РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 20, № 2 2014

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 20 № 2 2014

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 20, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. 326 с.

ISSN 0134–4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев, д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов,
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,
д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Белоруссия), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. В. Кряжимский, чл.-корр. РАН С. В. Матвеев,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,
чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков, чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,
чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редакторы выпуска

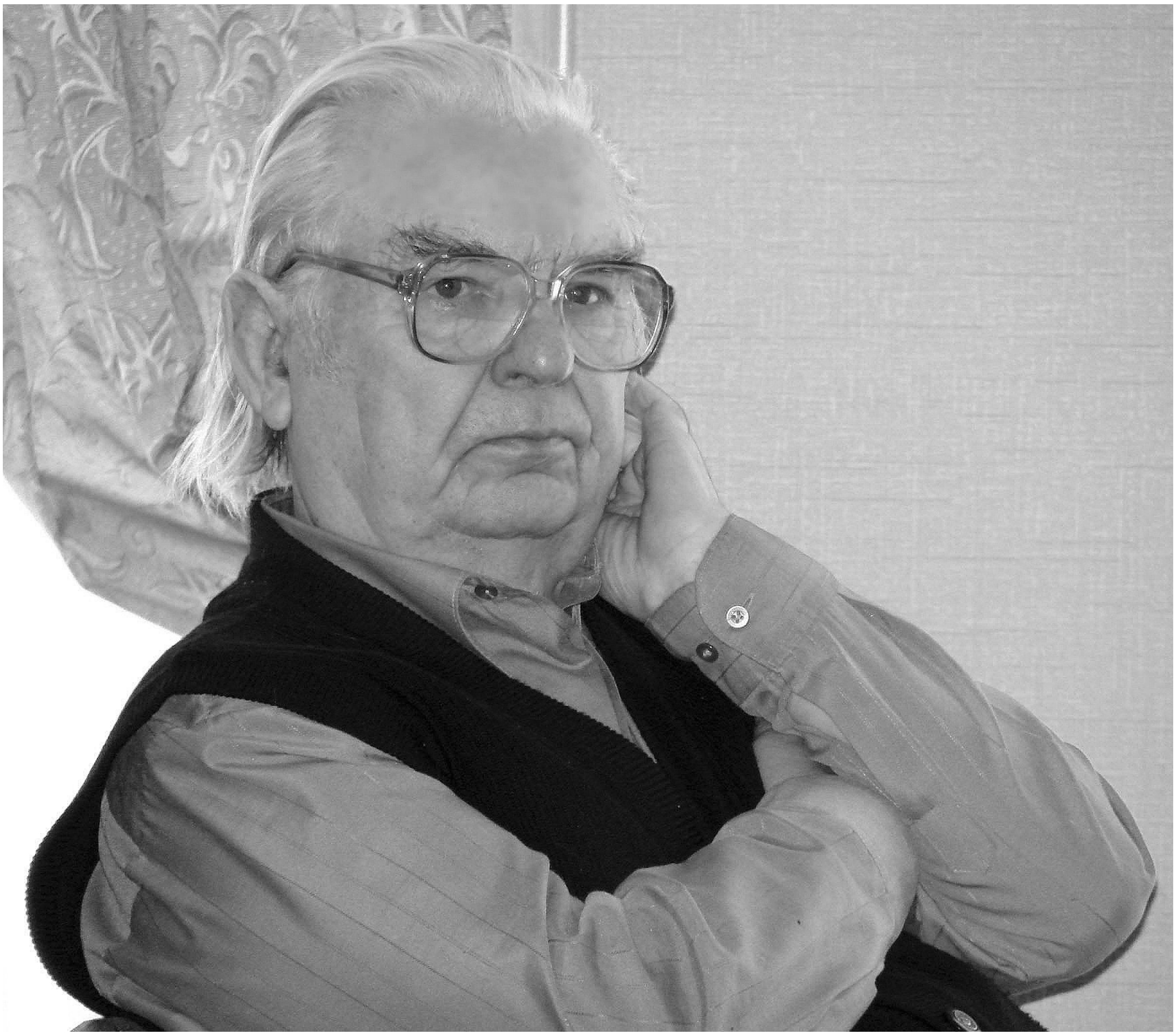
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Том 20 № 2 2014

(Продолжение)



ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

ИВАН ИВАНОВИЧ ЕРЕМИН

21 июля 2013 г. ушел из жизни выдающийся математик и талантливый педагог, основатель и научный руководитель уральской школы математического программирования, действительный член Российской академии наук, главный научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН, профессор Уральского и Южно-Уральского государственных университетов Иван Иванович Еремин.

Общеизвестна широта научных интересов И. И. Еремина. Полученные им основополагающие результаты в области теории и методов линейной и выпуклой оптимизации, теории линейных неравенств, теории распознавания образов во многом определили направление развития этих современных разделов прикладной математики и теоретической информатики. Однако наибольшую известность снискали достижения Ивана Ивановича в области анализа, регуляризации и оптимальной коррекции противоречивых задач выпуклой оптимизации, названных им несобственными, возникающих при исследовании широкого спектра экономико-математических моделей. Развитая Ереминым стройная теория несобственных задач обусловила появление нового активно развивающегося раздела современной выпуклой оптимизации.

И. И. Еремин родился 22 января 1933 г. в с. Равнец Ишимского района Уральской (в настоящее время Тюменской) области в многодетной крестьянской семье. Он рано начал интересоваться точными науками: математикой, физикой, химией; родители и старшие сестры поддерживали его стремление к знаниям, несмотря на тяжелые жизненные условия.

По совету школьного учителя Еремин поступил в 1951 г. на физико-математический факультет Молотовского (в настоящее время Пермского) государственного университета. Здесь он познакомился со своим будущим научным руководителем, профессором Сергеем Николаевичем Черниковым, ярким математиком, известным специалистом в области теории групп и линейных неравенств, возглавлявшим в то время кафедру высшей алгебры и геометрии. Именно в процессе общения с Сергеем Николаевичем возник интерес И. И. Еремина к теории и методам линейной и выпуклой оптимизации и была сформирована основа полученных им в этой области результатов, ставших впоследствии широко известными.

Тем не менее во время учебы в университете и в первые годы после его окончания, работая на кафедре С. Н. Черникова, Иван Иванович посвятил себя исключительно задачам, характерным для современной теории групп. В развитие теоретического подхода к описанию бесконечных групп с условиями конечности, предложенного С. Н. Черниковым, им получено описание семейства групп с конечными классами сопряженных элементов (FC-групп). В частности, И. И. Еремин показал, что достаточным условием конечности произвольного класса сопряженных подгрупп является условие конечности таких классов лишь для не более чем счетных абелевых подгрупп заданной группы. Эти результаты легли в основу кандидатской диссертации, защищенной И. И. Ереминым в Пермском государственном университете в 1959 г.

Переломным моментом в творческом пути ученого явился 1961 г., когда С. Н. Черников и И. И. Еремин начали работать в недавно созданном Свердловском отделении Математического института им. В. А. Стеклова (ныне Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН) по приглашению его основателя и первого директора С. Б. Стечкина.

В составе отдела алгебры, возглавляемого С. Н. Черниковым, Иван Иванович организовал лабораторию линейного программирования. Впоследствии новое научное подразделение приобрело статус отдела; именно здесь закладывались основы уральской школы математического программирования. Вся последующая научная деятельность Ивана Ивановича была связана с Институтом математики и механики и созданным им отделом, заведующим которого он был долгие годы, а научным руководителем оставался до последних дней своей жизни.

Расставшись с теорией групп и занявшись математическим программированием, Еремин получил целый спектр результатов, имеющих мировое значение и во многом определяющих направление развития этого современного раздела исследования операций.

Часть полученных результатов связана с развитием важного теоретического подхода к исследованию задач условной оптимизации — метода штрафных функций, в рамках которого исследуемая задача аппроксимируется параметрическим семейством задач с меньшим (в идеале пустым) множеством ограничений так, что процедура решения каждой такой задачи характеризуется меньшими вычислительными затратами. Традиционный подход подразумевал лишь асимптотическую аппроксимируемость исходной задачи. Именно Иваном Ивановичем в 1966 г. впервые был строго обоснован класс точных штрафных функций, названных впоследствии штрафными функциями Еремина — Зангвилла[1], позволяющих находить оптимальное решение исходной задачи при фиксированных значениях параметров. В частности, задаче выпуклого программирования

$$\alpha = \min\{f(x)\colon g_j(x) \leqslant 0 \ (j \in J),\ h_k(x) = 0 \ (k \in K),\ x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{1}$$

определяемой конечными множествами J и K, выпуклыми функциями $f, g_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и линейными функциями $h_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, была сопоставлена задача безусловной оптимизации

$$\beta(r,t) = \min\Big\{ f(x) + \sum_{j\in J} r_j [g_j(x)]_+ + \sum_{k \in K} t_k |h_k(x)| \colon x \in \mathbb{R}^n \Big\}$$

и показано, что условие $\beta(r,t) = \alpha$ выполняется всякий раз, когда $r_j \geqslant |\bar\lambda_j|$ и $t_k \geqslant |\bar\mu_k|$ для вектора оптимальных множителей Лагранжа $[\bar\lambda, \bar\mu]$ задачи (1).

Трудно переоценить вклад И. И. Еремина в области нестационарных процессов оптимизации иерархических систем и итерационных методов решения задач математического программирования. Ученый предложил и исследовал новый класс квазинерастягивающих операторов, названных им фейеровскими.

Пусть X — линейное нормированное пространство и M — некоторое непустое подмножество X. Отображение $T\colon X \to X$ называется M-фейеровским, если $M = \mathrm{Fix}(T)$ (M совпадает с множеством неподвижных точек T) и $\|T(x) - y\| < \|x - y\|$ для произвольных $x \notin M$ и $y \in M$.

Класс фейеровских отображений нашел применение в целом ряде разделов современной математики. Один из критериев гильбертовости локально строго выпуклого банахового пространства формулируется в терминах фейеровости оператора метрической проекции[2]. В совместных работах И. И. Еремина и В. В. Васина обоснована важность фейеровских отображений в контексте теории регуляризации и при построении методов решения некорректно поставленных задач с априорной информацией.

В методах оптимизации фейеровские отображения определили теоретическую базу обширного семейства одноименных итерационных процедур, обладающих рядом важных с вычислительной точки зрения характеристик: устойчивостью к малым изменениям параметров модели, простотой реализации и высоким внутренним параллелизмом.

Метод точных штрафных функций и итерационные методы фейеровского типа легли в основу докторской диссертации, защищенной И. И. Ереминым в 1967 г. в Институте математики СО РАН.

---

[1]См., например, Bonnans J. F., Gilbert J. Ch., Lemaréchal C., Sagastizábal Cl. Optimisation Numérique. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.

[2]Доказан В. С. Балаганским.

Вероятно, наибольшую известность снискали его результаты в области анализа и оптимальной коррекции несобственных задач выпуклой оптимизации. Задача выпуклого программирования называется несобственной, если для нее нарушаются соотношения двойственности (в силу несовместности системы ограничений, неограниченности целевой функции и т.п.). Обладая тонкой математической интуицией и врожденным чувством гармонии, Иван Иванович особенно ценил результаты именно в области коррекции несобственных задач линейного программирования, считая их эстетически совершенными. В отличие от задач более общей природы прямая и двойственная несобственные задачи линейного программирования могут быть скорректированы единообразно, причем вводимые дополнительные параметры допускают ясную содержательную интерпретацию. Например, паре двойственных задач

$$L\colon \max\{(c,x)\colon Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad L^*\colon \min\{(b,y)\colon A^T y \geqslant c,\ y \geqslant 0\}$$

(в случае их несобственности) для заданных норм $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ в пространствах прямых и двойственных переменных и параметров $R_0, r_0 > 0$ может быть сопоставлена пара взаимно симметричных разрешимых аппроксимирующих задач

$$\begin{aligned} P:&\quad \max\{(c,x) - R_0\,\|[Ax-b]_+\|_q^*\colon x \geqslant 0,\ \|x\|_p \leqslant r_0\},\\ P^{\#}:&\quad \min\{(b,y) + r_0\,\|[c-A^T y]_+\|_p^*\colon y \geqslant 0,\ \|y\|_q \leqslant R_0\}, \end{aligned}$$

оптимальные решения которых естественным образом обобщают решения задач L и L^*.

В 1971 г. И. И. Еремину присуждено ученое звание профессора, в 1991 г. — звание членакорреспондента, а в 2000 г. — действительного члена Российской академии наук.

Исследовательский талант ученого органично сочетался с даром педагога и организатора науки. И. И. Еремин являлся основателем и бессменным председателем организационного комитета Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения", которая регулярно проводится с 1973 г. по настоящее время[3] в Свердловске (ныне Екатеринбурге); она посвящена изысканиям в области теории и методов оптимизации, аппроксимации и исследования операций. В 1991 г. под руководством Ивана Ивановича основана Ассоциация математического программирования, укрепившая научные связи между родственными коллективами из Екатеринбурга, Москвы, Новосибирска, Иркутска, Владивостока, Омска и других городов.

Долгие годы Иван Иванович являлся членом нескольких диссертационных советов, редакционного совета журнала "Труды Института математики и механики УрО РАН", редакционной коллегии журнала "Известия высших учебных заведений. Математика" и ряда других отечественных и зарубежных научных периодических изданий.

Усилиями И. И. Еремина в 1996 г. создана кафедра математической экономики математико-механического факультета Уральского государственного (ныне федерального) университета. В числе его учеников один член-корреспондент РАН, 11 докторов и более 30 кандидатов наук.

Научная и педагогическая деятельность академика И. И. Еремина получила заслуженное признание и отмечена государственными наградами. Иван Иванович — кавалер орденов "Знак почета" и "Дружбы", лауреат премии им. Л. В. Канторовича РАН и премии им. А. Ф. Сидорова УрО РАН за выдающиеся результаты в области экономико-математических методов.

Светлая память об Иване Ивановиче Еремине, выдающемся ученом, талантливом педагоге и замечательном, отзывчивом человеке навсегда останется в наших сердцах.

В. И. Бердышев, В. В. Васин, С. В. Матвеев, А. А. Махнев, Ю. Н. Субботин, Н. Н. Субботина, В. Н. Ушаков, М. Ю Хачай, А. Г Ченцов.

[3] Очередная, XV конференция "Математическое программирование и приложения" состоится в феврале 2015 г.

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ И.И. ЕРЕМИНА

1. О некоторых свойствах узлов системы линейных неравенств // Успехи мат. наук. 1956. Т. XI, вып. 2. С. 169–172.
2. Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 2. С. 223–224.
3. Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 1. С. 45–54.
4. Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 1959. 7 с.
5. О центральных расширениях с помощью тонких слойноконечных групп // Изв. вузов. Математика. 1960. № 2. С. 93–95.
6. О группах с конечными классами сопряженных подгрупп с заданным свойством // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 4. С. 772–773.
7. О несовместных системах линейных неравенств // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, № 6. С. 1280–1283.
8. Итеративный метод для чебышевских приближений несовместных систем линейных неравенств // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1254–1256.
9. Обобщение релаксационного метода Моцкина — Агмона // Успехи мат. наук. 1965. Т. XX, вып. 2. С. 183–187.
10. Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями в левых частях // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 5. С. 994–996.
11. Итерационный метод решения задачи выпуклого программирования // Мат. зап. Урал. гос. ун-та. 1966. Т. 5, № 3. С. 40–48 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
12. О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1966. Т. 30, № 2. С. 265–278.
13. О некоторых итерационных методах в выпуклом программировании // Экономика и мат. методы. 1966. Т. 2, № 6. С. 870–886.
14. Итеративный метод решения задачи выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170, № 1. С. 57–60 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
15. О методе штрафов в выпуклом программировании // Тез. 15-го Междунар. конгр. математиков (Москва, 16–26 августа 1966 г.). Москва, 1966. Секция 14. С. 34.
16. Оптимизация топливно-энергетического баланса / РИСО УФАН. Свердловск, 1966. 100 с. (совм. с Н. М. Виленским, З. С. Другалевой и др.).
17. О методе штрафов в выпуклом программировании // Кибернетика. 1967. № 4. С. 63–67.
18. Метод штрафов в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.
19. Метод штрафов в линейном программировании и его реализация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 6. С. 1358–1366 (совм. с М. А. Костиной).
20. Метод фейеровских приближений в выпуклом программировании // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 2. С. 217–234.
21. О скорости сходимости в методе фейеровских приближений // Мат. заметки, 1968. Т. 4, вып. 1. С. 53–61.
22. Применение метода фейеровских приближений к решению задач выпуклого программирования с негладкими ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 5. С. 1153–1160.
23. Фейеровские отображения и задача выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5. С. 1034–1047.
24. Введение в линейное и выпуклое программирование: учеб. пособие. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1970. 128 с.
25. О задачах выпуклого программирования с противоречивыми ограничениями // Кибернетика. 1971. № 4. С. 124–129.
26. О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 53–63.
27. Системы линейных неравенств и некоторые приложения // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, вып. 4. С. 465–478 (совм. с Н. Н. Красовским).
28. Основы линейного и выпуклого программирования: учеб. пособие. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1973. 145 с.

29. Нестационарные процессы математического программирования // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 5. С. 254–256 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
30. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с. (совм. с Н. Н. Астафьевым).
31. Синтез и анализ нестационарных процессов математического программирования, их приложения в экономике и технике // Ekonomicko-matematicky obzor. Československa Akademie věd. 1976. Roc. 12, № 3. С. 277–293 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
32. Дискретные процессы фейеровского типа для негладких задач выпуклого программирования // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 628–641.
33. Итерационный метод обучения дискриминации бесконечных множеств // Кибернетика. 1977. № 5. С. 108–110 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
34. Стандартные итерационные процессы негладкой оптимизации для нестационарных задач выпуклого программирования, I // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18, № 6. С. 1430–1442.
35. Стандартные итерационные процессы негладкой оптимизации для нестационарных задач выпуклого программирования, II // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 112–120.
36. Вопросы оптимизации и распознавания образов. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1979. 64 с. (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
37. Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 288 с. (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
38. Автоматизация управления параметрами итерационного процесса для задач математического программирования // Кибернетика. 1979. № 6. С. 41–45 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
39. Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
40. Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981. 44 с.
41. Двойственность для несобственных задач линейного программирования // Мат. заметки. 1982. Т. 32, вып. 2. С. 229–238.
42. Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования и методы их коррекции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, I. 1983. С. 20–32.
43. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с. (совм. с Вл. Д. Мазуровым, Н. Н. Астафьевым).
44. Двойственность для несобственных бесконечномерных задач линейного и выпуклого программирования // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования: сб. ст. / ред. И. И. Еремин, В. Д. Скарин; УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 3–20 (совм. с А. А. Ватолиным).
45. Вопросы двойственности для несобственных задач математического программирования // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 6. С. 624–635.
46. Несобственные задачи квадратичного программирования и вопросы регуляризации // Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования: сб. ст. / ред. И. И. Еремин, Л. Д. Попов; УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. С. 47–50.
47. Двойственность для несобственных задач математического программирования / УНЦ АН СССР, Свердловск, 1985. 50 с. (совм. с А. А. Ватолиным).
48. Противоречивые модели экономики. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1986. 96 с.
49. Двойственность и аппроксимация для несобственных задач математического программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, I. 1987. С. 70–81.
50. Вопросы двойственности для несобственных задач многокритериальной линейной оптимизации // Исследования по несобственным задачам оптимизации: сб. ст. / ред. И. И. Еремин, А. А. Ватолин. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 27–33.
51. Системы линейных неравенств в математическом программировании и распознавании образов // Укр. мат. журн. 1988. Т. 40, № 3. С. 288–296 (совм. с Вл. Д. Мазуровым, Н. Н. Астафьевым).
52. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
53. Общая схема формирования двойственности для несобственных задач математического программирования // Кибернетика. 1989. № 5. С. 79–82.
54. Improper mathematical programming problems // Problems of control and information theory. 1989. Vol. 18(6). P. 359–380 (jointly with A. A. Vatolin).

55. Симметричная двойственность для задач последовательного линейного программирования // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 5. С. 1045–1048.
56. Симметрическая двойственность для лексикографических задач линейного программирования // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 6. С. 766–773.
57. Лексикографическая двойственность для несобственных задач линейного и квадратичного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 1. С. 178–192.
58. Numerical analysis of improper linear programs using the Delta-plan-ES interactive system // Optimization Methods & Software. 1993. Vol. 2. P. 69–78 (jointly with L. D. Popov).
59. Delta-plan-ES — the interactive system of numerical analysis of improper linear programs // Int. j. of software engineering and knowledge engineering. 1993. Vol. 3, № 4. P. 429–438 (jointly with L. D. Popov).
60. Improper problems of mathematical programming // Modern mathematical methods of optimization. Berlin: Akademie-Verlag, 1993. Chapter 5. P. 178–212 (jointly with A. A. Vatolin, L. D. Popov).
61. Двойственность для парето-лексикографических задач линейной оптимизации // Изв. вузов. Математика. Казань: ФОРТ ДИАЛОГ, 1993. № 12(379). С. 3–10.
62. Duality for pareto-lexicographic problems of linear optimization // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. Vol. 3, № 4. P. 482–487.
63. Парето-последовательная задача линейной оптимизации и двойственность // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 4. С. 141–143.
64. Конечный итерационный метод нахождения внутренней точки алгебраического многогранника и оценка числа шагов // Изв. вузов. Математика. Казань: ФОРТ ДИАЛОГ, 1995. № 11. С. 1–7.
65. Summetric duality in lexicographic problems of linear optimization // Yugoslav J. of Operations Research / University of Belgrade, Belgrade, 1995. Vol. 5, № 2. P. 165–172.
66. Двойственность для задач дискриминации и таксономии систем линейных неравенств // Pattern Recognition and Image Analysis. 1995. Vol. 5, № 3. P. 233–236.
67. Двойственность для Парето-последовательных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. Т. 3. С. 245–261.
68. К методу штрафов в математическом программировании // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 4. С. 459–461.
69. Двойственность для несобственных задач паретовской и лексикографической линейной оптимизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. Т. 4. С. 322–336.
70. Некоторые вопросы кусочно-линейного программирования // Изв. вузов. Математика. Казань: ФОРТ ДИАЛОГ, 1997. № 12(427). С. 1–13.
71. About some problems of disjunctive programming // Yugoslav J. of Operations Research / University of Belgrade, Belgrade, 1998. Vol. 8, № 1. P. 25–43.
72. Сигма-кусочные функции и задачи дизъюнктивного программирования // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 5. С. 538–540.
73. Сигма-кусочные функции и задачи дизъюнктивного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 357–380.
74. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1998. 248 с.
75. О квадратичных и полноквадратичных задачах выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. Казань: ФОРТ ДИАЛОГ, 1998. № 12. С. 22–28.
76. Двойственность для задач квадратичного программирования в гильбертовом пространстве // Информ. бюлл. АМП. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999. № 8. С. 99–102.
77. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
78. Общая теория устойчивости в линейном программировании // Изв. вузов. Математика. Казань: ФОРТ ДИАЛОГ, 1999. № 12(451). С. 43–52.
79. Математические методы в экономике: сб. ст. / ред. И. И. Еремин, Вл. Д. Мазуров. Екатеринбург: У-Фактория, 2000. 280 с. (совм. с Вл. Д. Мазуровым, В. Д. Скариным, М. Ю. Хачаем).
80. About the problem of disjunctive programming // Yugoslav J. of Operations Research. University of Belgrade, Belgrade, 2000. Vol. 10, № 2. P. 149–161.
81. Аннотации приоритетных результатов в области математического программирования // Информ. бюл. АМП, I. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. № 9. С. 58–66.
82. Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 180 с.
83. Синтез фейеровских отображений с несовпадающими пространствами их образов // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 1. С. 11–13.

84. About disjunctive optimization // Semi-infinite programming / eds. M. Á. Goberna, M. A. Lóрez. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 45–58.
85. Theory of linear optimization. Utrecht; Boston; Kőln; Tokyo: VSP. Inverse and ill-posed problems ser., 2002. 248 p.
86. Параллельные фейеровские методы для сильно структурированных систем линейных неравенств и уравнений // Алгоритмы и програм. обеспечение парал. вычислений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2002. Вып. 6. С. 149–175 (совм. с Л. Д. Поповым).
87. Фейеровские процессы для бесконечных систем выпуклых неравенств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2002. Т. 8, № 1. С. 45–65 (совм. с С. В. Пацко).
88. Fejér processes for infinite systems of convex inequalities // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S32–S51 (jointly with S. V. Patsko).
89. Вопросы устойчивости и регуляризации несобственных задач линейного программирования // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2003. № 30, вып. 6. С. 1–25 (совм. с Д. А. Макаровой, Л. В. Шульц).
90. Фейеровские методы декомпозиции сильно структурированных систем линейных неравенств // Алгоритмы и програм. обеспечение парал. вычислений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. Вып. 7. С. 3–20 (совм. с Л. Д. Поповым, Е. А. Бердниковой).
91. Симметричная двойственность для лексикографической задачи линейного программирования // Экономико-математический энциклопедический словарь. М.: ИНФРА-М, 2003. С. 113–114.
92. Несобственные задачи математического программирования // Экономико-математический энциклопедический словарь. М.: ИНФРА-М, 2003. С. 334–335 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).
93. Распределенные фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 16–32 (совм. с Л. Д. Поповым, Е. А. Бердниковой).
94. Фейеровские процессы: синтез и рандомизация // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С. 58–68.
95. Идентификация штрафных констант в методах точных штрафных функций // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 6. С. 737–739.
96. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 200 с. (совм. с В. В. Васиным).
97. Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Юж.-Урал. гос. ун-та, 2005. 195 с.
98. Прямо-двойственные методы фейеровского типа для задач квадратичного программирования // Оптимизация, управление, интеллект. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. № 1(9). С. 36–46.
99. Прямо-двойственные фейеровские методы для задач квадратичного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 86–97.
100. Direct-dual Fejér methods for problems of quadratic programming // Proc. Steklov Inst. Math.: Dynamical systems: modeling, optimiz., and control. 2006. Suppl. 1. P. S83–S95.
101. Итеративная отделимость непересекающихся многогранников // Тр. Междунар. семинара, посвящ. 60-летию А. Н. Субботина (Екатеринбург, Россия, 22–26 июня 2005 г.). Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2006. Т. 2. С. 16–24.
102. Фейеровские методы сильной отделимости выпуклых полиэдральных множеств // Изв. вузов. Математика. 2006. № 12(535). С. 33–43.
103. Системы линейных неравенств и линейная оптимизация. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2007. 338 с.
104. Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Академия, 2007. 249 с.
105. Замкнутые фейеровские циклы для несовместных систем выпуклых неравенств // Изв. вузов. Математика. 2008. № 1(548). С. 11–19 (совм. с Л. Д. Поповым).
106. Авторские результаты по проблематике математического программирования в ретроспективе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 58–66.
107. Author's results on mathematical programming in retrospect // Proc. Steklov Inst. Math. 2008. Suppl. 2. P. S47–S56.
108. Фейеровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов // Изв. вузов. Математика. 2009. № 1. С. 44–65 (совм. с Л. Д. Поповым).
109. Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications (Inverse and ill-posed problems ser.). Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2009. 155 p. (jointly with V. V. Vasin).

110. Отображения сжатия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 106–115.
111. Contraction mappings // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Suppl. 1. P. S85–S94.
112. Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Юж.-Урал. гос. ун-та, 2009. 199 с.
113. Методы решения систем линейных и выпуклых неравенств, основанные на принципе Фейера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 67–77.
114. Methods for solving systems of linear and convex inequalities based on the Fejér principle // Proc. Steklov Inst. Math. 2011. Suppl. 1. P. S36–S45.
115. Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 83–89 (совм. с Л. Д. Поповым).
116. 2-приближенный алгоритм поиска клики с минимальным весом вершин и ребер // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 134–143 (совм. с Э. Х. Гимади, А. В. Кельмановым, А. В. Пяткиным, М. Ю. Хачаем).
117. 2-approximation algorithm for finding a clique with minimum weight of vertices and edges // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. Suppl. 1. P. S87–S95 (jointly with E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai).

Том 20 № 2 2014

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СО СВЯЗАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ И ТЕРМИНАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова

Рассматривается задача оптимального управления с линейной динамикой на фиксированном отрезке времени. Концам отрезка отвечают терминальные пространства, на декартовом произведении которых сформулирована конечномерная задача оптимизации. Две компоненты решения этой задачи определяют начальное и терминальное условия для управляемой динамики. Динамика в задаче оптимального управления трактуется как ограничение типа равенств. Управления предполагаются ограниченными в норме L_2. Предлагается седловой подход к решению рассматриваемой задачи, основанный на вычислении седловых точек функции Лагранжа. Доказываются его слабая сходимость по управлениям и сильная сходимость по фазовым и сопряженным траекториям, а также терминальным переменным.

Ключевые слова: терминальное управление, краевые задачи, выпуклое программирование, функция Лагранжа, методы решения, сходимость

A. S. Antipin, E. V. Khoroshilova. Optimal control with connected initial and terminal conditions.

An optimal control problem with linear dynamics is considered on a fixed time interval. The ends of the interval correspond to terminal spaces, and a finite-dimensional optimization problem is formulated on the Cartesian product of these spaces. Two components of the solution of this problem define the initial and terminal conditions for the controlled dynamics. The dynamics in the optimal control problem is treated as an equality constraint. The controls are assumed to be bounded in the norm of L_2. A saddle-point method is proposed to solve the problem. The method is based on finding saddle points of the Lagrangian. The weak convergence of the method in controls and its strong convergence in state trajectories, conjugate trajectories, and terminal variables are proved.

Keywords: terminal control, boundary value problems, convex programming, Lagrange function, solution methods, convergence.

1. Постановка задачи

Работа продолжает исследование седловых методов решения краевых задач терминального управления [1–6]. На фиксированном отрезке времени рассматривается линейная динамическая управляемая система

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор траекторий (фазовых переменных), матрицы $D(t)$, $B(t)$, соответственно размерностей $n \times n$, $n \times r$ $(r < n)$, непрерывны. Управления $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^{\mathrm{T}} \in \mathrm{U}$ ограничены по норме L_2^r (интегрально):

$$\mathrm{U} = \left\{ u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1] \;\Big|\; \frac{1}{2}\|u(\cdot)\|^2_{\mathrm{L}_2^r} \le \mathrm{C}^2 \right\}.$$

Для всевозможных управлений из U и заданного $x(t_0)$ система дифференциальных уравнений порождает траектории $x(\cdot)$, правые концы которых $x(t_1)$ описывают терминальное множество достижимости $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$. В рассматриваемом линейном случае и ограниченных в норме L_2^r

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00783) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1).

управлений множество достижимости, вообще говоря, является подпространством $\mathbb{R}^n$ [7, кн. 2, с. 767].

Под решением дифференциальной системы, отвечающим начальному значению $x(t_0)$, понимается любая пара $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathrm{L}_2^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$, удовлетворяющая тождественно условию

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} (D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))d\tau, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

В [7, кн. 1, с. 443] показано, что любому управлению $u(\cdot) \in \mathrm{U}$ в указанной выше линейной дифференциальной системе отвечает единственная траектория $x(\cdot)$ и эта пара удовлетворяет приведенному тождеству, где интеграл понимается в смысле Лебега. В приложениях управление $u(\cdot)$ часто является кусочно-непрерывной функцией. При этом наличие точек разрыва на управлении $u(\cdot)$ никак не сказывается на значениях траектории $x(\cdot)$. Более того, траектория останется без изменения даже в том случае, если изменить значения функции $u(\cdot)$ на множестве меры нуль. Подчеркнем, что при этом траектория $x(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией [8]. Как известно, класс абсолютно непрерывных функций представляет собой линейное многообразие, всюду плотное в $\mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$. В дальнейшем этот класс будем обозначать как $\mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \subset \mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$, где замыкание $\overline{\mathrm{AC}}^n[t_0, t_1] \equiv \mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$. При этом для любой пары функций $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$ выполняется формула Ньютона — Лейбница и соответственно формула интегрирования по частям[2].

Пусть, кроме того, концы $x_0 = x(t_0)$ и $x_1 = x(t_1)$ траектории $x(\cdot)$ удовлетворяют системе линейных ограничений $A_0x_0 + A_1x_1 \le a$, задающей непустой выпуклый многогранник (A_0, A_1 — фиксированные $m \times n$-матрицы, $m < n$, a — известный вектор). На декартовом произведении терминальных пространств определена функция $\varphi(x_0, x_1) = \varphi_0(x_0) + \varphi_1(x_1)$, где скалярные функции $\varphi_0(x_0)$, $\varphi_1(x_1)$ предполагаются выпуклыми и дифференцируемыми.

Имеем задачу оптимального управления: найти управление $u^*(\cdot) \in \mathrm{U}$ и отвечающую ему траекторию $x^*(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$ такие, что левый $x_0^* = x^*(t_0)$ и правый $x_1^* = x^*(t_1)$ концы траектории являются решением конечномерной задачи выпуклого программирования:

$$\begin{cases} (x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \operatorname{Argmin}\{\varphi_0(x_0) + \varphi_1(x_1) \mid A_0x_0 + A_1x_1 \le a, \ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \ x(t_0) = x_0^*, \ x(t_1) = x_1^*, \ x(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1], \ u(\cdot) \in \mathrm{U}\}. \end{cases}$$

То есть оптимальная траектория, взяв начало в точке x_0^* (которая заранее неизвестна и подлежит определению) и подчиняясь управляемой динамике, должна прийти на правом конце в точку x_1^* (которая также неизвестна и определяется в процессе решения), "связав" их. Управлять процессом — значит перевести модель вдоль траектории из одного состояния в другое.

В выпуклом случае целевые функции $\varphi_0(x_0)$, $\varphi_1(x_1)$ можно заменить в точке минимума их линейным приближением. В результате такой линеаризации исходная задача сводится к нахождению неподвижной точки экстремального отображения:

$$\begin{cases} (x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \operatorname{Argmin}\{\langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0 - x_0^* \rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1 - x_1^* \rangle \le 0 \mid \\ A_0x_0 + A_1x_1 \le a, \ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \ x(t_0) = x_0^*, \ x(t_1) = x_1^*, \ x(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1], \ u(\cdot) \in \mathrm{U}\}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Как показано в [7, кн. 2, с. 653], решение задачи $(x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$ существует.

[2] Скалярные произведения и нормы во введенных пространствах определяются соответственно как

$$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), y(t) \rangle dt, \qquad \|x(\cdot)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt,$$

где $\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_1^n x_i(t)y_i(t)$, $|x(t)|^2 = \sum_1^n x_i^2(t)$, $t_0 \le t \le t_1$.

2. Классический лагранжиан и исходная задача

Рассмотренная задача представляет собой задачу терминального управления, сформулированную в гильбертовом пространстве. В теории линейного программирования в конечномерном пространстве известно, что наряду с прямой задачей всегда существует двойственная задача в сопряженном пространстве. Проводя соответствующие аналогии для функциональных пространств, получим в явном виде двойственную задачу для задачи (1.1). С этой целью введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_0, x_1, x(\cdot), u(\cdot); p, \psi(\cdot)) = \langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1\rangle + \langle p, A_0x_0 + A_1x_1 - a\rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle dt, \qquad (2.1)$$

определенную при всех $(x_0, x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$, $(p, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$.[3] Здесь $\Psi^n_2[t_0, t_1]$ — линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из пространства, сопряженного к декартовому произведению пространств прямых переменных. Это множество всюду плотно в $\mathrm{L}^n_2[t_0, t_1]$, т. е. его замыкание по норме $\mathrm{L}^n_2[t_0, t_1]$ совпадает с $\mathrm{L}^n_2[t_0, t_1]$.

Седловая точка $(x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p^*, \psi^*(\cdot))$ функции Лагранжа образована прямыми (x_0^*, x_1^*, $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$) и двойственными $(p^*, \psi^*(\cdot))$ наборами векторов, первые из которых являются решением задачи (1.1). По определению седловая точка удовлетворяет системе

$$\langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0^*\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1^*\rangle + \langle p, A_0x_0^* + A_1x_1^* - a\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t)\Big\rangle dt$$

$$\le \langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0^*\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1^*\rangle + \langle p^*, A_0x_0^* + A_1x_1^* - a\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t)\Big\rangle dt$$

$$\le \langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1\rangle + \langle p^*, A_0x_0 + A_1x_1 - a\rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle dt \qquad (2.2)$$

для всех $(x_0, x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$, $(p, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$.

Согласно теореме, аналогичной теореме Куна — Таккера, но сформулированной для функциональных пространств, если исходная задача (1.1) имеет прямое и двойственное решения, то они образуют седловую точку функции Лагранжа. Используя схему, изложенную в [1], несложно показать, что верно и обратное утверждение: седловая точка функции Лагранжа (2.1) образована прямым и двойственным решениями исходной задачи (1.1).

2.1. Двойственный лагранжиан и двойственная задача

Покажем, что функция Лагранжа в динамических задачах позволяет перейти от исходной задачи в прямом пространстве к двойственной задаче в сопряженном пространстве. Используя формулы перехода к сопряженным матричным операторам и формулу интегрирования по частям на отрезке $[t_0, t_1]$, выпишем сопряженную по отношению к (2.1) функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{T}}(p, \psi(\cdot); x_0, x_1, x(\cdot), u(\cdot)) = \langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}}p + \psi_0, x_0\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}}p - \psi_1, x_1\rangle + \langle -p, a\rangle$$

[3] Для простоты далее вместо $\mathbb{R}^m_+$ будем иногда использовать обозначение $p \ge 0$.

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle D^{\mathrm T}(t)\psi(t)+\frac{d}{dt}\psi(t),x(t)\Big\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm T}(t)\psi(t),u(t)\rangle dt \tag{2.3}$$

для любых $(p,\psi(\cdot))\in\mathbb{R}^m_+\times\Psi^n_2[t_0,t_1]$, $(x_0,x_1,x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{AC}^n[t_0,t_1]\times\mathrm{U}$, где $\psi_0=\psi(t_0)$, $\psi_1=\psi(t_1)$. Прямой и двойственный лагранжианы (2.1) и (2.3) имеют общую седловую точку $(x_0^*,x_1^*,x^*(\cdot),u^*(\cdot);p^*,\psi^*(\cdot))$, удовлетворяющую системе (2.2), которая в сопряженном варианте имеет вид

$$\langle\nabla\varphi_0(x_0^*)+A_0^{\mathrm T}p+\psi_0,x_0^*\rangle+\langle\nabla\varphi_1(x_1^*)+A_1^{\mathrm T}p-\psi_1,x_1^*\rangle+\langle -p,a\rangle$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle D^{\mathrm T}(t)\psi(t)+\frac{d}{dt}\psi(t),x^*(t)\Big\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm T}(t)\psi(t),u^*(t)\rangle dt$$
$$\le\langle\nabla\varphi_0(x_0^*)+A_0^{\mathrm T}p^*+\psi_0^*,x_0^*\rangle+\langle\nabla\varphi_1(x_1^*)+A_1^{\mathrm T}p^*-\psi_1^*,x_1^*\rangle+\langle -p^*,a\rangle$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle D^{\mathrm T}(t)\psi^*(t)+\frac{d}{dt}\psi^*(t),x^*(t)\Big\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm T}(t)\psi^*(t),u^*(t)\rangle dt$$
$$\le\langle\nabla\varphi_0(x_0^*)+A_0^{\mathrm T}p^*+\psi_0^*,x_0\rangle+\langle\nabla\varphi_1(x_1^*)+A_1^{\mathrm T}p^*-\psi_1^*,x_1\rangle+\langle -p^*,a\rangle$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle D^{\mathrm T}(t)\psi^*(t)+\frac{d}{dt}\psi^*(t),x(t)\Big\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm T}(t)\psi^*(t),u(t)\rangle dt \tag{2.4}$$

для всех $(x_0,x_1,x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{AC}^n[t_0,t_1]\times\mathrm{U}$, $(p,\psi(\cdot))\in\mathbb{R}^m_+\times\Psi^n_2[t_0,t_1]$.

Из правого неравенства системы (2.4) имеем

$$\langle\nabla\varphi_0(x_0^*)+A_0^{\mathrm T}p^*+\psi_0^*,x_0^*-x_0\rangle+\langle\nabla\varphi_1(x_1^*)+A_1^{\mathrm T}p^*-\psi_1^*,x_1^*-x_1\rangle$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle D^{\mathrm T}(t)\psi^*(t)+\frac{d}{dt}\psi^*(t),x^*(t)-x(t)\Big\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm T}(t)\psi^*(t),u^*(t)-u(t)\rangle dt\le 0$$

при всех $(x_0,x_1,x(\cdot),u(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{AC}^n[t_0,t_1]\times\mathrm{U}$. В силу независимого изменения каждой из переменных $(x_0,x_1,x(\cdot),u(\cdot))$ в пределах своего допустимого подпространства (множества) последнее неравенство декомпозируется на четыре независимых неравенства

$$\langle\nabla\varphi_0(x_0^*)+A_0^{\mathrm T}p^*+\psi_0^*,x_0^*-x_0\rangle\le 0\ \ (x_0\in\mathbb{R}^n),\quad \langle\nabla\varphi_1(x_1^*)+A_1^{\mathrm T}p^*-\psi_1^*,x_1^*-x_1\rangle\le 0\quad (x_1\in\mathbb{R}^n),$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle D^{\mathrm T}(t)\psi^*(t)+\frac{d}{dt}\psi^*(t),x^*(t)-x(t)\Big\rangle dt\le 0\quad (x(\cdot)\in\mathrm{AC}^n[t_0,t_1]),$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm T}(t)\psi^*(t),u^*(t)-u(t)\rangle dt\le 0\quad (u(\cdot)\in\mathrm{U}).$$

Линейный функционал достигает конечного экстремума на всем подпространстве лишь в случае, когда его градиент обращается в нуль, что приводит к системе задач

$$D^{\mathrm T}(t)\psi^*(t)+\frac{d}{dt}\psi^*(t)=0,\qquad \nabla\varphi_1(x_1^*)+A_1^{\mathrm T}p^*-\psi_1^*=0, \tag{2.5}$$

$$\nabla\varphi_0(x_0^*)+A_0^{\mathrm T}p^*+\psi_0^*=0,\qquad \int_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm T}(t)\psi^*(t),u^*(t)-u(t)\rangle dt\le 0\quad\forall u(\cdot)\in\mathrm{U}. \tag{2.6}$$

Левое неравенство (2.4) с учетом (2.5) и (2.6) перепишем в виде

$$\langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p + \psi_0, x_0^* \rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p - \psi_1, x_1^* \rangle + \langle -p, a \rangle$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t) \Big\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), u^*(t) \rangle dt \le \langle -p^*, a \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) \rangle dt.$$

Рассматривая это неравенство при условии выполнения скалярных ограничений

$$\langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p + \psi_0, x_0^* \rangle = 0, \quad \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p - \psi_1, x_1^* \rangle = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t) \Big\rangle dt = 0,$$

приходим к задаче максимизации скалярной функции

$$\langle -p, a \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), u^*(t) \rangle dt \le \langle -p^*, a \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) \rangle dt,$$

где $p \in \mathbb{R}_+^m,\ \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$ при указанных выше скалярных ограничениях. Объединяя с (2.6), получаем двойственную задачу по отношению к задаче (1.1):

$$\begin{cases} (p^*, \psi^*(\cdot)) \in \operatorname{Argmax}\Big\{ \langle -p, a \rangle + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), u^*(t) \rangle dt \,\Big|\, \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p + \psi_0 = 0, \\ p \in \mathbb{R}_+^m, \quad \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1], \quad D^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \dfrac{d}{dt}\psi(t) = 0, \quad \psi_1 = \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p \Big\}, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \le 0, \quad u(\cdot) \in \mathrm{U}. \end{cases}$$

Прямая и двойственная задачи могут стать основой для разработки широкого семейства седловых методов [1–6].

3. Краевая дифференциальная система

Из левого неравенства (2.2) и правого неравенства (2.4) приходим к краевой задаче

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0^*, \tag{3.1}$$

$$\langle p - p^*, A_0 x_0^* + A_1 x_1^* - a \rangle \le 0, \quad p \ge 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) = 0, \quad \psi_1^* = \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p^*, \tag{3.3}$$

$$\nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p^* + \psi_0^* = 0, \tag{3.4}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \le 0, \quad u(\cdot) \in \mathrm{U}, \tag{3.5}$$

где $x_1^* = x^*(t_1)$. Терминальная краевая система (3.1)–(3.5) была получена, отправляясь от необходимых и достаточных условий для седловой точки функции Лагранжа. Вариационные неравенства этой системы эквивалентны операторным уравнениям с операторами проектирования на соответствующие выпуклые замкнутые множества:

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0^*, \tag{3.6}$$

$$p^* = \pi_+(p^* + \alpha(A_0 x_0^* + A_1 x_1^* - a)), \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) = 0, \quad \psi_1^* = \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p^*, \tag{3.8}$$

$$x_0^* = x_0^* - \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p^* + \psi_0^*), \tag{3.9}$$

$$u^*(t) = \pi_U(u^*(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t)), \tag{3.10}$$

где $\pi_+(\cdot)$, $\pi_U(\cdot)$ — операторы проектирования на положительный ортант пространства $\mathbb{R}^m_+$ и на множество управлений U, $\alpha > 0$.

4. Седловой метод экстраградиентного типа

На основе системы (3.6)–(3.10) построим итерационный процесс (параметр $\alpha > 0$ характеризует величину шага итерации):

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \quad x^k(t_0) = x_0^k, \tag{4.1}$$

$$p^{k+1} = \pi_+(p^k + \alpha(A_0 x_0^k + A_1 x_1^k - a)), \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t) = 0, \quad \psi_1^k = \nabla\varphi_1(x_1^k) + A_1^{\mathrm{T}} p^k, \tag{4.3}$$

$$x_0^{k+1} = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}} p^k + \psi_0^k), \tag{4.4}$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

где $x_1^k = x^k(t_1)$. Напомним, что здесь и в последующих рассуждениях условие трансверсальности в (4.3) выполняется в точках множества достижимости.

Процесс (4.1)–(4.5) относится к методам простой итерации. Однако в случае с седловыми задачами, как известно, методы типа простой итерации, вообще говоря, не сходятся к седловой точке задачи. Поэтому в рассматриваемой седловой ситуации для решения задачи используется седловой экстраградиентный метод, предложенный в [9; 10].

Метод представляет собой управляемый процесс (4.1)–(4.5), каждая итерация которого распадается на два полушага.

1) П р о г н о з н ы й полушаг:

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \quad x^k(t_0) = x_0^k, \tag{4.6}$$

$$\bar{p}^k = \pi_+(p^k + \alpha(A_0 x_0^k + A_1 x_1^k - a)), \tag{4.7}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t) = 0, \quad \psi_1^k = \nabla\varphi_1(x_1^k) + A_1^{\mathrm{T}} p^k, \tag{4.8}$$

$$\bar{x}_0^k = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}} p^k + \psi_0^k), \tag{4.9}$$

$$\bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t)). \tag{4.10}$$

2) О с н о в н о й полушаг:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^k(t) = D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \quad \bar{x}^k(t_0) = \bar{x}_0^k, \tag{4.11}$$

$$p^{k+1} = \pi_+(p^k + \alpha(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a)), \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^k(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t) = 0, \quad \bar{\psi}_1^k = \nabla\varphi_1(\bar{x}_1^k) + A_1^{\mathrm{T}}\bar{p}^k, \tag{4.13}$$

$$x_0^{k+1} = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), \tag{4.14}$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{4.15}$$

Уравнения (4.6), (4.11) и (4.8), (4.13) используются только для вычисления функций $x^k(t)$ и $\bar{x}^k(t)$, $\psi^k(t)$ и $\bar{\psi}^k(t)$, поэтому процесс можно записать в более компактном виде:

$$\bar{p}^k = \pi_+(p^k + \alpha(A_0x_0^k + A_1x_1^k - a)), \quad p^{k+1} = \pi_+(p^k + \alpha(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a)), \tag{4.16}$$

$$\bar{x}_0^k = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}p^k + \psi_0^k), \quad x_0^{k+1} = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), \tag{4.17}$$

$$\bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t)), \quad u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t)). \tag{4.18}$$

Для получения вспомогательных оценок представим операторные уравнения (4.16)–(4.18) в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{p}^k - p^k - \alpha(A_0x_0^k + A_1x_1^k - a), p - \bar{p}^k\rangle \geq 0, \tag{4.19}$$

$$\langle p^{k+1} - p^k - \alpha(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a), p - p^{k+1}\rangle \geq 0, \tag{4.20}$$

$$\langle \bar{x}_0^k - x_0^k + \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}p^k + \psi_0^k), x_0 - \bar{x}_0^k\rangle \geq 0, \tag{4.21}$$

$$\langle x_0^{k+1} - x_0^k + \alpha(\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), x_0 - x_0^{k+1}\rangle \geq 0, \tag{4.22}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t) + \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t), u(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt \geq 0, \tag{4.23}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t) + \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t), u(t) - u^{k+1}(t)\rangle dt \geq 0 \tag{4.24}$$

для всех $p \in \mathbb{R}_+^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathrm{U}$. Из этих неравенств (4.19)–(4.24) следуют оценки

$$|\bar{p}^k - p^{k+1}| \leq \alpha(\|A_0\||x_0^k - \bar{x}_0^k| + \|A_1\||x_1^k - \bar{x}_1^k|), \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} |\bar{x}_0^k - x_0^{k+1}| &\leq \alpha(|\nabla\varphi_0(x_0^k) - \nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k)| + |A_0^{\mathrm{T}}(p^k - \bar{p}^k)| + |\psi_0^k - \bar{\psi}_0^k|) \\ &\leq \alpha(L_0|x_0^k - \bar{x}_0^k| + \|A_0^{\mathrm{T}}\||p^k - \bar{p}^k| + |\psi_0^k - \bar{\psi}_0^k|), \end{aligned}$$

$$\|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\| \leq \alpha\|B^{\mathrm{T}}(t)(\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot))\| \leq \alpha B_{\max}\|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\|, \tag{4.26}$$

где $B_{\max} = \max\|B(t)\|$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, $\alpha > 0$, L_0 — константа Липшица для $\nabla\varphi_0(x_0)$.

Ниже при доказательстве теоремы о сходимости метода понадобятся оценки отклонений векторов $|x^k(t) - \bar{x}^k(t)|$, $|\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)|$, $t \in [t_0, t_1]$ и соответственно $|x_1^k - \bar{x}_1^k|$, $|\psi_1^k - \bar{\psi}_1^k|$. Их можно получить способом, аналогичным рассмотренному в [1]. Так, из уравнений (4.6) и (4.11), применяя лемму Гронуолла [7, кн. 1, с. 472] и неравенство Коши — Буняковского, при каждом t находим

$$|x^k(t) - \bar{x}^k(t)|^2 \leq 2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(B_{\max}^2(t_1 - t_0)\|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + |x_0^k - \bar{x}_0^k|^2), \tag{4.27}$$

откуда при $t = t_1$ получаем оценку отклонения терминальных значений траекторий

$$|x_1^k - \bar{x}_1^k|^2 \leq 2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(B_{\max}^2(t_1 - t_0)\|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + |x_0^k - \bar{x}_0^k|^2). \tag{4.28}$$

Из уравнений (4.6) и (3.1) аналогично получаем оценку

$$|x^k(t) - x^*(t)|^2 \le 2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(B^2_{\max}(t_1-t_0)\|u^k(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2 + |x_0^k - x_0^*|^2). \tag{4.29}$$

Это означает, что ограниченное множество управлений и начальных условий рассматриваемый выше линейный оператор переводит в ограниченное множество траекторий.

Из уравнений (4.8), (4.13) находим аналогичные оценки для сопряженных траекторий:

$$|\psi^k(t) - \bar\psi^k(t)|^2 \le e^{2D_{\max}(t_1-t)}|\psi_1^k - \bar\psi_1^k|^2, \qquad |\psi_0^k - \bar\psi_0^k|^2 \le e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}|\psi_1^k - \bar\psi_1^k|^2,$$

$$|\psi_1^k - \bar\psi_1^k|^2 \le (L_1|x_1^k - \bar x_1^k| + \|A_1^{\mathrm{T}}\||p^k - \bar p^k|)^2,$$

где L_1 — константа Липшица для $\nabla\varphi_1(x_1)$, откуда получаем

$$|\psi_0^k - \bar\psi_0^k|^2 \le 2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(L_1^2|x_1^k - \bar x_1^k|^2 + \|A_1^{\mathrm{T}}\|^2|p^k - \bar p^k|^2), \tag{4.30}$$

$$\|\psi^k(\cdot) - \bar\psi^k(\cdot)\|^2 \le (e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1)/(2D_{\max})(L_1|x_1^k - \bar x_1^k| + \|A_1^{\mathrm{T}}\||p^k - \bar p^k|)^2. \tag{4.31}$$

Аналогично, основываясь на (4.8) и (3.8), доказываем ограниченность сопряженных траекторий:

$$\|\psi^k(\cdot) - \psi^*(\cdot)\|^2 \le (e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1)/(2D_{\max})(L_1|x_1^k - \bar x_1^k| + \|A_1^{\mathrm{T}}\||p^k - p^*|)^2. \tag{4.32}$$

5. Доказательство сходимости метода

Покажем, что процесс (4.6)–(4.15) сходится слабо по управлениям и сильно по прямым и двойственным переменным к одному из решений исходной задачи.

