ПОЛЯРНОМ КОНУСЕ КО МНОЖЕСТВУ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С КОНИЧЕСКИМ ГРАФИКОМ¹

Е. С. Половинкин

В данной работе для дифференциального включения, правая часть которого в каждый момент времени является выпуклым замкнутым конусом, со значениями в рефлексивном банаховом пространстве, получен вид слабого полярного конуса к конусу сильно ограниченных решений задачи Коши для этого включения. Решение называем сильно ограниченным, если оно является абсолютно непрерывной функцией (в широком смысле) и его производная существенно ограничена.

Ключевые слова: Полярный конус, многозначное отображение, дифференциальное включение, выпуклый процесс.

E. S. Polovinkin. On the weak polar cone of the solution set of a differential inclusion with conic graph.

A differential inclusion with values in a reflexive Banach space such that its right-hand side is at each time a convex closed cone is considered. The form of the weak polar cone of the cone of strongly bounded solutions to the Cauchy problem for this inclusion is found. A solution is called strongly bounded if it is an absolutely continuous function (in a wide sense) and its derivative is essentially bounded.

Keywords: polar cone, multivalued mapping, differential inclusion, convex process.

Введение

Данная работа посвящена развитию результатов, полученных автором в работе [6], и касающихся качественных свойств множества решений дифференциального включения со значениями в рефлексивном банаховом пространстве, правая часть которого в каждый момент времени является выпуклым замкнутым конусом. В работе [6] был получен общий вид полярного конуса ко множеству всех решений такого дифференциального включения. В данной работе исследуется вид слабого полярного конуса к подмножеству решений такого дифференциального включения, состоящего из всех решений с существенно ограниченными производными. Приведем основные обозначения.

Напомним, что *конусом* в линейном пространстве X называется всякое множество K такое, что для любого $x \in K$ и числа $\lambda > 0$ следует включение $\lambda x \in K$.

Для произвольного линейного топологического пространства Y через Y^* обозначаем его сопряженное пространство.

Для произвольного конуса K из линейного топологического пространства Y конус вида $K^0 \doteq \{x^* \in Y^* \mid \langle x^*, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K\}$ называется (*негативным*) *полярным конусом*, где $\langle x^*, x \rangle$ — значение линейного функционала $x^* \in Y^*$ в точке $x \in X$. Очевидно, что K^0 есть замкнутый выпуклый конус в сопряженном пространстве Y^* .

Пусть линейное топологическое пространство Z является сопряженным к пространству Y (т. е. $Z = Y^*$). Для конуса L из пространства Z кроме полярного конуса в пространстве $Z^* = Y^{**}$ определим *слабый полярный конус* $L^{\bar{0}}$, который определяется как конус в пространстве Y вида

$$L^{\bar{0}} \doteq \{x \in Y \mid \langle x^*, x \rangle \leq 0 \quad \forall x^* \in L\}.$$

Множество $K^{0\bar{0}} \doteq (K^0)^{\bar{0}} \subset Y$ называется *биполярным конусом* к конусу $K \subset Y$. Аналогично определяется *слабый биполярный конус* $L^{\bar{0}0} \doteq (L^{\bar{0}})^0 \subset Y^*$ к конусу $L \subset Y^*$. Далее из

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00295а).

текста будет понятно, в каком пространстве Y или $Z = Y^*$ вычисляется полярный или слабо полярный конус. Поэтому всюду обозначения $L^{\tilde{0}}$ и $K^{\tilde{00}}$ заменяем на L^0 и K^{00} .

В выпуклом анализе известно утверждение о том, что биполярный конус K^{00} в линейном локально выпуклом топологическом пространстве Y (слабый биполярный конус L^{00} в Y^*) совпадает с конусом K (с конусом L) тогда и только тогда, когда конус $K \subset Y$ (конус $L \subset Y^*$) является выпуклым и замкнутым конусом в пространстве Y (в пространстве Y^*) (см., например, [7, теорема 1.12.1]).

1. Основные обозначения

В дальнейшем полагаем, что $T \doteq [t_0, t_1]$ есть отрезок прямой, а E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство. Через $B_r(a) \doteq \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ ($\overline{B_r(a)} \doteq \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$) обозначаем открытый (замкнутый) шар с центром в точке $a \in E$ радиуса $r > 0$. Опорную функцию ко множеству $A \subset E$ при каждом $p \in E^*$ обозначаем через $s(p, A) \doteq \sup\{ \langle p, x \rangle \mid x \in A \}$. Через $\varrho(a, A) \doteq \inf\{ \|a - x\| \mid x \in A \}$ обозначаем расстояние от точки $a \in E$ до множества $A \subset E$.

Через $L_1(T, E)$, как обычно, обозначаем нормированное пространство классов эквивалентностей интегрируемых по Бохнеру функций, действующих из T в банахово пространство E с нормой $\|f\|_{L_1} \doteq \int_T \|f(\tau)\|_E d\tau$. Аналогично через $L_\infty(T, E)$ обозначаем линейное нормированное пространство существенно ограниченных функций $f: T \rightarrow E$, для которых определена норма $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in T} \|f(t)\|_E$.

Через $AC(T, E)$ обозначаем *линейное нормированное пространство абсолютно непрерывных функций*, иначе говоря, для каждой функции $f: T \rightarrow E$ из этого пространства существует суммируемая по Бохнеру функция $f': T \rightarrow E$ такая, что для каждого $t \in T$ справедливо равенство

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

т. е. $f': T \rightarrow E$ — производная функции $f: T \rightarrow E$. Норма в пространстве $AC(T, E)$ определяется по формуле $\|f\|_{AC} \doteq \|f(t_0)\|_E + \|f'\|_{L_1}$.

Определим также нормированное пространство $AC_\infty(T, E)$, являющееся подпространством пространства $AC(T, E)$, состоящее из абсолютно непрерывных функций $f: T \rightarrow E$, т. е. представимых в виде (1.1), у которых функция $f'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$, а норма определяется по формуле $\|f\|_{AC_\infty} \doteq \|f(t_0)\|_E + \|f'\|_{L_\infty}$.

Пусть $\mathcal{F}(E)$ — пространство непустых замкнутых подмножеств из пространства E . Пусть задано многозначное отображение $Q: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ и определено дифференциальное включение

$$x' \in Q(t, x), \quad t \in T. \quad (1.2)$$

Решением дифференциального включения (1.2) на отрезке T называется всякая абсолютно непрерывная функция $x(\cdot) \in AC(T, E)$, у которой производная функция $x': T \rightarrow E$ является суммируемой по Бохнеру ветвью отображения $Q(\cdot, x(\cdot))$.

Через $x(\cdot, x_0)$ будем обозначать любое решение дифференциального включения (1.2) с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0$, определенное на всем отрезке T (при условии, что такое решение существует). Для любого множества K_0 через $\mathcal{R}_T(Q, K_0)$ обозначаем множество всех решений $x(\cdot, x_0)$ включения (1.2) из пространства $AC(T, E)$ на отрезке T при произвольном $x_0 \in K_0$.

Кроме этого определим совокупность таких решений задачи Коши дифференциального включения (1.2) с началом из множества K_0 , у каждого из которых производная существенно ограничена. Будем обозначать последнее множество через $\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0)$. Второе множество

решений включения (1.2) является подмножеством множества $\mathcal{R}_T(Q, K_0)$ и принадлежит пространству $AC_\infty(T, E)$.

Напомним, что эффективным множеством многозначного отображения Q называется множество $\text{dom } Q \doteq \{(t, x) \mid Q(t, x) \neq \emptyset\}$.

В дальнейшем полагаем, что многозначное отображение $Q: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ таково, что при почти всех $t \in T$ график $\text{graph } Q(t, \cdot) \doteq \{(x, y) \mid y \in Q(t, x)\}$ является замкнутым и выпуклым конусом в $E \times E$, а многозначное отображение $t \rightarrow \text{graph } Q(t, \cdot)$ измеримо на T . Пусть K_0 — замкнутый выпуклый конус в E .

Очевидно, что в этом случае множества $\mathcal{R}_T(Q, K_0)$ и $\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0)$ будут выпуклыми конусами в пространствах $AC(T, E)$ и $AC_\infty(T, E)$ соответственно.

В работе [6] получен полярный конус к конусу $\mathcal{R}_T(Q, K_0)$. Оказалось, что при исследовании дифференциальных включений с неограниченными правыми частями не меньший интерес представляет слабый полярный конус к конусу $\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0)$, т. е. в случае, когда пространство решений $AC_\infty(T, E)$ взято со $*$ -слабой топологией.

2. Предварительные сведения и вспомогательные конструкции

Пусть задано измеримое многозначное отображение $K: T \rightarrow \mathcal{F}(E \times E)$ такое, что его значения $K(t)$ являются замкнутыми выпуклыми конусами в $E \times E$. По определению при каждом $t \in T$ для конуса $K(t)$ *полярным конусом* к нему является множество вида

$$K^0(t) \doteq \{z^* \in E^* \times E^* \mid \langle z^*, z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K(t)\},$$

где $\langle z^*, z \rangle$ — значение линейного функционала $z^* \doteq (x^*, y^*) \in E^* \times E^*$ в точке $z \doteq (x, y) \in E \times E$, т. е. $\langle z^*, z \rangle \doteq \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle$.

Отметим, что нормированное пространство абсолютно непрерывных функций $AC(T, E)$ с нормой $\|x(\cdot)\|_{AC}$ изометрически изоморфно пространству $E \times L_1(T, E)$ с нормой $\|(x, f(\cdot))\| \doteq \|x\|_E + \int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\|_E dt$ для любого $(x, f(\cdot)) \in E \times L_1(T, E)$.

Напомним, что в силу теоремы Данфорда — Петтиса (см. [3], а также [10, гл. 8, §8.17–8.20]) для случая, когда банахово пространство E рефлексивно и сепарабельно, банаховы пространства Лебега — Бохнера $L_1(T, E)$ и $L_\infty(T, E^*)$ находятся в двойственности, точнее, сопряженным пространством к банахову пространству $L_1(T, E)$ является банахово пространство $L_\infty(T, E^*)$. Отсюда и из рефлексивности пространства E следует, что сопряженным пространством к топологическому пространству $L_\infty(T, E)$ со $*$ -слабой топологией является пространство $L_1(T, E^*)$.

Поэтому всякий линейный непрерывный функционал η^* , заданный на банаховом пространстве $AC(T, E)$, можно единственным образом представить в виде $\eta^* \doteq (b^*, y^*(\cdot)) \in E^* \times L_\infty(T, E^*)$, значение которого на любом $x(\cdot) \in AC(T, E)$ вычисляется по формуле

$$\langle \eta^*, x(\cdot) \rangle = \langle b^*, x(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle y^*(t), x'(t) \rangle dt. \quad (2.1)$$

Аналогично пространство $AC_\infty(T, E)$ со $*$ -слабой топологией изометрически изоморфно пространству $E \times L_\infty(T, E)$ со $*$ -слабой топологией на $L_\infty(T, E)$. При этом всякий линейный непрерывный функционал η^* , заданный на топологическом пространстве $AC_\infty(T, E)$ со $*$ -слабой топологией, можно единственным образом представить в виде $\eta^* \doteq (b^*, y^*(\cdot)) \in E^* \times L_1(T, E^*)$, значение которого на любом $x(\cdot) \in AC_\infty(T, E)$ вычисляется по той же формуле (2.1). В результате множество $\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0)$ принадлежит пространству $AC_\infty(T, E)$ со $*$ -слабой топологией. Сопряженным к пространству $AC_\infty(T, E)$ со $*$ -слабой топологией, как отмечено выше, является пространство $AC(T, E^*)$. Поэтому для конуса $\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0)$ появляется возможность

описать слабый полярный конус к нему. Вычислению этого слабого полярного конуса и посвящена работа.

Обозначим через X линейное топологическое пространство $X \doteq E \times L_\infty(T, E)$, в котором пространство E берется со слабой топологией, а $L_\infty(T, E)$ — со $*$ -слабой топологией (т.е. порождаемой элементами из пространства $L_1(T, E^*)$). Обозначим через X^* линейное топологическое пространство вида $X^* \doteq E^* \times L_1(T, E^*)$, в котором пространство E^* берется со $*$ -слабой топологией, а пространство $L_1(T, E^*)$ берется со слабой топологией (т.е. порождаемой элементами из пространства $L_\infty(T, E)$). В результате пара пространств X и X^* находится в двойственности через соответствующую билинейную форму на $X^* \times X$:

$$\langle \xi^*, \xi \rangle = \langle a^*, a \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle x^*(s), x(s) \rangle ds, \quad (2.2)$$

где $\xi \doteq (a, x(\cdot)) \in X$, $\xi^* \doteq (a^*, x^*(\cdot)) \in X^*$. Произведения пространств $X \times X$ и $X^* \times X^*$ также находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle (\xi^*, \eta^*), (\xi, \eta) \rangle \doteq \langle \xi^*, \xi \rangle + \langle \eta^*, \eta \rangle$, где каждое слагаемое определено по формуле (2.2).

3. Леммы и следствие

Напомним, что заданы замкнутый выпуклый конус K_0 в банаховом пространстве E и замкнутые выпуклые конусы $K(t) \in E \times E$, измеримо зависящие от $t \in T$. Как обычно, обозначаем через $K_0^0 \in E^*$ и $K^0(t) \in E^* \times E^*$ полярные конусы к конусам K_0 и $K(t)$ соответственно. Определим в определенном ранее пространстве $X \times X$ конус вида

$$\mathcal{K} \doteq \left\{ (\xi, \eta) \in X \times X \mid \xi \doteq (a, x(\cdot)), \eta \doteq (b, y(\cdot)), a + b \in K_0, \right. \\ \left. \left(b + \int_{t_0}^t y(s) ds + x(t), y(t) \right) \in K(t) \quad \forall t \in T \right\}. \quad (3.1)$$

По определению полярный к нему конус \mathcal{K}^0 в пространстве $X^* \times X^*$ имеет вид

$$\mathcal{K}^0 \doteq \left\{ (\xi^*, \eta^*) \in X^* \times X^* \mid \langle \xi^*, \xi \rangle + \langle \eta^*, \eta \rangle \leq 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{K} \right\}. \quad (3.2)$$

Лемма 1. *Для конуса \mathcal{K} вида (3.1) его полярный конус \mathcal{K}^0 и биполярный конус \mathcal{K}^{00} могут быть вычислены по формулам*

$$\mathcal{K}^0 = \left\{ (\xi^*, \eta^*) \in X^* \times X^* \mid \xi^* \doteq (a^*, x^*(\cdot)), \eta^* \doteq (b^*, y^*(\cdot)), a^* \in K_0^0, \right. \\ \left. b^* = \int_{t_0}^{t_1} x^*(s) ds + a^*, \left(x^*(t), y^*(t) - \int_t^{t_1} x^*(s) ds \right) \in K^0(t) \quad \forall t \in T \right\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{K}^{00} = \mathcal{K}.$$

Доказательство леммы 1, по существу, повторяет доказательство леммы 1 из работы [6], в которой аналогичное утверждение доказано для случая, когда конус \mathcal{K} определен в пространстве $X \times Y$, где $Y \doteq E \times L_1(T, E)$.

Лемма 2. *Пусть K — конус в $E \times E$, и пусть существует число $\gamma > 0$ такое, что для каждого $x \in \overline{B_1(0)} \subset E$ множество $\{y \in E \mid (x, y) \in K\} \cap \overline{B_\gamma(0)}$ не пусто. Тогда для любой точки (x^*, y^*) из полярного конуса K^0 справедливо неравенство $\|x^*\| \leq \gamma \|y^*\|$.*

Доказательство леммы 2 приведено в работе [6].

Для определенного в (3.1) конуса \mathcal{K} и полярного к нему конуса \mathcal{K}^0 (см. (3.2) и (3.3)) определим отображения $H: X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ и $P: X^* \rightarrow \mathcal{F}(X^*)$ вида

$$H(\xi) \doteq \{\eta \in X \mid (\xi, \eta) \in \mathcal{K}\}, \quad (3.4)$$

$$P(\eta^*) \doteq \{\xi^* \in X^* \mid (\xi^*, \eta^*) \in \mathcal{K}^0\}. \quad (3.5)$$

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$(H(0))^0 = (\text{dom } P)^{00},$$

$$(P(0))^0 = (\text{dom } H)^{00}.$$

Доказательство леммы 3 является почти дословным повторением доказательства леммы 3 из [6].

Для доказательства основного результата нам потребуются некоторые свойства множеств из пространства $L_1(T, E)$, в частности критерии слабой (секвенциальной) компактности множества в пространстве $L_1(T, E)$. Впервые такой критерий для $L_1(T, \mathbb{R}^1)$ был получен Н. Данфордом — Б. Петтисом (см. [4, гл. 4, теорема 8.9]). Одно из обобщений этого критерия для интегрируемых по Бохнеру функций получено Д. Дистелем [2]. Из теоремы Дистеля [2] и теоремы Банаха — Алаоглу [4, теорема 5.4.2] легко следует следующий критерий слабой компактности множеств из $L_1(T, E^*)$.

Следствие. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство, а E^* — его сопряженное пространство. Пусть $T \doteq [t_0, t_1] \in \mathbb{R}^1$ — отрезок с мерой Лебега на измеримых по Лебегу подмножествах. Пусть для заданной последовательности $\{x_k(\cdot)\} \subset L_1(T; E^*)$ существует функция $\alpha(\cdot) \in L_1(T; \mathbb{R}_+^1)$ такая, что для любого номера $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|x_k(t)\|_{E^*} \leq \alpha(t)$ при почти всех $t \in T$. Тогда из этой последовательности $\{x_k(\cdot)\}$ можно выделить слабо сходящуюся к некоторой функции $x(\cdot) \in L_1(T; E^*)$ подпоследовательность $\{x_{k_m}(\cdot)\}$, т. е. для любой функции $y(\cdot) \in L_\infty(T, E)$ справедливо равенство*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_T \langle y(t), x_{k_m}(t) \rangle dt = \int_T \langle y(t), x(t) \rangle dt.$$

Также нам потребуются результаты, которые, по-видимому, известны, но автор их ранее не встречал.

Лемма 4. *Пусть заданы измеримое множество $A \in \mathbb{R}^n$, мера Лебега которого μ конечна, и банахово пространство E . Пусть последовательность $\{f_k(\cdot)\} \subset L_1(A, E)$ сходится к $f_0(\cdot)$ по норме в пространстве $L_1(A, E)$. Тогда существуют подпоследовательность $\{f_{k_m}(\cdot)\}$ и функция $\alpha(\cdot) \in L_1(A, \mathbb{R}_+^1)$ такие, что для любого номера $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\|f_{k_m}(t)\|_E \leq \alpha(t) \quad \forall t \in A.$$

Доказательство. Определим функции

$$\varphi_k(t) \doteq \|f_k(t) - f_0(t)\|_E, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in A.$$

Очевидно, что $\varphi_k(\cdot) \in L_1(A, \mathbb{R}_+^1)$ и по условию леммы $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \varphi_k(s) d\mu(s) = 0$. Поэтому существует подпоследовательность $\{\varphi_{k_m}(\cdot)\}$ такая, что

$$\int_A \varphi_{k_m}(s) d\mu(s) \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Определим функцию

$$\psi(t) \doteq \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi_{k_m}(t), \quad t \in A.$$

Эта функция $\psi: A \rightarrow [0, +\infty]$ измерима, и для нее существует интеграл Лебега, конечный или $+\infty$ (см. [8, гл. 10]). По теореме Фату получаем оценку

$$\int_A \psi(s) d\mu(s) \leq \limsup_{M \rightarrow +\infty} \int_A \sum_{m=1}^M \varphi_{k_m}(s) d\mu(s) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = 1.$$

Следовательно, интеграл конечен, т. е. $\psi(\cdot) \in L_1(A, \mathbb{R}_+^1)$. Определим функцию $\alpha(t) \doteq \|f_0(t)\|_E + \psi(t)$, $t \in A$. По построению $\alpha(\cdot) \in L_1(A, \mathbb{R}_+^1)$, и справедлива оценка

$$\|f_{k_m}(t)\|_E \leq \varphi_{k_m}(t) + \|f_0(t)\|_E \leq \alpha(t), \quad \text{при п. в. } t \in A.$$

Лемма доказана.

Приведем обобщение известного неравенства Гронуолла (см. [9, гл. 3, §1]).

Лемма 5. Пусть $l(\cdot), \varrho(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^1)$, причем $l(t) \geq 0$. Если для функции $u(\cdot) \in AC(T, \mathbb{R}^1)$ справедливо неравенство

$$|u'(t)| \leq l(t)u(t) + \varrho(t), \quad \text{при п. в. } t \in T \doteq [t_0, t_1],$$

то справедливы оценки

$$|u(t)| \leq e^{m(t)} |u(t_0)| + \int_{t_0}^t e^{m(t)-m(s)} \varrho(s) ds \quad \forall t \in T, \quad (3.6)$$

$$|u(t)| \leq e^{n(t)} |u(t_1)| + \int_t^{t_1} e^{n(t)-n(s)} \varrho(s) ds \quad \forall t \in T, \quad (3.7)$$

где $m(t) \doteq \int_{t_0}^t l(s) ds$ и $n(t) \doteq \int_t^{t_1} l(s) ds$.

Доказательство. Выбрав произвольное $t \in T$ и интегрируя данное в условии неравенство по отрезку $[t_0, t]$, получаем

$$|u(t)| \leq |u(t_0)| + \int_{t_0}^t (l(s)u(s) + \varrho(s)) ds \quad \forall t \in T.$$

Обозначим $f(t) \doteq \int_{t_0}^t (l(s)u(s) + \varrho(s)) ds$. Тогда $f(t_0) = 0$ и

$$|u(t)| \leq |u(t_0)| + f(t) \quad \forall t \in T. \quad (3.8)$$

Дифференцируя функцию f , в силу неравенства (3.8) получаем

$$f'(t) = l(t)u(t) + \varrho(t) \leq l(t)(|u(t_0)| + f(t)) + \varrho(t),$$

т. е. $f'(t) - l(t)f(t) \leq |u(t_0)|l(t) + \varrho(t)$. Умножая последнее неравенство на $e^{-m(t)}$, получаем

$$\frac{d}{dt}(e^{-m(t)} f(t)) \leq |u(t_0)| m'(t) e^{-m(t)} + \varrho(t) e^{-m(t)}.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем неравенство

$$e^{-m(t)} f(t) \leq |u(t_0)| (1 - e^{-m(t)}) + \int_{t_0}^t e^{-m(s)} \varrho(s) ds,$$

в силу которого и в силу неравенства (3.8) получаем (3.6).

Чтобы получить неравенство (3.7), нужно данное в условии неравенство проинтегрировать по отрезку $[t, t_1]$ при $t \in T$ и получить

$$|u(t)| \leq |u(t_1)| + \int_t^{t_1} (l(s)u(s) + \varrho(s)) ds \quad \forall t \in T.$$

Далее аналогично, определяя функцию $g(t) \doteq \int_t^{t_1} (l(s)u(s) + \varrho(s)) ds$, продифференцировать ее, подставить производную в неравенство, умножить на $e^{-n(t)}$ и получить неравенство

$$-\frac{d}{dt}(e^{-n(t)} g(t)) \leq -|u(t_1)| n'(t) e^{-n(t)} + \varrho(t) e^{-n(t)},$$

интегрируя которое, имеем (3.7).

4. Основной результат

Теорема 1. Пусть E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство. Пусть заданы замкнутый выпуклый конус K_0 в E и измеримое отображение $K: T \rightarrow \mathcal{F}(E \times E)$ такое, что значения $K(t)$ являются замкнутыми выпуклыми конусами в $E \times E$. Пусть существует функция $\gamma(\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}_+^1)$ такая, что

$$\{y \in E \mid (x, y) \in K(t)\} \cap (\gamma(t) \overline{B_1(0)}) \neq \emptyset \quad \forall x \in \overline{B_1(0)}, \quad \forall t \in T. \quad (4.1)$$

Тогда для отображений (3.4) и (3.5) справедливо равенство

$$(H(0))^0 = \text{dom } P. \quad (4.2)$$

Доказательство. В силу леммы 3 для получения равенства (4.2) осталось доказать замкнутость множества $\text{dom } P$ в топологическом пространстве $X^* = E^* \times L_1(T, E^*)$ (т. е. в *-слабой топологии пространства $X^* = E^* \times L_1(T, E^*)$). Пусть выбраны произвольная последовательность $\{\eta_k^*\} \subset X^*$, где $\eta_k^* \doteq (b_k^*, y_k^*(\cdot))$, и точка $\eta^* \doteq (b^*, y^*(\cdot)) \in X^*$ такие, что

$$\eta_k^* \in \text{dom } P, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \eta_k^*, \eta \rangle = \langle \eta^*, \eta \rangle \quad (4.3)$$

для любого $\eta \doteq (b, y(\cdot)) \in X$. Докажем, что $\eta^* \in \text{dom } P$. Из слабой сходимости последовательности $\{\eta_k^*\}$ (см. (4.3)) и выпуклости множества $\text{dom } P$ по теореме Мазура (см. [5, §3.1]) существует последовательность $\{\tilde{\eta}_i^*\}$, где $\tilde{\eta}_i^* \doteq (\tilde{b}_i^*, \tilde{y}_i^*(\cdot)) \in \text{dom } P$, состоящая из выпуклых комбинаций последовательности $\{\eta_k^*\}$, которая сходится к точке η^* по норме в нормированном пространстве $E^* \times L_1(T, E^*)$. По лемме 4 существуют подпоследовательность $\{\tilde{y}_{l_m}^*(\cdot)\}$ и функция $\alpha(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$ такие, что для любого номера $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{y}_{l_m}^*(t)\| \leq \alpha(t) \quad \forall t \in T.$$

При любом $l \in \mathbb{N}$ из включения $\tilde{\eta}_l^* \in \text{dom } P$ следует существование $\xi_l^* \doteq (a_l^*, x_l^*(\cdot)) \in X^*$ такого, что справедливо включение $\xi_l^* \in P(\tilde{\eta}_l^*)$, т. е. (см. (3.5), (3.3))

$$a_l^* \in K_0^0, \quad \tilde{b}_l^* = \int_{t_0}^{t_1} x_l^*(s) ds + a_l^*, \quad \left(x_l^*(t), \tilde{y}_l^*(t) - \int_t^{t_1} x_l^*(s) ds \right) \in K^0(t) \quad \forall t \in T. \quad (4.4)$$

По лемме 2 отсюда при п. в. $t \in T$ получаем

$$\|x_{l_m}^*(t)\|_{E^*} \leq \gamma(t) \left\| \tilde{y}_{l_m}^*(t) - \int_t^{t_1} x_{l_m}^*(s) ds \right\|_{E^*} \leq \gamma(t) \left(\alpha(t) + \int_t^{t_1} \|x_{l_m}^*(s)\|_{E^*} ds \right). \quad (4.5)$$

Обозначим $u_m(t) \doteq \int_t^{t_1} \|x_{l_m}^*(s)\|_{E^*} ds$ и $\tilde{\gamma} \doteq \text{vrai sup}_{t \in T} \gamma(t)$. Тогда из неравенства (4.5) следует неравенство

$$|u_m'(t)| \leq \tilde{\gamma} u_m(t) + \tilde{\gamma} \alpha(t) \quad \forall t \in T. \quad (4.6)$$

По лемме 5 (неравенство Гронуолла) из неравенств (4.6) и (3.7) получаем оценку

$$u_m(t) \leq \tilde{\gamma} \int_t^{t_1} e^{(s-t)\tilde{\gamma}} \alpha(s) ds \doteq \beta(t),$$

откуда и из (4.5), в свою очередь, следует равномерная оценка последовательности $\{x_{l_m}^*(\cdot)\} \subset L_1(T, E^*)$ суммируемой функцией, т. е.

$$\|x_{l_m}^*(t)\|_{E^*} \leq \tilde{\gamma}(\alpha(t) + \beta(t)) \quad \forall t \in T, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу следствия и выделяя, быть может, подпоследовательность получаем, что последовательность $\{x_{l_m}^*(\cdot)\}$ слабо сходится в пространстве $L_1(T, E^*)$ к некоторому $x^*(\cdot)$.

В свою очередь, в силу равенства (4.4) и сходимости последовательность $\{\tilde{b}_{l_m}^*\}$ в E^* , последовательность $\{a_{l_m}^*\}$ *-слабо сходится к некоторому $a^* \in E^*$. Таким образом, последовательность $\{\xi_{l_m}^*\}$ с точностью до подпоследовательности сходится в X^* (т. е. слабо) к точке $\xi^* \doteq (a^*, x^*(\cdot))$. Так как конус \mathcal{K}^0 замкнут в $X^* \times X^*$, то $(\xi^*, \eta^*) \in \mathcal{K}^0$, т. е. $\eta^* \in \text{dom } P$.

Отсюда в силу равенства (4.4) и *-слабой сходимости последовательности $\{b_k^*\}$ в E^* последовательность $\{a_k^*\}$ *-слабо сходится к некоторому $a^* \in E^*$. Таким образом, последовательность $\{\xi_k^*\}$ с точностью до подпоследовательности сходится в топологическом пространстве X^* (т. е. слабо) к точке $\xi^* \doteq (a^*, x^*(\cdot))$. Так как конус \mathcal{K}^0 замкнут в $X^* \times Y^*$, то $(\xi^*, \eta^*) \in \mathcal{K}^0$, т. е. $\eta^* \in \text{dom } P$.

В силу выпуклости множества $\text{dom } P$, а также сепарабельности пространств E и $L_1(T, E)$ из следствия получаем, что для доказательства замкнутости множества $\text{dom } P$ в (*-слабой) топологии пространства $X^* = E^* \times L_1(T, E^*)$ достаточно доказать принадлежность множеству $\text{dom } P$ его предельных точек, что и было нами сделано. Теорема доказана.

Прежде чем формулировать итоговый результат, напомним еще раз, что K_0 — замкнутый выпуклый конус в сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве E , отображение $Q: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ таково, что множество $\text{graph } Q(t, \cdot) = K(t)$ — замкнутый выпуклый конус в $E \times E$, измеримо зависящий от $t \in T$. При этом в силу обозначений (3.1), (3.4) мы рассматривает такое множество решений дифференциального включения (1.2), которое удовлетворяет равенству

$$\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0) = \{x(\cdot) \in AC_\infty(T, E) \mid (x(t_0), x'(\cdot)) \in H(0)\},$$

т. е. оно изометрически изоморфно множеству $H(0)$ из (3.4). При этом общий вид линейного функционала на $AC_\infty(T, E)$ со *-слабой топологией очевидно принимает форму

$$\langle \eta^*, x(\cdot) \rangle = \langle b^*, x(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle y^*(s), x'(s) \rangle ds,$$

для любого $x(\cdot) \in AC_\infty(T, E)$ и $\eta^* \doteq (b^*, y^*(\cdot)) \in X^*$ (т.е. в специальном случае выбора $\eta \in X$ вида $\eta \doteq (x(t_0), x'(\cdot))$ для $x(\cdot) \in AC_\infty(T, E)$). В итоге из теоремы 1 как простое следствие получаем следующий основной результат.

Теорема 2. Пусть E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство. Пусть K_0 — замкнутый выпуклый конус в E . Пусть отображение $Q: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ таково, что $Q(t, x) \doteq \{y \in E \mid (x, y) \in K(t)\}$, где множество $K(t)$ — замкнутый выпуклый конус в $E \times E$, измеримо зависящий от $t \in T$. Пусть существует функция $\gamma(\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}_+^1)$ такая, что

$$\{y \in E \mid (x, y) \in K(t)\} \cap (\gamma(t)\overline{B_1(0)}) \neq \emptyset \quad \forall x \in \overline{B_1(0)} \quad \forall t \in T.$$

Тогда полярный конус $(\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0))^0$ ко множеству решений $\mathcal{R}_T^\infty(Q, K_0)$ дифференциального включения (1.2) состоит из тех и только тех пар точек $b^* \in E^*$ и функций $y^*(\cdot) \in L_\infty(T, E^*)$, что для каждой такой пары $(b^*, y^*(\cdot))$ найдется функция $x^*(\cdot) \in L_1(T, E^*)$, для которой справедливы включения

$$b^* - \int_{t_0}^{t_1} x^*(s) ds \in K_0^0; \quad \left(x^*(t), y^*(t) - \int_t^{t_1} x^*(s) ds \right) \in K^0(t) \quad \forall t \in T.$$

З а м е ч а н и е. В теоремах 1 и 2 при каждом $t \in T$ конус $K(t) \subset E \times E$ порождает так называемый замкнутый выпуклый процесс $Q(t, \cdot): E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ по формуле $Q(t, x) \doteq \{y \in E \mid (x, y) \in K(t)\}$, т.е. $\text{graph } Q(t, \cdot) = K(t)$. Условие (4.1) на конус $K(t)$ эквивалентно тому, что нормы совокупности выпуклых процессов $Q(t, \cdot)$ (определение нормы выпуклого процесса см., например, в работе [1]) ограничены измеримой существенно ограниченной функцией, т.е. $\|Q(t, \cdot)\| \leq \gamma(t)$ при $t \in T$, где $\gamma(\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}^1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
2. Diestel J. Remarks on weak compactness in $L_1(\mu, X)$ // Glasgow Math. J. 1977. Vol. 18, no. 1. P. 87–91.
3. Dunford N., Pettis B.J. Linear operators on summable functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 47. P. 323–392.
4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962; М.: УРСС, 2004. 896 с.
5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
6. Половинкин Е.С. О вычислении полярного конуса ко множеству решений дифференциального включения // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 178–187.
7. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. 2-е изд. М.: Физматлит, 2007. 440 с.
8. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976. 320 с.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
10. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1072 с.

Половинкин Евгений Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой

Поступила 3.06.2014

Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

УДК 517.977

КОНСТРУКЦИЯ НЕПРЕРЫВНОГО МИНИМАКСНОГО/ВЯЗКОСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ — БЕЛЛМАНА С НЕПРОДОЛЖИМЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ¹**Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова**

В работе рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби, возникающая в молекулярной биологии для модели Кроу — Кимуры молекулярной эволюции. Фазовые характеристики этого уравнения, выпущенные с заданного начального многообразия, ограниченного в фазовом пространстве, остаются в ограниченной по фазовой переменной полосе и заполняют часть этой полосы. При этом импульсные характеристики на конечном отрезке времени достигают сколь угодно больших по величине значений. Предлагается конструкция гладкого продолжения минимаксного/вязкостного решения задачи на ту часть полосы, в которую не попадают характеристики, выпущенные с начального многообразия.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана, метод характеристик, вязкостные решения, минимаксные решения.

N. N. Subbotina, L. G. Shagalova. Construction of a continuous minimax/viscosity solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation with nonextendable characteristics.

The Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation, which appears in molecular biology for the Crow–Kimura model of molecular evolution, is considered. The state characteristics of the equation that start in a given initial manifold bounded in the state space stay in a strip bounded in the state variable and fill a part of this strip. The values attained by the impulse characteristics on a finite time interval are arbitrarily large in magnitude. We propose a construction of a smooth extension for a continuous minimax/viscosity solution of the problem to the part of the strip that is not covered by the characteristics starting in the initial manifold.

Keywords: Hamilton–Jacobi–Bellman equations, method of characteristics, viscosity solutions, minimax solutions.

1. Введение

Интерес к изучению решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана возник уже в пионерских работах по теории оптимального управления [1–3] и был связан с изучением условий оптимальности программных траекторий и построением оптимальных обратных связей. Уравнения этого типа широко используются в геометрической оптике для описания эволюции световых фронтов [4]. В дальнейшем уравнения этого типа использовались также для описания эволюции областей достижимости управляемой системы и их аппроксимаций [5–7].

В настоящей работе исследуется нестандартная начальная задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби, возникающая в молекулярной биологии для модели Кроу — Кимуры молекулярной эволюции и предложенная в работе [8]. Заданное начальное многообразие в этой задаче ограничено в фазовом пространстве. Фазовые характеристики этого уравнения, выпущенные с начального многообразия, остаются в ограниченной по фазовой переменной полосе выживания, стремятся к ее границам и заполняют лишь часть этой полосы. При этом их импульсные составляющие на конечном отрезке времени могут достигать сколь угодно больших по величине значений, т. е. являются непродолжимыми.

Исследуя решение этой задачи в ограниченном по времени отрезке полосы, авторы ввели в работе [9] оригинальное определение решения задачи в прямоугольнике \bar{P}_T , равном декар-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00168), программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” и интеграционного проекта УРО и СО РАН № 12-С-1-1017.

тову произведению отрезка времени решения задачи на отрезок фазового ограничения, определяющего полосу выживания характеристик. Необходимость введения этого понятия была продиктована тем, что известные современные концепции обобщенного решения неприменимы в данной задаче. А именно: понятие минимаксного решения [10; 11] для задачи Коши с фазовыми ограничениями не введено, а условие коэрцитивности, при котором доказаны теоремы существования и единственности вязкостного решения [12; 13] в замкнутой области, в прямоугольнике $\bar{\Pi}_T$ не выполняется. Более того, нетривиальные условия, определяющие вязкостное решение в замкнутой области, в данной задаче также не могут быть удовлетворены на границе $\bar{\Pi}_T$. Поэтому в работе [9] было введено новое определение непрерывного решения задачи в рассматриваемом прямоугольнике $\bar{\Pi}_T$ и доказана теорема существования такого решения. Решение строилось с помощью редукции этой задачи к задаче Дирихле для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана путем гладкого продолжения начальных условий на границы фазовых ограничений и затем с помощью построения функции цены в соответствующей вспомогательной задаче оптимального управления. Из метода построения вытекало, что такое решение не единственно.

В работе [14] авторы продолжили исследование данной задачи и осложнили ее решение дополнительным требованием совпадения обобщенного решения с минимаксным решением в той части Ω_T^0 прямоугольника $\bar{\Pi}_T$, которая покрыта графиками фазовых характеристик [15; 16], выходящих из начального многообразия. Предложенные в этой работе конструкции, использующие построение функции цены во вспомогательных задачах оптимального управления с геометрическими компактными ограничениями на значения управлений, применимы для непрерывного продолжения минимаксного решения из Ω_T^0 в области $\Omega_T \subset \bar{\Pi}_T$, где импульсные составляющие характеристик, выпущенных из крайних точек начального многообразия, остаются ограниченными. Однако эти конструкции неприменимы в подобластях прямоугольника $\bar{\Pi}_T$, содержащих крайние точки начального многообразия и ограниченных отрезком границы и фазовыми характеристиками до моментов времени, после которых импульсные характеристики непродолжимы.

В настоящей работе предлагается конструкция гладкого продолжения минимаксного/вязкостного решения задачи с Ω_T^0 на весь прямоугольник Π_T , в частности на ту его часть, которую не заполняют графики фазовых характеристик, выпущенные с начального многообразия.

2. Постановка задачи

2.1. Уравнение Гамильтона — Якоби в модели Кроу — Кимуры

В работе [8] для модели молекулярной эволюции Кроу — Кимуры было получено следующее уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad (2.1)$$

где

$$H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}. \quad (2.2)$$

Входящая в (2.2) функция $f(\cdot)$ называется фитнесом. Уравнение (2.1) рассматривается при $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Предполагается также, что задана функция $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и выполняется начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что гамильтониан $H(x, p)$ задачи (2.1)–(2.3) является вогнутым по импульсной переменной p при всех $x \in [-1, 1]$, т. е. уравнение (2.1), (2.2) сохраняет тип Беллмана в полосе $\Pi = [0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (t, x)$.

2.2. Классические характеристики уравнения Гамильтона — Якоби

Существенную роль в исследовании и построении решений уравнений в частных производных первого порядка играют характеристики этих уравнений (см., например, [4]) — решения характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной по уравнению в частных производных.

Характеристическая система для уравнения (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = f'(x) + \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{2}, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$, $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$, $f'(x) = \partial f(x)/\partial x$.

Система (2.4) рассматривается со следующими начальными условиями:

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [-1, 1], \quad (2.5)$$

где $u'_0(x) = \partial u_0(x)/\partial x$.

Далее будем считать, что начальная функция $u_0(\cdot)$ является непрерывно дифференцируемой, а функция фитнеса $f(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемой.

Пусть число $T > 0$ выбрано таким образом, что на отрезке $[0, T]$ решения

$$(x(\cdot, y), p(\cdot, y), z(\cdot, y)): [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (2.6)$$

системы (2.4), (2.5) определены (продолжимы до момента T) для всех $y \in [-1, 1]$.

Компоненты $x(\cdot, y)$ решений (2.6) называются фазовыми характеристиками, компоненты $p(\cdot, y)$ и $z(\cdot, y)$ — импульсными характеристиками и характеристиками значения соответственно.

Если в точке $(t, x) \in \bar{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$ выполнены условия

$$x(t, y) = x, \quad \frac{\partial x(t, y)}{\partial y} \neq 0 \quad \text{для } t \in [0, T], \quad y \in [-1, 1], \quad (2.7)$$

то графики фазовых характеристик $x(\cdot, y)$ не пересекаются в точке $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$ и множество параметров

$$Y(t, x) = \{y \in [-1; 1] \mid x(t, y) = x\} = \{y(t, x)\}$$

одноэлементно. Для построения классического решения уравнения Гамильтона — Якоби (2.1) в точке $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$, где выполняется (2.7), применим метод характеристик Коши (см., например, [4]), согласно которому классическое решение представимо в виде

$$u(t, x) = z(t, y(t, x)), \quad (t, x) \in \bar{\Pi}_T.$$

Поскольку в рассматриваемой задаче гамильтониан $H(x, p)$ (2.2) и краевая функция $u_0(x)$ нелинейны, сколь бы гладкими ни были функция фитнеса $f(\cdot)$ и начальная функция $u_0(\cdot)$, условие (2.7) выполняется лишь в достаточно малой окрестности начальных условий $t = 0$, $x \in [-1, 1]$, $u(0, x) = u_0(x)$. Кроме того, как показано в [9], в множестве $\bar{\Pi}_T$ существуют точки, через которые не проходит ни одна фазовая проекция характеристик (2.4), (2.5).

Таким образом, с помощью метода характеристик решение задачи (2.1)–(2.3) можно построить лишь локально. В данной задаче не существует глобального классического решения, поэтому решение в $\bar{\Pi}_T$ следует рассматривать в обобщенном смысле.

2.3. Обобщенное решение для задачи с фазовыми ограничениями

В [9] показано, что известные определения обобщенных решений [11; 12; 17] неприменимы к задаче (2.1)–(2.3) и введено новое определение (см. ниже определение 1) непрерывного обобщенного решения этой начальной задачи на компактном множестве $\bar{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$. Определение использует следующие понятия негладкого анализа [13; 18].

Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом \bar{W} будем обозначать его замыкание. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W .

Пусть $u(\cdot) \in C(\bar{W})$ и $(t, x) \in \bar{W}$. *Субдифференциалом* функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^-u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \left| \liminf_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in \bar{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right. \right\}. \quad (2.8)$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в граничных точках множества W субдифференциал $D^-u(t, x)$, если он непуст, является неограниченным множеством. Действительно, пусть точка (t_*, x_*) принадлежит границе множества W , $(a, s) \in D^-u(t_*, x_*)$, а вектор (n_1, n_2) является внешней нормалью к множеству \bar{W} в точке (t_*, x_*) . Тогда, как нетрудно заметить из определения (2.8) субдифференциала, для любого положительного числа k справедливо

$$(a + kn_1, s + kn_2) \in D^-u(t_*, x_*).$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^+u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \left| \limsup_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in \bar{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right. \right\}.$$

Символом $\text{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot) \in C(\bar{W})$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial u(t, x) = \text{co} \left\{ (a, s) \left| a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial x}; \right. \right. \\ \left. \left. (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \in \bar{W} \cap \text{Dif}(u) \right\}. \quad (2.9)$$

Заметим, что в случае локальной липшицевости функции $u(\cdot)$ множество (2.9) совпадает с субдифференциалом Кларка [18].

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) в области $\bar{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию (2.3) и условиям

$$\begin{aligned} a + H(x, s) &\leq 0 \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \\ a + H(x, s) &\geq 0 \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \\ a + H(x, s) &\geq 0 \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x) \cap \partial u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Gamma_T, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\Pi_T = (0, T) \times (-1, 1)$, $\Gamma_T = \{(t, x) | 0 < t < T, x = 1\} \cup \{(t, x) | 0 < t < T, x = -1\}$.

Отметим, что введенное в работе [13] понятие обобщенного вязкостного решения для уравнения (2.1) на замкнутом множестве W , в отличие от определения 1, требует от этого решения задачи (2.1)–(2.3) в области $W = \bar{\Pi}_T$ выполнения неравенства (2.10) в точках границы $(t, x) \in \Gamma_T$ для всех $(a, s) \in D^-u(t, x)$.

З а м е ч а н и е 2. В [13] были получены условия, обеспечивающие выполнение теорем существования и единственности вязкостного решения на компакте W . При этом одним из основных условий, при которых доказано существование обобщенного вязкостного решения, является следующее условие коэрцитивности гамильтониана:

$$H(x, p) \rightarrow +\infty \text{ при } |p| \rightarrow \infty, \quad x \in W. \quad (2.11)$$

Для гамильтониана, задаваемого соотношением (2.2), условие (2.11) не выполнено, например, при $x = 1$ и $x = -1$, поэтому известные теоремы существования обобщенного вязкостного решения в смысле [13] не могут быть использованы для задачи (2.1)–(2.3).

В [9] доказано существование непрерывного обобщенного решения начальной задачи (2.1)–(2.3) в смысле определения 1 на компактном множестве $\overline{\Pi}_T$. Доказательство основано на применении методов теории оптимального управления и исследовании свойств решений характеристической системы

$$\dot{x} = H_p(x, p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \quad (2.12)$$

$$\dot{p} = -H_x(x, p) = f'(x) + \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{2}. \quad (2.13)$$

Основной результат [9] можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть $\varphi(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в \mathbb{R}^2 и такая, что

$$\begin{aligned} \varphi(0, x) &= u_0(x) \quad \forall x \in [-1, 1]; \\ \frac{\partial \varphi(t, \pm 1)}{\partial t} + H\left(\pm 1, \frac{\partial \varphi(t, \pm 1)}{\partial x}\right) &= 0 \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда существует непрерывное обобщенное решение $u(t, x)$ начальной задачи (2.1)–(2.3) на компактном множестве $\overline{\Pi}_T$, которое при всех $(t, x) \in \overline{\Pi}_T$ представимо в виде

$$u(t, x) = \max_{x(t, y^\sharp) = x} \left[\varphi(t^\sharp, y^\sharp) + \int_{t^\sharp}^t p(\tau, y^\sharp) H_p(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) - H(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) d\tau \right], \quad (2.14)$$

где $t^\sharp \in [0, T]$, причем $y^\sharp = y \in [-1, 1]$, если $t^\sharp = 0$, и $y^\sharp = \pm 1$, если $t^\sharp > 0$; функции $(x(\cdot, y^\sharp), p(\cdot, y^\sharp)): [t^\sharp, t] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — решения характеристической системы (2.12), (2.13), удовлетворяющие начальным условиям

$$x(t^\sharp, y^\sharp) = y^\sharp, \quad p(t^\sharp, y^\sharp) = \frac{\partial \varphi(t^\sharp, y^\sharp)}{\partial y} = p_0(t^\sharp, y^\sharp).$$

Таким образом, с помощью гладкой функции $\varphi(\cdot)$ начальная функция $u_0(\cdot)$ непрерывным образом продолжается на границу фазовых ограничений, и исходная начальная задача Коши (2.1)–(2.3) сводится к задаче Дирихле, обобщенное (минимаксное) решение которой существует и единственно. При этом решение формируется с помощью операции максимума из характеристик, выпущенных с начального многообразия и с границ фазового ограничения.

Поскольку возможны различные продолжения $\varphi(\cdot)$ начальной функции $u_0(\cdot)$, решение исходной задачи (2.1)–(2.3) неединственно.

3. Задача о построении решения с заданными свойствами

В этом разделе рассматривается задача о построении обобщенного решения $u(t, x)$ задачи (2.1)–(2.3), определенного и непрерывного на множестве $\overline{\Pi}_T \ni (t, x)$, которое обладает следующим свойством: в части прямоугольника $\overline{\Pi}_T$, заполненной графиками классических характеристик уравнения Гамильтона — Якоби (2.1)–(2.2), стартующих с начального многообразия (2.5), решение $u(t, x)$ определяется только с помощью этих характеристик формулой (2.14).

3.1. Постановка задачи

Пусть $x^-(t) = x(t, -1)$ и $x^+(t) = x(t, +1)$, $t \in [0, T]$ — фазовые компоненты характеристик (2.6), выпущенных в момент $t = 0$ соответственно из точек $x = -1$ и $x = 1$.

Определим область $\Omega_T^0 \subset \Pi_T$ следующим образом:

$$\Omega_T^0 = \{(t, x): t \in [0, T], x^-(t) \leq x \leq x^+(t)\}. \quad (3.1)$$

Пусть выполнено следующее условие.

А. Фазовые компоненты $x(\cdot, y)$ характеристик (2.6) с краевым условием (2.5) удовлетворяют неравенствам

$$x^-(t) = x(t, -1) \leq x(t, y) \leq x(t, +1) = x^+(t) \quad \forall y \in [-1, 1], \quad \forall t \in [0, \bar{T}],$$

$$\bar{T} = \min\{t \mid t > 0, x^-(t) = x^+(t)\}$$

и прямоугольник $\bar{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$, в котором рассматривается задача (2.1)–(2.3), выбран таким образом, что

$$T \leq \bar{T}.$$

Из условия **А** следует, что все фазовые компоненты характеристик (2.6), выпущенных в момент $t = 0$ с начального многообразия (2.5), лежат в области Ω_T^0 .

Целью данной работы является построение обобщенного решения, удовлетворяющего определению 1 и имеющего в области Ω_T^0 следующий вид:

$$u(t, x) = \max_{x(t, y) = x} \int_0^t p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)) d\tau + u_0(y), \quad (3.2)$$

где $x(t) = x(t, y)$, $p(t) = p(t, y)$, $t \geq 0$, — решения системы (2.4) с начальными условиями $x(0, y) = y$, $p(0, y) = \partial u_0(y) / \partial x$, $y \in [-1, 1]$.

З а м е ч а н и е 3. При выполнении условия **А** прямоугольник $\bar{\Pi}_T$ разбивается на три части

$$\bar{\Pi}_T = G_T^+ \cup \Omega_T^0 \cup G_T^-,$$

где

$$G_T^+ = \{(t, x): t \in [0, T], x^+(t) \leq x \leq 1\}, \quad G_T^- = \{(t, x): t \in [0, T], -1 \leq x \leq x^-(t)\}, \quad (3.3)$$

и, таким образом, задачу о построении обобщенного решения со свойством (3.2) можно трактовать как задачу о непрерывном продолжении обобщенного решения (3.2) из области Ω_T^0 на области G_T^- и G_T^+ .

3.2. Оценки времени продолжимости

В этом разделе исследуются свойства характеристик (2.6), которые будут использованы для построения обобщенного решения, удовлетворяющего требованиям (3.1)–(3.2).

Как было отмечено выше, рассматриваемые построения проводятся на отрезке $[0, T]$ так, что решения системы (2.4), (2.5) определены (продолжимы до момента T) для всех $y \in [-1, 1]$. В силу нелинейной динамики характеристической системы импульсные характеристики непродолжимы на весь полуинтервал $[0, \infty)$. Символом $T^* = T^*(y)$ обозначим такой момент времени, что на интервале $[0, T^*)$ существует непродолжимое вправо решение $x = x(\cdot, y)$, $p = p(\cdot, y)$, $z = z(\cdot, y)$ задачи Коши (2.4), (2.5). Приведем здесь оценки для момента продолжимости T^* , зависящие от начальных данных (2.5).

Поскольку функция фитнеса $f(\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, существуют константы M_1 и M_2 такие, что

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2, \quad x \in [-1, 1].$$

Пусть задано $y \in [-1, 1]$. Обозначим $p(0) = p(0, y)$. Для $i = 1, 2$ введем константы

$$K_i = \frac{1}{2} \ln(-M_i + \sqrt{M_i^2 + 1}), \quad C_i = \frac{|e^{2p(0)} + M_i - \sqrt{M_i^2 + 1}|}{e^{2p(0)} + M_i + \sqrt{M_i^2 + 1}}.$$

Несложно доказать, что справедливо неравенство $K_1 \geq K_2$.

Для момента T^* справедливы следующие оценки, зависящие от $p(0)$.

Теорема 2. а) Пусть $p(0) > K_1$. Тогда

$$T^* < \frac{-1}{2\sqrt{M_1^2 + 1}} \ln C_1, \quad 0 < C_1 < 1, \quad \text{и } p(t) \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow T^*.$$

б) Пусть $p(0) < K_2$. Тогда

$$T^* < \frac{1}{2\sqrt{M_2^2 + 1}} \ln \left(\frac{-M_2 + \sqrt{M_2^2 + 1}}{C_2(M_2 + \sqrt{M_2^2 + 1})} \right), \quad C_2 > 0, \quad \text{и } p(t) \rightarrow -\infty \text{ при } t \rightarrow T^*.$$

в) Пусть $K_2 \leq p(0) \leq K_1$. Тогда

$$T^* \geq \min \left\{ \frac{1}{2\sqrt{M_1^2 + 1}} \ln \left(\frac{-M_1 + \sqrt{M_1^2 + 1}}{C_1(M_1 + \sqrt{M_1^2 + 1})} \right), \frac{-1}{2\sqrt{M_2^2 + 1}} \ln C_2 \right\}, \quad C_1 > 0, \quad 0 < C_2 < 1.$$

Доказательство основано на анализе поведения решений дифференциального уравнения с разделяющимися переменными вида

$$\dot{p} = M + \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{2}. \tag{3.4}$$

Общий интеграл уравнения (3.4) имеет вид

$$\frac{|e^{2p(t)} + M - \sqrt{M^2 + 1}|}{e^{2p(t)} + M - \sqrt{M^2 + 1}} = C e^{2t\sqrt{M^2 + 1}}, \tag{3.5}$$

где начальному значению $p(0)$ соответствует

$$C = \frac{|e^{2p(0)} + M - \sqrt{M^2 + 1}|}{e^{2p(0)} + M - \sqrt{M^2 + 1}}. \tag{3.6}$$

Решения уравнения (3.4), соответствующие $M = M_1$ и $M = M_2$, являются соответственно минорантой и мажорантой для импульсной компоненты характеристической системы (2.4). На основе этого из выражений (3.5), (3.6) получены оценки для момента продолжимости $T^* = T^*(y)$, содержащиеся в утверждении теоремы. \square

Определим

$$T_* = \min_{y \in [-1, 1]} T^*(y).$$

Таким образом, момент T , задающий прямоугольник $\bar{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$, на котором рассматривается задача (2.1)–(2.3), следует выбирать из условия

$$0 < T \leq \min\{\bar{T}, T_*\}.$$

3.3. Дополнительные предположения и вспомогательные утверждения

Далее будем предполагать, что наряду с условием **A** в задаче (2.1)–(2.3) выполнены следующие условия на входные данные $f(\cdot)$ и $u_0(\cdot)$.

B1. Существует непрерывная производная $u'_0(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, и справедливы неравенства

$$u'_0(1) < 0, \quad u'_0(-1) > 0.$$

B2. Существует непрерывная, монотонно неубывающая производная $f'(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, и справедливы неравенства

$$2f'(1) + e^{2u'_0(1)} < e^{-2u'_0(1)}, \quad -2f'(-1) + e^{-2u'_0(-1)} < e^{2u'_0(-1)}.$$

При выполнении условий **A**, **B1** и **B2** справедливы следующие утверждения, описывающие поведение характеристик, выпущенных из крайних точек начального многообразия.

Лемма 1 [14, лемма 3]. Пусть $p^+(t)$, $p_1(t)$, $x^+(t)$, $x_1(t)$ — решения (2.12), (2.13), удовлетворяющие начальным условиям

$$p_1(0) = p_1 < p^+ = p^+(0); \quad x_1(0) = x^+(0) = 1,$$

тогда при всех $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$p^+(t) \geq p_1(t), \quad x^+(t) \leq x_1(t).$$

Лемма 2 [14, лемма 4]. Пусть $p^-(t)$, $p_2(t)$, $x^-(t)$, $x_2(t)$ — решения (2.12), (2.13), удовлетворяющие начальным условиям

$$p_2(0) = p_2 > p^- = p^-(0); \quad x_2(0) = x^-(0) = -1,$$

тогда при всех $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$p^-(t) \leq p_2(t), \quad x^-(t) \geq x_2(t).$$

4. Конструкция обобщенного решения

Пусть выполнены условия **A**, **B1**, **B2**. Предлагается следующая конструкция непрерывного на множестве $\bar{\Pi}_T = [0, T] \times [0, 1]$ обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3), опирающаяся на изложенные выше результаты.

В области Ω_T^0 (3.1) решение определяется с помощью соотношения (3.2) и согласно результатам [9] является субдифференцируемой функцией.

Определим теперь решение в области G_T^- (3.3). Рассмотрим фазовые $x^-(\cdot; p_0)$ и импульсные $p^-(\cdot; p_0)$ характеристики — решения системы (2.12), (2.13), соответствующие начальным данным

$$x^-(0, p_0) = -1, \quad p^-(0, p_0) = p_0, \quad p_0 \in [u'_0(-1), +\infty).$$

Из леммы 2 следует, что для любой внутренней точки (t_*, x_*) области G_T^- существует единственный параметр $p_0 \in [u'_0(-1), +\infty)$, $p_0 = p_0(t_*, x_*)$ такой, что $x^-(t_*, p_0(t_*, x_*)) = x_*$.

Пусть $(t_*, x_*) \in G_T^-$. Положим

$$u(t_*, x_*) = u_0(-1) + \int_0^{t_*} [p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))]d\tau, \quad (4.1)$$

где $x(t) = x^-(t, p_0(t_*, x_*))$, $p(t) = p^-(t, p_0(t_*, x_*))$.

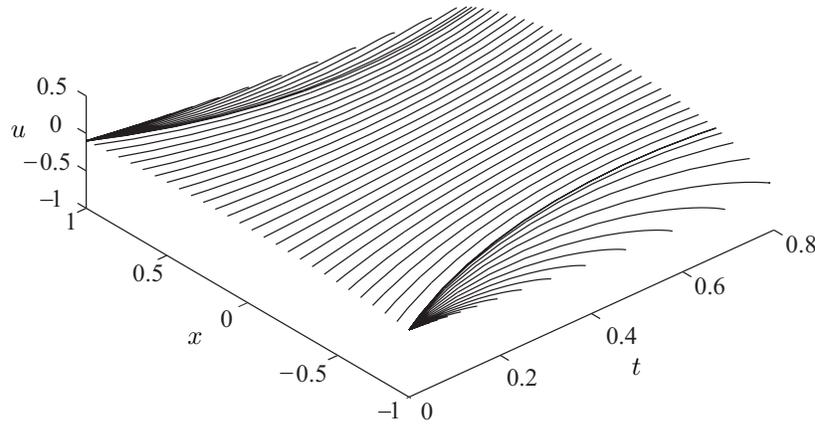


Рис. 1. График обобщенного решения.

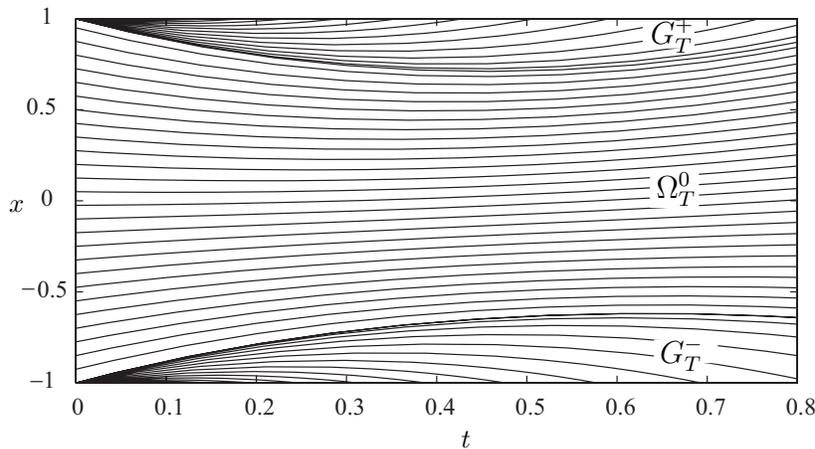


Рис. 2. Фазовые характеристики.

В области G_T^+ (3.3) обобщенное решение определяется с помощью решений $x^+(\cdot; p_0)$ и $p^+(\cdot; p_0)$ характеристической системы (2.12), (2.13), соответствующих начальным данным

$$x^+(0) = 1, \quad p^+(0) = p_0, \quad p_0 \in (-\infty, u'_0(-1)].$$

Из леммы 1 следует, что для любой внутренней точки (t^*, x^*) области G_T^+ существует единственный параметр $p_0 \in (-\infty, u'_0(-1)]$, $p_0 = p_0(t^*, x^*)$ такой, что $x^+(t^*, p_0(t^*, x^*)) = x^*$.

Пусть $(t^*, x^*) \in G_T^+$. Положим

$$u(t^*, x^*) = u_0(1) + \int_0^{t^*} [p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))]d\tau, \quad (4.2)$$

где $x(t) = x^+(t, p_0(t^*, x^*))$, $p(t) = p^+(t, p_0(t^*, x^*))$.

З а м е ч а н и е 4. Значения функции $u(\cdot)$, задаваемые формулами (4.1), (4.2) совпадают со значениями характеристик значения $z(\cdot)$ (2.4), соответствующих начальным данным

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = p_0, \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y = \mp 1.$$

Применяя схему доказательства метода характеристик Коши [19], можно показать, что построенная таким образом функция является непрерывно дифференцируемой во внутренних

точках (t, x) областей G_T^- и G_T^+ и ее градиент равен $(-H(x, p(t)), p(t))$, где $p(t)$ — соответственно $p^-(t, p_0(t, x))$ и $p^+(t, p_0(t, x))$.

Используя необходимые и достаточные условия [20] экстремума функционала в задаче с закрепленными концами

$$I(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) = \int_0^t \min_{p \in R} [p\dot{x}(\tau) - H(x(\tau), p)] d\tau, \quad x(0) = \mp 1, \quad x(t) = x, \quad (t, x) \in G$$

(где $G = G_T^-$ или $G = G_T^+$) в классе непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot)$, а также результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений, можно доказать, что построенная таким образом функция является непрерывной в замкнутой области \bar{P}_T и удовлетворяет определению 1.

5. Результаты моделирования

На рис. 1 и рис. 2 приведены соответственно характеристики, формирующие непрерывное обобщенное решение, и их проекции на плоскость (t, x) для случая следующих входных данных задачи $f(x) = \frac{1}{8}(x - 0.4)^2$, $u_0(x) = -0.1x^2$.

Построения осуществлялись согласно описанной выше конструкции. В области Ω_T^0 решение строится из характеристик (2.4), (2.5) в соответствии с формулой (3.2). В области G_T^- решение строится в соответствии с формулой (4.1) из характеристик (2.4), отвечающих начальным условиям $x(0, -1) = -1$, $p(0, p_0) = p_0$, $z(0, -1) = u_0(-1)$, $p_0 \in [u'_0(-1), \infty)$. В области G_T^+ решение формируется согласно формуле (4.2) из характеристик (2.4) таких, что $x(0, 1) = 1$, $p(0, p_0) = p_0$, $z(0, 1) = u_0(1)$, $p_0 \in (-\infty, u'_0(1)]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.
2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1961. 392 с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
5. Куржанский А.Б., Никонов О.И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 5. С. 578–581.
6. Kurzhanski A.B. Comparison principle for equations of the Hamilton–Jacobi type in control theory // Proc. Steklov Inst. Math. 2006. Vol. 251. P. 185–195.
7. Kurzhanski A., Varaiya P. The Hamilton–Jacobi equations for nonlinear target control and their approximation // Analysis and Design of Nonlinear Control Systems / eds. A. Astolfi, L. Marconi. New York: Springer-Verlag, 2007. P. 77–90.
8. Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E (3). 2008. Vol. 78, no. 4, 041908. P.1–6.
9. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
10. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
11. Subbotin A.I. Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
12. Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
13. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, no. 2. P. 643–683.

14. **Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.** Построение обобщенного решения уравнения, сохраняющего тип Беллмана в заданной области фазового пространства // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 243–256.
15. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Math. and its Appl. 2004. Vol. 20. P. 2955–3091.
16. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
17. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сб. 1966. Т. 70 (112), № 3. С. 394–415.
18. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
19. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.
20. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

Субботина Нина Николаевна
член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором

Поступила 01.10.2014

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: subb@uran.ru

Шагалова Любовь Геннадьевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: shag@imm.uran.ru

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ДИНАМИКИ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ПРИ РЕСУРСНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ¹**А. М. Тарасьев, А. А. Усова, W. Wang, О. В. Русских**

Работа посвящена задаче оптимального управления, основанной на модели оптимизации продуктивности природных ресурсов. Анализ решения проводится в рамках принципа максимума Понтрягина для задач с бесконечным горизонтом. Исследуются свойства гамильтоновой функции. В рамках метода разрешения особенностей предлагается замена переменных, позволяющая существенно упростить решение задачи на основе анализа стационарных состояний и соответствующих матриц Якоби гамильтоновой системы. Важным свойством замены является возможность адекватной экономической интерпретации новых переменных. Изучается вопрос о существовании стационарных состояний гамильтоновой динамики в области переходного режима управления и строится стабильное многообразие для определения краевых условий интегрирования гамильтоновой системы в обратном времени. На основе проведенного анализа предлагается алгоритм построения оптимальных траекторий при наличии ресурсных ограничений. Анализ алгоритма позволяет оценить время его сходимости, а также вычислить погрешность работы алгоритма по функционалу качества задачи управления, опираясь на свойства гамильтоновой системы и модельные ограничения. На основе проведенного исследования анализируется асимптотическое поведение оптимальных траекторий. Приводятся графические результаты работы алгоритма.

Ключевые слова: оптимальное управление, модели экономического роста, принцип максимума Понтрягина, положение равновесия, интегрирование гамильтоновой динамики.

A. M. Taras'ev, A. A. Usova, W. Wang, O. V. Russkikh. Optimal trajectory construction by integration of Hamiltonian dynamics in models of economic growth under resource constraints.

The paper is devoted to an optimal control problem based on a model of optimization of natural resource productivity. The analysis of the problem is conducted with the use of Pontryagin's maximum principle adjusted to problems with infinite time horizon. Properties of the Hamiltonian function are investigated. Based on methods for resolving singularities, a special change of variables is suggested, which allows to simplify essentially the solution of the problem by means of analyzing steady states and corresponding Jacobian matrices of the Hamiltonian system. An important property of the change of variables is the possibility of an adequate and meaningful economic interpretation of the new variables. The existence of steady states of the Hamiltonian dynamics in the domain of transient control regime is studied, and a stable manifold is constructed for finding boundary conditions of integration of the Hamiltonian system in backward time. On the basis of the implemented analysis, an algorithm is proposed for constructing optimal trajectories under resource constraints. The analysis of the algorithm provides estimates for its convergence time and for its error with respect to the utility functional of the control problem based on the properties of the Hamiltonian system and constraints of the model. The asymptotic behavior of optimal trajectories is studied with the use of the implemented research. The operation of the algorithm is illustrated by graphical results.

Keywords: optimal control, models of economic growth, Pontryagin's maximum principle, integration of Hamiltonian dynamics.

Введение

В работе в рамках теории экономического роста [1–5] рассматривается модификация модели оптимизации продуктивности природных ресурсов [6; 7] включением в нее капитала как основного производственного фактора [8]. Предполагается, что природные ресурсы, служащие еще одним производственным фактором, истощаются и их запас ограничен. Такое ограничение штрафуется естественным механизмом ценообразования, предполагающим гиперболический рост цен при истощении запасов. Ставится задача оптимального управления по максимизации интегрального индекса потребления, основополагающего в моделировании инвестиционных процессов [9; 10]. В этой задаче траектории системы управляются инвестициями в капитал и

¹Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 14-18-00574).

инвестициями в новые технологии и дематериализацию экономики, направленными на повышение ее продуктивности. С точки зрения постановки проблема классифицируется как задача оптимального управления на бесконечном интервале времени со штрафной функцией на истощающиеся ресурсы.

Следует сказать, что исследования моделей экономического роста интенсивно развиваются в последнее время. Основным инструментом исследований являются методы теории оптимального управления, в особенности принцип максимума Понтрягина [11] и его модификации для задач управления на бесконечном интервале времени [12]. В этих исследованиях рассматриваются теоретические и прикладные аспекты [13–26], направленные на разработку методов анализа и построения оптимальных решений в задачах управления с бесконечным горизонтом. Исследуются новые постановки для задач управления с фазовыми и интегральными ограничениями. Изучаются проблемы, связанные с увеличением размерности и наличием гетерогенных блоков. Анализ рассматриваемой модели развивает и дополняет эти исследования методами и конструкциями теории управления в условиях неопределенности [27–29].

Отметим, что наиболее близкая к нашей постановка рассматривалась в работе [14], решение в которой сводилось к одномерной нелинейной динамике с фазовыми ограничениями. В нашей постановке при введении ценового штрафа на истощающиеся ресурсы задача изначально является трехмерной и не допускает редукции к меньшим размерностям. Кроме того, введение экспоненциального сомножителя в коэффициент полной продуктивности факторов, описывающего диффузию новых технологий в экономическом росте, обеспечивает в нашей модели существование устойчивых состояний со строго положительными фазовыми координатами, что можно интерпретировать как возможность устойчивого развития в экономической системе, тогда как в модели [14] основным режимом в оптимальном решении является убывающий тренд, ведущий систему к нулевым уровням производства, т.е. к коллапсу.

Важно подчеркнуть, что интегрирование гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом наталкивается на большие сложности. Они связаны с тем, что дифференциальные уравнения в нелинейной гамильтоновой системе оказываются жесткими [30] в силу того, что в правых частях появляются члены, в которых сопряженные переменные стоят в знаменателях при максимизации гамильтониана и стремятся к нулю в силу условий трансверсальности. Кроме того, интегрирование гамильтоновых систем должно выполняться на больших (в пределе бесконечных) временных интервалах, что создает дополнительные проблемы и предъявляет повышенные требования к точности вычислений. В связи с этим актуальной задачей является нахождение такой замены переменных в гамильтоновой системе, чтобы она разрешала особенности [31] и упрощала решение задачи на основе анализа стационарных состояний и свойств матрицы Якоби. В работе предлагается такая замена, позволяющая существенно упростить анализ решения и сделать устойчивым алгоритм построения оптимальных траекторий. Следует заметить, в рассматриваемой модели новые переменные в замене переменных имеют естественные экономические интерпретации.

На основе анализа свойств гамильтоновой системы предлагается алгоритм построения оптимальной траектории в рассматриваемой задаче управления с бесконечным горизонтом. На первом шаге вычисляется стационарное состояние гамильтоновой системы в новых переменных, разрешающих особенности. На втором шаге по стабильному многообразию, определяемому матрицей Якоби гамильтоновой системы в стационарной точке, строится нелинейный стабилизатор. Траектории, порожденные таким стабилизатором, сходятся к компонентам стационарной точки, отвечающим фазовым переменным, и согласно [32] с точностью до членов более высокого порядка малости, чем первый, имеют одинаковые скорости с оптимальными траекториями в малых окрестностях стационарного состояния. На третьем шаге гамильтонова система интегрируется в обратном времени от краевого условия, определенного траекторией стабилизатора в малой окрестности стационарного состояния.

На основе разработанного метода проводится моделирование оптимальных траекторий,

изучаются их тренды роста и выполняется анализ чувствительности по ключевым параметрам модели.

1. Описание модели и постановка задачи управления

1.1. Модель экономического роста

Модель эффективного использования природных ресурсов [6; 26] исходит из того, что запасы ресурсов ограничены, а относительный рост продуктивности материалов можно контролировать за счет инвестиций, направленных на развитие технологий, увеличивающих продуктивность ресурсов [4; 5; 21; 22; 33].

В модели введены переменные, отвечающие за текущее потребление ресурсов $m(t)$ в момент времени t , и кумулятивный объем ресурсов $M(t)$, израсходованных к моменту времени t :

$$M(t) = \int_0^t m(s) ds. \quad (1.1)$$

Начальный уровень потребления материалов обозначен символом m_0 . Ввиду ограниченности запасов природных ресурсов существует постоянная величина M_0 , обозначающая общий запас природных ресурсов на начальный момент времени, т. е. $M(t) \leq M_0$, $t \geq 0$.

Объемы выпуска в момент времени t обозначаются символом $y(t)$. Предполагается, что выпуск зависит от двух производственных факторов: объемов потребляемых природных ресурсов $m(t)$ и основных фондов $k(t)$, приведенных в стоимостном выражении. Указанная связь описывается экспоненциальной *производственной функцией* типа Кобба — Дугласа [8]

$$y(t) = ae^{bt} m^\alpha(t) k^{1-\alpha}(t), \quad a > 0, \quad b \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.2)$$

где параметр a есть коэффициент масштаба, символ b определяет процесс роста выпуска $y(t)$, константа α является коэффициентом эластичности.

Предположение 1. *Основной капитал k — один из наиболее значимых производственных факторов в сравнении с уровнем использования природных ресурсов $m(t)$. Вклад каждого из факторов в объем выпуска страны y определяется за счет коэффициента эластичности α . Поэтому для придания большего веса именно основному капиталу k будем предполагать, что его вес $(1 - \alpha)$ в производственной функции $y = f(t, m, k)$ превосходит вес α фактора, отвечающего объемам потребления природных ресурсов m . Следовательно, получим $1 - \alpha > \alpha \Rightarrow \alpha < 0.5$.*

Продуктивность ресурсов в момент времени t обозначена символом $z = z(t)$ и задается соотношением

$$z(t) = \frac{y(t)}{m(t)}. \quad (1.3)$$

В модель включен *механизм ценообразования* [6], который учитывает ограниченность запасов природных ресурсов, предполагая обратную пропорциональность между текущими ценами $p(t)$ на материалы и их остатками $M_0 - M(t)$, а именно

$$p(t) = \frac{p_0 M_0}{M_0 - M(t)},$$

где положительный параметр p_0 играет роль начальных цен на природные ресурсы.

Ввиду замкнутости рассматриваемой экономической системы можно выписать следующее *балансовое соотношение*:

$$y(t) = c(t) + m(t)p(t) + u(t)y(t) + v(t)y(t),$$

которое говорит о том, что текущий объем внутреннего валового продукта $y(t)$ расходуется на потребление $c(t)$, закупку природных ресурсов $m(t)p(t)$, инвестиции в повышение продуктивности материалов $u(t)y(t)$ и в основной капитал $v(t)y(t)$. Уравнение баланса также дает ряд ограничений на инвестиционные составляющие модели [6; 21; 26]:

$$0 \leq u(t) + v(t) \leq 1 - \frac{c(t)}{y(t)} - \frac{p(t)m(t)}{y(t)} < 1, \quad u(t) \geq 0, \quad v(t) \geq 0.$$

В силу последних неравенств можно указать такие постоянные величины \bar{u} и \bar{v} , что выполнены ограничения

$$0 \leq u(t) \leq \bar{u} < 1, \quad 0 \leq v(t) \leq \bar{v} < 1, \quad 0 \leq u(t) + v(t) \leq \bar{u} + \bar{v} < 1. \quad (1.4)$$

Кроме этого, соотношение баланса дает возможность выразить текущий уровень потребления $c(t)$:

$$c(t) = y(t) \left(1 - \frac{p(t)m(t)}{y(t)} - u(t) - v(t) \right) \approx y(t) \left(1 - \frac{p(t)m(t)}{y(t)} - u(t) \right) (1 - v(t)). \quad (1.5)$$

З а м е ч а н и е. В силу представления уровня потребления по формуле (1.5) предполагается, что выражения в скобках положительны. Следовательно, отношение текущих затрат на закупку природных ресурсов $p(t)m(t)$ к текущему объему выпуска $y(t)$ должно быть меньше величины $1 - \bar{u}$, т. е.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{p(t)m(t)}{y(t)} - u(t) > 0 \quad \forall t \geq 0 &\Rightarrow 1 - \frac{p(t)m(t)}{y(t)} - \bar{u} > 0 \\ \Rightarrow \exists K > 0: 0 \leq \frac{p(t)m(t)}{y(t)} \leq K < 1 - \bar{u} \quad \forall t \geq 0. &\end{aligned} \quad (1.6)$$

Целью данной модели служит определение таких инвестиционных стратегий $u(t)$ и $v(t)$, при которых удастся максимизировать функционал качества процесса управления, представленный в виде интегрального индекса потребления логарифмического типа, дисконтированного на бесконечном промежутке времени.

1.2. Динамика основных переменных модели

Динамика изменения основных фондов подчиняется модели Солоу — Шелла [2; 3]. Эта модель предполагает, что рост фондов обусловлен инвестициями в них с поправкой на величину обесценивания капитала, пропорциональную его текущему объему.

$$\dot{k}(t) = v(t)y(t) - \mu k(t), \quad (1.7)$$

где положительный параметр μ является коэффициентом амортизации основных фондов.

В силу предположения о том, что относительный рост продуктивности природных ресурсов пропорционален инвестициям, направленным на увеличение эффективности их потребления [6], получим соотношение

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \beta u(t), \quad k(0) = k_0,$$

где положительный параметр β отвечает за эффективность инвестиционной стратегии. Учитывая связь между выпуском $y(t)$ и продуктивностью ресурсов (1.3), а также производственную функцию (1.2) и динамику основного капитала (1.7), получим, что

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \frac{b - \beta u(t)}{1 - \alpha} + v(t) \frac{y(t)}{k(t)} - \mu, \quad m(0) = m_0. \quad (1.8)$$

1.3. Фазовые переменные

Для дальнейшего анализа модели удобно ввести в рассмотрение следующие переменные:

$$x_1(t) = e^{(b/\alpha)t} \left(1 - \frac{M(t)}{M_0}\right), \quad x_2(t) = e^{(b/\alpha)t} m(t), \quad x_3(t) = \frac{y(t)}{k(t)}. \quad (1.9)$$

Учитывая динамику первичных модельных переменных (1.7), (1.8) и равенство (1.1), можно найти соотношения, которым должны удовлетворять новые фазовые переменные

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{b}{\alpha} x_1(t) - \frac{1}{M_0} x_2(t), & x_1(0) = x_1^0 = 1, \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \left(\frac{b - \alpha\beta u(t)}{\alpha(1 - \alpha)} - \mu + v(t)x_3(t) \right), & x_2(0) = x_2^0 = m_0, \\ \dot{x}_3(t) = \frac{b - \alpha\beta u(t)}{1 - \alpha} x_3(t), & x_3(0) = x_3^0 = a \left(\frac{m_0}{k_0} \right)^\alpha. \end{cases} \quad (1.10)$$

Уровень потребления в новых переменных принимает вид

$$c(t) = a^{1/\alpha} x_2(t) x_3^{-(1-\alpha)/\alpha}(t) \left(1 - u(t) - p_0 a^{-1/\alpha} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}(t)}{x_1(t)}\right) (1 - v(t)).$$

1.4. Задача оптимального управления

На основе двухфакторной модели развития ресурсозависимой экономики можно сформулировать задачу оптимального управления.