Теорема 5.1. *Если множество решений $(x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p^*, \psi^*(\cdot))$ задачи (3.6)–(3.10) не пусто и принадлежит пространству $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}_2^n[t_0,t_1] \times \mathrm{U} \times \mathbb{R}^m_+ \times \Psi_2^n[t_0,t_1]$, функции $\varphi_0(x_0)$, $\varphi_1(x_1)$ дифференцируемы с градиентами, удовлетворяющими условию Липшица, то последовательность $\{(x_0^k, x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot); p^k, \psi^k(\cdot))\}$, порожденная методом (4.6)–(4.15) с длиной шага α, выбранной из условия $0 < \alpha < \min(1/\gamma_1, 1/\gamma_2, 1/\gamma_3, 1/\gamma_4)$, где γ_i определяются в (5.11)[4], сходится к решению задачи, в том числе слабо — по управлениям, сильно — по траекториям, сопряженным траекториям, а также терминальным переменным. В частности, последовательность $\{|p^k - p^*|^2 + |x_0^k - x_0^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2\}$ монотонно убывает на декартовом произведении $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{L}_2^r[t_0,t_1]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Основные усилия в теореме направлены на получение оценок $|u^k(t) - u^*(t)|^2$, $|p^k - p^*|^2$ и $|x_0^k - x_0^*|^2$.

1. Запишем уравнение (4.13) в виде вариационного неравенства

$$\langle \nabla\varphi_1(\bar x_1^k) + A_1^{\mathrm{T}}\bar p^k - \bar\psi_1^k, x_1^* - \bar x_1^k\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^{\mathrm{T}}(t)\bar\psi^k(t) + \frac{d}{dt}\bar\psi^k(t), x^*(t) - \bar x^k(t)\Big\rangle dt \ge 0.$$

Аналогично поступим с уравнением (3.8):

$$-\langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}}p^* - \psi_1^*, x_1^* - \bar x_1^k\rangle - \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t) - \bar x^k(t)\Big\rangle dt \ge 0.$$

[4]См. доказательство теоремы далее.

Сложим полученные неравенства и, используя формулу интегрирования по частям, преобразуем дифференциальный член левой части:

$$\langle\nabla\varphi_1(\bar{x}_1^k)-\nabla\varphi_1(x_1^*),x_1^*-\bar{x}_1^k\rangle+\langle A_1^{\mathrm{T}}(\bar{p}^k-p^*),x_1^*-\bar{x}_1^k\rangle-\langle\bar{\psi}_1^k-\psi_1^*,x_1^*-\bar{x}_1^k\rangle$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar{\psi}^k(t)-\psi^*(t),D(t)(x^*(t)-\bar{x}^k(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar{x}^k(t))\Big\rangle dt+\langle\bar{\psi}_1^k-\psi_1^*,x_1^*-\bar{x}_1^k\rangle-\langle\bar{\psi}_0^k-\psi_0^*,x_0^*-\bar{x}_0^k\rangle\geq 0.$$

Сокращая подобные члены и учитывая, что градиент выпуклой функции $\varphi_1(x)$ есть монотонный оператор, т.е. $\langle\nabla\varphi_1(y)-\nabla\varphi_1(x),y-x\rangle\geq 0$, $\forall x,\,y\in\mathbb{R}^n$, получим неравенство

$$\langle A_1^{\mathrm{T}}(\bar{p}^k-p^*),x_1^*-\bar{x}_1^k\rangle$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar{\psi}^k(t)-\psi^*(t),D(t)(x^*(t)-\bar{x}^k(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar{x}^k(t))\Big\rangle dt-\langle\bar{\psi}_0^k-\psi_0^*,x_0^*-\bar{x}_0^k\rangle\geq 0.\quad(5.1)$$

2. Получим неравенство относительно переменной p, отвечающей за связанные ограничения. Для этого положим $p=p^{k+1}$ в (4.19): $\langle\bar{p}^k-p^k-\alpha(A_0x_0^k+A_1x_1^k-a),p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle\geq 0$. Добавим и вычтем $\alpha\langle A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle$:

$$\langle\bar{p}^k-p^k,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle+\alpha\langle(A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a)-(A_0x_0^k+A_1x_1^k-a),p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle$$

$$-\alpha\langle A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle\geq 0.$$

Используя оценку, близкую к (4.25), оценим второе слагаемое

$$\langle\bar{p}^k-p^k,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle+\alpha^2\,|(A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a)-(A_0x_0^k+A_1x_1^k-a)|^2$$

$$-\alpha\langle A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle\geq 0.$$

Положим $p=p^*$ в (4.20): $\langle p^{k+1}-p^k,p^*-p^{k+1}\rangle-\alpha\langle A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a,p^*-p^{k+1}\rangle\geq 0$. Сложим полученные неравенства:

$$\langle\bar{p}^k-p^k,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle+\langle p^{k+1}-p^k,p^*-p^{k+1}\rangle$$

$$+\alpha^2\,|(A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a)-(A_0x_0^k+A_1x_1^k-a)|^2-\alpha\langle A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a,p^*-\bar{p}^k\rangle\geq 0.$$

Полагая $p=\bar{p}^k$ в неравенстве (3.2), имеем $\alpha\langle p^*-\bar{p}^k,A_0x_0^*+A_1x_1^*-a\rangle\geq 0$. Суммируем два последних неравенства:

$$\langle\bar{p}^k-p^k,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle+\langle p^{k+1}-p^k,p^*-p^{k+1}\rangle+\alpha^2\,|(A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a)-(A_0x_0^k+A_1x_1^k-a)|^2$$

$$-\alpha\langle A_0(\bar{x}_0^k-x_0^*),p^*-\bar{p}^k\rangle-\alpha\langle A_1(\bar{x}_1^k-x_1^*),p^*-\bar{p}^k\rangle\geq 0.$$

Наконец, сложим полученное неравенство с (5.1), предварительно умножив его на α:

$$\langle\bar{p}^k-p^k,p^{k+1}-\bar{p}^k\rangle+\langle p^{k+1}-p^k,p^*-p^{k+1}\rangle$$

$$+\alpha^2\,|(A_0\bar{x}_0^k+A_1\bar{x}_1^k-a)-(A_0x_0^k+A_1x_1^k-a)|^2-\alpha\langle A_0(\bar{x}_0^k-x_0^*),p^*-\bar{p}^k\rangle-\alpha\langle\bar{\psi}_0^k-\psi_0^*,x_0^*-\bar{x}_0^k\rangle$$

$$+\alpha\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar{\psi}^k(t)-\psi^*(t),D(t)(x^*(t)-\bar{x}^k(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar{x}^k(t))\Big\rangle dt\geq 0.\quad(5.2)$$

3. Продолжим получение оценок. Рассмотрим неравенства относительно управлений. Положим $u(\cdot) = u^{k+1}(\cdot)$ в (4.23): $\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t) + \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt \geq 0$. Добавим и вычтем $\bar{\psi}^k(t)$ под знаком скалярного произведения:

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt - \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)(\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt$$

$$+ \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt \geq 0. \tag{5.3}$$

Положим $u = u^*(\cdot)$ в (4.24)

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t) + \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t)\rangle dt \geq 0. \tag{5.4}$$

Подставляя $u(t) = \bar{u}^k(t)$ в вариационное неравенство (3.4), имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), \bar{u}^k(t) - u^*(t)\rangle dt \geq 0. \tag{5.5}$$

Суммируем (5.3)–(5.5) и (5.2):

$$\langle \bar{p}^k - p^k, p^{k+1} - \bar{p}^k\rangle + \langle p^{k+1} - p^k, p^* - p^{k+1}\rangle$$

$$+ \alpha^2 \left|(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a) - (A_0x_0^k + A_1x_1^k - a)\right|^2 - \alpha\langle A_0(\bar{x}_0^k - x_0^*), p^* - \bar{p}^k\rangle - \alpha\langle \bar{\psi}_0^k - \psi_0^*, x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle$$

$$+ \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t)(x^*(t) - \bar{x}^k(t)) + B(t)(u^*(t) - \bar{u}^k(t)) - \frac{d}{dt}(x^*(t) - \bar{x}^k(t))\right\rangle dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t)\rangle dt$$

$$- \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)(\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt \geq 0. \tag{5.6}$$

4. В силу (3.6) и (4.11) первый из интегралов в (5.6) обнуляется, в результате чего имеем

$$\langle \bar{p}^k - p^k, p^{k+1} - \bar{p}^k\rangle + \langle p^{k+1} - p^k, p^* - p^{k+1}\rangle$$

$$+ \alpha^2 \left|(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a) - (A_0x_0^k + A_1x_1^k - a)\right|^2 - \alpha\langle A_0(\bar{x}_0^k - x_0^*), p^* - \bar{p}^k\rangle - \alpha\langle \bar{\psi}_0^k - \psi_0^*, x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t)\rangle dt$$

$$- \alpha \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)(\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt \geq 0. \tag{5.7}$$

5. Выполним ряд действий, аналогичных сделанным выше, но по отношению к переменной x_0. Для этого положим $x_0 = x_0^{k+1}$ в (4.21): $\langle \bar{x}_0^k - x_0^k + \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}} p^k + \psi_0^k), x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle \geq 0$. Добавим и вычтем $\alpha(\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k)$ под знаком скалярного произведения:

$$\Big\langle \bar{x}_0^k - x_0^k + \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}} p^k + \psi_0^k) - (\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k \Big\rangle$$

$$+ \alpha\big\langle \nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k, x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k \big\rangle \geq 0.$$

Положим $x_0 = x_0^*$ в (4.22): $\langle x_0^{k+1} - x_0^k + \alpha(\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), x_0^* - x_0^{k+1}\rangle \geq 0$. Сложим полученные неравенства:

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x}_0^k - x_0^k, x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle + \langle x_0^{k+1} - x_0^k, x_0^* - x_0^{k+1}\rangle \\ &+ \alpha\Big\langle (\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}} p^k + \psi_0^k) - (\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k \Big\rangle \\ &+ \alpha\big\langle \nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k, x_0^* - \bar{x}_0^k \big\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Перепишем уравнение (3.9) в виде вариационного неравенства, положив в нем $x_0 = \bar{x}_0^k$: $-\alpha\langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p^* + \psi_0^*, x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle \geq 0$. Сложим полученное неравенство с (5.7) и (5.8):

$$\begin{aligned} &\langle \bar{p}^k - p^k, p^{k+1} - \bar{p}^k\rangle + \langle p^{k+1} - p^k, p^* - p^{k+1}\rangle \\ &+ \alpha^2\, |(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a) - (A_0 x_0^k + A_1 x_1^k - a)|^2 - \alpha\langle A_0(\bar{x}_0^k - x_0^*), p^* - \bar{p}^k\rangle - \alpha\langle \bar{\psi}_0^k - \psi_0^*, x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t)\rangle dt \\ &- \alpha\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)(\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt + \langle \bar{x}_0^k - x_0^k, x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle + \langle x_0^{k+1} - x_0^k, x_0^* - x_0^{k+1}\rangle \\ &+ \alpha\langle (\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}} p^k + \psi_0^k) - (\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle \\ &+ \alpha\langle \nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) - \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle + \alpha\langle A_0^{\mathrm{T}}(\bar{p}^k - p^*), x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle + \alpha\langle \bar{\psi}_0^k - \psi_0^*, x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая монотонность градиента $\nabla\varphi_0(x_0)$ в последней строке (отбрасывается отрицательный член $\alpha\langle \nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) - \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0^* - \bar{x}_0^k\rangle$) и приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} &\langle \bar{p}^k - p^k, p^{k+1} - \bar{p}^k\rangle + \langle p^{k+1} - p^k, p^* - p^{k+1}\rangle + \alpha^2\, |(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a) - (A_0 x_0^k + A_1 x_1^k - a)|^2 \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t), u^*(t) - u^{k+1}(t)\rangle dt \\ &- \alpha\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)(\bar{\psi}^k(t) - \psi^k(t)), u^{k+1}(t) - \bar{u}^k(t)\rangle dt + \langle \bar{x}_0^k - x_0^k, x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle + \langle x_0^{k+1} - x_0^k, x_0^* - x_0^{k+1}\rangle \\ &+ \alpha\langle \nabla\varphi_0(x_0^k) - \nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k), x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle + \alpha\langle A_0^{\mathrm{T}}(p^k - \bar{p}^k), x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle + \alpha\langle \psi_0^k - \bar{\psi}_0^k, x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

6. Используя тождество $|y_1 - y_2|^2 = |y_1 - y_3|^2 + 2\langle y_1 - y_3, y_3 - y_2\rangle + |y_3 - y_2|^2$, разложим скалярные произведения из (5.9) в сумму (разность) квадратов:

$$\begin{aligned} &|p^{k+1} - p^k|^2 - |p^{k+1} - \bar{p}^k|^2 - |\bar{p}^k - p^k|^2 + |p^k - p^*|^2 - |p^{k+1} - p^*|^2 - |p^{k+1} - p^k|^2 \\ &+ 2\alpha^2\, |(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a) - (A_0 x_0^k + A_1 x_1^k - a)|^2 \\ &+ \|u^{k+1}(\cdot) - u^k(\cdot)\|^2 - \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 - \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 - \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 \end{aligned}$$

$$-\|u^{k+1}(\cdot)-u^k(\cdot)\|^2-2\alpha\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle B^{\mathrm{T}}(t)(\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt$$

$$+|x_0^{k+1}-x_0^k|^2-|x_0^{k+1}-\bar x_0^k|^2-|\bar x_0^k-x_0^k|^2+|x_0^k-x_0^*|^2-|x_0^{k+1}-x_0^*|^2-|x_0^{k+1}-x_0^k|^2$$
$$+2\alpha\langle\nabla\varphi_0(x_0^k)-\nabla\varphi_0(\bar x_0^k),x_0^{k+1}-\bar x_0^k\rangle+2\alpha\langle A_0^{\mathrm{T}}(p^k-\bar p^k),x_0^{k+1}-\bar x_0^k\rangle+2\alpha\langle\psi_0^k-\bar\psi_0^k,x_0^{k+1}-\bar x_0^k\rangle\geq 0.$$

Используя оценку $2\langle a,b\rangle\leq|a|^2+|b|^2$ и неравенство Коши — Буняковского, оценим седьмое слагаемое и слагаемые в форме скалярных произведений:

$$|p^{k+1}-p^*|^2+|x_0^{k+1}-x_0^*|^2+\|u^{k+1}(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2$$
$$+|p^{k+1}-\bar p^k|^2+|\bar p^k-p^k|^2+|x_0^{k+1}-\bar x_0^k|^2+|\bar x_0^k-x_0^k|^2+\|\bar u^k(\cdot)-u^{k+1}(\cdot)\|^2+\|u^k(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|^2$$
$$-4\alpha^2(\|A_0\|^2|\bar x_0^k-x_0^k|^2+\|A_1\|^2|\bar x_1^k-x_1^k|^2)-2\alpha B_{\max}\|\bar\psi^k(\cdot)-\psi^k(\cdot)\|\|u^{k+1}(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|$$
$$-2\alpha|\nabla\varphi_0(x_0^k)-\nabla\varphi_0(\bar x_0^k)||x_0^{k+1}-\bar x_0^k|-2\alpha||A_0^{\mathrm{T}}|||p^k-\bar p^k||x_0^{k+1}-\bar x_0^k|-2\alpha|\psi_0^k-\bar\psi_0^k||x_0^{k+1}-\bar x_0^k|$$
$$\leq|p^k-p^*|^2+|x_0^k-x_0^*|^2+\|u^k(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2. \tag{5.10}$$

Продолжим оценивать отдельные слагаемые в левой части последнего неравенства.

(i) Используя (4.26) и (4.31), имеем

$$2\alpha B_{\max}\|\bar\psi^k(\cdot)-\psi^k(\cdot)\|\|u^{k+1}(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|\leq 2(\alpha B_{\max})^2\|\bar\psi^k(\cdot)-\psi^k(\cdot)\|^2$$
$$\leq(\alpha B_{\max})^2(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}-1)/D_{\max}(L_1|x_1^k-\bar x_1^k|+\|A_1^{\mathrm{T}}\||p^k-\bar p^k|)^2$$
$$\leq 2(\alpha B_{\max})^2(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}-1)/D_{\max}(L_1^2|x_1^k-\bar x_1^k|^2+\|A_1^{\mathrm{T}}\|^2|p^k-\bar p^k|^2)=\alpha^2d_1|x_1^k-\bar x_1^k|^2+\alpha^2d_2|p^k-\bar p^k|^2,$$

где $d_1=2L_1^2B_{\max}^2(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}-1)/D_{\max}$, $d_2=2\|A_1^{\mathrm{T}}\|^2B_{\max}^2(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}-1)/D_{\max}$.

(ii) В силу условия Липшица и очевидного неравенства $2|a||b|\leq a^2+b^2$ имеем

$$2\alpha|\nabla\varphi_0(x_0^k)-\nabla\varphi_0(\bar x_0^k)||x_0^{k+1}-\bar x_0^k|\leq\alpha L_0(|x_0^k-\bar x_0^k|^2+|x_0^{k+1}-\bar x_0^k|^2),$$
$$2\alpha||A_0^{\mathrm{T}}|||p^k-\bar p^k||x_0^{k+1}-\bar x_0^k|\leq\alpha||A_0^{\mathrm{T}}||(|p^k-\bar p^k|^2+|x_0^{k+1}-\bar x_0^k|^2),$$
$$2\alpha|\psi_0^k-\bar\psi_0^k||x_0^{k+1}-\bar x_0^k|\leq\alpha(|\psi_0^k-\bar\psi_0^k|^2+|x_0^{k+1}-\bar x_0^k|^2).$$

При этом в силу (4.30)

$$|\psi_0^k-\bar\psi_0^k|^2\leq 2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(L_1^2|x_1^k-\bar x_1^k|^2+\|A_1^{\mathrm{T}}\|^2|p^k-\bar p^k|^2)=d_3|x_1^k-\bar x_1^k|^2+d_4|p^k-\bar p^k|^2,$$

где $d_3=2L_1^2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}$, $d_4=2\|A_1^{\mathrm{T}}\|^2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}$. Тогда неравенство (5.10) принимает вид

$$|p^{k+1}-p^*|^2+|x_0^{k+1}-x_0^*|^2+\|u^{k+1}(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2$$
$$+|p^{k+1}-\bar p^k|^2+(1-\alpha^2d_2-\alpha\|A_0^{\mathrm{T}}\|-\alpha d_4)|\bar p^k-p^k|^2+(1-\alpha L_0-\alpha-\alpha\|A_0^{\mathrm{T}}\|)|x_0^{k+1}-\bar x_0^k|^2$$
$$+(1-4\alpha^2\|A_0\|^2-\alpha L_0)|\bar x_0^k-x_0^k|^2+\|\bar u^k(\cdot)-u^{k+1}(\cdot)\|^2+\|u^k(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|^2$$
$$-(4\alpha^2\|A_1\|^2+\alpha^2d_1+\alpha d_3)|\bar x_1^k-x_1^k|^2\leq|p^k-p^*|^2+|x_0^k-x_0^*|^2+\|u^k(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2.$$

Используя оценку (4.28) $|x_1^k-\bar x_1^k|^2\leq 2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(B_{\max}^2(t_1-t_0)\|u^k(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|^2+|x_0^k-\bar x_0^k|^2)=d_5\|u^k(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|^2+d_6|x_0^k-\bar x_0^k|^2$, где $d_5=2B_{\max}^2(t_1-t_0)e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}$, $d_6=2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}$, получим

$$|p^{k+1}-p^*|^2+|x_0^{k+1}-x_0^*|^2+\|u^{k+1}(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2$$
$$+|p^{k+1}-\bar p^k|^2+(1-\alpha\|A_0^{\mathrm{T}}\|-\alpha d_4-\alpha^2d_2)|\bar p^k-p^k|^2+(1-\alpha L_0-\alpha-\alpha\|A_0^{\mathrm{T}}\|)|x_0^{k+1}-\bar x_0^k|^2$$
$$+(1-\alpha(L_0+d_3d_6)-\alpha^2(4\|A_0\|^2+4d_6\|A_1\|^2+d_1d_6))|\bar x_0^k-x_0^k|^2+\|\bar u^k(\cdot)-u^{k+1}(\cdot)\|^2$$
$$+(1-\alpha d_3d_5-\alpha^2(4d_5\|A_1\|^2+d_1d_5))\|u^k(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|^2\leq|p^k-p^*|^2+|x_0^k-x_0^*|^2+\|u^k(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2.$$

Вводя обозначения

$$\gamma_1 = \|A_0^{\mathrm{T}}\| + d_4 + \alpha d_2, \quad \gamma_2 = L_0 + 1 + \|A_0^{\mathrm{T}}\|,$$
$$\gamma_3 = L_0 + d_3 d_6 + \alpha(4\|A_0\|^2 + 4d_6\|A_1\|^2 + d_1 d_6), \quad \gamma_4 = d_3 d_5 + \alpha d_5(4\|A_1\|^2 + d_1), \tag{5.11}$$

приходим к неравенству вида

$$|p^{k+1} - p^*|^2 + |x_0^{k+1} - x_0^*|^2 + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2$$
$$+ |p^{k+1} - \bar{p}^k|^2 + (1 - \alpha\gamma_1)|\bar{p}^k - p^k|^2 + (1 - \alpha\gamma_2)|x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k|^2 + (1 - \alpha\gamma_3)|\bar{x}_0^k - x_0^k|^2$$
$$+ \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 + (1 - \alpha\gamma_4)\|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 \le |p^k - p^*|^2 + |x_0^k - x_0^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2. \tag{5.12}$$

Выбирая значение параметра α из условия

$$0 < \alpha < \min(1/\gamma_1,\, 1/\gamma_2,\, 1/\gamma_3,\, 1/\gamma_4), \tag{5.13}$$

можно обеспечить строгую положительность всех слагаемых в левой части неравенства (5.12). Отбрасывая тогда слева несколько слагаемых, получим

$$|p^{k+1} - p^*|^2 + |x_0^{k+1} - x_0^*|^2 + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 \le |p^k - p^*|^2 + |x_0^k - x_0^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2,$$

т. е. последовательность $\{|p^k - p^*|^2 + |x_0^k - x_0^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2\}$ монотонно убывает на декартовом произведении $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$.

7. Просуммируем неравенство (5.12) от $k = 0$ до $k = N$:

$$|p^{N+1} - p^*|^2 + |x_0^{N+1} - x_0^*|^2 + \|u^{N+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2$$
$$+ \sum_{k=0}^{N} |p^{k+1} - \bar{p}^k|^2 + (1 - \alpha\gamma_1)\sum_{k=0}^{N} |\bar{p}^k - p^k|^2 + (1 - \alpha\gamma_2)\sum_{k=0}^{N} |x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k|^2 + (1 - \alpha\gamma_3)\sum_{k=0}^{N} |\bar{x}_0^k - x_0^k|^2$$
$$+ \sum_{k=0}^{N} \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 + (1 - \alpha\gamma_4)\sum_{k=0}^{N} \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 \le |p^0 - p^*|^2 + |x_0^0 - x_0^*|^2 + \|u^0(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2.$$

Отсюда при условии (5.13) следует ограниченность последовательности при любом N

$$|p^{N+1} - p^*|^2 + |x_0^{N+1} - x_0^*|^2 + \|u^{N+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 \le |p^0 - p^*|^2 + |x_0^0 - x_0^*|^2 + \|u^0(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2, \tag{5.14}$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p^{k+1} - \bar{p}^k|^2 < \infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{p}^k - p^k|^2 < \infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} |x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k|^2 < \infty,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{x}_0^k - x_0^k|^2 < \infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 < \infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|p^{k+1} - \bar{p}^k| \to 0, \quad |\bar{p}^k - p^k| \to 0, \quad |x_0^{k+1} - \bar{x}_0^k| \to 0, \quad |\bar{x}_0^k - x_0^k| \to 0,$$
$$\|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\| \to 0, \quad \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\| \to 0. \tag{5.15}$$

Отсюда по неравенству треугольника получим

$$|p^{k+1} - p^k| \to 0, \quad |x_0^{k+1} - x_0^k| \to 0, \quad \|u^{k+1}(\cdot) - u^k(\cdot)\| \to 0. \tag{5.16}$$

Из (4.27), (4.28) и (4.31) следует, что

$$|x^k(t) - \bar{x}^k(t)| \to 0, \quad |x_1^k - \bar{x}_1^k| \to 0, \quad \|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\| \to 0, \quad k \to \infty. \tag{5.17}$$

Кроме того, из (5.14) следует ограниченность последовательностей

$$|p^k - p^*| \le \mathrm{const}, \quad |x_0^k - x_0^*| \le \mathrm{const}, \quad \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\| \le \mathrm{const}, \tag{5.18}$$

а из (4.29) и (4.32) — ограниченность последовательностей

$$\|x^k(\cdot) - x^*(\cdot)\| \le \mathrm{const}, \quad |x_1^k - x_1^*| \le \mathrm{const}, \quad \|\psi^k(\cdot) - \psi^*(\cdot)\| \le \mathrm{const}. \tag{5.19}$$

8. Поскольку последовательность $\{(x_0^k, x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot); p^k, \psi^k(\cdot))\}$ ограничена на декартовом произведении пространств $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0,t_1] \times \mathrm{U} \times \mathbb{R}^m_+ \times \Psi_2^n[t_0,t_1]$, то она слабо компактна [8]. Это означает, что существуют подпоследовательность $\{(x_0^{k_i}, x_1^{k_i}, x^{k_i}(\cdot), u^{k_i}(\cdot); p^{k_i}, \psi^{k_i}(\cdot))\}$ и точка $(x_0', x_1', x'(\cdot), u'(\cdot); p', \psi'(\cdot))$, которая является ее слабым пределом. В конечномерных пространствах переменных p, x_0, x_1 слабые и сильные (по норме пространства) сходимости совпадают. Все линейные дифференциальные операторы системы (4.6)–(4.15) являются слабо непрерывными [8] и потому допускают переход к слабому пределу. Перейдем в одном из полушагов (пусть для определенности это будет базовый полушаг (4.11)–(4.15)) к слабому пределу по нашей подпоследовательности при $k_i \to \infty$ (с учетом (5.15)–(5.19)), тогда получим

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}x'(t) = D(t)x'(t) + B(t)u'(t), \quad x'(t_0) = x_0', \quad p' = \pi_+(p' + \alpha(A_0x_0' + A_1x_1' - a)),\\ \frac{d}{dt}\psi'(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi'(t) = 0, \;\; \psi_1' = \nabla\varphi_1(x_1') + A_1^{\mathrm{T}}p', \;\; x_0' = x_0' - \alpha(\nabla\varphi_0(x_0') + A_0^{\mathrm{T}}p' + \psi_0').\end{gathered} \tag{5.20}$$

Обоснуем теперь возможность предельного перехода в уравнении (4.15) (или (4.10)). Это уравнение эквивалентно задаче минимизации квадратичной функции на шаре

$$u^{k+1}(\cdot) = \mathrm{argmin}\left\{\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}|u(t) - (u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t))|^2 dt \;\middle|\; \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}|u(t)|^2dt \le \mathrm{C}^2, \; u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0,t_1]\right\},$$

или

$$u^{k+1}(\cdot) = \mathrm{argmin}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{1}{2}|u(t) - u^k(t)|^2 + \alpha\langle B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t), u(t) - u^k(t)\rangle\Big)dt \;\middle|\; \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}|u(t)|^2dt \le \mathrm{C}^2, \; u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0,t_1]\right\}. \tag{5.21}$$

Полученная задача, в свою очередь, порождает вариационное неравенство (4.24), которое выступает как необходимое и достаточное условие оптимума. Все перечисленные здесь задачи эквивалентны, и каждая из них реализует оператор проектирования вектора $u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t)$ на шар $1/2\,\|u(\cdot)\|^2_{L_2^r} \le \mathrm{C}^2$. Точка минимума $u^{k+1}(\cdot)$ этой задачи и нормаль λ^{k+1} ее опорной плоскости в этой точке образуют седловую точку функции Лагранжа задачи (5.21)

$$L(\lambda, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{1}{2}|u(t) - u^k(t)|^2 + \alpha\langle B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t), u(t)\rangle\Big)dt + \lambda\bigg(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}|u(t)|^2dt - \mathrm{C}^2\bigg)$$

для всех $\lambda \ge 0$, $u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0,t_1]$. Седловая точка функции Лагранжа по определению удовлетворяет системе седловых неравенств

$$L(\lambda, u^{k+1}(\cdot)) \le L(\lambda^{k+1}, u^{k+1}(\cdot)) \le L(\lambda^{k+1}, u(\cdot)) \tag{5.22}$$

$\forall\lambda \ge 0$, $u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0,t_1]$. Из левого неравенства имеем $(\lambda - \lambda^{k+1})(1/2\int_{t_0}^{t_1}|u^{k+1}(t)|^2dt - \mathrm{C}^2) \le 0$. Отсюда получаем, что $1/2\int_{t_0}^{t_1}|u^{k+1}(t)|^2dt = \mathrm{C}^2$, т.е. квадратичный функционал достигает минимума на границе шара. Скалярное ограничение задачи (5.21) удовлетворяет условию регулярности Слейтера, например, при $u(\cdot) \equiv 0$. Подставляя $u(\cdot) \equiv 0$ и $1/2 \int_{t_0}^{t_1} |u^{k+1}(t)|^2 dt = \mathrm{C}^2$ в правое неравенство (5.22), имеем оценку

$$0 < \lambda^{k+1}\mathrm{C}^2 \le -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{1}{2}|u^{k+1}(t) - u^k(t)|^2 + \alpha\langle B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t), u^{k+1}(t)\rangle\Big)dt + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} |u^k(t)|^2 dt.$$

В силу ограниченности последовательностей $\{u^k(\cdot)\}$ и $\{\bar{\psi}^k(\cdot)\}$ (см. (5.15)–(5.19)) правая часть полученной оценки ограничена: $0 < \lambda^{k+1}\mathrm{C}^2 \le \mathrm{const}$. Отсюда следует, что последовательность $\{\lambda^k\}$ также ограничена для всех $k \to \infty$, а значит, у нее существует предельная точка $\lambda^{'}$.

Правое неравенство системы (5.22) представляет собой задачу минимизации квадратичной функции на всем пространстве $\mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$, поэтому в точке минимума ее градиент равен нулю:

$$u^{k+1}(t) - u^k(t) + \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t) + \lambda^{k+1}u^{k+1}(t) = 0, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Переходя в этом уравнении при $k = k_i \to \infty$ к слабому пределу для любого фиксированного t, с учетом (5.15)–(5.19) получим $\alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^{'}(t) + \lambda^{'}u^{'}(t) = 0$. Это уравнение есть необходимое и достаточное условие минимума следующей задачи квадратичной оптимизации:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \alpha\langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi'(t), u'(t)\rangle dt + \lambda'\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} |u'(t)|^2 dt - \mathrm{C}^2\Bigg) \le \int\limits_{t_0}^{t_1} \alpha\langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi'(t), u(t)\rangle dt + \lambda'\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} |u(t)|^2 dt - \mathrm{C}^2\Bigg)$$

для всех $u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$. Последнюю задачу можно также переписать в форме задачи минимизации линейного функционала на шаре

$$u'(\cdot) = \mathrm{argmin}\Bigg\{\int\limits_{t_0}^{t_1} \alpha\langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi'(t), u(t)\rangle dt \;\Bigg|\; \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} |u(t)|^2 dt \le \mathrm{C}^2,\ u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]\Bigg\}.$$

Это эквивалентно неравенству $\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi'(t), u'(t) - u(t)\rangle dt \le 0$ для всех $u(\cdot) \in \mathrm{U}$, которое, в свою очередь, эквивалентно уравнению (см. (3.10))

$$u'(t) = \pi_U(u'(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi'(t)). \tag{5.23}$$

Таким образом, уравнение (4.15) допускает переход к слабому пределу в форме (5.23) по подпоследовательности $\{u^{k_i}\}$, $i \to \infty$. Если (5.23) добавить к системе (5.20), то получим полную систему, которая является предельной для (4.6)–(4.15) при $k_i \to \infty$. То есть последовательность (4.6)–(4.15) имеет слабый предел, который является решением системы (3.6)–(3.10). Это означает, что $(x'_0, x'_1, x'(\cdot), u'(\cdot); p', \psi'(\cdot)) = (x^*_0, x^*_1, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p^*, \psi^*(\cdot))$.

Теорема доказана.

6. Заключение

В данной работе задача оптимального управления трактуется как седловая задача. Система (3.1)–(3.5), полученная из системы седловых неравенств функции Лагранжа, представляет собой необходимое, а в выпуклом случае и достаточное условие решения задачи в форме принципа Лагранжа (седлового принципа). На основе этой системы сформулирован седловой процесс, доказана его слабая сходимость к седловой точке функции Лагранжа по управлениям. В [7, кн. 2, с. 910] показано, что по переменным $(x(\cdot), \psi(\cdot))$ сходимость будет сильной, т. е. по норме пространства $\mathrm{L}_2^n[t_0, t_1]$. В пространстве конечномерных переменных сходимость также сильная. Осталось отметить, что по переменным $(p, x_0, u(\cdot))$ процесс сходится монотонно по норме прямого произведения пространств этих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антипин А. С., Хорошилова Е. В.** Линейное программирование и динамика // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 7–25.
2. **Антипин А. С., Васильев Ф. П., Хорошилова Е. В.** Экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Вестн. Моск. ун-та. 2010. № 3. С. 18–23. (Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика.)
3. **Васильев Ф. П., Хорошилова Е. В., Антипин А. С.** Регуляризованный экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 27–37.
4. **Хорошилова Е. В.** Экстраградиентный метод в задаче оптимального управления с терминальными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 117–133.
5. **Khoroshilova Elena V.** Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function // Optim. Lett. 2013. Vol. 7, no. 6. P. 1193–1214.
6. **Антипин А. С.** Метод модифицированной функции Лагранжа для задач оптимального управления со свободным правым концом // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2011. Т. 4, № 2. С. 27–44.
7. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
8. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. 552 с.
9. **Корпелевич Г. М.** Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и мат. методы. 1976. Т. 12, вып. 6. С. 747–756.
10. **Антипин А. С.** Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа // Экономика и мат. методы. 1977. Т. 13, вып. 3. С. 560–565.

Поступила 19.01.2014

Антипин Анатолий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: asantip@yandex.ru

Хорошилова Елена Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: khorelena@gmail.com

Том 20 № 2 2014

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ 2-МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ π-РАЗЛОЖИМЫ[1]

В. А. Белоногов

Пусть π — произвольное множество простых чисел. Очень широким обобщением понятия нильпотентной группы является понятие π-разложимой группы, т. е. группы, являющейся прямым произведением π-группы и π'-группы. В статье получено описание конечных не π-разложимых групп, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы. Доказательство использует недавние результаты автора, связанные с понятием контроля простого спектра конечной простой группы. Конечные ненильпотентные группы, все 2-максимальные подгруппы которых нильпотентны, были изучены З. Янко в 1962 г. в случае неразрешимых групп и автором в 1968 г. в случае разрешимых групп.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, π-разложимая группа, максимальная подгруппа, контроль простого спектра группы.

V. A. Belonogov. Finite groups in which all 2-maximal subgroups are π-decomposable.

Let π is a set of prime numbers. A very broad generalization of notion of nilpotent group is the notion of π-decomposable group, i. e the direct product of π-group and π'-group. In the paper, the description of the finite non-π-decomposable groups in which all 2-maximal subgroups are π-decomposable is obtained. The proof used the author's results connected with the notion of control the prime spectrum of finite simple groups. The finite nonnilpotent groups in which all 2-maximal subgroups are nilpotent was studied by Z. Janko in 1962 in case of nonsolvable groups and the author in 1968 in case of solvable groups.

Keywords: finite group, simple group, π-decomposable group, maximal subgroup, control of prime spectrum of group.

Введение

Конечные группы, все максимальные подгруппы которых нильпотентны, описаны в знаменитой работе О. Ю. Шмидта [1]. Эти группы называются *группами Шмидта.* 2-максимальной подгруппой группы называется максимальная подгруппа максимальной подгруппы этой группы.

Конечные неразрешимые группы, все 2-максимальные подгруппы которых нильпотентны, были изучены З. Янко в [2]; имеются лишь две такие группы: $SL_2(5)$ и A_5. Конечные разрешимые группы, все 2-максимальные подгруппы которых нильпотентны, описаны в работе автора [3].

Очень широким обобщением понятия нильпотентной группы является понятие π-разложимой группы. Пусть π — произвольное множество простых чисел. Группа называется *π-разложимой* (или (π,π')-разложимой), если она является прямым произведением π-группы и π'-группы. Не π-разложимую группу называют также *π-неразложимой.*

В статье автора [4] было доказано, что конечная не π-разложимая группа G, все максимальные подгруппы которой π-разложимы и факторгруппа $G/\Phi(G)$ которой непроста, является группой Шмидта. С помощью результата З. Арада и Д. Чиллага [5] можно исключить предположение о непростоте группы $G/\Phi(G)$ в предыдущем предложении. В итоге получается следующее

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Предложение 1. *Пусть π — множество простых чисел. Для конечной π-неразложимой группы G равносильны условия*:

(1) *все максимальные подгруппы группы G π-разложимы*;

(2) *G — группа Шмидта.*

Независимое доказательство этого предложения дано автором в [6] (см. предложение 2), где использована новая идея, связанная с введённым там понятием контроля простого спектра группы, которое будет приведено ниже.

В настоящей статье доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная простая группа и π — множество простых чисел. Следующие утверждения равносильны*:

(A) *группа G не π-разложима, а все её 2-максимальные подгруппы π-разложимы*;

(B) *выполнено одно из следующих условий* (*где $\alpha(G)$ обозначает то из множеств $\pi\cap\pi(G)$ и $\pi'\cap\pi(G)$, которое не содержит число* 2):

(1) *$G \simeq A_r$, где либо $r = 5$ и $\varnothing \neq \alpha(G)(\subseteq \{3,5\})$, либо r и $(r-1)/2$ — простые числа, $r \notin \{5,7,11,23\}$ и $\alpha(G) = \{r\}$*;

(2) *$G \simeq PSL_2(q)$, $q > 5$, $d := (2, q-1)$, и верно одно из условий*:

(2a) *$q \in \{7,11\}$ и $\alpha(G) = \{q\}$*;

(2b) *$q > 11$, $(q+1)/d =: r$ — простое число и $\alpha(G) = \{r\}$*;

(2c) *$q > 11$, $(q-1)/d =: r$ — простое число и $\varnothing \neq \alpha(G) \subseteq \{p,r\}$, где $\{p\} = \pi(q)$*;

(3) *$G \simeq PSL_r(q)$, где числа r и $s := t/(t, q-1)$ — нечётные простые числа при $t = (q^r-1)/(q-1)$, и $\alpha(G) = \{s\}$*;

(4) *$G \simeq PSU_r(q)$, где числа r и $s := t/(t, q+1)$ — нечётные простые числа при $t = (q^r+1)/(q+1)$, и $\alpha(G) = \{s\}$*;

(5) *G изоморфна группе Матье M_{23} с $\alpha(G) = \{23\}$ или Бэби-монстру F_2 с $\alpha(G) = \{47\}$.*

З а м е ч а н и е. Отметим, что в утверждении (B) теоремы 1, как правило, $|\alpha(G)| = 1$. Единственные исключения встречаются в условии (1) с возможностью $\alpha(G) = \{3,5\}$ при $G \simeq A_5$ и в условии (2c) с возможностью $\alpha(G) = \{p,r\}$ при $p > 2$.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа и π — множество простых чисел. Следующие утверждения равносильны*:

(A) *группа G не π-разложима, а все её 2-максимальные подгруппы π-разложимы*;

(B) *выполнено одно из условий*:

($B1$) *$G/\Phi(G)$ изоморфна одной из простых групп, перечисленных в условиях* (1)–(5) *теоремы* 1, *и $\alpha(G) = \alpha(G/\Phi(G))$ в обозначениях теоремы* 1;

($B2$) *группа G разрешима с $|\pi(G)| \in \{2,3\}$ и выполнено одно из условий* (1)–(9) *предложения* 4.1 (*см. разд.* 4).

Теорема 2 легко вытекает из теоремы 1 и [4, теорема 3], где получено подробное описание разрешимых групп G из теоремы 2 с указанием соответствующих множеств π. Это описание приведено в предложении 4.1 в разд. 4. Таким образом, теоремы 1, 2 (с предложением 4.1) дают полное описание всех пар (G,π), где π — множество простых чисел и G — конечная π-неразложимая группа, все 2-максимальные подгруппы которой π-разложимы.

Доказательство теоремы 1 основывается на результатах статьи автора [6] (см. предложения 1.1–1.3 ниже), использующих следующее введённое в ней понятие контроля простого спектра группы.

Пусть G — конечная группа. Множество $\pi(G)$ всех простых делителей её порядка будем называть (следуя фольклору) *простым спектром* группы G. Скажем, что секции $H_1,\ldots,H_m$ группы G *контролируют простой спектр группы* G (или *контролируют* $\pi(G)$), если

$$\pi(H_1)\cup\ldots\cup\pi(H_m) = \pi(G).$$

В этой ситуации можно сказать также, что множество $\{H_1,\ldots,H_m\}$ *контролирует* $\pi(G)$.

Используемые далее обозначения, в основном, стандартны (см., например, [7–9]). В частности, *секция* группы G есть гомоморфный образ некоторой её подгруппы; $\pi(n)$ есть множество всех простых делителей натурального числа n; $\pi(G)$ есть множество всех простых делителей порядка группы G; если π есть множество простых чисел, то π' есть множество всех простых чисел, не содержащихся в π; π-холлова подгруппа группы G — это π-подгруппа группы G, индекс которой в G является π'-числом; запись $A := B$ (читается "A по определению равно B") означает, что A есть обозначение для B; запись $B =: A$ равносильна записи $A := B$; $\dot\cup$ — знак объединения попарно непересекающихся множеств. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n.

Запись $G \doteq A.B$ (читается "G имеет тип $A.B$" или "G есть группа типа $A.B$") означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$. В правой части может быть большее число "множителей". Например, запись $G \doteq A.B \leftthreetimes C.D$ означает $G \doteq ((A.B) \leftthreetimes C).D$ (скобки "привязаны" к левой стороне). (В Атласе [10] и многих других работах в подобных обозначениях вместо $\leftthreetimes$ используется знак $:$.)

Следуя [11], *группой типа A* назовём неабелеву группу вида $G = Q \leftthreetimes P$, где P — подгруппа простого порядка p, максимальная в G, а $Q \simeq E_{q^b}$, где q — простое число и b есть показатель числа q по модулю p. (Лемма 1.2 ниже позволяет определить группы типа A как конечные группы, являющиеся одновременно группами Шмидта и группами Фробениуса.)

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи было сделано в [12].

1. Предварительные результаты

В статье [6] доказаны следующие три результата (теоремы 1–3) о контроле простого спектра конечной простой группы. В п. (2а) предложения 1.1 исправлена опечатка, допущенная в [6, теорема 1], где вместо E_q стояло Z_q. Отметим также, что поправка к таблице максимальных подгрупп группы F_1, сделанная в [13], добавляющая в эту таблицу "маленькую" группу, изоморфную $L_2(41)$, очевидно, не влияет на справедливость п. (2б) в [6, теорема 3].

Предложение 1.1. *Пусть G — конечная знакопеременная или классическая простая группа. Тогда существует пара секций X и Y собственных подгрупп из G такая, что $\pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(G)$ (допускается равенство $X = Y$). Более того, секции X и Y можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой, группой Фробениуса или (в одном случае) диэдральной группой. Ниже указаны примеры таких секций X, Y в G:*

(1) *если $G \simeq A_n$, где $n \geq 5$, то*

(а) *при непростом n $X = Y \simeq A_{n-1}$;*

(б) *при простом n $X \simeq A_{n-1}$ и $Y \simeq N_G(P) \doteq P \leftthreetimes Z_{(n-1)/2}$, где $|P| = n$ (группа Фробениуса);*

(2) *если $G \simeq PSL_n(q)$, где $n \geq 2$ и $(n,q) \notin \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,9),(4,2)\}$, то*

(а) *при $n = 2$ $X \simeq D_{2(q+1)/(2,q+1)}$, $Y \doteq E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/(2,q-1)}$ (группа Фробениуса);*

(б) *при непростом $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_m(q^r)$, где $n = mr$ и r — простое число;*

(в) *при простом $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$ и $Y \doteq Z_{t/(t,q-1)} \leftthreetimes Z_n$, где $t = (q^n-1)/(q-1)$ (группа Фробениуса);*

(3) *если $G \simeq PSU_n(q)$, где $n \geq 3$ и $(n,q) \neq (3,2)$, то*

(а) *при чётном n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_{n/2}(q^2)$;*

(б) *при нечётном непростом n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_m(q^r)$, где $n = mr$ и r — простое число;*

(в) *при нечётном простом n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \doteq Z_{t/(t,q+1)} \leftthreetimes Z_n$, где $t = (q^n+1)/(q+1)$ (группа Фробениуса);*

(4) *если $G \simeq PSp_{2n}(q)$, где $n \geq 2$ и $(n,q) \neq (2,2)$, то $X \simeq PSp_{2n-2}(q)$ и $Y \simeq PSp_2(q^n)$;*

при $n = 2$ $\pi(G) = \pi(Y)$;

(5) *если* $G \simeq P\Omega_{2n+1}(q)$, *где* $n \geq 3$ *и* q *нечётно, то* $X \simeq P\Omega^+_{2n}(q)$ *и* $Y \simeq P\Omega^-_{2n}(q)$;
при чётном n $\pi(G) = \pi(Y)$;

(6) *если* $G \simeq P\Omega^+_{2n}(q)$, *где* $n \geq 4$, *то* $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$ *и* $Y \simeq PSL_n(q)$;
при чётном n $\pi(G) = \pi(X)$;

(7) *если* $G \simeq P\Omega^-_{2n}(q)$, *где* $n \geq 4$, *то*
(а) *при нечётном* n $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_n(q)$;
(б) *при чётном* $n = 2m$ $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq P\Omega^-_{2m}(q^2)$.

Предложение 1.2. *Пусть* G — *конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда существует пятёрка секций* X, Y, Z, V, W *собственных подгрупп группы* G *(среди которых могут быть равные) такая, что* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$. *Более того, эти секции можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой или группой Фробениуса. Ниже указаны примеры таких секций в* G:

(1) *если* $G \simeq Sz(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ *(все — группы Фробениуса)*;

(2) *если* $G \simeq G_2(q)$ *с* $q > 2$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq SL_3(q)$ *и* $Y \simeq SU_3(q)$;

(3) *если* $G \simeq {}^2G_2(q)$ *с* $q = 3^{2n+1} \geq 27$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq PSL_2(q)$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ *(Y, Z — группы Фробениуса)*;

(4) *если* $G \simeq {}^3D_4(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq SL_2(q^3)$ *(или* $G_2(q)$*) и* $Y \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$ *(группа Фробениуса)*;

(5) *если* $G \simeq F_4(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq \Omega_9(q)$ *и* $Y \simeq {}^3D_4(q)$;

(6) *если* $G \simeq {}^2F_4(q)$ *с* $q = 2^{2n+1} \geq 8$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, *где* $X \simeq Sz(q)$ *(или* $Sp_4(q)$*)*, $Y \simeq SU_3(q)$, $Z \doteq Z_{q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ *и* $V \doteq Z_{q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ *(Z, V — группы Фробениуса)*;

(6a) *если* $G \simeq {}^2F_4(2)'$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq PSL_2(25)$;

(7) *если* $G = E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSL_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^+_{10}(q)$;

(8) *если* $G \simeq {}^2E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^-_{10}(q)$;

(9) *если* $G \simeq E_7(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq E_6(q)$, $Y \simeq {}^2E_6(q)$, $Z \simeq PSL_2(q^7)$;

(10) *если* $G \simeq E_8(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, *где* $X \simeq E_7(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^4)$, $Z \simeq PSU_5(q^2)$, $V \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{30}$ *и* $W \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{30}$, *где* $a = q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1$ *и* $b = q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1$ *(V, W — группы Фробениуса)*.

Предложение 1.3. *Пусть* G — *спорадическая простая группа. Тогда справедливы следующие утверждения, где* X, Y, Z, V, W *есть некоторые секции собственных подгрупп группы* G :

(1) *если* $G \simeq M_{11}$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq PSL_2(11)$;

(2) *если* $G \simeq M_{12}$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq M_{11}$;

(3) *если* $G \simeq M_{22}$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq PSL_2(11)$ *и* $Y \simeq A_7$;

(4) *если* $G \simeq M_{23}$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq M_{22}$ *(или* A_7*) и* $Y \doteq Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$ *(группа Фробениуса)*;

(5) *если* $G \simeq M_{24}$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq M_{23}$;

(6) *если* $G \simeq J_1$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq PSL_2(11)$, $Y \doteq Z_7 \leftthreetimes Z_6$ *и* $Z \doteq Z_{19} \leftthreetimes Z_6$ *(Y и Z — группы Фробениуса)*;

(7) *если* $G \simeq J_2$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq PSL_2(7)$ *и* $Y \simeq A_5$;

(8) *если* $G \simeq J_3$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq PSL_2(17)$ *и* $Y \simeq PSL_2(19)$;

(9) *если* $G \simeq J_4$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, *где* $X \simeq L_2(23)$ *(или* M_{24}*)*, $Y \simeq PSL_2(32)$ *(или* $PSL_5(2)$*)*, $Z \simeq PSU_3(11)$, $V \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$ *и* $W \doteq Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$ *(V и W — группы Фробениуса)*;

(10) *если* $G \simeq HS$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq M_{22}$;

(11) *если* $G \simeq He$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq PSp_4(4)$ *и* $Y \simeq A_7$;

(12) *если* $G \simeq Mc$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq M_{22}$;

(13) *если* $G \simeq Suz$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq G_2(4)$, $Y \simeq M_{11}$ (*или* $Z_{11} \leftthreetimes Z_{10}$);

(14) *если* $G \simeq Ly$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq G_2(5)$, $Y \doteq Z_{37} \leftthreetimes Z_{18}$ *и* $Z \doteq Z_{67} \leftthreetimes Z_{22}$ (Y *и* Z — *группы Фробениуса*);

(15) *если* $G \simeq Ru$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq PSL_2(29)$ *и* $Y \simeq Sz(8)$;

(16) *если* $G \simeq O'N$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq J_1$ *и* $Y \simeq PSL_2(31)$;

(17) *если* $G \simeq Co_3$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq M_{23}$;

(18) *если* $G \simeq Co_2$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq M_{23}$;

(19) *если* $G \simeq Co_1$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq Co_2$ *и* $Y \simeq Suz$;

(20) *если* $G \simeq Fi_{22}$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq M_{22}$ *и* $Y \simeq \Omega_7(3)$;

(21) *если* $G \simeq Fi_{23}$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq Fi_{22}$, $Y \simeq Sp_8(2)$ *и* $Z \simeq M_{23}$;

(22) *если* $G \simeq Fi'_{24}$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq Fi_{23}$ *и* $Y \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{14}$ (*группа Фробениуса*);

(23) *если* $G \simeq F_5\,(= HN)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq A_{12}$ *и* $Y \simeq PSU_3(8)$;

(24) *если* $G \simeq F_3\,(= Th)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq PSL_5(2)$, $Y \simeq PSL_2(19)$ *и* $Z \simeq PSL_3(3)$;

(25) *если* $G \simeq F_2\,(= B)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq Fi_{23}$, $Y \simeq F_3$, $Z \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$ (*группа Фробениуса*);

(26) *если* $G \simeq F_1\,(= M)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, *где* $X \simeq F_2$, $Y \simeq PSL_2(59)$, $Z \simeq PSL_2(71)$, $V \simeq \Omega_8^-(3)$ (*или* $V \doteq Z_{41} \leftthreetimes Z_{40}$ (*группа Фробениуса*)).