З а д а ч а. Требуется максимизировать функционал качества

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\ln x_2(t) - \ln x_3^{(1-\alpha)/\alpha}(t) + \ln(1 - v(t)) + \ln \left(1 - u(t) - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}(t)}{x_1(t)} \right) \right) dt \quad (1.11)$$

на траекториях динамической системы (1.10), удовлетворяющей ограничениям на управления (1.4). Здесь положительный параметр ρ является дисконтирующим множителем.

Исследование задачи проводится в рамках принципа максимума Понтрягина [11], адаптированного к задачам на неограниченном промежутке времени [12].

Применение методов теории управления к анализу моделей экономического роста можно найти в работах К. Эрроу [1], Е. Балдера [15], Г. Файтингера [16], Г. Гроссмана и Е. Хелпмана [4], а также в трудах А.М. Тарасьева [6; 21; 22; 26; 33] в соавторстве с С. Ватанабе, Б. Жу, А.А. Красовским, А.А. Усовой.

2. Анализ задачи в рамках принципа максимума Понтрягина

2.1. Гамильтонова функция и ее свойства

Стационарная гамильтонова функция $\tilde{H}(x, \psi, u, v)$ [6; 26] задачи управления имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, \psi, u, v) = & \ln x_2 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \ln x_3 + \ln(1 - v) + \ln \left(1 - u - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1} \right) \\ & + \psi_1 \left(\frac{b}{\alpha} x_1 - \frac{1}{M_0} x_2 \right) + \psi_2 x_2 \left(\frac{b - \alpha\beta u}{\alpha(1 - \alpha)} - \mu + v x_3 \right) + \psi_3 x_3 \frac{b - \alpha\beta u}{1 - \alpha}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ есть вектор сопряженных переменных.

Утверждение 1. Гамильтонова функция $\tilde{H}(x, \psi, u, v)$ (2.12) задачи управления строго вогнута по переменным u и v .

Доказательство. Гамильтонова функция $\tilde{H}(x, \psi, u, v)$ строго вогнута по переменным u и v , если гессиан, составленный из вторых производных от функции $\tilde{H}(x, \psi, u, v)$ по переменным u и v , отрицательно определен. Проверим знаки главных миноров гессиана:

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u^2} = -\left(1 - u - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1}\right)^{-2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial v^2} = -(1-v)^{-2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial v \partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u \partial v}\right)^2 = \left(1 - u - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1}\right)^{-2} (1-v)^{-2} > 0.$$

Для всех значений фазовых $x = (x_1, x_2, x_3)$ и сопряженных $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ переменных выполнены условия отрицательной определенности матрицы. Следовательно, гамильтониан является строго вогнутым по управляющим переменным. Утверждение доказано.

2.2. Максимум гамильтониана по переменным управления

В рамках принципа максимума Понтрягина необходимо максимизировать гамильтонову функцию (2.12) по переменным управления u, v в области их определения (1.4).

Утверждение 2. Управляющие воздействия u_0, v_0 , доставляющие максимум гамильтониану $\tilde{H}(x, \psi, u, v)$ (2.12), удовлетворяют соотношениям

$$u_0 = \begin{cases} 0, & \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1} - \frac{(1-\alpha)/\beta}{x_2\psi_2 + \alpha x_3\psi_3} \geq 1, \\ 1 - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1} + \frac{(1-\alpha)/\beta}{x_2\psi_2 + \alpha x_3\psi_3}, & 1 - \bar{u} \leq \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1} - \frac{(1-\alpha)/\beta}{x_2\psi_2 + \alpha x_3\psi_3} \leq 1, \\ \bar{u}, & \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1} - \frac{(1-\alpha)/\beta}{x_2\psi_2 + \alpha x_3\psi_3} \leq 1 - \bar{u}, \end{cases}$$

$$v_0 = \begin{cases} 0, & x_2x_3\psi_2 \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x_2x_3\psi_2}, & 1 \leq x_2x_3\psi_2 \leq \frac{1}{1-\bar{v}}, \\ \bar{v}, & x_2x_3\psi_2 \geq \frac{1}{1-\bar{v}}. \end{cases}$$

Доказательство. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = -\left(1 - u - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{\alpha/(1-\alpha)}}{x_1}\right)^{-1} - \frac{\beta}{1-\alpha} x_2\psi_2 - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} x_3\psi_3 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial v} = -\frac{1}{1-v} + x_2\psi_2x_3 = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Решая систему (2.13), получим точку (u_1, v_1) , координаты которой вычисляются как

$$u_1 = 1 - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1} + \frac{1-\alpha}{\beta} \frac{1}{x_2\psi_2 + \alpha x_3\psi_3}, \quad v_1 = 1 - \frac{1}{x_3x_2\psi_2}.$$

Так как управляющие переменные определены на компакте $[0, \bar{u}] \times [0, \bar{v}]$, то в силу строгой вогнутости функции $\tilde{H}(x, \psi, u, v)$ (утверждение 1) получим, что максимум $\tilde{H}(x, \psi, u, v)$ достигается либо в точке экстремума (u_1, v_1) , либо на границе множества.

$$u_0 = \begin{cases} 0, & u_1 < 0, \\ u_1, & u_1 \in [0, \bar{u}], \\ \bar{u}, & u_1 > \bar{u}. \end{cases} \quad v_0 = \begin{cases} 0, & v_1 < 0, \\ v_1, & v_1 \in [0, \bar{v}], \\ \bar{v}, & v_1 > \bar{v}. \end{cases}$$

Утверждение доказано.

Обозначим символом $H(x, \psi)$ максимум гамильтониана по переменным управления u и v , который достигается в силу утверждения 1 либо на значениях u_0 и v_0 , либо на границе областей определения управляющих воздействий (1.4): $H(x, \psi) = \max_{u, v \in [0, \bar{u}] \times [0, \bar{v}]} \tilde{H}(x, \psi, u, v) = \tilde{H}(x, \psi, u_0, v_0)$.

3. Гамильтонова система

3.1. Построение гамильтоновой системы

Гамильтонова система строится по правилу

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H(x(t), \psi(t))}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i(t) = \rho \psi_i(t) - \frac{\partial H(x(t), \psi(t))}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для нормализации гамильтоновой системы введем в рассмотрение сопряженные переменные z_i , определенные по правилу $z_i(t) = \psi_i(t)x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Выпишем гамильтонову систему в области переменного управления, где координаты фазового $x = (x_1, x_2, x_3)$ и сопряженного $z = (z_1, z_2, z_3)$ векторов должны лежать в области Δ , задающей ограничения на действие управлений:

$$\Delta = \left\{ (x, z) : 1 - \bar{u} \leq \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{\alpha/(1-\alpha)}}{x_1} - \frac{(1-\alpha)/\beta}{z_2 + \alpha z_3} \leq 1, \quad 1 \leq x_3 z_2 \leq \frac{1}{1-\bar{v}}, \quad z_2 + \alpha z_3 < 0 \right\};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = \frac{b}{\alpha} x_1(t) - \frac{1}{M_0} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \left(A(x_1(t), x_3(t)) + \frac{1}{B(z_2(t), z_3(t))} - \frac{1}{z_2(t)} + x_3(t) - \frac{\alpha\beta - b}{\alpha(1-\alpha)} - \mu \right), \\ \dot{x}_3(t) = \alpha x_3(t) \left(A(x_1(t), x_3(t)) + \frac{1}{B(z_2(t), z_3(t))} - \frac{\alpha\beta - b}{\alpha(1-\alpha)} \right), \\ \dot{z}_1(t) = \rho z_1(t) - \frac{1}{M_0} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} z_1(t) - A(x_1(t), x_3(t)) B(z_2(t), z_3(t)), \\ \dot{z}_2(t) = \rho z_2(t) + \frac{1}{M_0} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} z_1(t) - 1, \\ \dot{z}_3(t) = \rho z_3(t) - x_3(t) z_2(t) + \frac{1-\alpha}{\alpha} A(x_1(t), x_3(t)) B(z_2(t), z_3(t)) + \frac{1}{\alpha}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Здесь функции $A(x_1(t), x_3(t))$, $B(z_2(t), z_3(t))$ определяются равенствами $A(x_1(t), x_3(t)) = \frac{\beta}{1-\alpha} \times \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}(t)}{x_1(t)}$, $B(z_2(t), z_3(t)) = -z_2(t) - \alpha z_3(t)$.

3.2. Качественный анализ гамильтоновой динамики

В рамках качественного анализа гамильтоновой системы определим наличие стационарных уровней динамики (3.14) в области переменных управлений. Существование равновесного уровня гамильтоновой системы позволит оценить поведение модельных траекторий на бесконечности [16; 22; 26; 32], а также рассчитать значения управляющих параметров в установившемся состоянии [27], что может быть использовано в дальнейшем для построения оптимальных инвестиционных стратегий.

Для нахождения стационарной точки необходимо приравнять правые части динамической системы (3.14) к нулю, решить нелинейную систему алгебраических уравнений и проверить, удовлетворяют ли найденные координаты стационарной точки ограничениям на область Δ действия переменного управления.

Обозначим координаты стационарной точки $P^* = (x^*, z^*) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*; z_1^*, z_2^*)$. Условия, которым должны удовлетворять координаты точки P^* , записываются в виде

$$x_1^* > 0, \quad x_2^* > 0, \quad x_3^* > 0, \quad z_1^* > 0, \quad z_2^* > 0, \quad z_3^* < 0, \quad B^* = B(z_2^*, z_3^*) > 0. \quad (3.15)$$

Для того чтобы стационарная точка при этом лежала в области переменных управляющих воздействий Δ , необходимы ограничения снизу на параметры \bar{u}, \bar{v} :

$$\bar{u} > u_c, \quad \bar{v} > v_c, \quad (3.16)$$

где u_c, v_c — критические значения для наибольших значений управляющих переменных, при достижении которых стационарная точка P^* перейдет в область, в которой одно или оба управления принимают максимально возможное значение, определенное параметрами \bar{u} и \bar{v} соответственно.

На вопрос о существовании стационарной точки и ее единственности отвечает следующая теорема.

Теорема 1. *Гамильтонова система (3.14) в области переменного управления Δ обладает единственной стационарной точкой $P^* = (x^*, z^*)$, координаты которой удовлетворяют ограничениям (3.15) тогда и только тогда, когда параметры модели лежат в области описываемой неравенствами*

$$\frac{b}{\alpha} < \rho < \beta \left(1 - \frac{b}{\alpha\beta}\right). \quad (3.17)$$

При этом координаты стационарной точки находятся в явном виде, ее сопряженные составляющие вычисляются по формулам

$$z_1^* = \frac{\alpha((1-\alpha)\rho^2 + (\alpha\beta - b)(\mu + \rho))}{\alpha(1-\alpha)\rho^2(\beta - \rho) + b(\alpha\beta - b)(\mu + \rho)}, \quad z_2^* = \frac{(1-\alpha)\rho(\alpha\beta - b - \alpha\rho)}{\alpha(1-\alpha)\rho^2(\beta - \rho) + b(\alpha\beta - b)(\mu + \rho)},$$

$$z_3^* = -\frac{(1-\alpha)\rho(\alpha\mu + \beta - b/\alpha)}{\alpha(1-\alpha)\rho^2(\beta - \rho) + b(\alpha\beta - b)(\mu + \rho)},$$

а фазовые компоненты равны следующим величинам:

$$x_1^* = \frac{p_0}{a^{1/\alpha} A^*} (x_3^*)^{(1-\alpha)/\alpha}, \quad x_2^* = M_0 \frac{b}{\alpha} x_1^*, \quad x_3^* = \frac{1}{z_2^*} + \mu,$$

где параметры $A^* = A(x_1^*, x_3^*)$ и $B^* = B(z_2^*, z_3^*)$ имеют вид

$$A^* = \frac{\rho - b/\alpha}{\rho + \alpha\mu} \frac{(1-\alpha)\rho^2 + (\alpha\beta - b)(\mu + \rho)}{(1-\alpha)\rho}, \quad B^* = \frac{\alpha(1-\alpha)\rho^2(\beta - \rho) + b(\alpha\beta - b)(\rho + \mu)}{\alpha\rho(1-\alpha)(\rho + \alpha\mu)}.$$

Управляющие переменные $u(t), v(t)$ в стационарной точке удовлетворяют равенствам

$$u^* = \frac{b}{\alpha\beta}, \quad v^* = \frac{\mu}{x_3^*}.$$

З а м е ч а н и е. Для того чтобы стационарная точка гарантированно лежала в области (3.16) переменных управлений, необходимо, чтобы

$$\bar{u} > u_c = \frac{b}{\alpha\beta}, \quad \bar{v} > v_c = \frac{(1-\alpha)\mu\rho(\alpha(\beta - \rho) - b)}{(\mu + \rho)(\alpha(1-\alpha)\rho(\beta - \rho) + b(\alpha\beta - b)) - (1-\alpha)b\mu\rho}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения стационарной точки $P^* = (x^*, z^*)$ необходимо приравнять правые части динамической системы к нулю и решить нелинейную систему алгебраических уравнений. Величины A^* и $1/B^*$ находятся из системы

$$\begin{cases} A + \frac{1}{B} = \frac{\alpha\beta - b}{\alpha(1-\alpha)}, \\ ((1-\alpha)\rho^2 + b(\mu + \rho))A - \alpha(\mu + \rho)\left(\rho - \frac{b}{\alpha}\right)\frac{1}{B} = \rho^2\left(\rho - \frac{b}{\alpha}\right). \end{cases}$$

Система имеет единственное решение

$$A^* = \frac{\rho - b/\alpha (1 - \alpha)\rho^2 + (\alpha\beta - b)(\mu + \rho)}{\rho + \alpha\mu (1 - \alpha)\rho},$$

$$B^* = \frac{\alpha(1 - \alpha)\rho^2(\beta - \rho) + b(\alpha\beta - b)(\rho + \mu)}{\alpha\rho(1 - \alpha)(\rho + \alpha\mu)}.$$

Выразим через величины A^* и B^* все координаты стационарной точки P^* :

$$z_1^* = \frac{A^* B^*}{\rho - b/\alpha}, \quad z_2^* = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{b}{\alpha} z_1^* \right), \quad z_3^* = \frac{\mu}{\rho} z_2^* - \frac{1 - \alpha}{\alpha\rho} (1 + A^* B^*),$$

$$x_1^* = \frac{p_0}{a^{1/\alpha} A^*} (x_3^*)^{(1-\alpha)/\alpha}, \quad x_2^* = M_0 \frac{b}{\alpha} x_1^*, \quad x_3^* = \frac{1}{z_2^*} + \mu.$$

Подставив в полученные равенства найденные значения параметров A^* , B^* , получим требуемые формулы для координат стационарной точки.

Теорема доказана.

3.3. Поведение базовых модельных переменных в равновесии

В этом разделе исследуется поведение основных модельных переменных [26], таких как потребляемые ресурсы $m(t)$, суммарный объем использованных материалов $M(t)$, основной капитал $k(t)$, объем выпуска $y(t)$, продуктивность природных ресурсов $z(t)$ и уровень потребления $c(t)$, когда фазовые x сопряженные величины z оказываются в равновесном состоянии P^* .

Утверждение 3. В положении равновесия P^* справедливы следующие соотношения для первичных модельных переменных

$$m^*(t) = x_2^* e^{(-b/\alpha)t}, \quad M^*(t) = M_0 (1 - x_1^* e^{(-b/\alpha)t}), \quad z^*(t) = a^{1/\alpha} (x_3^*)^{-(1-\alpha)/\alpha} e^{(b/\alpha)t},$$

$$p^*(t) = \frac{p_0}{x_1^*} e^{(b/\alpha)t}, \quad y^* = a^{1/\alpha} x_2^* (x_3^*)^{-(1-\alpha)/\alpha}, \quad k^* = a^{1/\alpha} \frac{x_2^*}{(x_3^*)^{1/\alpha}}, \quad c^* = y^* (1 - u^* - A^*) (1 - v^*),$$

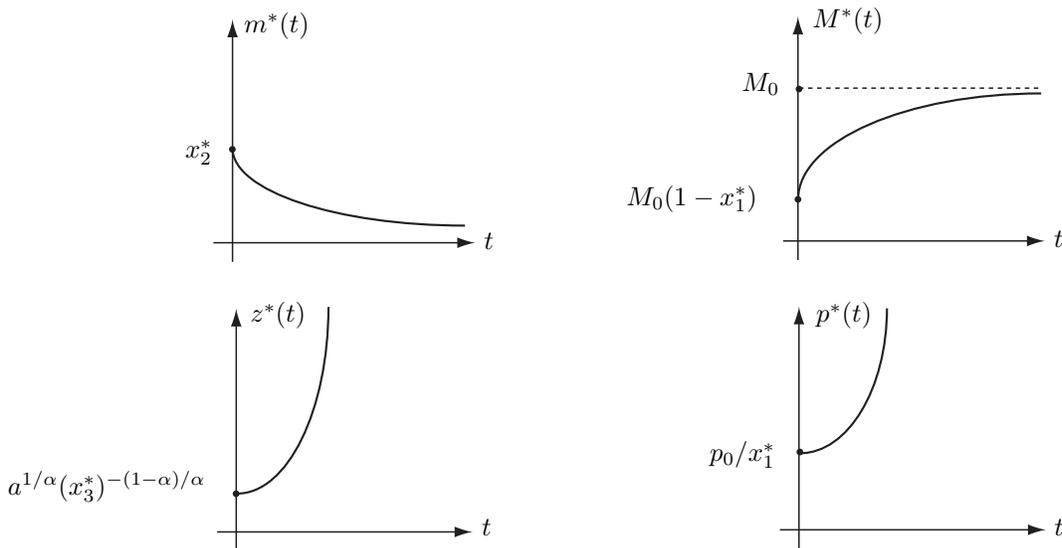


Рис. 1. Равновесные тренды основных модельных переменных.

которые свидетельствуют об экспоненциальном падении потребления природных ресурсов $m^*(t)$ и их запасов $(M_0 - M^*(t))$, а также о неограниченном росте продуктивности материалов $z^*(t)$ и цен на них (см. рис. 1), при этом размер основного капитала $k(t)$, объем выпуска $y(t)$ и уровень потребления $c(t)$ стабилизируются на значениях k^* , y^* , c^* соответственно.

Доказательство. Для нахождения закона изменения потребления природных ресурсов $m(t)$ в положении равновесия P^* необходимо выразить из уравнения (1.9) величину $m(t)$ и подставить в полученное соотношение найденные координаты стационарной точки:

$$m(t) = x_2(t)e^{(-b/\alpha)t} \Rightarrow m^*(t) = x_2^*e^{(-b/\alpha)t}.$$

Полученное соотношение для величины $m^*(t)$ доказывает экспоненциальное снижение объемов использования ресурсов.

Выразим объем $M(t)$ через первую фазовую переменную $x_1(t)$ (1.9) и равновесный объем $M^*(t)$ через значение x_1^* :

$$M(t) = M_0(1 - x_1(t)e^{(-b/\alpha)t}), \quad M^*(t) = M_0(1 - x_1^*e^{(-b/\alpha)t}).$$

Найдем представление для объема выпуска $y(t)$ через вектор фазовых переменных $x(t)$:

$$y(t) = a^{1/\alpha}x_2(t)x_3^{-(1-\alpha)/\alpha}(t).$$

Следовательно, стационарный объем выпуска вычисляется по формуле $y^* = a^{1/\alpha}x_2^*(x_3^*)^{-(1-\alpha)/\alpha}$.

Для нахождения продуктивности ресурсов в положении равновесия воспользуемся соотношением (1.3) и вычисленными значениями для стационарных компонент y^* и $m^*(t)$:

$$z^*(t) = \frac{y^*}{m^*(t)} = a^{1/\alpha}(x_3^*)^{-(1-\alpha)/\alpha}e^{(b/\alpha)t}.$$

Полученное выражение свидетельствует об экспоненциальном росте продуктивности ресурсов в равновесном состоянии.

Стационарный уровень основного капитала выражается через значения x_3^* и y^* :

$$k^* = \frac{y^*}{x_3^*} = a^{1/\alpha}x_2^*(x_3^*)^{-1/\alpha}.$$

Уровень цен $p^*(t)$, отвечающий равновесному состоянию, имеет экспоненциально растущий тренд

$$p^*(t) = \frac{p_0M_0}{M_0 - M^*(t)} = \frac{p_0}{x_1^*}e^{(b/\alpha)t}.$$

Равновесное значение последней модельной переменной, отвечающей уровню потребления $c(t)$, находится из равенства (1.5), вычисленного в стационарной точке:

$$\begin{aligned} c^* &= y^* \left(1 - \frac{p^*(t)m^*(t)}{y^*} - u^* \right) (1 - v^*) = y^* \left(1 - \frac{p_0}{x_1^*} e^{(b/\alpha)t} x_2^* e^{(-b/\alpha)t} a^{-1/\alpha} (x_3^*)^{(1-\alpha)/\alpha} \frac{1}{x_2^*} - u^* \right) (1 - v^*) \\ &= y^* \left(1 - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{(x_3^*)^{(1-\alpha)/\alpha}}{x_1^*} - u^* \right) (1 - v^*) = y^* (1 - A^* - u^*) (1 - v^*). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

4. Интегрирование гамильтоновой системы

Для построения оптимальных траекторий, отвечающих условиям задачи управления, предлагается алгоритм, основанный на следующем предположении.

Предположение 2. Пусть якобиан I гамильтоновой системы (3.14), вычисленный в стационарной точке P^* имеет ровно 6 действительных собственных значений, удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_4 < \lambda_5 < \lambda_6$.

Такое предположение обобщает случай двумерной гамильтоновой системы, для которой всегда одно собственное значение строго отрицательно, а второе строго положительно.

В рамках предположения 2 можно построить стабильное многообразие π как проекцию исходного пространства на подпространство, которое образовано тремя собственными векторами $h_i^T = (h_{i1}, \dots, h_{i6})$, отвечающими отрицательным собственным значениям λ_i , $i = 1, 2, 3$, и содержит стационарную точку P^* . Проекция исходных векторов на многообразие π описывается соотношениями

$$\begin{pmatrix} x - x^* \\ z - z^* \end{pmatrix} = H_1 \nu, \quad x - x^* = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \end{pmatrix}, \quad z - z^* = \begin{pmatrix} z_1 - z_1^* \\ z_2 - z_2^* \\ z_3 - z_3^* \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{pmatrix}, \quad H_{11} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad H_{12} = \begin{pmatrix} h_{14} & h_{24} & h_{34} \\ h_{15} & h_{25} & h_{35} \\ h_{16} & h_{26} & h_{36} \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор коэффициентов ν можно выразить через фазовый вектор $x - x^*$:

$$\nu = H_{11}^{-1}(x - x^*).$$

Соответственно сопряженные переменные $z - z^*$ найдутся из равенств

$$z - z^* = H_{12} H_{11}^{-1}(x - x^*). \quad (4.1)$$

Таким образом, проекция исходного пространства на многообразие π осуществляется при помощи матрицы

$$\Pi = H_1 H_{11}^{-1}.$$

Полученное представление $z = z(x)$ (4.1) сопряженных переменных $z = (z_1, z_2, z_3)$ через фазовые $x = (x_1, x_2, x_3)$ позволяет построить стабилизированную гамильтонову динамику вблизи положения равновесия P^* :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{b}{\alpha} x_1(t) - \frac{1}{M_0} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \left(A(x_1(t), x_3(t)) + \frac{1}{B(z_2(x(t)), z_3(x(t)))} - \frac{1}{z_2(x(t))} + x_3(t) - \omega - \mu \right), \\ \dot{x}_3(t) = \alpha x_3(t) \left(A(x_1(t), x_3(t)) + \frac{1}{B(z_2(x(t)), z_3(x(t)))} - \omega \right), \end{cases} \quad (4.2)$$

где величина ω определяется равенством $\omega = \frac{\alpha\beta - b}{\alpha(1 - \alpha)}$.

Поскольку стабилизированная система (4.2) получена проекцией исходного пространства на собственное подпространство, образованное собственными векторами, отвечающими отрицательным собственным значениям, то матрица Якоби системы (4.2), вычисленная в стационарной точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, имеет три различных отрицательных действительных собственных значения, совпадающих с $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

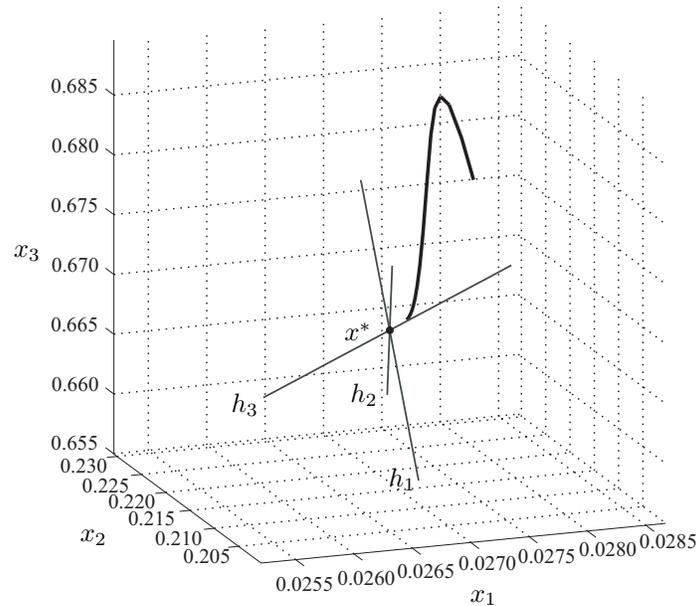


Рис. 2. Фазовый портрет решения стабилизированной системы.

Решая полученную систему (4.2) вблизи установившегося состояния x^* , построим траектории, лежащие в касательном подпространстве к траекториям исходной гамильтоновой системы (3.14), т.е. приближающие их с квадратичной точностью. Более того, сходимость к стационарной точке осуществляется по вектору h_3 , отвечающему наименьшему по модулю отрицательному собственному значению λ_3 . Фазовый портрет решения системы (4.2) представлен на рис. 2. На нем хорошо видно, как фазовая траектория (x_1, x_2, x_3) скользит по вектору h_3 вблизи установившегося состояния $P^* = x^*$.

Для построения оптимальных траекторий выбирается точка P в окрестности положения равновесия P^* , лежащая на стабилизированном решении, и строится вокруг нее шар радиуса r . Далее осуществляется перебор точек P_r внутри выбранного шара радиуса r в качестве начальных для решения гамильтоновой системы (3.14) в обратном времени. Если в какой-то момент времени траектория, выпущенная из точки P_r достигла границы области переменного управления и перешла в область, где действует другое управление, осуществляется смена гамильтоновой системы (3.14) на ту, которая соответствует новому управляющему воздействию. Интегрирование новой гамильтоновой системы происходит до пересечения траекторией границы текущего управляющего режима на другой режим управления или до того момента, пока траектория не достигнет за приемлемое время исходной начальной точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Оценка приемлемого времени интегрирования гамильтоновой динамики строится в следующей теореме.

Теорема 2. Точность алгоритма по функционалу оценивается точностью аппроксимации ε начальных условий в алгоритме. В зависимости от соотношений параметров возможны три случая оценки:

1. Если модуль липшицевости ν гамильтоновой динамики строго меньше параметра дисконтирования ρ , точность алгоритма по функционалу имеет порядок ε^2 .
2. Если $\nu = \rho$, то оценка имеет вид $\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2}$.
3. Если $\nu > \rho$, то точность имеет порядок $\varepsilon^{2\rho/(\nu-\delta)} \ln \frac{1}{\varepsilon^2}$, где $\delta = \frac{b}{1-\alpha}$.

При этом оценка приемлемого времени работы алгоритма вычисляется по формуле

$$T_0 = \frac{1}{\nu - \delta} \ln \frac{\theta}{\varepsilon^2},$$

где постоянная величина θ определяется через параметры задачи и оценки правых частей гамильтоновой системы.

Доказательство. Функционал качества (1.11) в рассматриваемой задаче оптимального управления имеет вид

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\ln y(t) + \ln(1 - v(t)) + \ln \left(1 - u(t) - \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}(t)}{x_1(t)} \right) \right) dt.$$

Отметим несколько свойств функций $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ и $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, входящих в функционал.

Исходя из динамики третьей фазовой переменной $x_3(t)$ (1.10) и из ограниченности переменной управления $u(t)$ (1.4), $0 \leq u(t) \leq \bar{u}$, получаем справедливой оценку

$$\dot{x}_3(t) = \frac{b - \alpha\beta u(t)}{1 - \alpha} x_3(t) \leq \frac{b}{1 - \alpha} x_3(t) \Rightarrow x_3(t) \leq x_3^0 e^{(b/(1-\alpha))t} = x_3^0 e^{\delta t}. \quad (4.3)$$

Производственная функция $y = f(t, m, k)$ (1.2) представляется через фазовые переменные (1.9):

$$y = a e^{bt} m^\alpha k^{1-\alpha} = a \left(e^{(b/\alpha)t} m \right)^\alpha \left(\frac{y}{x_3} \right)^{1-\alpha} = a x_2^\alpha \left(\frac{y}{x_3} \right)^{1-\alpha} \Rightarrow y = a^{1/\alpha} x_2 x_3^{-(1-\alpha)/\alpha}.$$

Производная функции выпуска $y(t) = f(x(t))$ в силу динамики (1.10) определяется как

$$\dot{y}(t) = y(t) \left(\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\dot{x}_3(t)}{x_3(t)} \right) \Rightarrow \dot{y}(t) = y(t) \left(\frac{b - \alpha\beta u(t)}{1 - \alpha} - \mu + v(t)x_3(t) \right).$$

Оценка скорости изменения выпуска с учетом ограничений на параметры управления $u(t)$, $v(t)$ (1.4) и неравенства для фазовой переменной $x_3(t)$ (4.3) имеет вид

$$\dot{y}(t) \leq y(t) \left(\frac{b}{1 - \alpha} - \mu + \bar{v} x_3^0 e^{(b/(1-\alpha))t} \right) \Rightarrow \ln \frac{y(t)}{y_0} \leq (\delta - \mu)t + \frac{\bar{v} x_3^0}{\delta} e^{\delta t}. \quad (4.4)$$

В силу липшицевости системы (1.10) для траектории $y(t)$ справедливо неравенство $|y'(t) - y''(t)| \leq |y'_0 - y''_0| e^{\nu t}$, где ν — константа Липшица. Следовательно, справедливы и следующие оценки: $|\ln y'(t) - \ln y''(t)| \leq \gamma_1 |y'_0 - y''_0| e^{\nu t}$.

Построим оценки для функции $g(t) = g(x_1(t), x_3(t)) = \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{1/\alpha-1}(t)}{x_1(t)}$ из функционала качества (1.11) задачи управления. Произвольное начальное значение для введенной функции определяется равенством

$$g_0 = g(x_1^0, x_3^0) = \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{(x_3^0)^{1/\alpha-1}}{x_1^0}.$$

Пара функций $(u(\cdot), v(\cdot))$ определяет оптимальные управления. При этом функции $u(t) = u(x(t), z(t))$, $v(t) = v(x(t), z(t))$ обладают свойствами ограниченности (1.4), кусочной гладкости и непрерывности по Липшицу. Тогда в силу липшицевости гамильтоновой системы для слагаемых в подынтегральном выражении функционала качества (1.11), содержащих управления $u(t)$ и $v(t)$, справедливы оценки $|g'(t) + u'(t) - g''(t) - u''(t)| \leq (|u'_0 - u''_0| + |g'_0 - g''_0|) e^{\nu t}$, $|v'(t) - v''(t)| \leq |v'_0 - v''_0| e^{\nu t}$, где величина ν есть константа Липшица системы.

Следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\ln(1 - g'(t) - u'(t)) - \ln(1 - g''(t) - u''(t))| &\leq \gamma_2 (|u'_0 - u''_0| + |g'_0 - g''_0|) e^{\nu t}, \\ |\ln(1 - v'(t)) - \ln(1 - v''(t))| &\leq \gamma_3 |v'_0 - v''_0| e^{\nu t}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Согласно алгоритму интегрирование системы происходит в обратном времени из точки, расположенной на касательном линейном многообразии π в некоторой малой ε окрестности положения равновесия P^* системы (3.14), следовательно, справедливы оценки

$$|y'_0 - y''_0| \leq \bar{\gamma}_1 \varepsilon^2, \quad |g'_0 + u'_0 - g''_0 - u''_0| \leq |g'_0 - g''_0| + |u'_0 - u''_0| \leq \bar{\gamma}_2 \varepsilon^2, \quad |v'_0 - v''_0| \leq \bar{\gamma}_3 \varepsilon^2.$$

Таким образом, можно продолжить оценки (4.4), (4.5):

$$\begin{aligned} |\ln y'(t) - \ln y''(t)| &\leq \gamma_1 \bar{\gamma}_1 \varepsilon^2 e^{\nu t}, \\ |\ln(1 - g'(t) - u'(t)) - \ln(1 - g''(t) - u''(t))| &\leq \gamma_2 \bar{\gamma}_2 \varepsilon^2 e^{\nu t}, \\ |\ln(1 - v'(t)) - \ln(1 - v''(t))| &\leq \gamma_3 \bar{\gamma}_3 \varepsilon^2 e^{\nu t}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Далее символом γ обозначается сумма $\gamma_1 \bar{\gamma}_1 + \gamma_2 \bar{\gamma}_2 + \gamma_3 \bar{\gamma}_3$.

Найденные оценки (4.6) подынтегральных слагаемых в функционале качества (1.11) используются для получения итоговой оценки погрешности между значениями функционала, вычисленными вдоль оптимального и аппроксимированного решений.

Пусть тройки $(y_1(t), g_1(t), u_1(t), v_1(t))$ и $(y_2(t), g_2(t), u_2(t), v_2(t))$ определяют соответственно оптимальное и аппроксимированное решение задачи, построенное согласно алгоритму. Оценим отклонение $\Delta J = |J_1 - J_2|$ значений функционала (1.11) на этих траекториях:

$$J_i = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} (\ln y_i(t) + \ln(1 - g_i(t) - u_i(t)) + \ln(1 - v_i(t))) dt, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим отдельно случай, когда константа Липшица ν гамильтоновой системы меньше параметра дисконтирования ρ . Введем обозначение $E(t) = |\ln y_1(t) - \ln y_2(t)| + |\ln(1 - g_1(t) - u_1(t)) - \ln(1 - g_2(t) - u_2(t))| + |\ln(1 - v_1(t)) - \ln(1 - v_2(t))|$, $t \geq 0$. Оценка $\Delta J = |J_1 - J_2|$ здесь будет получена исходя из неравенств (4.6):

$$\Delta J \leq \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} E(t) dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \gamma \varepsilon^2 e^{\nu t} dt = \gamma \varepsilon^2 \int_0^{+\infty} e^{-(\rho - \nu)t} dt = \frac{\gamma}{\rho - \nu} \varepsilon^2, \quad \rho > \nu. \quad \square$$

Если выполнено обратное неравенство $\nu \geq \rho$, то для построения оценки разобьем промежуток интегрирования на две части. Рассмотрим модуль разности интегралов J_1 и J_2 :

$$\Delta J \leq \int_0^T e^{-\rho t} E(t) dt + \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} E(t) dt = I_1(T) + I_2(T), \quad T > 0.$$

Указанная оценка справедлива для любой положительной величины T . За счет свободы выбора параметра разбиения T удается построить искомую оценку.

Оценим каждый из интегралов $I_1(T)$ и $I_2(T)$ в отдельности.

Оценка второго интеграла $I_2(T)$ строится исходя из свойств липшицевости гамильтоновой системы, непрерывности управлений $u(t)$, $v(t)$, неравенства (4.4) для функции $y(t)$, и ограничения (1.6). Оценим слагаемые, содержащие управляющие параметры:

$$|\ln(1 - g_1(t) - u_1(t)) - \ln(1 - g_2(t) - u_2(t))| = \left| \ln \frac{1 - g_1(t) - u_1(t)}{1 - g_2(t) - u_2(t)} \right| \leq \ln \frac{1}{1 - K - \bar{u}} > 0.$$

Для функций $u_1(t)$ и $v_2(t)$ имеем оценку

$$|\ln(1 - v_1(t)) - \ln(1 - v_2(t))| = \left| \ln \frac{1 - v_1(t)}{1 - v_2(t)} \right| \leq \ln \frac{1}{1 - \bar{v}} > 0.$$

Оценкой суммы последних двух модулей является параметр $\ln \frac{1}{(1 - K - \bar{u})(1 - \bar{v})}$. Обозначим величину $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{(1 - K - \bar{u})(1 - \bar{v})}$ символом L_4 .

Для первого модуля под интегралом $I_2(T)$ с учетом неравенства (4.4) справедлива оценка

$$|\ln y_1(t) - \ln y_2(t)| \leq |\ln y_1(t)| + |\ln y_2(t)| \leq 2 \left| \ln y_0 + (\delta - \mu)t + \frac{\bar{v}x_{30}}{\delta} e^{\delta t} \right|$$

$$= 2 \left(|\ln y_0| + |\delta - \mu| t + \frac{\bar{v} x_{30}}{\delta} e^{\delta t} \right) = 2 \left(L_1 + L_2 t + \frac{L_3}{\delta} e^{\delta t} \right),$$

где $L_1 = |\ln y_0|$, $L_2 = |\delta - \mu|$, $L_3 = \bar{v} x_{30}$.

В силу предположения 1 и условий существования стационарной точки (3.17) справедливо неравенство

$$\rho > \frac{b}{\alpha} = \frac{b}{1-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \geq \frac{b}{1-\alpha} \left(\frac{1}{0.5} - 1 \right) = \frac{b}{1-\alpha} = \delta. \quad (4.7)$$

С учетом (4.7) подставим полученные оценки в интеграл $I_2(T)$:

$$I_2(T) \leq 2 \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} \left(L_1 + L_2 t + \frac{L_3}{\delta} e^{\delta t} + L_4 \right) dt = \frac{2L}{\rho} e^{-\rho T} + 2L_2 \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} t dt + 2 \frac{L_3}{\delta} \int_T^{+\infty} e^{-(\rho-\delta)t} dt, \quad (4.8)$$

$$I_2(T) \leq \frac{2}{\rho} \left(L + L_2 T + \frac{L_2}{\rho} \right) e^{-\rho T} + \frac{L_3}{\delta(\rho-\delta)} e^{-(\rho-\delta)T}.$$

Здесь константа L является суммарной оценкой $L = L_1 + L_4$.

Далее найдем величину, ограничивающую интеграл $I_1(T)$ сверху, на основании неравенств (4.6):

$$I_1(T) \leq \int_0^T e^{-\rho t} E(t) dt \leq \gamma \varepsilon^2 \int_0^T e^{-\rho t} e^{\nu t} dt = \frac{\gamma}{\nu - \rho} (e^{(\nu-\rho)T} - 1) \varepsilon^2. \quad (4.9)$$

Здесь $\nu > \rho$. Заметим, что при $\nu = \rho$ оценка (4.9) переписывается в виде

$$I_1(T) \leq \gamma T \varepsilon^2. \quad (4.10)$$

Идея построения окончательной оценки состоит в минимизации оценок $I_1(T)$, $I_2(T)$ (см. (4.8)–(4.10)) по параметру T разбиения бесконечного промежутка времени

$$\Delta J \leq I_1(T) + I_2(T). \quad (4.11)$$

Оценка $I_1(T)$ зависит от соотношения параметра Липшица ν и дисконтирующего множителя ρ . Рассмотрим два случая.

Пусть $\nu = \rho$, тогда оценкой модуля разности ΔJ служит сумма, которую можно минимизировать по параметру T :

$$\Delta J \leq \frac{2}{\rho} \left(L_2 T + L + \frac{L_2}{\rho} \right) e^{-\rho T} + \frac{L_3}{\delta(\rho-\delta)} e^{-(\rho-\delta)T} + \gamma T \varepsilon^2 = I(T) \rightarrow \min.$$

Находим минимум функции $I(T)$ из условия $I'(T) = \gamma \varepsilon^2 - 2 \left(L_2 T + L + \frac{L_3}{2\delta} e^{\delta T} \right) e^{-\rho T} = 0$. Так как не существует аналитического решения последнего уравнения, точку минимума T_{\min} функции $I(T)$ точно найти не удастся. Рассмотрим вспомогательную точку T_0 , получаемую следующим образом:

$$I'(T) \leq \gamma \varepsilon^2 - \frac{L_3}{\delta} e^{-(\rho-\delta)T} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{1}{\rho - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2}. \quad (4.12)$$

Вычислим значение производной функции $I(T)$ в точке T_0 :

$$I'(T_0) = -2 \left(\frac{L_2}{\rho - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2} + L \right) \left(\frac{\gamma \delta \varepsilon^2}{L_3} \right)^{\rho/(\rho-\delta)} < 0.$$

Значит, справедливо неравенство $I'(T_0) < 0 = I'(T_{\min})$ и, следовательно, точка T_0 расположена левее точки минимума T_{\min} , т. е. $T_0 \leq T_{\min}$. Более того, для найденной точки T_0 справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I'(T_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{L_2}{\rho - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2} + L \right) \left(\frac{\gamma \delta \varepsilon^2}{L_3} \right)^{\rho/(\rho-\delta)} = 0.$$

Значит, $T_0 \rightarrow T_{\min}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Поскольку $T_{\min} = \operatorname{argmin}(I(T))$, то $I(T_{\min}) \leq I(T_0)$:

$$\begin{aligned} I(T_{\min}) \leq I(T_0) &= \frac{2}{\rho} \left(\frac{L_2}{\rho - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2} + L + \frac{L_2}{\rho} + L + \frac{L_2}{\rho} \right) \left(\frac{\gamma \delta \varepsilon^2}{L_3} \right)^{\rho/(\rho-\delta)} + \frac{\gamma \varepsilon^2}{\rho - \delta} \\ &+ \frac{\gamma \varepsilon^2}{\rho - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2} \approx \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon^2 \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана оценка для случая, когда параметр липшицевости динамики равен дисконтирующему множителю модели. \square

Проведем аналогичную процедуру оценки ΔJ (4.11) для случая $\nu > \rho$. Минимизируем по переменной T следующую функцию $I(T)$:

$$\Delta J \leq \frac{\gamma \varepsilon^2}{\nu - \rho} (e^{(\nu-\rho)T} - 1) + \frac{2}{\rho} \left(L_2 T + L + \frac{L_2}{\rho} \right) e^{-\rho T} + \frac{L_3}{\delta(\rho - \delta)} e^{-(\rho-\delta)T} = I(T).$$

Найдем минимум функции $I(T)$ по переменной $T > 0$ из соотношения

$$I'(T) = \gamma \varepsilon^2 e^{(\nu-\rho)T} - 2 \left(L_2 T + L + \frac{L_3}{2\delta} e^{\delta T} \right) e^{-\rho T} = 0.$$

В силу трансцендентности последнего уравнения найти точку минимума аналитически не удастся, поэтому предлагается подходящая аппроксимация: $I'(T) \leq \gamma \varepsilon^2 e^{(\nu-\rho)T} - \frac{L_3}{\delta} e^{(\delta-\rho)T} = 0$. Найдем точку T_0 из последнего уравнения:

$$T_0 = \frac{1}{\nu - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2}. \quad (4.13)$$

Отметим, что константа Липшица ν здесь превосходит параметр дисконтирования ρ , для которого выполнено неравенство (4.7), это влечет положительность разницы $(\nu - \delta)$. Фактически, точка T_0 (4.12), найденная для случая, когда $\rho = \nu$ совпадает с точкой T_0 (4.13), полученной для рассматриваемого случая $\nu > \rho$.

Найдем значение производной $I'(T_0)$: $I'(T_0) = -2 \left(\frac{L_2}{\nu - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2} + L \right) \left(\frac{\gamma \delta \varepsilon^2}{L_3} \right)^{\rho/(\nu-\delta)} < 0$.

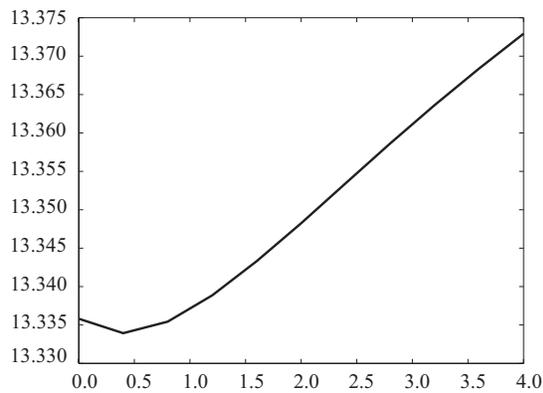
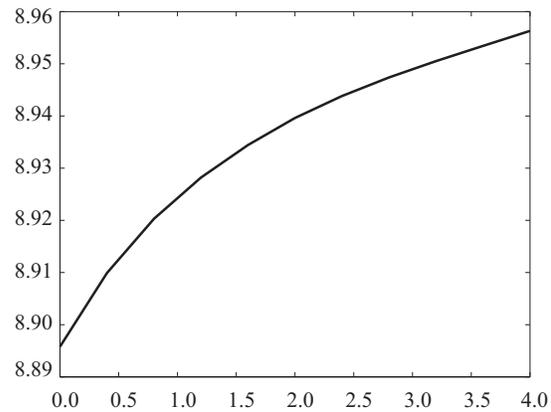
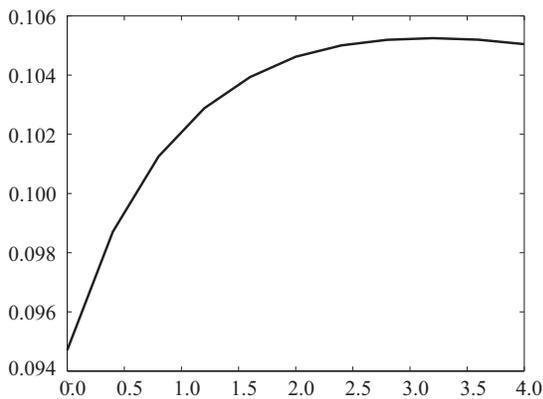
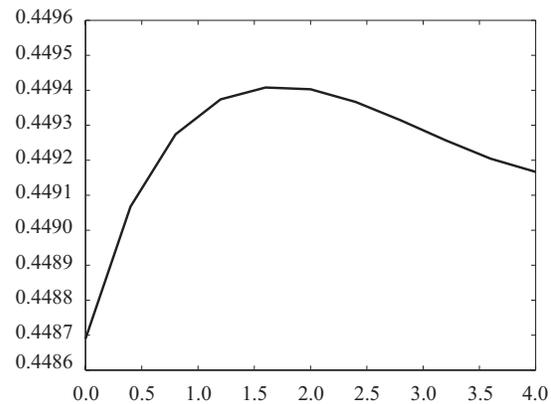
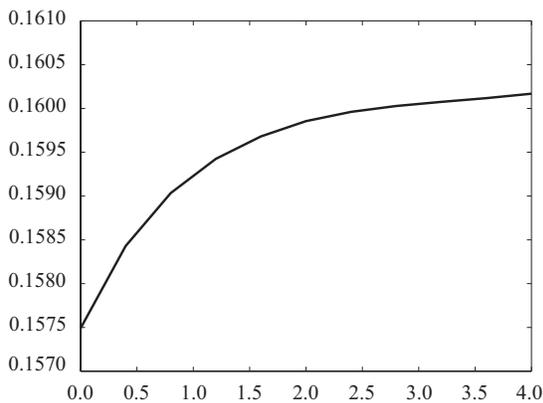
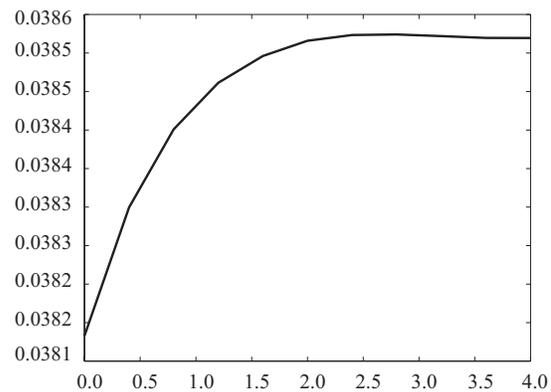
Таким образом, получено, что в точке T_0 значение производной отрицательно, следовательно, справедливо неравенство $T_0 < T_{\min}$, поскольку $I'(T_{\min}) = 0$. Более того, при стремлении ε к нулю справа точка T_0 приближается к величине T_{\min} .

Поскольку $T_{\min} = \operatorname{argmin}(I(T))$, выполнено неравенство $I(T_{\min}) \leq I(T_0)$, которое влечет следующие оценки:

$$\begin{aligned} I(T_{\min}) \leq I(T_0) &= \left(\frac{\gamma}{\nu - \rho} + \frac{L_3}{\delta(\rho - \delta)} \right) \left(\frac{\gamma \delta \varepsilon^2}{L_3} \right)^{(\rho-\delta)/(\nu-\delta)} - \frac{\gamma \varepsilon^2}{\nu - \rho} \\ &+ \frac{2}{\rho} \left(\frac{L_2}{\nu - \delta} \ln \frac{L_3}{\gamma \delta \varepsilon^2} + L + \frac{L_2}{\rho} \right) \left(\frac{\gamma \delta \varepsilon^2}{L_3} \right)^{\rho/(\nu-\delta)} \approx \varepsilon^{2\rho/(\nu-\delta)} \ln \frac{1}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, доказана оценка для последнего случая.

Теорема доказана. \square

Рис. 3. Основной капитал $k(t)$.Рис. 4. Объем выпуска $y(t)$.Рис. 5. Инвестиции в продуктивность $u(t)$.Рис. 6. Инвестиции в основной капитал $v(t)$.Рис. 7. Доля объемов потребления ресурсов в их текущих запасах $\frac{m(t)}{M_0 - M(t)}$.Рис. 8. Доля расходов на природные ресурсы в объеме выпуска $\frac{p(t)m(t)}{y(t)}$.

В завершение приведем графические результаты работы алгоритма. На рисунках представлены траектории основных модельных переменных (см. рис. 3–8).

На рис. 5 и 6 изображены управления, которые играют роль инвестиционных стратегий, направленных на увеличение продуктивности природных ресурсов $u(t)$ и основной капитал $v(t)$ соответственно.

Рисунки 7 и 8 представляют собой производные от оптимальных траекторий линии, связанные со вспомогательными величинами, такими как доля текущего потребления природных ресурсов в их остатках $y_1(t)$ и доля расходов на материалы в объеме текущего выпуска $y_2(t)$.

Обе величины вычисляются следующим образом:

$$y_1(t) = \frac{m(t)}{M_0 - M(t)} = \frac{1}{M_0} \frac{x_2(t)}{x_1(t)}, \quad y_2(t) = \frac{p(t)m(t)}{y(t)} = \frac{p_0}{a^{1/\alpha}} \frac{x_3^{(1-\alpha)/\alpha}(t)}{x_1(t)}.$$

Как видно из решений при оптимальном сценарии развития доля потребления природных ресурсов и доля расходов на природные ресурсы будут расти, не превышая 16.1% от объема текущих запасов материалов $M_0 - M(t)$ и 3.8% от выпуска $y(t)$ соответственно. При этом обе траектории имеют уровень насыщения роста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arrow K.J.** Application of control theory to economic growth // Mathematics of the Decision Sciences: Part 2 / eds. G.B. Dantzig and A.F. Veinott. Providence: American Mathematical Society, 1968. P. 85–119.
2. **Shell K.** Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Math. System Theory and Economics / eds. H.W. Kuhn and G.P. Szego. Berlin: Springer-Verlag, 1969. Vol. 1. P. 241–292. (Lect. Notes in Operations Research and Math. Economics; vol. 11.)
3. **Solow R.M.** Growth theory: An exposition. New York: Oxford University Press, 1970. 109 p.
4. **Grossman G.M., Helpman E.** Innovation and growth in the global economy. Cambridge: The MIT Press, 1991. 359 p.
5. **Ayres R.U., Warr B.** The Economic growth engine: How energy and work drive material prosperity. Cheltenham: Edward Elgar Pub., 2009. 448 p.
6. **Tarasyev A., Zhu B.** Optimal proportions in growth trends of resource productivity // Proc. of the 15th IFAC Workshop "Control Applications of Optimization" CAO'12 / eds. L. Lambertini and A. Tarasyev. Rimini: Rimini Center for Economic Analysis, 2012. (IFAC-PapersOnLine Identifier: 10.3182/20120913-4-IT-4027.00021.)
7. **Tarasyev A., Zhu B.** Optimal proportions in growth trends of resource productivity // Green Growth and Sustainable Development / eds. J. Crespo-Cuaresma, T. Palokangas, and A. Tarasyev. Heidelberg; New York: Springer, 2013. P. 49–66.
8. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2002. 553 с.
9. **Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Д.В.** Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1999. 1028 с.
10. **Крушвиц Л.** Финансирование и инвестиции. СПб.: Питер, 2000. 400 с.
11. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
12. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
13. **Aseev S.M., Veliov, V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. 2012. No. 1-2. P. 43–63. (Applications & Algorithms; vol. 19.)
14. **Aseev S., Besov K., Kaniovski S.** The problem of optimal endogenous growth with exhaustible resources revisited // Green Growth and Sustainable Development / eds. J. Crespo Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev. Heidelberg; New York: Springer, 2013. P. 3–30. (Dyn. Model. Econom. Econ. Finance; vol. 14.)
15. **Balder E.J.** An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 95, no. 1. P. 195–213.
16. Optimal control of nonlinear processes / D. Grass, J. Caulkins, G. Feichtinger, G. Tragler, D Behrens. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 572 p.
17. **Maurer H., Semmler W.** An optimal control model of oil discovery and extraction // Appl. Math. Comput. 2010. Vol. 217, no. 3. P. 1163–1169.
18. Dynamic Systems, Economic Growth, and the Environment / eds. J. Crespo Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev. Heidelberg; New York: Springer, 2010. 289 p. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance; vol. 12.)
19. Green Growth and Sustainable Development / eds. J. Crespo Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2013. 226 p. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance; vol. 14).

20. Tarasyev A.M., Watanabe C. Optimal dynamics of innovation in models of economic growth // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 1. P. 175–203.
21. Красовский А.А., Тарасьев А.М. Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 38–52.
22. Красовский А.А., Тарасьев А.М. Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 127–145.
23. Красовский А.А., Тарасьев А.М. Построение нелинейных регуляторов в моделях экономического роста // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 127–138.
24. Тарасьев А.М., Усова А.А. Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 278–298.
25. Тарасьев А.М., Усова А.А. Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 257–274.
26. Tarasyev, A., Usova, A. Application of a nonlinear stabilizer for localizing search of optimal trajectories in control problems with infinite horizon // Numer. Algebra Control Optim. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 389–406.
27. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
28. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.
29. Kryazhinskii, A.V., Osipov, Yu.S. Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
30. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
31. Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. I // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 1. С. 7–149.
32. Hartman Ph. Ordinary differential equations. New York; London; Sydney: J. Wiley and Sons, 1964. 628 p.
33. Reshmin S., Tarasyev A.M., Watanabe C. A dynamic model of research and development investment // J. Appl. Math. Mech. 2001. Vol. 65, no. 3. P. 395–410.

Тарасьев Александр Михайлович

Поступила 11.07.14

д-р физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)
e-mail: tam@imm.uran.ru, tarasiev@iiasa.ac.at

Усова Анастасия Александровна

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
e-mail: anastasy.ousova@gmail.com

Wei Wang

PhD Student

Center for Industrial Ecology,
Department of Chemical Engineering,
Tsinghua University, China
e-mail: w2008011900@gmail.com

Русских Ольга Викторовна

студент

ИМКН Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: olga9696@mail.ru

УДК 517.977

**КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ
СТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ¹****В. Н. Ушаков, Н. Г. Лавров, А. В. Ушаков**

Рассматривается стационарная управляемая система на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении системы с компактным целевым множеством в фазовом пространстве. Приводится краткое описание схемы приближенного решения задачи о сближении. В качестве иллюстрирующего примера приводится задача об управлении гироскопом.

Ключевые слова: управление, стационарная управляемая система, задача о сближении, множество разрешимости, множество достижимости, интегральная воронка, гироскоп.

V. N. Ushakov, N. G. Lavrov, A. V. Ushakov. Construction of solutions in an approach problem of a stationary control system.

We consider a stationary control system on a finite time interval and study the problem of the approach of the system to a compact target set in the phase space. The scheme of the approximate solution of the approach problem is described briefly. A control problem for a gyroscope is given as an illustrating example.

Keywords: control, stationary control system, approach problem, solvability set, reachable set, integral funnel, gyroscope.

Введение

В работе рассматривается стационарная управляемая система на конечном промежутке времени. Изучается базовая в теории управления задача о сближении с целевым множеством в фиксированный момент времени [1–3]. Приводится краткое описание схемы конструирования приближенного решения задачи о сближении. Множество разрешимости задачи о сближении конструируется в ходе пошаговой (по времени) процедуры приближенно как набор конечных множеств в фазовом пространстве — аппроксимаций сечений интегральных воронок соответствующих управляемых систем. Проблематика, связанная с конструированием и оценкой множеств разрешимости и интегральных воронок, является одной из основных в математической теории управления. Важность ее обусловлена в первую очередь потребностями практики. Из эффективных и наиболее развитых подходов к оценке и аппроксимации интегральных воронок и множеств достижимости управляемых систем и дифференциальных включений выделим подход, основанный на технике эллипсоидальной аппроксимации [3–6], а также подход, в котором применяются полиэдральные аппроксимации [7]. Весьма ценен подход, использующий пиксельные аппроксимации множеств [8].

В настоящей работе разрешающее управление для точек из приближенно вычисленных множеств разрешимости задачи о сближении строится как кусочно-постоянное управление [9; 10]. В качестве иллюстрации приведенных в работе схем рассматривается задача об управлении гироскопом с одной точкой опоры, совершающим прецессионное движение в поле гравитационного притяжения Земли.

¹Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), РФФИ (проекты 14-01-00486_a и 13-01-96055-р_урал_a) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

1. Задача о сближении стационарной системы

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad (1.1)$$

где x — фазовый вектор, u — управление, P — компакт в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Предполагается, что система (1.1) удовлетворяет следующим условиям.

У с л о в и е I. Вектор-функция $f(x, u)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n \times P$ и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^n$ существует такая константа $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(x_*, u) - f(x^*, u)\| \leq L\|x_* - x^*\|, \quad x_* \text{ и } x^* \text{ из } D, \quad u \in P.$$

У с л о в и е II. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(x, u)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times P.$$

У с л о в и е III. Множество $\Phi(x) = \{f(x, u) : u \in P\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ выпукло.

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в соответствующем евклидовом пространстве.

Пусть в \mathbb{R}^n задан компакт M — цель для системы (1.1).

Сформулируем задачи, относящиеся к сближению системы (1.1) с M в момент ϑ .

З а д а ч а 1.1. Требуется выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ множество W всех исходных позиций (t_*, x_*) системы (1.1), для каждой из которых существует допустимое управление на $[t_*, \vartheta]$, переводящее движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) в момент ϑ на M (т.е. $x(\vartheta) \in M$).

Множество W назовем множеством разрешимости в задаче 1.1.

З а д а ч а 1.2. Пусть $(t_0, x_0) \in W$. Требуется найти допустимое управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$ системы (1.1): $x^*(\vartheta) \in M$.

Кратко опишем процедуру построения приближенного решения задач 1.1 и 1.2. А именно сначала опишем процедуру построения некоторого дискретного множества позиций (t_*, x_*) системы (1.1), близкого к W , а затем для точки (t_0, x_0) этого множества построение допустимых управлений $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, приводящих движение системы (1.1) в малую ε -окрестность M в момент ϑ . При этом описании следуем работе [9].

Для решения задачи 1.1 введем, так же как и в [9], “обратное” время $\eta = t_0 + \vartheta - t \in [t_0, \vartheta]$ наряду с “прямым” временем $t \in [t_0, \vartheta]$.

Сопоставим системе (1.1) управляемую систему, отвечающую “обратному” времени η :

$$\frac{dz}{d\eta} = f^*(z, w), \quad \eta \in [t_0, \vartheta], \quad f^*(z, w) = -f(z, w), \quad (z, w) \in \mathbb{R}^n \times P. \quad (1.2)$$

Множеству M сопоставим интегральную воронку $Z = Z(t_0, M) = \bigcup_{z_0 \in M} Z(t_0, z_0)$ системы (1.2), где $Z(t_0, z_0)$ — интегральная воронка системы (1.2) с начальной позицией (t_0, z_0) (см., например, [9, с. 24]).

Множество $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ определим так, чтобы его сечения $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in W\}$ и сечения $Z(\eta) = \{z \in \mathbb{R}^n : (\eta, z) \in Z\}$ интегральной воронки Z удовлетворяли соотношениям

$$W(t) = Z(\eta), \quad t = t_0 + \vartheta - \eta, \quad \eta \in [t_0, \vartheta]. \quad (1.3)$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. $W(t)$, определенное (1.3), есть множество разрешимости в задаче 1.1.

Учитывая условия на систему (1.1) и компактность M , получаем, что все множества в \mathbb{R}^n , участвующие в формировании разрешающей конструкции задачи 1.1, содержатся в некоторой достаточно большой ограниченной и замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^n$. Не нарушая общности, будем считать, что в этой области D содержатся и все те движения системы (1.1) и вспомогательные движения (ломаные Эйлера), которые возникают при формировании разрешающих конструкций.

Именно эту область D и связанные с ней константы

$$L = L(D) \text{ и } K = K(D) = \max_{(x,u) \in D \times P} \|f(x, u)\|$$

мы употребляем в последующих рассуждениях.

Введем на оси η конечное разбиение $\Gamma = \{t_0 = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с шагами $\Delta_i = \eta_{i+1} - \eta_i = \Delta > 0$, $i = \overline{0, N-1}$, где диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ мал.

Пусть также $\eta_0 \leq \eta_* < \eta^* \leq \vartheta$, $Z_* \subset \mathbb{R}^n$. Полагаем $Z(\eta^*, \eta_*, Z_*)$ — множество достижимости в момент η^* системы (1.2) с исходным множеством Z_* , отвечающим моменту η_* .

Сечения $Z(\eta_i)$, $i = \overline{0, N}$ интегральной воронки Z системы (1.2) стеснены равенством

$$Z(\eta_{i+1}) = Z(\eta_{i+1}, \eta_i, Z(\eta_i)), \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (1.4)$$

и их можно было бы вычислять последовательно согласно (1.4), если бы мы умели вычислять при малых $\Delta > 0$ правые части (1.4). Однако это невозможно даже для относительно простых систем (1.2).

Нам остается реализовать лишь приближенное вычисление множеств $Z(\eta_{i+1}, \eta_i, Z(\eta_i))$, $i = \overline{0, N}$.

Продвигаясь по времени η вперед, будем конструировать аппроксимации $Z^a(\eta_i)$, $i = \overline{1, N}$, множеств $Z(\eta_i)$ как конечные множества в \mathbb{R}^n .

Опишем схему построения множеств $Z^a(\eta_i)$.

Следуя работе [9], зададим отображение $(\eta^*, \eta_*, Z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\eta^*, \eta_*, Z_*)$ ($\delta = \eta^* - \eta_*$) равенством

$$Z^{(\delta)}(\eta^*, \eta_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z^{(\delta)}(\eta^*, \eta_*, z_*),$$

где $Z^{(\delta)}(\eta^*, \eta_*, z_*) = z_* - \delta \Phi^{(\delta)}(z_*)$ и отображение $z_* \mapsto \Phi^{(\delta)}(z_*)$ есть некоторая конечнозначная аппроксимация отображения $z_* \mapsto \Phi(z_*)$ на D , удовлетворяющая соотношениям

$$\Phi^{(\delta)}(z_*) \subset \Phi(z_*) \text{ при } z_* \in D, \quad \sup_{z_* \in D} d(\Phi^{(\delta)}(z_*), \Phi(z_*)) \leq \zeta^*(\delta). \quad (1.5)$$

Здесь $d(\Phi_*, \Phi^*)$ — хаусдорфово расстояние между компактами Φ_* и Φ^* , функция $\zeta^*(\delta)$ выбрана удовлетворяющей соотношению $\zeta^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Задаем множества $Z^a(\eta_{i+1})$, $i = \overline{0, N-1}$, рекуррентным соотношением

$$Z^a(\eta_{i+1}) = Z^{(\Delta)}(\eta_{i+1}, \eta_i, Z^a(\eta_i)),$$

где начальное множество $Z^a(\eta_0)$ определяем как множество в \mathbb{R}^n , состоящее из конечного числа точек, стесненное неравенством $d(Z^a(\eta_0), Z(\eta_0)) \leq \sigma^*(\Delta)$, где функция $\sigma^*(\Delta)$ выбрана удовлетворяющей условию $\sigma^*(\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$.

Из изложенного выше справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Имеет место оценка*

$$d(Z^a(\eta_i), Z(\eta_i)) \leq e^{L(\eta_i - \eta_0)} (\zeta^*(\Delta) + (\eta_i - \eta_0)(\sigma^*(\Delta) + LK\Delta)). \quad (1.6)$$

Из оценки (1.6) вытекает

$$d(Z^a(\eta_i), Z(\eta_i)) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta \downarrow 0.$$

Для множеств $W(t_j)$ и их аппроксимаций $W^a(t_j)$, $j = \overline{0, N}$, оценка (1.6) принимает вид

$$d(W^a(t_j), W(t_j)) \leq e^{L(\vartheta - t_j)} (\zeta^*(\Delta) + (\vartheta - t_j)(\sigma^*(\Delta) + LK\Delta)).$$

В качестве частного случая системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$ рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + B(x)u, \quad u \in P,$$

где $P = \{u = (u_1, \dots, u_r)^T : \max_{i=1, r} |u_i| \leq \mu\}$, $\mu \in (0, \infty)$; T означает транспонирование.

Предполагаем, что вектор-функция $f(x, u) = f(x) + B(x)u$ удовлетворяет условиям I, II, условие III очевидно выполняется.

В этом случае множество $Z^{(\delta)}(\eta^*, \eta_*, z_*)$ ($\eta_0 \leq \eta_* < \eta^* \leq \vartheta$, $z_* \in \mathbb{R}^n$) определяется равенством

$$Z^{(\delta)}(\eta^*, \eta_*, z_*) = z_* - \delta \Phi^{(\delta)}(z_*),$$

где отображение $z_* \mapsto \Phi^{(\delta)}(z_*) = f(z_*) + B(z_*)P^{(\delta)}$ есть некоторая конечнозначная аппроксимация отображения $z_* \mapsto \Phi(z_*) = f(z_*) + B(z_*)P$ на D , удовлетворяющая (1.5).

Отметим, что функция $\zeta^*(\delta)$ в (1.5) уже выбрана нами, а также выбраны функция $\sigma^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, разбиение $\Gamma = \{\eta_0 = t_0, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \eta_{i+1} - \eta_i$, $i = \overline{0, N-1}$, и состоящее из конечного числа точек множество $Z^a(\eta_0) \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее неравенству

$$d(Z^a(\eta_0), Z(\eta_0)) \leq \sigma^*(\delta).$$

Следуя работе [10], множество $P^{(\delta)} \subset P$ определяем как равномерную сетку точек в кубе P .

Задав в рассматриваемом частном случае так начальное множество $Z^a(\eta_0)$ и отображение $(\eta^*, \eta_*, z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\eta^*, \eta_*, z_*)$, $\eta_0 \leq \eta_* < \eta^* \leq \vartheta$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $\delta = \eta^* - \eta_*$, мы тем самым индуцируем выделение в \mathbb{R}^n системы $\{Z^a(\eta_i)\}$ и вместе с ней системы $\{W^a(t_j)\}$. Однако мощность множества $Z^a(\eta_i)$ с возрастанием номера i может оказаться настолько большой, что станет помехой на пути эффективных вычислений системы $\{Z^a(\eta_i)\}$.

В связи с этим появляется необходимость в прореживании множеств $Z^a(\eta_i)$, $i = \overline{0, N}$, с тем, чтобы удерживать их в рамках, приемлемых для эффективных вычислений.

В [10, с. 99] приведена простая процедура $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z)$ прореживания множеств $Z \subset \mathbb{R}^n$, на основе которой определены множества

$$Z^a(\eta_0) = H^{(\Delta)}(Z^a(\eta_0)), \quad Z^a(\eta_{i+1}) = H^{(\Delta)}(Z^{(\Delta)}(\eta_{i+1}, \eta_i, Z^a(\eta_i))), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Эта процедура устроена так, что множества

$$W^a(t_j) = Z^a(\eta_i), \quad t_j + \eta_i = t_0 + \vartheta, \quad i + j = N,$$

удовлетворяют предельному соотношению

$$\max_{j=\overline{0, N}} d(W^a(t_j), \mathcal{W}^a(t_j)) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta \downarrow 0.$$

Это предельное соотношение дает нам основание в рассматриваемом частном случае системы (1.1) вычислять множество W разрешимости задачи 1.1 как систему $\{W^a(t_j)\}$ конечных множеств $\mathcal{W}^a(t_j)$ в \mathbb{R}^n .

2. О построении разрешающего управления в задаче 1.2

Считаем, что множества $\mathcal{W}^a(t_j) = \mathcal{Z}^a(\eta_i)$, $i + j = N$, $i = \overline{0, N}$, уже вычислены.

Выберем точку $x^{(0)} \in \mathcal{W}^a(t_0)$. Для $x^{(0)}$ найдется такая ломаная Эйлера $\widehat{z}(\eta)$ на $[t_0, \vartheta]$ уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -f(z) - B(z)w, \quad w \in P, \quad (2.1)$$

узловые точки $\widehat{z}^{(i)} = \widehat{z}(\eta_i)$ которой удовлетворяют включениям $\widehat{z}^{(i)} \in \mathcal{Z}^a(\eta_i)$, $i = \overline{0, N}$, и равенству $\widehat{z}^N = x^{(0)}$.

Ломаная Эйлера $\widehat{z}(\eta) = \widehat{z}^{(i)} + (\eta - \eta_i)w^{(i)}$, $\eta \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, $w^{(i)} \in P$, может быть записана также в “прямом” времени t в виде

$$\widehat{x}(t) = \widehat{z}(\eta), \quad t + \eta = t_0 + \vartheta,$$

и ее узловые точки $\widehat{z}^{(i)} = \widehat{z}(\eta_i)$ могут быть представлены как

$$\widehat{x}^{(j)} = \widehat{x}(t_j), \quad t_j + \eta_i = t_0 + \vartheta, \quad i = \overline{0, N}.$$

Каждая точка $\widehat{z}^{(i+1)}$, $i = \overline{0, N-1}$, ломаной $\widehat{z}(\eta)$ представима через предыдущую точку $\widehat{z}^{(i)} \in \widehat{Z}(\eta_i)$:

$$\widehat{z}^{(i+1)} = \widehat{z}^{(i)} - \Delta f(\widehat{z}^{(i)}, w^{(i)}), \quad w^{(i)} \in P(\Delta). \quad (2.2)$$

Положив $u^{(j-1)} = w^{(i)}$, $i + j = N$, $i = \overline{0, N-1}$, представим (2.2) в виде

$$\widehat{x}^{(j-1)} = \widehat{x}^{(j)} - \Delta f(\widehat{x}^{(j)}, u^{(j-1)}), \quad u^{(j-1)} \in P(\Delta). \quad (2.3)$$

Предполагаем при этом, что вычисление точки $\widehat{z}^{(i+1)}$, $j = \overline{0, N-1}$ сопровождается сохранением в памяти ЭВМ ее “родительской” пары $\widehat{z}^{(i)}, w^{(i)}$, или, на другом языке, вычислив по формуле (2.3) точку $\widehat{x}^{(j-1)}$, мы запоминаем ее “родительскую” пару $\widehat{x}^{(j)}, u^{(j-1)}$.

Допущение о запоминании “родительских” пар дает нам возможность восстановить по точке $\widehat{z}^N = \widehat{z}(\eta_N) = x^{(0)}$ ломаную $\widehat{z}(\eta)$ и кусочно-постоянное управление $w^*(\eta)$ ($w^*(\eta) = w^{(i)}$, $\eta \in [\eta_i, \eta_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$), порождающее эту ломаную Эйлера уравнения (2.1) на $[t_0, \vartheta]$.

Рассмотрим наряду с ломаной $\widehat{z}(\eta)$, $\eta \in [t_0, \vartheta]$ ломаную Эйлера $\widetilde{x}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $\widetilde{x}(t_0) = x^{(0)}$ уравнения (1.1):

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}^{(j-1)} + (t - t_{j-1})f(\widetilde{x}^{(j-1)}, u^{(j-1)}), \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$

где $\widetilde{x}^{(j-1)} = \widetilde{x}(t_{j-1})$, $j = \overline{1, N}$; $\widetilde{x}^{(0)} = \widetilde{x}(t_0) = x^{(0)}$.

В [10] показано, что ломаные $\widehat{x}(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ близки на $[t_0, \vartheta]$ при разбиениях Γ с малым диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

Поскольку для нас в первую очередь представляет интерес момент $t = \vartheta$, то выпишем оценку близости ломаных $\widehat{x}(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ в момент ϑ :

$$\|\widehat{x}^N - \widetilde{x}^N\| \leq e^{L(\vartheta-t_0)} K \Delta.$$

Так как $\widehat{x}^N = \widehat{z}^{(0)} \in \mathcal{Z}^a(t_0) \subset Z^a(t_0) \subset Z(t_0)_{\sigma^*}(\Delta)$, то

$$\rho(\widetilde{x}^N, M) \leq \|\widetilde{x}^N - \widehat{x}^N\| + \rho(\widehat{x}^N, M) \leq e^{L(\vartheta-t_0)} K \Delta + \sigma^*(\Delta). \quad (2.4)$$

Здесь $\rho(x^*, X^*)$ — евклидово расстояние от точки x^* до компактного множества $X^* \subset \mathbb{R}^n$.

Кроме того, в [10] показано, что движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$ системы (1.1), порожденное кусочно-постоянным управлением $u^*(t) = w^*(\eta)$ ($t + \eta = t_0 + \vartheta$, $\eta \in [t_0, \vartheta]$), стеснено оценкой

$$\|\widehat{x}^N - x^*(\vartheta)\| \leq e^{L(\vartheta-t_0)} K \Delta. \quad (2.5)$$

Из изложенного выше и оценок (2.4), (2.5) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3. *Справедливо неравенство*

$$\rho(x^*(\vartheta), M) \leq 2e^{L(\vartheta-t_0)} K \Delta + \sigma^*(\Delta).$$

3. Уравнения движения гироскопа с одной точкой опоры в поле гравитационного притяжения Земли

Одним из приложений, приведенных в предыдущих разделах алгоритмов, является конструирование разрешающих управлений в задачах управления механическими системами.

В качестве примера механической системы рассмотрим гироскоп с одной закрепленной точкой опоры, который совершает прецессионное движение в поле гравитационного притяжения Земли. На рис. 1 изображен гироскоп, который совершает прецессионное движение вокруг оси Oy инерционной системы координат (ИСК). На этом рисунке представлены основные системы координат: $Oxyz$ — ИСК; $Ox_1y_1z_1$ — связанная с ротором гироскопа система координат (ССК); $\varphi_{\text{П}}, \vartheta, \varphi_c$ — углы Эйлера (угол прецессии, угол нутации, угол собственного поворота соответственно).

Основными характеристиками гироскопа являются m — масса ротора, A — полярный момент инерции, B — экваториальный момент инерции и соответствующий тензор инерции

$$J = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix},$$

l — расстояние от точки опоры $\mathbf{0}$ до центра масс ротора, $g = 9.81\text{м}/\text{с}^2$ — ускорение свободного падения в гравитационном поле Земли.

С учетом введенных обозначений запишем систему дифференциальных уравнений, характеризующих угловое движение гироскопа. Для удобства записи кинематических уравнений, а именно исключения особой точки $\vartheta = 0$ воспользуемся параметрами ориентации, отличными от углов Эйлера. Выберем в качестве параметров ориентации проекции базисного вектора Oy ИСК на оси ССК и обозначим их соответственно $\gamma_{x1}, \gamma_{y1}, \gamma_{z1}$. Связь между углами Эйлера и компонентами $\gamma_{x1}, \gamma_{y1}, \gamma_{z1}$ выражена соотношением

$$\begin{pmatrix} \gamma_{x1} \\ \gamma_{y1} \\ \gamma_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi_c \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi_c \end{pmatrix}.$$

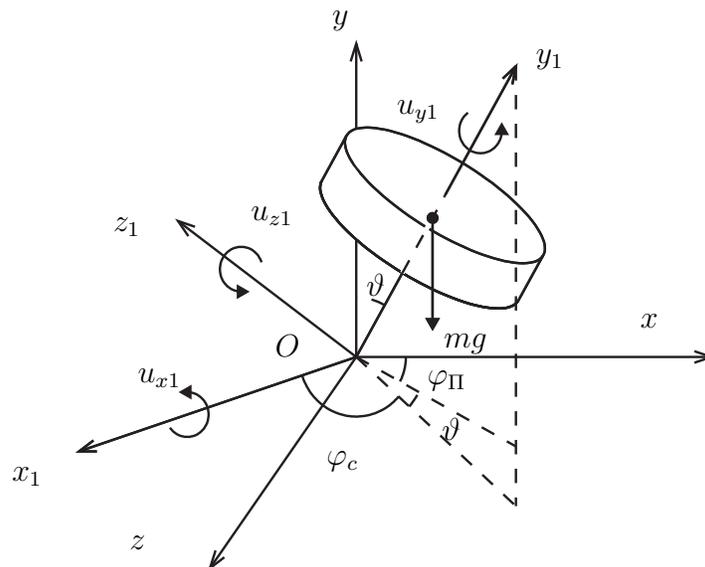


Рис. 1. Основные системы координат, параметры ориентации и действующие на гироскоп силы.