В каждом из утверждений (1)–(26) *выбрано минимальное число секций собственных подгрупп группы* G, *контролирующих её простой спектр, и каждая из этих секций является либо простой неабелевой группой, либо группой Фробениуса.*

Далее нам потребуются следующие четыре леммы. Первая следует из теоремы работы [1] (в её доказательстве можно использовать [14]), а из неё непосредственно получаются леммы 1.2 и 1.3.

Лемма 1.1. *Пусть* G — *группа Шмидта. Тогда*

(1) $G = Q \leftthreetimes \langle a \rangle$, $\langle a \rangle \ntrianglelefteq G$, $|Q| = q^\beta$, $|\langle a \rangle| = p^\alpha$, *где* p, q — *различные простые числа и* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$;

(2) G *имеет точно два класса сопряжённых максимальных подгрупп; их представители:* $Q \times \langle a^p \rangle$ *и* $Q' \times \langle a \rangle$;

(3) $\Phi(G) = Z(G) = Q' \times \langle a^p \rangle$;

(4) $G/\Phi(G)$ — *группа типа А.*

Лемма 1.2. *Следующие условия конечной группы* G *равносильны*:

(1) G *является одновременно группой Шмидта и группой Фробениуса*;

(2) G — *группа типа А.*

Отсюда, в частности, следует, что в группе типа A каждый неединичный элемент имеет простой порядок.

Лемма 1.3. *Диэдральная группа порядка* $2n$ *является группой Шмидта если и только если* n *есть простое нечётное число.*

Из [15, табл. 8.1] (см. также [16, разд. 2.1]) и [7, лемма 15.1.1] непосредственно вытекает следующее утверждение (в каждом из условий (1)–(8) после слова “если” записано необходимое и достаточное условие существования указанной максимальной подгруппы, под *классом* понимается класс сопряжённых подгрупп в G).

Лемма 1.4. *Пусть* $G = PSL_2(q)$, *где* $q = p^a$, p — *простое число*, $a \in \mathbb{N}$, *и* $d := (2, q-1)$. *Тогда любая максимальная подгруппа группы* G *имеет строение, указанное в следующем списке*:

(1) $E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$ — *группа Фробениуса* (*всегда существует*, 1 *класс*);

(2) $D_{2(q-1)/d}$, *если* $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$ (1 *класс*);

(3) $D_{2(q+1)/d}$, *если* $q \notin \{7, 9\}$ (1 *класс*);

(4) $PSL_2(q_0)$, *если* $q = q_0^r$, *где* $q_0 \mid q$, $q_0 \neq 2$, r *— простое, и* r *нечётно при нечётном* q (1 *класс при каждом* r);

(5) $PGL_2(q_0)$, *если* q *нечётно и* $q = q_0^2$, $q_0 \mid q$ (2 *класса*);

(6) S_4, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod 8$ (2 *класса*);

(7) A_4, *если* $q = p \equiv \pm 3, 5, \pm 13 \pmod{40}$ (1 *класс*);

(8) A_5, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ *или* $q = p^2$, *где* $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$ (2 *класса*).

Заметим, что в случаях (5)–(8) число q нечётно.

Из леммы 1.4 можно вывести, что группа $PSL_2(q)$ имеет точно 3 класса максимальных подгрупп если и только если $q = 7$ или $q = 2^r$, где r — простое число. Отметим, что имеется более общий результат [17, теорема 1]: конечная неразрешимая группа G имеет точно 3 класса максимальных подгрупп если и только если $G/\Phi(G)$ изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.

2. Доказательство теоремы 1. Часть 1

Всюду в этом разделе G — конечная простая неабелева группа, причём для некоторого множества π простых чисел все 2-максимальные подгруппы группы G π-разложимы, а сама группа G не является π-разложимой, т. е. для G и π выполнено утверждение (A) теоремы 1.

Здесь мы получим некоторые предварительные результаты для доказательства утверждения $(A) \Rightarrow (B)$. В частности, в лемме 2.4 будет существенно ограничено множество возможных типов простых групп G, удовлетворяющих утверждению (A). Для каждой такой G в следующем разделе мы докажем равносильность условий (A) и (B).

Согласно предложению 1 каждая максимальная подгруппа группы G либо π-разложима, либо является группой Шмидта.

Пусть $\mathcal{M}$ есть множество всех максимальных подгрупп группы G, $\mathcal{S}$ — множество всех максимальных подгрупп группы G, являющихся группами Шмидта, и $\mathcal{P}$ — множество всех π-разложимых максимальных подгрупп группы G, не являющихся группами Шмидта. Тогда

$$\mathcal{M} = \mathcal{S} \,\dot\cup\, \mathcal{P} \quad \text{и} \quad (\text{по предложению 1}) \quad \mathcal{S} \neq \varnothing.$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$2 \in \pi, \quad \text{и полагаем} \quad \beta(G) := \pi \cap \pi(G) \quad \text{и} \quad \alpha(G) := \pi' \cap \pi(G) \ (\text{как в теореме 1}).$$

Таким образом, $\pi(G) = \alpha(G) \,\dot\cup\, \beta(G)$ и $2 \in \beta(G)$. Для любой секции K группы G положим $\alpha(K) := \pi(K) \cap \alpha(G)$ и $\beta(K) := \pi(K) \cap \beta(G)$.

Далее мы рассматриваем конкретные простые группы G. Множества $\alpha(G)$ и $\beta(G)$ нам заранее не известны, но, используя свойства группы G и условие теоремы, мы будем далее находить эти множества, постепенно проясняя ("пополняя") $\beta(G)$.

По условию каждая максимальная подгруппа группы G либо принадлежит $\mathcal{S}$, либо является прямым произведением $\alpha(G)$-группы и $\beta(G)$-группы. Отсюда непосредственно вытекает следующая

Лемма 2.1. *Пусть* M *— максимальная подгруппа группы* G *и* $M \notin \mathcal{S}$. *Тогда выполнено точно одно из следующих условий:*

(1) M *имеет неединичный* $\alpha(G)$*-холлов прямой множитель;*

(2) $\pi(M) \subseteq \beta(G)$.

Обозначим через $\mathcal{P}_i$ ($i \in \{1, 2\}$) множество всех максимальных подгрупп $M \in \mathcal{P}$, которые удовлетворяют условию (i) леммы 2.1. Очевидно, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \,\dot\cup\, \mathcal{P}_2$.

Наряду с максимальными подгруппами группы G, мы будем рассматривать также различные её собственные (т. е. не изоморфные G) секции. Если $M \in \mathcal{P}$ и K — секция группы M, то, очевидно, K π-разложима, $\alpha(K) \subseteq \alpha(M)$ и $\beta(K) \subseteq \beta(M)$. Поэтому верна

Лемма 2.2. *Если собственная секция K группы G не принадлежит $\mathcal{S}$ и не имеет неединичных $\alpha(G)$-холловых прямых множителей (нечётного порядка), то $\pi(K) \subseteq \beta(G)$.*

Первоначально мы знаем лишь один элемент множества $\beta(G)$, а именно, число 2 (и совсем не знаем $\alpha(G)$). Используя же лемму 2.2, мы можем, в частности, утверждать (и это есть один из начальных шагов доказательства), что

$\beta(G) \supseteq \pi(K)$ всякий раз, как известная нам собственная секция K группы G, не принадлежащая $\mathcal{S}$, совсем не имеет неединичных холловых прямых множителей нечётного порядка. Например, если собственная секция K группы G является простой группой или группой Фробениуса чётного порядка, не являющейся группой Шмидта, то определённо $\beta(G) \supseteq \pi(K)$.

Положим $\beta_{\mathcal{P}}(G) := \cup_{M\in\mathcal{P}}\beta(M)$, $\alpha_{\mathcal{P}}(G) := \cup_{M\in\mathcal{P}}\alpha(M)$ и $\Pi_{\mathcal{S}}(G) := \cup_{K\in\mathcal{S}}\pi(K)$. Очевидно, что $\beta_{\mathcal{P}}(G) \subseteq \beta(G)$, $\alpha_{\mathcal{P}}(G) \subseteq \alpha(G)$ и согласно условию теоремы $\beta(G) \setminus \beta_{\mathcal{P}}(G) \subseteq \Pi_{\mathcal{S}}(G)$ и $\alpha(G) \setminus \alpha_{\mathcal{P}}(G) \subseteq \Pi_{\mathcal{S}}(G)$. В частности, условие $\alpha_{\mathcal{P}}(G) \neq \varnothing$ гарантирует π-неразложимость группы G (равносильную условию $\alpha(G) \neq \varnothing$).

Критическим пунктом в доказательстве теоремы 1 является следующая лемма, которая позволяет при исследовании пары (G, π) применить результаты о контроле простого спектра конечной простой группы, а именно предложения 1.1–1.3.

Лемма 2.3. *Предположим, что собственные секции $H_1, \ldots, H_m$ группы G контролируют её простой спектр. Тогда по крайней мере одна из этих секций H_i принадлежит $\mathcal{S}$ или имеет неединичный $\alpha(G)$-холлов прямой множитель (нечётного порядка).*

Доказательство. По условию $\pi(G) = \pi(H_1) \cup \ldots \cup \pi(H_m)$. Предположим, что ни для одной из секций H_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ не выполнено заключение леммы 2.3. Тогда по лемме 2.1 должно быть $\pi(H_i) \subseteq \beta(G)$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$. Но теперь из первого равенства следует, что $\pi(G) = \beta(G)$, т. е. группа G π-разложима. Но это противоречит сделанному выше предположению. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если для G и π выполнено утверждение (A) теоремы 1, то G — группа одного из типов*:

(1) $G \simeq A_p$, *где p — простое число* $(p \geq 5)$;
(2) $G \simeq PSL_2(q)$, *где* $q > 5$;
(3) $G \simeq PSL_r(q)$, *где r — нечётное простое число*;
(4) $G \simeq PSU_r(q)$, *где r — нечётное простое число*;
(5) G *изоморфна* M_{23} *или* F_2.

Доказательство. Согласно классификации конечных простых групп [18] G есть либо знакопеременная группа, либо группа лиева типа, либо спорадическая группа. Контроль простого спектра этих групп описан в предложениях 1.1–1.3.

Предположим сначала, что G есть знакопеременная или классическая простая группа. Тогда согласно предложению 1.1 группа G имеет секции X и Y такие, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, причём секция X — простая неабелева или диэдральная группа, а секция Y — простая неабелева группа или группа Фробениуса. Если секции X и Y обе простые, то по лемме 2.1 $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \subseteq \beta(G)$, что противоречит π-неразложимости группы G. Внимательный просмотр пунктов предложения 1.1 показывает, что в большинстве случаев X и Y оказываются обе простыми группами и дальнейшего рассмотрения требуют лишь случаи, когда G — группа одного из типов (1)(б), (2)(а), (2)(в), (3)(в) предложения 1.1, т. е. когда выполнено одно из условий (1)–(4) леммы 2.4.

Предположим теперь, что G — исключительная простая группа лиева типа. Для каждой такой группы G предложение 1.2 указывает некоторое множество $\mathcal{K}(G)$ собственных секций X, Y, ... группы G такое, что $\pi(G) = \bigcup_{K\in\mathcal{K}(G)} \pi(K)$. Обратимся к предложению 1.2. Мы видим, что в любом из условий (1)–(10) этого предложения каждая из секций $K \in \mathcal{K}(G)$ есть либо простая неабелева группа, либо группа Фробениуса. Но согласно лемме 2.3 некоторая секция K_0 из множества $\mathcal{K}(G)$ должна быть группой Шмидта. Следовательно, K_0 есть одновременно и группа Шмидта и группа Фробениуса. В частности, группа G удовлетворяет одному из условий

(1), (3), (4), (6) и (10) предложения 1.2 (в других случаях в $\mathcal{K}(G)$ нет групп Фробениуса). Причём ввиду леммы 1.2 K_0 является группой типа A и, в частности, не имеет неединичных элементов непростого порядка. Однако, как видно из формулировки предложения 1.2, каждая подгруппа Фробениуса из упомянутых выше условий (1), (3), (4), (6) и (10) этого предложения имеет элемент порядка, делящегося на 4, 6, 4, 12 и 30 соответственно. Следовательно, ни одна простая группа исключительного лиева типа не удовлетворяет утверждению (A) теоремы 1 ни при каком π.

Предположим, что G — спорадическая простая группа. В каждом из условий (1)–(26) предложения 1.3 указано множество $\mathcal{K}(G)$ секций группы G, контролирующее $\pi(G)$. В большинстве случаев оно состоит из простых групп, и лишь в условиях (4), (6), (9), (14), (22) и (25) кроме простых групп в нём имеются ещё секции, являющиеся группами Фробениуса. Согласно леммам 2.3 и 1.2 некоторая из таких секций должна быть группой типа A. Однако, лишь в двух из указанных выше шести условий в множестве $\mathcal{K}(G)$ имеется группа типа A: это секция $Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$ в M_{23} (условие (4)) и секция $Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$ в F_2 (условие (25)).

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Часть 2

В этом разделе завершается доказательство теоремы 1, т. е. доказательство равносильности её утверждений (A) и (B). А именно, при любом $i \in \{1, \dots, 5\}$ доказывается (см. случаи 1–5 ниже), что для группы G типа (i) леммы 2.4 утверждение (A) равносильно условию (i) утверждения (B).

Случай 1. Предположим, что $G = A_p$, где p — простое число и $p \geq 5$.

Пусть верно утверждение (A). По предложению 1.1 $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq A_{p-1}$ и $Y \doteq Z_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2}$ — группа Фробениуса.

При $p = 5$ все максимальные подгруппы в G являются, очевидно, группами Шмидта и заключение теоремы 1 верно тогда и только тогда, когда $\alpha(G) \neq \varnothing$, т. е. $\alpha(G) \in \{\{3\}, \{5\}, \{3,5\}\}$.

Пусть $p > 5$. Так как $\pi(G) = \pi(A_{p-1}) \cup \{p\}$, то согласно лемме 2.1

$$\beta(G) \supseteq \pi(A_{p-1}) = \pi((p-1)!) \ \text{ и } \ \alpha(G) \subseteq \{p\}. \tag{3.1}$$

По лемме 2.3 Y есть группа Шмидта или имеет неединичный $\alpha(G)$-холлов прямой множитель. Но второе не может быть выполнено: хотя $|Y|$ нечётен, но $\pi(Y) \not\subseteq \alpha(G)$ по (3.1). Следовательно, Y есть группа Шмидта, а так как Y есть группа Фробениуса, то по лемме 1.2 Y есть группа типа A. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$p \ \text{ и } \ (p-1)/2 \text{ — простые числа.} \tag{3.2}$$

Согласно теореме О'Нэна — Скотта (см., например, [9, теорема 2.4]) любая максимальная подгруппа M группы $G = A_p$ (при простом p), отличная от подгрупп, сопряжённых с X или Y $(\doteq Z_p \leftthreetimes (AGL_1(p) \cap A_p))$, и подгрупп $M_{k,m}$ типа $A_p \cap (S_k \times S_m)$, где $k + m = p$ (у которых $\beta(M_{k,m}) \subseteq \pi((p-1)!) \subseteq \beta(G)$), имеет простой цоколь T, обладающий максимальной подгруппой H индекса p.

Если таких подгрупп M нет в G, то, очевидно, $\alpha(G) = \{p\}$.

Если же такая максимальная подгруппа M имеется в G, то по результату Р. Гуральника [19] для T, H и p имеются лишь следующие возможности:

(а) $T \simeq PSL_m(q)$ $(m \geq 2, q \geq 4)$ и $p = |T : H| = (q^m - 1)/(q-1)$;

(б) $T \simeq PSL_2(11)$, $H \simeq A_5$, $p = |T : H| = 11$;

(в) $T \simeq M_{11}$, $H \simeq M_{10}$, $p = 11$;

(г) $T \simeq M_{23}$, $H \simeq M_{11}$, $p = 23$.

В случае (а) имеем $(p-1)/2 = q(q^{m-1}-1)/2(q-1)$. Ввиду (3.2) это число должно быть простым. Следовательно, имеются лишь две возможности: (a1) $m=2$, $q=4$ и (a2) $q=2$, $(p-1)/2 = 2^{m-1}-1$ и тогда $p = 2^m - 1$. В случае (a1) $(p-1)/2 = 2$ и $p=5$, но ранее мы предположили, что $p>5$. В случае (a2) числа $2^{m-1}-1$ и $p = 2^m-1$ должны быть простыми, но отсюда следует простота чисел $m-1$ и m, т. е. $m=3$, и тогда $p=7$, $G \simeq A_7$ и $T \simeq PSL(3,2) \simeq PSL(2,7)$.

Таким образом, случай (а) возможен лишь при $G \simeq A_7$, где $G > T \simeq PSL(2,7)$. Следовательно, $\pi(A_7) = \pi(X) \cup \pi(T) \subseteq \beta(G)$ (по (3.1)), т. е. группа A_7 π-разложима.

Далее (см. п. (б), (в)), при $p=11$ группа G имеет подгруппы, изоморфные $PSL_2(11)$ и M_{11}, и, следовательно, $p \in \beta(G)$. Отсюда и из (3.1) следует, что группа A_{11} π-разложима. Подобное заключение получается и при $p=23$ ввиду (г): группа A_{23} π-разложима.

Итак, в случае 1 утверждение (A) влечёт условие (1) утверждения (B) теоремы 1.

Но и *обратно*, из приведённых выше теоремы О'Нэна — Скотта и результата Р. Гуральника следует, что группа A_p при простых p и $(p-1)/2$ и с $p \notin \{7,11,23\}$ имеет лишь один класс сопряжённых максимальных подгрупп, порядки которых делятся на p. В частности, все максимальные подгруппы, не входящие в этот класс, p-разложимы. Более того, так как представителем этого класса является подгруппа $Y \doteq Z_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2}$, которая является группой Шмидта, то все 2-максимальные подгруппы группы G p-разложимы и, следовательно, π-разложимы при любом π с $\alpha(G) = \{p\}$. Сама группа G не π-разложима, из-за наличия в ней не π-разложимой подгруппы Y.

Итак, группа G условия (1) утверждения (B) теоремы 1 удовлетворяет утверждению (A).

Случай 2. Пусть $G = PSL_2(q)$, $q>5$, т. е. выполнено условие (2) леммы 2.4.

Тогда $|G| = q(q^2-1)/d$, где $d = (2, q-1)$, и, очевидно,

$$\pi(G) = \pi(q) \,\dot\cup\, \pi((q-1)/d) \,\dot\cup\, \pi((q+1)/d).$$

Максимальные подгруппы групп $G = PSL_2(q)$ приведены в лемме 1.4. Особую роль играют подгруппы $D_+ \simeq D_{2(q+1)}$, $B \doteq E_q \leftthreetimes Z_{q-1}$, $D_- \simeq D_{2(q-1)}$, которые почти всегда (за исключением случая $q \in \{7,11\}$) существуют.

Случай 2.1. Пусть $q = 2^a$ чётно $(a>2)$.

Тогда

$$\pi(G) = \{2\} \,\dot\cup\, \pi(2^a-1) \,\dot\cup\, \pi(2^a+1). \tag{3.3}$$

По лемме 1.4 максимальными подгруппами группы G являются подгруппы, сопряжённые с D_+, B, D_- и, возможно, ещё некоторое число подгрупп из условия (4) этой леммы.

Ни одна из подгрупп D_+, B, D_- не имеет неединичных холловых прямых множителей нечётного порядка. Поскольку по предложению 1.1 $\pi(G) = \pi(D_+) \cup \pi(B)$, то по лемме 2.3 по крайней мере одна из подгрупп D_+ и B должна быть группой Шмидта. Но тогда согласно леммам 1.2 и 1.3

по крайней мере одна из подгрупп D_+ и B является группой типа А.

1. Предположим сначала, что $D_+ \simeq D_{2(q+1)}$ — группа типа А. Тогда по лемме 1.3

$$2^a + 1 =: r \ \text{ есть нечётное простое число} \tag{3.4}$$

и по (3.3)

$$\pi(G) = \{2, r\} \,\dot\cup\, \pi(2^a-1). \tag{3.5}$$

Из (3.4) следует, что $a = 2^m$, где $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Поэтому кроме подгрупп, сопряжённых с D_+, B или D_-, группа G имеет лишь максимальные подгруппы $H \simeq PSL_2(2^{2^{m-1}})$ порядка $2^{2^{m-1}}(2^{2^m}-1) = 2^{2^{m-1}}(2^a-1)$. Следовательно, по лемме 2.1 $\pi(2(2^a-1)) = \pi(H) \subseteq \beta(G)$ и по (3.5) $\alpha(G) \subseteq \{r\}$. Так как $r \notin \pi(2(q-1)) = \pi(D_-) = \pi(B)$, то $\alpha(G) = \{r\}$ и выполнено утверждение (2b) теоремы 1.

2. Предположим теперь, что B — группа типа А. Тогда

$$2^a - 1 =: r \text{ есть нечётное простое число.} \tag{3.6}$$

Поэтому подгруппа $D_- \simeq D_{2r}$ также является группой Шмидта и по (3.3)

$$\pi(G) = \{2\} \,\dot\cup\, \{r\} \,\dot\cup\, \pi(2^a + 1). \tag{3.7}$$

Далее, из (3.6) следует, что a — простое число, причём $a > 2$, так как $q > 5$. В этом случае согласно лемме 1.4 группа G имеет точно три класса сопряжённых максимальных подгрупп, и D_+, B, D_- — представители этих классов. Так как $q + 1 = 2^a + 1 = (2 + 1)(2^{a-1} - \ldots + 1)$ не является простым числом, то по лемме 1.3 подгруппа $D_+ \simeq D_{2(q+1)}$ не является группой Шмидта. Итак, D_+ — представитель единственного класса максимальных подгрупп группы G, не являющихся группами Шмидта. Поэтому по лемме 2.1 $\beta_{\mathcal{P}}(G) = \pi(D_+) = \pi(2(q+1))$. Отсюда и из (3.7) следует, что $\alpha(G) = \{r\}$ и, следовательно, выполнено утверждение (2c) теоремы 1.

Обратно, из приведённых выше свойств группы $G = PSL_2(2^a)$ видно, что каждое из условий (2b) и (2c) утверждения (B) теоремы 1 при $q = 2^a$ (здесь G имеет, соответственно, четыре и три класса сопряжённых максимальных подгрупп) влечёт утверждение (A).

Случай 2.2. Пусть $q = p^a$, где p — простое нечётное число и $a \in \mathbb{N}$.

Тогда, очевидно,

$$\pi(G) = \{p\} \,\dot\cup\, \pi((q - 1)/2) \,\dot\cup\, \pi((q + 1)/2). \tag{3.8}$$

2.2.1. Пусть $q \in \{7, 11\}$.

Группа $G \simeq PSL_2(7)$ имеет точно 3 класса максимальных подгрупп: $B \simeq Z_7 \leftthreetimes Z_3$ и 2 класса подгрупп, изоморфных S_4. В этом случае $\beta_{\mathcal{P}}(G) = \{2, 3\}$ и $\alpha(G) = \{7\}$.

Группа $G \simeq PSL_2(11)$ имеет точно 4 класса максимальных подгрупп: $B \simeq Z_{11} \leftthreetimes Z_5$, $D_+ \simeq D_{12}$ и 2 класса подгрупп, изоморфных A_5. В этом случае $\beta_{\mathcal{P}}(G) = \{2, 3, 5\}$ и $\alpha(G) = \{11\}$.

Таким образом, в случае 2.2.1 из утверждения (A) следует условие (2a) утверждения (B).

Легко проверяется и обратное утверждение.

2.2.2. Пусть $q \notin \{7, 11\}$.

Так как $PSL_2(9) \simeq A_6$ и согласно случаю 1 A_6 π-разложима, то далее мы можем считать, что $q > 11$.

Тогда каждая из подгрупп $D_+ \simeq D_{q+1}$, $B \simeq E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/2}$ и $D_- \simeq D_{q-1}$ максимальна в G. Подгруппы D_+ и D_- не имеют холловых прямых множителей нечётного порядка и, следовательно, по леммам 2.1 и 1.3 справедливы следующие два утверждения.

(a1) *Если $(q + 1)/2$ — непростое число, то $D_+ \in \mathcal{P}_2$ (по лемме* 1.3*) и $\pi(D_+) = \pi(q + 1) \subseteq \beta_{\mathcal{P}}(G)$.*

(a2) *Если $(q-1)/2$ есть непростое число, то $D_- \in \mathcal{P}_2$ (по лемме* 1.3*) и $\pi(D_-) = \pi(q-1) \subseteq \beta_{\mathcal{P}}(G)$; но тогда и $B \in \mathcal{P}_2$ (по лемме* 1.3*) и, значит, $\pi(B) = \pi(q(q - 1)) \subseteq \beta_{\mathcal{P}}(G)$.*

Числа $(q + 1)/2$ и $(q - 1)/2$ не могут быть оба простыми, так как $(q + 1)/2 = (q - 1)/2 + 1$ и $q > 5$. Но если они оба непростые числа, то по **(a1)**, **(a2)** и (3.8) $\pi(G) \subseteq \beta_{\mathcal{P}}(G)$, т. е. G — π-разложима. что противоречиво. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

(a3) *Одно и только одно из чисел $(q + 1)/2$ и $(q - 1)/2$ является простым.*

Согласно **(a3)** мы должны рассмотреть два случая. Сначала рассмотрим первый.

(a4) *Предположим, что $(q + 1)/2 =: r$ есть простое число $(q > 11)$. Тогда $\beta(G) = \{p\} \,\dot\cup\, \pi((q - 1)/2)$ и $\alpha(G) = \{r\}$, т. е. выполнено условие* (2b) *утверждения (B) теоремы* 1.

Действительно, по (3.8) $\pi(G) = \{p\} \,\dot\cup\, \pi((q-1)/2) \,\dot\cup\, \{r\}$. Так как $(q+1)/2 =: r$ простое число, то по **(a3)** число $(q - 1)/2$ непростое (и чётное), и по **(a2)** $\beta_{\mathcal{P}}(G) \supseteq \pi(q(q - 1)) = \pi(G) \setminus \{r\}$. Поскольку $q > 11$, то $r > 5$. Отсюда и из того факта, что D_+ есть группа Шмидта, следует (по лемме 1.4), что число r может принадлежать $\beta_{\mathcal{P}}(G)$, только если r делит $|M|$, где M изоморфна

$PSL_2(q_0)$ или $PGL_2(q_0)$ с $q_0 > 3$, где $q = q_0^b$, b — простое число, причём $b > 2 \Leftrightarrow M \simeq PSL_2(q_0)$. Если $b > 2$, то $2r = q + 1 = q_0^b + 1 = (q_0 + 1)(q_0^{b-1} - \ldots + 1)$, что противоречиво. Если $b = 2$, то $M \simeq PGL_2(q_0)$ и $\pi(M) = \{p\} \dot\cup \pi(q_0^2 - 1) = \{p\} \dot\cup \pi(q - 1) \not\ni r$. Следовательно, $\beta(G) = \{p\} \dot\cup \pi((q-1)/2)$ и $\alpha(G) = \{r\}$. Утверждение **(a4)** доказано.

Ввиду **(a3)** остаётся рассмотреть лишь случай, когда $(q-1)/2$ есть простое число.

(a5) *Предположим, что* $(q-1)/2 =: r$ *— простое число* ($r > 5$, *так как* $q > 11$). *Тогда либо* $q = 3^a$ ($p = 3$) *и* a *— простое число, либо* $q = p$ (> 11) *и* $3 \mid q+1$. *В любом случае* $\beta(G) = \pi((q+1)/2)$ *и* $\alpha(G) = \{p, r\}$, *т. е. выполнено условие* (2c) *утверждения* (B) *теоремы* 1.

Докажем это. По (3.8) $\pi(G) = \{p\} \dot\cup \pi((q+1)/2) \dot\cup \{r\}$. Здесь $p \geq 3$ и $r > 5$, так как $q > 11$. Так как $(q-1)/2 =: r$ — простое число, то, во-первых, по леммам 1.2 и 1.3 B и D_- — группы Шмидта и, во вторых, по **(a3)** число $(q+1)/2 = r+1$ непростое (и чётное), а следовательно, по **(a1)**

$$\beta_{\mathcal{P}}(G) \supseteq \pi(q+1) = \pi(G) \setminus \{p, r\}. \tag{3.9}$$

Далее, если $a \neq 1$, то запишем $a = mb$, где $m \in \mathbb{N}$ и b — простое число. Тогда $2r = q - 1 = p^a - 1 = (p^m - 1)(p^{m(b-1)} + \ldots + p^m + 1)$, откуда $p = 3$, $m = 1$ и $a = b$ — простое число. Итак, выполнено одно из условий:

(а) $p = q > 11$ и тогда, очевидно, $3 \mid q+1$, а также $5 \mid q+1$, если $5 \mid |G|$.

(б) $p = 3$ и a — простое число, причём $a \neq 2$, так как $q \neq 9$.

В любом из случаев (а) и (б) группа G не имеет подгрупп вида $PSL_2(q_0)$ с $q_0 > 3$ (а $PSL_2(3) \simeq A_4$ — группа Шмидта) и подгрупп $PGL_2(q_0)$ (так как $q \neq 9$). Следовательно, согласно лемме 1.4 множество $\mathcal{P}$ максимальных подгруппы группы G, которые могли бы дать новые включения в $\beta_{\mathcal{P}}(G)$ (кроме уже учтённого включения $\pi(D_+) = \pi(q+1) \subseteq \beta_{\mathcal{P}}(G)$), исчерпывается подгруппами, изоморфными S_4 при $q = p \equiv \pm 1 \pmod 8$ и A_5 при $q = p \equiv \pm 1 \pmod{10}$. Однако в случае (а) подгруппы S_4 и A_5 не дадут прибавки к $\beta_{\mathcal{P}}(G)$, так как здесь $3, 5 \in \pi(q+1)$, а в случае (б) такие подгруппы отсутствуют.

Отсюда и из (3.9) следует, что $\beta_{\mathcal{P}}(G) = \pi((q+1)/2)$, $\alpha(G) = \{p, r\}$, и утверждение **(a5)** справедливо.

Итак, в случае 2.2.2 из утверждения (A) следует выпонимость одного из условий (2b) и (2c) утверждения (B).

С использованием свойств групп $PSL_2(q)$ и утверждений **(a1)–(a5)** легко проверяется и обратное утверждение.

Таким образом, для группы $G = PSL_2(q)$ условие (2) утверждения (B) и утверждение (A) теоремы 1 равносильны.

Случай 3. Предположим, что $G = PSL_r(q)$ при простом $r \geq 3$.

Тогда $|G| = q^{r(r-1)/2}(q^r - 1)(q^{r-1} - 1)\ldots(q^2 - 1)/(r, q-1)$. По предложению 1.1 $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSL_{r-1}(q)$ и $Y \doteq Z_{t/(t,q-1)} \leftthreetimes Z_r$ (группа Фробениуса), где $t = (q^r - 1)/(q-1)$. Заметим, что $(t, q-1) = (r, q-1) \in \{1, r\}$, так как $t = q^{r-1} + \ldots + q + 1 = (q^{r-1} - 1) + \ldots + (q-1) + r = (q-1)m + r$, где $m \in \mathbb{N}$. Так как Y не имеет собственных холловых прямых множителей, то по лемме 2.3 верно одно из условий:

(а) $Y \in \mathcal{S}$,

(б) $\pi(Y) \subseteq \alpha(G)$,

(в) $\pi(Y) \subseteq \beta(G)$.

Понятно, что $r \in \pi(PSL_{r-1}(q))$ (это ясно при $r \mid q$, а при $r \nmid q$ следует из теоремы Ферма: $q^{r-1} \equiv 1 \pmod r$). Следовательно, $r \in \pi(PSL_{r-1}(q)) \subseteq \beta(G)$, и потому случай (б) невозможен. В случае (в) мы имеем $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \subseteq \beta(G)$ в противоречие с не π-разложимостью группы G.

Поэтому $Y \in \mathcal{S}$, и тогда по лемме 1.2 Y — группа типа A . Следовательно, $Y \doteq Z_s \leftthreetimes Z_r$, где

$$s := t/(t, q-1) \text{ — простое число.}$$

Так как $(t, q-1) = (r, q-1) \in \{1, r\}$, то $t = s$ или $t = sr$. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\pi(G) = \pi(PSL_{r-1}(q)) \cup \{s\}, \ \beta(G) \supseteq \pi(PSL_{r-1}(q)) \ \text{ и } \ \alpha(G) \subseteq \{s\}. \tag{3.10}$$

Согласно результату М. Ашбахера [20] (см. также его уточнение в [21] для случая классических групп) каждая максимальная подгруппа конечной простой классической группы X является или "геометрической группой" (одного из классов $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_8$) или группой класса $\mathcal{S}(X)$, состоящего из почти простых групп с некоторыми дополнительными свойствами. Подгруппа $Y \doteq Z_s \leftthreetimes Z_r$ является геометрической группой класса $\mathcal{C}_3$ группы G, что видно из табл. 3.5.A и предложения 4.3.6 в [21] при $\varepsilon = 1$, $n = r$, $m = 1$ (причём столбец VI табл. 3.5.A подтверждает максимальность этой подгруппы в G). Следовательно, силовская подгруппа S порядка s из Y является силовской s-подгруппой в G, $Y = N_G(S)$ и $C_G(S) = S$.

Предположим, что S содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G, отличной от Y. Тогда было бы $S \subseteq Z(N_M(S))$ и по теореме Бернсайда ([22, 39.1] или [7, теорема 7.4.3]) M имела бы нормальную холлову подгруппу K индекса s. Но тогда $M = K \leftthreetimes S$ являлась бы группой Фробениуса (так как $C_M(S) = S$) с ядром K. Поскольку по результату Дж. Томпсона (см. [22, 40.8]) ядро группы Фробениуса нильпотентно, то $M = K \leftthreetimes S$ разрешима.

Следовательно, подгруппа M не может содержаться в классе $\mathcal{S}(X)$, так как все группы этого класса являются почти простыми. Но M не является также и геометрической группой, что легко увидеть, например, из [21, табл. 3.5.A] с соответствующими ссылками на главу 4 (учесть, что число r простое). Покажем, например (остальное тривиально), что M не является подгруппой типа $GL_r(q_0)$, где $q = q_0^a$ (класса $\mathcal{C}_5$). Действительно, в противном случае число $s = (q^r-1)/(q-1)(r, q-1)$ делило бы число $k := (q_0^r - 1)/(q_0 - 1)$, а это противоречиво, так как

$$s = \frac{(q_0^{ra}-1)}{(q_0^a-1)(r,q-1)} \geq \frac{(q_0^{ra}-1)}{(q_0^a-1)r}$$

$$= \frac{(q_0^r-1)\,(q_0^{r(a-1)} + q_0^{r(a-2)} + \ldots + q_0^r + 1)}{(q_0-1)\,(q_0^{a-1} + q_0^{a-2} + \ldots + rq_0 + 1)r} = k\,\frac{q_0^{r(a-1)} + q_0^{r(a-2)} + \ldots + q_0^r + 1}{rq_0^{a-1} + rq_0^{a-2} + \ldots + rq_0 + r} > k.$$

Таким образом, S не может содержаться ни в какой максимальной подгруппе M группы G, отличной от Y, и, следовательно, s не делит порядок никакой максимальной подгруппы из G, не сопряжённой с Y. Отсюда и из (3.10) следует, что $\alpha_{\mathcal{P}}(G) = \varnothing$ и $\alpha(G) = \{s\}$. Итак, в случае 3 из утверждения (A) следует условие (3) утверждения (B).

С учетом отмеченной выше информации из [21] легко проверяется и обратное утверждение.

Таким образом, для группы $G = PSL_r(q)$ при $r > 2$ условие (3) утверждения (B) и утверждение (A) теоремы 1 равносильны.

Случай 4. Предположим, что $G = PSU_r(q)$, где $r \geq 3$ — нечётное простое число.

Тогда $|G| = q^{r(r-1)/2} \prod_{i=2}^{n} (q^i - (-1)^i)/(r, q+1) = q^{r(r-1)/2}(q^r - 1)(q^{r-1} - 1)\ldots(q^2 - 1)/(r, q+1)$. По предложению 1.1 $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq PSU_{r-1}(q)$ и $Y \doteq Z_{t/(t,q+1)} \leftthreetimes Z_r$ (группа Фробениуса), где $t = (q^r + 1)/(q + 1)$.

Подобно предыдущему случаю заключаем, что $Y \doteq Z_s \leftthreetimes Z_r$ — группа типа A, где $s := t/(t, q+1)$ — простое число;

$$\pi(G) = \pi(PSU_{r-1}(q)) \cup \{s\}, \quad \beta(G) \supseteq \pi(PSU_{r-1}(q)) \ \text{ и } \ \alpha(G) \subseteq \{s\}. \tag{3.11}$$

Заметим, что $(t, q+1) = (r, q+1) \in \{1, r\}$, так как $t = (q^{r-1}-1) - (q^{r-2}+1) + \ldots + (q^2-1) - (q+1) - r$.

Подгруппа $Y \doteq Z_s \leftthreetimes Z_r$ является геометрической подгруппой типа $\mathcal{C}_3$ группы G (см. [21, табл. 3.5.B и предложение 4.3.6]), причём согласно табл. 3.5.B (см. столбец VI) она действительно является максимальной подгруппой в G. Следовательно, силовская s-подгруппа S из Y является силовской s-подгруппой в G и $C_G(S) = S$. Далее, точно так же, как и в предыдущем случае, с использованием табл. 3.5.B (вместо табл. 3.5.A) из [21] и (3.11) доказывается, что $\alpha(G) = \{s\}$. Итак, в случае 4 из утверждения (A) следует условие (4) утверждения (B).

С учетом отмеченной выше информации из [21] легко проверяется и обратное утверждение.

Таким образом, для группы $G = PSU_r(q)$ при $r > 2$ условие (4) утверждения (B) и утверждение (A) теоремы 1 равносильны.

Случай 5. Предположим, что G — спорадическая простая группа.

По лемме 2.4 $G \simeq M_{23}$ или $G \simeq F_2$. Обратимся к спискам максимальных подгрупп в M_{23} и F_2 (см., например, [9, табл. 5.1 и 5.7]).

В группе M_{23} существует максимальная подгруппа типа $Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$, причём порядок любой не сопряжённой с ней максимальной подгруппы из M_{23} не делится на 23. Кроме того, подгруппы типа $Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$ являются группами Шмидта, а все другие максимальные подгруппы в M_{23} неразрешимы. Следовательно, $\beta_{\mathcal{P}}(M_{23}) = \pi(M_{23}) \setminus \{23\} = \pi(M_{22})$ и $\alpha(M_{23}) = \{23\}$.

Подобно в группе F_2 имеется максимальная подгруппа типа $Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$ — представитель единственного класса максимальных подгрупп порядка, делящегося на 47, и одновременно — представитель единственного класса максимальных подгрупп, являющихся группами Шмидта. Поэтому $\beta_{\mathcal{P}}(F_2) = \pi(F_2) \setminus \{47\}$ и $\alpha(F_2) = \{47\}$.

Таким образом, для спорадических групп G условие (5) утверждения (B) и утверждение (A) теоремы 1 равносильны.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Из теоремы Шура — Цассенхауза [7, теорема 6.2.1] легко следует, что $\pi(G) = \pi(G/\Phi(G))$. Понятно также (см., например, [23, лемма 4.4]), что если $\Phi(G) \leq H \leq G$, то π-разложимость группы $H/\Phi(G)$ равносильна π-разложимости группы H. В частности, если $H/\Phi(G)$ нильпотентна, то и H нильпотентна, и если $H/\Phi(G)$ — группа Шмидта, то и H — группа Шмидта. Отсюда следует, что условие π-разложимости всех 2-максимальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$ равносильно условию π-разложимости всех 2-максимальных подгрупп группы G, и также $\alpha(G) = \alpha(G/\Phi(G))$ в обозначениях теоремы 1. Поэтому

если $G/\Phi(G)$ — простая группа, то ввиду теоремы 1 для G и π утверждения (A) и $(B1)$ теоремы 2 равносильны.

Предположим теперь, что группа $G/\Phi(G)$ не простая. В этом случае в [4, теорема 3] получено подробное описание всех пар (G, π) при условии, что каждая максимальная подгруппа группы G π-разложима или является группой Шмидта. Последнее условие ввиду предложения 1 равносильно утверждению (A) теоремы 2. Следовательно, с помощью предложения 1 из [4, теорема 3] получается следующее (более сильное) предложение 4.1, которое и завершит доказательство теоремы 2.

Далее используются следующие обозначения:

p, q, r — различные простые числа; α, β, γ — натуральные числа;

δ — показатель числа q по модулю p;

$\Phi^2(G)$ — пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы G;

$\Delta_G(A)$ — произведение всех нормальных подгрупп группы G, строго содержащихся в её подгруппе A;

$A \leftthreetimes B$ — полупрямое произведение групп A и B, в котором нормальна B и не нормальна A;

индекс внизу при группе обозначает порядок этой группы.

Предложение 4.1. *Пусть π — множество простых чисел и G — конечная группа с непростой факторгруппой $G/\Phi(G)$. Следующие утверждения равносильны*:

(A) *группа G не π-разложима, а все её 2-максимальные подгруппы π-разложимы*;

(B) *выполнено одно из условий*:

$(B1)$ *G — группа порядка $p^\alpha q^\beta$, где p и q — простые числа, одно из которых содержится в π, а другое — в π':*

(1) $G = P_{p^\alpha} \leftthreetimes Q_{q^\beta}$, $|Q : Q'| = q^\delta$, $|Q'| < q^\delta$, *элементы из P порядка, меньшего $p^{\alpha-1}$, лежат в $C_G(Q)$*;

(2) $G = \langle a\rangle_{p^\alpha} \leftthreetimes Q_{q^\beta}$, $C_G(a) = \langle a\rangle Z(Q) = \langle a\rangle \Phi^2(G)$, $|G/Z(G)| = pq^{2\delta}$;

(3) $G = \langle a\rangle_{p^\alpha} \leftthreetimes Q_{q^\beta}$, $\Phi(G) = \langle a^p\rangle \times G''$, $|G''| < q^\delta$, *$G/\Phi(G)$ есть прямое произведение группы типа A и Z_q*;

(4) $G = \langle b\rangle_{q^{1+\varepsilon}} (\langle a\rangle_p \leftthreetimes Q_{q^{\delta+\varepsilon}})$, $N_G(\langle a\rangle) = \langle b\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$, $|Q : Q'| = q^\delta$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$;

$(B2)$ *G — группа порядка $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где одно из множеств $\{p\}$ и $\{q, r\}$ содержится в π, а другое — в π':*

(5) $G = \langle a\rangle_{p^\alpha} \leftthreetimes (Q_{q^\beta} \times R_{r^\gamma})$, $a^p \in Z(G)$, $C_G(a) = \langle a\rangle$, *$\gamma$ — показатель числа r по модулю p*;

(6) $G = (\langle b\rangle_q \times \langle c\rangle_r) \leftthreetimes P_{p^\alpha}$, *$\langle b\rangle P$ и $\langle c\rangle P$ — группы Шмидта*;

(7) $G = (\langle a\rangle_{p^\alpha} \times \langle c\rangle_r) \leftthreetimes Q_{q^\beta}$, *$\langle a\rangle Q$ — группа Шмидта*;

(8) $G = \langle b\rangle_{q^\beta} \leftthreetimes (P_{p^\alpha} \times R_{r^\gamma})$, *$\langle b\rangle P$ — группа Шмидта*, $\Delta_G(R) = 1$;

(9) $G = (\langle c\rangle_r \leftthreetimes \langle a\rangle_p) \leftthreetimes Q_{q^\beta}$, *$\langle a\rangle Q$ — группа типа A.*

Из приведённых здесь рассуждений и предложения 4.1 следует справедливость теоремы 2.

Отметим, что в группах G типов (1)–(6) все 2-максимальные подгруппы нильпотентны (эти группы описаны ранее в [3]). При $|\pi(G)| = 3$ в любом из возможных пяти случаев G имеет силовскую башню, т. е. $G = A \leftthreetimes (B \leftthreetimes C)$, где A, B, C — силовские подгруппы группы G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3–4. С. 366–372.
2. **Janko Z.** Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen // Math. Z. 1962. Vol. 79, no. 5. S. 422–424.
3. **Белоногов В.А.** Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 21–32.
4. **Белоногов В.А.** О конечных группах, насыщенных (π, π')-разложимыми подгруппами// Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 3. С. 494–506.
5. **Arad Z., Chillag D.** A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. Vol. 87, no. 2. P. 472–482.
6. **Белоногов В.А.** О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.
7. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper & Row, 1968. 537 p.
8. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 804 S.
9. **Willson R.A.** The finite simple groups. L.: Springer-Verlag, 2009. 313 p.
10. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norten, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 285 p.
11. **Чунихин С.А.** О существовании подгрупп у конечной группы // Тр. семинара по теории групп. М.; Л.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938. С. 106–125.
12. **Belonogov V.A.** Finite groups in which all 2-maximal subgrous are π-decomposable // Maltsev Meeting. Novosibirsk, 2013. P. 116. URL: http: //www.math.nsc.ru/conference/malmeet/13/maltsev13.pdf .
13. **Norton S.P., Willson R.A.** A correction to the 41-structureof the Monster, a constructions of a new maximal subgroup $L_2(41)$ and new Moonshinephenomenon // J. London Math. Soc. (2). 2013. Vol. 87, no. 3. P. 943–962.
14. **Белоногов В.А.** О неприводимом представлении p-группы над конечным полем // Исследования по современной алгебре: мат. записки Урал. ун-та. 1981. Т. 12, № 3. С. 3–12.
15. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 452 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser., 407).

16. **King O. H.** The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configuratios // Surveys in combinatorics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. P. 29–56. (London Math. Soc. Lecture Note Ser., 327).
17. **Белоногов В.А.** Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 225–239.
18. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1994. 179 p. (Math. Surveys Monogr., vol. 40, no. 1).
19. **Guralnick R.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311.
20. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finte classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
21. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 305 p. (London Math. Soc. Lecture Note Ser., 129.)
22. **Aschbacher M.** Finite Groups Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 283 p.
23. **Шеметков Л. А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

Белоногов Вячеслав Александрович
Поступила 10.12.2013
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Том 20 № 2 2014

УДК 519.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ОБОБЩЕННОГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА ПОРЯДКА (t,t) [1]

И. Н. Белоусов

Найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек элементов простого порядка группы автоморфизмов обобщенных шестиугольников $GH(t,t)$. Доказано, что обобщенный шестиугольник порядка $(6,6)$ не является реберно симметричным.

Ключевые слова: обобщенный многоугольник, дистанционно регулярный граф, автоморфизм.

I. N. Belousov. On automorphisms of a generalized hexagon of order (t,t).

Possible orders and fixed-point subgraphs are found for elements of prime order in the automorphism group of generalized hexagons $GH(t,t)$. It is proved that the generalized hexagon of order $(6,6)$ is not edge-symmetric.

Keywords: generalized polygon, distance-regular graph, automorphism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Пусть Γ — граф, $a,b\in\Gamma$, число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a]\cap[b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,\ldots,d$. Для вершин u,w дистанционно регулярного графа, находящихся на расстоянии l, через p^l_{ij} обозначается число вершин z с $d(u,z)=i$ и $d(z,w)=j$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается подграф, индуцированный на множестве всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X.

Графом простых чисел $GK(G)$ группы G называется граф, вершинами которого являются простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе существует элемент порядка pq.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-31298 мол_а), программы отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-C-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-C-1-1009), а также Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Система инцидентности $(X,\mathcal{L})$, где X — множество точек и $\mathcal{L}$ — множество прямых, называется *почти* $2n$*-угольником порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более чем по одной точке), диаметр графа коллинеарности равен n и для любой пары $(a,L)\in(X,\mathcal{L})$ на прямой L найдется единственная точка, ближайшая к a в графе коллинеарности. Почти $2n$-угольник называется *обобщенным* $2n$*-угольником*, если любые две точки u,w, находящиеся на расстоянии, меньшем n, лежат в единственном геодезическом пути, идущем от u к w. Обобщенный $2n$-угольник порядка (s,t) называется *толстым*, если $s>1$ и $t>1$.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на прямой.

Фейт и Хигман в [1] показали, что толстые обобщенные $2n$-угольники существуют лишь для $2\le n\le 4$. Неизвестно, существуют ли толстые обобщенные шестиугольники порядка, отличного от (q,q), (q,q^3) и (q^3,q), где q — степень простого числа. В работе [2] найдены возможные автоморфизмы обобщенных шестиугольников порядка (3,27). В работе [3] А. Янушка доказал единственность обощенных шестиугольников порядка (p,p), где p — простое число. В данной работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{t(t+1),t^2,t^2;1,1,t+1\}$ на $(t+1)(t^4+t^2+1)$ вершинах. Этот граф имеет собственные значения $t(t+1),2t-1,-1,-(t+1)$ кратностей $1,\dfrac{1}{6}t(t+1)^2(t^2+t+1),\dfrac{1}{2}t(t+1)^2(t^2-t+1),\dfrac{1}{3}t(t^4+t^2+1)$ соответственно, является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(t,t)$ (см. [4, гл. 6]) и не содержит n-циклов для $4\le n\le 5$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{t(t+1),t^2,t^2;1,1,t+1\}$*,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент из* G *простого порядка* p *и подграф* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ *не пуст. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) p *не делит* $t-1$ *и либо*

(*i*) Ω *является кокликой и* p *делит* $t+1$*, либо*

(*ii*) Ω *является кликой, либо*

(*iii*) $\Omega\subseteq a^{\perp}$*, либо*

(*iv*) Ω *— точечный граф обобщенного шестиугольника* $GH(s_1,t_1)$*,* $s_1,t_1\le t$*,* $t-s_1$ *и* $t-t_1$ *делятся на* p*, либо*

(*v*) Ω *содержится в* $\cup_{x\in L}x^{\perp}$ *для некоторой клики* L*,* $|L|\equiv 1 \pmod p$*,* $|L|>1$ *и* p *делит* t;

(2) p *делит* $t-1$ *и либо*

(*i*) Ω *— точечный граф обобщенного шестиугольника* $GH(s,r)$*,* $r,s\equiv 1 \pmod p$*, либо*

(*ii*) Ω *является объединением* $s+1$ *вершин степени* $r+1$ *и* $r+1$ *клик порядка* $s+1$*, причем каждая вершина из* $(s+1)$*-клики смежна ровно с одной вершиной степени* $r+1$*,* $r,s\equiv 1 \pmod p$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{42,36,36;1,1,7\}$ *(точечный граф обобщенного шестиугольника* $GH(6,6)$*),* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$*. Тогда либо* $p\in\{7,31,43\}$ *и* Ω *— пустой граф, либо верно одно из утверждений:*

(1) $p=7$ *и* Ω *является кокликой*;

(2) $p=5$ *и либо*

(*i*) Ω *состоит из* 7 *вершин степени* 2 *и двух* 7*-клик, причем каждая вершина из* 7*-клики смежна с одной вершиной степени* 2*, либо*

(*ii*) Ω *состоит из* 7 *вершин степени* 7 *и семи* 7*-клик, причем каждая вершина из* 7*-клики смежна с одной вершиной степени* 7*, либо*

(*iii*) Ω *содержит две вершины степени* 7*, находящиеся на расстоянии* 3 *в* Γ*, и является объединением семи геодезических путей, соединяющих эти вершины, либо*

(*iv*) Ω *является точечным графом обобщенного шестиугольника* $GH(1,6)$ *или* $GH(6,1)$;

(3) $p = 3$ *и либо*

(*i*) Ω *является кликой размера* 1, 4 *или* 7, *либо*

(*ii*) $\Omega \subseteq a^{\perp}$, *либо*

(*iii*) Ω *содержится в* $\cup_{x \in L} x^{\perp}$ *для некоторой клики* L, $|L| \in \{4, 7\}$, *либо*

(*iv*) Ω *является точечным графом обобщенного шестиугольника* $GH(3, 3)$;

(4) $p = 2$ *и либо*

(*i*) Ω *является* 7-*кликой*, $\alpha_1(g) = 6s$ *и* $\alpha_2(g) = 252 - 6s$ *для некоторого целого числа* s, *либо*

(*ii*) $\Omega \subseteq a^{\perp}$, *либо*

(*iii*) Ω *содержится в* $\cup_{x \in L} x^{\perp}$ *для некоторой клики* L, $|L| \in \{4, 7\}$, *либо*

(*iv*) Ω *является точечным графом обобщенного шестиугольника* $GH(s, t)$, *где* $s, t \in \{2, 4, 6\}$.

Следствие. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{42, 36, 36; 1, 1, 7\}$. *Тогда группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве вершин графа* Γ.

1. Автоморфизмы обобщенного шестиугольника $GH(t, t)$

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t(t+1), t^2, t^2; 1, 1, t+1\}$.

Лемма 1. *Для ненулевых чисел пересечения графа* Γ *верны равенства*

(1) $p^1_{11} = t - 1$, $p^1_{21} = t^2$, $p^1_{22} = t^2(t-1)$, $p^1_{23} = t^4$, $p^1_{33} = t^4(t-1)$;

(2) $p^2_{11} = 1$, $p^2_{12} = t - 1$, $p^2_{13} = t^2$, $p^2_{22} = t^3 + t^2 - t$, $p^2_{23} = t^2(t-1)(t+1)$, $p^2_{33} = t^4(t-1)$;

(3) $p^3_{12} = t + 1$, $p^3_{13} = (t+1)(t-1)$, $p^3_{22} = (t+1)^2(t-1)$, $p^3_{23} = t^2(t-1)(t+1)$, $p^3_{33} = t^4(t-1)$.

Доказательство. Напомним, что для вершин u, w, находящихся на расстоянии l, через p^l_{ij} обозначается число вершин z с $d(u, z) = i$ и $d(z, w) = j$. Заметим, что $p^2_{12} = a_2$, $p^3_{13} = a_3$. По лемме 4.1.7 из [4] получим

$p^i_{j+1h} = (p^i_{jh-1} b_{h-1} + p^i_{jh}(a_h - a_j) + p^i_{jh+1} c_{h+1} - p^i_{j-1h} b_{j-1})/c_{j+1}$,

в частности,

$p^1_{ii-1} = c_i k_i / k$, $p^1_{ii} = a_i k_i / k$, $p^1_{ii+1} = b_i k_i / k$,

$p^i_{i-22} = c_{i-1} c_i / \mu$, $p^{i-1}_{i+12} = b_{i-1} b_i / \mu$, $p^2_{i-1i+1} = k_i c_i b_i / (k b_1)$,

$p^{i-1}_{i2} = b_{i-1}(a_i + a_{i-1} - a_1)/\mu$, $p^{i+1}_{i2} = c_{i+1}(a_i + a_{i+1} - a_1)/\mu$.

С помощью этих формул находим числа пересечения. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* g — *автоморфизм простого порядка* p *графа* Γ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ — *непустой граф, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *если граф* Ω *не связен, то он является кокликой и* p *делит* $t + 1$;

(2) *если граф* Ω *связен, то его диаметр меньше* 4 *и* $p \leq t$.

Доказательство. Допустим, что граф Ω не связен. Тогда вершины из разных компонент связности находятся на расстоянии 3 в Γ. Допустим, что a, b — смежные вершины из Ω, и выберем вершину c из другой связной компоненты графа Ω. По определению обобщенного многоугольника клика $a^{\perp} \cap b^{\perp}$ содержит единственную вершину d, находящуюся на расстоянии 2 от c. Противоречие с тем, что $d \in \Omega$. Значит, Ω — коклика.

С учетом равенства $c_3 = t + 1$ получим, что p делит $t + 1$. Утверждение (1) доказано.

Пусть граф Ω связен. Очевидно, что если вершины $a, b \in \Omega$ находятся на расстоянии 1 или 2 друг от друга в Γ, то они находятся на таком же расстоянии друг от друга в Ω. Предположим, что $d(a, b) = 3$ в Γ и $a, b \in \Omega$. Так как Ω связен, то найдется вершина $x \in \Omega \cap [b]$ из некоторого пути от a к b в Ω. Но тогда найдется единственная вершина $y \in \Omega \cap [b] \cap x^{\perp}$ с $d(a,y) = 2$. Поэтому $d(a,b) = 3$ в Ω, диаметр графа Ω меньше 4 и выполняется утверждение (2).

Пусть $p > t$. Рассмотрим смежные вершины $a, b \in \Omega$. Тогда клика $L = a^{\perp} \cap b^{\perp}$ содержится в Ω. Далее, элемент g действует на множестве из t максимальных клик, отличных от L и лежащих в $[b]$, поэтому $b^{\perp} \in \Omega$. В силу связности $\Omega = \Gamma$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, p не делит $t-1$ и подграф Ω не пуст, то выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω *является кокликой и p делит $t+1$*;

(2) Ω *является кликой*;

(3) $\Omega \subseteq a^{\perp}$;

(4) Ω — *точечный граф обобщенного шестиугольника $GH(s_1,t_1)$, $s_1, t_1 \le t$, $t - s_1$ и $t - t_1$ делятся на p*;

(5) Ω *содержится в $\cup_{x \in L} x^{\perp}$ для некоторой клики L, $|L| \equiv 1 \pmod p$, $|L| \neq 1$ и p делит t.*

Доказательство. Если Ω не связен, то утверждение (1) леммы непосредственно вытекает из леммы 2.

Далее будем предполагать, что граф Ω связен.

Пусть в Ω существуют вершины a и b, находящиеся на расстоянии 3 друг от друга в графе Γ. Тогда по лемме 2 расстояние между вершинами a и b равно 3 и в Ω.

Пусть диаметр графа Ω равен 2. Тогда в Ω существует геодезический 2-путь bac. Предположим, что в Ω существует вершина x, не лежащая в $a^{\perp}$. Тогда без ограничения общности эта вершина смежна с b. Но в этом случае $d(x,c) = 3$; противоречие. Итак, в этом случае $\Omega \subseteq a^{\perp}$ для некоторой вершины a и выполняется утверждение (3) леммы.

Пусть диаметр графа Ω равен 3. Рассмотрим вершины a и e из Ω, находящиеся на расстоянии 3 в Γ.

Пусть Ω содержит более одного геодезического пути от a к e. Так как p не делит $t-1$, то в Ω лежат по крайней мере три геодезических пути a, b_i, c_i, e. Положим $L = \Omega \cap a^{\perp} \cap b_1^{\perp}$ и $L_1 = \Omega \cap c_2^{\perp} \cap e^{\perp}$. Тогда найдется вершина $a_1 \in L$ такая, что $d(e,a_1) = d(c_2,a_1) = 3$. Для каждой вершины $x \in L$ найдется единственная вершина $y \in L_1$ с $d(x,y) = 2$. Поэтому $|L| = |L_1|$ и граф $\Omega(a)$ изоморфен графу $\Omega(e)$. Теперь все клики графа $\Omega(a)$ имеют один порядок. Так как p не делит $t-1$, то найдется вершина $x \in \Omega(e) \cap \Omega(c_2)$. Имеем $d(x,a) = d(x,b_1) = 3$ и подграф $\Omega(a)$ изоморфен $\Omega(b)$, а значит, Ω — точечный граф обобщенного шестиугольника $GH(s_1,t_1)$, где $s_1, t_1 \le t$, $t-s_1$ и $t-t_1$ делятся на p. В этом случае выполняется утверждение (4).

Допустим, что Ω содержит единственный геодезический 3-путь $abce$ от a к e. В этом случае p делит t. Положим $L = b^{\perp} \cap c^{\perp} \cap \Omega$. Покажем, что Ω содержится в $\cup_{x \in L} x^{\perp}$. Предположим, что найдется вершина $y \in \Omega - L$ такая, что $d(x,y) > 1$ для любой вершины $x \in L$. Тогда существует единственная вершина $x_1 \in L$ с $d(y,x_1) = 2$ и остальные вершины из L находятся на расстоянии 3 в Γ от y. Поэтому без ограничения общности $x_1 \neq b$. Если $d(a,y) = d(b,y) = 3$, то по доказанному в предыдущем абзаце $|\Omega(a)| = |\Omega(b)|$; противоречие с тем, что от a к d существует единственный геодезический путь. Если $d(a,y) = 2$, то единственная вершина из $[a] \cap [y]$ не принадлежит клике $a^{\perp} \cap b^{\perp} \cap \Omega$; противоречие. Заметим, что $|L| \equiv 1 \pmod p$, $|L| \neq 1$ и выполняется утверждение (5) леммы.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, p делит $t-1$ и подграф Ω не пуст, то выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω *является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(s,r)$, $r, s \equiv 1 \pmod p$*;

(2) Ω *является объединением $s+1$ вершин степени $r+1$ и $r+1$ клик порядка $s+1$, причем каждая вершина из $(s+1)$-клики смежна ровно с одной вершиной степени $r+1$, $r, s \equiv 1 \pmod p$, $\max\{r,s\} > 1$.*

Доказательство. Так как $c_3 = t + 1$, то для вершин a и b, находящихся на расстоянии 3 в Γ, по крайней мере два геодезических пути с концами в вершинах a и b попадают в Ω. Если $\Omega(a)$ содержит s-клику L при $s > 1$, то найдется вершина $a_1 \in L$ такая, что $d(b, a_1) = d(c, a_1) = 3$, где c смежна с b и лежит в геодезическом пути от a к b, который не содержит ребер из L. Поэтому клика $L_1 = [b] \cap c^{\perp} \cap \Omega$ имеет порядок s. Назовем ее соответствующей клике L. Итак, если $d(a, b) = 3$, то граф $\Omega(a)$ изоморфен графу $\Omega(b)$.

Пусть $\Omega(a)$ не является кокликой и содержит по крайней мере 3 вершины из разных максимальных клик. Тогда для s-клики L из $\Omega(a)$ несоответствующие клики из $\Omega(b)$ имеют порядок s. Поэтому $\Omega(a)$ является объединением изолированных s-клик для некоторого целого числа $1 \le s \le t$ и $s \equiv 1 \pmod p$.

Пусть $\Omega(a)$ есть объединение $r + 1$ изолированных s-клик, где $s > 1$. Тогда для вершины $x \in \Omega(a)$, лежащей в геодезическом 3-пути от a к b, существует вершина $y \in \Omega(b)$ с $d(a, y) = d(x, y) = 3$ (эта вершина лежит в максимальной клике, ребра которой не принадлежат указанному 3-пути). Если же вершина x из $\Omega(a)$ не лежит в геодезическом 3-пути от a к b, то $d(b, x) = 3$. В любом случае $|\Omega(x)| = |\Omega(a)|$, и в силу связности, Ω — точечный граф обобщенного шестиугольника порядка (s, r).

Далее предполагаем, что окрестность любой вершины в Ω — либо $(r+1)$-коклика, где $r \equiv 1 \pmod p$, либо объединение s-клики и изолированной вершины, где $s > 1$ и $s \equiv 1 \pmod p$.

Пусть $\Omega(a)$ является объединением s-клики L_a $(s > 1)$ и изолированной вершины a_1 для некоторой вершины $a \in \Omega$. Тогда a_1 смежна с некоторой вершиной из s-клики L_b, соответствующей клике L_a, а значит $\Omega(a_1)$ — $(r + 1)$-коклика, где $r \equiv 1 \pmod p$. Далее, для каждой вершины $x \in L_a$ существует единственная вершина $y \in L_b$ с $d(x, y) = 2$ и вершина z из $[x] \cap [y]$ лежит на расстоянии 3 от a_1, а значит, имеет степень в Ω, равную $|\Omega(a_1)|$.

Так как $|\Omega(a_1)| = r + 1$, то Ω состоит из $r + 1$ клик порядка $s + 1$ и $s + 1$ вершин степени $r+1$, причем каждая вершина из любой $(s+1)$-клики смежна точно с одной вершиной степени $r+1$ и каждая вершина степени $r+1$ смежна точно с одной вершиной из любой $(s+1)$-клики. В этом случае выполняется утверждение (2) леммы.

Предположим, что в Ω нет $(s + 1)$-клик при $s > 1$, т. е. окрестности всех вершин в Ω являются кокликами. Пусть $|\Omega(a)| = r + 1 > 2$ для некоторой вершины $a \in \Omega$. Тогда в Ω найдется вершина b с $d(a, b) = 3$, $|\Omega(b)| = r + 1$ и $r + 1$ геодезических путей a, x_i, y_i, b. Пусть $|\Omega(x_1)| > 2$. Тогда Ω содержит три геодезических пути от x_1 к y_3: x_1, a, x_3, y_3; x_1, y_1, b, y_3; x_1, z_1, z_2, y_3, где $z_i \notin \{a, b, x_i, y_i\}$. Далее, $d(z_1, b) = d(z_1, x_3) = 3$, а значит, $|\Omega(z_1)| = |\Omega(x_3)| = |\Omega(b)| = r + 1$. Так как $d(x_3, y_2) = d(y_2, x_1) = 3$, то $|\Omega(x_3)| = |\Omega(x_1)| = r + 1$. Поэтому любая вершина из $\Omega(a)$ имеет степень, равную $r + 1$, по связности Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника порядка $(1, r)$, где $r \equiv 1 \pmod p$ и выполняется утверждение (1).

Если степени всех вершин в Ω равны 2, то ввиду связности Ω — многоугольник. Так как диаметр графа Ω равен 3, то Ω — шестиугольник. Снова выполняется утверждение (1). Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 вытекает теорема 1.

2. Автоморфизмы обобщенного шестиугольника $GH(6, 6)$

Доказательство теоремы 2 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. При этом графу Γ диаметра d на n вершинах отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \le 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для подходящих неотрицательных целых p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $k = p_1(0),\dots,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1,\dots,m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1, поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$, где I — единичная матрица порядка $d+1$.

Предложение [5, теорема 17.12]. *Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $\dfrac{n}{\langle u_j, w_j\rangle}$.*

Фактически из доказательства предложения следует, что w_j являются столбцами матрицы P, а $m_j u_j$ — строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(n,\mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0,\dots,W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g\in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A_1, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [6, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = n^{-1}\sum_{j=0}^d Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x,x^g)\in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t(t+1),t^2,t^2;1,1,t+1\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 5. *Пусть $g\in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $\dfrac{1}{6}t(t+1)^2(t^2+t+1)$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $\dfrac{1}{2}t(t+1)^2(t^2-t+1)$ и χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $\dfrac{1}{3}t(t^4+t^2+1)$. Тогда*

$$\chi_1(g) = \frac{(t+1)^2\alpha_0(g)+(2t+1)\alpha_1(g)+\alpha_2(g)-(t+1)^2(t^2+t+1)}{6t^2},$$

$$\chi_2(g) = \frac{(t-1)(t+1)\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_2(g)+(t+1)^2(t^2-t+1)}{2t^2},$$

$$\chi_3(g) = \frac{(t^2-t+1)\alpha_0(g)-(t-1)\alpha_1(g)+\alpha_2(g)-(t^4+t^2+1)}{3t^2}.$$

Доказательство. Используя числа пересечений, найденные в лемме 1, получим

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{t(t+1)^2(t^2+t+1)}{6} & \frac{(t+1)(t^2+t+1)(2t-1)}{6} & \frac{(t+1)(t^2+t+1)(t-2)}{6t} & -\frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{6t^2} \\ \frac{t(t+1)^2(t^2-t+1)}{2} & -\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{2} & -\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{2} & \frac{(t+1)^2(t^2-t+1)}{2t^2} \\ \frac{t(t^4+t^2+1)}{3} & -\frac{t^4+t^2+1}{3} & \frac{t^4+t^2+1}{3t} & -\frac{t^4+t^2+1}{3t^2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (t^3(t+1)\alpha_0(g)+t^2(2t-1)\alpha_1(g)+t(t-2)\alpha_2(g)-(t+1)\alpha_3(g))/(6t^2(t^2-t+1))$. Подставляя $\alpha_3(g) = (t+1)(t^4+t^2+1)-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_2(g)$, получим $\chi_1(g) = ((t+1)^2\alpha_0(g)+(2t+1)\alpha_1(g)+\alpha_2(g)-(t+1)^2(t^2+t+1))/(6t^2)$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (t^3(t+1)\alpha_0(g) - t^2\alpha_1(g) - t^2\alpha_2(g) + (t+1)\alpha_3(g))/(2t^2(t^2+t+1))$. Подставляя $\alpha_3(g) = (t+1)(t^4+t^2+1) - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g)$, получим $\chi_2(g) = ((t-1)(t+1)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + (t+1)^2(t^2-t+1))/(2t^2)$.

Наконец, $\chi_3(g) = (t^3\alpha_0(g) - t^2\alpha_1(g) + t\alpha_2(g) - \alpha_3(g))/(3t^2(t+1))$. Подставляя $\alpha_3(g) = (t+1)(t^4+t^2+1) - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g)$, получим $\chi_3(g) = ((t^2-t+1)\alpha_0(g) - (t-1)\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - (t^4+t^2+1))/(3t^2)$. Лемма доказана.

Известно существование обобщенных шестиугольников порядка (t,t) только в случае $t = p^n$ для простого числа p. Число 6 — наименьшее натуральное число, не являющееся степенью простого числа. Пусть Γ является графом коллинеарности обобщенного шестиугольника порядка $(6,6)$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{42,36,36;1,1,7\}$. Пусть g — автоморфизм простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 6. *Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и Ω — пустой граф. Тогда $p = 7, 31$ или 43, причем при $p = 43$ $(\alpha_1(g), \alpha_2(g)) \in \{(43,1588), (559,4168), (817,814)\}$, а при $p = 31$ $(\alpha_1(g), \alpha_2(g)) \in \{(31,1488), (31,8184), (217,5756), (403,3348), (589,930), (961,2790), (1147,372)\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как число вершин графа равно $7\cdot 31\cdot 43$, то p равно $7, 31$ или 43. Через Δ_i обозначим множество вершин a графа Γ таких, что $d(a, a^g) = i$. Каждая вершина из Δ_1 смежна с 36 вершинами из Δ_3. Обратно, каждая вершина из Δ_3 смежна не более чем с 7 вершинами из Δ_1. Поэтому $36\alpha_1(g) \le 7\alpha_3(g)$.

По лемме 5 имеем $\chi_1(g) = (49\alpha_0(g) + 13\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 2107)/216$. В силу целочисленности $\chi_1(g)$ получаем $\alpha_2(g) = 216r_1 - 13\alpha_1(g) + 163$. Аналогично $\chi_2(g) = (35\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 1519)/72$, $\alpha_1(g) = 6r_2 + 1$ и $\alpha_2(g) = 216r_1 - 78r_2 + 150$.

Пусть $p = 43$. Тогда $\alpha_i(g)$ делятся на 43 и получим, что $r_2 = 43r_2' + 7$, $r_1 = 43r_1' + 9$ и $\alpha_1(g) = 258r_2' + 43$, $\alpha_2(g) = 9288r_1' - 3354r_2' + 1548$. С учетом неравенств $\alpha_i(g) \ge 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) \le 9331$, $36\alpha_1(g) \le 7\alpha_3(g)$ получаем $(\alpha_1(g), \alpha_2(g)) \in \{(43,1588), (559,4168), (817,814)\}$.

Пусть $p = 31$. Тогда $\alpha_i(g)$ делятся на 31 и получим, что $r_2 = 31r_2' + 5$, $r_1 = 31r_1' + 8$ и $\alpha_1(g) = 186r_2' + 31$, $\alpha_2(g) = 6696r_1' - 2418r_2' + 1488$. С учетом неравенств $\alpha_i(g) \ge 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) \le 9331$, $36\alpha_1(g) \le 7\alpha_3(g)$ получаем $(\alpha_1(g), \alpha_2(g)) \in \{(31,1488), (31,8184), (217,5756), (403,3348), (589,930), (961,2790), (1147,372)\}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если Ω содержит вершину a и $p > 3$, то либо $p = 7$ и Ω является кокликой, либо $p = 5$ и выполняется одно из утверждений:*

(i) Ω состоит из 7 вершин степени 2 и двух 7-клик, причем каждая вершина из 7-клики смежна с одной вершиной степени 2;

(ii) Ω состоит из 7 вершин степени 7 и семи 7-клик, причем каждая вершина из 7-клики смежна с одной вершиной степени 7;

(iii) Ω содержит две вершины степени 7, находящиеся на расстоянии 3 в Γ, и является объединением семи геодезических путей, соединяющих эти вершины;

(iv) Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(1,6)$ или $GH(6,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p — нечетное число, отличное от 3. По лемме 2 либо $p = 5$, либо Ω — коклика и $p = 7$.

Пусть $p = 7$ и $\alpha_i(g) = 7w_i$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $49w_0 + 13w_1 + w_2 - 301$ делится на 216, т. е. $w_2 = 216r - 49w_0 - 13w_1 + 301$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $35w_0 - w_1 - w_2 + 217 = 84w_0 + 12w_1 - 84$ делится на 72, поэтому $7w_0 + w_1 - 7 \equiv 0 \pmod 6$. Отсюда $w_1 = 6s - w_0 + 1$ и $w_2 = 216r - 78s - 36w_0 + 288$.

Пусть $p = 5$. В силу теоремы 1 граф Ω либо

(1) является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(s,r)$, $r, s \equiv 1 \pmod 5$, либо

(2) является объединением $s+1$ вершин степени $r+1$ и $r+1$ клик порядка $s+1$, причем каждая вершина из $(s+1)$-клики смежна ровно с одной вершиной степени $r+1$, $r,s \equiv 1 \pmod 5$.

Рассмотрим случай (1). Имеем $(s,r) \in \{(1,1),(1,6),(6,1)\}$. Предположим, что $(s,r) = (1,1)$. Тогда Ω является шестиугольником, $\alpha_0(g) = 6$, $\alpha_1(g) = 30$. Из целочисленности значения характера $\chi_1(g)$ получаем, что $\alpha_2(g) = 5(216t-61)$ для некоторого целого числа t. Подставляя полученное выражение для $\alpha_2(g)$ в $\chi_2(g)$, получим, что $\chi_2(g) = (35\cdot 6 - 30 - 5\cdot 216t + 5\cdot 61 + 1519)/72$ не является целым числом, противоречие.

Если $(s,r) = (1,6)$ или $(6,1)$, то выполняется утверждение (iv) теоремы.

В случае (2) выполняются утверждения (i)–(iii) леммы. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если $p = 3$, то выполняется одно из утверждений*:

(i) Ω *является кликой размера* 1, 4 *или* 7;

(ii) $\Omega \subseteq a^{\perp}$;

(iii) Ω *содержится в* $\cup_{x\in L} x^{\perp}$ *для некоторой клики* L, $|L| \in \{4,7\}$;

(iv) Ω *является точечным графом обобщенного шестиугольника* $GH(3,3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения (i)–(iii) непосредственно следуют из теоремы 1.

Предположим, что Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(s,t)$, где $s \in \{3,6\}$ и $t \in \{3,6\}$.

В случае $s = 6$ имеем $t = 3$, число вершин v' в Ω равно 700, степень k' графа Ω равна 24 и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ $v'(k-k') = 700\cdot 18 = 12600$; противоречие с тем, что каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из Ω.

В случае $t = 6$ имеем $s = 3$, число вершин v' в Ω равно 400, степень графа k' Ω равна 21 и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ $v'(k-k') = 400\cdot 21 = 8400$. Поэтому $\Gamma - \Omega$ содержит 2100 вершин, смежных с 4-кликой из Ω, и 6831 вершин, не смежных с вершинами из Ω. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_2(g) = 21(72r-45)$. Теперь $\chi_2(g) = (35\cdot 400 - 2100 - 21(72r-45) + 1519)/72$; противоречие с тем, что числитель указанной дроби не делится на 8.

Значит параметры t и s равны 3 и выполняется утверждение (iv) леммы. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если $p = 2$, то выполняется одно из утверждений*:

(i) Ω *является* 7*-кликой*, $\alpha_1(g) = 6s$ *и* $\alpha_2(g) = 252 - 6s$ *для некоторого целого числа* s;

(ii) $\Omega \subseteq a^{\perp}$;

(iii) Ω *содержится в* $\cup_{x\in L} x^{\perp}$ *для некоторой клики* L, $|L| \in \{3,5,7\}$;

(iv) Ω *является точечным графом обобщенного шестиугольника* $GH(s,t)$, *где* $s \in \{2,4,6\}$ *и* $t \in \{2,4,6\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 2$. Тогда $|\Omega|$ — нечетное число. Далее, вершина u, смежная с u^g, попадает в g-допустимую 7-клику L, причем u смежна с 1, 3 или 5 вершинами из $L \cap \Omega$.

Вершина u с $d(u,u^g) = 2$ смежна с единственной вершиной из $[u] \cap [u^g] \cap \Omega$.

Для вершин u и u^g с $d(u,u^g) = 3$ один из геодезических путей, соединяющих эти вершины, g-допустим. Поэтому оставшиеся вершины этого 3-пути смежны с некоторой вершиной из Ω.

Итак, $\Gamma = \cup_{x\in\Omega}(x^bot \cup \Gamma_2(x))$.

Пусть Ω является кликой. Если вершина x из максимальной клики, содержащей Ω, не лежит в Ω, то существует вершина y с $d(x,y) = 2$ и $d(x,z) = 3$ для любой вершины $z \in \Omega$; противоречие. Значит, $|\Omega| = 7$, $\alpha_1(g) = 6s$. Учитывая, что вершины из $\Gamma - \Omega$, смежные с вершинами из Ω, сдвигаются на расстояние, не большее 2 и, наоборот, все вершины, сдвигаемые на расстояние, не большее 2, смежны с вершинами из Ω, получаем $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 7\cdot 36$ и $\alpha_2(g) = 252 - 6s$. Утверждение (i) доказано.

Утверждения (ii), (iii), (iv) следуют из теоремы 1. Лемма доказана.

Из лемм 6–9 вытекает теорема 2.

3. Характеризация вершинно транзитивного графа с массивом пересечений $\{42, 36, 36; 1, 1, 7\}$

В этом разделе предполагается, что дистанционно регулярный граф Γ имеет массив пересечений $\{42, 36, 36; 1, 1, 7\}$. Пусть G — группа автоморфизмов графа Γ. Из теоремы 2 следует, что $|G|$ делит $2^\beta 3^\gamma 5^\delta 7^\epsilon 31 \cdot 43$.

Лемма 10. *Группа G не содержит элементов порядка $31p$, где p — простое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G содержит элемент f порядка $31p$, где p — простое число. Положим $g = f^{31}$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Пусть $p = 2$. По лемме 9 подграф Ω либо является 7-кликой, либо содержится в $a^\perp$, либо содержится в $\cup_{x \in L} x^\perp$ для некоторой клики L, $|L| \in \{3, 5, 7\}$, либо является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(s, t)$, где $s \in \{2, 4, 6\}$ и $t \in \{2, 4, 6\}$. В любом случае f^p фиксирует вершину из Ω. Противоречие с леммой 2.

Пусть $p = 3$. По п. (i) леммы 8 Ω либо является кликой размера 1, 4 или 7, либо содержится в $a^\perp$, либо содержится в $\cup_{x \in L} x^\perp$ для некоторой клики L, $|L| \in \{4, 7\}$, либо является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(3, 3)$. В любом случае f^p фиксирует вершину из Ω. Противоречие с леммой 2.

Пусть $p = 5$. Ввиду леммы 7 подграф Ω либо состоит из 7 вершин степени 2 и двух 7-клик, причем каждая вершина из 7-клики смежна с одной вершиной степени 2, либо состоит из 7 вершин степени 7 и семи 7-клик, причем каждая вершина из 7-клики смежна с одной вершиной степени 7, либо содержит две вершины степени 7, находящиеся на расстоянии 3 в Γ, и является объединением семи геодезических путей, соединяющих эти вершины, либо является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(1, 6)$ или $GH(6, 1)$. В любом случае f^p фиксирует вершину из Ω. Противоречие с леммой 2.

Пусть $p = 7$. По лемме 7 подграф Ω либо пуст, либо является 7ω-кокликой. Так как по лемме 6 $\alpha_1(f^7)$ или $\alpha_2(f^7)$ не делятся на 7, то Ω — непустой граф. Значит, Ω является 7ω-кокликой и элемент g действует без неподвижных точек на орбитах с $\alpha_1(f^7)$ и $\alpha_2(f^7)$ (g фиксирует только орбиты элемента f^7, состоящие из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ); противоречие.

Наконец, $p \neq 43$, так как $\alpha_1(f^{43})$ или $\alpha_2(f^{43})$ не делится на 43. Лемма доказана.

До конца раздела будем предполагать, что группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ.

Лемма 11. *Группа G действует примитивно на множестве вершин графа* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что группа G действует импримитивно на $V(\Gamma)$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G.

Если N — абелева группа, то $|N| \in \{7, 31, 43\}$. Если $|N| = 7$ или $|N| = 43$, то элемент порядка 31 централизует N. Если же $|N| = 31$, то элемент порядка 7 централизует N; в любом случае получаем противоречие.

Значит, N — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Так как $|N : N_a| = 7$, то $N = A_7$ и элемент порядка 31 централизует N, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 12. *Группа G действует интранзитивно на множестве вершин графа* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 11 группа G действует примитивно на множестве вершин графа Γ. Поэтому цоколь H группы G является простой неабелевой группой и действует примитивно на множестве вершин графа Γ.

По лемме 10 граф простых чисел группы H содержит изолированную вершину 31. По классификации конечных простых групп с несвязным графом простых чисел (см. например, [7]) Таблица

Группа P	Ограничения на P	n_2	n_3
$A_{p-1}(q)$	$(p,q)\neq(3,2),(3,4)$	$\pi\Big(\frac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)}\Big)$	
$A_p(q)$	$(q-1)\|(p+1)$	$\pi\Big(\frac{q^p-1}{(q-1)}\Big)$	
${}^2A_{p-1}(q)$		$\pi\Big(\frac{q^p+1}{(q+1)(p,q+1)}\Big)$	
${}^2A_p(q)$	$(q+1)\|(p+1)$,	$\pi\Big(\frac{q^p+1}{(q+1)}\Big)$	
	$(p,q)\neq(3,3),(5,2)$		
$B_n(q)$	$n=2^m\geq 4$	$\pi\Big(\frac{q^n+1}{2}\Big)$	
$B_p(3)$		$\pi\Big(\frac{3^p-1}{2}\Big)$	
$C_n(q)$	$n=2^m\geq 2$	$\pi\Big(\frac{q^n+1}{(2,q-1)}\Big)$	
$C_p(q)$	$q\in\{2,3\}$	$\pi\Big(\frac{q^p-1}{(2,q-1)}\Big)$	
$D_p(q)$	$p\geq 5, q\in\{2,3,5\}$	$\pi\Big(\frac{q^p-1}{q-1}\Big)$	
$D_{p+1}(q)$	$q\in\{2,3\}$	$\pi\Big(\frac{q^p-1}{(2,q-1)}\Big)$	
${}^2D_n(q)$	$n=2^m\geq 4$	$\pi\Big(\frac{q^n+1}{(2,q+1)}\Big)$	
${}^2D_n(2)$	$n=2^m+1, m\geq 2$	$\pi(2^{n-1}+1)$	
${}^2D_p(3)$	$5\leq p\neq 2^m+1$	$\pi\Big(\frac{3^p+1}{4}\Big)$	
${}^2D_n(3)$	$n=2^m+1\neq p, m\geq 2$	$\pi\Big(\frac{3^{n-1}+1}{2}\Big)$	
$G_2(q)$	$2<q\equiv\varepsilon(3), \varepsilon=\pm 1$	$\pi(q^2-\varepsilon q+1)$	
${}^3D_4(q)$		$\pi(q^4-q^2+1)$	
$F_4(q)$	q нечетно	$\pi(q^4-q^2+1)$	
$A_1(q)$	$3\leq q\equiv\varepsilon(4), \varepsilon=\pm 1$	$\pi(q)$	$\pi\Big(\frac{q+\varepsilon}{2}\Big)$
$A_1(q)$	$q>2, q$ четно	$\pi(q-1)$	$\pi(q+1)$
${}^2D_p(3)$	$p=2^m+1, m\geq 1$	$\pi\Big(\frac{3^{p-1}+1}{2}\Big)$	$\pi\Big(\frac{3^p+1}{4}\Big)$
$G_2(q)$	$q\equiv(3)$	$\pi(q^2-q+1)$	$\pi(q^2-q+1)$
${}^2G_2(q)$	$q=3^{2m+1}>3$	$\pi(q-\sqrt{3q}+1)$	$\pi(q+\sqrt{3q}+1)$
$F_4(q)$	$q>2,$ q четно	$\pi(q^4+1)$	$\pi(q^4-q^2+1)$
${}^2F_4(q)$	$q=2^{2m+1}>2$	$\pi(q^4-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1)$	$\pi(q^4+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1)$

группа H изоморфна либо ${}^2B_2(q)$ и $GK(H)$ имеет четыре компоненты связности, три из которых, $\pi(q-1)$,$\pi(q-\sqrt{2q}+1)$ и $\pi(q+\sqrt{2q}+1)$, не содержат числа 2, либо одной из групп, представленных в таблице. Здесь n_2, n_3 — компоненты связности графа $GK(P)$, не содержащие 2.

Пусть $H \cong A_{p-1}(q)$. Тогда $\dfrac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)} = 31$.

Если p не делит $q-1$, то $q^p-1 = 31q-31$ или $q^p-31q+30 = 0$. Значит, q делит 30 и $q \in \{2,3,5\}$. При $q=2$ имеем $p=5$ и $H \cong A_4(2)$; противоречие с тем, что $|A_4(2)|$ не делится на 43. Если $q=3$, то $3^p=63$; противоречие. При $q=5$ имеем $p=3$; противоречие с тем, что $|A_2(5)|$ не делится на 43.

Если p делит $q-1$, то $q-1=mp$ и $q^p-1=31mp^2$. Поэтому $q^{p-1} < 31p+1$ и $p<10$, т. е. $p \in \{2,3,5,7\}$. Если $p=2$, то q нечетно и меньше 63, а значит, $q \in \{49,27,25,9,7,5,3\}$. В любом случае q^2-1 не делится на 31. Если $p=3$, то $q<63$, а значит, $q \in \{64,49,25,16,7,4\}$. Поэтому $q=25$, но $|A_2(25)| = 2^3(25^2-1)(25^3-1)$ делится на 13; противоречие. Если $p=5$, то $q<156$, а значит, $q \in \{81,16\}$. Поэтому $q=16$, но $|A_4(16)|$ делится на 11; противоречие.

Пусть $H \cong A_p(q)$. Тогда $(q^p-1)/(q-1)=31$; получаем противоречие, как и выше.

Для групп ${}^2A_{p-1}(q)$ и ${}^2A_p(q)$ аналогично группам $A_{p-1}(q)$ и $A(q)$ получаем противоречия.

Выпишем все группы из таблицы, имеющие компоненту связности, состоящую из числа 31. Это группы $C_5(2)$, $D_5(2)$, $D_6(2)$, $A_1(31)$, $A_1(32)$ и ${}^2B_2(32)$. Но порядки этих групп не делятся на 43. Лемма, а вместе с ней и следствие, доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Feit W., Higman G.** The non-existence of certain generalized polygons // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 114–131.
2. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Об автоморфизмах обобщенного шестиугольника порядка (3,27) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 34–44.
3. **Yanushka A.** Generalized hexagon of order (t,t)// Israel J. Math. 1976. Vol. 23, no. 3-4. P. 309–324.
4. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
5. **Cameron P.J., Van Lint J.H.** Graphs, codes and designs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. 240 p. (London Math. Society Lecture Note Ser. 43).
6. **Cameron P.J.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 223 p.
7. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, вып. 2. С. 359–369.

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: i_belousov@mail.ru

Поступила 14.02.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.544

ПОЛУПРОСТЫЕ ГРУППЫ, ИМЕЮЩИЕ ТОЧНОЕ ФИНИТАРНОЕ ПОДСТАНОВОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В. В. Беляев, Д. А. Швед

Показано, что локально конечная полупростая группа имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда любая ее финитно аппроксимируемая подгруппа локально нормальна.

Ключевые слова: группы финитарных подстановок.

V. V. Belyaev, D. A. Shved. Semisimple groups that have a faithful finitary permutation representation.

We show that a locally finite semisimple group has a faithful finitary permutation representation if and only if any of its residually finite subgroups is locally normal.

Keywords: finitary permutation groups.

1. Введение

Подстановка множества Ω называется *финитарной*, если она сдвигает лишь конечное число точек из Ω. Множество всех финитарных подстановок образует в симметрической группе $\mathrm{Sym}(\Omega)$ нормальную подгруппу, которая называется *финитарной симметрической группой* и обозначается $\mathrm{FSym}(\Omega)$. Любая подгруппа из $\mathrm{FSym}(\Omega)$ называется *группой финитарных подстановок* множества Ω, а группа всех финитарных четных подстановок множества Ω называется *знакопеременной группой* и обозначается $\mathrm{Alt}(\Omega)$.

Очевидно, что любая группа финитарных подстановок локально конечна, но не любая локально конечная группа имеет точное финитарное подстановочное представление. Так, например, еще в 1945 г. И.Д. Адо показал [8], что любая группа финитарных подстановок, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, является конечной и, следовательно, бесконечная черниковская группа не изоморфна никакой группе финитарных подстановок. В частности, квазициклическая группа C_{p^∞} для любого простого числа p не имеет точного финитарного подстановочного представления (см. также [4, утверждение 6.9]).

Д.А. Супруненко, изучая строение локально нильпотентных групп финитарных подстановок (см. [13; 14]), открыл ряд весьма специфических свойств таких групп, что привело его к постановке следующего вопроса.

В о п р о с [15, с. 53]. При каких условиях локально конечная группа изоморфна некоторой транзитивной подгруппе группы $\mathrm{FSym}(\Omega)$? Какие локально конечные группы допускают изоморфные вложения в группы $\mathrm{FSym}(\Omega)$?

В ходе дальнейшего исследования групп финитарных подстановок Д. Уигольд и П. Нойман обнаружили следующие особенности их строения.

Теорема 1 [7, теорема 1]. *Любая локально нормальная группа финитарных подстановок G вложима в ограниченное прямое произведение конечных групп. В частности, G — финитно аппроксимируемая группа.*

Теорема 2 [6, теорема 2]. *Любая финитно аппроксимируемая группа финитарных подстановок локально нормальна.*

Таким образом, следующие три условия для группы финитарных подстановок G равносильны (см. также [2, лемма 8.3] и [9, теорема 3.1]):

(F1) G — финитно аппроксимируемая группа;

(F2) G — локально нормальная группа;

(F3) G вложима в ограниченное прямое произведение конечных групп.

Понятно, что эти три условия для произвольной группы G не являются независимыми: (F3) влечет как (F1), так и (F2), т. е. любая подгруппа ограниченного прямого произведения конечных групп является финитно аппроксимируемой локально нормальной группой. С другой стороны, в случае счетной группы G Ф. Холл доказал [3, теорема 2.1], что (F1) и (F2) влекут (F3), т. е. счетная финитно аппроксимируемая локально нормальная группа вложима в ограниченное прямое произведение конечных групп. Так как из (F3) следует существование точного финитарного представления группы, то из результата Ф. Холла и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Счетная финитно аппроксимируемая группа G имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда G — локально нормальная группа.*

Равносильность условий (F1), (F2) и (F3) для любой группы финитарных подстановок достаточно сильно ограничивает ее подгрупповое строение, и естественно возникает задача изучения строения локально конечных групп, все финитно аппроксимируемые подгруппы которых являются локально нормальными группами. Такое исследование в случае простых групп было проведено в [9]. Одним из основных его результатов стала следующая

Теорема 4 [9, теорема 1.4]. *Для бесконечной простой локально конечной группы G следующие условия равносильны*:

1) *G изоморфна знакопеременной группе подстановок некоторого бесконечного множества*;

2) *любая финитно аппроксимируемая подгруппа из G локально нормальна.*

Непосредственно из теорем 2 и 4 вытекает

Теорема 5. *Простая локально конечная группа имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда любая ее финитно аппроксимируемая подгруппа локально нормальна.*

Данная работа посвящена обобщению теоремы 5 на класс полупростых локально конечных групп. Здесь под полупростой группой понимается группа, в которой нет неединичных локально разрешимых нормальных подгрупп. Но для локально конечной группы, все финитно аппроксимируемые подгруппы которой локально нормальны, условие полупростоты равносильно более слабому условию отсутствия неединичных абелевых нормальных подгрупп (см. следствие 3). Поэтому основной результат работы может быть сформулирован в более общем виде:

Теорема 6. *Пусть G — локально конечная группа, в которой все финитно аппроксимируемые подгруппы локально нормальны. Тогда справедлив по крайней мере один из двух случаев*:

1) *G содержит неединичную абелеву нормальную подгруппу*;

2) *G имеет точное финитарное подстановочное представление.*

Таким образом, справедлив следующий критерий, аналогичный теореме 5.

Следствие 1. *Полупростая локально конечная группа имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда любая ее финитно аппроксимируемая подгруппа локально нормальна.*

Отметим еще один результат, вытекающий из теоремы 6. В работе [5] Ф. Лайнен и О. Пуглизи рассматривали вопрос: в каком случае гомоморфный образ бесконечной транзитивной группы финитарных подстановок имеет точное финитарное подстановочное представление? С помощью теоремы 6 может быть выделен один такой случай:

Следствие 2. *Любой полупростой гомоморфный образ группы финитарных подстановок G имеет точное финитарное подстановочное представление. В частности, фактор-группа $G/\mathrm{S}(G)$, где $\mathrm{S}(G)$ — локально разрешимый радикал группы G, также имеет точное финитарное подстановочное представление.*

Отметим, что в следствии 2 отсутствует требование транзитивности группы G.

В следующих двух разделах работы излагаются необходимые нам вспомогательные результаты, а доказательства теоремы 6 и ее следствий даются в разд. 4.

2. Полупростые группы

Очевидно, любая локально конечная группа G содержит единственную максимальную локально разрешимую подгруппу. Эту подгруппу мы называем *локально разрешимым радикалом* группы G и обозначаем через $\mathrm{S}(G)$. Если $\mathrm{S}(G) = 1$, то группу G мы называем *полупростой*.

В случае конечной группы G условие полупростоты равносильно тому, что G не содержит неединичных абелевых нормальных подгрупп. Но если группа G бесконечна, то нетривиальность локально разрешимого радикала $\mathrm{S}(G)$, как легко показать на примерах, не влечет существование в G неединичных абелевых нормальных подгрупп. Таким образом, тривиальность абелевых нормальных подгрупп в локально конечных группах является более слабым условием, чем условие тривиальности локально разрешимого радикала.

В работах [12] и [16], результаты которых используются в данной работе, термин «полупростая группа» применялся в различных смыслах. Если в [12] полупростота означала тривиальность локально разрешимого радикала, то в [16] понятие полупростой группы имело более общий характер и означало отсутствие неединичных абелевых нормальных подгрупп.

Во избежание недоразумения сразу отметим, что в рассматриваемом в работе случае, т. е. в классе локально конечных групп, все финитно аппроксимируемые подгруппы которых локально нормальны, указанные два определения полупростых групп равносильны. Более того, равносильность двух определений полупростоты можно доказать, используя лишь локальную нормальность локально разрешимых финитно аппроксимируемых подгрупп. Для доказательства этого факта нам потребуется одно обобщение леммы 5.1 из [12]. Но сначала напомним некоторые определения, которые использовались в [12].

Пусть G — произвольная группа и $H \leqslant G$. Конечную подгруппу $K \leqslant G$ будем называть *сигнализатором* подгруппы H, если $K \cap H = 1$ и $H \leqslant \mathrm{N}_G(K)$. Сигнализатор K подгруппы H будем называть точным, если действие сопряжением группы H на K является точным, т. е. $\mathrm{C}_H(K) = 1$. Наконец, последовательность подгрупп $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ мы будем называть *башней сигнализаторов*, если H_{i+1} — сигнализатор подгруппы $\langle H_1, \ldots, H_i\rangle$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *В локально конечной группе G, не содержащей неединичных абелевых нормальных подгрупп, для любой конечной подгруппы из $\mathrm{S}(G)$ найдется точный нильпотентный сигнализатор, также содержащийся в $\mathrm{S}(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H — произвольная конечная подгруппа из $\mathrm{S}(G)$. Понятно, можно считать, что $H \neq 1$. Из условий, наложенных на группу G, следует, что в G нет неединичных нильпотентных нормальных подгрупп и, в частности, нормальное замыкание в G любого элемента $h \in H^{\#}$ не является нильпотентной группой. Значит, для любого $h \in H^{\#}$ найдется такое конечное подмножество $S_h \subseteq G$, что $\langle h^x \mid x \in S_h\rangle$ не является нильпотентной группой класса $\leqslant 2$.

Пусть $L = \langle h, S_h \,|\, h \in H^{\#} \rangle$ и K — произвольная максимальная нормальная в L нильпотентная подгруппа класса $\leqslant 2$ из $L \cap \mathrm{S}(G)$. Если $K \cap H$ содержит неединичный элемент h, то $\langle h^x \,|\, x \in S_h \rangle \leqslant K$, что противоречит выбору S_h. Значит, $K \cap H = 1$ и, учитывая включение $\mathrm{C}_L(K) \cap \mathrm{S}(G) \leqslant K$, мы получаем искомый нильпотентный сигнализатор K подгруппы H.

Лемма 2. *Пусть G — локально конечная группа, причем $\mathrm{S}(G) \neq 1$ и любая финитно аппроксимируемая подгруппа из $\mathrm{S}(G)$ локально нормальна. Тогда G содержит неединичную абелеву нормальную подгруппу.*

Доказательство. Предположим, что группа G не содержит неединичных абелевых нормальных подгрупп. Возьмем произвольную неединичную конечную подгруппу H из $\mathrm{S}(G)$ и определим индуктивно башню сигнализаторов $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$, полагая, что $H_1 = H$ и H_{i+1} — произвольный точный сигнализатор из $\mathrm{S}(G)$ подгруппы $\langle H_1, \ldots, H_i \rangle$, который для $i \geq 1$ найдется по лемме 1.

Подгруппа $L = \langle H_i \,|\, i \in \mathbb{N} \rangle$ содержится, очевидно, в $\mathrm{S}(G)$ и является финитно аппроксимируемой. Значит, по условию леммы L — локально нормальная группа и нормальное замыкание подгруппы H_1 в L содержится в подгруппе $\langle H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$ для некоторого $n \geqslant 1$. Но тогда $[H_1, H_{n+1}] \leqslant H_{n+1} \cap \langle H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle = 1$ и поэтому $H_1 \leqslant \mathrm{C}_G(H_{n+1})$, что противоречит выбору точного сигнализатора H_{n+1} подгруппы $\langle H_1, \ldots, H_n \rangle$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Следствие 3. *Для локально конечной группы G, все финитно аппроксимируемые подгруппы которой локально нормальны, следующие два условия равносильны*:

1) $\mathrm{S}(G) = 1$;

2) *G не содержит неединичных абелевых нормальных подгрупп.*

Перейдем теперь к рассмотрению строения полупростых локально конечных групп, в которых все финитно аппроксимируемые подгруппы локально нормальны.

Лемма 3 [12, лемма 6.3]. *Пусть G — неединичная полупростая локально конечная группа, в которой любая локально разрешимая финитно аппроксимируемая подгруппа локально нормальна. Тогда G содержит субнормальную простую подгруппу.*

Далее *простыми компонентами* группы мы будем называть ее субнормальные неабелевы простые подгруппы. Из леммы 3 следует, что любая неединичная полупростая локально конечная группа G, в которой все финитно аппроксимируемые подгруппы локально нормальны, содержит хотя бы одну простую компоненту, причем согласно теореме 4 любая бесконечная простая компонента группы G изоморфна бесконечной знакопеременной группе.

Заметим, что различные простые компоненты произвольной группы поэлементно перестановочны. Этот факт следует из более общего утверждения: различные совершенные квазипростые субнормальные подгруппы поэлементно перестановочны. Доказательство этого утверждения в случае конечных групп можно найти, например, в [1, утверждения 31.4 и 31.5]. В общем случае индуктивное доказательство из [1] остается практически без изменений, меняется лишь индуктивный параметр: вместо порядка группы берутся длины субнормальных рядов.

Таким образом, в полупростой локально конечной группе G, все финитно аппроксимируемые подгруппы которой локально нормальны, подгруппа, порожденная всеми простыми компонентами, есть прямое произведение простых компонент. Далее подгруппу, порожденную всеми простыми компонентами группы G, мы будем называть *цоколем* группы G и обозначать через $\mathrm{Soc}(G)$.

Так как центр цоколя $\mathrm{Soc}(G)$ тривиален, то $\mathrm{C}_G(\mathrm{Soc}(G)) \cap \mathrm{Soc}(G) = 1$. Если $\mathrm{C}_G(\mathrm{Soc}(G)) \neq 1$, то, поскольку группа $\mathrm{C}_G(\mathrm{Soc}(G))$ полупроста, она согласно лемме 3 содержит субнормальную простую подгруппу, что противоречит определению цоколя $\mathrm{Soc}(G)$. Следовательно,

$$\mathrm{C}_G(\mathrm{Soc}(G)) = 1$$

и группа G вкладывается в $\mathrm{Aut}(\mathrm{Soc}(G))$. Для изучения действия группы G на своем цоколе нам потребуется новое понятие локально тождественного автоморфизма группы, определение и некоторые простые свойства которого излагаются в следующем разделе работы.

3. Локально тождественные автоморфизмы

Пусть G — произвольная, возможно нехаусдорфова, топологическая группа. Автоморфизм φ группы G будем называть *локально тождественным*, если φ действует тождественно на некоторой окрестности 1. Очевидно, что множество всех локально тождественных автоморфизмов топологической группы G образует подгруппу в группе $\mathrm{Aut}(G)$.

Любую группу можно топологизировать, взяв в качестве базиса окрестностей 1 централизаторы конечных подмножеств из группы. Топологию, определенную таким способом, мы будем называть *централизаторной*. Понятно, что автоморфизм φ группы G, снабженной централизаторной топологией, является локально тождественным тогда и только тогда, когда $\mathrm{C}_G(\varphi)$ содержит $\mathrm{C}_G(F)$ для некоторого конечного подмножества F из группы G. В частности, любой внутренний автоморфизм группы является локально тождественным относительно централизаторной топологии.

Далее в работе нам потребуются два утверждения, касающиеся групп локально тождественных автоморфизмов. Заметим, что, говоря о локально тождественных автоморфизмах группы, мы должны указывать и топологию группы. Ради краткости ниже мы всюду опускаем это указание, считая, что все группы снабжены централизаторной топологией.

Лемма 4. *Группа локально тождественных автоморфизмов полупростой локально нормальной группы имеет точное финитарное подстановочное представление.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольная FC-группа, т. е. группа с конечными классами сопряженных элементов. Так как централизатор любого конечного подмножества из G имеет конечный индекс в G, то каждый локально тождественный автоморфизм группы G действует тождественно на некоторой подгруппе конечного индекса в G и, значит, является финитарным автоморфизмом. Следовательно, группа локально тождественных автоморфизмов FC-группы G содержится в группе всех финитарных автоморфизмов группы G. Воспользовавшись следствием 2 из [16], согласно которому группа всех финитарных автоморфизмов полупростой группы имеет точное финитарное подстановочное представление, мы получаем заключение леммы.

Лемма 5. *Пусть Ω — бесконечное множество. Тогда для любого локально тождественного автоморфизма φ группы $\mathrm{Alt}(\Omega)$ найдется подстановка $g \in \mathrm{FSym}(\Omega)$ такая, что $\varphi(x) = g^{-1}xg$ для всех $x \in \mathrm{Alt}(\Omega)$. Обратно, любая финитарная подстановка множества Ω индуцирует сопряжением локально тождественный автоморфизм группы $\mathrm{Alt}(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что любой автоморфизм бесконечной знакопеременной группы $\mathrm{Alt}(\Omega)$ индуцируется сопряжением с помощью некоторой подстановки множества Ω (см., например, [2, теорема 8.2A] или [11, теорема 5.1]). Следовательно, для произвольного локально тождественного автоморфизма φ группы $\mathrm{Alt}(\Omega)$ найдется подстановка $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ такая, что $\varphi(x) = g^{-1}xg$ для всех $x \in \mathrm{Alt}(\Omega)$.

Воспользовавшись определением локально тождественного автоморфизма, выберем такое конечное подмножество $F \subset \mathrm{Alt}(\Omega)$, что подстановка g перестановочна с любой подстановкой из централизатора подмножества F в $\mathrm{Alt}(\Omega)$. Так как множество неподвижных точек $\mathrm{fix}(F)$ бесконечно, то для любой точки $\alpha \in \mathrm{fix}(F)$ найдутся подстановки $x, y \in \mathrm{Alt}(\Omega)$, для которых $\mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y) = \{\alpha\}$ и $\mathrm{supp}(x) \cup \mathrm{supp}(y) \subset \mathrm{fix}(F)$. Но тогда

$$\{\alpha^g\} = \mathrm{supp}(x^g) \cap \mathrm{supp}(y^g) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y) = \{\alpha\}\,,$$

и поэтому $\mathrm{supp}(g) \subseteq \mathrm{supp}(F)$. Таким образом, g — финитарная подстановка множества Ω и первое утверждение леммы справедливо.