Учитывая неподвижность базисного вектора Oy в ИСК, можем записать дифференциальные уравнения для $\gamma_{x1}, \gamma_{y1}, \gamma_{z1}$:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{x1} = \omega_{z1}\gamma_{y1} - \omega_{y1}\gamma_{z1}, \\ \dot{\gamma}_{y1} = \omega_{x1}\gamma_{z1} - \omega_{z1}\gamma_{x1}, \\ \dot{\gamma}_{z1} = \omega_{y1}\gamma_{x1} - \omega_{x1}\gamma_{y1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Решение уравнений (3.1) позволяет однозначно определить ориентацию ССК относительно ИСК за исключением случая, когда $\vartheta = 0$. Однако при $\vartheta = 0$ уравнения (3.1) не вырождаются, как это свойственно кинематическим уравнениям, записанным относительно углов Эйлера.

Дополнив кинематические уравнения (3.1) уравнениями динамики гироскопа, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих свободное движение гироскопа с одной закрепленной точкой опоры в поле гравитационного притяжения Земли:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2x_6 - x_3x_5, \\ \dot{x}_2 = x_3x_4 - x_1x_6, \\ \dot{x}_3 = x_1x_5 - x_2x_4, \\ \dot{x}_4 = -\frac{B-A}{B}x_5x_6 - \frac{mgl}{B}x_3, \\ \dot{x}_5 = 0, \\ \dot{x}_6 = \frac{B-A}{B}x_5x_4 + \frac{mgl}{B}x_1, \end{cases} \quad (3.2)$$

где обозначено $x_1 = \gamma_{x1}, x_2 = \gamma_{y1}, x_3 = \gamma_{z1}, x_4 = \omega_{x1}, x_5 = \omega_{y1}, x_6 = \omega_{z1}$.

Для управления таким гироскопом, например для изменения положения оси прецессии или угловой скорости вращения, необходимо приложить к гироскопу внешние управляющие моменты. При введении в систему (3.2) управляющих воздействий заменим управляющие моменты соответствующими им угловыми ускорениями u_1, u_2, u_3 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2x_6 - x_3x_5, \\ \dot{x}_2 = x_3x_4 - x_1x_6, \\ \dot{x}_3 = x_1x_5 - x_2x_4, \\ \dot{x}_4 = -\frac{B-A}{B}x_5x_6 - \frac{mgl}{B}x_3 + u_1, \\ \dot{x}_5 = u_2, \\ \dot{x}_6 = \frac{B-A}{B}x_5x_4 + \frac{mgl}{B}x_1 + u_3. \end{cases} \quad (3.3)$$

Считаем при этом, что компоненты вектора управления $u = (u_1, u_2, u_3)$ ограничены по величине

$$|u_1| \leq \mu_1, \quad |u_2| \leq \mu_2, \quad |u_3| \leq \mu_3, \quad (3.4)$$

где μ_i ($i = 1, 2, 3$) — заданные неотрицательные числа.

Система (3.3) описывает управляемое движение гироскопа с одной закрепленной точкой опоры в поле гравитационного притяжения Земли.

В качестве примера численного моделирования рассмотрим задачу управления гироскопом (3.3) на промежутке $[0, 5]$ ($t_0 = 0, \vartheta = 5c$). А именно рассмотрим задачу перевода системы (3.3) в момент $\vartheta = 5$ в заданную точку

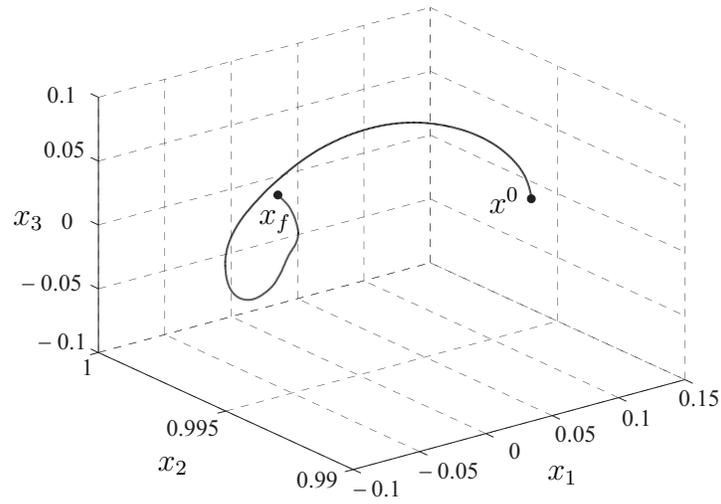
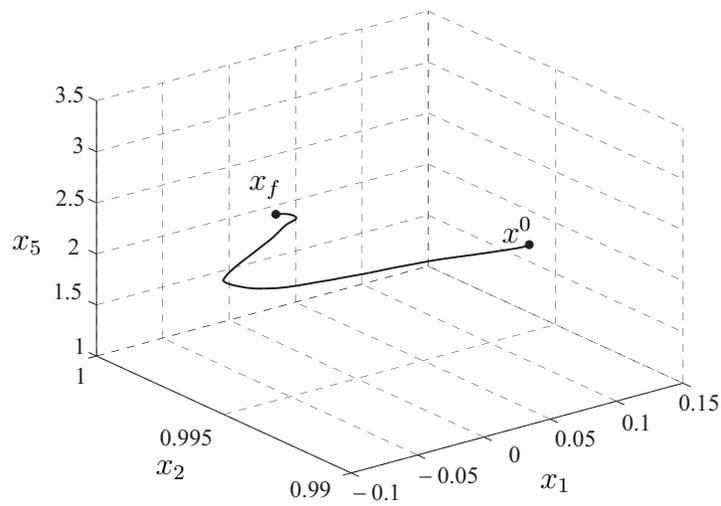
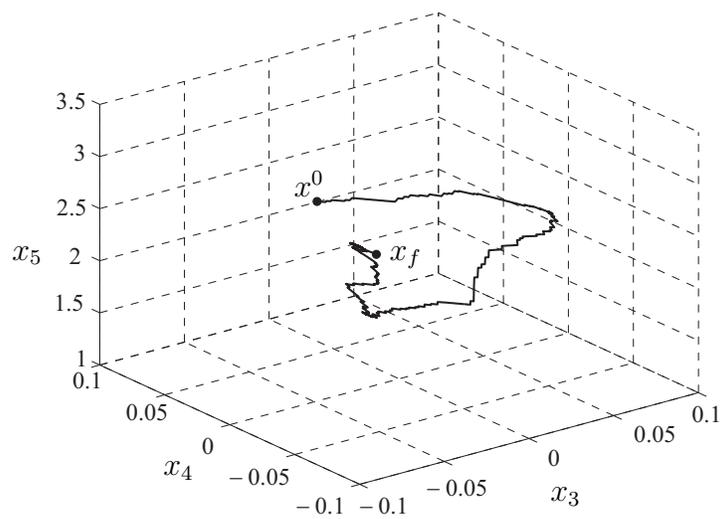
$$x_f = (x_{f1}, x_{f2}, x_{f3}, x_{f4}, x_{f5}, x_{f6}) = (0.0166, 0.9998, 0, 0.0174, 2.0940, 0)$$

фазового пространства \mathbb{R}^6 .

Заметим, что здесь первые две координаты x_{f1} и x_{f2} выписаны огрубленно, последние три координаты x_{f4}, x_{f5}, x_{f6} выражены в рад/с.

Ограничения (3.4) на управления заданы равенствами $\mu_1 = 1/8, \mu_2 = 0, \mu_3 = 1/8$.

В соответствии со схемами решения задачи о сближении, представленными в предыдущих разделах, вводим разбиение $\Gamma = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_N = 5\}$ промежутка $[0, 5]$ на равные

Рис. 2. Проекция траектории движения на оси x_1, x_2, x_3 .Рис. 3. Проекция траектории движения на оси x_1, x_2, x_5 .Рис. 4. Проекция траектории движения на оси x_3, x_4, x_5 .

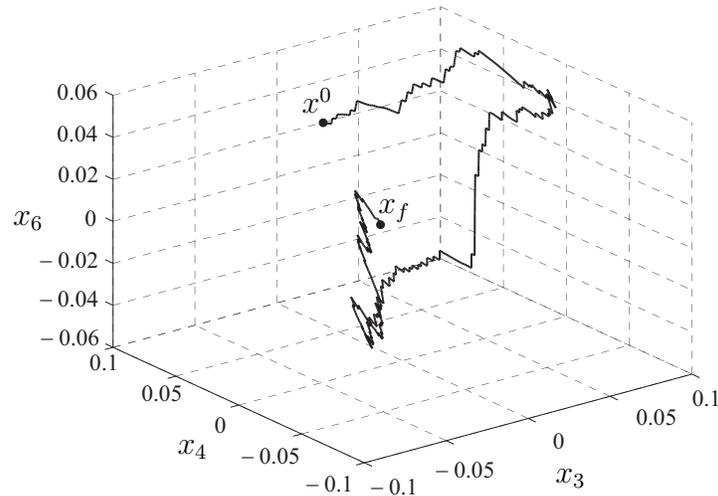


Рис. 5. Проекция траектории движения на оси x_3, x_4, x_6 .

промежутки $[t_j, t_{j+1}]$ с диаметром $\Delta = 0.01$. Промежуток $[-1/8, 1/8]$, которым стеснен выбор управлений u_1 и u_3 , подменяется набором точек $u^{(k)} = -1/8 + k/32$, $k = \overline{0, 8}$. Управления u_1 и u_3 выбираются из этого набора. Далее вычисляется в попятной пошаговой процедуре система $\{\mathcal{W}^a(t_j)\}$ множество $\mathcal{W}^a(t_j) \subset \mathbb{R}^6$, представляющая собой некоторую аппроксимацию множества W разрешимости задачи о сближении системы (3.3), (3.4) с $M = \{x_f\}$.

По завершении вычисления множеств $\mathcal{W}^a(t_j)$, $j = \overline{N, 0}$ выбираем некоторую начальную точку $x^0 \in \mathcal{W}^a(t_0)$. В данном примере это точка $x^0 = (0.1048, 0.9936, 0.0207, 0, 0.0901, 2.0943, 0.0242,)$. Для этой точки x^0 решается задача 1.2 о приведении движения $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^0$ системы (3.3) на множество $M = \{x_f\}$ в момент $\vartheta = 5$. При этом в качестве разрешающего управления $u^*(t)$ на $[0, 5]$ выбирается кусочно-постоянное управление, конструируемое по схеме из разд. 2.

Заметим, однако, что для улучшения качества управляемого процесса к управлению $u^*(t)$ добавляется некоторое программное управление $w^*(t)$, $t \in [0, 5]$, малое по величине (т.е. $|w^*(t)| \leq 10^{-3}$). Под качеством управляемого процесса мы понимаем величину $\|x^*(\vartheta) - x_f\|$.

На рис. 2–5 изображены графики и некоторые результаты численного моделирования процесса управления гироскопом, а именно представлены проекции движения $x^*(t)$ ($x^*(0) = x^0$, $x^*(5) = x_f$) в \mathbb{R}^6 на 4 из 20 трехмерных подпространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Понtryгин Л.С. О линейных дифференциальных играх I // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 4. С. 738–741.
3. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона — Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 1793–183.
4. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Laxenburg; Boston: Birkhauser, 1997. 321 p.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
6. Гусев М.И. Оценки множества достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
7. Костоусова Е.К. Об ограниченности и неограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных дифференциальных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 134–145.

8. **Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 179–187.
9. **Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.** Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2011. Вып. 4. С. 23–39.
10. **Ушаков А.В.** Об одном варианте приближенного построения разрешающих управлений в задаче о сближении // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 94–107.

Ушаков Владимир Николаевич

д-р. физ.-мат. наук, профессор

чл.-корр. РАН

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: ushak@imm.uran.ru

Лавров Никита Георгиевич

канд. техн. наук, доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: lavrov_ng@mail.ru

Ушаков Андрей Владимирович

младший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: aushakov.pk@gmail.com

УДК 517.977

ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ¹**Т. Ф. Филиппова**

Рассматриваются методы оценивания трубок траекторий нелинейной управляемой системы с неопределенностью по начальным данным и в предположении о квадратичной нелинейности векторов фазовых скоростей по состояниям системы. Предполагается, что значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. Исследуются вопросы чувствительности множеств достижимости системы и их эллипсоидальных оценок по конечномерному параметру, входящему в ограничения и динамику неопределенной управляемой системы. Результаты основаны на алгоритмах и методах теории эллипсоидального оценивания и теории дифференциальных включений.

Ключевые слова: множество достижимости, дифференциальные включения, эллипсоидальное исчисление, чувствительность по параметру.

T. F. Filippova. Estimates of reachable sets of control systems with nonlinearity and parametric perturbations.

We consider techniques of estimating trajectory tubes of nonlinear control systems with uncertainty in the initial data and under the assumption of a quadratic nonlinearity of system state velocities over the states of the system. It is assumed that the uncertain initial states and the admissible controls are constrained by ellipsoidal restrictions. We study problems of sensitivity of reachable sets and of their ellipsoidal estimates to finite-dimensional parameters appearing in the constraints and in the uncertain dynamics of the control system. The results are based on algorithms and techniques of the ellipsoidal estimation theory and on the theory of differential inclusions.

Keywords: reachable set, differential inclusions, ellipsoidal calculus, parameter sensitivity.

Введение

Данная работа посвящена исследованию свойств множеств достижимости динамической управляемой системы, т. е. множеств тех состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. Задачи точного или приближенного построения множеств достижимости управляемых динамических систем относятся к числу фундаментальных проблем в теории управления [4; 5] и теории дифференциальных игр [4; 20], поскольку связаны с исследованием сложных управляемых систем различной природы, функционирующих в условиях противодействия или конфликта. Отметим, что математическое моделирование реальных динамических систем должно отражать возможное присутствие непредсказуемых неопределенных факторов, воздействующих на систему, поэтому решение задач построения и исследования множеств достижимости управляемых систем при различных информационных предположениях актуально и важно как для теории динамических систем, так и для приложений.

Среди важнейших направлений исследований в указанных областях отметим многочисленные результаты теории управления и оценивания состояний неопределенных систем, связанные с техникой и теорией эллипсоидального исчисления [2; 5–8; 14; 23] и результатами многозначного анализа [10; 11; 15; 21]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00043), Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2692.2014.1) и программы фундаментальных исследований “Динамические системы и теория управления” Президиума Российской академии наук при поддержке Уральского отделения РАН (проект 12-П-1-1019).

по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. Подчеркнем, что использование эллипсоидов в качестве аппроксимирующих фигур может объясняться наличием у этого класса множеств ряда полезных свойств, в частности, квадратичное описание эллипсоидов позволяет проще решать задачи оптимизации, класс эллипсоидов инвариантен по отношению к линейным преобразованиям, основные необходимые операции (например, сложения и пересечения множеств) в классе эллипсоидов даются достаточно простыми решениями выпуклых задач оптимизации с их соответствующим алгоритмическим описанием.

Для динамических систем со специальной структурой, в которой нелинейные члены являются квадратичными по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями, соответствующая техника эллипсоидального исчисления была адаптирована к рассматриваемому классу нелинейных задач в работах [17; 18], были построены алгоритмы внешнего и внутреннего оценивания множеств достижимости неопределенных систем и оценивания сечений траекторных трубок соответствующих нелинейных дифференциальных включений, найдены дифференциальные уравнения, описывающие динамику эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной управляемой системы с неопределенностью по начальным данным [13]. Отметим также работы [12; 16], где рассматривались схемы построения многозначных эллипсоидальных оценок множеств достижимости импульсных систем при дополнительном ограничении на управляющие импульсные функции в виде специального обобщенного “эллипсоида” в пространстве функций ограниченной вариации.

В данной работе рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости соответствующего управляемой системе нелинейного дифференциального включения, используются результаты теории эллипсоидального оценивания и теории эволюционных уравнений многозначных состояний динамических систем в условиях неопределенности. Основные результаты касаются вопросов чувствительности множеств достижимости и их эллипсоидальных оценок по конечномерному параметру, входящему в ограничения и динамику неопределенной управляемой системы.

1. Предварительные сведения и результаты

1.1. Основные обозначения

Пусть \mathbb{R}^n обозначает n -мерное евклидово пространство, $\text{comp } \mathbb{R}^n$ — множество всех компактных подмножеств из \mathbb{R}^n , $\text{conv } \mathbb{R}^n$ — множество всех компактных выпуклых подмножеств из \mathbb{R}^n . Символ (x, y) обозначает скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, символ $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма вектора x , $'$ — знак транспонирования, шар $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$, символ $E(y, Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : (Y^{-1}(x - y), (x - y)) \leq 1\}$ обозначает эллипсоид в \mathbb{R}^n с центром y и симметрической положительно определенной $n \times n$ -матрицей Y , $\text{Tr}(Y)$ — след (сумма диагональных элементов) $n \times n$ -матрицы Y , I — единичная $n \times n$ -матрица.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t))d + u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 \in \text{comp } \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Здесь A — постоянная $n \times n$ -матрица; вектор $d \in \mathbb{R}^n$, управление $u(t)$ — измеримая по Лебегу функция, стесненная геометрическим ограничением

$$u(t) \in U, \quad U \in \text{comp } \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что нелинейная функция $f(x)$ в (1.1) является положительно определенной квадратичной формой:

$$f(x) = x' B x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

где B — симметрическая положительно определенная $n \times n$ -матрица.

Обозначим символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ решение системы (1.1) на промежутке $[t_0, T]$ для допустимых начального состояния $x_0 \in X_0$ и управления $u(\cdot)$. Пусть символ \mathcal{U} означает класс всех допустимых измеримых управлений $u(\cdot)$, удовлетворяющих требованию (1.3). Трубку всех возможных траекторий системы (1.1) из начального состояния $\{t_0, X_0\}$ (или, эквивалентно, траекторную трубку дифференциального включения [21]

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + f(x(t))d + U, \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

соответствующего системе (1.1)) далее будем обозначать символом

$$X(\cdot) = X(\cdot; t_0, X_0) = \bigcup \{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) \mid x_0 \in X_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

Примем следующее предположение.

Предположение 1. Будем предполагать, что все решения $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ определены на всем промежутке $[t_0, T]$ для любых допустимых x_0 (в соответствии с ограничением (1.2)) и всех возможных $u(\cdot)$ (в соответствии с ограничением (1.3)) и не выходят за пределы некоторой компактной области фазового пространства, т. е. существует $k > 0$ такое, что

$$\|x(\cdot)\| = \|x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))\| \leq k \quad \forall x_0 \in X_0, \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}. \quad (1.6)$$

Условия, при которых данное требование выполняется, детально обсуждаются в работе [17].

Отметим, что сечение $X(t) = X(t; t_0, X_0)$ трубки траекторий $X(\cdot)$ (1.6) в момент времени $t \in [t_0, T]$ совпадает со множеством достижимости системы (1.1)–(1.3) в момент t из начального состояния $\{t_0, X_0\}$.

1.2. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости

Предположим, что начальное множество X_0 динамической системы (1.1) и множество U , задающее ограничение на измеримые управления $u(t)$ в системе (1.1), являются эллипсоидами в соответствующих конечномерных пространствах:

$$X_0 = E(a_0, Q_0), \quad U = E(\hat{a}, \hat{Q}). \quad (1.7)$$

Здесь $a_0, \hat{a} \in \mathbb{R}^n$ — векторы центров эллипсоидов X_0 и U , $n \times n$ -матрицы Q_0, \hat{Q} — симметрические и положительно определенные.

Обозначим

$$(k_0^+)^2 = \max_{\|l\|=1} l' B^{1/2} Q_0 B^{1/2} l, \quad (k_0^-)^2 = \min_{\|l\|=1} l' B^{1/2} Q_0 B^{1/2} l.$$

Отметим, что в силу [13, лемма 1] числа k_0^- и k_0^+ таковы, что справедливы включения

$$E(a_0, (k_0^-)^2 B^{-1}) \subseteq E(a_0, Q_0) \subseteq E(a_0, (k_0^+)^2 B^{-1}), \quad (1.8)$$

при этом число k_0^- является наибольшим, а k_0^+ — наименьшим из возможных чисел, для которых верны приведенные выше включения (1.8).

В работе [13] найден непрерывный аналог дискретной схемы, изложенной ранее в работе [17], для решения задачи внешнего эллипсоидального оценивания множества достижимости $X(t)$ системы (1.1)–(1.2) при условии (1.7), а именно установлено, что имеет место следующий результат, необходимый нам для дальнейших конструкций и оценок.

Теорема 1 [13, теорема 3]. *Справедливо включение*

$$X(t; t_0, X_0) \subseteq E(a^+(t), Q^+(t)), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

где $Q^+(t) = r^+(t)B^{-1}$ и функции $a^+(t)$, $r^+(t)$ являются решениями следующей нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da^+(t)}{dt} &= Aa^+(t) + a^{+'}(t)Ba^+(t)d + r^+(t)d + \hat{a}, \\ \frac{dr^+(t)}{dt} &= \max_{\|l\|=1} \{l'(2r^+(t)\tilde{B}_+(t) + q_+^{-1}(t)B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})l\} + q_+(t)r^+(t), \\ q_+(t) &= \{(nr^+(t))^{-1} \text{Tr}(B\hat{Q})\}^{1/2}, \quad \tilde{B}_+(t) = B^{1/2}(A + 2da^{+'}(t)B)B^{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

с начальными условиями

$$a^+(t_0) = a_0, \quad r^+(t_0) = (k_0^+)^2. \quad (1.10)$$

Следующее включение, которое также будет использовано ниже в данной работе, является непрерывным аналогом дискретной схемы внутреннего эллипсоидального оценивания множеств достижимости $X(t)$ системы (1.1)–(1.2) при условии (1.7) (детальное описание дискретного алгоритма внутреннего оценивания приведено в [18]).

Теорема 2 [13, теорема 4]. *Справедливо включение*

$$E(a^-(t), Q^-(t)) \subseteq X(t; t_0, X_0),$$

где $Q^-(t) = r^-(t)B^{-1}$, функции $a^-(t)$, $r^-(t)$ являются решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da^-(t)}{dt} &= Aa^-(t) + a^{-'}(t)Ba^-(t)d + r^-(t)d + \hat{a}, \\ \frac{dr^-(t)}{dt} &= \min_{\|l\|=1} \{l'(r^-(t)(\tilde{B}_-(t) + \tilde{B}'_-(t)) + 2(r^-(t))^{1/2}(B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})^{1/2})l\}, \\ \tilde{B}_-(t) &= B^{1/2}(A + 2da^{-'}(t)B)B^{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

с начальными условиями

$$a^-(t_0) = a_0, \quad r^-(t_0) = (k_0^-)^2. \quad (1.12)$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что, как известно [14; 23], при решении задач эллипсоидального оценивания множеств достижимости для линейной управляемой системы оказывается, что дифференциальные уравнения центров эллипсоидов, оценивающих множества достижимости изнутри и снаружи, совпадают. Для рассматриваемой нелинейной системы этот факт, вообще говоря, не имеет места. При этом соответствующие дифференциальные уравнения, во-первых, существенно сложнее и, во-вторых, дифференциальные уравнения для центров $a^+(t)$ ($a^-(t)$) и коэффициентов подобия $r^+(t)$ ($r^-(t)$) оценивающих эллипсоидов взаимосвязаны.

1.3. Иллюстрирующий пример

Рассмотрим следующую управляемую систему с квадратичной нелинейностью изучаемого типа:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 4x_1^2 + x_2^2 + u_2, \end{cases} \quad x_0 \in X_0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (1.13)$$

Пусть $t_0 = 0$, $T = 0.25$, $X_0 = B(0, 1)$ и $P(t) \equiv U = B(0, 1)$. Траекторная трубка $X(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$) и соответствующая ей внешняя эллипсоидальная трубка $E(a^+(t), Q^+(t))$ ($t_0 \leq t \leq T$) показаны на рис. 1, при каждом фиксированном значении $t \in [t_0, T]$ множество $E(a^+(t), Q^+(t))$

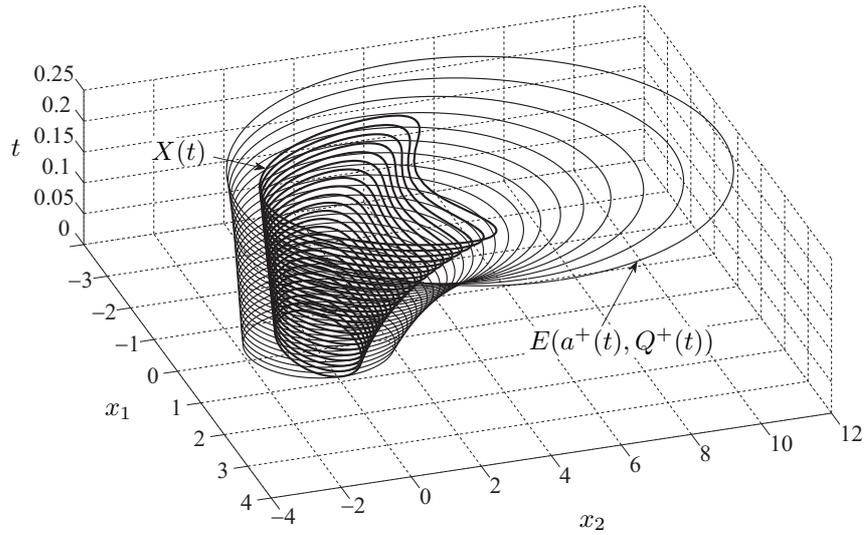


Рис. 1. Внешняя эллипсоидальная трубка $E(a^+(t), Q^+(t))$ для трубки траекторий $X(t)$.

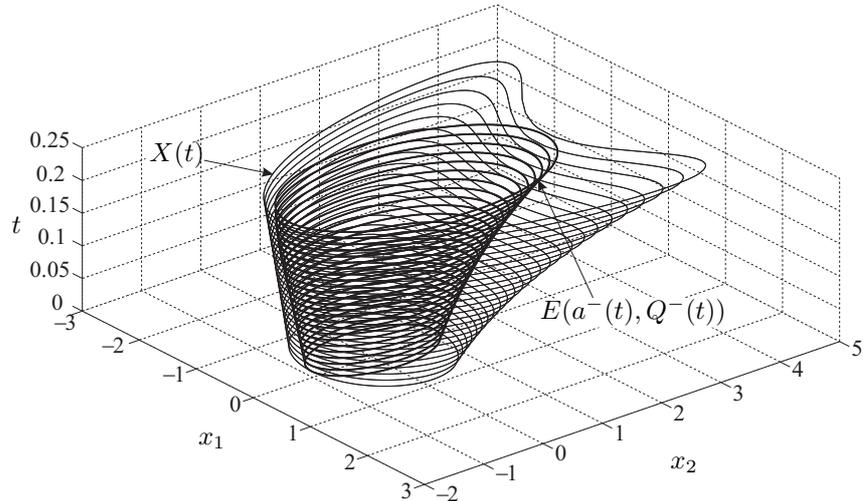


Рис. 2. Внутренняя эллипсоидальная трубка $E(a^-(t), Q^-(t))$ для трубки траекторий $X(t)$.

является внешней по включению оценкой множества достижимости $X(t)$ системы (1.13). Отметим, что в данном случае множество достижимости $X(t)$ теряет свойство выпуклости при возрастании времени t , что отражено на рис. 1, 2.

Внутренняя эллипсоидальная трубка $E(a^-(t), Q^-(t))$ ($t_0 \leq t \leq T_0$), содержащаяся в траекторной трубке $X(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$), показана на рис. 2, здесь при каждом фиксированном значении $t \in [t_0, T]$ множество $E(a^-(t), Q^-(t))$ является внутренней по включению оценкой множества достижимости $X(t)$ системы (1.13).

2. Основные результаты

Предположим теперь, что фазовые скорости и ограничения в управляемой системе вида (1.1) зависят от некоторого параметра $\lambda > 0$, а именно рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + x'B(\lambda)x \cdot d + u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0(\lambda) \in \text{comp } \mathbb{R}^n.$$

Здесь, как и ранее, A — постоянная $n \times n$ -матрица; вектор $d \in \mathbb{R}^n$, управление $u(t)$ — измеримая по Лебегу функция, стесненная геометрическим ограничением

$$u(t) \in U(\lambda), \quad U(\lambda) \in \text{comp } \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Будем предполагать, что $n \times n$ -матрицы $B(\lambda)$ являются симметрическими и положительно определенными при каждом $\lambda > 0$.

Обозначим символом $x_\lambda(\cdot) = x_\lambda(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ решение системы (1.1) на промежутке $[t_0, T]$ для допустимых начального состояния $x_0 \in X_0(\lambda)$ и управления $u(\cdot)$. Будем предполагать также, что все решения $x_\lambda(\cdot) = x_\lambda(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ определены на всем промежутке $[t_0, T]$ для любых x_0 и $u(\cdot)$ (условия, при которых данное требование выполняется, аналогичны условиям работы [17]).

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + x'B(\lambda)x \cdot d + U(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0(\lambda), \quad (2.4)$$

и предположим дополнительно, что

$$X_0(\lambda) = E(a_0(\lambda), Q_0(\lambda)), \quad U(\lambda) = E(\hat{a}(\lambda), \hat{Q}(\lambda)). \quad (2.5)$$

Трубку траекторий управляемой системы (2.1)–(2.2), совпадающую с трубкой траекторий соответствующего дифференциального включения (2.3)–(2.5) с начальным состоянием $\{t_0, X_0(\lambda)\}$, обозначим символом

$$X_\lambda(\cdot) = X_\lambda(\cdot; t_0, X_0(\lambda)) = \bigcup \{x_\lambda(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) \mid x_0 \in X_0(\lambda), u(\cdot) \in \mathcal{U}(\lambda)\}.$$

Сечение $X_\lambda(t) = X_\lambda(t; t_0, X_0(\lambda))$ трубки траекторий $X_\lambda(\cdot)$ в момент времени $t \in [t_0, T]$ совпадает со множеством достижимости системы (2.1)–(2.2) в момент t из начального состояния $\{t_0, X_0(\lambda)\}$.

Предположим также, что выполнены следующие условия.

Предположение 2. *Предположим, что при некотором $\lambda^* > 0$*

- 1) *n -векторные функции $a_0(\lambda)$ и $\hat{a}(\lambda)$ и $n \times n$ -матричные (симметрические и положительно определенные) функции $B(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $\hat{Q}(\lambda)$ непрерывны по параметру $\lambda \in [0, \lambda^*]$;*
- 2) *$a_0(0) = a_0$, $\hat{a}(0) = \hat{a}$, $B(0) = B$, $Q_0(0) = Q_0$, $\hat{Q}(\lambda) = \hat{Q}$;*
- 3) *решения системы (1.1)–(1.4) и включения (2.3)–(2.4) (при любом $\lambda \in [0, \lambda^*]$) определены на промежутке $[t_0, T]$.*

Обозначим символом $h(X, Y)$ хаусдорфово расстояние между множествами $X, Y \subset \text{comp } \mathbb{R}^n$: $h(X, Y) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid X \subseteq Y + \varepsilon B(0, 1), Y \subseteq X + \varepsilon B(0, 1)\}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{\lambda}$ ($0 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda^*$) такое, что*

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} h(X(t), X_\lambda(t)) \leq \varepsilon \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}.$$

Доказательство. При сделанных предположениях многозначное отображение

$$G(t, x, \lambda) = Ax(t) + x'B(\lambda)x \cdot d + U(\lambda),$$

определяющее правую часть дифференциального включения (2.3), удовлетворяет условиям [10, теорема 5.2; 11, § 8, теорема 1]. В частности, наиболее существенное здесь свойство состоит

в липшицевости правых частей дифференциального включения по фазовой переменной x , которая легко выводится из предположений 1 и 2. Применяя здесь указанные результаты [10, теорема 5.2; 11, § 8, теорема 1], приходим к заключению теоремы. \square

З а м е ч а н и е 2. В силу построения дифференциальных включений (1.5) и (2.3) и определения соответствующих решений теорема 1 означает, что множества достижимости $X_\lambda(t)$ управляемой системы (2.1)–(2.2) при каждом значении времени $t \in [t_0, T]$ непрерывны по параметру λ в точке $\lambda_0 = 0$ (выбор $\lambda_0 = 0$ обусловлен только желанием не усложнять обозначения, рассуждения верны при любом фиксированном значении параметра λ_0). Нетрудно заметить, что рассуждения и основной вывод теоремы 1 остаются верными и в случае, когда возмущающий параметр λ является векторным, $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

Рассмотрим теперь, как влияют параметрические возмущения в исходной управляемой системе на структуру внешних $(E(a^+(t), Q^+(t)))$ и внутренних $(E(a^-(t), Q^-(t)))$ оценивающих эллипсоидальных трубок, параметры которых определены в теоремах 1, 2. Отметим, что в правых частях дифференциальных уравнений (1.9) и (1.11), описывающих параметры внешних и внутренних оценивающих эллипсоидов, присутствуют операции вычисления экстремума (максимум по l в соотношениях (1.9) и минимум по l в соотношениях (1.11)). Данное обстоятельство может несколько ухудшить ожидаемую степень гладкости многозначных оценок траекторной трубки системы по параметру λ , поэтому примем следующее дополнительное предположение.

Предположение 3. *Предположим, что n -векторные функции $a_0(\lambda)$ и $\hat{a}(\lambda)$ и $n \times n$ -матричные функции $B(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $\hat{Q}(\lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по параметру $\lambda \in [0, \lambda^*]$, а именно предположим, что существует константа $L > 0$ такая, что при всех $\lambda, \tilde{\lambda} \in [0, \lambda^*]$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} |a_{0i}(\lambda) - a_{0i}(\tilde{\lambda})| &\leq L|\lambda - \tilde{\lambda}|, & |\hat{a}_i(\lambda) - \hat{a}_i(\tilde{\lambda})| &\leq L|\lambda - \tilde{\lambda}|, & |B_{ij}(\lambda) - B_{ij}(\tilde{\lambda})| &\leq L|\lambda - \tilde{\lambda}|, \\ |Q_{0ij}(\lambda) - Q_{0ij}(\tilde{\lambda})| &\leq L|\lambda - \tilde{\lambda}|, & |\hat{Q}_{ij}(\lambda) - \hat{Q}_{ij}(\tilde{\lambda})| &\leq L|\lambda - \tilde{\lambda}|, & i, j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $n \times n$ -матричная функция $G(z)$ ($G: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$) является липшицевой по переменной z на множестве $Y \subset \mathbb{R}^p$, т. е. существует число $\tilde{L} > 0$ такое, что*

$$|G_{ij}(z) - G_{ij}(\tilde{z})| \leq \tilde{L}\|z - \tilde{z}\| \quad \forall z, \tilde{z} \in Y, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть функция $g(l, z)$ ($l \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^p$) определена равенством $g(l, z) = l'G(z)l$. Тогда функции

$$\phi(z) = \min_{\|l\|=1} g(l, z), \quad \psi(z) = \max_{\|l\|=1} g(l, z)$$

удовлетворяют условию Липшица по переменной z .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство утверждения проводится аналогично доказательству свойства VII в монографии [3, с. 325], оно вытекает из ряда следующих простых оценок, справедливых при всех $z, \tilde{z} \in Y$:

$$\left| \max_{\|l\|=1} l'G(z)l - \max_{\|l\|=1} l'G(\tilde{z})l \right| \leq \max_{\|l\|=1} |l'G(z)l - l'G(\tilde{z})l| = \max_{\|l\|=1} \left| \sum_{i,j=1}^n l_i(G_{ij}(z) - G_{ij}(\tilde{z}))l_j \right| \leq L^*\|z - \tilde{z}\|,$$

$$\left| \min_{\|l\|=1} l'G(z)l - \min_{\|l\|=1} l'G(\tilde{z})l \right| \leq \max_{\|l\|=1} |l'G(z)l - l'G(\tilde{z})l| = \max_{\|l\|=1} \left| \sum_{i,j=1}^n l_i(G_{ij}(z) - G_{ij}(\tilde{z}))l_j \right| \leq L^*\|z - \tilde{z}\|,$$

где в качестве константы L^* можно взять, например, $L^* = n^2\tilde{L}$. \square

Введем необходимые далее дополнительные обозначения. Пусть символ $E(a_\lambda^+(t), Q_\lambda^+(t))$ означает внешнюю эллипсоидальную оценку множества достижимости $X_\lambda(t)$ систе-

мы (2.1)–(2.2) (или соответствующего дифференциального включения (2.3)–(2.5) с начальным состоянием $\{t_0, X_0(\lambda)\}$).

В соответствии с теоремой 1 матричная функция $Q_\lambda^+(t)$ имеет вид $Q_\lambda^+(t) = r_\lambda^+(t)B^{-1}(\lambda)$, а функции $a_\lambda^+(t)$, $r_\lambda^+(t)$ являются решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичной системе (1.9)–(1.10), но здесь место векторов a_0 , \hat{a} занимают теперь векторные функции $a_0(\lambda)$ и $\hat{a}(\lambda)$, а место $n \times n$ -матриц B , Q_0 и \hat{Q} занимают, соответственно, $n \times n$ -матричные функции $B(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $\hat{Q}(\lambda)$. Будем обозначать систему (1.9)–(1.10), “возмущенную” указанным выше образом, условными номерами (1.9)*–(1.10)*.

Аналогично определим по теореме 2 внутреннюю эллипсоидальную оценку $E(a_\lambda^-(t), Q_\lambda^-(t))$ множества достижимости $X_\lambda(t)$, где функции $a_\lambda^-(t)$, $r_\lambda^-(t)$ являются решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичной системе (1.11)–(1.12), но здесь также место векторов a_0 , \hat{a} и $n \times n$ -матриц B , Q_0 и \hat{Q} занимают, соответственно, векторные функции $a_0(\lambda)$ и $\hat{a}(\lambda)$ и $n \times n$ -матричные функции $B(\lambda)$, $Q_0(\lambda)$, $\hat{Q}(\lambda)$. Так же, как сделано выше, обозначим “возмущенную” систему вида (1.11)–(1.12) (но с параметром λ) условными номерами (1.11)*–(1.12)*.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $\tilde{\lambda}$ ($0 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda^*$) такое, что имеют место следующие неравенства:

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} h(E(a^+(t), Q^+(t)), E(a_\lambda^+(t), Q_\lambda^+(t))) \leq \epsilon \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}, \quad (2.6)$$

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} h(E(a^-(t), Q^-(t)), E(a_\lambda^-(t), Q_\lambda^-(t))) \leq \epsilon \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}. \quad (2.7)$$

Доказательство. При сделанных предположениях в силу леммы и на основании теорем 1, 2 заключаем, что для дифференциальных уравнений вида (1.9)*–(1.10)* и (1.11)*–(1.12)*, но с входящим теперь (как отмечено выше) в данные уравнения параметром λ , выполнены условия теоремы 15 [9, с. 184]. Указанные условия гарантируют непрерывную зависимость решений $a_\lambda^+(t)$, $Q_\lambda^+(t)$ и $a_\lambda^-(t)$, $Q_\lambda^-(t)$ соответствующих систем дифференциальных уравнений (1.9)*–(1.10)* и (1.11)*–(1.12)* от входящего в эти системы параметра λ .