Обратно, пусть g — произвольная финитарная подстановка множества Ω. В силу конечности множества $\mathrm{supp}(g)$ найдется такое непустое конечное подмножество $F \subset \mathrm{Alt}(\Omega)$, что для любой точки $\alpha \in \mathrm{supp}(g)$ и некоторых $x, y \in F$ имеем $\{\alpha\} = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y)$. Но тогда для любой подстановки h из централизатора подмножества F в группе $\mathrm{Alt}(\Omega)$ выполняются равенства

$$\left\{\alpha^h\right\} = \mathrm{supp}(x^h) \cap \mathrm{supp}(y^h) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y) = \{\alpha\}$$

и поэтому $\mathrm{supp}(h) \cap \mathrm{supp}(g) = \varnothing$. Значит, $gh = hg$ и второе утверждение леммы также верно.

Из леммы 5 непосредственно вытекает

Следствие 4. *Группа локально тождественных автоморфизмов бесконечной знакопеременной группы* $\mathrm{Alt}(\Omega)$ *изоморфна* $\mathrm{FSym}(\Omega)$.

4. Доказательства основных результатов

Следующее утверждение является, по существу, основой доказательства теоремы 6. Оно приводится в несколько более сильной форме, чем это требуется в данной работе.

Лемма 6. *Пусть G — локально конечная группа с тривиальным центром, и φ — автоморфизм конечного порядка группы G. Предположим, что на любой φ-инвариантной финитно аппроксимируемой локально нормальной подгруппе $H \leqslant G$ автоморфизм φ индуцирует финитарный автоморфизм, т. е. индекс $|H : \mathrm{C}_H(\varphi)|$ конечен. Тогда φ — локально тождественный автоморфизм группы G.*

Доказательство. Предположим противное: автоморфизм φ не является локально тождественным, т. е. $\mathrm{C}_G(\varphi)$ не содержит централизатор никакого конечного подмножества из G.

Построим индуктивно последовательность конечных φ-инвариантных подгрупп $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющих для любого $i \in \mathbb{N}$ двум условиям:

Условие A: $[\varphi, H_i] \neq 1$.

Условие B: $\langle H_1, \ldots, H_i\rangle = H_1 \times \ldots \times H_i$.

База индуктивного построения. Так как $\mathrm{C}_G(\varphi)$ не содержит централизатор никакого конечного подмножества из G, то φ действует нетождественно на G. Значит найдется элемент $h_1 \in G$, для которого $\varphi(h_1) \neq h_1$. Положим $H_1 = \langle \varphi^i(h_1) \,|\, i \in \mathbb{Z}\rangle$. Из локальной конечности группы G и конечности порядка автоморфизма φ следует, что H_1 — конечная φ-инвариантная подгруппа и в силу выбора элемента h_1, $[\varphi, H_1] \neq 1$.

Шаг индуктивного построения. Пусть $n \geqslant 1$ и в группе G уже выбраны подгруппы $H_1, \ldots, H_n$, удовлетворяющие условиям A и B для любого $i \leqslant n$. Так как $\mathrm{Z}(G) = 1$, то в G найдется конечная φ-инвариантная подгруппа K, содержащая подгруппу $\langle H_1, \ldots, H_n\rangle$, такая, что $\mathrm{C}_G(K) \cap \langle H_1, \ldots, H_n\rangle = 1$. Автоморфизм φ согласно нашему предположению действует нетождественно на $\mathrm{C}_G(K)$, и поэтому найдется элемент $h_{n+1} \in \mathrm{C}_G(K)$, для которого $\varphi(h_{n+1}) \neq h_{n+1}$. Полагая $H_{n+1} = \langle \varphi^i(h_{n+1}) \,|\, i \in \mathbb{Z}\rangle$, мы получаем конечную φ-инвариантную подгруппу, удовлетворяющую условиям A и B.

Рассмотрим теперь подгруппу $H = \langle H_i \,|\, i \in N\rangle$. Из наложенных на подгруппы условий A и B следует, что H есть прямое произведение подгрупп $H_i, i \in \mathbb{N}$ и поэтому H является φ-инвариантной финитно аппроксимируемой локально нормальной подгруппой. Также из условия A следует, что $[\varphi, H] = \langle [\varphi, H_i] \,|\, i \in \mathbb{N}\rangle$ — бесконечная группа. Значит, индекс $|H : \mathrm{C}_H(\varphi)|$ бесконечен, а это противоречит условию леммы.

Лемма 7. *Пусть G — локально конечная группа, все финитно аппроксимируемые подгруппы которой локально нормальны, $N \lhd G$ и $\mathrm{Z}(N) = 1$. Тогда любой элемент из G действует сопряжением локально тождественно на N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть g — произвольный элемент из G и H — произвольная g-инвариантная финитно аппроксимируемая подгруппа из N. Тогда подгруппа $\langle g, H\rangle$ также является финитно аппроксимируемой и согласно условию леммы $\langle g, H\rangle$ — локально нормальная группа. Значит, индекс $|H : \mathrm{C}_H(g)|$ конечен и действие сопряжением элемента g на N удовлетворяет условию леммы 6, согласно которой g действует на N локально тождественно.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6. Пусть G — локально конечная группа, в которой все финитно аппроксимируемые подгруппы локально нормальны. Допустим, что G не содержит неединичных абелевых нормальных подгрупп. В этом случае по следствию 3 группа G является полупростой. Пусть $\mathrm{Soc}(G)$ — цоколь группы G, определенный в разд. 2, H — подгруппа из $\mathrm{Soc}(G)$, порожденная всеми конечными простыми компонентами группы G в том случае, когда конечные простые компоненты в группе G найдутся, и $H = 1$, если конечных простых компонент в группе G нет. Пусть K — подгруппа из $\mathrm{Soc}(G)$, порожденная всеми бесконечными простыми компонентами, если таковые найдутся, и $K = 1$ в противном случае.

Очевидно, $\mathrm{Soc}(G) = K \times H$, K и H — нормальные в G полупростые подгруппы, причем H — локально нормальная группа, K разлагается в прямое произведение простых компонент, изоморфных бесконечным знакопеременным группам.

Согласно лемме 7 любой элемент группы G действует локально тождественно как на подгруппе K, так и на подгруппе H. Заметим, что централизатор любого конечного подмножества из K нетривиально пересекается с каждой простой компонентой из K и содержит почти все простые компоненты из K, кроме некоторого конечного множества компонент. Отсюда легко следует, что любой элемент $g \in G$ действует тождественно на почти всех простых компонентах из K, кроме некоторого конечного множества компонент, на которых согласно лемме 7 элемент g действует локально тождественно.

Таким образом, действие группы G на своем цоколе $\mathrm{Soc}(G)$ индуцирует вложение группы G в ограниченное прямое произведение групп локально тождественных автоморфизмов всех бесконечных простых компонент и группы локально тождественных автоморфизмов полупростой локально нормальной группы H. Согласно лемме 4 и следствию 4 эти группы локально тождественных автоморфизмов имеют точные финитарные подстановочные представления, а так как ограниченное прямое произведение групп финитарных подстановок также имеет точное финитарное подстановочное представление, то G имеет точное финитарное подстановочное представление.

Непосредственно из теорем 2 и 6 мы получаем следствие 1.

Обратимся, наконец, к следствию 2. Согласно [10, теорема 6.1] любой финитно аппроксимируемый гомоморфный образ группы финитарных подстановок является локально нормальной группой. Значит, в гомоморфном образе группы финитарных подстановок все финитно аппроксимируемые подгруппы локально нормальны. Применяя теорему 6, получаем заключение следствия 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 274 p.
2. **Dixon J.D., Mortimer B.** Permutation groups. N. Y.: Springer-Verlag, 1996. 346 p.
3. **Hall P.** Periodic FC-groups // J. London Math. Soc. 1959. Vol. 34. P 289–304.
4. **Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F.** Locally finite groups. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973. 210 p.
5. **Leinen F., Puglisi O.** Finitary representations and images of transitive finitary permutation groups // J. Algibra. 1999. Vol. 222, no. 2. P. 524–549.
6. **Neumann P.** The structure of finitary permutation groups // Arch. Math. 1976. Vol. 27, no. 3. P. 3–17.
7. **Wiegold J.** Groups of finitary permutations // Arch. Math. 1974. Vol. 25. P. 466-469.
8. **Адо И.Д.** О подгруппах счетной симметрической // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. С. 15–17.
9. **Беляев В.В.** Локальные характеризации бесконечных знакопеременных групп и групп лиевского типа // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 4. С. 369–390.

10. **Беляев В.В.** Строение p-групп конечных преобразований // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 5. С. 453–478.
11. **Беляев В.В.** Неприводимые периодические группы финитарных преобразований // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 2. С. 109–134.
12. **Беляев В.В.** Группы с финитарными классами сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 46–61.
13. **Супруненко Д.А.** О локально нильпотентных подгруппах бесконечной симметрической группы // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 2. С. 302–304.
14. **Супруненко Д.А.** О неразложимости транзитивных подгрупп группы $\mathrm{SF}(X)$ // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186, № 4. С. 779–780.
15. **Супруненко Д.А.** Группы матриц. Москва: Наука, 1972. 350 с.
16. **Швед Д.А.** Финитарные автоморфизмы полупростых групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 312–315.

Беляев Виссарион Викторович Поступила 20.09.2013

д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: v.v.belyaev@list.ru

Швед Даниил Андреевич
e-mail: danshved@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 517.983.54

РАЗДЕЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА[1]

В. В. Васин, Е. О. Соболева

Исследуется линейное операторное уравнение первого рода, решение которого содержит различные типы особенностей, а именно наряду с гладким фоном имеются изломы и разрывы. Для построения устойчивого приближенного решения предлагается модифицированный метод Тихонова со стабилизатором в виде суммы трех функционалов, каждый из которых учитывает специфику соответствующей компоненты решения. Формулируются теоремы сходимости метода, дается обоснование общей схемы дискретной аппроксимации регуляризующего алгоритма и обсуждаются результаты численных экспериментов.

V. V. Vasin, E. O. Soboleva. Separate reconstruction of solution components with singularities of various types for linear operator equations of the first kind.

A linear operator equation of the first kind is investigated. The solution of this equation contains singularities of various types; namely, along with a smooth background, the solution has sharp bends and jump discontinuities. For the construction of a stable approximated solution, a modified Tikhonov method with a stabilizer in the form of the sum of three functionals is proposed. Each of the functionals accounts for the specific character of the corresponding component of the solution. Convergence theorems are formulated, the general discrete approximation scheme of the regularizing algorithm is justified, and results of numerical experiments are discussed.

Keywords: Tikhonov method, ill-posed problem, solution with singularities, regularizing algorithm.

1. Введение

Рассматривается некорректно поставленная задача в форме операторного уравнения первого рода

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

на паре нормированных пространств U, F с линейным непрерывным оператором $A\colon U \to F$, для которого обратный оператор A^{-1} существует и разрывен; правая часть задана с погрешностью $||f - f_\delta|| \le \delta$.

Хорошо известно, что при численном решении некорректной задачи, когда в искомой функции гладкие участки перемежаются с разрывными, возникает проблема построения стабилизатора в тихоновской (вариационной) регуляризации, поскольку традиционные квадратичные функционалы заглаживают тонкую структуру (разрывы, близкие экстремумы и др.). Оказалось, что для восстановления разрывной части более приемлемым стабилизатором является классическая или обобщенная вариация, чего нельзя сказать об аппроксимации гладкой компоненты решения [1–3].

Поэтому неслучайно возникла идея устойчивого восстановления решения некорректной задачи в виде суммы нескольких компонент, которая широко используется при обработке зашумленных сигналов (см. [4–6]). Как правило, ограничиваются представлением решения в форме двух слагаемых $u = u_1 + u_2$, первое из которых u_1 соответствует гладкой компоненте, а второе

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00106) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

u_2 — разрывной компоненте решения. В соответствии с этой априорной информацией стабилизирующий функционал строится в виде суммы двух функционалов $\Omega(u) = \Omega_1(u_1) + \Omega_2(u_2)$, каждый из которых зависит только от одной из компонент и учитывает ее априорные свойства. В качестве Ω_1 обычно используется норма пространства L_2, а в качестве Ω_2 — обобщенная вариация (см., например, [4] и ссылки в ней).

В некоторых некорректно поставленных задачах из физического смысла решения вытекает, что наряду с гладким фоном и разрывами в решении можно ожидать наличие пикообразных форм и изломов (см. [7, разд. 10.1.1]), допускающих разрывы производных. В этой ситуации естественно выделить еще одну компоненту в решении и добавить в стабилизатор еще один функционал Ω_3. В качестве функционала Ω_3 предлагается использовать норму пространства Липшица [8], что позволяет установить равномерную сходимость регуляризованного семейства приближенных для третьей непрерывной компоненты в условиях ее возможной недифференцируемости.

С учетом сказанного метод регуляризации Тихонова принимает следующий вид:

$$\min\Big\{||Au - f_\delta||_F^2 + \alpha\,[||u_1||_{L_q}^2 + J(u_2) + ||u_3||_{H^\mu}]\colon$$
$$u_1 \in L_q(D),\ u_2 \in U_2 = \{u_2\colon J(u_2) < \infty\},\ u_3 \in H^\mu(\bar{D})\Big\} = \Phi^*. \tag{1.2}$$

Здесь $u = u_1 + u_2 + u_3$, $J(u)$ — обобщенная вариация, определяемая формулой [9]

$$J(u) = \sup\Big\{\int\limits_D u \operatorname{div} v\, dx\colon v \in C_0^1(D, \mathbb{R}^m),\ |v(x)| \le 1\Big\};$$

$||u||_{H^\mu}$ — норма пространства Липшица $H^\mu(\bar{D})$, определяемая соотношением [8]

$$||u||_{H^\mu} = \max_{x\in\bar{D}} |u(x)| + \sup_{x_i, x_j \in \bar{D}} \frac{|u(x_i) - u(x_j)|}{||x_i - x_j||^\mu},$$

где $||x_i - x_j|| = \big(\sum_{\nu=1}^m |x_i^\nu - x_j^\nu|^2\big)^{1/2}$, $0 < \mu \le 1$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, $\bar{D}$ — ограниченное подмножество из $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющее свойству Липшица [10].

Представленный в (1.2) набор стабилизаторов Ω_i обусловлен практикой решения некорректных задач с типичными особенностями решения (разрывы, изломы). Разумеется, выбранная тройка функционалов Ω_i не исчерпывает других возможных типов стабилизаторов. Выбор стабилизаторов (их количество и форма) для данной конкретной задачи определяется исключительно априорной информацией об искомом решении.

Целью данной работы является обоснование сходимости метода Тихонова как для каждой компоненты, так и для решения в целом в соответствующей топологии (разд. 2), а также доказательство устойчивости их дискретных аппроксимаций (разд. 3). Заметим, что некоторые из представленных здесь результатов ранее были анонсированы первым из авторов в работах [11; 12].

2. Анализ сходимости метода регуляризации

Следующая лемма устанавливает существование решения уравнения (1.1), компоненты которого минимизируют значение выпуклого стабилизирующего функционала, что можно считать аналогом нормального решения в смысле Тихонова.

Лемма 2.1. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $L_p(D)$ в банахово пространство F, где $1 < p \le m/(m-1)$, $p \le q$, область $D \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица* [10] *и уравнение* (1.1) *имеет единственное решение $\hat{u} = A^{-1}f$.*

Тогда существует, возможно неединственное, решение $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ *задачи*

$$\min\left\{||u_1||^2_{L_q} + J(u_2) + ||u_3||_{H^\mu} \colon A(u_1 + u_2 + u_3) = f,\ u_1 \in L_q,\ u_2 \in U_2,\ u_3 \in H^\mu\right\} = \Psi^*, \quad (2.1)$$

причем $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 = \hat{u}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам понадобятся при доказательстве леммы и основной теоремы сходимости следующие утверждения, установленные в [13, теоремы 2.3, 2.5, лемма 4.1].

Теорема 2.1. *Обобщенная вариация* $J(u)$ *слабо полунепрерывна снизу в пространстве* $L_p(D)$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть множество* S *ограничено относительно* BV*-нормы*:

$$||u||_{BV} = ||u||_{L_1(D)} + J(u).$$

Тогда S *относительно компактно в* $L_p(D)$ *для* $1 \le p < m/(m-1)$ *и относительно слабо компактно в* $L_p(D)$ *при* $p = m/(m-1)$, $m \ge 2$.

Теорема 2.3. *Предположим, что* A *непрерывен из* $L_p(D)$ *в* F *для* $1 \le p \le m/(m-1)$ *и* $u = 1$ *не является решением однородного уравнения* $Au = 0$.

Тогда для некоторой константы c *выполнено неравенство*

$$c||u||_{BV} \le ||A(u) - f||^2_F + \alpha\, J(u),$$

т. е. функционал Тихонова BV*-коэрцитивен.*

Обратимся теперь к доказательству леммы. Пусть (u_1^n, u_2^n, u_3^n) образуют минимизирующую последовательность для целевого функционала в задаче (2.1), т. е.

$$\lim_{n\to\infty}[||u_1^n||^2_{L_q} + J(u_2^n) + ||u_3^n||_{H^\mu}] = \psi^*,$$

что влечет ограниченность последовательностей

$$||u_1^n||_{L_q} \le c_1, \qquad J(u_2^n) \le c_2, \qquad ||u_3^n||_{H^\mu} \le c_3, \quad (2.2)$$

$$||Au_2^n - f|| = ||f - Au_1^n - Au_3^n|| \le c_4. \quad (2.3)$$

Тогда на основании оценок (2.2), (2.3) и теоремы 2.3 имеем

$$||u_2^n||_{BV} \le c_5. \quad (2.4)$$

Принимая во внимание компактность оператора вложения $I \colon H^\mu(\bar{D}) \to C(\bar{D})$ (следует из обобщенной теоремы Арцела) и теорему 2.2, из соотношений (2.2)–(2.4) заключаем, что существуют подпоследовательности $u_1^{n_k}, u_2^{n_k}, u_3^{n_k}$ такие, что

$$u_1^{n_k} \to u_1 \text{ (слабо) в } L_q, \qquad u_2^{n_k} \to u_2 \text{ (слабо) в } L_p, \qquad u_3^{n_k} \to u_3 \text{ равномерно на } \bar{D}.$$

Поскольку норма в пространстве L_q и обобщенная вариация J в L_p в силу теоремы 2.1 слабо полунепрерывны снизу, а норма пространства Липшица полунепрерывна снизу относительно равномерной сходимости (см. [12, теорема 2.1]), приходим к соотношениям

$$d \le ||u_1||^2_{L_q} + J(u_2) + ||u_3||_{H_\mu} \le \liminf_{k\to\infty}[||u_1^{n_k}||^2_{L_q} + J(u_2^{n_k}) + ||u_3^{n_k}||_{H^\mu}]$$
$$\le \limsup_{k\to\infty}[||u_1^{n_k}||^2_{L_q} + J(u_2^{n_k}) + ||u_3^{n_k}||_{H^\mu}] \le d;$$

при этом ввиду слабой непрерывности оператора из L_p в F имеем

$$0 \leq ||A(u_1 + u_2 + u_3) - f|| \leq \liminf_{k\to\infty} ||A(u_1^{n_k} + u_2^{n_k} + u_3^{n_k}) - f|| = 0,$$

т. е. тройка (u_1, u_2, u_3) реализует минимум в задаче (2.1).

Лемма доказана.

Заметим, что решение $\hat{u}$ уравнения (1.1) неоднозначно представимо через свои компоненты, например наряду с $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 = \hat{u}$ тройка $\hat{u}_1 + c_1$, $\hat{u}_2 + c_2$, $\hat{u}_3 - (c_1 + c_2)$ также в сумме дает решение $\hat{u}$. В лемме 2.1 утверждается, что это решение, в частности, может быть представлено тройкой компонент $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$, $\hat{u}_3$, которые реализуют минимум выпуклого целевого функционала. Так как функционал не является строго выпуклым, такая тройка определяется также неоднозначно.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1, *причем пространство* F *строго выпукло. Тогда при* $\alpha > 0$ *существует, возможно неединственное, решение* $(u_1^\alpha, u_2^\alpha, u_3^\alpha)$ *задачи* (1.2) *и при выборе параметров* $\alpha(\delta)$, $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *справедливы свойства*:

1) $\{u_1^{\alpha(\delta)}\}$ *относительно компактно в* L_q;

2) $\{u_2^{\alpha(\delta)}\}$ *относительно компактно в* L_p *при* $1 < p < m/(m-1)$ *и относительно слабо компактно в* L_p *при* $1 < p = m/(m-1)$, $m \geq 2$;

3) $\{u_3^{\alpha(\delta)}\}$ *относительно компактно в пространстве непрерывных функций* $C(\bar{D})$;

4) *каково бы ни было решение* $(u_1^\alpha, u_2^\alpha, u_3^\alpha)$ *задачи* (1.2), *оно определяет один и тот же элемент* $u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha + u_3^\alpha$ *для всех таких троек*;

5) *если* $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$ *— соответствующие предельные точки последовательностей* $u_1^{\alpha(\delta_k)}$, $u_2^{\alpha(\delta_k)}$, $u_3^{\alpha(\delta_k)}$, *то тройка* $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ *является решением задачи* (2.1) *и, следовательно,* $\hat{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3$ *совпадает с решением задачи* (1.1);

6) $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_2^{\alpha(\delta_k)}) = J(\tilde{u}_2), \qquad \lim\limits_{k\to\infty} ||u_3^{\alpha(\delta_k)}||_{H^\mu} = ||\tilde{u}_3||_{H^\mu}.$

Доказательство. Пусть (u_1^n, u_2^n, u_3^n) — некоторая минимизирующая последовательность в задаче (1.2), т. е. для целевого функционала имеем $\Phi(u_1^n, u_2^n, u_3^n) \to \Phi^*$. Следовательно, для некоторых констант c_i $(i = 1, 2, 3)$ справедливы равномерные по n оценки

$$||u_1^n||_{L_q} \leq c_1, \qquad J(u_2^n) \leq c_2, \qquad ||u_3^n||_{H^\mu} \leq c_3. \tag{2.5}$$

Поскольку $\Phi(u_1^n, u_2^n, u_3^n) \leq \Phi^* + \varepsilon$ для некоторой величины $\varepsilon > 0$, то

$$\sqrt{\Phi^* + \varepsilon} \geq ||A(u_1^n + u_2^n + u_3^n) - f_\delta|| \geq ||Au_2^n - f_\delta|| - ||Au_1^n + Au_3^n||,$$

т. е. справедливо неравенство

$$||Au_2^n - f_\delta||^2 + J(u_2^n) \leq [\, ||A||_{L_q\to F} ||u_1^n||_{L_q} + ||A||_{H^\mu\to F} ||u_3^n||_{H^\mu} + \sqrt{\Phi^* + \varepsilon}\,]^2 + J(u_2^n),$$

что в силу теоремы 2.3 влечет ограниченность $\{u_2^n\}$ в BV-норме:

$$||u_2^n||_{BV} = ||u_2^n||_{L_q} + J(u_2^n) \leq c_4. \tag{2.6}$$

Из компактности оператора вложения $H^\mu(\bar{D})$ в $C(\bar{D})$, теоремы 2.2 и соотношений (2.5), (2.6) вытекает существование подпоследовательностей $u_1^{n_k}$, $u_2^{n_k}$, $u_3^{n_k}$, для которых имеет место

$u_1^{n_k} \to \bar{u}_1$ слабо в $L_q(D)$,
$u_2^{n_k} \to \bar{u}_2$ слабо в $L_p(D)$ при $1 < p < m/(m-1)$,
$u_2^{n_k} \to \bar{u}_2$ слабо в $L_p(D)$ при $1 < p = m/(m-1)$, $m \geq 2$,
$u_3^{n_k} \to \bar{u}_3$ сильно в пространстве $C(\bar{D})$.

Учитывая слабую полунепрерывность обобщенной вариации J в пространстве L_p, $1 \le p < \infty$ (теорема 2.1), полунепрерывность снизу нормы Липшица в $C(\bar{D})$, приходим к неравенствам

$$\Phi^* \le \Phi(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \le \liminf_{k\to\infty}\big[||A(u_1^{n_k} + u_2^{n_k} + u_3^{n_k}) - f_\delta||^2 + \alpha\,(||u_1^{n_k}||^2_{L_q} + J(u_2^{n_k}) + ||u_3^{n_k}||_{H^\mu})\big]$$
$$+ \limsup_{k\to\infty}\big[||A(u_1^{n_k} + u_2^{n_k} + u_3^{n_k}) - f_\delta||^2 + \alpha\,(||u_1^{n_k}||^2_{L_q} + J(u_2^{n_k}) + ||u_3^{n_k}||_{H^\mu})\big] = \Phi^*,$$

т. е. тройка $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3$ является решением регуляризованной задачи (2.1). При этом элемент $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$ определяется однозначно, что вытекает из строгой выпуклости функционала $\psi(u) = ||Au - f_\delta||^2_F$, поскольку F — строго выпуклое пространство и A — однозначно обратимый оператор (см. [14, лемма 3.3.2]).

Переобозначим $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3$ через $u_1^\alpha,\ u_2^\alpha,\ u_3^\alpha$, а $\bar{u}$ — через u^α. Пусть $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ — решение задачи (2.1). Имеем очевидную оценку

$$||Au^\alpha - f_\delta||^2 + \alpha\left[||u_1^\alpha||^2_{L_q} + J(u_2^\alpha) + ||u_3^\alpha||_{H^\mu}\right] \le ||A\hat{u} - f_\delta||^2 + \alpha\left[||\hat{u}_1||^2_{L_q} + J(\hat{u}_2) + ||\hat{u}_3||_{H^\mu}\right],$$

что на основании условий теоремы на параметр регуляризации влечет неравенство

$$||u_1^{\alpha(\delta)}||^2_{L_q} + J(u_2^{\alpha(\delta)}) + ||u_3^{\alpha(\delta)}||_{H^\mu} \le \delta^2/\alpha(\delta) + ||\hat{u}_1||^2_{L_q} + J(\hat{u}_2) + ||\hat{u}_3||_{H^\mu} \tag{2.7}$$

и, следовательно, существование подпоследовательностей:

$$u_1^{\alpha(\delta_k)} \to \tilde{u}_1 \text{ слабо в } L_q(D), \qquad 1 < q < \infty, \tag{2.8}$$
$$u_2^{\alpha(\delta_k)} \to \tilde{u}_2 \text{ сильно в } L_p(D), \qquad 1 < p < m/(m-1), \tag{2.9}$$
$$u_2^{\alpha(\delta_k)} \to \tilde{u}_2 \text{ слабо в } L_p(D), \qquad 1 < p = m/(m-1),\ m \ge 2,$$
$$u_3^{\alpha(\delta_k)} \to \bar{u}_3 \text{ сильно в } C(\bar{D}). \tag{2.10}$$

Здесь, как и выше для $\{u_2^n\}$, свойства (2.9) для $\{u_2^{\alpha(\delta_k)}\}$ следуют из теоремы 2.3 и соотношения вида (2.6). Принимая во внимание соотношения (2.8)–(2.10) и полунепрерывность снизу относительно соответствующих сходимостей входящих функционалов, получаем

$$0 \le ||A(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) - f|| \le \liminf_{k\to\infty}(||Au^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k}|| + \delta_k)$$
$$\le \limsup_{k\to\infty}\Big\{\big[||Au^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k}||^2 + \alpha(\delta_k)\,(||u_1^{\alpha(\delta_k)}||^2_{L_q} + J(u_2^{\alpha(\delta_k)}) + ||u_3^{\alpha(\delta_k)}||_{H^\mu})\big]^{1/2} + \delta_k\Big\}$$
$$\le \limsup_{k\to\infty}\big\{\delta_k + \big[\delta_k^2 + \alpha(\delta_k)\,(||\hat{u}_1||^2_{L_q} + J(\hat{u}_2) + ||\hat{u}_3||_{H^\mu})\big]^{1/2}\big\} = 0, \tag{2.11}$$

т. е. $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3$ — решение уравнения (1.1).

Привлекая оценку (2.7), приходим к неравенству

$$||\tilde{u}_1||^2_{L_q} + J(\tilde{u}_2) + ||\tilde{u}_3||_{H^\mu} \le \liminf_{k\to\infty}\big[||u_1^{\alpha(\delta_k)}||^2_{L_q} + J(u_2^{\alpha(\delta_k)}) + ||u_3^{\alpha(\delta_k)}||_{H^\mu}\big]$$
$$\le \limsup_{k\to\infty}\big[||u_1^{\alpha(\delta_k)}||^2_{L_q} + J(u_2^{\alpha(\delta_k)}) + ||u_3^{\alpha(\delta_k)}||_{H^\mu}\big] \le ||\hat{u}_1||^2_{L_q} + J(\hat{u}_2) + ||\hat{u}_3||_{H^\mu}, \tag{2.12}$$

что вместе с (2.11) означает, что $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ является решением задачи (2.1), а следовательно, $\hat{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3$ — решение уравнения (1.1). Соотношение (2.12) ввиду полунепрерывности снизу функционалов влечет сходимость

$$\lim_{k\to\infty} ||_{L_q} u_1^{\alpha(\delta_k)}|| = ||\tilde{u}_1||^2_{L_q}, \qquad \lim_{k\to\infty} J(u_2^{\alpha(\delta_k)}) = J(\tilde{u}_2), \qquad \lim_{k\to\infty} ||u_3^{\alpha(\delta_k)}||_{H^\mu} = ||\tilde{u}_3||_{H^\mu}.$$

Следовательно, вместе с (2.8) имеем для первой компоненты

$$\lim_{k\to\infty} ||u_1^{\alpha(\delta_k)} - \tilde{u}_1||_{L_q} = 0.$$

Кроме того согласно (2.9)

$$\lim_{k\to\infty} ||u_2^{\alpha(\delta_k)} - \tilde{u}_2||_{L_p} = 0, \qquad 1 < p < m/(m-1),$$

и $u_2^{\alpha(\delta_k)} \to \tilde{u}_2$ слабо при $1 < p = m/(m-1)$, $m \geq 2$, а ввиду (2.10)

$$\lim_{k\to\infty} ||u_3^{\alpha(\delta_k)} - \tilde{u}_3||_C = 0.$$

Таким образом, в соответствующей топологии предельные точки $\tilde{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ каждой из регуляризованных компонент $u_i^{\alpha(\delta)}$ в сумме образуют искомое решение уравнения (1.1). Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть уравнение* (1.1) *имеет не единственное решение, $\hat{U}$ — множество решений $\hat{u}$ уравнения* (1.1), *представимых в виде $\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3$, где u_1, u_2, u_3 реализуют минимум в задаче* (2.1), *и U^α — совокупность элементов $u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha + u_3^\alpha$, где тройка $(u_1^\alpha, u_2^\alpha, u_3^\alpha)$ является решением задачи* (1.2).

Тогда в условиях теоремы 2.1 *и* $1 < p < m/(m-1)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{u^{\alpha(\delta)} \in U^{\alpha(\delta)}} \inf_{\hat{u}\in\hat{U}} \rho(u^{\alpha(\delta)}, \hat{u}) = 0,$$

где $\rho(u, v) = \max\{||u_1 - v_1||_{L_q}, ||u_2 - v_2||_{L_p}, ||u_3 - v_3||_C\}$. *При этом в случае единственности решения $\hat{u}$ уравнения* (1.1) *знак* inf *в формуле следует опустить.*

Следствие 2.2. *Если гладкая компонента u_1 обладает свойством обобщенного дифференцирования до порядка l, то при выборе в качестве стабилизатора $\Omega_1(u_1) = ||u_1||^2_{W_2^l}$ вместо $\Omega_1(u_1) = ||u_1||^2_{L_q}$ имеет место сильная аппроксимация этой компоненты регуляризованным решением $u_1^{\alpha(\delta)}$ в пространстве Соболева $W_2^l(D)$.*

З а м е ч а н и е 2.1. Если известна дополнительная априорная информация в виде пробных решений u_i^0 $(i = 1, 2, 3)$, то целесообразно перейти к функционалам вида $\Omega_i(u - u_i^0)$, что позволяет учитывать специфику каждой компоненты и повысить качество приближенного решения.

В одномерном случае, когда $m = 1$, $\bar{D} = [a, b]$, можно несколько усилить утверждение теоремы 2.1 в части, касающейся второй компоненты, а именно справедлива

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и* $1 < p < m/(m-1)$. *Тогда дополнительно к свойствам* 1)–6) *имеет место поточечная сходимость по второй компоненте*

$$u_2^{\alpha(\delta_k)}(x) \to \tilde{u}_2(x), \qquad x \in [a, b],$$

причем на каждом отрезке $[a', b'] \subseteq [a, b]$ непрерывности функции $\tilde{u}_2(x)$ сходимость является равномерной по x.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы с несущественными изменениями может быть проведено аналогично однокомпонентному случаю (см. [15]).

3. Конечномерная аппроксимация регуляризованного решения

3.1. Дискретная аппроксимация — необходимый этап при численной реализации метода регуляризации Тихонова в виде (1.2). Для простоты и наглядности исследуем схему дискретной аппроксимации на примере некорректно поставленной задачи в форме одномерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$Au \equiv \int\limits_0^1 K(x,x')u(x')\,dx' = f(x), \qquad x \in [0,1],$$

где $K(t,s)$ — непрерывная по совокупности переменных функция, $f \in L_r[0,1]$.

Используя квадратурную формулу прямоугольников с равномерными сетками по x и x', поставим в соответствие задаче (1.2) последовательность конечномерных (дискретных) задач:

$$\min\Big\{\frac{1}{2}\,||A_n u_n - f_n||^2_{l^n_r} + \alpha\,\frac{1}{2}\,\big[||u_{1n}||^2_{l^n_q} + J_n(u_{2n}) + ||u_{3n}||_{H^\mu_n}\big]\colon$$
$$u_{1n} \in l^n_q,\ u_{2n} \in U_{2n} = \{u_{2n}\colon J_n(u_{2n}) < \infty,\ ||u_{2n}||_{l^n_p} \le \bar{c}\}, u_{3n} \in H^\mu_n\Big\} = \Phi^*_n. \tag{3.1}$$

Здесь $u_n = u_{1n}+u_{2n}+u_{3n}$, $||u_{1n}||_{l^n_q} = \big(\sum\limits_{\nu=1}^n h\,|u^\nu_{1n}|^q\big)^{1/q}$, $h = 1/n$, норма $||f_n||_{l^n_r}$ определяется аналогично $||u||_{l^n_q}$, $(A_n u_n)^j = \sum\limits_{\nu=1}^n h\,K(x^j, x'^\nu)u^\nu_n$, $j = 1,2,\dots,n$, $f_n = (f_\delta(x^1), f_\delta(x^2),\dots,f_\delta(x^n))$, $J_n(u_n) = \sup\big\{\sum\limits_{\nu=1}^n u^\nu_n\,(v^\nu_n - v^{\nu-1}_n)\colon |v_n| \le 1\big\}$, $||u_n||_{H^\mu_n} = \max\limits_{1\le\nu\le n} |u^\nu_n| + \max\limits_{i,j} \dfrac{|u^i_n - u^j_n|}{|x^i - x^j|^\mu}$.

Введем обозначение r_n для оператора кусочно-линейного восполнения, который ставит в соответствие вектору $u_n = (u^1_n, u^2_n,\dots,u^n_n)$ кусочно-линейную функцию, построенную на выбранной сетке $\{x^\nu\}^n_1$ по компонентам вектора u_n.

Теорема 3.1. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий из $L_p[0,1]$ в $L_r[0,1]$, $1 < p \le q$, $1 < r$. Тогда задача* (3.1) *имеет решение $(\hat{u}_{1n}, \hat{u}_{2n}, \hat{u}_{3n})$, возможно не единственное, причем:*

1) $\{r_n\hat{u}_{1n}\}$ *относительно компактно в* $L_q[0,1]$;
2) $\{r_n\hat{u}_{2n}\}$ *относительно компактно в* $L_p[0,1]$;
3) $\{r_n\hat{u}_{3n}\}$ *относительно компактно в* $C[0,1]$.

Если $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ — соответствующие предельные точки последовательностей $\{r_n\hat{u}_{in}\}$, $i = 1,2,3$, то тройка $(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)$ является решением задачи (1.2) *и $u^\alpha = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Разрешимость.* Обозначим через $\Phi_n(u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})$ целевую функцию в задаче (3.1). Заметим, что

$$J_n(u_n) = \sup\Big\{\sum_{j=1}^n u^j_n(v^j_n - v^{j-1}_n)\colon |v_n| \le 1\Big\} = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n-1} v^j_n(u^j_n - u^{j+1}_n)\colon |v_n| \le 1\Big\} = \sum_{j=1}^{n-1} |u^j_n - u^{j+1}_n|.$$

Следовательно, задача (3.1) эквивалентна задаче минимизации функции $3n$ переменных на выпуклом замкнутом ограниченном множестве

$$M = \{(u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})\colon \Phi_n(u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}) \le \Phi_n(^0_{1n}, u^0_{2n}, u^0_{3n})\},$$

поэтому найдется тройка векторов $(\hat{u}_{1n}, \hat{u}_{2n}, \hat{u}_{3n})$, которая реализует минимум в задаче (3.1).

Согласно [9, теорема 1.17] для любой функции $u \in L_p(D)$ существует последовательность $u_j \in C^\infty(D)$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} ||u - u_j|| = 0, \qquad \lim_{j\to\infty} J(u_j) = J(u). \tag{3.2}$$

На основании этого факта найдутся функции $u_1,\ u_2$, для которых

$$||A(u_{1\varepsilon}+u_{2\varepsilon}+u_3^{\alpha})-f_\delta||^2+\alpha\left[||u_{1\varepsilon}||_{L_q}^2+J(u_{2\varepsilon})+||u_3^{\alpha}||_{H^{\mu}}\right]\le\Phi_*^{\alpha}+\varepsilon. \tag{3.3}$$

Пусть $\{P_n\}$ — семейство связывающих операторов, действующих по правилу $P_n u(x)=(u(x^1),u(x^2),u(x^3),\dots,u(x^n))$ и определяющих дискретную и дискретно слабую сходимость элементов и операторов, которая будет обозначаться символами “$-\to$”, “$-\rightharpoonup$” соответственно. Принимая во внимание свойства дискретной сходимости [16; 17], соотношения (3.2), (3.3), получаем

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\Phi_n^*=\limsup_{n\to\infty}\Phi_n^{\alpha}(\hat u_{1n},\hat u_{2n},\hat u_{3n})\le\limsup_{n\to\infty}||A_n(P_nu_{1\varepsilon}+P_nu_{2\varepsilon}+P_nu_3^{\alpha})-f_n||_{l_r^n}^2\\+\alpha\,[\lim_{n\to\infty}||P_nu_{1\varepsilon}||_{l_q^n}^2+\lim_{n\to\infty}J_n(P_nu_{2\varepsilon})+\lim_{n\to\infty}||P_nu_3^{\alpha}||_{H_n^{\mu}}]\\\le||A(u_{1\varepsilon}+u_{2\varepsilon}+u_3^{\alpha})-f_\delta||^2+\alpha\left[||u_{1\varepsilon}||_{L_q}+J(u_{2\varepsilon})+||u_3^{\alpha}||_{H^{\mu}}\right]\le\Phi_*^{\alpha}+\varepsilon.\end{aligned}$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малой величиной, то

$$\limsup_{n\to\infty}\Phi_n^*\le\Phi^*. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует равномерная по n ограниченность последовательностей:

$$||\hat u_{1n}||_{l_q^n}\le c_1,\qquad J_n(\hat u_{2n})\le c_2,\qquad ||\hat u_{3n}||_{H_n^{\mu}}\le c_3. \tag{3.5}$$

Напомним, что через r_n обозначены операторы кусочно-линейного восполнения. Соотношение (3.4) влечет

$$||r_n\hat u_{1n}||_{L_q}\le 2\,||\hat u_{1n}||_{l_q^n},\qquad J(r_n\hat u_{2n})\le J_n(\hat u_{2n}),\qquad ||r_n\hat u_{3n}||_{H^{\mu}}\le||\hat u_{3n}||_{H_n^{\mu}}, \tag{3.6}$$

а из оценки, полученной в работе [17] (см. теорему 5.17), следует ограниченность норм в L_p для второй компоненты:

$$||r_n\hat u_{2n}||_{L_p}\le 2||u_{2n}||_{l_p^n}\le 2\bar c,\qquad 1<p. \tag{3.7}$$

Объединяя (3.7) с (3.4), (3.6), имеем оценку $||Ar_n\hat u_{2n}-f_\delta||^2+\alpha\,J(r_n\hat u_{2n})\le c_5$, а на основании теоремы 2.3 получаем соотношение

$$||r_n\hat u_{2n}||_{BV}\le 1/c\,(||A(r_nu_{2n})-f_\delta||^2+\alpha\,J(r_nu_{2n}))\le c_5/c, \tag{3.8}$$

что ввиду теоремы 2.2 влечет относительную компактность последовательности $\{r_n\hat u_{2n}\}$ в L_p при $1<p$.

Из соотношений (3.5), (3.8), теоремы 2.2 и компактности оператора вложения $I\colon BV\to C$, а также утверждений из [17, теоремы 5.1, 5.8] вытекает существование подпоследовательностей $\hat u_{1n_k},\ \hat u_{2n_k},\ \hat u_{3n_k}$ таких, что

$$\hat u_{1n_k}-\rightharpoonup\bar u_1\in L_q[0,1],\qquad r_{n_k}\hat u_{2n_k}\to\bar u_2\in L_p[0,1], \tag{3.9}$$

$$r_{n_k}\hat u_{3n_k}\to\bar u_3\in C[0,1]; \tag{3.10}$$

это позволяет на основании (3.4)–(3.10) выписать цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\Phi^*\le\Phi(\bar u_1,\bar u_2,\bar u_3)\le\liminf_{k\to\infty}\Big\{||A_{n_k}(\hat u_{1n_k}+\hat u_{2n_k}+\hat u_{3n_k})-f_n||^2\\+\alpha\left[||\hat u_{1n_k}||_{l_q^{n_k}}^2+J_{n_k}(\hat u_{2n_k})+||\hat u_{3n_k}||_{H_n^{\mu}}\right]\Big\}\le\limsup_{k\to\infty}\Phi_{n_k}^*\le\Phi^*.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь при получении оценки (3.11) дополнительно использованы следующие факты, вытекающие из (3.4)–(3.10) и свойств дискретной сходимости:

1) $\hat{u}_{1n_k} - \rightharpoonup \bar{u}_1$, $\hat{u}_{2n_k} - \rightarrow \bar{u}_2$, $\hat{u}_{3n_k} - \rightharpoonup \bar{u}_3$ на паре пространств $(l_p^{n_k}, L_p)$;

2) $||A(\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{u}_3)-f_\delta||_{L_r} \le \liminf\limits_{k\to\infty} ||A_{n_k}(\hat{u}_{1n_k}+\hat{u}_{2n_k}+\hat{u}_{3n_k})-f_n||^2_{l_r^n}$ в силу слабой дискретной сходимости $A_{n_k} - \rightharpoonup A$ (см. [17, гл. 5, § 1–3]) и $f_n - \rightarrow f_\delta$;

3) $u_{2n_k} - \rightharpoonup \bar{u}_2 \Rightarrow J(\bar{u}_2) \le \liminf\limits_{k\to\infty} J_{n_k}(u_{2n_k})$ (см. [18, лемма 4.3]);

4) $||\bar{u}_3)||_{H^\mu} \le \liminf\limits_{k\to\infty} ||r_{n_k}\hat{u}_{3n_k}||_{H^\mu} = \liminf\limits_{k\to\infty} ||\hat{u}_{3n_k}||_{H^\mu_{n_k}}$, что следует из полунепрерывности снизу в $[0,1]$ Липшиц-нормы.

Из неравенств (3.11) следует, что тройка $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ — решение задачи (1.2). Кроме того, соотношение (3.11) означает, что имеет место сходимость значений стабилизирующих функционалов:

$$\lim_{k\to\infty} ||\hat{u}_{1n_k}||_{l_q^n} = ||\bar{u}_1||_{L_q}, \qquad \lim_{k\to\infty} J_{n_k}(\hat{u}_{2n_k}) = J(\bar{u}_2), \qquad \lim_{k\to\infty} ||\hat{u}_{3n_k}||_{H^\mu_{n_k}} = ||\bar{u}_3||_{H^\mu}. \tag{3.12}$$

Сходимость норм (3.12) вместе с дискретной слабой сходимостью $u_{1n_k} - \rightharpoonup \bar{u}_1$ (см. (3.9)) на основании дискретного свойства Ефимова — Стечкина (см. [17, лемма 5.1]) порождает дискретную сходимость $u_{1n_k} - \rightarrow \bar{u}_1 \in L_q$. Следовательно, ввиду свойств операторов кусочно-линейного восполнения [17, теорема 5.17] получаем

$$\lim_{k\to\infty} ||r_{n_k}\hat{u}_{1n_k} - \bar{u}_1||_{L_q} = 0.$$

Теорема доказана.

3.2. Для численного нахождения решения задачи негладкой выпуклой минимизации (3.1) может быть применен субградиентный метод, например в форме

$$u_{in}^{k+1} = u_{in}^k - \lambda_k \frac{\nabla\Phi_n(u_{1n}^k, u_{2n}^k, u_{3n}^k)}{||\nabla\Phi_n(u_{1n}^k, u_{2n}^k, u_{3n}^k)||}, \qquad i = 1,2,3. \tag{3.13}$$

Здесь верхний индекс k вектора u_{in}^k означает номер итерации, а i — номер компоненты;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \qquad \lambda_k > 0, \qquad \sum_{k\to 0}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty; \tag{3.14}$$

$\nabla\Phi_n$ — произвольный субградиент функции Φ_n по вектору u_n. В более подробной покомпонентной записи (3.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
u_{1n}^{k+1} &= u_{1n}^k - \lambda_k \left[A_n^T A_n(u_{1n}^k + u_{2n}^k + u_{3n}^k) - A_n^T f_n + \alpha\,\nabla||u_{1n}^k||^2_{l_2^n}\right],\\
u_{2n}^{k+1} &= u_{2n}^k - \lambda_k \left[A_n^T A_n(u_{1n}^k + u_{2n}^k + u_{3n}^k) - A_n^T f_n + \alpha\,\nabla J_n(u_{2n}^k)\right],\\
u_{3n}^{k+1} &= u_{3n}^k - \lambda_k \left[A_n^T A_n(u_{1n}^k + u_{2n}^k + u_{3n}^k) - A_n^T f_n + \alpha\,\nabla||u_{3n}^k||_{H_n^\mu}\right],
\end{aligned}$$

где $\nabla||u_n||^2_{l_2^n} = h\,u_n$. Субградиенты для J_n и $||\cdot||_{H_n^\mu}$ вычисляются неоднозначно (см. [18–20]). Приведем один из возможных вариантов их вычисления: $\{\nabla J_n(u_n)\}^j = \operatorname{sign}(u_n^j - u_n^{j-1}) - \operatorname{sign}(u_n^{j+1} - u_n^j)$ — j-я компонента субградиента для стабилизатора J_n;

$$\begin{aligned}
\nabla||u_n||_{H_n^\mu} &= \operatorname{sign} u_n^{j_0}(0,0,\dots,1,\dots,0)\\
&+ \operatorname{sign}(u_n^{i_0} - u_n^{j_0})(0,0,\dots 0, \frac{1}{|x^{i_0} - x^{j_0}|^\mu}, 0,\dots,0, \frac{1}{|x^{i_0} - x^{j_0}|^\mu}, 0,\dots,0),
\end{aligned}$$

где j_0 — номер, для которого достигается $\max\limits_{0\le\nu\le n} |u_n^\nu|$, (i_0, j_0) — пара, для которой достигается максимум для второго слагаемого в выражении для $\nabla||u_n||_{H_n^\mu}$.

З а м е ч а н и е 3.1. Если параметры λ_k выбираются согласно (3.14), то, как известно [20, теорема 1, с. 130], для любой выпуклой целевой функции субградиентный метод в виде (3.13) гарантирует сходимость по функционалу, что для нашего случая означает

$$\lim_{k\to\infty} \min_{1\le j\le k} \Phi_n(u^j_{1n} + u^j_{2n} + u^j_{3n}) = \Phi^*_n.$$

Однако если дополнительно известно оптимальное значение Φ^*_n, то при выборе параметров λ_k по формуле

$$\lambda_k = \frac{\Phi_n(u^k_{1n}, u^k_{2n}, u^k_{3n}) - \Phi^*_n}{||\nabla\Phi_n(u^k_{1n}, u^k_{2n}, u^k_{3n})||} \tag{3.15}$$

имеет место сходимость не только по функционалу, но и по аргументу, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} ||u^k_n - u^\alpha|| = 0$, где $u^k_n = u^k_1 + u^k_2 + u^k_3$, $u^\alpha = u^\alpha_1 + u^\alpha_2 + u^\alpha_3$. При этом справедлива оценка погрешности по функционалу

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt{k}\,(\Phi_n(u^k_{1n}, u^k_{2n}, u^k_{3n}) - \Phi^*_n)$$

(см. [20, теорема 2, с. 131]).

Таким образом, если известно Φ^*_n, использование параметров λ_k согласно (3.15) безусловно предпочтительней, чем (3.14). Поэтому при численной реализации представляется целесообразным соединение обеих схем в двухступенчатом алгоритме, а именно на первом этапе, используя субградиентный метод с параметрами (3.14), находим некоторое приближение $\tilde\Phi_n$ к оптимальному значению Φ^*_n, а на втором этапе, привлекая новую последовательность параметров

$$\lambda_k = \frac{\Phi_n(u^k_{1n}, u^k_{2n}, u^k_{3n}) - \tilde\Phi^*_n}{||\nabla\Phi_n(u^k_{1n}, u^k_{2n}, u^k_{3n})||}, \qquad \tilde\Phi^*_n < \tilde\Phi_n,$$

продолжаем итерационный процесс с новым λ_k.

З а м е ч а н и е 3.2. Предварительные численные эксперименты в соответствии с изложенной методикой для интегрального уравнения из [16] показали, что при использовании одного или двух стабилизаторов из Ω_i $(i = 1, 2, 3)$ соответствующие компоненты довольно хорошо восстанавливаются даже при довольно грубом начальном приближении $u^0_{in} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ в субградиентном методе. Однако при наличии всех трех стабилизаторов не удалось получить удовлетворительного восстановления модельного решения, содержащего все три типа особенностей. По-видимому, для качественного восстановления всех трех компонент необходимо привлекать более эффективные методы негладкой оптимизации, переходить к выбору параметра регуляризации в виде $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где α_i отвечает за соответствующий стабилизатор $\Omega_i(u_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, и предусматривать введение в стабилизаторы пробных решений u^0_i (см. замечание 2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Леонов А.С.** Об использовании функций нескольких переменных с ограниченной вариацией для кусочно-равномерной регуляризации некорректных задач // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 5. С. 592–595.
2. **Vogel C.R.** Computational methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.
3. **Васин В.В., Сережникова Т.И.** Регулярный алгоритм аппроксимации для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 2. С. 15–23.
4. **Gholami A., Hosseini S.M.** A balanced combination of Tikhonov and total variation regularizations for reconstruction of piecewise-smooth signal // Signal Processing. 2003. Vol. 93, no. 7. P. 1945–1960.
5. **Gandes E.J., Romberg J., Tao T.** Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements // Comm. Pure. Appl. Math. 2006. Vol. 59, no. 8. P. 1207–1223.
6. Simultaneous structure and texture image inpainting / M. Bertalmio, L. Vese, G. Sapiro, S. Osher // IEEE Trans. Image Process. 2003. Vol. 12, no. 8. P. 882–889.

7. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. М: Техносфера, 2005. 1072 с.
8. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
9. **Giusti E.** Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhäuser, 1984. 240 p.
10. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New-York: Acad. Press, 1975. 266 p.
11. **Vasin V.V.** Reconstruction of smooth and discontinuous components of solutions to linear ill-posed problems // Dokl. Math. 2013. Vol. 87, no. 1. P. 23–25.
12. **Vasin V.V.** Approximation of solutions with singularities of various types for linear ill-posed problems // Dokl. Math. 2014. Vol. 89, no. 1. P. 30–33.
13. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // Inverse problems. 1994. Vol. 10, no. 6. P. 1217–1229.
14. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002. 281 c.
15. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functionals // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2007. Vol. 15, no. 8. P. 853–865.
16. **Vainiko G.** Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Leipzig: Teubner Verlag, 1976. 136 p.
17. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht; The Netherlands: VSP, 1995. 255 p.
18. **Vasin V.V.** Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in space of functions of bounded variation // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S225–S239.
19. **Vasin V.V.** Approximation of nonsmooth solutions of linear ill-posed problems // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2006. P. S247–S262.
20. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М: Наука, 1983. 384 с.

Поступила 11.02.2014

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский Федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Соболева Елизавета Олеговна
магистрант
Уральский Федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
вед. математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 515.162

ТРЕХМЕРНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С КАСПАМИ СЛОЖНОСТИ 10, ИМЕЮЩИЕ МАКСИМАЛЬНЫЙ ОБЪЕМ[1]

А. Ю. Веснин, В. В. Таркаев, Е. А. Фоминых

В работе приводится полный список трехмерных ориентируемых гиперболических многообразий с каспами, полученных склеиванием не более десяти правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Список является исчерпывающим, однако, для некоторых пар многообразий с одним, двумя и тремя каспами вопрос об их негомеоморфности по-прежнему остается открытым.

Ключевые слова: гиперболические многообразия с каспами, сложность многообразий.

A. Yu. Vesnin, V. V. Tarkaev, E. A. Fominykh. Three-dimensional hyperbolic manifolds with cusps of complexity 10 having maximal volume.

We give a complete list of three-dimensional orientable hyperbolic manifolds with cusps obtained by gluing together at most ten regular ideal hyperbolic tetrahedra. Although the list is exhaustive, the question of nonhomeomorphism remains open for some pairs of manifolds with one, two, and three cusps.

Keywords: hyperbolic manifolds with cusps, complexity of manifolds.

1. Введение

Классификация трехмерных многообразий является ключевой проблемой трехмерной топологии. В последние годы активно развивается подход к этой проблеме, основанный на теории сложности многообразий [1; 2]. *Сложность* компактного трехмерного многообразия равна k, если оно имеет почти простой спайн с k истинными вершинами и не имеет почти простых спайнов с меньшим числом истинных вершин. Задача вычисления сложности трехмерных многообразий является весьма трудной. К настоящему времени получены таблицы всех замкнутых ориентируемых неприводимых многообразий сложности не более 13 (таких многообразий более 103 000) [1]; всех гиперболических многообразий с геодезическим краем сложности не более 4 (5192 многообразий) [3]; всех гиперболических многообразий с каспами сложности не более 8 (21919 многообразий) [4; 5]. Напомним, что для трехмерных гиперболических многообразий с каспами сложность определяется как число тетраэдров в минимальной идеальной триангуляции многообразия. Найдены точные значения сложности для нескольких бесконечных семейств многообразий из следующих классов: линзовых пространств и их накрытий [6;7]; гиперболических многообразий с геодезическим краем [8–10]; гиперболических многообразий, расслоенных над окружностью со слоем проколотый тор [11].

Появление в начале 1990-х программного обеспечения для работы с узлами, зацеплениями и трехмерными многообразиями сделало возможным перечисление трехмерных многообразий с каспами по числу идеальных тетраэдров в их минимальной триангуляции. Прежде всего, речь идет о компьютерной программе SnapPea [12]. С ее помощью в 1989 г. был составлен список многообразий с каспами, для построения которых достаточно пяти идеальных тетраэдров [13]. В 1999 г. был составлен список многообразий с каспами, для построения которых достаточно семи идеальных тетраэдров [4]. В 2010 г. был составлен список многообразий с каспами, для построения которых достаточно восьми идеальных тетраэдров [5]. Поскольку к

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00513 (Веснин) и 14-01-00441 (Таркаев, Фоминых), Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант Правительства РФ № 14.Z50.31.0020), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1015.2014.1).

настоящему времени речь идет о десятках тысяч табулированных многообразий, эти списки не застрахованы от неточностей, связанных с распознаванием многообразий. Совсем недавно в [14] было замечено, что список из [4] содержит два одинаковых неориентируемых многообразия с каспами. Они имеют обозначения $x101$ и $x103$, и каждое строится из шести идеальных тетраэдров.

В настоящей работе приводится полный список ориентируемых гиперболических многообразий с каспами, полученных склеиванием не более десяти правильных идеальных гиперболичесих тетраэдров, т. е. имеющих сложность не более десяти. В разд. 2 мы напоминаем основные факты о трехмерных гиперболических многообразиях с каспами и свойства объемов тетраэдров в трехмерном гиперболическом пространстве. В разд. 3 приведены кодировки и инварианты многообразий сложности не более девяти. А именно теорема 1 содержит список многообразий сложности не более восьми. Список получен независимо от работ [4; 5] и согласован с ними. Кодировка единственного существующего многообразия сложности девять приведена в теореме 2. Результаты этого раздела и идеи доказательств были анонсированы в [15]. В разд. 4 приводятся кодировки и инварианты многообразий сложности десять (теорема 3). При этом удалось улучшить некоторые оценки из [15]. Список приведенных многообразий является исчерпывающим. Однако для некоторых пар многообразий сложности десять с одним, двумя и тремя каспами вопрос об их негомеоморфности по-прежнему остается открытым. В разд. 5 обсуждаются некоторые нерешенные проблемы, связанные с построением многообразий с заданным числом каспов. В заключение, в разд. 6, для удобства читателя дается подробное, с разбором примера, объяснение *обезвоженного* описания триангуляции, введенного в [4], которое используется на протяжении всей статьи.

2. Гиперболические многообразия с каспами

В данной работе предметом исследования являются трехмерные гиперболические многообразия с каспами. Класс таких многообразий представляет интерес и в контексте теории узлов, поскольку примерами таких многооразий являются дополнения к узлам и зацеплениям в трехмерной сфере.

Пусть M — связное трехмерное гиперболическое многообразие, полученное склеиванием конечного множества $\mathcal{P}$ попарно непересекающихся правильных идеальных тетраэдров из гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$. Напомним, что у правильного идеального тетраэдра все двугранные углы равны $\pi/3$ и все его вершины являются бесконечно удаленными. Пусть $\mathcal{S}$ — множество граней тетраэдров из $\mathcal{P}$ и склеивание осуществляется спариванием Φ вдоль граней $\mathcal{S}$, реализуемым изометриями $\mathbb{H}^3$. Спаривание Φ продолжается до спаривания идеальных вершин тетраэдров, что порождает разбиение всех идеальных вершин тетраэдров из $\mathcal{P}$ на классы эквивалентных. Для идеальной вершины v обозначим через $[v]$ соответствующий класс эквивалентности. Класс эквивалентных идеальных вершин называется *каспом* многообразия M.

Пусть v — идеальная вершина тетраэдра P_v, принадлежащего $\mathcal{P}$. Выберем в точке v орисферу Σ_v, которая пересекается только с теми гранями из $\mathcal{S}$, которые инцидентны v. *Линком* вершины v называется множество $L(v) = P_v \cap \Sigma_v$. Отметим, что $L(v)$ является компактным евклидовым треугольником на орисфере Σ_v. Спаривание Φ индуцирует склеивание треугольников $\{L(u) : u \in [v]\}$ вдоль их сторон преобразованиями подобия. Обозначим результат такого склеивания через $L[v]$. Поверхность $L[v]$ называется *линком* каспа $[v]$ гиперболического многообразия M. Если каждая изометрия из Φ сохраняет ориентацию, то $L[v]$ является тором. Гиперболическое многообразие M является полным, если и только если для каждого его каспа $[v]$ линк $L[v]$ является полным (см. [16]).

Напомним [16], что каждый идеальный тетраэдр определяется, с точностью до изометрии пространства $\mathbb{H}^3$, своими двугранными углами. Более того, его противолежащие двугранные углы равны и сумма любых трех двугранных углов, инцидентных одной и той же идеальной вершине, равна π. Таким образом, каждый идеальный тетраэдр определяется тремя двугранными углами α, β, γ, где $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Объем такого тетраэдра $T(\alpha,\beta,\gamma)$ выражается формулой

$$\operatorname{vol} T(\alpha,\beta,\gamma) = \Lambda(\alpha)+\Lambda(\beta)+\Lambda(\gamma),$$

где $\Lambda(\theta)$ — функция Лобачевского, которая определяется следующим образом:

$$\Lambda(\theta) = -\int\limits_0^\theta \ln \mid 2\sin x \mid dx.$$

Среди всех тетраэдров в $\mathbb{H}^3$ максимальный объем имеет правильный идеальный тетраэдр $T(\pi/3,\pi/3,\pi/3)$. Его объем равен

$$v_3 := \operatorname{vol}(T(\pi/3,\pi/3,\pi/3)) = 3\Lambda(\pi/3) = 1.0149426\ldots.$$

Таким образом, если многообразие получено склеиванием k правильных идеальных тетраэдров, то его объем равен kv_3 и является максимальным среди всех многообразий заданной сложности.

Обозначим через MVT^k множество всех трехмерных ориентируемых гиперболических многообразий с k каспами, полученных склейками T правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Пусть $|MVT^k|$ — мощность множества MVT^k. Если оно не пусто, то его элементы будем обозначать MVT^k_n, где $n=1,\ldots,|MVT^k|$.

3. Многообразия сложности не более 9

Перечисление трехмерных гиперболческих многообразий, строящихся из идеальных тетраэдров, является важной задачей, способствующей пониманию структуры множества трехмерных многообразий и направленной на решение проблемы классификации многообразий. Перечисления проводились несколькими исследовательскими группами на основе оригинальных разработанных компьютерных программ. Наиболее известными являются результаты работы [4], где перечислены все 4 815 многообразий, получаемые из семи идеальных тетраэдров, и работы [5], где перечислены все 12 846 многообразий, получаемые из восьми идеальных тетраэдров.

Нас интересуют многообразия, имеющие максимальный объем среди многообразий заданной сложности, т. е. те многообразия, которые склеиваются из заданного числа правильных идеальных тетраэдров. Полный список таких многообразий до сложности, не превышающей девяти, приведен в [15, теорема 1]. Здесь мы приведем подробное доказательство теоремы 1 из [15], разбив ее для удобства на два утверждения (теорема 1 и теорема 2).

Теорема 1. *Существует ровно* 29 *ориентируемых гиперболических* 3*-многообразий с каспами, получаемых склеиванием не более чем восьми правильных идеальных гиперболических тетраэдров:* 17 *из них имеют один касп, а* 12 *— два каспа. Кодировки этих многообразий приведены в табл.* 2 *и* 4*, соответственно.*

Доказательство. Доказательство теоремы является конструктивным и получено с использованием компьютера. Первый этап доказательства заключается в построении ориентируемых гиперболических 3-многообразий с каспами, получаемых склеиванием не более чем восьми правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Второй этап заключается в проверке: являются ли построенные многообразия попарно негомеоморфными?

Первый этап. Для каждого $T=1,\ldots,8$ строим все 4-регулярные связные графы с T вершинами. Для указанных значений T число таких графов равно 1, 2, 4, 10, 28, 97, 359 и 1635 соответственно. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество построенных графов.

Т а б л и ц а 1

Число тетраэдров	1	2	3	4	5	6	7	8	всего
Число триангуляций	0	2	0	2	1	6	0	6	17

Т а б л и ц а 2

Многообразия с одним каспом

Имя	Кодировка	H_1	TV_3	TV_4	Обозначения из [4]
$MV2_1^1$	cabbbbaei	$\mathbb{Z}$			$M2_1$
$MV2_2^1$	cabbbbapt	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$			$M2_2$
$MV4_1^1$	ebdbcdddaqhpt	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$			$M4_{51}$
$MV4_2^1$	ebdbcdddaqhie	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$			$M4_{52}$
$MV5_1^1$	fapaadcceeebfobfw	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$			$M5_{223}$
$MV6_1^1$	gfdabbcdefffaqhhqqh	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{908}$
$MV6_2^1$	gfdabbcdefffaqhhqax	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{910}$
$MV6_3^1$	gbpaaddefeffoffhoxh	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{909}$
$MV6_4^1$	gdhaabefffeehpilpet	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{911}$
$MV6_5^1$	gbpaabcfdffefohfxhf	$\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{912}$
$MV6_6^1$	gbpaabefedffffhofxh	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{913}$
$MV8_1^1$	ifdbfbcdefghhhaqhhqaalu	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}$			—
$MV8_2^1$	ifdbfbcdefghhhaqhhqaadm	$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}$			—
$MV8_3^1$	ibpadcdefghhghkgsplecgn	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$	2	4	—
$MV8_4^1$	idhbbbeegfghhhqplqaaqdt	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$	2	2	—
$MV8_5^1$	ibpafbdefghhghknwalinow	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}$	2	1	—
$MV8_6^1$	ibpafcfefegghhkqvmgmokk	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}$	2	3	—

Далее для каждого графа $G \in \mathcal{T}$ строим (возможно пустое) множество $\mathcal{M}_G$ ориентируемых гиперболических 3-многообразий с каспами по следующему правилу. Пусть T — число вершин графа G, а $\mathcal{P}$ — множество из T правильных идеальных тетраэдров. Установим взаимно-однозначное соответствие между вершинами графа G и элементами множества $\mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{S}$ — множество граней тетраэдров из $\mathcal{P}$. Ребра графа G индуцируют разбиение граней из множества $\mathcal{S}$ на пары. Для каждой пары граней существуют шесть способов их склеивания с помощью гиперболических изометрий. Перебираем все возможные (их 6^{2T}) спаривания всех граней из множества $\mathcal{S}$. Каждое спаривание Φ индуцирует разбиение ребер тетраэдров из множества $\mathcal{P}$ на классы эквивалентности. Поскольку двугранный угол при каждом ребре правильного идеального тетраэдра равен $\pi/3$, спаривание Φ приводит к гиперболическому многообразию M с каспами тогда и только тогда, когда каждый класс эквивалентности содержит ровно шесть ребер. Если многообразие M ориентируемо, то включаем его в множество $\mathcal{M}_G$.

Построенное множество $\mathcal{M} = \cup_{G \in \mathcal{T}} \mathcal{M}_G$ содержит 30 многообразий: 17 многообразий с одним каспом и 13 многообразий с двумя каспами. Число многообразий из $\mathcal{M}$, склеенных из T, где $T = 1, \ldots, 8$, правильных идеальных тетраэдров, представлено в табл. 1 (многообразия с одним каспом) и в табл. 3 (многообразия с двумя каспами). Разбиение многообразия $M \in \mathcal{M}$ на правильные идеальные тетраэдры будем называть *идеальной триангуляцией* многообразия M. В завершении первого этапа проверяем, что все 30 построенных идеальных триангуляций являются комбинаторно различными. Их кодировки (*обезвоженные описания*) приведены во вторых столбцах табл. 2 и табл. 4. Для удобства читателя в разд. 6. дается подробное, с разбором примера, объяснение обезвоженного описания триангуляции, введенного в [4].

Т а б л и ц а 3

Число тетраэдров	1	2	3	4	5	6	7	8	всего
Число триангуляций	0	0	0	2	1	1	1	8	13

Т а б л и ц а 4

Многообразия с двумя каспами

Имя	Кодировка	H_1	TV_3	TV_4	TV_5	TV_6
$MV4_1^2$	ebdbbdddemlqp	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	3	$-6\varepsilon+14$	5
$MV4_2^2$	ebdbcddddddddx	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	3	$-6\varepsilon+14$	6
$MV5_1^2$	fapaadcceeebfnbfk	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$				
$MV6_1^2$	gdhaabfefefelpllpll	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$				
$MV7_1^2$	hbpabbcfggfegfkadihgo	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$				
$MV8_1^2$	idhbbbffegehhhmememxmmx ihpaagfhfhgfghxeeeexxxx	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	3	$-18\varepsilon+40$	14
$MV8_2^2$	idhbbbeffgehhhhxxxihiex	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-16\varepsilon+34$	
$MV8_3^2$	idhbbbeegfghhhmplhmdatm	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-18\varepsilon+40$	
$MV8_4^2$	idhbbbeefgfhhhpllxpxxl	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	3	$-26\varepsilon+48$	
$MV8_5^2$	idhbbbeefgfhhhmplximume	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	3	$-18\varepsilon+40$	13
$MV8_6^2$	idhbbbffgeghhhqupqpeeti	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$				
$MV8_7^2$	idhbbbeeffghhhpllxpllx	$\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$				

Т а б л и ц а 5

Соответствие обозначений

Имя из табл. 4	Обозначение из [4]
$MV4_1^2$	$M4_3^2$
$MV4_2^2$	$M4_4^2$
$MV5_1^2$	$M5_{11}^2$
$MV6_1^2$	$M6_{48}^2$
$MV7_1^2$	$M7_{162}^2$

В т о р о й этап. Проверяем множество $\mathcal{M}$ на наличие гомеоморфных многообразий с помощью сравнения их объемов, первых групп гомологий и значений инвариантов Тураева — Виро. Совместное использование этих инвариантов оказалось чрезвычайно эффективным: удалось различить все многообразия, за исключением одной пары. Изложим результаты сравнений более детально.

Как мы уже упоминали в разд. 2, если многообразие получено склеиванием T правильных идеальных тетраэдров, то его объем равен Tv_3. Таким образом, если у двух многообразий из $\mathcal{M}$ идеальные триангуляции содержат разное число тетраэдров, то и многообразия различны. Для случая многообразий с одним каспом после сравнения их объемов и первых групп гомологий остается вопрос о гомеоморфности для двух пар многообразий: $MV8_3^1$ и $MV8_4^1$, для которых первые группы гомологий равны $\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}$, а также $MV8_5^1$ и $MV8_6^1$, для которых первые группы гомологий равны $\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}$. Различить указанные четыре многообразия удается путем сравнения значений инварианта Тураева — Виро TV_4. Таким образом, все 17 многообразий с одним каспом из множества $\mathcal{M}$ попарно различны (см. табл. 2). Для случая многообразий с двумя каспами установлено, что две триангуляции, кодировки которых приведены в строке для многообразия $MV8_1^2$, задают одно и то же многообразие $S^3\setminus 10_{138}^2$. После сравнения объемов и первых групп гомологий многообразий с двумя каспами остаются открытыми вопросы о гомеоморфности многообразий $MV4_1^2$ и $MV4_2^2$ и о гомеоморфности многообразий $MV8_1^2, MV8_2^2, MV8_3^2, MV8_4^2, MV8_5^2$. Различить указанные многообразия удается путем сравнения значений инвариантов Тураева — Виро TV_4, TV_5 и TV_6, где $\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, число различных многообразий с двумя каспами, построенных из не более чем восьми правильных идеальных тетраэдров, равно 12 (см. табл. 4).

Многообразия, получаемые склеиванием не более чем семи правильных идеальных гиперболических тетраэдров, идентифицированы с многообразиями из работы [4], что указано в последнем столбце табл. 2 и в табл. 5. Доказательство теоремы завершено. $\square$

Некоторые многообразия из табл. 2 и 4 являются дополнениями к узлам и зацеплениям. А именно $MV2_1^1 = S^3 \setminus 4_1$, $MV4_2^2 = S^3 \setminus 6_2^2$, $MV8_1^2 = S^3 \setminus 10_{138}^2$. Соответствующие узлы и зацепления приведены на рис. 1. Кроме того, $MV4_1^2 = S^3 \setminus \mathcal{B}$ для двухкомпонентного зацепления $\mathcal{B}$, указанного на рис. 2. Отметим, что оценки сложности для замкнутых многообразий, полученных хирургиями на узле восьмерки 4_1, были представлены в [17], а для замкнутых гиперболических многообразий, циклически накрывающих S^3 разветвленно над 4_1, — в [18]. Двухкомпонентное зацепление 10_{138}^2 обладает интересными свойствами в контексте изучения трехмерных ориентируемых гиперболических многообразий малого объема [19].

Теорема 2. *Существует ровно одно трехмерное ориентируемое гиперболическое многообразие с каспами, которое получается склеиванием девяти правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Обозначим это многообразие $MV9_1^1$. Оно задается кодировкой*

$$\text{jbpahaaedeigghihigbftenjnfj},$$

имеет 1 касп и $H_1(MV9_1^1) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

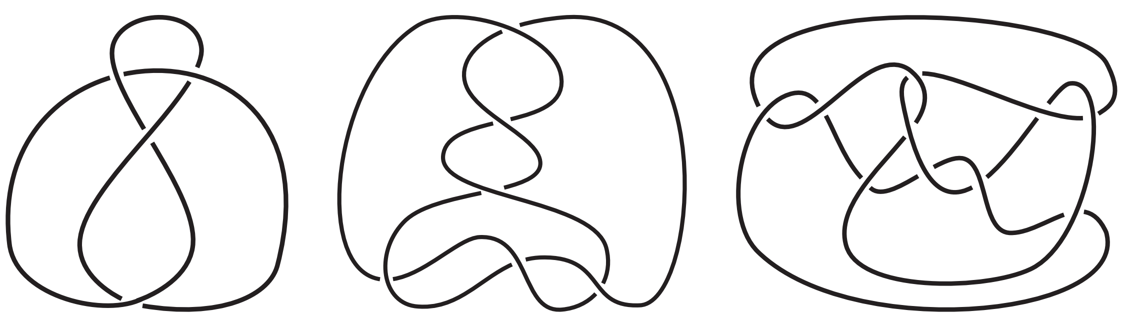


Рис. 1. Узел 4_1, зацепления 6_2^2 и 10_{138}^2.

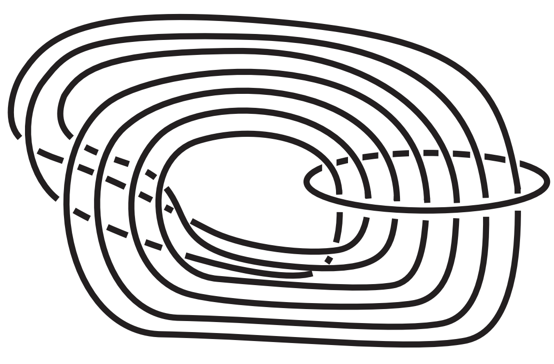


Рис. 2. Зацепление $\mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы 1 строим все 4-регулярные связные графы с 9 вершинами. Их число равно 8296. Компьютерный перебор показывает, что множество $\mathcal{M}$ содержит ровно одно ориентируемое многообразие. Его обезвоженное описание приведено в формулировке теоремы. Непосредственные вычисления первой группы гомологий многообразий дают указанный результат. □

4. Многообразия сложности 10

Следующая теорема описывает случай склеивания ориентируемых гиперболических многообразий с каспами из ровно десяти правильных идеальных тетраэдров.

Теорема 3. *Любое ориентируемое гиперболическое* 3*-многообразие, полученное склеиванием десяти правильных идеальных тетраэдров имеет не более пяти каспов. При этом справедливы следующие оценки и точные равенства для числа таких многообразий*:

1. $11 \leq |MV10^1| \leq 15$.
2. $15 \leq |MV10^2| \leq 20$.
3. $9 \leq |MV10^3| \leq 15$.
4. $|MV10^4| = 3$*, при этом* $MV10^4_1 = S^3 \backslash L8a21$, $MV10^4_2 = S^3 \backslash L10n101$ *и* $MV10^4_3 = S^3 \backslash L12^4_1$.
5. $|MV10^5| = 1$*, при этом* $MV10^5_1 = S^3 \setminus L10n113$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы 1 строим все 4-регулярные связные графы с 10 вершинами. Их число равно 48432. Как и раньше, для каждого такого графа G строим множество $\mathcal{M}_G$ ориентируемых гиперболических 3-многообразий с каспами. Объединение всех построенных множеств $\mathcal{M}_G$ дает полный список $\mathcal{M}$ многообразий с каспами (возможно с дубликатами), полученных склеиванием десяти правильных идеальных тетраэдров. Проверяем множество $\mathcal{M}$ на наличие гомеоморфных многообразий с помощью сравнения их первых групп гомологий и значений инвариантов Тураева — Виро. Это удобно сделать разбив многообразия из $\mathcal{M}$ на 5 подмножеств в зависимости от числа каспов.

1. С л у ч а й многообразий с 1 каспом. Множество $\mathcal{M}$ содержит 15 многообразий с одним каспом. Сравнение их первых групп гомологий, приведенных в табл. 6, показывает, что среди 15 многообразий имеется по крайней мере 10 различных. Вычисление инварианта Тураева — Виро TV_5 позволяет дополнительно различить многообразия $MV10^1_7$ и $MV10^1_8$, для которых первые группы гомологий равны $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}$. Однако другие многообразия с одним каспом с помощью инвариантов Тураева — Виро порядка не более 12 различить не удается. В итоге мы можем утверждать, что среди 15 указанных в табл. 6 многообразий не менее 11 негомеоморфных. Вопрос о гомеоморфности многообразий с одинаковыми группами гомологий и инвариантами Тураева — Виро остается открытым. Значения инвариантов TV_3, TV_4 и TV_5 приведены в табл. 6.

2. С л у ч а й многообразий с 2 каспами. Множество $\mathcal{M}$ содержит 20 многообразий с 2 каспами. Сравнение их первых групп гомологий и значений инвариантов Тураева — Виро TV_3, TV_4, TV_5 и TV_6, приведенных в табл. 7, показывает, что из 20 многообразий по меньшей мере 15 различных. Вычисление инвариантов $TV_7, \ldots, TV_{12}$ не позволяет улучшить эту оценку. Вопрос о гомеоморфности многообразий из табл. 7, имеющих одинаковые группы гомологий и инварианты Тураева — Виро, остается открытым.

3. С л у ч а й многообразий с 3 каспами. Множество $\mathcal{M}$ содержит 16 многообразий с 3 каспами (см. табл. 8). Прежде всего отметим, что при помощи компьютерного перебора удается показать, что две из приведенных в табл. 8 идеальных триангуляций задают одно и то же многообразие $MV10^3_1$ — дополнение в S^3 к трехкомпонентному зацеплению $L8a20$ (см. рис. 3). Таким образом, число различных многообразий не превосходит 15. Сравнение их первых групп гомологий и значений инвариантов Тураева — Виро TV_3, TV_4 и TV_5, приведенных в табл. 8, показывает, что из 15 многообразий по меньшей мере 9 различных. Вычисление инвариантов

Т а б л и ц а 6

Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 1 каспом

Имя	Кодировка	H_1	TV_3	TV_4	TV_5
$MV10^1_1$	kdhddaadefhgjijjiiimplielhete	$\mathbb{Z}$			
$MV10^1_2$	kgpemaadefghiijhjjjkuimpcmoxu	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon+40$
$MV10^1_3$	kgpemaadefghihjjjjbbuimpgmgxu	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon+40$
$MV10^1_4$	kgpemaadefghihjjjjjkuimpgmgxu	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon+40$
$MV10^1_5$	kdhdfaabfefhijjiijlpqdaixlpqt	$\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}$			
$MV10^1_6$	kcpapaaeddhgjgihjjgjgagrjbnjo	$\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}$			
$MV10^1_7$	kbpelaacdefhghijijgknelcbouff	$\mathbb{Z}_{16}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-4\varepsilon+12$
$MV10^1_8$	kdhddaabefgeijjjiihdmtulphaxi	$\mathbb{Z}_{16}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-16\varepsilon+32$
$MV10^1_9$	kcpclaaecdeighjjijgngkggottgq	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$	0	$-4\varepsilon+6$	0
$MV10^1_{10}$	kcpclaaecdegihjjijgngkvfvetvh	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$	0	$-4\varepsilon+6$	0
$MV10^1_{11}$	khpababhgifhifgjjjeiataxdeimt	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon+40$
$MV10^1_{12}$	kdhdgaabfeffjijiijhluimqxmmuh	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon+40$
$MV10^1_{13}$	kdhdfaadeegfjjiiijdemudtlplpp	$\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}$			
$MV10^1_{14}$	kfdffabbcdefghijjjaqhhqaaqhpt	$\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_{25}\oplus\mathbb{Z}$			
$MV10^1_{15}$	kfdffabbcdefghijjjaqhhqaaqhie	$\mathbb{Z}_{11}\oplus\mathbb{Z}_{11}\oplus\mathbb{Z}$			

Т а б л и ц а 7

Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 2 каспами

имя	кодировка	H_1	TV_3	TV_4	TV_5	TV_6
$MV10^2_1$	kdhddaabffghiijjijlpiqiumlhxu	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-22\varepsilon+40$	
$MV10^2_2$	kdhdfaabeffejjiijihxxxhphxlxi	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-38\varepsilon+70$	
$MV10^2_3$	kdhddaabfegfjijiijhlutmetihxm	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-20\varepsilon+52$	
$MV10^2_4$	kgpemaadefghihjjjjkuimpjmnxu	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon+92$	43
$MV10^2_5$	kdhdgaabfeffiijjijhluimhxmluh	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon+92$	43
$MV10^2_6$	kdpegaadgehfihjijjgispdpgdndd	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon+92$	43
$MV10^2_7$	kgpemaadefghiijhjjbbuimpcmoxu	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon+92$	43
$MV10^2_8$	kcpblaaecdegihjjijgngksswlxcp	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-12\varepsilon+56$	69
$MV10^2_9$	kcpblaaecdeighjijgngkkbjujxe	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-12\varepsilon+56$	69
$MV10^2_{10}$	kdhdgaabfeffiijjijhluimpxmpuh	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-30\varepsilon+60$	
$MV10^2_{11}$	kdhdgaabfeffiijjijhluimdxmxuh	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon+40$	
$MV10^2_{12}$	khpababghhfiifgjjjqlxtaadeqqt	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-22\varepsilon+46$	21
$MV10^2_{13}$	kdhddaadffegijjjiieedlailetae	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	2	4	$-22\varepsilon+46$	21
$MV10^2_{14}$	kgpemaadefghiijhjjbbuimpbmbxu	$\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	8	$-56\varepsilon+108$	43
$MV10^2_{15}$	kcpffaadfeghiijhjjblbedtgdgxl	$\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	8	$-56\varepsilon+108$	43
$MV10^2_{16}$	khpababghhfiifgjjjqeutamdeqpt	$\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$				
$MV10^2_{17}$	khpababgfhgifihjjjiutmueiddep	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus 2\mathbb{Z}$	8	24		
$MV10^2_{18}$	kbpelaaecfgifhjjijnbdxxtgdxnt	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus 2\mathbb{Z}$	8	28	$-16\varepsilon+88$	111
$MV10^2_{19}$	kbpehaaecfgifhjijjnbdpptwqghd	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus 2\mathbb{Z}$	8	28	$-16\varepsilon+88$	109
$MV10^2_{20}$	kdpemaadgefihijhjjkinumpsdbdq	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus 2\mathbb{Z}$				

$TV_6,\ldots,TV_{12}$ не позволяет улучшить эту оценку. Вопрос о гомеоморфности многообразий из табл. 8, имеющих одинаковые группы гомологий и инварианты Тураева — Виро, остается открытым. С помощью компьютерной программы 3-Manifold Recognizer [20] устанавливаем, что $MV10^3_2 = S^3\setminus L10n88$ и $MV10^3_3 = S^3\setminus L11n354$ (см. рис. 3).

Т а б л и ц а 8

Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 3 каспами

имя	кодировка	H_1	TV_3	TV_4	TV_5
$MV10^3_1$	kdhdgaabfeffjijiijixuimixmiuh kdhddaacefegijjjijiddltptthux	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	16	$-96\varepsilon+188$
$MV10^3_2$	khpababgfifhghijjjdtltmxmliit	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	16	$-52\varepsilon+116$
$MV10^3_3$	kdhdgaabfeffjijiijhluimixmiuh	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-64\varepsilon+132$
$MV10^3_4$	kdhddaabfefgjijiijlpllpptldxd	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-76\varepsilon+148$
$MV10^3_5$	khpababgfifhghijjjdultmxeliit	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	16	$-40\varepsilon+100$
$MV10^3_6$	kbldhaabdeefhjhijjukxukbhkhbk	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon+136$
$MV10^3_7$	kbldhaabdeefhihjjjukxukbxkxbk	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon+136$
$MV10^3_8$	kcpblaaecdeighjijjgngkgngxkxx	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon+136$
$MV10^3_9$	kcpblaaecdegijhjijgngkwchvxrh	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon+136$
$MV10^3_{10}$	kbldhaacedefjjhiijttkxgehkhtb	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	24	$-128\varepsilon+264$
$MV10^3_{11}$	kgpemaadefghihjijjbbuimpkmsxu	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	24	$-128\varepsilon+264$
$MV10^3_{12}$	kdhddaadffefiijjjieedixdiqtuq	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	32	$-96\varepsilon+248$
$MV10^3_{13}$	khpababgfifhghijjjiuptmdeldit	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	32	$-96\varepsilon+248$
$MV10^3_{14}$	kdhddaacefegiiijjjddaammdipxl	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon+112$
$MV10^3_{15}$	khpababhgifhifgjjjqiatmldeiqt	$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon+112$

4. С л у ч а й многообразий с 4 каспами. Множество $\mathcal{M}$ содержит 4 многообразия с 4 каспами (см. табл. 9). С помощью компьютерной программы 3-Manifold Recognizer устанавливаем, что две из приведенных в табл. 9 идеальных триангуляций задают одно и то же многообразие $MV10^4_2 = S^3 \setminus L10n101$. Два оставшихся многообразия из табл. 9 также являются дополнениями к 4-компонентным зацеплениям в сфере: $MV10^4_1 = S^3 \setminus L8a21$ и $MV10^4_3 = S^3 \setminus L12^4_1$ (см. рис. 4).

5. С л у ч а й многообразий с 5 каспами. Множество $\mathcal{M}$ содержит 2 многообразия с 5 каспами. Обезвоженные описания их идеальных триангуляций имеют вид:

kjpceabffgghhiijjjlpemdituxlp и kppaaabghifhifgjjjuiutmideuix.

Непосредственные вычисления с помощью компьютерной программы 3-Manifold Recognizer показывают, что обе триангуляции задают одно и то же многообразие $MV10^5_1$ — дополнение к 5-компонентному зацеплению $L10n113$, приведенному на рис. 5. Отметим, что $H_1(MV10^5_1) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Последний рассмотренный случай завершает доказательство теоремы. □

Авторы признательны М.А. Овчинникову, который при обсуждении представленных в этом разделе таблиц обратил наше внимание на то, что многообразия $MV10^4_2$ и $MV10^5_1$ являются дополнениями к зацеплениям.

5. Минимальное число тетраэдров для многообразия с заданным числом каспов

Следуя [21], обозначим через $\sigma(k)$ минимальное число идеальных гиперболических тетраэдров, необходимых для построения связного трехмерного гиперболического многообразия конечного объема с k каспами (ориентируемого или неориентируемого). Пусть $\sigma_{\rm or}(k)$ — аналогичное число для случая, когда мы ограничиваемся только ориентируемыми многообразиями.

Введем величину $\sigma_{\rm reg}(k)$ — минимальное число правильных идеальных гиперболических тетраэдров, необходимых для построения связного ориентируемого гиперболического много-

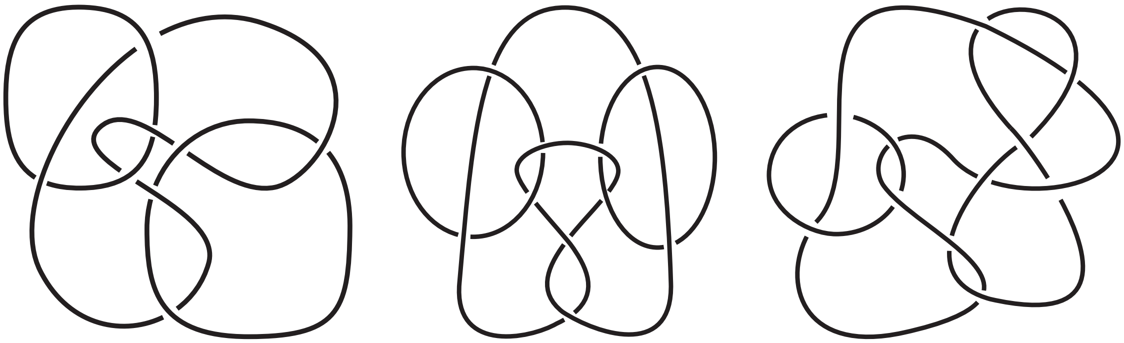


Рис. 3. Зацепления $L8a20$, $L10n88$ и $L11n354$.

Т а б л и ц а 9

Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 4 каспами

Имя	Кодировка	H_1	TV_3	TV_4
$MV10^4_1$	kdhdgaabfeffiijjjijixuimpxmpuh	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	32
$MV10^4_2$	khpababghifhgfijjjdiltmxdliit kdhddaadffefiiijjjeedixdixtux	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	40
$MV10^4_3$	khpababghhfggfhjjjdixixxdxdix	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	8	36

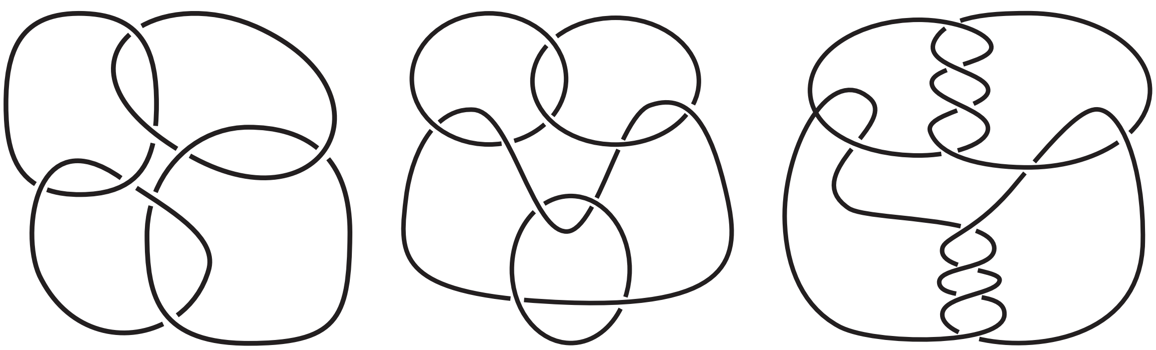


Рис. 4. Зацепления $L8a21$, $L10n101$ и $L12^4_1$.

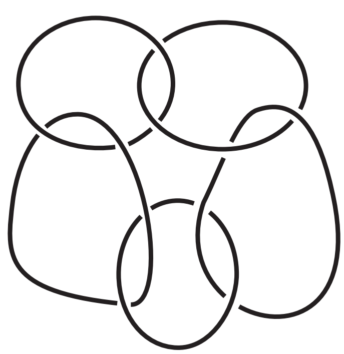


Рис. 5. Зацепление $L10n113$.

образия с k каспами. Сведем результаты для $\sigma(k)$ и $\sigma_{\rm or}(k)$ из [21] и результаты теорем 1–3 в табл. 10.

Т а б л и ц а 10

k	1	2	3	4	5
$\sigma(k)$	1	2	4	6	10
$\sigma_{\rm or}(k)$	2	4	6	8	10
$\sigma_{\rm reg}(k)$	2	4	10	10	10

В [21] высказана гипотеза о том, что $\sigma_{\rm or}(6) = 16$. Там же показано, что для любого положительного k выполнено $\sigma_{\rm or} \geq 2k$ и для $k \geq 2$ выполнено $\sigma_{\rm or}(k) \leq 4(k-1)$.

Проведенные нами компьютерные эксперименты позволяют выдвинуть гипотезу о том, что $\sigma_{\rm reg}(6) = 16$. Кроме того, представляет интерес следующая проблема.

П р о б л е м а. Найти верхнюю оценку на $\sigma_{\rm reg}(k)$ для достаточно больших k.

6. Обезвоженные описания многообразий

Опишем процедуру восстановления триангуляции многообразия по ее обезвоженному описанию (кодировке). Каждая кодировка W представляет собой строку букв английского алфавита. Первая буква строки задает количество тетраэдров в триангуляции по правилу: буква b означает 1 тетраэдр, c означает 2, d означает 3 тетраэдра и т. д.

Пусть кодировка W задает триангуляцию из N тетраэдров. Занумеруем тетраэдры числами от 0 до $N-1$. Вершины каждого тетраэдра занумеруем числами от 0 до 3. Тогда каждая из $4N$ граней тетраэдров однозначно определяется упорядоченной парой чисел: номером тетраэдра и номером противолежащей вершины. Эту пару чисел мы будем называть номером грани.

Далее мы последовательно одна за другой осуществим $2N$ склеек граней. При каждой склейке первая грань выбирается так: среди всех граней, которые еще не участвовали в склейках, мы выбираем грань, имеющую наименьший номер (в лексикографическом смысле).

Для выбора второй грани, участвующей в склейке, разобьем оставшуюся часть кодировки W (т.е. кодировку W с удаленной первой буквой) на три строки. Первые $2\left[\dfrac{N+3}{4}\right]$ буквы образуют строку W_1, следующие $N+1$ буквы образуют строку W_2, и последние $N+1$ буквы образуют строку W_3.

Тетраэдры, грани которых уже участвовали в склейках, будем называть *старыми*, а остальные тетраэдры — *новыми*. Строка W_1, состоящая из букв от a до p, определяет, какому тетраэдру (старому или новому) принадлежит вторая грань. Делается это так. Берем первые две буквы строки W_1 и заменяем их числами X и Y по правилу: букву a заменяем числом 0, букв b заменяем числом 1, ..., букву p заменяем числом 15. Десятичное число $16X+Y$ переводим в двоичную запись $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_8$. Читая запись $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_8$ справа налево, мы узнаем необходимую информацию про первые 8 склеек граней: 0 означает, что вторая грань принадлежит старому тетраэдру, а 1 — новому. Если $N > 4$, то берем следующие две буквы строки W_1 и проделываем аналогичные действия. В результате получаем информацию про следующие восемь склеек граней и т. д.

Если вторая грань должна принадлежать одному из новых тетраэдров, то выбирается новый тетраэдр с наименьшим номером. При этом вторая грань выбирается в нем так, чтобы она противолежала вершине с тем же номером, что и первая грань, участвующая в склейке. Поскольку обе грани содержат вершины с одинаковыми номерами, то первая грань склеивается со второй гранью *по тождеству*, т.е. по гомеоморфизму, сохраняющему номера вершин.

Таблица 11

Описание склеек граней триангуляции многообразия $MV10_1^5$

Номер склейки	Первая грань	Вторая грань	Гомеоморфизм
1	$(0,0)$	$(1,0)$	тождество
2	$(0,1)$	$(2,1)$	тождество
3	$(0,2)$	$(3,2)$	тождество
4	$(0,3)$	$(4,3)$	тождество
5	$(1,1)$	$(5,1)$	тождество
6	$(1,2)$	$(5,3)$	$310 \to 120$
7	$(1,3)$	$(5,2)$	$210 \to 130$
8	$(2,0)$	$(6,0)$	тождество
9	$(2,2)$	$(6,3)$	$310 \to 012$
10	$(2,3)$	$(6,2)$	$210 \to 013$
11	$(3,0)$	$(7,0)$	тождество
12	$(3,1)$	$(7,3)$	$320 \to 021$
13	$(3,3)$	$(7,1)$	$210 \to 203$
14	$(4,0)$	$(8,0)$	тождество
15	$(4,1)$	$(8,2)$	$320 \to 301$
16	$(4,2)$	$(8,1)$	$310 \to 302$
17	$(5,0)$	$(9,0)$	тождество
18	$(6,1)$	$(9,1)$	$320 \to 320$
19	$(7,2)$	$(9,3)$	$310 \to 120$
20	$(8,3)$	$(9,2)$	$210 \to 130$

Пусть вторая грань принадлежит старому тетраэдру T. Из всех $2N$ склеек граней тетраэдров таких склеек будет ровно $N+1$. Пусть i, $1 \le i \le N+1$, — номер текущей склейки. Тогда i-я буква строки W_2, читаемая слева направо, задает номер тетраэдра T по правилу: буква a задает номер 0, буква b — номер 1 и т.д. Нам осталось выбрать вторую грань среди граней тетраэдра T и указать гомеоморфизм склейки первой грани со второй гранью.

Рассмотрим все 24 перестановки четырех цифр $0, 1, 2, 3$ и упорядочим их лексикографически. Сопоставим каждой букве от a до x перестановку по правилу: букве a сопоставим перестановку 0123, букве b — перестановку 0132, … и букве x — перестановку 3210. Пусть i-я буква строки W_3, читаемая слева направо, определяет перестановку $ABCD$. Эта перестановка задает биективное отображение ξ вершин тетраэдра, содержащего первую грань, на вершины тетраэдра T по правилу: $\xi(3) = A$, $\xi(2) = B$, $\xi(1) = C$ и $\xi(0) = D$. Пусть первая грань противоположна вершине с номером j. Тогда вторая грань выбирается в тетраэдре T так, чтобы она была противоположной вершине с номером $\xi(j)$. При этом ограничение отображения ξ на множество $\{0, 1, 2, 3\} \setminus \{j\}$ продолжается до гомеоморфизма склейки первой грани со второй гранью.

Пример. Рассмотрим первую из двух описанных выше триангуляций многообразия $MV10_1^5$, заданную кодировкой $W = kjpceabffgghhiijjjlpemdituxlp$. Первая буква k кодировки W означает, что триангуляция состоит из $N = 10$ тетраэдров. Следующие $2\left[\dfrac{N+3}{4}\right] = 6$ буквы образуют строку $W_1 = jpceab$. Первая пара букв jp строки W_1 порождает число $16 \times 9 + 15 = 159$, записываемое в бинарном виде как 10011111. Вторая пара букв ce строки W_1 порождает число $16 \times 2 + 4 = 36$, записываемое в бинарном виде как 00100100. Наконец, третья пара букв ab строки W_1 порождает число $16 \times 0 + 1 = 1$, записываемое в бинарном виде как 00000001. Это означает, что в склейках с 1 по 5, 8, 11, 14 и 15 вторые грани принадлежат новым тетраэдрам, а в остальных — старым. Завершая предварительную часть, выпишем строки W_2 и W_3: $W_2 = ffgghhiijjj$, $W_3 = lpemdituxlp$.

Итак, в первых пяти склейках граней вторые грани принадлежат новым тетраэдрам. Поэтому грань $(0,0)$ склеивается с гранью $(1,0)$ по тождеству. Далее по тождеству склеиваются: грань $(0,1)$ с гранью $(2,1)$, грань $(0,2)$ с гранью $(3,2)$, грань $(0,3)$ с гранью $(4,3)$ и грань $(1,1)$ с гранью $(5,1)$.

Опишем шестую склейку, в которой впервые грань старого тетраэдра склеивается с гранью старого тетраэдра. В качестве первой грани мы должны взять грань $(1,2)$. Первая буква f строки W_2 говорит нам, что вторая грань должна лежать в тетраэдре номер 5. Первая буква l строки W_3 определяет перестановку 1320. Это означает, что вторая грань имеет номер $(5,\xi(2)) = (5,3)$, а вершины 3, 1, 0 первой грани склеиваются с вершинами 1, 2, 0 второй грани соответственно (для краткости будем писать $310 \to 120$).

Далее продолжаем аналогичным образом до тех пор, пока не совершим двадцать склеек граней. Эти склейки записаны в табл. 11.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Matveev S.** Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. 2nd ed. Berlin: Springer, 2007. 492 p. (Algorithms and Computation in Mathematics; vol. 9.)
2. **Веснин А.Ю., Матвеев С.В., Фоминых Е.А.** Сложность трехмерных многообразий: точные значения и оценки // Сиб. электр. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 341–364.
3. **Frigerio R., Martelli B., Petronio C.** Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary // Experimental Math. 2004. Vol. 13, no. 2. P. 171–184.
4. **Callahan P., Hildebrand M., Weeks J.** A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement // Math. Comp. 1999. Vol. 68, no. 225. P. 321–332.
5. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. URL: http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/ (дата обращения: 11.03.2014).
6. **Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S.** Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces// J. Topology. 2009. Vol. 2, no. 1. P. 157–180.
7. **Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S.** Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds // Algebr. Geom. Topol. 2011. Vol. 11, no. 3. P. 1257–1265.
8. **Веснин А.Ю., Фоминых Е.А.** Точные значения сложности многообразий Паолюци — Циммермана // Докл. РАН. 2011. Т. 439, № 6. С. 727–729.
9. **Веснин А.Ю., Фоминых Е.А.** О сложности трехмерных гиперболических многообразий с геодезическим краем // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 781–793.
10. **Frigerio R., Martelli B., Petronio C.** Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds// Pacific J. Math. 2003. Vol. 210, no. 2. P. 283–297.
11. **Anisov S.** Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds // Moscow Math. J. 2005. Vol. 5, no. 2. P. 305–310.
12. Jeff Weeks' Topology and Geometry Software [site]: SnapPea. URL: http://geometrygames.org/ SnapPea/ (дата обращения: 11.03.2014).
13. **Hildebrand M.V., Weeks J.R.** A computer generated census of cusped hyperbolic 3-manifolds // Computers and mathematics: papers from the conference held at the Massachusetts Institute of Technology / eds. Erich Kaltofen, Stephen M. Watt. (Cambridge, 1989). N. Y.: Springer-Verlag, 1989. P. 53–59.
14. **Burton B.A.** A duplicate pair in the Snappea census. Preprint arXiv:1311.7615. URL: http://arxiv.org/pdf/1311.7615v2.pdf (дата обращения 11.03.2014).
15. **Веснин А.Ю., Таркаев В.В., Фоминых Е.А.** О сложности трехмерных гиперболических многообразий с каспами // Докл. РАН. 2014. Т. 456, № 1. С. 11–14.
16. **Ratcliffe J.** Foundations of hyperbolic manifolds. 2nd ed. N. Y.: Springer, 2006. 779 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 149.)
17. **Фоминых Е.А.** Хирургии Дена на узле восьмерка: верхняя оценка сложности // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, №. 3. С. 680–689.
18. **Matveev S., Petronio C., Vesnin A.** Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds // J. Aust. Math. Soc. 2009. Vol. 86, no. 2. P. 205–219.

19. **Mednykh A., Vesnin A.** Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds // J. Knot Theory Ramifications. 1998. Vol. 7, no. 3. P. 381–392.
20. Atlas of 3-Manifolds [site]: A free software 3-Manifold Recognizer. URL: http://matlas.math.csu.ru/ (дата обращения: 11.03.2014).
21. **Adams C., Sherman W.** Minimum ideal triangulations of hyperbolic 3-manifolds // Discrete Comput. Geom. 1991. Vol. 6, no. 2. P. 135–153.

Веснин Андрей Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Омский государственный технический униерситет
e-mail: vesnini@math.nsc.ru

Поступила 12.03.2014

Таркаев Владимир Викторович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Челябинский государственный университет
e-mail: trk@csu.ru

Фоминых Евгений Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Челябинский государственный университет
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: fominykh@csu.ru

Том 20 № 2 2014

УДК 519.16 + 519.85

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСКОЛЬКИХ КОММИВОЯЖЕРАХ НА СЛУЧАЙНЫХ ВХОДНЫХ ДАННЫХ, НЕОГРАНИЧЕННЫХ СВЕРХУ[1]

Э. Х. Гимади, А. М. Истомин, И. А. Рыков, О. Ю. Цидулко

В работе представлен вероятностный анализ приближенного алгоритма решения задачи о m коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями их маршрутов (гамильтоновых циклов). Временная сложность алгоритма $O(mn^2)$. Предполагается, что элементы матрицы расстояний являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$. Анализ проведен на примере усеченно-нормального и показательного распределений. Найдены оценки относительной погрешности, вероятности несрабатывания, а также условия асимптотической точности алгоритма.

Ключевые слова: задача о нескольких коммивояжерах, приближенный алгоритм, временная сложность, асимптотическая точность, случайные входные данные, функция распределения, усеченно-нормальное, показательное.

E. Kh. Gimadi, A. M. Istomin, I. A. Rykov, O. Yu. Tsidulko. Probabilistic analysis of an approximation algorithm for the m-peripatetic salesman problem on random instances unbounded from above.

We present the probabilistic analysis of an approximation algorithm for the minimum-weight m-peripatetic salesman problem with different weight functions of their routes (Hamiltonian cycles). The time complexity of the algorithm is $O(mn^2)$. We assume that the entries of the distance matrix are independent equally distributed random variables with values in an upper-unbounded domain $[a_n, \infty)$, where $a_n > 0$. The analysis is carried out for the example of truncated normal and exponential distributions. Estimates for the relative error and failure probability, as well as conditions for the asymptotic exactness of the algorithm, are found.

Keywords: m-peripatetic salesman problem, approximation algorithm, time complexity, asymptotic optimality, random instances, distribution function, truncated normal, exponential.