Используя далее результаты работы [19], получаем, что искомая близость (формулы (2.6), (2.7)) в метрике Хаусдорфа внешних (соответственно, внутренних) эллипсоидов, оценивающих множества достижимости сверху по включению (соответственно, снизу по включению) в исходной и возмущенной системах, вытекает из установленной непрерывности по параметру λ их характеристик — центров $\{a_\lambda^+(t), a_\lambda^-(t)\}$ и матриц $\{Q_\lambda^+(t), Q_\lambda^-(t)\}$ соответствующих эллипсоидов — внешнего по включению $E(a_\lambda^+(t), Q_\lambda^+(t))$ и внутреннего по включению $E(a_\lambda^-(t), Q_\lambda^-(t))$ для соответствующего множества достижимости $X_\lambda(t)$. \square

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что рассматриваемые в работе внешние и внутренние эллипсоидальные оценки множеств достижимости нелинейной управляемой системы обладают в силу теоремы 4 тем же свойством непрерывности по параметрическим возмущениям, что и оцениваемое при помощи данных конструкций исходное множество достижимости (теорема 3). Таким образом, можно утверждать, что предлагаемые эллипсоидальные оценки отражают исходную динамику неопределенной управляемой системы, так как “наследуют” ее некоторые динамические характеристики.

3. Заключение

В данной работе исследованы вопросы чувствительности множеств достижимости нелинейной неопределенной системы и соответствующих эллипсоидальных оценок указанных множеств достижимости по конечномерному параметру, входящему в заданные ограничения. Результаты основаны на алгоритмах и методах теории эллипсоидального оценивания и теории дифференциальных уравнений и включений.

Отметим, что близкие постановки задач оценивания множеств достижимости управляемых систем с импульсным управлением в линейном и нелинейном случае рассматривались в работах [1; 12; 16; 22; 24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вздорнова О.Г., Филиппова Т.Ф.** Задачи импульсного управления при эллипсоидальных ограничениях: вопросы чувствительности по параметрам ограничений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 135–149.
2. **Дарьин А.Н., Куржанский А.Б.** Метод вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределенных возмущениях // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 6. С. 607–611.
3. **Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
6. **Куржанский А.Б.** Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
7. **Куржанский А.Б.** О задаче управления эллипсоидальным движением // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 168–177.
8. **Куржанский А.Б., Месяц А.И.** Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 404–414.
9. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
10. **Толстоногов А.А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 295 с.
11. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
12. **Филиппова Т.Ф.** Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 262–269.
13. **Филиппова Т.Ф.** Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 223–232.
14. **Черноузько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
15. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
16. **Filippova T.F.** Sensitivity problems for impulsive differential inclusions [e-resource] // Proc. of the 6th WSEAS International Conf. on Appl. Math. (Corfu Island, 2004). P. 1–6.
17. **Filippova T.F., Berezina E.V.** On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: theory and computer simulations // Proc. of the 6th LSSC International Conf. (Sozopol, Bulgaria, June 5–9, 2007): Revised Papers. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. P. 326–333. (Lecture Notes in Computer Science; vol 4818).
18. **Filippova T.F.** Trajectory tubes of nonlinear differential inclusions and state estimation problems // J. Concr. Appl. Math. 2010. Vol. 8, iss. 1. P. 454–469.
19. **Goffin J.-L., Hoffman A.J.** On the relationship between the Hausdorff distance and matrix distances of ellipsoids // Linear Algebra Appl. 1983. Vol. 52–53. P. 301–313.
20. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
21. **Kurzanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia / ed. A.B. Kurzanski. Boston: Birkhauser, 1993. P. 122–188. (Progr. Systems Control Theory; vol. 17.)
22. **Kurzanski A.B., Filippova T.F.** The mathematics of impulse control [e-resource] // Proc. of the 20th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (University of Melbourne, July 9–13, 2012.) P. 1–4.

23. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
24. **A.B. Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Impulsive inputs for feedback control and hybrid system modeling // *Advances in Dynamics and Control: Theory Methods and Applications* / eds. S. Sivasundaram, J.V. Devi, F.E. Udwardia, and I. Lasiecka. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2011. P. 305–326.

Филиппова Татьяна Федоровна

Поступила 25.08.2014

д-р физ.-мат. наук, профессор

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

профессор

Департамент БИММ, ВШЭМ, Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: ftf@imm.uran.ru

УДК 519.16 + 519.85

**ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА
ДЛЯ ЕВКЛИДОВОЙ ЗАДАЧИ О ЦИКЛОВОМ ПОКРЫТИИ ГРАФА¹****М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина**

Изучается задача Min- k -SCCP о разбиении полного взвешенного орграфа на k вершинно-непересекающихся циклов минимального суммарного веса, являющаяся естественным обобщением известной задачи коммивояжера (TSP) и обладающая рядом практических приложений в исследовании операций и анализе данных. Показано, что задача в общем случае NP -трудна в сильном смысле и сохраняет свойство труднорешаемости даже в геометрической постановке. Для метрического случая предложен 2-приближенный алгоритм. Для евклидовой задачи Min-2-SCCP построена полиномиальная приближенная схема, основанная на подходе С. Ароры.

Ключевые слова: NP -трудная задача, полиномиальная приближенная схема (PTAS), задача коммивояжера (TSP), цикловое покрытие размера k .

M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina. Polynomial-time approximation scheme for a Euclidean problem on a cycle covering of a graph.

We study the Min- k -SCCP problem on a partition of a complete weighted digraph into k vertex-disjoint cycles of minimum total weight. This problem is a natural generalization of the known Traveling salesman problem (TSP) and has a number of applications in operations research and data analysis. We show that the problem is strongly NP -hard and preserves intractability even in the geometric statement. For a metric special case of the problem, a new polynomial 2-approximation algorithm is proposed. For the Euclidean Min-2-SCCP, a polynomial-time approximation scheme based on Arora's approach is built.

Keywords: NP -hard problem, polynomial-time approximation scheme (PTAS), traveling salesman problem (TSP), cycle covering of size k .

Введение

Одной из классических труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации является задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) [1], связанная с поиском в полном взвешенном графе G гамильтонова цикла (маршрута коммивояжера) минимального веса. Отдельный интерес представляют два подкласса задачи TSP: Metric TSP и Euclidean TSP. Первый подкласс соответствует случаю неориентированного графа, веса ребер которого удовлетворяют неравенству треугольника. Во втором случае предполагается, что вершины графа G являются точками d -мерного евклидова пространства, а веса ребер определяются парными расстояниями между ними.

Известно [2], что задача коммивояжера NP -трудна даже в евклидовой постановке, следовательно, в предположении $P \neq NP$ точное решение задачи не может быть найдено за полиномиальное время.

Несмотря на то что в общем случае задача TSP не аппроксимируема [3], для ряда ее подклассов разработаны эффективные приближенные алгоритмы. Например, для задачи Metric TSP известен $\frac{3}{2}$ -приближенный алгоритм [4], а задача Euclidean TSP обладает полиномиальной приближенной схемой [5] и асимптотически точным алгоритмом [6] в пространстве произвольной фиксированной размерности.

Задача коммивояжера обладает многочисленными обобщениями, важными как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений. Отметим лишь некоторые из них.

¹Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

Задача m -Peripatetic Salesman Problem (m -PSP) [7; 8] связана с поиском нескольких реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера, оптимизирующих тот или иной интегральный критерий, например суммарный вес, максимум весов и так далее. Как и TSP, задача m -PSP труднорешаема и слабо аппроксимируема в общем случае, однако в конечномерном евклидовом пространстве фиксированной размерности [9–11] допускает асимптотически точное решение с кубической трудоемкостью.

Содержательная постановка задачи маршрутизации (Vehicle Routing Problem, VRP) [12] состоит в следующем: заданы координаты n потребителей и координаты склада O ; требуется найти набор замкнутых маршрутов минимальной общей длины, посещающих в совокупности каждого потребителя ровно один раз так, что каждый маршрут начинается и заканчивается в O . Задача VRP имеет важное практическое применение, обзор результатов в области полиномиальных приближенных и эффективных эвристических алгоритмов для различных модификаций этой задачи можно найти в монографиях [13; 14].

Предметом исследования настоящей работы является задача Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem (Min- k -SCCP), цель которой состоит в поиске в полном взвешенном орграфе k вершинно-непересекающихся циклов наименьшего суммарного веса, посещающих каждую вершину графа в точности один раз. Параметр k фиксируется заранее и не является частью условия задачи.

В статье показано, что задача Min- k -SCCP NP -трудна в сильном смысле как в общем, так и в частных случаях Metric Min- k -SCCP и Euclidean Min- k -SCCP. Для задачи Metric Min- k -SCCP предложен эффективный 2-приближенный алгоритм, а для задачи Euclidean Min-2-SCCP на плоскости обоснована приближенная полиномиальная схема.

1. Постановка задачи

Как обычно, воспользуемся стандартными обозначениями: \mathbb{R} — поле вещественных чисел, \mathbb{N} — множество натуральных чисел, \mathbb{N}_m — целочисленный интервал $\{1, \dots, m\}$, \mathbb{N}_m^0 — целочисленный интервал $\{0, \dots, m\}$.

Пусть C — произвольный контур в орграфе G . Как обычно, через $V(C)$ и $E(C)$ обозначим подмножества составляющих его вершин и дуг.

На множестве дуг графа G задана весовая функция $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, в силу конечности множества E однозначно определяемая матрицей $W = (w_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq n$) так, что для произвольных i и j вес дуги $e = (i, j)$ задается соотношением $w(e) = w_{ij}$. Весом (стоимостью) контура C назовем величину $W(C) = \sum_{e \in E(C)} w(e)$.

Задачей коммивояжера (TSP) называется следующая комбинаторная задача. Задан полный орграф $G = (V, E, w)$. Требуется найти гамильтонов контур C наименьшего веса.

Задачу коммивояжера принято называть метрической (Metric TSP), если граф G является неориентированным, а веса его ребер удовлетворяют неравенству треугольника $w_{ij} + w_{jl} \geq w_{il}$ для любых попарно различных индексов i, j, l . Если $V \subset \mathbb{R}^d$ для некоторого d , $w_{ij} = \|v_i - v_j\|_2$, задачу коммивояжера принято называть евклидовой (Euclidean TSP).

В данной работе мы воспользуемся понятием циклового покрытия графа, обобщающим понятие гамильтонова цикла (контура).

О п р е д е л е н и е 1. Цикловым покрытием размера k (k -SCC) орграфа G назовем произвольное семейство $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ его вершинно-непересекающихся контуров, удовлетворяющее условию $V(C_1) \cup \dots \cup V(C_k) = V$. Вес $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ такого покрытия зададим равенством $\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^k W(C_i)$.

З а д а ч а Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem (Min- k -SCCP). Дано: полный взвешенный орграф $G = (V, E, w)$. Найти цикловое покрытие размера k минимального веса.

Задача Min- k -SCCP может быть представлена в оптимизационной форме

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^k \sum_{e \in E(C_i)} w(e) \rightarrow \min_{\substack{\bigcup_{i \in \mathbb{N}_k} V(C_i) = V; \\ V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset \ (\{i, j\} \subset \mathbb{N}_k)}}.$$

Задачей Metric Min- k -SCCP договоримся называть задачу Min- k -SCCP, в которой каждой вершине орграфа G инцидентна петля нулевого веса, функция w симметрична (т. е. $w_{ij} = w_{ji}$ для произвольных i и j), принимает неотрицательные значения и для любой тройки i, j, l справедливо неравенство треугольника $w_{ij} + w_{jl} \geq w_{il}$. Орграфу G договоримся сопоставлять взвешенный граф \bar{G} , получаемый из G отменой ориентации. Более того, в метрической постановке задачи, в силу симметричности весовой функции, вес произвольного циклового покрытия не зависит от ориентации составляющих его контуров. Поэтому всюду ниже, где это не будет вызывать недопонимания, проводятся рассуждения, касающиеся графа G , в терминах цикловых покрытий соответствующего ему неориентированного графа \bar{G} .

Задачей Euclidean Min- k -SCCP назовем подкласс задачи Metric Min- k -SCCP, в котором вершины G являются точками в d -мерном евклидовом пространстве, а матрица W порождена попарными расстояниями между ними.

2. Вычислительная сложность задачи Min- k -SCCP

Обоснуем труднорешаемость задачи Min- k -SCCP при произвольном $k \geq 1$. Рассуждения основаны на идее “клонирования” постановки сводимой задачи, использованной, например, в [15] при доказательстве труднорешаемости задачи поиска нескольких дизъюнктивных клик заданного порядка (m -WCP).

Теорема 1. *Задача Min- k -SCCP NP-трудна в сильном смысле при произвольном фиксированном $k \geq 1$.*

Доказательство. При $k = 1$ теорема очевидно верна поскольку задача Min-1-SCCP совпадает с NP-трудной в сильном смысле задачей TSP.

Зафиксируем произвольное $k > 1$. Рассмотрим произвольную постановку задачи TSP, заданную полным взвешенным неориентированным графом $\bar{G} = (V, E, w)$ на n вершинах. Без ограничения общности полагаем $V = \mathbb{N}_n$. Положим

$$p = \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_{ij} + 1.$$

Доопределим функцию w равенствами $w_{ii} = 0$ и рассмотрим постановку задачи Min- k -SCCP, заданную полным взвешенным орграфом $G' = (V', E', w')$ с петлями при каждой вершине, в котором

$$V' = V_1 \cup \dots \cup V_k, \quad V_l = \{n(l-1) + 1, n(l-1) + 2, \dots, nl\} \quad (1 \leq l \leq k),$$

а вес $w'(e)$ дуги $e = (x, y)$ для произвольных $x \in V_{k_1}, y \in V_{k_2}$ таких, что $i \equiv x \pmod{n}, j \equiv y \pmod{n}$, определяется равенством

$$w'(e) = w_{ij} + p \operatorname{sign} |k_1 - k_2|.$$

По построению $w'(e) \geq w_{ij}$, причем равенство достигается исключительно при условии $k_1 = k_2$. Заметим, что проведенное построение может быть произведено за полиномиальное время (от длины записи исходной постановки задачи TSP).

Пусть $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \dots, C_k^*\}$ — оптимальное решение построенной постановки задачи Min- k -SCCP, цикловое покрытие размера k минимального веса графа G' . По выбору p

каждому $l \in \mathbb{N}_k$ взаимно однозначно соответствует такой номер $k(l) \in \mathbb{N}_k$, что $V_{C_l^*} = V_{k(l)}$. Таким образом, контур C_l^* является гамильтоновым контуром минимального веса подграфа $G'(V_{k(l)})$ в силу аддитивности критерия оптимизации задачи. По построению орграфа G' подграф $\bar{G}'(V_{k(l)})$ изоморфен графу \bar{G} . Следовательно, произвольный контур C_l^* однозначно порождает решение исходной задачи TSP.

Теорема доказана.

Путем несложной модификации приведенного выше доказательства нетрудно обосновать полиномиальную сводимость задачи Metric TSP к задаче Metric Min- k -SCCP и задачи Euclidean TSP (в пространстве произвольной фиксированной размерности $d > 1$) к задаче Euclidean Min- k -SCCP (в том же пространстве). Тем самым задача Min- k -SCCP сохраняет труднорешаемость и в этих частных случаях.

3. Алгоритм построения минимального остовного леса

Распространяя технику [3] при доказательстве неаппроксимируемости задачи TSP на случай k контуров, нетрудно показать, что задача Min- k -SCCP (при произвольном $k > 1$) не может быть полиномиально аппроксимируема с точностью $O(2^n)$, если $P \neq NP$. Ниже показывается, что как и в случае задачи коммивояжера, задача Min- k -SCCP в метрической постановке принадлежит классу APX задач комбинаторной оптимизации, обладающих полиномиальными приближенными алгоритмами с фиксированной точностью, а Euclidean Min-2-SCCP обладает полиномиальной приближенной схемой (PTAS).

Введем необходимые определения.

О п р е д е л е н и е 2. k -лесом называется ациклический подграф неориентированного графа G , состоящий из k компонент связности (среди которых возможны компоненты, состоящие из одной вершины). *Весом (стоимостью)* k -леса назовем суммарный вес всех входящих в него ребер.

О п р е д е л е н и е 3. Остовный подграф графа G , являющийся k -лесом, называется *остовным k -лесом*. *Минимальным остовным k -лесом* (k -Minimum Spanning Forest или k -MSF) называется остовный k -лес наименьшего веса.

Построим на вершинах исходного графа минимальный остовный k -лес, воспользовавшись простой модификацией алгоритма Борувки — Краскала [16], и обоснуем корректность приведенного алгоритма.

А л г о р и т м 1

1. Начать с “пенькового” леса F_0 .
2. Для каждого $i \in \mathbb{N}_{n-k}$ добавить в строящийся лес F_{i-1} ребро

$$e_i = \arg \min \{w(e) : F_{i-1} \cup \{e\} \text{ — ациклический граф}\}.$$

3. Выдать построенный k -лес F^* .

Следующее утверждение, обосновывающее корректность алгоритма, по-видимому, может считаться “фольклорным”, но приводится с доказательством для полноты изложения.

Утверждение 1. F^* есть k -MSF.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — произвольный k -MSF. Естественно перейти к рассмотрению нетривиального случая $F \neq F^*$. Сопоставим лесу F произвольным образом упорядоченную последовательность $ord_F = (f_1, \dots, f_{n-k})$ его ребер. По аналогии сопоставим лесу F^* последовательность $ord^* = (e_1, \dots, e_{n-k})$, построенную описанным выше алгоритмом. На множестве

$$Ord = \{ord_F^j : F \text{ есть } k\text{-MSF}, j \in \{1, \dots, (n-k)!\}\}$$

всевозможных таких последовательностей определим функцию $\varphi: Ord \rightarrow \mathbb{N}$ по следующему правилу:

$$\varphi((f_1, \dots, f_{n-k})) = \begin{cases} n - k + 1, & \text{если } f_l = e_l \ (l \in \mathbb{N}_{n-k}), \\ i, & \text{если } f_1 = e_1, \dots, f_{i-1} = e_{i-1}, f_i \neq e_i. \end{cases}$$

Будучи определенной на конечном множестве, функция φ достигает своей точной верхней грани. Обозначим через \tilde{F} k -MSF, для которого найдется такая последовательность

$$ord_{\tilde{F}}^j = (e_1, \dots, e_{i-1}, f_i, \dots, f_{n-k}) = \arg \max\{\varphi(ord): ord \in Ord\}, \quad (1)$$

что $w(f_i) \leq \dots \leq w(f_{n-k})$. Убедимся в том, что $i = n - k + 1$. В самом деле, пусть, от противного, $i < n - k + 1$. По построению алгоритма $w(e_i) \leq w(f_i)$ (так как в противном случае на i -й итерации было бы добавлено ребро f_i). По выбору $ord_{\tilde{F}}^j$ (как оптимальной последовательности) $e_i \notin \{f_i, \dots, f_{n-k}\}$.

Добавление ребра e_i в \tilde{F} либо приведет к появлению одного простого цикла, либо сохранит ацикличность графа $\tilde{F} \cup \{e_i\}$. Пусть C — простой цикл в графе $\tilde{F} \cup \{e_i\}$. Поскольку подграф, порожденный ребрами e_1, \dots, e_{i-1}, e_i , — ациклический, то циклу C принадлежит хотя бы одно ребро $f_q \in \{f_i, \dots, f_{n-k}\}$. По доказанному граф $F' = \tilde{F} \cup \{e_i\} \setminus \{f_q\}$ является k -лесом, вес которого

$$w(F') = w(\tilde{F}) + w(e_i) - w(f_q) \leq w(\tilde{F}) + w(e_i) - w(f_i) \leq w(\tilde{F}).$$

Тем самым F' есть k -MSF, причем по построению найдется перестановка его ребер $ord_{F'} = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, \dots)$, для которой $\varphi(ord_{F'}) > i$, что противоречит (1). Значит, предположение $i < n - k + 1$ неверно.

Случай ациклического графа $\tilde{F} \cup \{e_i\}$ может быть рассмотрен по аналогии.

Обоснованное равенство $i = n - k + 1$ влечет оптимальность леса F^* , построенного алгоритмом 1.

Утверждение доказано.

4. 2-приближенный алгоритм для задачи Metric Min- k -SCCP

В целом алгоритм повторяет схему известного 2-приближенного алгоритма для метрической задачи коммивояжера. Без ограничения общности полагаем $k < n$, так как при $k > n$ постановка задачи теряет смысл, а при $k = n$ элементарно находится оптимальное решение.

А л г о р и т м 2

1. Применяя алгоритм 1, строим остовный k -лес минимального веса в графе \bar{G} .
2. Удваиваем ребра в построенном лесу, преобразуя все его непустые деревья в эйлеровы подграфы.
3. В каждом построенном эйлеровом подграфе находим эйлеров маршрут, который стандартным образом преобразовываем в гамильтонов цикл (для данной компоненты связности).
4. В качестве ответа выдаем построенную совокупность циклов, дополненную необходимым числом вырожденных одновершинных маршрутов.

Утверждение 2. *Вес App, построенного с помощью алгоритма 2 приближенного решения задачи Min- k -SCCP, удовлетворяет соотношению*

$$OPT \leq App \leq 2 OPT,$$

где OPT — вес оптимального набора маршрутов.

Доказательство. Левое неравенство справедливо по определению. Для обоснования правого рассмотрим произвольный оптимальный набор маршрутов. Поскольку $k < n$, он содержит хотя бы один непустой цикл, возможно на двух вершинах. Процедурой удаления по одному ребру из каждого непустого цикла преобразуем этот набор в остовный лес, вес которого обозначим через SF . Обозначив через MSF вес минимального остовного леса из k деревьев, получим $MSF \leq SF \leq OPT$, откуда

$$App \leq 2MSF \leq 2OPT.$$

Утверждение доказано.

Заметим, что оценка точности предложенного алгоритма не зависит от k , а его трудоемкость, очевидно, может быть оценена сверху трудоемкостью аналогичного алгоритма для задачи TSP. Таким образом, алгоритм сохраняет свои аппроксимационные свойства, даже если параметр k является частью входа решаемой задачи.

5. Приближенная полиномиальная схема для задачи Euclidean Min-2-SCCP на плоскости

Как обычно, под полиномиальной приближенной схемой (Polynomial-Time Approximation Scheme, PTAS) для задачи комбинаторной оптимизации понимаем семейство алгоритмов, содержащее для каждого фиксированного $\epsilon > 1$ приближенный алгоритм, решающий данную задачу с гарантированной точностью $(1 + 1/\epsilon)$ за время, ограниченное сверху некоторым полиномом от длины записи ее исходных данных (при этом порядок и коэффициенты полинома могут, вообще говоря, зависеть от ϵ).

5.1. Предварительное преобразование условия задачи

Покажем, что для произвольной постановки задачи Euclidean Min-2-SCCP справедлива одна из двух альтернатив, проверка которых может быть осуществлена за полиномиальное время:

- 1) задача допускает сведение к двум независимым задачам TSP;
- 2) расстояние между узлами исходной задачи ограничено сверху некоторой линейной функцией от OPT .

Построим минимальный остовный лес (алгоритм 1, п. 3) из двух деревьев T_1, T_2 (рис. 1).

Как известно, диаметр D множества и радиус R описанного вокруг него шара в евклидовом пространстве размерности d связаны между собой неравенством Юнга:

$$\frac{1}{2}D \leq R \leq \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{\frac{1}{2}}D.$$

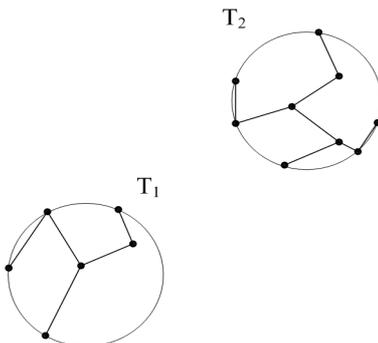


Рис. 1. Окружности, описанные вокруг деревьев T_1 и T_2 .

В частности, в рассматриваемом нами случае двумерного пространства неравенство примет вид:

$$\frac{1}{2}D \leq R \leq \frac{\sqrt{3}}{3}D. \tag{2}$$

Пусть далее D_1, D_2 — диаметры подмножеств вершин, входящих в деревья T_1, T_2 , а R_1 и R_2 — радиусы описанных вокруг них окружностей. Положим $D = \max\{D_1, D_2\}$ и $R = \max\{R_1, R_2\}$ и обозначим через $\rho(T_1, T_2)$ расстояние между центрами кругов, описанных вокруг деревьев T_1 и T_2 .

Утверждение 3. *Если для заданного графа G выполняется неравенство*

$$\rho(T_1, T_2) > 5R, \tag{3}$$

то любое оптимальное решение задачи Euclidean Min-2-SCCP состоит из оптимальных решений задач TSP для подграфов $G(T_1)$ и $G(T_2)$, индуцированных деревьями T_1 и T_2 . В противном случае диаметр графа G не превышает $(7\sqrt{3}/3)OPT$.

Доказательство. Пусть условие (3) выполняется. Предположим от противного, что один из циклов оптимального решения задачи содержит вершины как из T_1 , так и из T_2 . Без ограничения общности остановимся на рассмотрении случая, в котором второй цикл является невырожденным и связывает вершины одного из деревьев. Остальные варианты могут быть рассмотрены по аналогии.

По предположению первый цикл содержит хотя бы 2 ребра, соединяющих вершины из T_1 и T_2 (рис. 2). По условию длина каждого из них больше $3R$. Удалим эти ребра и замкнем маршруты внутри каждого из кругов, что повлечет удаление одного из ребер второго цикла и добавление трех новых ребер (рис. 3).

Поскольку вес каждого из добавленных ребер не превосходит $2R$, то проведенное преобразование приведет к сокращению суммарной длины маршрутов более чем на $6R$ и одновременному увеличению не более чем на $6R$. Тем самым обосновано существование 2-циклового покрытия, вес которого строго меньше веса исходного решения, что противоречит оптимальности последнего.

Рассмотрим второй случай, когда условие (3) не выполняется. В самом деле, по условию расстояние между центрами кругов, описанных вокруг деревьев T_1 и T_2 , не превосходит $5R$ (см. рис. 3). Следовательно, расстояние между любыми двумя вершинами графа ограничено сверху $7R$. Применяя неравенство (2) и учитывая очевидную двустороннюю оценку

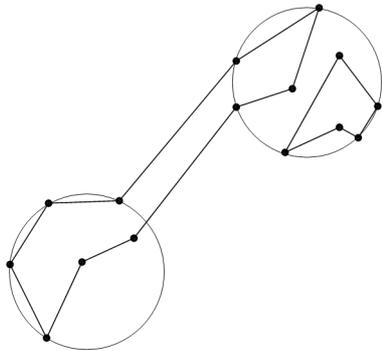


Рис. 2. Цикл в 2-циклового покрытия содержит вершины из T_1 и T_2 .

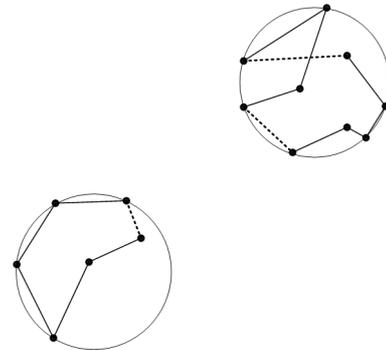


Рис. 3. Результат преобразования циклов.

$D \leq MSF \leq OPT$ для веса минимального остовного леса $\{T_1, T_2\}$, получаем

$$R \leq \frac{\sqrt{3}}{3} D \leq \frac{\sqrt{3}}{3} OPT,$$

т. е. расстояние между любыми двумя узлами не превосходит $(7\sqrt{3}/3) OPT$.

Утверждение доказано.

Таким образом, задача Euclidean Min-2-SCCP разбивается на две независимые подзадачи TSP, если неравенство (3) выполняется. В частности, PTAS для задачи Euclidean Min-2-SCCP может быть построена комбинацией PTAS для этих подзадач.

Остановимся на рассмотрении частного случая задачи Euclidean Min-2-SCCP, для которого (3) не выполняется.

5.2. Общая схема алгоритма

Основная идея предлагаемого алгоритма заключается в рандомизированном рекурсивном разделении объемлющего квадрата на квадраты меньшей площади и последующем поиске двух замкнутых маршрутов специального вида:

(а) оба маршрута в совокупности посещают все вершины исходного графа, причем каждую ровно по одному разу;

(б) отрезки маршрутов, соединяющие соседние вершины, являются непрерывными ломаными и могут пересекать границы построенных квадратов лишь в заданных наперед точках (порталах);

(с) число и местоположение порталов, равно как и предельное количество допустимых пересечений сторон каждого квадрата, также задаются заранее и зависят от параметра c , определяющего точность приближения;

(д) найденная в результате пара маршрутов обладает минимальной суммарной длиной среди всех пар, удовлетворяющих первым трем условиям.

Обоснование полиномиальной приближенной схемы для задачи Euclidean Min-2-SCCP будет состоять из четырех основных частей.

1. Воспользовавшись подходом, предложенным в [5], покажем (подразд. 5.3), что произвольной постановке задачи Euclidean Min-2-SCCP и каждому значению параметра c за полиномиальное время может быть сопоставлена постановка специального вида (назовем ее *округленной*) так, что произвольный $(1+1/c)$ -приближенный алгоритм для округленной постановки задачи индуцирует $(1+c_1/c)$ -приближенный алгоритм для исходной задачи (для некоторого независимого значения $c_1 > 1$).

2. Опишем (подразд. 5.4) рандомизированную процедуру построения рекурсивного разбиения квадрата со сторонами, параллельными осям координат (договоримся называть *объемлющим*), содержащего вершины графа, задающего округленную постановку задачи Euclidean Min-2-SCCP.

3. Покажем (подразд. 5.5), что с вероятностью, не меньшей 0.5, в рамках выбранной вероятностной модели существует $(1+1/c)$ -оптимальный набор маршрутов, удовлетворяющий описанным выше условиям (а)–(д).

4. Используя метод динамического программирования и стандартную схему дерандомизации, построим (подразд. 5.6) искомый набор маршрутов.

5.3. Округленная задача Euclidean Min-2-SCCP

Покажем, что для построения PTAS для задачи Euclidean Min-2-SCCP достаточно построить аналогичную схему для некоторого ее подкласса. По аналогии с понятием округленной задачи TSP, принятым в [5], введем понятие округленной задачи Euclidean Min-2-SCCP.

О п р е д е л е н и е 4. *Округленной* назовем постановку задачи Euclidean Min-2-SCCP, для которой выполняются следующие ограничения: все вершины графа имеют целочисленные координаты $x_i, y_i \in \mathbb{N}_{O(n)}^0$ и вес любого ребра e_{ij} больше или равен 4.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *PTAS для округленной Euclidean Min-2-SCCP индуцирует PTAS для общей задачи Euclidean Min-2-SCCP.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопоставим постановке задачи Euclidean Min-2-SCCP округленную постановку так, чтобы стоимость любой пары маршрутов изменилась несущественно. Пусть

$$L = \frac{7\sqrt{3}}{3}MSF \leq \frac{7\sqrt{3}}{3}OPT.$$

По предположению исходная постановка задачи Euclidean Min-2-SCCP удовлетворяет неравенству (3). Следовательно, для нее найдется объемлющий квадрат со стороной длины L .

Чтобы получить округленную задачу, проведем внутри этого квадрата горизонтальные и вертикальные линии, расстояние между которыми равно $L/(2nc)$, и переместим каждую вершину исходного графа в ближайший узел получившейся сетки. В результате расстояние между любыми двумя вершинами изменится не более чем на $L/(nc)$, а значит, длины пары маршрутов изменятся суммарно не более чем на L/c .

Далее, изменим расстояние между линиями сетки, умножив все координаты на $8nc/L$. Получим сетку со стороной клетки 4. Сдвинем начало координат так, чтобы оно совпало с левым нижним углом решетки. После описанных преобразований каждая вершина примет неотрицательные координаты, а минимальное расстояние между ними станет не менее четырех.

Изначально расстояние между любыми двумя вершинами не превосходило $2L$. Следовательно, после произведенных преобразований расстояние между произвольными вершинами будет ограничено сверху $O(n)$ и координаты всех вершин $x, y \in \mathbb{N}_{O(n)}^0$.

Заметим, что для любого маршрута в исходной задаче стоимостью W стоимость W' соответствующего ему маршрута в округленной задаче удовлетворяет соотношению

$$\frac{8nc}{L}\left(W - \frac{L}{c}\right) \leq W' \leq \frac{8nc}{L}\left(W + \frac{L}{c}\right).$$

Пусть OPT и OPT' — стоимости оптимальных решений задачи Min-2-SCCP в исходной и округленной постановках, W' — стоимость приближенного решения округленной задачи, полученного PTAS, и W — стоимость соответствующего решения задачи в исходной постановке. Поскольку

$$OPT' \leq W' \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)OPT' \quad \text{и} \quad \frac{8nc}{L}\left(OPT - \frac{L}{c}\right) \leq OPT' \leq \frac{8nc}{L}\left(OPT + \frac{L}{c}\right),$$

то

$$\frac{8nc}{L}\left(W - \frac{L}{c}\right) \leq W' \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)OPT' \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)\frac{8nc}{L}\left(OPT + \frac{L}{c}\right),$$

откуда

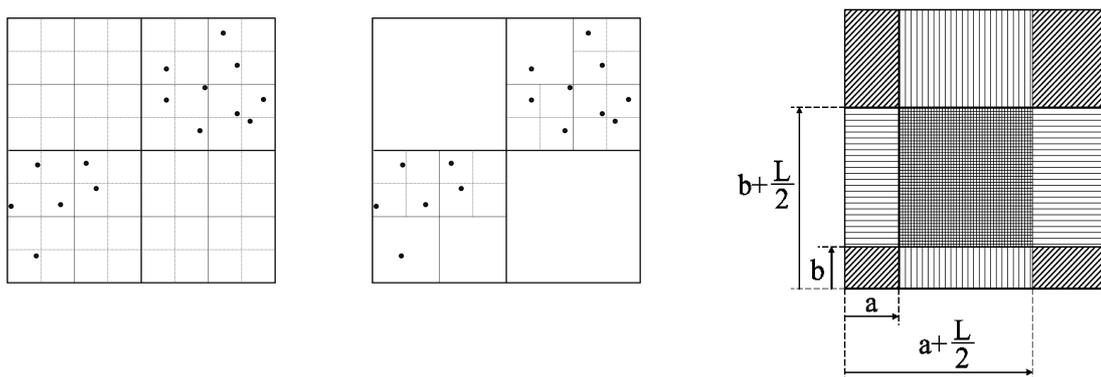
$$W - \frac{L}{c} \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)\left(OPT + \frac{L}{c}\right)$$

и, следовательно,

$$OPT \leq W \leq \left(\frac{7\sqrt{3}}{3c^2} + \frac{17\sqrt{3}}{3c} + 1\right)OPT.$$

Лемма доказана.

Опишем построение PTAS для округленной задачи Euclidean Min-2-SCCP.

Рис. 4. разбиение \mathcal{S} , 4-дерево и схема сдвига 4-дерева.

5.4. 4-дерево

Следуя подходу [5], построим геометрическое разбиение задачи.

О п р е д е л е н и е 5. *Объемлющим квадратом \mathcal{S}* для задачи Euclidean Min-2-SCCP назовем квадрат, содержащий все вершины графа, определяющего ее постановку, стороны которого параллельны осям координат, левый нижний угол совпадает с началом координат, а длина стороны L является наименьшей подходящей степенью двойки.

Как показано в подразд. 5.3, всегда можно считать выполненным соотношение $L = O(n)$. Покроем квадрат \mathcal{S} сеткой (рис. 4), образованной вертикальными и горизонтальными линиями, пересекающими координатные оси в целочисленных точках с шагом 1.

Для дальнейших построений воспользуемся структурой данных, известной [17] как 4-дерево. *Корнем* дерева назовем объемлющий квадрат \mathcal{S} . Каждый квадрат, включая корневой, делим на четыре равных дочерних квадрата. Повторяем данную процедуру рекурсивно до тех пор, пока не получим квадраты, содержащие не более одной вершины исходной задачи (см. рис. 4).

Для удобства обозначений определим в построенном дереве уровни. Договоримся считать, что корневой квадрат принадлежит уровню 0, четыре его дочерних квадрата — уровню 1 и так далее. Заметим, что построенное дерево содержит $O(L^2) = O(n^2)$ квадратов, $O(n)$ листьев и $O(\log L) = O(\log n)$ уровней. Точку $(L/2, L/2)$ пересечения внутренних границ квадратов 1-го уровня назовем *центральной*. В дальнейшем нас будут интересовать 4-дерева, центральные точки которых случайно распределены в квадрате \mathcal{S} .

О п р е д е л е н и е 6. Пусть $a, b \in \mathbb{N}_L$; 4-деревом $T(a, b)$ назовем 4-дерево, центральная точка которого имеет координаты $((L/2 + a) \bmod L, (L/2 + b) \bmod L)$.

Как показано на рис. 4, квадраты, принадлежащие произвольному уровню $i \geq 1$ дерева $T(a, b)$, как и его центральная точка, подвергаются циклическому сдвигу по горизонтали и вертикали².

По построению структура дерева $T(a, b)$ зависит от положения центральной точки. Далее показывается, что если величины a и b распределены равномерно на целочисленном интервале \mathbb{N}_L , то с высокой вероятностью дерево $T(a, b)$ порождает приближенное решение исходной задачи, обладающее заданной точностью.

5.5. Теорема существования

Зададимся значениями параметров $m, r \in \mathbb{N}$. Произвольному квадрату \mathcal{S} сопоставим регулярное разбиение его границы, включающее вершины квадрата и состоящее из $4(m + 1)$

²При этом положение объемлющего квадрата \mathcal{S} и координаты вершин графа G остаются неизменными.

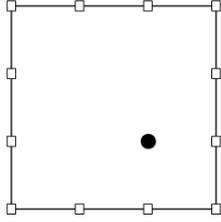


Рис. 5. Пример 2-регулярного разбиения границы квадрата.

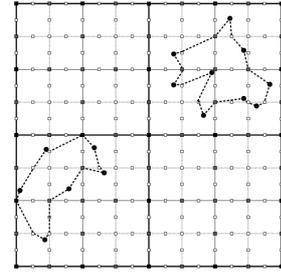


Рис. 6. Пример циклового $(m, r, 2)$ -покрытия.

точек (рис. 5). Договоримся называть такое разбиение m -регулярным, а его элементы — порталами.

О п р е д е л е н и е 7. Объединение m -регулярных разбиений границ всех некорневых узлов 4-дерева $T(a, b)$ назовем m -регулярным множеством порталов (этого дерева) и договоримся обозначать $P(a, b, m)$.

О п р е д е л е н и е 8. Пусть C — цикл в графе G на плоскости, $V(C)$ — множество его вершин. Замкнутую ломаную $l(C)$, удовлетворяющую условиям:

- (i) множество вершин $l(C)$ является подмножеством $V(C) \cup P(a, b, m)$;
- (ii) вершины $V(C)$ обходятся ломаной $l(C)$ в порядке, задаваемом маршрутом C ;
- (iii) $l(C)$ пересекает каждую сторону произвольного квадрата, узла дерева $T(a, b)$, не более r раз, причем исключительно в точках множества $P(a, b, m)$, договоримся называть (m, r) -аппроксимацией цикла C .

Нам потребуется основной результат работы [5], одна из эквивалентных формулировок которого приведена ниже.

Теорема 2 (Structure Theorem). Пусть постановка округленной задачи TSP на плоскости задается полным евклидовым графом G , длина стороны объемлющего квадрата \mathcal{S} которого равна L , и заданы константы $s > 0$ и $\eta \in (0, 1)$. Пусть дискретные случайные величины a, b распределены равномерно и независимо на множестве \mathbb{N}_L , а значения параметров m и r определяются соотношениями $m = \lceil 2s \log L \rceil$, $r = s + 4$ и $s = \lceil 36c/\eta \rceil$.

Тогда для произвольного простого цикла C (в графе G) веса $W(C)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, существует (m, r) -аппроксимация $l(C)$, вес которой не превосходит $(1 + 1/c)W(C)$.

Сопоставим произвольному цикловому покрытию графа G покрытие, состоящее из (m, r) -аппроксимаций составляющих его циклов.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ — произвольное цикловое покрытие размера k графа G , $l(C_i)$ — (m, r) -аппроксимация цикла C_i . Множество $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \{l(C_1), \dots, l(C_k)\}$ назовем цикловым (m, r, k) -покрытием графа G .

Очевидно, произвольное цикловое $(m, r, 1)$ -покрытие состоит из единственного маршрута коммивояжера. Нас же будут интересовать цикловые $(m, r, 2)$ -покрытия, пример одного из которых приведен на рис. 6.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $c > 0$ — произвольная постоянная, L — размер объемлющего квадрата \mathcal{S} для округленной постановки задачи Euclidean Min-2-SCCP. Дискретные случайные величины a, b распределены равномерно и независимо на множестве \mathbb{N}_L . Тогда при $m = O(c \log L)$ и $r = O(c)$ с вероятностью, не меньшей $1/2$, существует цикловое $(m, r, 2)$ -покрытие стоимости, не превышающей $(1 + 1/c)OPT$.

Доказательство. Пусть $C^* = \{C_1^*, C_2^*\}$ — оптимальное решение рассматриваемой округленной постановки задачи Euclidean Min-2-SCCP, т.е. $W(C_1^*) + W(C_2^*) = OPT$. По теореме 2 для $\eta = 1/4$ для произвольного цикла C_i^* и параметров $m = \lceil 2s \log L \rceil$, $r = s + 4$ и $s = \lceil 144c \rceil$, с вероятностью, не меньшей $1 - \eta = 3/4$, найдется (m, r) -аппроксимация $l(C_i^*)$, вес которой удовлетворяет оценке

$$W(l(C_i^*)) \leq (1 + 1/c)W(C_i^*). \quad (4)$$

Тогда в силу равномерности распределения случайных величин a и b вероятность события, состоящего в существовании (m, r) -аппроксимаций $l(C_1^*)$ и $l(C_2^*)$, веса которых одновременно удовлетворяют соотношению (4), ограничена снизу $1/2$. Таким образом, показано, что с вероятностью, не меньшей $1/2$, существует такое цикловое $(m, 2r, 2)$ -покрытие $\{l(C_1^*), l(C_2^*)\}$, что

$$W(l(C_1^*)) + W(l(C_2^*)) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)(W(C_1^*) + W(C_2^*)) = \left(1 + \frac{1}{c}\right) OPT.$$

Теорема доказана.

Приведенное доказательство использует теорему 2 в виде “черного ящика”. Возможно, прямое рассуждение, опирающееся на идеи доказательства этой теоремы, позволит получить более точные оценки достаточных значений параметров m и r и, как следствие, трудоемкости описанной ниже приближенной схемы.

5.6. Динамическое программирование

Опишем процедуру поиска циклового $(m, r, 2)$ -покрытия $\{l_1, l_2\}$ наименьшего веса в задаче Euclidean Min-2-SCCP при значениях параметров $m = O(c \log n)$ и $r = O(c)$ методом динамического программирования. Время работы алгоритма составит $O(n(\log n)^{O(c)})$.

О п р е д е л е н и е 10. Часть циклового $(m, r, 2)$ -покрытия, целиком находящаяся внутри произвольного квадрата S , узла дерева $T(a, b)$ и посещающая все расположенные в нем вершины исходного графа, назовем $(m, r, 2, S)$ -фрагментом (данного покрытия), см. рис. 7.

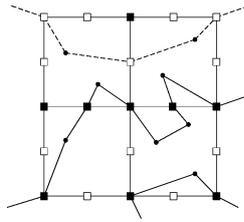


Рис. 7. $(m, r, 2, S)$ -фрагмент.

Чтобы определить в явном виде рекуррентное соотношение Беллмана, введем понятие внутренней подзадачи (клетки Беллмана).

П о д з а д а ч а (S, R_1, R_2, κ) состоит в поиске $(m, r, 2, S)$ -фрагмента минимальной стоимости.

Input. Квадрат S — узел 4-дерева $T(a, b)$. Кортеж $R_i: \mathbb{N}_{q_i} \rightarrow (P(a, b, m) \cap \partial S)^2$ определяет последовательность упорядоченных пар (s_j^i, t_j^i) порталов — точек пересечения (m, r) -аппроксимации l_i и границы ∂S квадрата S . Число κ определяет количество элементов строящегося циклового $(m, r, 2)$ -покрытия, пересекающих внутренность квадрата S . Если $q_1 q_2 > 0$, то $\kappa = 2$; в противном случае κ может принимать произвольное значение из множества $\{1, 2\}$.

Output. $(m, r, 2, S)$ -фрагмент минимального веса определяется конкретными комбинациями значений параметра κ и кортежей R_1 и R_2 :

1) если $q_1 q_2 > 0$, то ответ — $(m, r, 2, S)$ -фрагмент минимального веса, состоящий из отрезков $l_i(s_j^i, t_j^i)$ (m, r) -аппроксимаций l_1 и l_2 ;

2) случай $q_1 \neq 0, q_2 = 0$ (или $q_1 = 0, q_2 \neq 0$) и $\kappa = 1$ аналогичен предыдущему, за исключением того, что все результирующие отрезки принадлежат одной из строящихся (m, r) -аппроксимаций: l_1 или l_2 соответственно;

3) если $q_1 \neq 0, q_2 = 0$ (или $q_1 = 0, q_2 \neq 0$) и $\kappa = 2$, то либо l_2 , либо l_1 предполагается целиком лежащим в квадрате S ; соответственно ответом является минимальное по весу объединение набора ломаных из п. 2) и внутренней (для квадрата S) (m, r) -аппроксимации;

4) если $q_1 = q_2 = 0$ и $\kappa = 2$, то оба цикла l_1 и l_2 предполагаются лежащими в границах квадрата S ; в данном случае ответом является цикловое $(m, r, 2)$ -покрытие $\{l_1, l_2\}$ минимального веса, целиком лежащее в квадрате S ;

5) наконец, при условии $q_1 = q_2 = 0$ и $\kappa = 1$ необходимо отыскать одну (m, r) -аппроксимацию наименьшего веса, лежащую в квадрате S ; этот случай соответствует схеме динамического программирования, предложенной в работе [5].

Через $W(S, R_1, R_2, \kappa)$ договоримся обозначать вес оптимального решения сформулированной выше задачи. Для всех узлов дерева $T(a, b)$, за исключением листьев, в процедуре динамического программирования достаточно хранить лишь вычисленные оптимальные значения внутренних подзадач, поскольку окончательные оптимальные маршруты могут быть восстановлены впоследствии “обратной прогонкой”.

Р е к у р р е н т н о е с о о т н о ш е н и е Беллмана. Аналогично подходу, предложенному в [5], в начале процедуры динамического программирования рассматриваются листья 4-дерева $T(a, b)$. Пусть S — произвольный лист дерева $T(a, b)$. По построению S содержит не более одной вершины исходного графа, и задача (S, R_1, R_2, κ) может быть решена прямым перебором за $O(r)$ операций³.

Пусть теперь S не является листом дерева $T(a, b)$. Обозначим через S^I, \dots, S^{IV} его дочерние квадраты, для которых предполагаем решенными внутренние подзадачи при произвольных допустимых значениях параметров. Зафиксировав значения кортежей R_1 и R_2 и параметра κ , построим решение задачи (S, R_1, R_2, κ) рекуррентно. Ограничимся подробным рассмотрением случая 1). Остальные варианты могут быть рассмотрены по аналогии.

Зададимся семейством \mathfrak{P} всевозможных мультимножеств P , состоящих из не более чем $4r$ порталов (учитывая кратности), расположенных на внутренних относительно квадрата S сторонах дочерних квадратов S^I, \dots, S^{IV} (рис. 8). По выбору параметров m и r на каждой такой стороне расположено $m + 2$ портала, причем сторона может быть пересечена в каждом из них суммарно не более r раз. Следовательно, $|\mathfrak{P}| = O((m + 2)^{4r})$.

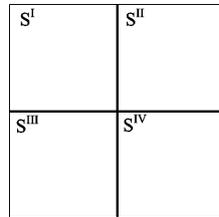


Рис. 8. Внутренние стороны квадратов.

Произвольному мультимножеству $P \in \mathfrak{P}$ сопоставим в соответствие множество Σ_P отображений $\sigma: P \rightarrow \mathbb{N}_{q_1+q_2}$, сопоставляющих каждому внутреннему порталу $p \in P$ упорядоченную пару: $(s_{\sigma(p)}^1, t_{\sigma(p)}^1)$, если $\sigma(p) \leq q_1$, и $(s_{\sigma(p)-q_1}^2, t_{\sigma(p)-q_1}^2)$ в противном случае, а значит, и ломаную $l_1(s_{\sigma(p)}^1, t_{\sigma(p)}^1)$ или $l_2(s_{\sigma(p)-q_1}^2, t_{\sigma(p)-q_1}^2)$, пересекающую внутреннюю сторону одного из дочерних квадратов в портале p . Договоримся называть портал p *назначенным* этой ломаной. Поскольку $|P| \leq 4r$ и $q_1 + q_2 \leq 4r$, справедлива оценка $|\Sigma_P| = O((2r)^{4r})$.

³Без ограничения общности можем полагать вариант 4) в этом случае невозможным.

Каждой ломаной $l_i(s_{ij}, t_{ij})$ сопоставим множество $\Lambda_{ij}(\sigma)$ всевозможных перестановок α мультимножества $\sigma^{-1}(j + (i - 1)q_1) \subset P$, прообраза отображения σ . Очевидно, $|\Lambda_{ij}(\sigma)| = O((4r)!)$.

Каждая тройка $\tau = (P, \sigma, \alpha)$ естественным образом порождает упорядоченную четверку подзадач $((S^I, R_1^I(\tau), R_2^I(\tau), \kappa^I(\tau)), \dots, (S^{IV}, R_1^{IV}(\tau), R_2^{IV}(\tau), \kappa^{IV}(\tau)))$ так, что оптимум задачи (S, R_1, R_2, κ) удовлетворяет соотношению

$$W(S, R_1, R_2, \kappa) = \min_{\tau} \sum_{i=I}^{IV} W(S^i, R_1^i(\tau), R_2^i(\tau), \kappa^i(\tau)),$$

а ее трудоемкость может быть оценена сверху величиной $O((m + 2)^{4r}(2r)^{4r}(4r)!)$.

Задача поиска циклового $(m, r, 2)$ -покрытия минимального веса эквивалентна решению подзадачи $(S, R_1^0, R_2^0, 2)$, где R_1^0 и R_2^0 — пустые кортежи.

Для оценки общей трудоемкости процедуры динамического программирования достаточно оценить сверху число подзадач. Нетрудно видеть, что каждому квадрату S (узлу дерева $T(a, b)$) соответствует $O(m + 2)^{4r}$ способов выбора мультимножества порталов на границе ∂S . Каждому такому мультимножеству соответствует $O((4r)!)$ способов разбиения его на упорядоченные пары, и каждому такому разбиению — $O(2^{2r})$ способов распределения этих пар между маршрутами l_1 и l_2 . Учитывая, что общее число узлов дерева $T(a, b)$ составляет $O(L \log L)$, получаем искомую оценку трудоемкости процедуры для произвольной пары (a, b) :

$$O(L \log L \times (m + 2)^{8r} ((4r)!)^2 (2r)^{4r} \times 2^{2r}). \quad (5)$$

Д е р а н д о м и з а ц и я. Описанная в предыдущем разделе схема динамического программирования для каждой пары (a, b) находит приближенное решение округленной задачи Euclidean Min-2-SCCP, ассоциированное с деревом $T(a, b)$. Обозначим через $APP(a, b)$ вес этого решения. В условиях теоремы 3 имеем $P(APP(a, b) \leq (1 + 1/c)OPT) \geq 1/2$, где вероятностная мера порождена распределением случайных величин a и b . Следовательно, с необходимостью найдется пара $(a^*, b^*) \in \mathbb{N}_L$, для которой выполнено неравенство $OPT \leq APP(a^*, b^*) \leq (1 + 1/c)OPT$. Данная пара, очевидно, может быть найдена полным перебором за $O(L^2)$ итераций. Таким образом, с учетом соотношений $m = O(c \log n)$, $r = O(c)$ и $L = O(n)$ доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Округленная задача Euclidean Min-2-SCCP на плоскости обладает полиномиальной приближенной схемой трудоемкости*

$$O(n^3 (\log n)^{O(c)}). \quad (6)$$

Учитывая утверждение леммы, получаем окончательный результат.

Следствие. *Задача Euclidean Min-2-SCCP на плоскости обладает полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью (6).*

Заметим, что по порядку величины трудоемкость предлагаемой PTAS для задачи Euclidean Min-2-SCCP совпадает с трудоемкостью PTAS, построенной в [5] для задачи TSP, и отличается от нее, как следует из соотношения (5), постоянным множителем $2^{O(c)}$.

Заключение

В настоящей работе обоснован статус вычислительной сложности задачи Min- k -SCCP и двух ее подклассов Metric Min- k -SCCP и Euclidean Min- k -SCCP. Для метрической задачи Min- k -SCCP предложен эффективный 2-приближенный алгоритм. Обоснована полиномиальная приближенная схема для задачи Euclidean Min-2-SCCP на плоскости.

Представляется интересным распространить полученные результаты на случай задачи Euclidean Min- k -SCCP, заданной в пространстве произвольной фиксированной размерности d .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. Papadimitriou C. Euclidean TSP is NP -complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4. P. 237–244.
3. Sahni S., Gonzales T. P -complete approximation problems // J. ACM. 1976. Vol. 23, no. 3. P. 555–565.
4. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // In symposium on new directions and recent results in algorithms and complexity. New York: Academic Press, 1976. P. 441.
5. Arora S. Polynomial-time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
6. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Вып. 12. Новосибирск, 1974. С. 35–45.
7. De Kort J.B.J.M. Lower bounds for symmetric K -peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. Vol. 22, no. 1. P. 113–122.
8. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications / ed. C. R. Reeves. Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173–178. (NATO Advanced Study Inst. Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci.; vol. 19).
9. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m -PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 12–24.
10. Gimadi E. Asymptotically optimal algorithm for finding one and two edge-disjoint traveling salesman routes of maximal weight in Euclidean space // Proc. Steklov Institute Math. 2008. Vol. 263, iss. 2 Suppl. P. S57–S67.
11. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 / А.Е. Baburin, F. Della Croce, Е.К. Gimadi, Y.V. Glazkov, V.Th. Paschos // Discrete Appl. Mathematics. 2009. Vol. 157, no. 9. P. 1988–1992.
12. Dantzig G., Ramser H. The truck dispatching problem // Management Science. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91.
13. Toth P., Vigo D. The vehicle routing problem. Philadelphia, PA, 2001. 361 p.
14. The vehicle routing problem: latest advances and new challenges / eds. B. Golden, S. Raghavan, E. Wassil. 2008. Vol. 43. 591 p. (Operations Research. Computer Science Interfaces Series; vol. 43).
15. Эффективные алгоритмы с оценками точности для некоторых задач поиска нескольких клик в полном неориентированном взвешенном графе / Э.Х. Гимади, А.В. Кельманов, А.В. Пяткин, М.Ю. Хачай // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 99–112.
16. Introduction to Algorithms / Т. Cormen, С. Leiserson, R. Rivest, С. Stein. Cambridge; London: MIT Press, 1990. 1292 p.
17. Finkel R., Bentley J. Quad trees. A data structure for retrieval on composite keys // Acta Informatica. 1974. Vol. 4, no. 1. P. 1–9.

Хачай Михаил Юрьевич

Поступила 13.08.14

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Незнахина Екатерина Дмитриевна

аспирант, математик

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: eneznakhina@yandex.ru

УДК 519.6

**НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЙ
АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧ О ДОСТИЖИМОСТИ¹****А. Г. Ченцов, Е. Г. Пыткеев**

Рассматривается задача о достижимости состояний, являющихся элементами топологического пространства, при ограничениях асимптотического характера на выбор аргумента заданного целевого отображения. Исследуются конструкции, имеющие смысл расширений исходного пространства и реализуемые с привлечением естественных для задач прикладной математики методов, в которых, однако, задействованы элементы расширений, применяемых в общей топологии. Исследование ориентировано на применение в задаче о построении и изучение свойств областей достижимости управляемых систем.

В работах Н. Н. Красовского и его учеников широко использовались конструкции, предусматривающие приближенное соблюдение ограничений в задачах управления, а также различные обобщенные режимы. В частности, этот подход нашел свое отражение при доказательстве фундаментальной теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина, которая, в свою очередь, позволила установить существование седловой точки в нелинейной дифференциальной игре. При исследовании задач импульсного управления Н. Н. Красовский использовал аппарат теории обобщенных функций, что послужило основой многих работ в данном направлении. Решению задач управления, так или иначе связанных с построением областей достижимости, посвящены многие работы А. Б. Куржанского. Задачи управления с неполной информацией, вопросы двойственности задач управления и наблюдения, задачи группового управления — вот далеко не полный список направлений, в которых А. Б. Куржанскому удалось получить глубокие научные результаты. Для этих работ характерно использование широкого диапазона средств и методов прикладной математики, разнообразных конструкций, сочетание теоретических исследований и процедур, связанных с перспективами компьютерного моделирования.

Направление, развиваемое в настоящей работе и (в своей основе) касающееся проблемы соблюдения ограничений (включая ограничения “асимптотические”), связано с другими вопросами. Тем не менее идея построения обобщенных элементов различной природы (в частности, обобщенных управлений) может быть, как представляется, полезной для целей асимптотического анализа задач управления, не обладающих устойчивостью, задач о сравнении различных тенденций при выборе управлений в виде зависимостей от комплекса факторов, присущих исходной прикладной (по смыслу) задаче. Применение таких средств, как компактификация Стоуна — Чеха, расширение Волмэна направлено, конечно, на изучение вопросов качественного характера. Сближение подходов к построению расширений, применяемых в теории управления и в общей топологии, имеет, как представляется авторам, хорошие перспективы как с точки зрения “чистой”, так и прикладной математики. Представляется, что данную работу можно рассматривать как некоторый шаг в этом направлении.

Ключевые слова: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр.

A. G. Chentsov, E. G. Pytkeev. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems.

We consider the problem on the reachability of states that are elements of a topological space under constraints of asymptotic nature on the choice of an argument of a given target mapping. We study constructions that have the sense of extensions of the original space and are implemented with the use of methods that are natural for applied mathematics but employ elements of extensions used in general topology. The study is oriented towards the application in the problem on the construction and investigation of properties of reachability sets for control systems.

Constructions involving an approximate observation of constraints in control problems, as well as various generalized regimes, were widely used in N.N. Krasovskii and his students' papers. In particular, this approach was applied in the proof of N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin's fundamental theorem of the alternative, which made it possible to establish the existence of a saddle point in a nonlinear differential game. In the investigation of impulse control problems, Krasovskii used techniques from the theory of generalized functions, which formed the basis for many studies in this direction. A number of A.B. Kurzhanskii's papers are devoted to the solution of control problems related in one way or another to the construction of reachability sets. Control problems with incomplete information, duality issues for control and observation problems, and team control problems constitute a far from exhaustive list of research areas where Kurzhanskii obtained profound results. These studies are characterized by the use of a wide range of tools and methods from applied mathematics and various

¹Работа выполнена в рамках программ Президиума РАН (проекты 12-П-1-1012, 12-П-1-1019) и при финансовой поддержке РФФИ (12-01-00537а, 13-01-00304а, 13-01-90414 укр_ф_а).

constructions as well as by the combination of theoretical investigations and procedures related to the possibility of computer modeling.

The research direction developed in the present paper mainly concerns the problem of constraint observation (including “asymptotic” constraints) and involves other issues. Nevertheless, the idea of constructing generalized elements of various nature (in particular, generalized controls) seems to be useful for the purpose of asymptotic analysis of control problems that do not possess stability as well as problems on the comparison of different tendencies in the choice of control in the form of dependences on a complex of factors inherent in the original applied problem. The use of such tools as the Stone–Čech compactification and Wallman’s extension is, of course, oriented toward the study of qualitative issues. In the authors’ opinion, the combined application of the approaches to the construction of extensions used in control theory and in general topology holds promise from the point of view of both pure and applied mathematics. Apparently, the present paper can be considered as a certain step in this direction.

Keywords: attraction set, topological space, ultrafilter.

1. Введение

Конструкции расширений играют важную роль и в задачах прикладной математики (теория управления, математическое программирование, вариационное исчисление), и в “чистой” математике, прежде всего в топологии. Имеются, конечно, и существенные особенности применяемых расширений. Они, в частности, касаются как самих целей, так и объектов упомянутого применения. Опуская сейчас подробное сравнение, отметим только характерные монографии [1;2], где используются расширения первого и второго типов. Заметим, что конструкции расширений в духе [1, гл. III, IV] были ориентированы на использование в задачах управления как с целью решения проблемы существования оптимальных решений, так и с целью обеспечения постановок, допускающих соблюдение ограничений (соответствующей задачи) с высокой, но все же конечной степенью точности. Итак, в [1, гл. III] допускались режимы управления “на грани фола”. Данный подход, применяемый в [1] к оптимизационным задачам (см. также [3;4] — задачи математического программирования, [5] — задачи вариационного исчисления), допускает распространение на задачи о построении и исследовании свойств областей достижимости (ОД) в теории управления, а также на многочисленные аналоги этой важной задачи (см. [6–8] и др.). Более того, асимптотические эффекты, связанные с оптимизацией (см. [1, гл. III]), в своей существенной части обусловлены причинами, проявляющимися в соответствующих версиях задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Эти ограничения могут возникать при ослаблении стандартных ограничений (например, ослабление фазовых ограничений в задачах управления и неравенств в математическом программировании), но могут задаваться и изначально (см., например, [9], где рассматривался вариант задачи управления в классе импульсов исчезающе малой продолжительности). Применение ОАХ делает естественной замену “обычных” множеств достижимости асимптотическими аналогами — множествами притяжения (МП). Непосредственное построение таких МП связано, однако, с понятными трудностями (надо исследовать “много” задач с ограничениями) и практически нереализуемо.

Основной способ исследования МП (также, как и решений экстремальных задач, соблюдающих ограничения “на грани фола”) связан как раз с построением расширений исходной задачи, что, в частности, включает в себя выбор надлежащего пространства обобщенных элементов (ОЭ). Относительно данного пространства требуется выполнение ряда свойств, среди которых особо отметим предполагаемую обычно компактность (более общие конструкции см. в [7;10] и ряде других работ; в настоящей статье они не рассматриваются), что сближает объективно упомянутый подход с расширениями топологических пространств (ТП). В этой связи отметим применение в [6] компактификации Стоуна — Чеха для целей представления МП в абстрактной задаче о достижимости с ОАХ. Здесь в качестве ОЭ использовались ультрафильтры (у/ф) пространства обычных решений. К сожалению, наиболее важные для представления асимптотических эффектов свободные [11, 3.6] у/ф не допускают конструктивного описания, что затрудняет их практическое применение. Заметим, что упомянутое затруднение касается у/ф семейства всех подмножеств (п/м) пространства обычных решений. В этой свя-

зи в [7; 12–14] и ряде других работ были предложены и развиты конструкции, использующие “неполные” у/ф, а, точнее, у/ф того или иного семейства п/м исходного пространства.

Настоящая работа продолжает данные исследования. В ней в качестве семейства множеств, на котором определяются соответствующие у/ф, используются топологии и семейства замкнутых множеств в ТП (замкнутые топологии [15, с. 98]).

2. Содержательная постановка задачи о достижимости (асимптотическая версия)

Настоящий раздел является (по смыслу) продолжением введения. Рассматриваем непустое множество E , элементы которого интерпретируем как “управления” (в типичных случаях E — множество в функциональном пространстве), ТП (\mathbf{H}, τ) и отображение $f: E \rightarrow \mathbf{H}$. Множество \mathbf{H} играет роль пространства состояний, а f — оператор “системы”, преобразующей “управления” в “состояния”. Например, при $e \in E$ $f(e)$ может определяться как решение дифференциального уравнения, зависящего от e . В этом случае e — управляющая программа, определенная на заданном промежутке времени $[t_0, \vartheta_0]$, $t_0 < \vartheta_0$. Возможен случай, когда нас интересует только значение этой траектории в момент ϑ_0 . В такой постановке, как правило, \mathbf{H} есть конечномерное арифметическое пространство, а τ — топология покоординатной сходимости. Ограничиваясь сейчас этим более простым случаем, заметим, что выбор $e \in E$ бывает стесненным ограничениями, и обычно речь идет о выборе $e \in E_0$, где $E_0 \subset E$. В результате имеем ОД в виде $\{f(e): e \in E_0\}$, которая, однако, нередко “сильно” меняется при малых вариациях E_0 , т. е. задача о построении ОД оказывается неустойчивой. Если речь идет об ослаблении ограничений, то скачкообразное изменение ОД оказывается, однако, полезным в том смысле, что исчезающе малые нарушения ограничений доставляют существенное расширение реальных возможностей управляющей стороны. Сама степень “малости” обычно не задается, что делает естественным асимптотический вариант постановки, который может быть полезным и в других случаях, в том числе таких, когда точное соблюдение ограничений в виде E_0 вообще невозможно или бессмысленно. Уместно “заменить” E_0 семейством \mathcal{E} п/м E , которое для варианта, соответствующего упомянутой неустойчивой задаче, отвечает системе ослабленных ограничений. Сами решения в этом случае становятся (по смыслу) асимптотическими и определяются либо в виде направленностей (в частности, последовательностей) в E , либо в виде фильтров E . В частности, можно использовать у/ф. Соответствующее условие \mathcal{E} -допустимости в последнем случае имеет вид $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$, где \mathcal{U} — у/ф множества E . Асимптотическим решениям соответствуют асимптотики реализующихся (в \mathbf{H}) состояний. В типичных для задач управления случаях удастся свести рассмотрение к исследованию пределов в (\mathbf{H}, τ) , понимаемых либо в смысле сходимости по Морю — Смиту, либо в смысле сходимости фильтров. Известны [10, с. 38] весьма общие условия, позволяющие ограничиться секвенциальным вариантом, соответствующим идейно конструкции приближенных решений Дж. Варги [1, гл. III].

Используя далее подход, предусматривающий применение в качестве ОЭ у/ф, напомним, что в связи с отмеченной во введении неконструктивностью имеет смысл обратиться к схеме, оперирующей у/ф широко понимаемых (см. [8; 12–14] и др.) измеримых пространств (ИП). Здесь наиболее продуктивным представляется использование компактов Стоуна в случае ИП с алгебрами множеств, а также гомеоморфов этих компактов для ИП с полуалгебрами (множеств). Однако упомянутая схема допускает и другие возможности: при построении широко понимаемых ИП можно использовать топологии и семейства замкнутых множеств (открытые и замкнутые топологии в терминологии П. С. Александрова [15]).

Как уже отмечалось, объектом расширения в топологии является ТП, в то время как в задачах прикладной математики основное пространство обычно какой-либо топологией не оснащается. Однако в ряде случаев такая топология всё же может быть введена. Рассмотрим на содержательном уровне пример такого рода, связанный с исследованием ОД линейной управляемой системы в заданный момент времени. Сделаем при этом некоторые переобозначения.

Полагая выполненным неособое линейное преобразование [16, с. 160], считаем, что динамика описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = u(t)b(t) + \beta(t) \quad (2.1)$$

в n -мерном фазовом пространстве на промежутке $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ (здесь и ниже \triangleq — равенство по определению), где $t_0 < \vartheta_0$ — два заданных момента времени. Ограниченные функции $b = b(\cdot)$ и $\beta = \beta(\cdot)$, действующие из I_0 в n -мерное пространство, фиксируем, а $u = u(\cdot)$ рассматриваем в качестве скалярного управления; $x(t_0) = x_0$ — заданный n -мерный вектор. Пусть $u \in U$, где U есть множество всех кусочно-постоянных (к.-п.) функций на I_0 со свойством

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} |u(t)| dt \leq c, \quad (2.2)$$

число $c > 0$ фиксировано. Условие (2.2) имеет смысл ограничения на энергетику процесса.

Полагаем, что все компоненты n -вектор-функций b и β являются равномерными пределами к.-п. вещественнозначных (в/з) функций на I_0 . Траекторию (2.1), порожденную из состояния x_0 управлением $u \in U$, обозначаем через $\varphi_u = (\varphi_u(t), t_0 \leq t \leq \vartheta_0)$. На выбор $u \in U$ могут накладываться также и другие (в том числе “асимптотические”) ограничения, которые сейчас не рассматриваем. Введем на U метрику ρ , полагая при $u_1 \in U$ и $u_2 \in U$, что

$$\rho(u_1, u_2) \triangleq \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta_0} |u_1(t) - u_2(t)|$$

(напомним, что функции $u \in U$ ограничены). Легко видеть, что зависимость $\varphi_u(\vartheta_0)$ от $u \in U$ непрерывна. Итак, в виде $u \mapsto \varphi_u(\vartheta_0)$ имеем непрерывное отображение Φ из метризуемого (посредством ρ) ТП с “единицей” U в n -мерное пространство. Обозначаем через \mathbf{t} ρ -топологию U , через \mathcal{F} — семейство всех замкнутых в (U, \mathbf{t}) п/м U . Ясно, что ТП (U, \mathbf{t}) некомпактно, что мотивирует построение соответствующих расширений данного ТП, в том числе и с точки зрения конструирования ОД или ее асимптотических аналогов. Заметим, что в силу возможной разрывности вектор-функции $b = b(\cdot)$ в системе (2.1) возможны эффекты типа произведения разрывной функции на обобщенную. Для их представления в [10] использовались конечно-аддитивные меры.

Далее обсудим другой (топологический) вариант, связываемый с расширением Волмэна [11]. Будем опираться при этом на схему [10, предложение 5.2.1]. Согласно этой общей схеме требуется “подобрать” компактное ТП (K, θ) , оператор погружения $m: U \rightarrow K$ и $(\theta, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ -непрерывный оператор g (здесь $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ — топология покоординатной сходимости n -мерного пространства), для которых $\varphi_u(\vartheta_0) = (g \circ m)(u)$ при $u \in U$ (вариант этой схемы был реализован в [10] в классе конечно-аддитивных мер, включая “векторный” случай). Здесь отметим следующую конкретизацию: (K, θ) — пространство у/ф семейства \mathcal{F} в оснащении волмэновской топологией, g — оператор обобщенного предела, сопоставляющий у/ф семейства \mathcal{F} предел его образа при действии Φ (точнее: предел семейства образов множеств из у/ф), m — оператор, сопоставляющий точке из U соответствующий тривиальный [11] у/ф. Этот вариант в существенно более общем случае рассматривается в настоящей статье. Таким образом, расширение Волмэна, играющее важную роль в топологии, может в принципе использоваться для целей расширения пространства программных управлений, метризуемого посредством ρ . Разумеется, для практических целей обращение к упомянутому расширению едва ли целесообразно; его имеет смысл использовать для исследования вопросов качественного характера. К таковым можно отнести вопросы реализации вышеупомянутой общей схемы в привязке к задаче управления системой (2.1) при произвольных ОАХ. Последние определяем в виде непустого семейства \mathcal{U} п/м U , которому можно сопоставить два МП, понимаемых в смысле [8]: основное МП AS в n -мерном

пространстве и вспомогательное МП as в (K, θ) . Здесь элементы AS отвечают пределам направленностей $(\Phi(u_\alpha))$, элементы as — пределам направленностей $(m(u_\alpha))$, где $u_\alpha \in U$. При упомянутом свойстве композиции $\Phi = g \circ m$ непременно $AS = g^1(as)$, где $g^1(\cdot)$ — операция взятия образа при действии g . Полезно отметить, что as и AS — компактные множества. Изучение AS сводится в значительной степени к исследованию as . В упомянутой ранее конкретной реализации, связанной с (2.1), (2.2), удастся получить полезное представление множества as (подобно тому как при расширении в классе мер естественным образом реализуется пространство обобщенных управлений).

В связи с появлением ОАХ отметим различные варианты, связанные с ослаблением краевых и промежуточных условий, фазовых ограничений. В этих случаях \mathfrak{U} “составляется” из множеств программных управлений, каждое из которых допустимо по отношению к тому или иному ослабленному варианту упомянутых условий. Вариант, отвечающий изначальному заданию ОАХ, указан в [9]. Так или иначе, в результате возникает задача асимптотического анализа, связанная с управлением системой (2.1) или системой более общего вида.

В связи с проблемой “асимптотической” достижимости в ТП отметим, в частности, что для системы (2.1) можно было бы рассматривать вопрос о построении пучка траекторий, отвечающих допустимым, в смысле невозмущенных ограничений, управлениям, а также асимптотический аналог данного пучка в виде МП в смысле топологии поточечной сходимости, которая в типичных случаях неметризуема.

3. Обозначения и определения (общая часть)

В дальнейшем используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки; def заменяет фразу “по определению”, $\exists!$ заменяет выражение “существует и единственно”, \emptyset — пустое множество). Семейством называем множество, все элементы которого множества. Принимаем аксиому выбора. Если x — объект, то $\{x\}$ есть def синглетон, содержащий x (в качестве x может, конечно, использоваться множество и, в частности, семейство).

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X ; $\text{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, то B^A есть def множество всех отображений из A в B . При $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ множества C при действии f (см. [17, гл. II]) или, короче, f -образ C . Для всяких множеств \mathbb{A} и \mathbb{B} , $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$ в виде $f^1[\mathfrak{A}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathfrak{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$ имеем семейство всех f -образов множеств из \mathfrak{A} , рассматриваемое как f -образ семейства \mathfrak{A} . Если S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$, то $\mathbf{C}_S[\mathcal{S}] \triangleq \{S \setminus \mathbf{S} : \mathbf{S} \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$ есть семейство, двойственное к \mathcal{S} . Если \mathcal{E} — непустое семейство (множеств), то полагаем, что

$$\{\bigcap\}_f(\mathcal{E}) \triangleq \left\{ \bigcap_{E \in \mathcal{K}} E : \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{E}) \right\}, \quad (3.1)$$

получая при этом направленное семейство $(\forall \Sigma_1 \in \{\bigcap\}_f(\mathcal{E}) \forall \Sigma_2 \in \{\bigcap\}_f(\mathcal{E}) \exists \Sigma_3 \in \{\bigcap\}_f(\mathcal{E}) : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2)$, для которого $\mathcal{E} \subset \{\bigcap\}_f(\mathcal{E})$. Кроме того, пусть

$$\{\bigcup\}(\mathcal{E}) \triangleq \left\{ \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{H}} \Sigma : \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \right\}, \quad \{\bigcap\}(\mathcal{E}) \triangleq \left\{ \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{H}} \Sigma : \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) \right\}.$$

Ниже схема на основе (3.1) используется для получения более “удобного” представления МП.

Некоторые специальные семейства. До конца настоящего пункта фиксируем непустое множество I и полагаем, что

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \& (I \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \forall A \in \mathcal{I} \forall B \in \mathcal{I})\}, \quad (3.2)$$

получая множество всех π -систем [18, с. 14] множества I с “нулем” и “единицей”. В виде частных случаев таких π -систем имеем топологии и алгебры $\pi/\mathcal{M} I$:

$$(\text{top})[I] \triangleq \left\{ \tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \right\}, \quad (\text{alg})[I] \triangleq \{ \mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A} \}.$$

Назовем π -системы из семейства

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{ \mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I} \ \forall x \in I \setminus L \ \exists \Lambda \in \mathcal{I}: (x \in \Lambda) \ \& \ (\Lambda \cap L = \emptyset) \}$$

отделимыми. Условимся о следующем обозначении множества решеток с “нулем” и “единицей”:

$$(\text{LAT})_0[I] \triangleq \{ \mathcal{L} \in \pi[I] \mid A \cup B \in \mathcal{L} \ \forall A \in \mathcal{L} \ \forall B \in \mathcal{L} \}, \quad (3.3)$$

а также условимся элементы семейства

$$(\text{LAT})^0[I] \triangleq \{ \mathcal{L} \in (\text{LAT})_0[I] \mid \{x\} \in \mathcal{L} \ \forall x \in I \} \quad (3.4)$$

называть решетками с синглетами. Легко видеть, что

$$(\text{LAT})^0[I] \subset \tilde{\pi}^0[I]. \quad (3.5)$$

Конструкции на основе (3.3)–(3.5) оказываются, в частности, полезными [12] в связи с расширением Волмэна.

Если $\tau \in (\text{top})[I]$ (т.е. (I, τ) есть ТП) и $A \in \mathcal{P}(I)$, то $\text{cl}(A, \tau) \in \mathbf{C}_I[\tau]$ есть def замыкание A в ТП (I, τ) .

Через $\beta[I]$ (через $\beta_0[I]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))$) со свойством $\forall B_1 \in \mathcal{B} \ \forall B_2 \in \mathcal{B} \ \exists B_3 \in \mathcal{B}: B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Семейства из $\beta[I]$ являются направленными, а семейства из $\beta_0[I]$ суть БФ и только они. В свою очередь, семейства из

$$\mathfrak{F}[I] \triangleq \{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \ \& \ (\forall F \in \mathcal{F} \ \forall S \in \mathcal{P}(I) \ (F \subset S) \Rightarrow (S \in \mathcal{F})) \}$$

суть фильтры I (см. [19, гл. I]), а семейства из

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I] \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F}) \}$$

суть у/ф I . Ясно, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_0[I] \subset \beta[I]$ и

$$(I - \mathbf{f})[\mathcal{B}] \triangleq \{ F \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subset F \} \in \mathfrak{F}[I] \quad \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I]$$

(фильтр, порожденный соответствующей базой). Полагаем в дальнейшем, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[I] \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U} \ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \}$. Если $x \in I$, то $(I - \text{ult})[x] \triangleq \{ J \in \mathcal{P}(I) \mid x \in J \} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ есть тривиальный у/ф, соответствующий x .

Фильтры π -систем. Наряду с множеством I , $I \neq \emptyset$, фиксируем в пределах настоящего пункта π -систему $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \triangleq \{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I} \setminus \{\emptyset\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \ \& \ (\forall F \in \mathcal{F} \ \forall L \in \mathcal{I} \ (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F})) \}, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F}) \}. \quad (3.7)$$

Интерпретируя (I, \mathcal{I}) как своеобразное измеримое пространство (ИП), мы имеем в (3.6) множество всех фильтров, а в (3.7) — множество всех у/ф данного ИП. Заметим, что

$$(I - \mathbf{f})[\mathcal{B}] \cap \mathcal{I} = \{ J \in \mathcal{I} \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subset J \} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \quad \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I] \quad (3.8)$$

(в (3.8) определен фильтр ИП (I, \mathcal{I}) , порожденный \mathcal{B}). Вместе с тем

$$((I, \mathcal{I}) - \text{ult})[x] \triangleq (I - \text{ult})[x] \cap \mathcal{I} = \{J \in \mathcal{I} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \quad \forall x \in I.$$

Итак, определены тривиальные фильтры ИП (I, \mathcal{I}) . При этом [8]

$$\left(((I, \mathcal{I}) - \text{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \quad \forall x \in I \right) \iff (\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]). \quad (3.9)$$

Ясно, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \subset \beta_0[I]$. Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$, то полагаем $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} \mid \mathcal{J}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\}$, рассматривая у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} \mid \mathcal{J})$ как \mathcal{J} -допустимые.