Введение

В классической постановке задачи коммивояжера в качестве входной информации дан реберно-взвешенный граф $G = (V, E)$ с неотрицательной весовой функцией ребер $w\colon E \to \mathbb{R}^+$, а целью является отыскание в нем экстремального по весу гамильтонова цикла. Задача коммивояжера принадлежит к числу известных NP-трудных задач [12]. Обзор работ по этой теме можно найти в [6; 7]. Исследователи рассматривают различные постановки: задача отыскания минимального или максимального по весу гамильтонова цикла, задача на ориентированных и неориентированных графах.

Естественным обобщением является задача о двух или более коммивояжерах. Такую задачу называют также задачей о m бродячих торговцах [5] (m-Peripatetic Salesman Problem, далее m-PSP). Целью является нахождение в графе G таких m реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов $H_1, \ldots, H_m \subset E$, чтобы минимизировать (максимизировать) их суммарный вес

$$W(H_1, \ldots, H_m) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{e \in H_k} w(e).$$

Де Корт показал, что задача 2-PSP NP-трудна [1] сведением к ней задачи Гамильтонов путь. Аналогичные аргументы могут быть применены к случаю m-PSP при $m > 2$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00090а, 12-01-00093а, 12-01-33028а, 13-07-00070а), целевых программ СО РАН (интеграционный проект № 7Б) и Президиума РАН (проект № 227).

Рассматривают также модификацию задачи m коммивояжеров с различными весовыми функциями маршрутов $w_1\colon E \to \mathbb{R}^+, \ldots, w_m\colon E \to \mathbb{R}^+$ и целевой функцией

$$W_1(H_1, \ldots, H_m) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{e \in H_k} w_k(e).$$

Для задач TSP и m-PSP, как и для многих других NP-трудных задач дискретной оптимизации на случайных входах, актуальным является вероятностный анализ быстрых приближенных алгоритмов. Среди характеристик алгоритмов выделяют относительную погрешность и вероятность несрабатывания. Оценки этих характеристик получены в предположении, что входные данные всех индивидуальных задач имеют одинаковое распределение. Соответственно относительная погрешность и вероятность несрабатывания алгоритма зависят от вида распределения входных данных. Строгое определение этих характеристик приведено в разделе настоящей статьи, посвященном вероятностному анализу.

В данной работе предполагается, что на входе задан полный n-вершинный случайный граф, расстояния между вершинами которого — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Для задачи коммивояжера (TSP) на таких графах в [13] представлен вероятностный анализ алгоритма “Иди в ближайший непройденный город” для приближенного решения задачи коммивояжера в случае, когда расстояния имеют дискретное распределение $p_k = \mathbf{P}\{c_{ij} = k\}$, где $k = 1, \ldots, r_n$. Получено условие асимптотической точности алгоритма:

$$\sum_{k=1}^{r_n} \Big(\sum_{i=1}^{k} p_i \Big)^{-1} = o(n).$$

В [11] и [3] рассмотрена задача коммивояжера на непрерывных случайных данных в ограниченном интервале $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$. В случае равномерного распределения расстояний $c_{ij} \in [a_n, b_n]$ получены оценки относительной погрешности $\varepsilon_n = O\big(\frac{b_n/a_n}{n/\ln n}\big)$ и вероятности несрабатывания $\delta_n = n^{-3/2}$. Доказано, что алгоритм является асимптотически точным при $b_n/a_n = o(n/\ln n)$. В случае β-распределения с параметрами $\gamma = 0$ и $\alpha > 0$ асимптотическая точность имеет место при $b_n/a_n = o(n^{\alpha+1} \min(1, \alpha))$.

В [10] рассмотрен случай, когда элементы матрицы расстояний являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$ и распределенными по нормальному или показательному законам. Установлены оценки относительной погрешности, вероятности несрабатывания, а также условия асимптотической точности алгоритма, являющегося модификацией алгоритма “Иди в ближайший непройденный город”.

В [2] для задачи коммивояжера в полном n-вершинном неориентированном графе с весами ребер c_{ij} — независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$, показано, что $|f^* - f_2| = o(1)$ при $n \to \infty$, где f^* и f_2 — значения целевых функций задачи коммивояжера соответственно на оптимальном решении и приближенном решении, основанном на точном решении задачи о цикловом покрытии.

Результаты построения приближенных алгоритмов с оценками качества для некоторых модификаций задачи m коммивояжеров (m-PSP) представлены в работе [4]. В частности, в случае графов в многомерном евклидовом пространстве задача m-PSP решается асимптотически точно с кубической трудоемкостью [8].

В статье [9] представлен приближенный алгоритм с временной сложностью $O(mn^2)$ для решения задачи m-PSP, $1 < m < n/4$, на графе, веса ребер которого — независимые случайные величины с функцией равномерного распределения на отрезке $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$. Этот алгоритм асимптотически точен, если $b_n/a_n = o(n/d(n))$, где $d(n) = \ln n$ при $2 \le m < \ln n$ и $d(n) = n^\theta$ при $\ln n \le m \le n^{1-\theta}$, $0 < \theta < 1$.

В настоящей работе рассмотрен частный случай задачи m-PSP с различными весовыми функциями, когда элементы матрицы расстояний — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$ и распределенные по нормальному или показательному законам. Представленный алгоритм решения является модификацией алгоритма “Иди в ближайший непройденный город”. Асимптотическая точность этого алгоритма имеет место при выполнении условия $\beta_n/a_n = o(n/d(n))$, где $d(n) = \ln n$ при $2 \leq m < \ln n$ и $d(n) = n^\theta$ при $\ln n \leq m \leq n^{1-\theta}$, $0 < \theta < 1$. Здесь β_n — параметр α_n или σ_n соответственно для показательного и нормального распределений.

1. Постановка задачи

Как уже было сказано, в задаче m коммивояжеров с различными весовыми функциями дан полный неориентированный или ориентированный граф G без петель на n вершинах. Для каждого i-го коммивояжера известна стоимость прохода по ребру (j, k) в графе: c_{ijk}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j, k \leq n$. Требуется найти m реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов (обходов для каждого коммивояжера) таких, что суммарная стоимость пройденных ребер минимальна. В алгебраической форме задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\text{минимизировать} \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij\pi^{(i)}(j)} \tag{1.1}$$

при условиях:

$$\pi^{(i)}(k) \neq \pi^{(s)}(k), \quad (\pi^{(i)})^{-1}(k) \neq \pi^{(s)}(k), \quad 1 \leq i \neq s \leq m, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{1.2}$$

$$\pi^{(i)} \in P_n, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{1.3}$$

Здесь c_{ijk} — заданные вещественные числа, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j, k \leq n$, P_n — множество одноциклических подстановок порядка n.

Под слоем матрицы $C = (c_{ijk})$ в данной работе понимается подматрица исходных данных размером $n \times n$, которая получается при фиксированном значении индекса i, $1 \leq i \leq m$.

2. Алгоритм приближенного решения задачи

Для решения задачи (1.1)–(1.3) при числе коммивояжеров $m < n/4$ предлагается алгоритм $\widetilde{A}$ из [9], который последовательно обрабатывает слои матрицы (c_{ijk}) и в каждом слое i, $1 \leq i \leq m$, строит гамильтонов цикл. Для слоя i, применяя принцип “Иди в ближайший непройденный город” $n - 4i$ раза, алгоритм находит частичный путь (цепь). Затем с помощью процедуры P_H частичный путь достраивается до гамильтонова цикла, при этом увеличивается множество запрещенных элементов для последующих слоев матрицы с тем, чтобы получаемые алгоритмом $\widetilde{A}$ гамильтоновы циклы реберно не пересекались.

2.1. Вспомогательная процедура P_H построения гамильтоновой цепи

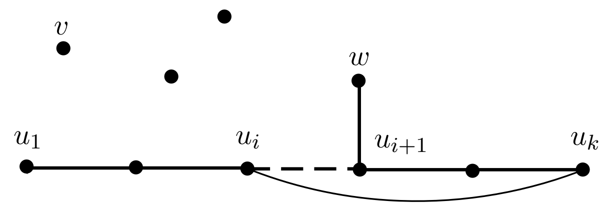
Процедура P_H находит в заданном n-вершинном неориентированном графе $H = (V_H, E_H)$ с минимальной степенью вершины, большей $n/2$, гамильтонову цепь P с заданными концами u и v или гамильтонов цикл при $u = v$. Согласно известной теореме Дирака гамильтонов цикл в таком графе существует.

Описание процедуры P_H.

Э т а п 1. Пусть построена цепь $P = \{u = u_1, \ldots, u_k\}$, $k > 1$. Если $k = n$, то процедура заканчивает работу. В противном случае переходим на этап 2.

Э т а п 2. Ищем ребро вида $\{u_k, w\}$, где $w \notin P$, и при этом $w = v$, только когда $k = n-1$. Если находим, то полагаем $P = \{u = u_1, \ldots, u_k, u_{k+1} = w\}$ и возвращаемся на этап 1. В противном случае переходим на этап 3.

Э т а п 3. Выбираем произвольную вершину $w \notin P$, при этом выбираем v, только когда $k = n-1$. Находим $i \in \{1, \ldots, k-2\}$, для которого существуют ребра $\{u_k, u_i\}$ и $\{w, u_{i+1}\}$. Добавляем их к цепи и удаляем ребро $\{u_i, u_{i+1}\}$. Возвращаемся на этап 1 (см. рисунок).



Этап 3.

Временная сложность процедуры P_H равна $O(n^2)$.

2.2. Описание алгоритма $\widetilde{A}$ решения задачи

Полагаем $i = 0$.

Э т а п 1. Полагаем $i = i + 1$. Если $i = m + 1$, алгоритм заканчивает работу. Иначе рассматриваем граф $G(V, E)$ с матрицей расстояний (c_{ijk}), $j, k = \overline{1, n}$. Если элемент c_{ijk} запрещен в матрице C, соответствующее ему ребро будет запрещено в графе G. Среди соседей вершины 1 графа G, ребра из которых в вершину 1 не запрещены, произвольным образом выбираем вершину $\widetilde{v}$. Полагаем путь $P = \{1 = u_1\}$, $s = 1$. Переходим на этап 2.

Э т а п 2. Пусть построена цепь $P = \{1 = u_1, \ldots, u_s\}$. Если $s = n - 4i$, переходим на этап 3. Иначе в графе G находим ближайшую к u_s вершину $u_{s+1} \notin P \cup \{\widetilde{v}\}$ такую, что ребро (u_s, u_{s+1}) не запрещено в G. Полагаем $P = \{1 = u_1, \ldots, u_s, u_{s+1}\}$, $\pi^{(i)}(u_s) = u_{s+1}$, $s = s + 1$ и переходим на начало этапа 2.

Э т а п 3. Рассматриваем неориентированный граф $H = (V_H, E_H)$ со множеством вершин $V_H = ((V \setminus P) \cup \{u_s\})$, где u_s — конец пути P, и множеством ребер E_H, которое состоит из всех незапрещенных ребер между вершинами из V_H. При помощи процедуры P_H строим в этом подграфе гамильтонову цепь с концами u_s и $\widetilde{v}$. Пусть эта цепь $\{u_s = v_1, v_2, \ldots, v_{n-s}, v_{n-s+1} = \widetilde{v}\}$. Полагаем $\pi^{(i)}(v_t) = v_{t+1}$, $t = 1, \ldots, n-s$, $\pi^{(i)}(\widetilde{v}) = 1$. Запрещаем следующие элементы матрицы C: $c_{i's\pi^{(i)}(s)},\ c_{i's(\pi^{(i)})^{-1}(s)},\ i < i' \le m,\ s = \overline{1, n}$. Переходим на этап 1.

В результате действия алгоритма получаем приближенное решение

$$f_{\widetilde{A}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} c_{is\pi^{(i)}(s)}.$$

Временная сложность алгоритма равна $O(n^2)$. Отметим, что веса ребер (дуг) построенных гамильтоновых циклов являются попарно независимыми случайными величинами как в случае ориентированого, так и в случае неориентированного графа G.

2.3. Входные данные

Пусть недиагональные элементы матрицы расстояний (c_{ijk}) — независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения.

В случае *усеченного нормального* закона плотность распределения примет вид

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\Big(-\dfrac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\Big), & \text{если } a_n \le x \le \infty, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Обозначим через $F(x)$ функцию распределения случайных величин $\tilde{c}_{ijk} = c_{ijk} - a_n$:

$$F(x) = \mathbf{Pr}\,\{\tilde{c}_{ijk} < x\} = \int\limits_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma_n^2}\Big) du. \tag{2.2}$$

В случае *усеченного показательного* закона плотность распределения недиагональных элементов матрицы расстояний c_{ijk} выглядит следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_n} \exp\Big(-\dfrac{x-a_n}{\alpha_n}\Big), & \text{если } a_n \le x \le \infty, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Соответствующая функция распределения случайных величин $\tilde{c}_{ijk}$ имеет следующий вид:

$$F(x) = \mathbf{Pr}\,\{\tilde{c}_{ijk} < x\} = 1 - \exp\Big(-\frac{x}{\alpha_n}\Big). \tag{2.4}$$

3. Вероятностный анализ алгоритма $\widetilde{A}$

Для того чтобы оценить точность алгоритма $\widetilde{A}$, используется метод вероятностного анализа. Предполагается, что множество входов задачи определяется множеством матриц (c_{ijk}) размера $m \times n \times n$, где элементы c_{ijk} — независимые случайные величины, одинаково распределенные на неограниченном сверху интервале $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$.

Через $f_A(I)$ и $OPT(I)$ обозначим значение, найденное алгоритмом A на входе I, и оптимальное значение этой задачи, соответственно.

Будем говорить, что алгоритм имеет оценки $(\varepsilon_A(n), \delta_A(n))$ на множестве вероятностных входов рассматриваемой задачи (размерности n), если

$$\mathbf{Pr}\{f_A(I) > (1+\varepsilon_A(n))OPT(I)\} \le \delta_A(n),$$

где $\varepsilon_A(n)$ есть *оценка относительной погрешности* решения, получаемого алгоритмом A; $\delta_A(n)$ — *вероятность несрабатывания* алгоритма A, т. е. доля случаев, когда алгоритм не гарантирует погрешность, не превосходящую $\varepsilon_A(n)$. Представляется интересным поведение оценок $\delta_A(n)$ и $\varepsilon_A(n)$ при увеличении размерности задачи.

Алгоритм A называется *асимптотически точным* на классе рассматриваемых задач, если существуют оценки $\varepsilon_A(n)$ и $\delta_A(n)$, стремящиеся к нулю с ростом n. Всюду ниже для простоты изложения договоримся использовать обозначения ε_A и δ_A, опуская явное указание размерности.

Согласно данным выше определениям оценки качества алгоритма $\widetilde{A}$ будут определяться неравенством

$$\mathbf{Pr}\Big\{\sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^n c_{is\pi^{(i)}(s)} > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}})OPT(I)\Big\} \le \delta_{\widetilde{A}}, \tag{3.1}$$

где $c_{is\pi^{(i)}(s)}$ — элемент матрицы (c_{ijk}), выбранный алгоритмом $\widetilde{A}$ на слое i в s-й обрабатываемой алгоритмом строке данной матрицы.

При $1 \le i \le m$, $1 \le s \le n-4i-1$ случайная величина $c_{is\pi^{(i)}(s)}$ равна минимальному из незапрещенных элементов s-й обрабатываемой алгоритмом $\widetilde{A}$ строки слоя i матрицы C. Подсчитаем количество запрещенных элементов в этой строке. Диагональный элемент запрещен, так как в графе G нет петель. При обработке каждого предыдущего слоя было запрещено по 2 элемента в каждой строке матрицы. При обработке текущего слоя было запрещено не более $s-1$ элементов в каждой строке этого слоя. Таким образом, при фиксированной паре индексов i, s алгоритм выбирает элемент со случайной величиной $c_{is\pi^{(i)}(s)}$, равной минимуму из не менее $n-1-2(i-1)-(s-1)=n-2i-s+2$ элементов в строке s слоя i. Каждую из этих величин оценим сверху случайной величиной ξ_{is}, строго равной минимуму из $n-2i-s+2$ элементов в s-й обрабатываемой алгоритмом строке слоя i матрицы C.

Из описания алгоритма следует, что случайные величины $c_{is\pi^{(i)}(s)}$ при $1 \le i \le m$, $n-4i \le s \le n$, соответствующие весам ребер (дуг), присоединенных на третьем этапе алгоритма, имеют такое же распределение, как исходные элементы матрицы C. Далее для этих случайных величин будем использовать обозначение ξ_{is}, $1 \le i \le m$, $n-4i \le s \le n$.

Таким образом, имеем достаточное условие для (3.1):

$$\mathbf{Pr}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} c_{is\pi^{(i)}(s)} > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}})OPT(I)\Big\} \le \mathbf{Pr}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \xi_{is} > (1+\varepsilon_{\widetilde{A}})OPT(I)\Big\} \le \delta_{\widetilde{A}}. \tag{3.2}$$

Для дальнейшего анализа нам потребуется следующая теорема.

Теорема 3.1 (Петров [14]). *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины и $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Если для некоторых положительных постоянных T и $g_1, \ldots, g_n$*

$$\mathbb{E}e^{tX_k} \le e^{\frac{1}{2}g_k t^2} \qquad (k=1,\ldots,n)$$

при $0 \le t \le T$, то

$$\mathbf{Pr}\{S > x\} \le \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\mathcal{G}}\Big) & \text{при} \quad 0 \le x \le \mathcal{G}T, \\ \exp\Big(-\dfrac{Tx}{2}\Big) & \text{при} \quad x \ge \mathcal{G}T, \end{cases}$$

где $\mathcal{G} = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$, а под $\mathbb{E}X$ понимается математическое ожидание случайной величины X.

3.1. Входные данные, распределенные по нормальному закону

В случае нормального распределения (2.1) элементов матрицы (c_{ijk}) воспользуемся следующим результатом.

Лемма 3.1 [10, лемма 9]. *Пусть ζ_k, $k=\overline{1,n}$, — независимые случайные величины, каждая из которых равна минимальному из k элементов матрицы, которые суть независимые случайные величины, распределенные на интервале $[0,\infty)$ с функцией распределения (2.2). Пусть*

$$T = \frac{1}{3\sigma_n} \quad \text{и} \quad \tilde{g}_1 = 1{,}8\sigma_n^2, \quad \tilde{g}_k = \frac{60{,}8\sigma_n^2}{(k-1)^2}, \quad 2 \le k \le n-2.$$

Тогда при любых $0 \le t \le T$ имеют место неравенства

$$\mathbb{E}e^{\zeta_k t} \le \begin{cases} \exp\Big(\dfrac{\sqrt{2}\sigma_n}{\sqrt{\pi}}t\Big)\exp\Big(\dfrac{\tilde{g}_1 t^2}{2}\Big) & \text{при} \quad k=1, \\ \exp\Big(\dfrac{4\sigma_n}{k-1}t\Big)\exp\Big(\dfrac{\tilde{g}_k t^2}{2}\Big) & \text{при} \quad 2 \le k \le n-2. \end{cases}$$

Обозначим $\tilde{\xi}_{is} = \xi_{is} - a_n - \dfrac{\sqrt{2}\sigma_n}{\sqrt{\pi}}$ при $s = \overline{n-4i, n}$, $i = \overline{1,m}$, и $\tilde{\xi}_{is} = \xi_{is} - a_n - \dfrac{4\sigma_n}{n-2i-s+1}$ при $s = \overline{1, n-4i-1}$, $i = \overline{1,m}$. Из леммы 3.1 и определения величин ξ_{is} непосредственно следует, что величины $\tilde{\xi}_{is}$ удовлетворяют условиям теоремы Петрова.

Утверждение 3.1. *Определим величины* g_{is}, $i = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, n}$, *через величины* $\tilde{g}_k$ *из леммы* 3.1 *следующим образом*: $g_{is} = \tilde{g}_{n-2i-s+2}$, *если* $s = \overline{1, n-4i+1}$, *и* $g_{is} = \tilde{g}_1$, *если* $s = \overline{n-4i, n}$. *Тогда*

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} g_{is} \le (2m^2+3m)1,8\sigma_n^2 + 30,4\sigma_n^2 \ln m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о :

$$G = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} g_{is} = (2m^2+3m)\tilde{g}_1 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-4i-1} \tilde{g}_{n-2i-s+2}$$

$$= (2m^2+3m)1,8\sigma_n^2 + 60,8\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-4i-1} \frac{1}{(n-2i-s+1)^2}$$

$$\le (2m^2+3m)1,8\sigma_n^2 + 60,8\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{2i}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = (2m^2+3m)1,8\sigma_n^2 + 60,8\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2i}$$

$$\le (2m^2+3m)1,8\sigma_n^2 + 30,4\sigma_n^2 \ln m.$$

Утверждение доказано.

Теорема 3.2. *Пусть элементы матрицы расстояний являются независимыми случайными величинами с функцией распределения* (2.2). *Тогда алгоритм* $\widetilde{A}$ *дает решение задачи* m *коммивояжеров на минимум с различными весовыми функциями с оценками*:

(1) *при* $2 \le m \le \ln n$ $\quad \varepsilon_{\widetilde{A}} = O\Big(\dfrac{\sigma_n/a_n}{n/\ln n}\Big)$, $\delta_{\widetilde{A}} = n^{-m}$, *если* $\dfrac{\sigma_n}{a_n} = o\Big(\dfrac{n}{\ln n}\Big)$;

(2) *при* $\ln n < m \le n^{1-\theta}$ $\quad \varepsilon_{\widetilde{A}} = O\Big(\dfrac{\sigma_n/a_n}{n^\theta}\Big)$, $\delta_{\widetilde{A}} = e^{-m^2/2}$, *если* $\dfrac{\sigma_n}{a_n} = o(n^\theta)$,

где $\theta \in (0,1)$ — *некоторая постоянная, такая что рассматриваемый интервал для* m *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом $OPT \ge nma_n$ продолжим неравенство (3.2):

$$\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)OPT\} \le \mathbf{Pr}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}(\xi_{is} - a_n) > mna_n\varepsilon_n\Big\}$$

$$\le \mathbf{Pr}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\tilde{\xi}_{is} + \frac{(2m^2+3m)\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma_n + \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-4i-1}\frac{4\sigma_n}{n-2i-s+1} > nma_n\varepsilon_n\Big\}$$

$$\le \mathbf{Pr}\{S \ge nma_n\varepsilon_n - 4,8(2m^2+3m)\sigma_n - 4\sigma_n m\ln n\} = \mathbf{Pr}\{S \ge x\},$$

где $x = nma_n\varepsilon_n - 4,8(2m^2+3m)\sigma_n - 4\sigma_n m \ln n$.

Пусть $2 \le m \le \ln n$. Положим

$$\varepsilon_n = \frac{10\sigma_n \ln n + 4,8(2m+3)\sigma_n}{na_n} = O\Big(\frac{\sigma_n/a_n}{n/\ln n}\Big).$$

Поскольку в этом случае $GT \le (2m\ln n + 11\ln n)\sigma_n \le 6m\ln n\sigma_n = x$ при больших m, то по теореме Петрова имеем:

$$\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)OPT\} \le \mathbf{Pr}\{S \ge x\} \le \exp\Big(-\frac{Tx}{2}\Big) = \exp(-m\ln n) = n^{-m} = \delta_n.$$

Пусть $\ln n < m \le n^{1-\theta} < n/4$. Положим

$$\varepsilon_n = \sigma_n \frac{3m + 4,8(2m+3) + 4\ln n}{n a_n} = O\Big(\frac{\sigma_n}{n^\theta a_n}\Big).$$

Поскольку в этом случае $GT \le (1,2m^2 + 12,8m)\sigma_n \le 3m^2\sigma_n = x$ при больших m, по теореме Петрова имеем

$$\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)OPT\} \le \mathbf{Pr}\{S \ge x\} \le \exp\Big(-\frac{Tx}{2}\Big) = \exp\Big(\frac{-m^2}{2}\Big) = \delta_n.$$

Таким образом, поскольку величины ε_n и δ_n стремятся к 0 с ростом n, алгоритм $\widetilde{A}$ в условиях теоремы асимптотически точен.

Теорема доказана.

3.2. Входные данные, распределенные по показательному закону

В случае показательного распределения элементов матрицы (c_{ijk}) воспользуемся следующим результатом.

Лемма 3.2 [10, лемма 10]. *Пусть ζ_k, $k = \overline{1,n}$, — независимые случайные величины; каждая из них равна минимальному из k элементов матрицы, которые суть независимые случайные величины с показательной функцией распределения* (2.4). *Пусть*

$$T = \frac{1}{2\alpha_n} \quad \text{и} \quad \tilde{g}_k = \frac{3\alpha_n^2}{k^2}, \quad 1 \le k \le n-2.$$

Тогда при любых $0 \le t \le T$, $k = 1, \dots, n-2$, справедливо неравенство

$$\mathbb{E}\, e^{t[\zeta_k - \mathbb{E}\zeta_k]} \le \exp\Big(\frac{\tilde{g}_k t^2}{2}\Big).$$

Обозначим $\tilde{\xi}_{is} = \xi_{is} - \mathbb{E}\xi_{is}$ при $s = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$. Из леммы 3.2 и определения величин ξ_{is} непосредственно следует, что величины $\tilde{\xi_{is}}$ удовлетворяют условиям теоремы Петрова.

Утверждение 3.2. *Определим величины g_{is}, $i = \overline{1,m}$, $s = \overline{1,n}$, через величины $\tilde{g}_k$ из леммы* 3.2 *следующим образом*: $g_{is} = \tilde{g}_{n-2i-s+2}$, *если $s = \overline{1, n-4i+1}$, и $g_{is} = \tilde{g}_1$, если $s = \overline{n-4i, n}$. Тогда*

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} g_{is} \le 3\alpha_n^2(2m^2 + 4m).$$

Доказательство:

$$G = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} g_{is} = (2m^2+3m)g_1 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-4i-1} g_{n-2i-s+2}$$

$$= 3(2m^2+3m)\alpha_n^2 + 3\alpha_n^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-4i-1}\frac{1}{(n-2i-s+2)^2}$$

$$\le 3(2m^2+3m)\alpha_n^2 + 3\alpha_n^2\sum_{i=1}^{m}\int_{2i}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 3(2m^2+3m)\alpha_n^2 + 3\alpha_n^2\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2i}$$

$$\le \alpha_n^2(2m^2 + 3m + \ln m) \le 3\alpha_n^2(2m^2+4m).$$

Утверждение доказано.

Утверждение 3.3. *В случае показательного распределения элементов исходной матрицы для величин ξ_{is} верно*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\mathbb{E}\,\xi_{is} \le \alpha_n(2m^2+3m+m\ln n)+mna_n.$$

Доказательство. Пусть ζ_k — случайная величина, равная минимальному из k элементов матрицы, элементы которой — независимые случайные величины, распределенные на $[a_n,\infty)$ по показательному закону (2.3). Тогда

$$\mathbb{E}\zeta_k = \int_{a_n}^{\infty} xd\Big(1-\exp\Big(\frac{-k(x-a_n)}{\alpha_n}\Big)\Big) = -x\exp\Big(\frac{-k(x-a_n)}{\alpha_n}\Big)\Big|_{a_n}^{\infty}+\int_{a_n}^{\infty}\exp\Big(\frac{-k(x-a_n)}{\alpha_n}\Big)dx = a_n+\frac{\alpha_n}{k}.$$

Учитывая определения величин ξ_{is}, получим

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\mathbb{E}\,\xi_{is} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-4i-1}\frac{\alpha_n}{n-2i-s+2}+(2m^2+3m)\alpha_n+mna_n$$

$$\le \alpha_n\Big(2m^2+3m+\sum_{i=1}^{m}\int_{2i}^{n}\frac{dx}{x}\Big)+mna_n \le \alpha_n\Big(2m^2+3m+\sum_{i=1}^{m}\ln\frac{n}{2i}\Big)+mna_n$$

$$\le \alpha_n(2m^2+3m+m\ln n)+mna_n.$$

Утверждение доказано.

Теорема 3.3. *Пусть элементы матрицы расстояний являются независимыми случайными величинами, распределенными согласно* (2.3). *Тогда алгоритм $\widetilde{A}$ дает решение задачи m коммивояжеров на минимум с различными весовыми функциями с оценками*:

(1) *при* $2\le m\le \ln n$ $\quad \varepsilon_{\widetilde{A}} = O\Big(\dfrac{\alpha_n/a_n}{n/\ln n}\Big)$, $\quad \delta_{\widetilde{A}} = n^{-(3/4m+6/4)}$, *если* $\dfrac{\alpha_n}{a_n} = o\Big(\dfrac{n}{\ln n}\Big)$;

(2) *при* $\ln n < m \le n^{1-\theta}$ $\quad \varepsilon_{\widetilde{A}} = O\Big(\dfrac{\alpha_n/a_n}{n^{\theta}}\Big)$, $\quad \delta_{\widetilde{A}} = n^{-(3/4m+6/4)}$, *если* $\frac{\alpha_n}{a_n} = o(n^{\theta})$,

где $\theta\in(0,1)$ — некоторая постоянная такая, что рассматриваемый интервал для m существует.

Доказательство. Учитывая, что $OPT \ge nma_n$, продолжим неравенство (3.2):

$$\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)OPT\} \le \mathbf{Pr}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\tilde{\xi}_{is} > mna_n + mna_n\varepsilon_n - \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\mathbb{E}\,\xi_{is}\Big\}$$

$$\le \mathbf{Pr}\{S > nma_n\varepsilon_n - \hat{E}\} = \mathbf{Pr}\{S > x\},$$

где $\hat{E}$ — некоторая верхняя оценка для $\alpha_n(2m^2+3m+m\ln n)$, $x = nma_n\varepsilon_n - \hat{E}$.

Пусть $2\le m\le \ln n$. Положим

$$\varepsilon_n = \alpha_n\,\frac{6m\ln n+9\ln n}{nma_n} = O\Big(\frac{\alpha_n/a_n}{n/\ln n}\Big).$$

Возьмем $\hat{E} = \alpha_n(3m\ln n+3\ln n)$, тогда $x = (3m\ln n+6\ln n)\alpha_n$. Поскольку в этом случае $GT \le (3m+6)\ln n\,\alpha_n = x$, то по теореме Петрова имеем

$$\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)OPT\} \le \mathbf{Pr}\{S\ge x\} \le \exp\Big(-\frac{Tx}{2}\Big) = \exp\Big(-\ln n\,\frac{3m+6}{4}\Big) = n^{-(3/4m+6/4)} = \delta_n.$$

Пусть $\ln n < m \le n^{1-\theta} < n/4$. Положим

$$\varepsilon_n = \alpha_n \frac{6m+9}{na_n} = O\Big(\frac{\sigma_n}{n^\theta a_n}\Big).$$

Возьмем $\hat{E} = \alpha_n(3m^2+3m)$. Поскольку в этом случае $GT \le (3m^2+6m)\alpha_n = x$, по теореме Петрова имеем

$$\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)OPT\} \le \mathbf{Pr}\{S \ge x\} \le \exp\Big(-\frac{Tx}{2}\Big) = \exp\Big(-\frac{3m^2+6m}{4}\Big) \le n^{-(3/4m+6/4)} = \delta_n.$$

Таким образом, поскольку величины ε_n и δ_n стремятся к 0 с ростом n, алгоритм $\widetilde{A}$ в условиях теоремы асимптотически точен.

Теорема доказана.

4. Заключение

В настоящей статье рассматривалась задача m-PSP на минимум с различными весовыми функциями. Для приближенного решения задачи при числе коммивояжеров $m < n/4$ использовался алгоритм $\widetilde{A}$ из [9] с временной сложностью $O(mn^2)$.

Рассмотрен случай, когда элементы входной матрицы являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$ и распределенными по нормальному или показательному законам. Результатом вероятностного анализа алгоритма $\widetilde{A}$ на таких случайных входах является получение условий его асимптотической точности. В случае $2 \le m < \ln n$ асимптотическая точность имеет место при выполнении условия $\beta_n/a_n = o(n/\ln n)$, а при $\ln n \le m \le n^{1-\theta}$ — условия $\beta_n/a_n = o(n^\theta)$, где β_n — параметр α_n или σ_n соответственно для показательного и нормального распределений.

Для дальнейших исследований представляется интересным получение аналогичных результатов для распределений, мажорирующих рассмотренные в данной статье функции $F(x)$ вида (2.2) или (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **De Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // European J. of Oper. Res. 1993. Vol. 10, no. 2. P. 229–243.
2. **Frieze A.M.** On random symmetric traveling salesman problems // Math. Oper. Res. 2004. Vol. 29, no. 4. P. 878–890.
3. **Gimadi Edward Kh.** On some probability inequalities for some discrete optimization problems // Oper. Res. Proc. 2005. Selected papers Int. Conf. OR-2005. Bremen; Berlin: Springer, 2006. P. 283–289.
4. **Gimadi Edward Kh.** Approximation efficient algorithms with performance guarantees for some hard routing problems // Proc. II Int. Conf. “Optimization and Applications” (OPTIMA 2011). Petrovac, 2011. P. 98–101.
5. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications / ed. B Roy. Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173–178. (NATO Advanced Study Inst. Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci.; vol. 19).
6. The traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization / eds. E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, D. B. Shmoys. Chichester: Wiley, 1985. 463 p.
7. The traveling salesman problem and its variations / eds. G. Gutin, A. Punnen. Dortrecht: Kluwer Acad. Publ., 2007. 830 p. (Comb. Optim.; vol. 12).
8. **Бабурин А.Е., Гимади Э.Х.** Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 12–24.

9. **Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Цидулко О.Ю.** Вероятностный анализ алгоритма решения трехиндексной m-слойной планарной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 1. С. 10–19.
10. **Гимади Э.Х., Ле Галлу А., Шахшнейдер А.В.** Вероятностный анализ одного алгоритма приближенного решения задачи коммивояжера на неограниченных сверху входных данных // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, № 1. С. 23–43.
11. **Гимади Э.Х., Перепелица В.А.** Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Вып. 12. Новосибирск, 1974. С. 35–45.
12. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
13. **Перепелица В.А., Гимади Э.Х.** Задача нахождения минимального гамильтонова цикла в взвешенном графе // Дискретный анализ: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Вып. 15. Новосибирск, 1969. С. 57–65.
14. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987. 321 с.

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лабораторией
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Поступила 30.01.2014

Истомин Алексей Михайлович
аспирант
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: alexeyistomin@gmail.com

Рыков Иван Александрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: rykov@ngs.ru

Цидулко Оксана Юрьевна
аспирант
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: tsidulko.ox@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 519.16 + 519.85

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА НЕСКОЛЬКИХ КЛИК В ПОЛНОМ НЕОРИЕНТИРОВАННОМ ВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ[1]

Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай

Рассматривается задача поиска фиксированного числа вершинно-несмежных клик заданных размеров в полном неориентированном взвешенном графе по критерию минимума суммарного веса вершин и ребер в найденных кликах. Показано, что задача NP-трудна в сильном смысле как общем случае, так и в двух частных постановках, обладающих важными приложениями. Представлен приближенный алгоритм решения задачи. Показано, что для рассмотренных подклассов задачи алгоритм находит решение с гарантированной оценкой точности, причем в обоих случаях оценка достижима. В случае, когда число искомых клик фиксировано заранее (т. е. не входит в условие задачи), временная сложность предложенного алгоритма полиномиальна.

Ключевые слова: поиск вершинно-несмежных клик, минимум суммарного веса вершин и ребер, приближенный алгоритм, гарантированная точность, достижимость оценок, метрическая задача, квадратичная евклидова задача.

E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai. Efficient algorithms with performance estimates for some problems of finding several cliques in a complete undirected weighted graph.

We consider the problem of finding a fixed number of vertex-disjoint cliques of fixed sizes in a complete undirected weighted graph with respect to the criterion of minimizing the total weight of vertices and edges in the cliques. We show that the problem is NP-hard in the strong sense both in the general case and in two particular statements, which have important applications. An approximation algorithm for this problem is presented. We show that the algorithm finds a solution with guaranteed performance estimate for the considered subclasses of the problem, and the estimate is attainable in both cases. In the case when the number of cliques to be found is fixed (i.e., is not involved in the statement), the time complexity of the algorithm is polynomial.

Keywords: search for vertex-disjoint cliques, minimum total weight of vertices and edges, approximation algorithm, performance guarantee, attainable estimates, metric problem, quadratic Euclidean problem.

Введение

Многие задачи комбинаторной оптимизации связаны с поиском в графе некоторых дискретных структур экстремального веса. В качестве примеров искомых структур можно назвать остовное дерево, совершенное паросочетание, гамильтонов цикл, клику и т. п. Некоторые из этих задач (например, задача о назначении и задача о минимальном остовном дереве) полиномиально разрешимы [3; 10]. К сожалению, большая часть известных комбинаторных задач труднорешаема. К числу таких задач, в частности, относится задача отыскания клики заданного размера (Weighted Clique Problem, WCP) [4; 6; 9] в полном взвешенном графе.

Помимо этого в настоящее время актуальным представляется класс таких задач дискретной оптимизации на взвешенных графах, в которых требуется найти несколько дизъюнктных дискретных структур экстремального веса. В большинстве своем задачи из этого класса также являются труднорешаемыми даже при условии, что единственная структура подобного типа может быть найдена за полиномиальное время. Например, при полиномиальной разрешимости классической (двухиндексной) задачи о назначениях многоиндексная задача о назначениях

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00090, 12-01-00093, 13-01-00210, 13-07-00070, 13-07-00181), Интеграционных проектов УрО РАН и СО РАН 12-01-1017/1 и 7Б, а также Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

(как аксиальная, так и планарная) становится труднорешаемой при числе индексов больших или равных трем [1; 12]. И скорее неожиданным кажется то, что для задачи отыскания в неориентированном полном графе нескольких реберно-непересекающихся остовных деревьев минимального суммарного веса удалось построить точный полиномиальный алгоритм [11].

Одной из классических труднорешаемых проблем является известная задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP)[13], связанная с поиском гамильтонового цикла (маршрута коммивояжера) наименьшего веса в полном взвешенном графе. При переходе к поиску семейства нескольких реберно-непересекающихся маршрутов в том же графе (задача m-Peripatetic Salesman Problem, m-PSP) [2; 5; 8; 16] вычислительная сложность задачи ожидаемо увеличивается. Тем не менее известно [14], что в многомерном евклидовом пространстве задача m-PSP допускает асимптотически точное решение с кубической трудоемкостью.

В настоящей статье в качестве оптимизируемого семейства дискретных структур в полном неориентированном графе рассматривается множество *дизъюнктных* (т. е. попарно не пересекающихся по вершинам) клик заданного размера с минимальным суммарным весом входящих в них вершин и ребер. Оптимизационная формулировка этой задачи моделирует, в частности, одну из актуальных проблем кластерного анализа данных (см., например, [15; 17–19] и цитированные там работы). Суть этой фундаментальной для многих естественнонаучных и технических приложений проблемы состоит в поиске в конечном множестве объектов непересекающихся подмножеств (кластеров), состоящих из похожих объектов при условии, что известны мощности искомых кластеров и численно выраженные (заданные) результаты попарных сравнений этих объектов.

Случай, когда искомое семейство состоит из одного кластера заданной мощности, индуцирует упоминавшуюся выше задачу WCP. В работе [9] обоснована полиномиальная эквивалентность этой задачи подходящей задаче поиска целочисленного экстремума некоторой линейной функции. Труднорешаемость задачи WCP в общем случае следует из полиномиальной сводимости к ней известной NP-трудной в сильном смысле [4] задачи о максимальной клике (Clique).

Известно [6], что оптимизационный вариант задачи Clique чрезвычайно слабо аппроксимируем. В [17] показано, что в общем случае задача WCP как на минимум, так и на максимум неаппроксимируема. Тем не менее в этой же работе был построен быстрый 2-приближенный алгоритм для двух актуальных случаев задачи, в которых веса вершин неотрицательны, а веса ребер либо удовлетворяют неравенству треугольника (Metric WCP), либо являются квадратами попарных расстояний в некоторой системе точек евклидова пространства (Quadratic Euclidean WCP). Для случая Quadratic Euclidean WCP показана достижимость оценки точности решения, а для случая Metric WCP — асимптотическая достижимость.

Предметом исследования настоящей работы является семейство задач m-WCP, каждая из которых (для фиксированного $m > 1$) состоит в поиске в полном взвешенном графе множества дизъюнктных клик порядков $L_1, \ldots, L_m$, минимизирующего суммарный вес входящих в них вершин и ребер. Труднорешаемость задачи WCP, обоснованная в [17], очевидным образом влечет и труднорешаемость задачи о нескольких кликах при условии, что их количество m является частью входа задачи. В рассматриваемой же нами ситуации, когда m задается заранее и не является частью условия задачи, вопрос оценки ее сложностного статуса должен рассматриваться отдельно.

Нами показано, что задача m-WCP NP-трудна в сильном смысле при произвольном фиксированном $m > 1$ как в общем случае, так и в частных случаях Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.

Предлагаемый в статье алгоритм $\mathcal{A}$ решения задачи m-WCP в качестве приближенного решения использует точное решение специальной (вспомогательной) задачи поиска m дизъюнктных звезд. В работе показано, что это решение может быть получено за время $O(n^{m+2} \log n)$. При константном числе m искомых звезд представленный точный алгоритм решения вспомогательной задачи полиномиален. Предлагаемый алгоритм $\mathcal{A}$ имеет ту же временную сложность, что и точный алгоритм решения вспомогательной задачи.

Показано, что для задачи Metric m-WCP гарантированная оценка точности алгоритма $\mathcal{A}$ равна

$$2\Big(1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*)}\Big),$$

где $S(B_k^*)$ — суммарный вес вершин и ребер в k-й звезде вспомогательной задачи, $k = 1, \ldots, m$. Для алгоритма $\mathcal{A}$ решения задачи Quadratic Euclidean m-WCP доказана гарантированная оценка точности, равная 2, совпадающая с оценкой точности решения задачи Quadratic Euclidean WCP, полученной в работе [17]. При этом установлено, что достижимыми являются обе оценки точности как для задачи Quadratic Euclidean m-WCP, так и для задачи Metric m-WCP. Напомним, что для оценки точности решения задачи Metric WCP в работе [17] была установлена ослабленная (асимптотическая) достижимость.

1. Формулировка задачи и известные результаты

Как обычно, договоримся пользоваться стандартными обозначениями: $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_m$ — целочисленный интервал $\{1, \ldots, m\}$. В [17] рассматривалась следующая задача.

Даны n объектов, входные данные о которых представлены весовой функцией $a = (a_i)$ объектов и матрицей $c = (c_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, попарных сравнений этих объектов, где a_i и c_{ij} — вещественные числа. Требуется найти L-элементное подмножество объектов (строк матрицы) с минимальной суммой их весов и весов попарных сравнений этих объектов. Сформулируем эту проблему в виде задачи поиска L-клики минимального веса.

З а д а ч а Weighted Clique Problem (WCP). Дано: полный неориентированный взвешенный граф $G = (V, E, a, c)$, где $a\colon V \to \mathbb{R}$, $c\colon E \to \mathbb{R}$, и натуральное число $L \leqslant n$. Найти в графе G клику C порядка L с наименьшим общим весом вершин и ребер.

Задачу WCP будем называть *метрической* (Metric WCP), если расстояния между вершинами в графе G удовлетворяют неравенству треугольника $c_{ij} + c_{jk} \ge c_{ik}$ для всякой тройки индексов i, j, k. В случае, когда элементы матрицы $c = (c_{ij})$ — квадраты попарных расстояний в некоторой системе точек евклидова пространства, будем называть эту задачу Quadratic Euclidean WCP.

Ввиду полноты графа G произвольное непустое подмножество $C \subset V$ индуцирует в нем полный подграф (клику) $G(C)$, который мы договоримся обозначать ниже символом C, сохранив за множеством его ребер обозначение $E(C)$.

Напомним факты, установленные в [17] для задачи WCP.

1) Задача WCP может быть записана в виде

$$\sum_{e \in E(C)} w_e \to \min_{C \subset V;\, |C| = L}$$

в терминах модифицированной весовой функции ребер

$$w_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_i + a_j}{L - 1} + c_{ij}, & \text{если } i \ne j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2) Задача WCP, в общем случае, не может быть полиномиально разрешима с произвольной гарантированной точностью в предположении $P \ne NP$.

3) Задача WCP решается за время $O(n^2)$ посредством 2-приближенного алгоритма для следующих двух актуальных подклассов входных данных:

a) элементы матрицы $c = (c_{ij})$ в задаче WCP на графе $G = (V, E, a, c)$ удовлетворяют неравенству треугольника, т. е. $c_{ij} + c_{jk} \geqslant c_{ik}$ для любых i, j, k (задача Metric WCP);

б) элементы матрицы $c = (c_{ij})$ — квадраты попарных расстояний для некоторой системы точек евклидова пространства (задача Quadratic Euclidean WCP).

4) Оценки точности получаемых решений для задач Metric WCP и Quadratic Euclidean WCP достижимы (в случае задачи Metric WCP достижимость асимптотическая).

В настоящей работе мы рассматриваем задачу поиска в полном неориентированном взвешенном графе нескольких дизъюнктных клик заданного порядка, т. е. следующее обобщение задачи WCP.

Задача m-Weighted Clique Problem (m-WCP). Дано: полный неориентированый взвешенный граф $G = (V, E, a, c)$, где $a\colon V \to \mathbb{R}$, $c\colon E \to \mathbb{R}$, и натуральные числа $L_1, \ldots, L_m$ такие, что $\sum_{i=1}^m L_i \leqslant n$. Найти в графе G семейство $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ дизъюнктных клик порядков $L_1, \ldots, L_m$ с минимальным суммарным весом вершин и ребер графа, входящих в эти клики.

Определив для всякого ребра $(x, y) \in E(C_k)$, $k \in \mathbb{N}_m$, модифицированную весовую функцию

$$w_{xy} = \begin{cases} \dfrac{a_x + a_y}{L_k - 1} + c_{xy}, & \text{если } x \neq y; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

задачу m-WCP можно записать в виде

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^m F(C_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{e \in E(C_k)} w_e \to \min_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}},$$

или

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{x \in C_k} \sum_{y \in C_k} w_{xy} \to \min_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}},$$

где

$$\mathfrak{C} = \{\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}\colon C_i \cap C_j = \varnothing,\ |C_i| = L_i,\ |C_j| = L_j,\ \{i, j\} \subset \mathbb{N}_m\}.$$

Задачей Metric m-WCP по аналогии с Metric WCP договоримся обозначать подкласс задачи m-WCP, в котором справедливо неравенство треугольника $c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj}$. Соответственно, задачей Quadratic Euclidean m-WCP назовем подкласс задачи m-WCP, в котором функция c порождена квадратами попарных евклидовых расстояний между элементами некоторой n-точечной конфигурации.

2. Вычислительная сложность задачи m-WCP

Докажем труднорешаемость задачи m-WCP при произвольном $m > 1$, а также двух ее подклассов, Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP, путем сведения к ним (по Тьюрингу) соответствующих подклассов задачи WCP.

Теорема 1. *Задача m-WCP NP-трудна в сильном смысле при произвольном фиксированном $m \geqslant 1$.*

Доказательство. В случае $m = 1$ задача m-WCP совпадает с задачей WCP и ее вычислительная сложность обоснована ранее [17, предложение 1]. Зафиксируем произвольное $m > 1$. Рассмотрим произвольную постановку задачи WCP, задаваемую полным неориентированным взвешенным n-графом $G = (V, E, a, c)$ и натуральным числом $L \leqslant n$. Ввиду справедливости п. 1) можем без ограничения общности полагать, что $a(v) \equiv 0$, а функция c задается неотрицательной симметрической матрицей W размерности $n \times n$ с нулями на главной диагонали: $c(e) = c(\{i, j\}) = w_{ij}$. Введем обозначение

$$\tilde{p} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} w_{ij} + 1$$

и выберем натуральное число p так, что $2p^2 \geq \tilde{p}$. Рассмотрим постановку задачи m-WCP, задаваемую полным неориентированным графом $G' = (V', E', a', c')$ и числами $L_1, \ldots, L_m$ так, что

$$V' = V_1 \cup \ldots \cup V_m, \quad V_k = \{n(k-1)+1, n(k-1)+2, \ldots, nk\}, \quad a'(v) \equiv 0, \quad L_k = L,$$

а значение функции $c'(e) = c'(\{x, y\})$ для произвольных $x \in V_{k_1}$, $y \in V_{k_2}$ определяется равенством

$$c'(e) = c'(\{x, y\}) = w_{ij} + 2p^2 \operatorname{sign} |k_1 - k_2|,$$

где $i \equiv x \pmod n$, $j \equiv y \pmod n$. По построению $c'(e) \geqslant w_{ij}$, причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$.

Таким образом, функция c' задается симметрической неотрицательной матрицей W' размерности $mn \times mn$, имеющей блочную структуру

$$W' = \begin{pmatrix} W & W+P & \ldots & W+P \\ W+P & W & \ldots & W+P \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W+P & W+P & \ldots & W \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где P — матрица размерности $n \times n$, все элементы которой равны $2p^2$. Очевидно, проведенное построение может быть произведено за время, ограниченное полиномом от длины записи исходной задачи.

Пусть $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \ldots, C_m^*\}$ — оптимальное решение сформулированной задачи m-WCP, семейство клик порядка L, обладающее наименьшим суммарным весом. По выбору $\tilde{p}$ для любого $i \in \mathbb{N}_m$ найдется такое $k \in \mathbb{N}_m$, что $C_i^* \subseteq V_k$. Пусть

$$\bar{C}^* = \arg\min\{F(C_k^*) \colon k \in \mathbb{N}_m\} \tag{3}$$

и $\bar{k}$ — номер подмножества, для которого $\bar{C}^* \subset V_{\bar{k}}$. Клика, индуцируемая в графе G подмножеством $D^* = \{i - n(\bar{k}-1) \colon i \in \bar{C}^*\}$, — искомое оптимальное решение исходной задачи WCP. В самом деле, по построению $D^* \in V$, следовательно, индуцируемая этим подмножеством клика допустима в графе G. Пусть, от противного, найдется клика D меньшего веса, т. е. $F(D) < F(D^*)$. Определив для каждого $k \in \mathbb{N}_m$ подмножество D_k равенством $D_k = \{j + n(k-1) \colon j \in D\}$, получим в силу (3) семейство $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ веса

$$mF(D) < mF(D^*) = mF(\bar{C}^*) \leqslant \sum_{k=1}^{m} F(C_k^*),$$

что противоречит оптимальности $\mathcal{C}^*$. Достигнутое противоречие завершает обоснование полиномиальной сводимости задачи WCP к задаче m-WCP и доказательство NP-трудности последней в сильном смысле.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Задача* Metric m-WCP *NP-трудна в сильном смысле.*

Доказательство. Зададимся произвольным $m > 1$. Следуя схеме, описанной в доказательстве теоремы 1, сопоставим произвольной постановке задачи Metric WCP соответствующую постановку задачи m-WCP. Для завершения доказательства достаточно показать, что элементы матрицы W', определенной соотношением (2), удовлетворяют неравенству треугольника

$$w'_{ij} \leqslant w'_{il} + w'_{lj} \tag{4}$$

для произвольных $i, j, l \in \mathbb{N}_{nm}$. Очевидно, неравенство верно для произвольных $i, j \in V_k$ и $k \in \mathbb{N}_m$, поскольку в этом случае $w'_{ij} = w_{ij}$, $w'_{il} \geqslant w_{il}$, $w'_{lj} \geqslant w_{lj}$ и $w_{ij} \leqslant w_{il} + w_{lj}$ по условию.

Пусть $i \in V_{k_1}$, $j \in V_{k_2}$ и $l \in V_{k_3}$ для некоторых k_1, k_2, k_3, причем $k_1 \neq k_2$. Следовательно, $\max\{|k_1 - k_3|, |k_2 - k_3|\} > 0$, откуда

$$w'_{ij} = w_{ij} + 2p^2 \leqslant w_{il} + w_{lj} + 2p^2(\operatorname{sign}|k_1 - k_3| + \operatorname{sign}|k_2 - k_3|),$$

и неравенство (4) снова оказывается верным.