Э л е м е н т ы т о п о л о г и и. В настоящем пункте фиксируем непустое множество I и полагаем, что

$$\begin{aligned} (\text{clos})[I] \triangleq \{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid \\ (\emptyset \in \mathcal{F}) \& (I \in \mathcal{F}) \& (A \cup B \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{F}) \& \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F} \quad \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F}) \right) \}, \end{aligned}$$

получая множество всех замкнутых топологий I [15]. Возвращаясь к открытым топологиям, заметим, что при $\tau \in (\text{top})[I]$ и $x \in I$ всегда $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$ и, в частности, $N_\tau^0(x) \in \beta_0[I]$, причем

$$N_\tau(x) \triangleq (I - \mathbf{f})[N_\tau^0(x)] \in \mathfrak{F}[I]$$

есть семейство (всех) окрестностей [19, гл. I] точки x в ТП (I, τ) . Кроме того,

$$(x - \text{bas})[\tau] \triangleq \{ \mathcal{B} \in \mathcal{P}(N_\tau(x)) \mid \forall A \in N_\tau(x) \exists B \in \mathcal{B}: B \subset A \} \in \mathcal{P}(\beta_0[I])$$

есть множество всех локальных баз (I, τ) в точке x . Заметим, что $\mathbf{C}_I[\tau] \in (\text{clos})[I]$ при $\tau \in (\text{top})[I]$ и, напротив, $\mathbf{C}_I[\mathcal{F}] \in (\text{top})[I]$ при $\mathcal{F} \in (\text{clos})[I]$. Следуя на идейном уровне [20, гл. 4], имеем:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} - \text{top})[I] \triangleq \{ \tau \in (\text{top})[I] \mid \forall x \in I \quad \forall y \in I \setminus \{x\} \exists H \in N_\tau(x): y \notin H \} \\ = \{ \tau \in (\text{top})[I] \mid \{x\} \in \mathbf{C}_I[\tau] \quad \forall x \in I \}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} (\text{top})_0[I] \triangleq \{ \tau \in (\text{top})[I] \mid \\ \forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \setminus \{x_1\} \exists H_1 \in N_\tau(x_1) \exists H_2 \in N_\tau(x_2): H_1 \cap H_2 = \emptyset \}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$(\mathbf{r} - \text{top})[I] \triangleq \{ \tau \in (\text{top})[I] \mid N_\tau(x) \cap \mathbf{C}_I[\tau] \in (x - \text{bas})[\tau] \quad \forall x \in I \}; \quad (3.12)$$

$$(\mathbf{top})[I] \triangleq (\mathcal{D} - \text{top})[I] \cap (\mathbf{r} - \text{top})[I] = (\text{top})_0[I] \cap (\mathbf{r} - \text{top})[I]. \quad (3.13)$$

В терминологии [20, гл. 4] имеем, что топологии из (3.10) удовлетворяют аксиоме T_1 , топологии из (3.11) — аксиоме T_2 , топологии из (3.12) превращают I в регулярное ТП; (3.13) есть множество всех топологий I , превращающих I в T_3 -пространство. Через $(\mathbf{c} - \text{top})[I]$ обозначаем множество всех $\tau \in (\text{top})[I]$, для которых (I, τ) — компактное ТП [11, гл. 3]. Топологии из $(\mathbf{c} - \text{top})_0[I] \triangleq (\mathbf{c} - \text{top})[I] \cap (\text{top})_0[I]$ реализуют (при оснащении ими множества I) компакты с “единицей” I . Легко видеть, что (см. (3.3), (3.2)) при $\tau \in (\mathcal{D} - \text{top})[I]$ имеем $\mathbf{C}_I[\tau] \in (\text{LAT})^0[I]$, откуда с учетом (3.5) следует, в частности, что

$$\mathbf{C}_I[\tau] \in \tilde{\pi}^0[I].$$

Введем в рассмотрение базы открытых и замкнутых топологий (см. [15, с. 98]):

$$\begin{aligned} (\text{op} - \text{BAS})[I] &\triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \\ &| (I = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \& (\forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 \in \mathcal{B}: (x \in B_3) \& (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\}; \\ (\text{cl} - \text{BAS})[I] &\triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (I \in \mathcal{B}) \& (\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset) \\ &\& (\forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in I \setminus (B_1 \cup B_2) \exists B_3 \in \mathcal{B}: (B_1 \cup B_2 \subset B_3) \& (x \notin B_3))\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\text{top})[I]$ при $\mathcal{B} \in (\text{op} - \text{BAS})[I]$ и $\{\cap\}(\tilde{\mathcal{B}}) \in (\text{clos})[I]$ при $\tilde{\mathcal{B}} \in (\text{cl} - \text{BAS})[I]$.

В дальнейшем, следуя [19, гл. I], полагаем, что $\forall \tau \in (\text{top})[I] \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I] \forall x \in I$

$$(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} x) \stackrel{\text{def}}{\iff} (N_\tau(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]).$$

Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — два ТП, $X \neq \emptyset$ и $Y \neq \emptyset$, то $C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{g \in Y^X \mid g^{-1}(G) \in \tau_1 \forall G \in \tau_2\}$.

4. Топологии пространства ультрафильтров

Фиксируем в настоящем разделе непустое множество E и π -систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (на выбор \mathcal{L} по мере надобности могут накладываться дополнительные условия). Заметим [12]: из (3.7) вытекает, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap U \neq \emptyset \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\}$. С учетом этого

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \emptyset \forall U \in \mathcal{U}\} \quad \forall L \in \mathcal{L}. \quad (4.1)$$

Тогда π -система $(\text{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ является, в частности, базой (открытой) топологии: $(\text{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\text{op} - \text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] &\triangleq \{\cup\}((\text{UF})[E; \mathcal{L}]) \\ &= \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in G \exists U \in \mathcal{U}: \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset G\} \in (\text{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.1), (4.2) легко следует, что $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \quad \forall L \in \mathcal{L}$. Поэтому [11, 6.2]

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \quad (4.3)$$

есть нульмерное T_2 -пространство. Заметим, что (см. [13])

$$(\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]) \implies (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \in (\mathbf{c} - \text{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]) \quad (4.4)$$

(в случае, когда (E, \mathcal{L}) есть ИП с алгеброй множеств, ТП (4.3) является согласно (4.4) нульмерным компактом).

До конца настоящего раздела полагаем, что $\mathcal{L} \in (\text{LAT})_0[E]$ (\mathcal{L} — решетка с “нулем” и “единицей”). Тогда [12] $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \forall A \in \mathcal{L} \forall B \in \mathcal{L}$

$$(A \cup B \in \mathcal{U}) \implies ((A \in \mathcal{U}) \vee (B \in \mathcal{U})). \quad (4.5)$$

В качестве очевидного следствия имеем $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \forall A \in \mathcal{L} \forall B \in \mathcal{L}$

$$(A \cup B = E) \implies ((A \in \mathcal{U}) \vee (B \in \mathcal{U})).$$

С другой стороны, из (4.5) имеем [12, (6.5)] свойство: $\Phi_{\mathcal{L}}(A \cup B) = \Phi_{\mathcal{L}}(A) \cup \Phi_{\mathcal{L}}(B) \quad \forall A \in \mathcal{L} \forall B \in \mathcal{L}$. В свою очередь последнее приводит к весьма общему положению [12, (6.6)]:

$(\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}] \in (\text{LAT})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$, откуда вытекает [12, (6.7)], что $(\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}] \in (\text{cl} - \text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и, как следствие, $\{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}]) \in (\text{clos})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (см. [12, (6.8)]). При этом

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E] \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}])] \in (\mathbf{c} - \text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \cap (\mathcal{D} - \text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \quad (4.6)$$

Итак (см. [12, (6.18)]), согласно (4.6) в виде $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E])$ имеем компактное T_1 -пространство.

Предложение 4.1. *Топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ сравнимы и при этом $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$.*

Доказательство. Пусть $F_0 \in \{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}])$. Тогда для некоторого $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}])$ имеем свойство: F_0 есть пересечение всех множеств из \mathfrak{U} . С учетом замкнутости в ТП (4.3) всех множеств (4.1) получаем, что $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]])$, а тогда (по свойствам замкнутых множеств) $F_0 \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]$. Тем самым установлено, что $\{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]$, откуда с учетом (4.6) следует требуемое утверждение.

Предложение доказано.

Учитывая (3.7), (3.13) и (4.6), заметим, кстати, что

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]] \in (\text{LAT})^0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})], \quad (4.7)$$

а потому согласно (3.5) имеем, в частности,

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]] \in \tilde{\pi}^0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \quad (4.8)$$

Свойства (4.7), (4.8) показывают, что семейство замкнутых в топологии (4.6) п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ само может рассматриваться в качестве широко понимаемого ИП, для которого (см. (3.9)) все тривиальные фильтры будут максимальными. При этом решетка \mathcal{L} играет роль некоторой первичной структуры, которая обеспечивает (4.7), (4.8) для соответствующей замкнутой топологии. Мы не будем, однако, рассматривать далее данную возможность.

Полагаем до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} \in (\text{LAT})^0[E]$. Тогда, в частности, (см. (3.5)) $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, а потому согласно (3.9) $((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \quad \forall x \in E$. Поэтому

$$((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot] = (((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E. \quad (4.9)$$

С учетом (4.9) и [12, (7.2), (7.4), предложение 7.1] получаем, в частности, что

$$\text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]) = \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(L) \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Как следствие, имеем $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{E}) &= \bigcap_{L \in \mathcal{E}} \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \\ &= \bigcap_{L \in \mathcal{E}} \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]) = \bigcap_{L \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(L). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Свойство (4.10) характеризует на самом деле совпадение МП в смысле [6–8]. Этот вопрос более подробно рассматривается в следующем разделе.

5. Множества притяжения (общие сведения и некоторые свойства, связанные с пространствами ультрафильтров)

В настоящем разделе фиксируем непустое множество E , рассматриваемое в качестве пространства обычных решений. Если T — непустое множество, $h \in T^E$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$, то $h^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[T]$ (см. [19, гл. I]). В качестве \mathcal{B} можно использовать фильтры и у/ф множества E . Следуя [12, определение 3.1], для всяких ТП (Y, τ) , $Y \neq \emptyset$, отображения $g \in Y^E$ и семейства

$\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ рассматриваем МП $(\mathbf{as})[E; Y; \tau; g; \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(Y)$. Отметим, что [8; 12] при упомянутых условиях

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; g; \mathcal{E}] = \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u^0[E | \mathcal{E}] : g^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} y\}. \quad (5.1)$$

Если при этом $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то [8; 12] МП (5.1) имеет вид

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; g; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \text{cl}(g^1(\Sigma), \tau). \quad (5.2)$$

Вместе с тем при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ непременно $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \in \beta[E]$. С учетом этого получаем [8, (3.8)] из (5.2), что в этом (общем) случае

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; g; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \text{cl}(g^1(\Sigma), \tau). \quad (5.3)$$

Предложение 5.1. Если $\mathcal{L} \in (\text{LAT})^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то

$$\begin{aligned} & (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] \\ &= (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{E}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Доказательство. Заметим, что (поскольку, в частности, $\mathcal{L} \in \pi[E]$; см. (3.2)–(3.4)) $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $\mathcal{E} \subset \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$. При этом согласно (3.6) имеем $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{F}) \iff (\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}) \quad (5.5)$$

(существенно используется замкнутость \mathcal{L} -фильтра относительно конечных пересечений). Из (5.5) вытекает (см. разд. 3) равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{E}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})). \quad (5.6)$$

Теперь согласно (4.10) и (5.6) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{E}) &= \bigcap_{L \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]) \\ &= \bigcap_{L \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]), \end{aligned} \quad (5.7)$$

в которой с учетом (5.3) реализуются следующие равенства:

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]), \quad (5.8)$$

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \quad (5.9)$$

Из (5.7)–(5.9) вытекает требуемая цепочка равенств (5.4).

Предложение доказано.

В связи с построением МП напомним одну конструкцию [14, разд. 5], предусматривающую использование специального функционального пространства. Фиксируем до конца настоящего раздела $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и ТП (\mathbf{H}, τ) , $\mathbf{H} \neq \emptyset$. Тогда [14, (5.3)]

$$\mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau] \triangleq \{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \exists y \in \mathbf{H} : f^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} y\} \quad (5.10)$$

есть непустое множество, обладающее следующим свойством (см. [14, предложение 5.1]): если $\tau \in (\mathbf{c} - \text{top})[\mathbf{H}]$, то

$$\{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall y \in \mathbf{H} \exists \mathcal{Y} \in (y - \text{bas})[\tau] : f^{-1}(Y) \in \mathcal{L} \forall Y \in \mathcal{Y}\} \subset \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]. \quad (5.11)$$

Свойство, используемое при определении множества в левой части (5.11), имеет смысл локальной измеримости (относительно \mathcal{L}). Если $\tau \in (\text{top})_0[\mathbf{H}]$, то (см. (5.10))

$$\forall f \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \quad \exists! h \in \mathbf{H}: f^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} h. \quad (5.12)$$

С учетом (5.12) при $\tau \in (\text{top})_0[\mathbf{H}]$ и $f \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ введем [14, определение 5.1] отображение $\varphi_{\text{lim}}[f | \mathcal{L}] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, для которого

$$f^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} \varphi_{\text{lim}}[f | \mathcal{L}](\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Если, кроме того, $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$ (напомним, что согласно (3.13) $(\mathbf{top})[\mathbf{H}] \subset (\text{top})_0[\mathbf{H}]$), то [14, предложение 5.3]

$$\varphi_{\text{lim}}[f | \mathcal{L}] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau) \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]. \quad (5.13)$$

Отметим, наконец, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ непременно $\varphi_{\text{lim}}[f | \mathcal{L}] \circ ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot] = f \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$.

Вместе с тем [21, разд. 3] в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $\tau \in (\text{top})_0[\mathbf{H}]$, $f \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\varphi_{\text{lim}}[f | \mathcal{L}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{E})) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}]. \quad (5.14)$$

Отметим в связи с использованием операторов (5.13) (наряду с (5.14)) общие положения [21, разд. 3], касающиеся представления МП в правой части (5.14).

6. Связь с расширением Волмэна

Рассмотрим вариант конструкции предыдущего раздела, фиксируя наряду с множеством E , $E \neq \emptyset$, топологию $\mathbf{t} \in (\mathcal{D} - \text{top})[E]$ и получая решетку с синглетонами

$$\mathbf{C}_E[\mathbf{t}] \in (\text{LAT})^0[E]. \quad (6.1)$$

Из (3.5) и (6.1) имеем, в частности, что $\mathbf{C}_E[\mathbf{t}] \in \tilde{\pi}^0[E]$. С учетом (6.1) при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$ мы получаем полезную конкретизацию положений предыдущего раздела. В частности, имеем u/ϕ

$$((E, \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) - \text{ult})[x] = \{F \in \mathbf{C}_E[\mathbf{t}] \mid x \in F\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) \quad \forall x \in E. \quad (6.2)$$

Поэтому определено отображение $w \triangleq ((E, \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) - \text{ult})[\cdot] \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])^E$, значения которого определяются посредством (6.2). При этом

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) = \text{cl}(w^1(E), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^*[E]) = \text{cl}(w^1(E), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E]), \quad (6.3)$$

где согласно предложению 4.1 $\mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E] \subset \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^*[E]$. На самом же деле [12, 8.6)] w есть гомеоморфное вложение ТП (E, \mathbf{t}) в

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E]). \quad (6.4)$$

В целях полноты изложения напомним соответствующее рассуждение в [12, § 8]. Заметим, что согласно [12, (7.2)] и (6.1) $\mathbf{C}_E[\mathbf{t}] \in (\mathbf{u} - \text{LAT})_0[E]$, где $(\mathbf{u} - \text{LAT})_0[E]$ определяется в [12, (7.1)]. Поэтому w соответствует $w[\mathcal{L}]$ [12, (7.4)] при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$ (6.1). В свою очередь при таком определении \mathcal{L} $w^1(E)$ совпадает с $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ [12, § 7], так как $w^1(E) = \{((E, \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) - \text{ult})[x] : x \in E\}$. Более того, из [12, (7.24)] имеем, что w есть биекция E на $w^1(E)$. Наконец, из [12, (8.6)] вытекает (при очевидных переобозначениях), что w есть гомеоморфизм (E, \mathbf{t}) на

$$(w^1(E), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E] |_{w^1(E)})$$

(см. обозначения [12, с. 114]), причем справедливо (6.3). Требуемое свойство установлено; оно и означает реализацию расширения Волмэна в виде пространства (6.4).

7. Представление множеств притяжения

Сохраняем в отношении (E, \mathbf{t}) предположения предыдущего раздела. Рассматриваем семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ в качестве ОАХ, используемых в духе разд. 5. Тогда согласно (6.1) и предложению 5.1 реализуется представление вспомогательного (по смыслу) МП. При этом далее рассматривается вариант (5.1), для которого

$$(Y, \tau) = (\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E]), \quad (7.1)$$

и аналогичный вариант для случая

$$(Y, \tau) = (\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^*(E)). \quad (7.2)$$

В связи с (7.1), (7.2) отметим, что с учетом предложения 4.1 триплет

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E], \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^*(E))$$

может рассматриваться как битопологическое пространство. Пусть далее $\mathcal{E} \subset \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$. Вместе с тем из предложения 5.1 и (6.1) следует, что

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]); \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E]; w; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]); \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^*(E); w; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]|\mathcal{E}), \quad (7.3)$$

где w соответствует определению разд. 6.

Введем в рассмотрение (основное по смыслу) ТП (\mathbf{H}, τ) , $\mathbf{H} \neq \emptyset$, предполагая сначала, что

$$\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]. \quad (7.4)$$

В частности, из (3.13) и (7.4) следует, что $\tau \in (\mathbf{r} - \mathbf{top})[\mathbf{H}]$. Поэтому согласно (3.9) имеем, что

$$N_\tau(y) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau] \in (y - \mathbf{bas})[\tau] \quad \forall y \in \mathbf{H}. \quad (7.5)$$

Зафиксируем до конца настоящего раздела отображение

$$\mathbf{f} \in C(E, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau), \quad (7.6)$$

рассматриваемое в качестве целевого. Тогда (см. (7.6)) $\mathbf{f}^{-1}(F) \in \mathbf{C}_E[\mathbf{t}] \quad \forall F \in \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$. С учетом (7.5) получаем следующее свойство локальной измеримости:

$$\forall y \in \mathbf{H} \quad \exists \mathcal{B} \in (y - \mathbf{bas})[\tau]: \mathbf{f}^{-1}(B) \in \mathbf{C}_E[\mathbf{t}] \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (7.7)$$

Пусть до конца настоящего раздела

$$\tau \in (\mathbf{c} - \mathbf{top})_0[\mathbf{H}]. \quad (7.8)$$

Разумеется, в случае (7.8) $\tau \in (\mathbf{r} - \mathbf{top})[\mathbf{H}]$, и как следствие выполнено (7.4) (предполагая (7.8)), мы рассматриваем частный случай (7.4). Поэтому имеем свойство (7.7). Из (5.11), (7.7) и (7.8) получаем, что

$$\mathbf{f} \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]; \mathbf{H}; \tau]. \quad (7.9)$$

Из (7.9) вытекает, что (см. разд. 5) определено отображение

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]: \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) \rightarrow \mathbf{H},$$

для которого

$$\mathbf{f}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} \varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]](\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]). \quad (7.10)$$

Напомним, что (\mathbf{H}, τ) есть T_3 -пространство (см. (3.13), (7.4)). Поэтому [8, предложение 6.1]

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}] | \mathcal{E})) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}]. \quad (7.11)$$

При этом (см. [8, предложение 6.2]) в рассматриваемом сейчас случае (7.8)

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^*[E], \mathbf{H}, \tau).$$

С другой стороны, согласно (4.6) и (6.1)

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E] \in (\mathbf{c} - \text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])] \cap (\mathcal{D} - \text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])], \quad (7.12)$$

т. е. $(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E])$ есть компактное T_1 -пространство. В дополнение к (7.12) заметим, что справедливо (7.3). Отметим, наконец, что в силу (6.1) справедливо (6.2) и определено отображение w , погружающее E в $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])$. Согласно свойствам, отмеченным в разд. 5,

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]] \circ w = \mathbf{f} \quad (7.13)$$

(учитываем, что $\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$ — отделимая π -система). Из (7.3), (7.12) и (7.13) вытекает [8, (4.1)], что

$$\begin{aligned} & (\varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E], \mathbf{H}, \tau)) \\ \implies & ((\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}] | \mathcal{E}))). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Покажем, что посылка импликации (7.14) истинна. Для этого мы сначала введем одно естественное представление топологии (7.12) в терминах соответствующей открытой базы, учитывая то, что (см. разд. 4, а также (6.1))

$$(\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]] \in (\mathbf{cl} - \text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])],$$

а тогда [12, (1.18)] имеем очевидное свойство

$$\mathfrak{B} \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])}[(\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]] \in (\mathbf{op} - \text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])]. \quad (7.15)$$

Для базы (7.15) удобно использовать представление, подобное применяемому в [11, разд. 3.6]. Введем в рассмотрение

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(G) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) \mid \exists U \in \mathcal{U}: U \subset G\} \quad \forall G \in \mathbf{t}. \quad (7.16)$$

Учитывая, что $E \setminus F \in \mathbf{t}$ при $F \in \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$, имеем из (7.16) множество $\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(E \setminus F) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]))$. Легко видеть, что

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(E \setminus F) = \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]) \setminus \Phi_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}(F).$$

С учетом этого получаем в силу (7.15) следующее равенство:

$$\mathfrak{B} = \{\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(G) : G \in \mathbf{t}\}. \quad (7.17)$$

Напомним теперь, что из (4.6) и (7.15) легко следует, что

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E] = \{\cup\}(\mathfrak{B}), \quad (7.18)$$

т. е. \mathfrak{B} есть (открытая) база ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E])$$

(последнее, как уже отмечалось, есть компактное T_1 -пространство). В связи с (7.18) будем использовать представление (7.17). Тогда $\forall G \in \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{G} \quad \exists G \in \mathbf{t}$

$$(\mathcal{U} \in \tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(G)) \& (\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(G) \subset \mathfrak{G}).$$

Напомним теперь, что (см. [8, (6.6)])

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]](\mathcal{U}) \in \bigcap_{L \in \mathcal{U}} \text{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]). \quad (7.19)$$

Предложение 7.1. *Отображение $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]$ непрерывно:*

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E], \mathbf{H}, \tau). \quad (7.20)$$

Доказательство. Согласно (7.8) имеем, в частности, справедливость (7.4). Фиксируем

$$\mathcal{U}_0 \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]). \quad (7.21)$$

Имеем $h_0 \triangleq \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]](\mathcal{U}_0) \in \mathbf{H}$. Пусть $\mathbf{S} \in N_\tau(h_0)$. С учетом (7.4) подберем

$$\mathbf{F} \in N_\tau(h_0) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau] \quad (7.22)$$

со свойством $\mathbf{F} \subset \mathbf{S}$. Тогда для некоторой открытой окрестности $\mathbf{G} \in N_\tau^0(h_0)$ имеем вложение $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$ (см. (7.22)). Ясно, что $\mathbf{G} \subset \mathbf{S}$. В силу непрерывности \mathbf{f} (см. (7.6))

$$V \triangleq \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{G}) \in \mathbf{t}. \quad (7.23)$$

Рассмотрим множество $\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(V)$, определяемое подобно (7.16). Заметим при этом, что в силу (7.17), (7.18)

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(V) \in \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E]. \quad (7.24)$$

Покажем, что $\mathcal{U}_0 \in \tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}(V)$. Для этого рассмотрим семейства $\mathbf{f}^1[\mathcal{U}_0]$ и

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{\text{cl}(\mathbf{f}^1(U), \tau) : U \in \mathcal{U}_0\}. \quad (7.25)$$

Легко видеть, что $\emptyset \notin \overline{\mathfrak{F}}$. Кроме того, по свойствам \mathcal{U}_0 (а также операции взятия образа) имеем следующее: если $m \in \mathbb{N}$ и $(F_i)_{i \in \overline{1, m}} : \overline{1, m} \rightarrow \overline{\mathfrak{F}}$ (напомним, что $\overline{1, m} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq m\}$), то $\exists F \in \overline{\mathfrak{F}}$:

$$F \subset \bigcap_{i=1}^m F_i. \quad (7.26)$$

С учетом (7.19) и определения h_0 получаем, что

$$h_0 \in \bigcap_{L \in \mathcal{U}_0} \text{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau). \quad (7.27)$$

Выберем произвольно h_* из множества-пересечения в правой части (7.27). Тогда получаем $\mathbf{f}^1(L) \cap S \neq \emptyset \forall L \in \mathcal{U}_0 \forall S \in N_\tau(h_*) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$. Это означает, что $L \cap f^{-1}(S) \neq \emptyset$ при $L \in \mathcal{U}_0$ и $S \in N_\tau(h_*) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$. С учетом (7.6) получаем следующее свойство: если $S \in N_\tau(h_*) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$, то $\mathbf{f}^{-1}(S) \in \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$ и при этом $f^{-1}(S) \cap U \neq \emptyset \forall U \in \mathcal{U}_0$. В силу максимальности \mathcal{U}_0 получаем, что $f^{-1}(S) \in \mathcal{U}_0 \forall S \in N_\tau(h_*) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$. В этом случае (при $S \in N_\tau(h_*) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$) имеем $f^1(f^{-1}(S)) \in f^1[\mathcal{U}_0]$ и, кроме того, $f^1(f^{-1}(S)) \subset S$. Получили, что

$$N_\tau(h_*) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau] \subset (\mathbf{H} - \mathbf{f})[\mathbf{f}^1[\mathcal{U}_0]]. \quad (7.28)$$

Вместе с тем согласно (7.10) $\mathbf{f}^1[\mathcal{U}_0] \xrightarrow{\tau} h_0$, что означает справедливость вложения

$$N_\tau(h_0) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{f})[\mathbf{f}^1[\mathcal{U}_0]], \quad (7.29)$$

где $(\mathbf{H} - \mathbf{f})[\mathbf{f}^1[\mathcal{U}_0]] \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}]$. Из (7.28) и (7.29) имеем в силу отделимости (\mathbf{H}, τ) , что $h_0 = h_*$ (учитываем, что замкнутые окрестности h_* образуют локальную базу в точке h_* , а также аксиомы фильтра). Поскольку выбор h_* был произвольным, имеем с учетом (7.27), что

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} \text{cl}(f^1(U), \tau) = \{h_0\},$$

а тогда (по выбору \mathbf{G}) получаем из условия (7.25) вложение

$$\bigcap_{F \in \overline{\mathfrak{F}}} F \subset \mathbf{G}.$$

Напомним, что (см. (7.8)) ТП (\mathbf{H}, τ) — компакт, множества из $\overline{\mathfrak{F}}$ замкнуты в (\mathbf{H}, τ) (см. (7.25)) и при этом справедливо свойство, определяемое в (7.26). Тогда [11, следствие 3.1.5] для некоторого $\widehat{F} \in \overline{\mathfrak{F}}$ $\widehat{F} \subset \mathbf{G}$. В силу (7.25) получаем, следовательно, что для некоторого $\widehat{U} \in \mathcal{U}_0$

$$\text{cl}(\mathbf{f}^1(\widehat{U}), \tau) \subset \mathbf{G}. \quad (7.30)$$

Из (7.21) и (7.30) получаем, что $\mathbf{f}^{-1}(\text{cl}(\mathbf{f}^1(\widehat{U}), \tau)) \subset V$, откуда, как следствие, имеем

$$\widehat{U} \subset \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}^1(\widehat{U})) \subset \mathbf{f}^{-1}(\text{cl}(\mathbf{f}^1(\widehat{U}), \tau)) \subset V.$$

Поэтому (см. (7.21)) \mathcal{U}_0 есть у/ф π -системы $\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$, для которого $\exists U \in \mathcal{U}_0: U \subset V$. Согласно (7.16) и (7.23) $\mathcal{U}_0 \in \widetilde{\Phi}_t(V)$. Поэтому (см. (7.24))

$$\widetilde{\Phi}_t(V) \in N_t^0(\mathcal{U}_0), \quad (7.31)$$

где $t \triangleq \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E]$. Итак, получили (см. (7.31)) окрестность у/ф \mathcal{U}_0 . Пусть

$$v \in \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]^1(\widetilde{\Phi}_t(V)). \quad (7.32)$$

Тогда $v \in \mathbf{H}$ и для некоторого у/ф $\mathcal{V} \in \widetilde{\Phi}_t(V)$ справедливо равенство

$$v = \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]](\mathcal{V}). \quad (7.33)$$

Соответственно $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}])$ и для некоторого $\Phi \in \mathcal{V}$ имеет место (см. (7.16)) вложение $\Phi \subset V$. Как следствие имеем

$$\mathbf{f}^1(\Phi) \subset \mathbf{f}^1(V) = \mathbf{f}^1(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{G})) \subset \mathbf{G},$$

и тем более $\mathbf{f}^1(\Phi) \subset \mathbf{F}$. С учетом (7.22) $\text{cl}(\mathbf{f}^1(\Phi), \tau) \subset \mathbf{F}$, откуда по выбору \mathbf{F} получаем, что $\text{cl}(\mathbf{f}^1(\Phi), \tau) \subset \mathbf{S}$, где согласно (7.19)

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]](\mathcal{V}) \in \bigcap_{U \in \mathcal{V}} \text{cl}(\mathbf{f}^1(U), \tau).$$

Получили, что $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]](\mathcal{V}) \in \text{cl}(\mathbf{f}^1(\Phi), \tau)$. В итоге (см. (7.33)) $v \in \mathbf{S}$. Тем самым (см. (7.32)) установлено вложение

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]^1(\widetilde{\Phi}_t(V)) \subset \mathbf{S}. \quad (7.34)$$

С учетом (7.31), (7.34) получаем, поскольку выбор \mathbf{S} был произвольным, что (при $t = \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]}^0[E]$) $\forall A \in N_\tau(h_0) \exists B \in N_t^0(\mathcal{U}_0)$:

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]^1(B) \subset A. \quad (7.35)$$

По определению h_0 имеем из (7.35), что отображение $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]$ непрерывно в точке \mathcal{U}_0 . Поскольку последняя выбиралась произвольно (см. (7.21)), то установлено (7.20).

Предложение доказано.

Из (7.14) и предложения 7.1 вытекает следующая

Теорема 7.1. *Справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} | \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\mathbf{t}] | \mathcal{E})).$$

Тем самым усиливается оценочное утверждение (7.11).

8. Ультрафильтры топологий и оценивание множеств притяжения

Настоящий раздел является естественным продолжением работы [22]. Мы фиксируем непустое множество E и произвольную топологию $\mathbf{t} \in (\text{top})[E]$. Эту топологию будем рассматривать в качестве π -системы множества E , учитывая свойства, отмеченные в разд. 3 (отделимость данной π -системы предполагаться не будет). Итак, ниже рассматривается случай $\mathcal{L} = \mathbf{t}$, где, в частности, имеет место $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Пару (E, \mathbf{t}) рассматриваем, таким образом, в качестве широко понимаемого ИП.

Кроме того, как и в предыдущем разделе, фиксируем ТП (\mathbf{H}, τ) : \mathbf{H} — непустое множество, $\tau \in (\text{top})[\mathbf{H}]$. Мы полагаем, что $\tau \in (\text{top})_0[\mathbf{H}]$ (итак, (\mathbf{H}, τ) — хаусдорфово ТП). Еще одно предположение относительно (\mathbf{H}, τ) будет связано с множеством

$$\mathbb{Z}[\tau] \triangleq \left\{ \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \mid \bigcap_{G \in \mathcal{K}} G \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{G}) \right\}$$

всех центрированных подсемейств τ . Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \text{cl}(G, \tau) \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\tau]. \quad (8.1)$$

Иными словами (см. (8.1)), далее предполагается, что (\mathbf{H}, τ) есть H -замкнутое ТП (см. [11;15]). Если $S \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$, то через $(\tau - \text{Int})[S]$ обозначаем внутренность S в (\mathbf{H}, τ) : $(\tau - \text{Int})[S] \triangleq \{h \in \mathbf{H} \mid S \in N_\tau(h)\}$. Далее фиксируем \mathbf{f} (7.6). Итак, \mathbf{f} есть непрерывное в смысле (E, \mathbf{t}) и (\mathbf{H}, τ) отображение из множества \mathbf{H}^E . Постулируем далее, что \mathbf{f} квазиоткрыто:

$$(\tau - \text{Int})[\text{cl}(\mathbf{f}^1(G), \tau)] \neq \emptyset \quad \forall G \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}. \quad (8.2)$$

В работе [22] показано (см. [22, предложение 7.3]), что (при упомянутых условиях (8.1), (8.2))

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}) \quad \exists h \in \mathbf{H}: \mathbf{f}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} h. \quad (8.3)$$

Из (5.10) и (8.3) вытекает с очевидностью, что $\mathbf{f} \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathbf{t}; \mathbf{H}; \tau]$. Поэтому [8, определение 6.1] имеем отображение

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} \mid \mathbf{t}]: \mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{H},$$

для которого (см. разд. 5) $\mathbf{f}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} \mid \mathbf{t}](\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})$. Напомним, что (см. [8, (6.4)]) $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} \mid \mathbf{t}]^1(S) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in S: \mathbf{f}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} h\} \quad \forall S \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}))$. В частности, таким образом определяются множества $\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} \mid \mathbf{t}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t} \mid \mathcal{E}))$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathbf{t})$. При этом

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} \mid \mathbf{t}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t} \mid \mathcal{E})) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{t} \mid \mathcal{E}): \mathbf{f}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} h\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathbf{t}).$$

Наконец, из [8, предложение 6.1] вытекает, что

$$\varphi_{\text{lim}}[\mathbf{f} \mid \mathbf{t}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t} \mid \mathcal{E})) \subset (\text{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathbf{t}). \quad (8.4)$$

Свойство (8.4) позволяет оценивать МП в (\mathbf{H}, τ) , используя множества $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t} \mid \mathcal{E})$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathbf{t})$.

Т о п о л о г и ч е с к а я с т р у к т у р а. Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с оснащением непустого множества $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})$ различными топологиями. Учтем, что $\mathbf{t} \in (\text{LAT})_0[E]$. Отметим сначала, что подобно [11, 6.3.20] (следствие отделенности двух непересекающихся открытых множеств)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}) \setminus \Phi_{\mathbf{t}}(G) = \Phi_{\mathbf{t}}(E \setminus \text{cl}(G, \mathbf{t})) \quad \forall G \in \mathbf{t}. \quad (8.5)$$

Предложение 8.1. *Справедливо вложение $\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})}[\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E]] \subset \{\cap\}(\text{UF})[E; \mathbf{t}]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что согласно (4.1) $\emptyset = \Phi_{\mathbf{t}}(\emptyset) \in \{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])$. Пусть $F^* \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})}[\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E]]$, а $G^* \in \mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E]$ таково, что

$$F^* = \mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}) \setminus G^*. \quad (8.6)$$

Если $G^* = \emptyset$, то (см. (8.6)) $F^* = \mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}) = \Phi_{\mathbf{t}}(E) \in \{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])$. Итак,

$$(G^* = \emptyset) \implies (F^* \in \{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])). \quad (8.7)$$

Пусть теперь $G^* \neq \emptyset$. Согласно (4.2) имеем, что

$$G^* = \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} B, \quad (8.8)$$

где $\mathcal{B}^* \in \mathcal{P}'((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])$. Как следствие $\mathcal{G}^* \triangleq \{G \in \mathbf{t} \mid \Phi_{\mathbf{t}}(G) \in \mathcal{B}^*\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{t})$. Из (8.8) следует, что

$$G^* = \bigcup_{G \in \mathcal{G}^*} \Phi_{\mathbf{t}}(G). \quad (8.9)$$

Из (8.6), (8.9) вытекает с очевидностью, что

$$F^* = \mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}) \setminus \left(\bigcup_{G \in \mathcal{G}^*} \Phi_{\mathbf{t}}(G) \right) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}^*} (\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}) \setminus \Phi_{\mathbf{t}}(G)). \quad (8.10)$$

Поскольку $\mathcal{G}^* \subset \mathbf{t}$, имеем из (8.5) и (8.10), что

$$F^* = \bigcap_{G \in \mathcal{G}^*} \Phi_{\mathbf{t}}(E \setminus \text{cl}(G, \mathbf{t})) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}^*} F, \quad (8.11)$$

где $\mathcal{F}^* \triangleq \{\Phi_{\mathbf{t}}(E \setminus \text{cl}(G, \mathbf{t})) : G \in \mathcal{G}^*\} \in \mathcal{P}'((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])$. Но в этом случае согласно (8.11) $F^* \in \{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])$ и при $G^* \neq \emptyset$. Итак, $(G^* \neq \emptyset) \implies (F^* \in \{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}]))$. С учетом (8.7) получаем, что во всех возможных случаях $F^* \in \{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])$, чем и завершается доказательство.

Предложение доказано.

Из (4.6) и предложения 8.1 вытекает, что

$$\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})}[\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})}[\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E]]] \subset \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})}[\{\cap\}((\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathbf{t}])] = \mathbf{T}_{\mathbf{t}}^0[E],$$

а тогда с учетом предложения 4.1 получаем равенство

$$\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^0[E] = \mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E]. \quad (8.12)$$

Из (4.2), (4.6) и (8.12) вытекает, что

$$\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E] = \mathbf{T}_{\mathbf{t}}^0[E] \in (\mathbf{c} - \text{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t})]. \quad (8.13)$$

Итак, в рассматриваемом случае $(E, \mathcal{L}) = (E, \mathbf{t})$ топологии, участвующие в предложении 4.1, совпадают и реализуют непустой нульмерный компакт

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}), \mathbf{T}_{\mathbf{t}}^*[E]) = (\mathbb{F}_0^*(\mathbf{t}), \mathbf{T}_{\mathbf{t}}^0[E]). \quad (8.14)$$

З а м е ч а н и е 8.1. Свойство, подобное (8.13), (8.14) и касающееся реализации компакта Стоуна, указано в [12, предложение 9.2] (имеется в виду случай у/ф алгебры множеств).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Архангельский А.В.** Компактность // Итоги науки и техники. 1989. Т. 50. С. 7–128. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
3. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
4. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
5. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1970. 488 с.
6. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Современная математика и ее прил. / АН Грузии. Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
7. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, no. 2. P. 1045–1206.
8. **Ченцов А.Г.** Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
9. **Скворцова А.В., Ченцов А.Г.** О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.
10. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
11. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
12. **Ченцов А.Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика, механика, компьютерные науки.)
13. **Ченцов А.Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
14. **Ченцов А.Г.** К вопросу о представлении множеств притяжения в задачах с ограничениями асимптотического характера // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
15. **Александров П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
16. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
17. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
18. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
19. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
20. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 433 с.
21. **Ченцов А.Г.** К вопросу о представлении ультрафильтров и их применении в конструкциях расширений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 289–308.
22. **Пыткеев Е.Г., Ченцов А.Г.** К вопросу о структуре ультрафильтров и свойствах, связанных со сходимостью в топологических пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 250–267.

Ченцов Александр Георгиевич

Поступила 14.05.2014

д-р физ.-мат. наук, профессор

чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Пыткеев Евгений Георгиевич

д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: pyt@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20

№ 4

2014

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Н. М. Юркова

Тех-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск О. Г. Матвийчук

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 5.11.14. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38,6. Уч.-изд. л. 32,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226