Таким образом, показано, что каждой постановке NP-трудной в сильном смысле [17, теорема 1] задачи Metric WCP может быть за полиномиальное время сопоставлена постановка задачи Metric m-WCP.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Задача* Quadratic Euclidean m-WCP *NP-трудна в сильном смысле.*

Доказательство. Снова следуем схеме сведения, описанной в доказательстве теоремы 1. Сопоставим постановке NP-трудной в сильном смысле задачи Quadratic Euclidean WCP [17, теорема 2] соответствующую постановку задачи m-WCP. Для завершения доказательства достаточно показать, что элементы матрицы W' совпадают с квадратами попарных расстояний между некоторыми mn точками в подходящем евклидовом пространстве. Пусть матрица W из условия исходной задачи WCP определяется векторами $z_1, \ldots, z_n$, элементами некоторого евклидова пространства $\mathcal{E}$. Зададимся пространством $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times \mathbb{R}^m$, определив скалярное произведение стандартным образом, и рассмотрим множество

$$\{z'_{ik} = [pe_k, z_i]^T : i \in \mathbb{N}_n,\ k \in \mathbb{N}_m\} \subset \mathcal{E}',$$

где e_k — k-й орт $\mathbb{R}^m$. Построенное множество векторов искомое. В самом деле,

$$\|z'_{ik_1} - z'_{jk_2}\|^2 = \begin{cases} \|z_i - z_j\|^2, & \text{если } k_1 = k_2, \\ \|z_i - z_j\|^2 + 2p^2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, $w_{xy} = \|z'_{ik_1} - z'_{jk_2}\|^2$ для всяких $x = (k_1 - 1)n + i$ и $y = (k_2 - 1)n + j$.

Теорема 3 доказана.

3. Приближенный алгоритм решения задачи

Суть предлагаемого подхода состоит в замене решения исходной задачи m-WCP оптимальным решением вспомогательной задачи и последующей оценкой точности такой замены.

3.1. Вспомогательная задача

Как обычно, *звездой порядка* L договоримся называть полный двудольный неориентированный граф $K_{1,L-1}$. Единственную вершину b меньшей доли звезды договоримся называть ее *центром*. Пусть $B \subset G$ — некоторая звезда в графе G, используемом в условии задачи m-WCP. Через

$$S(B) = \sum_{x \in B} w_{xb}$$

обозначим ее вес. Как и ранее, используем обозначение $F(B)$ для веса клики, индуцированной звездой B.

Вспомогательная задача имеет следующую формулировку.

Задача 1. Дано: полный n-вершинный неориентированный взвешенный граф G и натуральные числа $L_1, \ldots, L_m$ такие, что $\sum_{i=1}^m L_i \leqslant n$. Найти в графе G такое семейство $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ из m дизъюнктных звезд, что $|B_k| = L_k$, $k \in \mathbb{N}_m$, и

$$\mathcal{S}(\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k) \to \min .$$

Пусть через B_k^* и b_k^*, $k \in \mathbb{N}_m$, обозначены соответственно k-я звезда и ее центр в оптимальном решении вспомогательной задачи. Очевидно,

$$S(B_k^*) = \sum_{x \in B_k^*} w_{xb_k^*}, \quad b_k^* = \arg\min_{y \in B_k^*} \sum_{x \in B_k^*} w_{xy}.$$

Справедлива

Лемма 1. *Если в задаче* 1 *число* m *звезд фиксировано, то оптимальное решение* $\mathcal{B}^* = \{B_1^*, \ldots, B_m^*\}$ *этой задачи (вместе с центрами* $b_1^*, \ldots, b_m^*$ *звезд) может быть найдено за полиномиальное время.*

Доказательство. Для каждой комбинации центров звезд $\beta = \{b_1, \ldots, b_m\}$ рассмотрим транспортную задачу на двудольном графе $D = (\beta, V'; E')$, где $V' = V \setminus \beta$, E' — множество ребер в D, $|\beta| = m$, $|V'| = n - m$, $|E'| = m(n - m)$. Положим вес каждого ребра (b_k, j) равным $L_k c_{b_k,j}$, где $b_k \in \beta$, $j \in V'$. Пусть объемы продукции равны L_k для вершин $b_k \in \beta$ и не превосходят 1 для всех вершин из V'. Найдем решение этой транспортной задачи посредством алгоритма из [7] за время $O((n - m)\log(n - m)(|E'| + m \log m))$. Поскольку $|E'| = m(n - m)$, а m фиксировано, время решения каждой такой транспортной задачи ограничено сверху величиной $O(n^2 \log n)$.

Заметим, что число перебираемых центров звезд не превосходит количества размещений из n по m: $(n)_m = n(n-1)\cdots(n-m+1) < n^m$. Таким образом, время решения вспомогательной задачи 1 при фиксированном m ограничено сверху полиномиальной функцией $O(n^{m+2} \log n)$.

Лемма 1 доказана.

Для решения задач Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP применим следующий

Алгоритм $\mathcal{A}$.

1. Найти точное решение $\mathcal{B}^* = \{B_1^*, \ldots, B_m^*\}$ вспомогательной задачи 1.

2. Выдать семейство $\mathcal{B}^*$ в качестве приближенного решения задач Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.

3.2. Анализ алгоритмического решения задачи Metric m-WCP

Оценки точности и вычислительной сложности алгоритма $\mathcal{A}$ устанавливает

Теорема 4. *Алгоритм* $\mathcal{A}$ *находит решение задачи* Metric m-WCP *за время* $O(n^{m+2} \log n)$ *с достижимой оценкой точности, равной*

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)}{\mathcal{F}(\mathcal{C}^*)} \leqslant 2\Big(1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*)}\Big), \tag{5}$$

где $\mathcal{B}^* = \{B_1^*, \ldots, B_m^*\}$ *— оптимальное решение вспомогательной задачи.*

Доказательство. Пусть для каждой клики C_k^* в оптимальном решении отмечена вершина $c_k^* = \arg\min\limits_{y \in C_k^*} \sum\limits_{x \in C_k^*} w_{xy}$, $k \in \mathbb{N}_m$. С одной стороны, имеем

$$\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*) = \sum_{k=1}^{m} L_k \sum_{x \in B_k^*} w_{xb_k^*} \leqslant \sum_{k=1}^{m} L_k \sum_{x \in C_k^*} w_{xc_k^*} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{x \in C_k^*} \sum_{y \in C_k^*} w_{xc_k^*}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{x \in C_k^*} \sum_{y \in C_k^*} w_{xy} = 2\mathcal{F}(\mathcal{C}^*). \tag{6}$$

С другой стороны, воспользовавшись неравенством треугольника и условием $w_{xx} = 0$, для каждого $k \in \mathbb{N}_m$ найдем

$$F(B_k^*) = \sum_{y \in B_k^*} \sum_{x \in B_k^*} \frac{w_{xy}}{2} = \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^* \setminus \{x\}} \frac{w_{xy}}{2} \leqslant \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^* \setminus \{x\}} \frac{w_{xb_k^*} + w_{b_k^* y}}{2}$$

$$= \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^*} \frac{w_{xb_k^*} + w_{b_k^* y}}{2} - \sum_{x \in B_k^*} \frac{w_{xb_k^*} + w_{b_k^* x}}{2} = \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^*} w_{xb_k^*} - \sum_{x \in B_k^*} w_{xb_k^*}$$

$$= (L_k - 1) \sum_{x \in B_k^*} w_{xb_k^*} = (L_k - 1) S(B_k^*). \tag{7}$$

При каждом $k \in \mathbb{N}_m$ левая и правая части (7) связаны неравенством. Просуммировав эти неравенства по всем $k \in \mathbb{N}_m$, получим

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}^*) = \sum_{k=1}^{m} F(B_k^*) \leqslant \sum_{k=1}^{m} (L_k - 1) S(B_k^*). \tag{8}$$

Наконец, используя (6) и (8), найдем

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)}{\mathcal{F}(\mathcal{C}^*)} \leqslant 2 \frac{\sum_{k=1}^{m} (L_k - 1) S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*)} = 2\Big(1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*)}\Big).$$

Отсюда следует оценка точности решения (5).

Достижимость оценки подтверждается следующим примером задачи Metric m-WCP, показывающим, что существуют такие данные, при которых в (5) выполняется равенство, а также данные, при которых оценка точности сколь угодно близка к правой части (5).

Пусть $n = 12$, $m = 2$, $L_1 = 3$, $L_2 = 3$, а элементы матрицы W равны попарным расстояниям между следующими точками на плоскости (см. рис. 1):

$$\begin{array}{lll}
v_1 = (1; 0), & v_2 = (2; 0), & v_3 = (3; 0), \\
v_4 = (-1; 0), & v_5 = (-2; 0), & v_6 = (-3; 0), \\
v_7 = (0; 1), & v_8 = \Big(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\Big), & v_9 = \Big(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\Big), \\
v_{10} = (0; -1), & v_{11} = \Big(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\Big), & v_{12} = \Big(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\Big).
\end{array}$$

Элементы матрицы W очевидно удовлетворяют неравенству треугольника.

Нетрудно проверить, что одним из оптимальных решений вспомогательной задачи является семейство $\mathcal{B}^* = \{B_1^*, B_2^*\}$, где $B_1^* = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B_2^* = \{v_4, v_5, v_6\}$ с $b_1^* = v_2$ и $b_2^* = v_5$ соответственно. При этом имеем следующие веса звезд $S(B_1^*) = 2$, $S(B_2^*) = 2$ и клик $F(B_1^*) = 4$, $F(B_2^*) = 4$. Таким образом, $\mathcal{F}(\mathcal{B}^*) = 8$.

Оптимум основной задачи достигается на решении $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, C_2^*\}$, где $C_1^* = \{v_7, v_8, v_9\}$, $C_2^* = \{v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$, с весами клик $F(C_1^*) = 3$ и $F(C_2^*) = 3$. Таким образом, $\mathcal{F}(\mathcal{C}^*) = 6$, и для оценки точности имеем

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)}{\mathcal{F}(\mathcal{C}^*)} = \frac{4}{3}.$$

Этот же результат следует из формулы (5). Действительно,

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)}{\mathcal{F}(\mathcal{C}^*)} = 2\Big(1 - \frac{\sum_{k=1}^{2} S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{2} L_k S(B_k^*)}\Big) = 2\Big(1 - \frac{2+2}{3 \cdot 2 + 3 \cdot 2}\Big) = \frac{4}{3}\,.$$

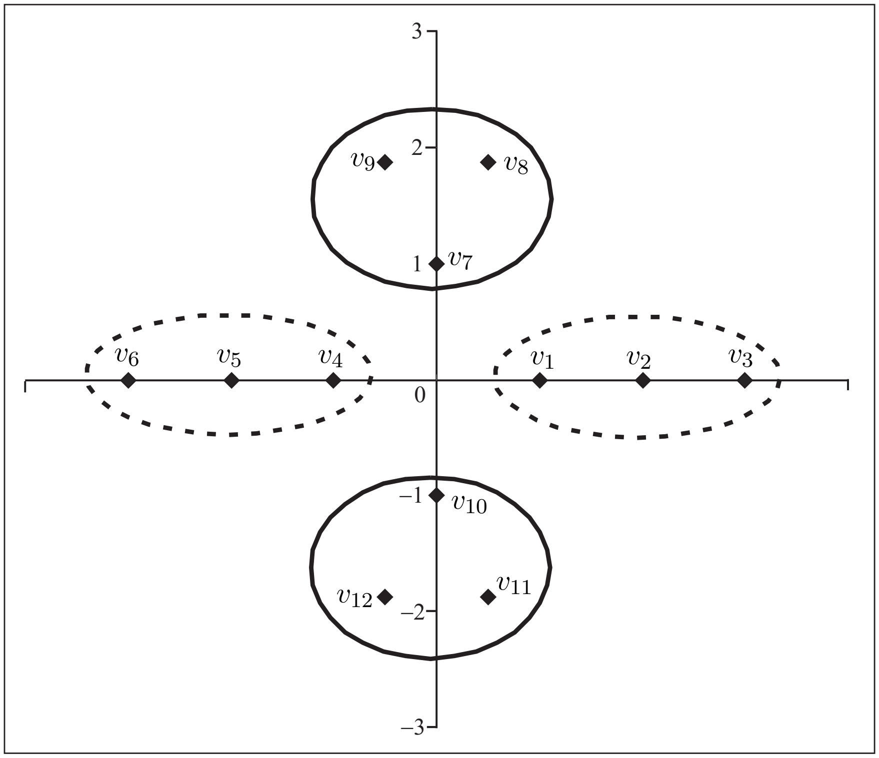


Рис. 1. К доказательству теоремы 4.

Приведенный пример легко может быть обобщен для любого $m \leq n/6$. Действительно, пусть $n = 6m$, $L_k = 3$, $k \in \mathbb{N}_m$. Рассмотрим на плоскости m равносторонних треугольников со стороной 1 и m прямолинейных отрезков длины $2 - \varepsilon$, так чтобы любые две фигуры были на расстоянии не менее 3 друг от друга. Элементы матрицы W равны попарным расстояниям между точками, являющимися вершинами треугольников, а также концами и серединами отрезков. Элементы матрицы W, очевидно, удовлетворяют неравенству треугольника. Нетрудно проверить, что оптимальным решением вспомогательной задачи является семейство концов и середин отрезков. При этом имеем веса звезд $S(B_k^*) = 2 - \varepsilon$ и клик $F(B_k^*) = 4 - 2\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}_m$. Следовательно, $\mathcal{F}(\mathcal{B}^*) = 4m - 2m\varepsilon$.

Оптимум основной задачи достигается на решении, образованном вершинами треугольников с весами клик $F(C_k^*) = 3$, $k \in \mathbb{N}_m$. Таким образом, $\mathcal{F}(\mathcal{C}^*) = 3m$ и для оценки точности имеем

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)}{\mathcal{F}(\mathcal{C}^*)} = \frac{4 - 2\varepsilon}{3} \to \frac{4}{3}$$

при $\varepsilon \to 0$. Иными словами, существуют данные, при которых оценка (5) выполняется сколь угодно точно. Оценка вычислительной сложности следует из леммы 1.

Теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что оценка точности, предложенная в работе [17] для метрической задачи поиска L-вершинной клики минимального веса, может быть улучшена. А именно, справедливо следующее

Утверждение. *Метрическая задача поиска L-вершинной клики с минимальным суммарным весом вершин и ребер в полном неориентированном графе разрешима приближенным алгоритмом с достижимой оценкой точности $2(1 - 1/L)$, при этом время работы этого алгоритма составляет $O(n^2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка точности и ее достижимость в частном случае задачи Metric m-WCP, когда $m = 1$, следует из теоремы 4, а временная сложность алгоритма в этом случае определяется процедурой поиска в графе G звезды размера L с минимальным суммарным весом входящих в нее вершин и ребер. Очевидно, такая звезда может быть найдена перебором всех вершин графа G и поиском для каждой перебираемой вершины ближайших к ней $L-1$ вершин. Такая процедура выполняется с квадратичной временной сложностью.

Утверждение доказано.

3.3. Анализ алгоритмического решения задачи Quadratic Euclidean m-WCP

Напомним, что выше для каждого $k \in \mathbb{N}_m$ были определены вершины b_k^* центров звезд B_k^*:

$$b_k^* = \arg\min_{y \in B_k^*} \sum_{x \in B_k^*} w_{xy},$$

а также вершины c_k^* клик оптимального решения:

$$c_k^* = \arg\min_{y \in C_k^*} \sum_{x \in C_k^*} w_{xy}.$$

Оценки точности и вычислительной сложности алгоритма устанавливает

Теорема 5. *Алгоритм $\mathcal{A}$ находит решение задачи* Quadratic Euclidean m-WCP *за время $O(n^{m+2}\log n)$ с достижимой оценкой точности, равной* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся существованием системы точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в евклидовом пространстве, порождающей матрицу (c_{ij}) квадратов расстояний между парами точек: $c_{ij} = \|x_i - x_j\|^2$, $1 \le i, j \le n$. Положим

$$\overline{x}_k = \overline{x}(B_k^*) = \frac{1}{L_k} \sum_{x \in B_k^*} x, \quad A_k = \sum_{x \in B_k^*} a_x, \quad k \in \mathbb{N}_m.$$

Нам потребуются следующие два известных свойства точки $\overline{x}_k$, доказательство которых приводится ради полноты изложения.

Лемма 2. *Для всякого $k \in \mathbb{N}_m$ верно равенство*

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^*} \|x - y\|^2 = L_k \sum_{x \in B_k^*} \|x - \overline{x}_k\|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^*} \|x - y\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^*} \Big(\|x\|^2 - 2\big\langle x, y\big\rangle + \|y\|^2\Big) = \sum_{x \in B_k^*} \Big(L_k\|x\|^2 - \Big\langle x, \sum_{y \in B_k^*} y\Big\rangle\Big)$$

$$= L_k \sum_{x \in B_k^*} \Big(\|x\|^2 - \langle x, \overline{x}_k\rangle\Big) = L_k \sum_{x \in B_k^*} \Big(\|x - \overline{x}_k\|^2 + \langle x - \overline{x}_k, \overline{x}_k\rangle\Big)$$

$$= L_k\Big(\sum_{x \in B_k^*} \|x - \overline{x}_k\|^2 + \Big\langle \sum_{x \in B_k^*} (x - \overline{x}_k), \overline{x}_k\Big\rangle\Big) = L_k \sum_{x \in B_k^*} \|x - \overline{x}_k\|^2.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для всякого* $k = 1, \ldots, m$ *верно неравенство* $\sum\limits_{x \in B_k^*} \|x - \overline{x}_k\|^2 \le \sum\limits_{x \in B_k^*} \|x - b_k^*\|^2$.

Доказательство. Покажем, что точка $\overline{x}_k = 1/L_k \sum\limits_{x \in B_k^*} x$ является решением следующей задачи безусловной минимизации:

$$\sum_{x \in B_k^*} \|x - z\|^2 \to \min_{z \in \mathbb{R}}.$$

Действительно, из равенства нулю частных производных функции $\sum\limits_{x \in B_k^*} \|x - z\|^2$ по компонентам вектора z следует, что минимум этой функции достигается в точке $\overline{x}_k$.

Лемма 3 доказана.

С учетом лемм 2 и 3, формулы (1) и легко проверяемых соотношений

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^* \setminus x} \frac{a_x + a_y}{L_k - 1} = A_k, \qquad A_k = \sum_{x \in B_k^*} a_x \le L_k \sum_{x \in B_k^* \setminus b_k^*} \frac{a_x + a_{b_k^*}}{L_k - 1}$$

для каждого $k \in \mathbb{N}_m$ имеем

$$F(B_k^*) = \sum_{e \in E(B_k^*)} w_e = \frac{1}{2} \sum_{x \in B_k^*} \sum_{y \in B_k^* \setminus x} \Big(\frac{a_x + a_y}{L_k - 1} + \|x - y\|^2 \Big) = A_k + L_k \sum_{x \in B_k^*} \|x - \overline{x}_k\|^2$$

$$\le A_k + L_k \sum_{x \in B_k^*} \|x - b_k^*\|^2 \le L_k \sum_{x \in B_k^* \setminus b_k^*} \Big(\frac{a_x + a_{b_k^*}}{L_k - 1} + \|x - b_k^*\|^2 \Big) = L_k \sum_{x \in B_k^*} w_{x, b_k^*} = L_k S(B_k^*). \quad (9)$$

Таким образом, при каждом $k \in \mathbb{N}_m$ левая и правая части (9) связаны неравенством. Просуммировав эти неравенства по всем $k \in \mathbb{N}_m$, получим

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}^*) = \sum_{k=1}^{m} F(B_k^*) \leqslant \sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*). \quad (10)$$

Далее, для правой части (10) имеем

$$\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*) = \sum_{k=1}^{m} L_k \sum_{x \in B_k^*} w_{x b_k^*} \leqslant \sum_{k=1}^{m} L_k \sum_{x \in C_k^*} w_{x c_k^*}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{y \in C_k^*} \sum_{x \in C_k^*} w_{x c_k^*} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{y \in C_k^*} \sum_{x \in C_k^*} w_{xy} = 2\mathcal{F}(\mathcal{C}^*). \quad (11)$$

Непосредственно из неравенств (10) и (11) следует, что $\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)/\mathcal{F}(\mathcal{C}^*) \le 2$, т.е. алгоритм $\mathcal{A}$ находит 2-приближенное решение задачи Quadratic Euclidean m-WCP.

Покажем достижимость оценки точности алгоритма. Для этого рассмотрим следующий пример для случая $m = 2$. Отметим, что его нетрудно обобщить и для произвольного m.

Пусть $n = 8$, $m = 2$, $L_1 = L_2 = 3$, веса вершин равны 0 и задана матрица весов ребер

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 5 & \bar{5} \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 5 & 4 & 8 & \bar{7} \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 5 & 8 & 4 & \bar{5} \\ 1 & 1 & 3 & 0 & \bar{5} & \bar{5} & \bar{7} & 2\cdot\bar{4} \\ 4 & 5 & 5 & \bar{5} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & \bar{5} & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 4 & \bar{7} & 1 & 4 & 0 & 1 \\ \bar{5} & \bar{7} & \bar{5} & 2\cdot\bar{4} & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где через $\bar{r}$ обозначено число $(r - 2\sqrt{3})$.

Нетрудно проверить, что данная матрица порождена, например, следующим множеством точек на плоскости (см. рис. 2):

$$v_1 = (0;1), \qquad v_2 = (1;1), \qquad v_3 = (-1;1), \qquad v_4 = \Big(\frac{1}{2}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big),$$
$$v_5 = (0;-1), \qquad v_6 = (1;-1), \qquad v_7 = (-1;-1), \qquad v_8 = \Big(-\frac{1}{2}; -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big),$$

задающих элементы $w_{ij} = \|v_i - v_j\|^2$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, матрицы W.

В этом примере оптимальным решением задачи является семейство $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, C_2^*\}$ клик $C_1^* = \{v_1, v_2, v_4\}$ и $C_2^* = \{v_5, v_7, v_8\}$ и $OPT = \mathcal{F}(\mathcal{C}^*) = 6$.

Одним из оптимальных решений вспомогательной задачи является семейство $\mathcal{B}^* = \{B_1^*, B_2^*\}$ со звездами $B_1^* = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $B_2^* = \{v_5, v_6, v_7\}$, с центрами $b_1^* = v_1$ и $b_2^* = v_5$ соответственно. Для целевой функции основной задачи на полученном решении имеем $\mathcal{F}(\mathcal{B}^*) = 12$. Поэтому для оценки точности алгоритмического решения имеем $\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)/\mathcal{F}(\mathcal{C}^*) = 2$, т.е. оценка 2 точности алгоритма достижима.

Остается заметить, что оценка вычислительной сложности следует из леммы 1.

Теорема 5 доказана.

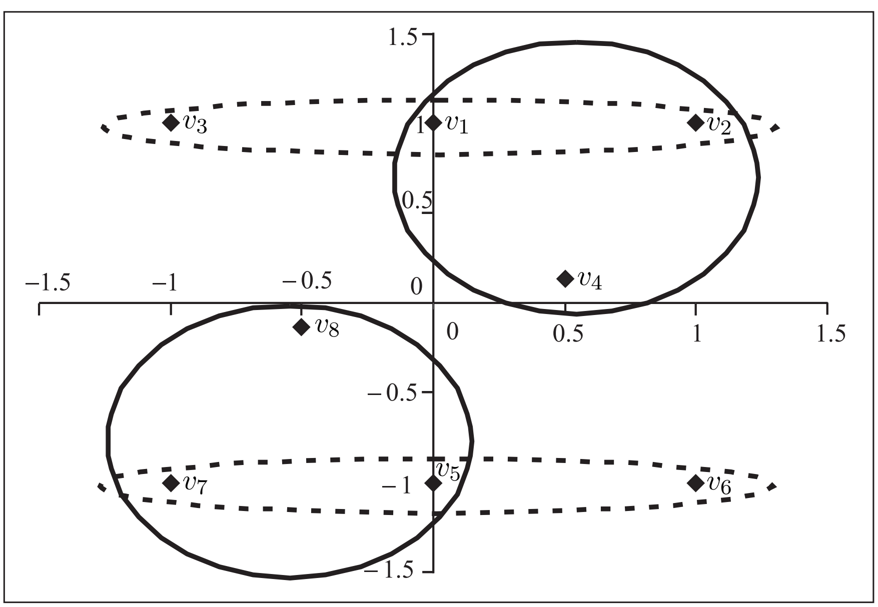


Рис. 2. К доказательству теоремы 5.

Заключение

В работе обоснован статус вычислительной сложности задачи m-WCP и двух ее важных подклассов Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP. Кроме того, представлен приближенный алгоритм решения исследуемой задачи — поиска в полном неориентированном взвешенном графе семейства несмежных клик заданных размеров с минимальным суммарным весом вершин и ребер в искомом семействе. Приближенное решение задачи строится по решению вспомогательной задачи поиска семейства звезд тех же размеров, что в исходной задаче, с минимальным суммарным весом вершин и ребер в найденном семействе звезд. Решение вспомогательной задачи получено посредством точного алгоритма транспортного типа.

Для упомянутых выше частных случаев задачи обоснованы оценки гарантированной точности решения. В обоих случаях доказана достижимость полученных оценок. При константном числе искомых клик приближенный алгоритм решения исходной задачи имеет полиномиальную временную сложность. Попутно для решения задачи Metric WCP (случай $m = 1$) получены улучшенные оценки качества (точность, трудоемкость, достижимость). В дальнейшем представляется важным расширить область возможного использования предложенного подхода для других интересных подклассов задачи m-WCP.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.** Assignment problems. Philadelphia: SIAM, 2009. 382 p.
2. **De Kort J. B. J. M.** Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. Vol. 22, no. 1. P. 113–122.
3. **Dinits E.A., Kronrod M.A.** One algorithm for solving Assignment Problem // Dokl. AN SSSR. 1969. Vol. 189, no. 1. P. 23–25.
4. **Garey M.R., Johnson D.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 314 p.
5. **Gimadi Edward Kh.** Approximation efficient algorithms with performance guarantees for some hard routing problems // Proc. II Int. Conf. "Optimization and Applications" (OPTIMA 2011). Petrovac, 2011. P. 98–101.
6. **Håstad J.** Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$ // Acta Math. 1999. Vol. 182, no. 1. P. 105–142.
7. **Kleinschmidt P., Schannath H.** A strongly polynomial algorithm for the transportation problem // Math. Program. 1995. Vol 68, no. 1. Ser. A. P. 1–13.
8. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications / ed. C. R. Reeves. Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173–178. (NATO Advanced Study Inst. Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci.; vol. 19)
9. **Park K., Lee K., Park S.** An extended formulation approach to the edge-weighted maximal clique problem // European J. Oper. Res. 1996. Vol. 95. P. 671–682.
10. **Prim R.C.** Shortest connection networks and some generalizations // Bell System Technical J. 1957. Vol. 36, no. 6. P. 1389–1401.
11. **Roskind J., Tarjan R.E.** A note on finding minimum-cost edge-disjoint spanning trees // Math. Oper. Res. 1985. Vol. 10, no. 4. P. 701–708.
12. **Spieksma F. C. R.** Multi-index assignment problems: complexity, approximation, applications // Nonlinear assignment problems, algorithms and applications / eds. L. Pitsoulis, P. Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 1–12. (Comb. Optim.; vol. 7).
13. The traveling salesman problem and its variations / eds. G. Gutin, A. Punnen. Dortrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 830 p. (Comb. Optim.; vol. 12).
14. **Бабурин А.Е., Гимади Э.Х.** Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 12–24.
15. **Галашов А.Е., Кельманов А.В.** 2-приближенный алгоритм для одной задачи поиска семейства непересекающихся подмножеств векторов // Автоматика и телемеханика. 2014. Т. 4. С. 5–17.
16. **Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Глебов А.Н.** Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2 // Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Т. 14, № 2. С. 41–61.

17. 2-приближенный алгоритм поиска клики с минимальным числом вершин и ребер / И. И. Еремин, Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 134–143.
18. **Кельманов А.В., Пяткин А.В.** *NP*-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 37–45.
19. **Кельманов А.В., Романченко С.М.** Приближенный алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 61–69.

Поступила 30.01.2014

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лабораторией
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Кельманов Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: kelm@math.nsc.ru

Пяткин Артем Валерьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: artem@math.nsc.ru

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 519.854

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ[1]

А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко

Приведены примеры взаимно двойственных задач безусловной оптимизации, которые возникают из регуляризованных задач систем линейных уравнений и/или неравенств. Решение любой из взаимно двойственных задач вычисляется по решению другой по простым формулам. Так как взаимно двойственные задачи отличаются размерностью, то естественно решать задачу безусловной оптимизации меньшей размерности.

Ключевые слова: регуляризация, кусочно-квадратичная функция, безусловная оптимизация, взаимно двойственные задачи, обобщенный метод Ньютона.

A. I. Golikov, Yu. G. Evtushenko. Regularization and normal solutions of systems of linear equations and inequalities.

The paper provides some examples of mutually dual unconstrained optimization problems originating from regularization problems for systems of linear equations and/or inequalities. The solution of each of these mutually dual problems can be found from the solution of the other problem by means of simple formulas. Since mutually dual problems have different dimensions, it is natural to solve the unconstrained optimization problems with smaller dimension.

Keywords: regularization, piecewise quadratic function, unconstrained optimization, mutually dual problems, generalized Newton method.

Введение

И. И. Еремин хорошо известен как создатель теории двойственности несобственных задач линейной оптимизации, он всегда уделял большое внимание выявлению двойственности в задачах, возникающих в различных методах оптимизации. На авторов данной статьи произвело большое впечатление замечание И. И. Еремина, сделанное на одной из конференций “Математическое программирование и приложения”, о том, что двойственная задача квадратичного программирования без ограничений может рассматриваться как взаимно двойственная для исходной прямой задачи квадратичного программирования с ограничениями [1; 2].

Формально задачи безусловной минимизации не имеют функции Лагранжа, и, следовательно, для них нельзя непосредственно построить двойственную задачу. Тем не менее с помощью дополнительных переменных можно ввести искусственные ограничения и получить эквивалентную задачу нелинейного программирования, для которой уже стандартным образом определяется двойственная задача. Существует класс таких задач оптимизации, для которых взаимно двойственные задачи являются задачами безусловной оптимизации и решение любой из этих двух задач выражается через решение другой. Это — задачи квадратичного программирования, которые возникают, например, при регуляризации систем линейных уравнений и/или неравенств. Так как взаимно двойственные задачи отличаются размерностью, то естественно решать задачу безусловной оптимизации меньшей размерности. Приводится один типичный результат, возникающий при регуляризации системы линейных уравнений и неравенств [3] и в svm-методе распознавания образов [4].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-00805), программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1) и программы Президиума РАН П-18.

В первом разделе рассматривается регуляризованная задача решения системы линейных уравнений. Всюду в статье используется евклидова норма. Для регуляризованной задачи, которая является задачей безусловной минимизации строго выпуклой квадратичной функции, приводится взаимно двойственная задача безусловной максимизации строго вогнутой квадратичной функции и получены простые формулы, по которым решение любой из этих задач находится через решение другой. Рассмотрены некоторые подходы для нахождения нормального решения системы линейных уравнений, отличные от метода регуляризации.

Во втором и третьем разделах рассмотрены аналогичные взаимно двойственные задачи для нахождения нормальных решений систем линейных уравнений с неотрицательными переменными и систем линейных неравенств соответственно. Здесь возникают задачи безусловной оптимизации кусочно-квадратичных функций, для которых особенно эффективен глобально сходящийся за конечное число шагов обобщенный метод Ньютона.

1. Нормальные решения систем линейных уравнений

Рассмотрим совместную систему линейных уравнений

$$Ax = b. \tag{1.1}$$

Здесь A — ненулевая матрица размерности $m \times n$, вектор $b \in \mathbb{R}^m$, $\|b\| \neq 0$. В методе регуляризации рассматривается последовательность задач безусловной минимизации

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} F(x), \qquad F(x) = \frac{1}{2}(\|b - Ax\|^2 + \varepsilon\|x\|^2) \tag{1.2}$$

с положительным параметром ε, стремящимся к нулю. Единственное решение $x(\varepsilon)$ задачи (1.2) при фиксированном ε выражается явно следующей формулой:

$$x(\varepsilon) = (\varepsilon I_n + A^\top A)^{-1}A^\top b. \tag{1.3}$$

Здесь и ниже через I_k обозначена единичная матрица порядка k. При $\varepsilon \to 0$ решение $x(\varepsilon)$ сходится к нормальному решению системы (1.1) [3]. В (1.3) обратная матрица существует при любом ранге матрицы A и любом $\varepsilon > 0$.

Выражение (1.3) для вычисления $x(\varepsilon)$ можно представить в другом виде, используя формулу Шермана — Моррисона — Вудбери [5]

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\big(I_n - A^\top(\varepsilon I_m + AA^\top)^{-1}A\big)A^\top b. \tag{1.4}$$

Отметим, что в этой формуле следует обращать квадратную матрицу порядка m в отличие от формулы (1.3), в которой обращается матрица порядка n. Ниже будет выведена еще одна формула (1.17) вычисления $x(\varepsilon)$, в которой тоже требуется обращать матрицу порядка m, но с меньшим количеством перемножений матриц, чем в формуле (1.4).

Задачу (1.2) можно рассматривать с разных точек зрения: как метод квадратичных штрафных функций, как регуляризацию задачи линейного программирования с нулевой целевой функцией, как метод наименьших квадратов, как многокритериальную оптимизацию. Так, например, (1.2) есть вспомогательная задача метода штрафов с коэффициентом штрафа при целевой функции для следующей задачи квадратичного программирования:

$$\min_{x\in X} \frac{1}{2}\|x\|^2, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b\}. \tag{1.5}$$

Задача (1.2) эквивалентна следующей регуляризованной задаче линейного программирования:

$$\min_{x\in X}\big\{0_n^\top x + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2\big\}, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b\}. \tag{1.6}$$

Легко показать, что двойственной к (1.6) является следующая задача безусловной максимизации квадратичной функции [1] (И. И. Ереминым было показано, что эти задачи взаимно двойственны):

$$\max_{u\in\mathbb{R}^n}\{b^\top u-\frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top u\|^2\}, \tag{1.7}$$

которая в свою очередь есть оштрафованная задача линейного программирования (ЛП)

$$\max_{u\in U} b^\top u, \qquad U=\{u\in\mathbb{R}^m\colon A^\top u=0_n\}.$$

Заметим, что из решения $u(\varepsilon)$ задачи безусловной максимизации (1.7) легко вычисляется решение задачи (1.6) по формуле

$$x(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}A^\top u(\varepsilon).$$

Согласно [6] и [7] эта формула дает решение задачи (1.5) при любом $\varepsilon>0$.

При фиксированном параметре ε задачу (1.2) можно рассматривать как метод наименьших квадратов (метод минимизации невязок), примененный к следующей несовместной системе:

$$Ax=b, \qquad -\sqrt{\varepsilon}x=0_n. \tag{1.8}$$

Вектор $x(\varepsilon)$ есть решение задачи безусловной минимизации (1.2) и псевдорешение системы (1.8). Через $z_1(\varepsilon)=b-Ax(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}x(\varepsilon)$ обозначим составляющие вектора минимальных невязок $z(\varepsilon)^\top=[z_1(\varepsilon)^\top,z_2(\varepsilon)^\top]$ системы (1.8).

Согласно теореме об альтернативах (см., например, [8; 9]) для несовместной системы (1.8) можно построить совместную альтернативную систему вида

$$A^\top u_1-\sqrt{\varepsilon}u_2=0_n, \qquad b^\top u_1=\rho>0. \tag{1.9}$$

Здесь ρ — фиксированная положительная константа, векторы неизвестных $u_1\in\mathbb{R}^m$, $u_2\in\mathbb{R}^n$. Согласно [9] нормальный вектор $\tilde u(\varepsilon)^\top=[\tilde u_1(\varepsilon)^\top,\tilde u_2(\varepsilon)^\top]$ альтернативной системы (1.9) выражается через вектор минимальных невязок $z(\varepsilon)$ по формулам

$$\tilde u_1(\varepsilon)=\frac{\rho z_1(\varepsilon)}{\|z(\varepsilon)\|^2}, \qquad \tilde u_2(\varepsilon)=\frac{\rho z_2(\varepsilon)}{\|z(\varepsilon)\|^2}.$$

Пусть вектор переменных $z\in\mathbb{R}^{m+n}$ имеет разбиение $z^\top=[z_1^\top,z_2^\top]$, где $z_1\in\mathbb{R}^m$, $z_2\in\mathbb{R}^n$. Запишем задачу строго вогнутого квадратичного программирования

$$\max_{z\in Z}\Big\{b^\top z_1-\frac{1}{2}(\|z_1\|^2+\|z_1\|^2)\Big\}, \qquad Z=\{z\in\mathbb{R}^{m+n}\colon A^\top z_1-\sqrt{\varepsilon}z_2=0_n\}. \tag{1.10}$$

Эту задачу можно рассматривать как регуляризацию задачи ЛП следующего вида:

$$\max_{z\in Z}\{b^\top z_1+0_n^\top z_2\}, \qquad Z=\{z\in\mathbb{R}^{m+n}\colon A^\top z_1-\sqrt{\varepsilon}z_2=0_n\},$$

которая является взаимно двойственной к задаче ЛП

$$\min_{x\in X}0_n^\top x, \qquad X=\{x\in\mathbb{R}^n\colon Ax=b,\ -\sqrt{\varepsilon}x=0_n\}. \tag{1.11}$$

При $\varepsilon\neq0$ и $\|b\|\neq0$ ограничения в (1.11) несовместны, и задача является несобственной 1-го рода [10]. Задачу (1.2) можно рассматривать как вспомогательную задачу метода штрафных квадратичных функций, примененного к задаче ЛП (1.11). Как известно [1], задача метода штрафных квадратичных функций для задачи ЛП и регуляризованная задача ЛП являются взаимно двойственными, т. е. задачи (1.2) и (1.10) взаимно двойственны.

В задаче (1.10) можно исключить переменные z_2, выразив их через z_1, и подставить $z_2 = (1/\sqrt{\varepsilon})A^\top z_1$ в целевую функцию задачи (1.10). Тогда приходим к следующей эквивалентной задаче безусловной максимизации строго вогнутой квадратичной функции

$$\max_{z_1\in\mathbb{R}^m} H(z_1), \qquad H(z_1) = b^\top z_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top z_1\|^2 - \frac{1}{2}\|z_1\|^2. \tag{1.12}$$

Таким образом, эта задача и задача (1.2) взаимно двойственны.

Теорема 1.1. *При любом $\varepsilon > 0$ единственное решение $x(\varepsilon) = \operatorname{Arg}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} F(x)$ задачи* (1.2) *и единственное решение $z_1(\varepsilon) = \operatorname{Arg}\max\limits_{z_1\in\mathbb{R}^m} H(z_1)$ задачи* (1.12) *связаны между собой соотношениями*

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}A^\top z_1(\varepsilon), \tag{1.13}$$

$$z_1(\varepsilon) = b - Ax(\varepsilon), \tag{1.14}$$

и имеет место равенство оптимальных значений целевых функций $F(x(\varepsilon)) = H(z_1(\varepsilon))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\varepsilon > 0$ строго выпуклая квадратичная функция F(x) на $\mathbb{R}^n$ ограничена снизу нулем. Поэтому по теореме Франка — Вульфа [11] задача (1.2) всегда имеет единственное решение.

Максимизируемая квадратичная функция $H(z_1)$ при $\varepsilon > 0$ строго вогнута и ограничена сверху на всем пространстве $\mathbb{R}^m$. Действительно, справедливы следующие выражения:

$$H(z_1) = b^\top z_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top z_1\|^2 - \frac{1}{2}\|z_1\|^2 = \frac{1}{2}\|b\|^2 - \frac{1}{2}\|b\|^2 + b^\top z_1 - \frac{1}{2}\|z_1\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top z_1\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|b\|^2 - \frac{1}{2}\|b - z_1\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top z_1\|^2 \le \frac{1}{2}\|b\|^2.$$

Следовательно, задача (1.10) при любом $\varepsilon > 0$ всегда имеет единственное решение.

Для взаимно двойственных задач (1.2) и (1.12) по теореме слабой двойственности для любых $z_1 \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$b^\top z_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top z_1\|^2 - \frac{1}{2}\|z_1\|^2 \le \frac{1}{2}(\|b - Ax\|^2 + \varepsilon\|x\|^2),$$

и по теореме двойственности оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают:

$$b^\top z_1(\varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top z_1(\varepsilon)\|^2 - \frac{1}{2}\|z_1(\varepsilon)\|^2 = \frac{1}{2}(\|b - Ax(\varepsilon)\|^2 + \varepsilon\|x(\varepsilon)\|^2). \tag{1.15}$$

Легко убедиться, что выражения (1.13) и (1.14) удовлетворяют необходимым и достаточным условиям оптимальности для задачи (1.2)

$$-A^\top(b - Ax(\varepsilon)) + \varepsilon x(\varepsilon) = 0_n$$

и необходимым и достаточным условиям оптимальности для задачи (1.12)

$$b - z_1(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}AA^\top z_1(\varepsilon) = 0_m.$$

Теорема доказана.

Заметим, что равенство (1.15) оптимальных значений целевых функций взаимно двойственных задач (1.2) и (1.12) с учетом связей (1.13), (1.14) между решениями $x(\varepsilon)$ и $z(\varepsilon)$

можно представить в следующих двух видах, в которых присутствуют решения только одной из задач

$$b^\top z_1(\varepsilon) = \|z(\varepsilon)\|^2,$$
$$b^\top(b - Ax(\varepsilon)) = \|b - Ax(\varepsilon)\|^2 + \varepsilon\|x(\varepsilon)\|^2. \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует $\varepsilon\|x(\varepsilon)\|^2 = z_1(\varepsilon)^\top Ax(\varepsilon)$. Отсюда получаем известный результат в методе наименьших квадратов: при $\varepsilon = 0$ имеет место $z_1(0) \perp Ax(0)$. Заметим, что если система (1.1) несовместна, то $z_1(0) \neq 0$.

Задача (1.12) при любом $\varepsilon > 0$ и любом ранге матрицы A может быть явно разрешена:

$$z_1(\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon I_m + AA^\top)^{-1}b.$$

Подставляя это выражение в (1.13), получаем еще одну формулу для вычисления решения $x(\varepsilon)$ задачи (1.2)

$$x(\varepsilon) = A^\top(\varepsilon I_m + AA^\top)^{-1}b. \tag{1.17}$$

В этой формуле требуется обращать матрицу порядка m в отличие от формулы (1.3), в которой требуется обращать матрицу порядка n. Поэтому если в задаче (1.1) $m < n$, то для вычисления $x(\varepsilon)$ целесообразно использовать формулу (1.17) или формулу (1.13). В случае применения последней формулы требуется решать задачу безусловной оптимизации (1.12) с m неизвестными.

Выражение (1.17) для вычисления $x(\varepsilon)$ также можно представить в другом виде с использованием формулы Шермана — Моррисона — Вудбери

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}A^\top(I_m - A(\varepsilon I_n + A^\top A)^{-1}A^\top)b.$$

В этой формуле требуется обращать матрицу порядка n в отличие от формулы (1.17), в которой обращается матрица порядка m.

В [12] показано, что для всякой матрицы A из системы (1.1) следующим образом определена псевдообратная матрица:

$$A^+ = \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon I_n + A^\top A)^{-1}A^\top = \lim_{\varepsilon\to 0}A^\top(\varepsilon I_m + AA^\top)^{-1},$$

и при любом векторе b (в том числе и при b, делающим систему (1.1) несовместной) вектор $\tilde{x}_* = A^+b$ является вектором с минимальной нормой среди всех векторов, минимизирующих $\|b - Ax\|^2$.

В [9] предложен другой метод нахождения нормального решения системы (1.1), основанный на применении теорем об альтернативах. При этом для несовместной альтернативной к (1.1) системы

$$A^\top u = 0_n, \qquad b^\top u = \rho \neq 0$$

решается следующая задача минимизации ее невязок

$$\min_{u\in\mathbb{R}^m}\frac{1}{2}\{\|A^\top u\|^2 + (\rho - b^\top u)^2\}. \tag{1.18}$$

Здесь ρ — произвольная ненулевая константа.

Пусть u_* — решение задачи безусловной минимизации (1.18). Тогда нормальное решение исходной системы (1.1) выражается по формуле

$$\tilde{x}_* = \frac{A^\top u_*}{\rho - b^\top u_*}. \tag{1.19}$$

Если в исходной системе ранг матрицы A равен m, то решение задачи (1.18) находится аналитически

$$u_* = \rho(AA^\top + bb^\top)^{-1}b.$$

Подставляя эту формулу в (1.19), получаем еще одно выражение для нормального решения системы (1.1)

$$\tilde{x}_* = \frac{A^\top(AA^\top + bb^\top)^{-1}b}{1 - b^\top(AA^\top + bb^\top)^{-1}b}.$$

2. Регуляризация систем линейных уравнений с неотрицательными переменными

Рассмотрим теперь совместную систему линейных уравнений с неотрицательными переменными

$$Ax = b, \qquad x \geq 0_n,$$

и ее регуляризованную задачу

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n_+} F(x), \qquad F(x) = \frac{1}{2}(\|b - Ax\|^2 + \varepsilon\|x\|^2) \tag{2.1}$$

с положительным параметром ε, стремящимся к нулю.

Следующая задача безусловной максимизации

$$\max_{u\in\mathbb{R}^m} H(u), \qquad H(u) = b^\top u - \frac{1}{2\varepsilon}\|(A^\top u)_+\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 \tag{2.2}$$

является двойственной к регуляризованной задаче (2.1). Здесь и ниже a_+ обозначает вектор a, у которого все отрицательные компоненты заменены на нули.

Теорема 2.1. *При любом $\varepsilon > 0$ единственное решение $x(\varepsilon) = \operatorname{Arg}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n_+} F(x)$ задачи* (2.1) *и единственное решение $u(\varepsilon) = \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in\mathbb{R}^m} H(u)$ задачи* (2.2) *связаны между собой соотношениями*

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(A^\top u(\varepsilon))_+,$$
$$u(\varepsilon) = b - Ax(\varepsilon),$$

и имеет место равенство оптимальных значений целевых функций $F(x(\varepsilon)) = H(u(\varepsilon))$.

Доказательство. Минимизируемая функция в задаче (2.1) является при $\varepsilon > 0$ строго выпуклой квадратичной функцией, ограниченной снизу нулем на $\mathbb{R}^n_+$. Поэтому по теореме Франка — Вульфа [11] задача (2.1) всегда имеет решение, которое единственно.

В задаче (2.2) максимизируемая кусочно-квадратичная функция является при $\varepsilon > 0$ строго вогнутой и ограниченной сверху на всем пространстве $\mathbb{R}^m$. По теореме Франка — Вульфа задача (2.2) всегда имеет единственное решение.

Вводя дополнительные переменные $y \in \mathbb{R}^m$ и дополнительные ограничения $Ax + y = b$, перепишем задачу (2.1) в следующем эквивалентном виде:

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}\min_{x\in\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{2}\{\|y\|^2 + \varepsilon\|x\|^2\}, \tag{2.3}$$
$$Ax + y = b.$$

Для этой задачи введем функцию Лагранжа

$$L(y, x, u) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2 + u^T(b - Ax - y).$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^m$ — множители Лагранжа для задачи (2.3). Двойственная к (2.3) задача имеет вид

$$\max_{u \in \mathbb{R}^m} \min_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(y, x, u). \tag{2.4}$$

Запишем условия минимума по y и x для внутренней задачи в (2.4):

$$L_y(y(\varepsilon), x(\varepsilon), u) = y(\varepsilon) - u = 0_m,$$
$$L_x(y(\varepsilon), x(\varepsilon), u) = \varepsilon x(\varepsilon) - A^\top u \geq 0_n, \qquad x^\top(\varepsilon)(\varepsilon x(\varepsilon) - A^\top u) = 0, \qquad x(\varepsilon) \geq 0_n.$$

Из этих условий легко находим решения внутренней задачи минимизации (2.4)

$$y(\varepsilon) = u \tag{2.5}$$

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(A^\top u)_+. \tag{2.6}$$

Подставляя решения (2.5) и (2.6) в функцию Лагранжа $L(y, x, u)$, после простых преобразований получаем двойственную функцию для задачи (2.4)

$$H(u) = b^\top u - \frac{1}{2\varepsilon}\|(A^\top u)_+\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

т. е. приходим к двойственной задаче (2.2) для задачи (2.3) и, следовательно, для задачи (2.1). Из теории двойственности следует равенство оптимальных значений целевых функций задач (2.1) и (2.2).

Внешняя задача в (2.4) состоит в безусловной максимизации $H(u)$ по u. Необходимое и достаточной условие максимума этой задачи есть

$$H_u(u(\varepsilon)) = b - \frac{1}{\varepsilon}A(A^\top u(\varepsilon))_+ - u(\varepsilon) = b - Ax(\varepsilon) - u(\varepsilon) = 0_m.$$

Отсюда с учетом (2.6) следует

$$u(\varepsilon) = b - \frac{1}{\varepsilon}A(A^\top u(\varepsilon))_+ = b - Ax(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что если в матрице A размерности $m \times n$ число строк $m < n$, то вместо задачи минимизации (2.1) целесообразно решать двойственную задачу (2.2), которая является вогнутой кусочно-квадратичной задачей безусловной максимизации. Для решения (2.2) весьма эффективен обобщенный метод Ньютона. Максимизируемая функция $H(u)$ в задаче (2.2) является вогнутой кусочно-квадратичной и дифференцируемой. Для этой функции обычная матрица Гессе не существует. Действительно, градиент

$$H_u(u) = b - \frac{1}{\varepsilon}A(A^\top u)_+ - u$$

функции $H(u)$ недифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является невырожденной $(m \times m)$-матрицей следующего вида:

$$H_{uu} = -\Big(\frac{1}{\varepsilon}AD(z)A^\top + I_m\Big),$$

где через $D(z)$ обозначена диагональная $(n \times n)$-матрица с i-м диагональным элементом z^i, равным 1, если $(A^\top u)^i > 0$, и равным 0, если $(A^\top u)^i \le 0$, $i = 1, \ldots, n$. Доказательство конечной глобальной сходимости обобщенного метода Ньютона с выбором шага по правилу Армихо для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции можно найти в [4; 13; 14]. Обобщенный метод Ньютона позволяет эффективно решать задачи при $n \approx 10^6$ и $m \approx 10^4$ на однопроцессорных компьютерах и при n порядка десятков миллионов, m порядка сотен тысяч — на многопроцессорных вычислительных комплексах [15].

3. Регуляризация систем линейных неравенств

Регуляризация систем линейных неравенств аналогична рассмотренной в предыдущем параграфе. Пусть дана совместная система линейных неравенств

$$Ax \ge b.$$

Регуляризованная задача имеет вид

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x), \qquad F(x) = \frac{1}{2}(\|(b - Ax)_+\|^2 + \varepsilon\|x\|^2) \tag{3.1}$$

с положительным параметром ε, стремящимся к нулю. Тогда следующая задача максимизации на положительном ортанте

$$\max_{u \in \mathbb{R}^m_+} H(u), \qquad H(u) = b^\top u - \frac{1}{2\varepsilon}\|A^\top u\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 \tag{3.2}$$

является двойственной к регуляризованной задаче (3.1).

В этом случае справедлива теорема, аналогичная теореме 2.1.

Теорема 3.1. *При любом $\varepsilon > 0$ единственное решение $x(\varepsilon) = \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$ задачи* (3.1) *и единственное решение $u(\varepsilon) = \operatorname{Arg}\max\limits_{u \in \mathbb{R}^m_+} H(u)$ задачи* (3.2) *связаны между собой соотношениями*

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} A^\top u(\varepsilon),$$
$$u(\varepsilon) = (b - Ax(\varepsilon))_+\,,$$

и имеет место равенство оптимальных значений целевых функций $F(x(\varepsilon)) = H(u(\varepsilon))$.

К сожалению, непосредственное применение метода Ньютона к задаче (3.2) затруднительно в отличие от задачи (2.2) [7; 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** О квадратичных и полноквадратичных задачах выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1998. № 12. С. 22–28.
2. **Еремин И.И.** Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. ун-та, 2005. 195 с.
3. **Тихонов А.Н.** О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 591–594.
4. **Mangasarian O.L.** A finite Newton method for classification // Optim. Methods Softw. 2002. Vol. 17, no. 5. P. 913–929.
5. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.

6. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Нахождение проекции заданной точки на множество решений задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 33–47.
7. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Обобщенный метод Ньютона для задач линейной оптимизации с ограничениями-неравенствами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, №. 2. С. 98–108.
8. **Mangasarian O.L.** Nonlinear programming. New York: McCrow-Hill, 1969. 220 p.
9. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 354–375.
10. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 335 с.
11. **Frank M., Wolfe P.** An algorithm for quadratic programming // Naval Res. Logist. Quart. 1956. Vol. 3. P. 95–110.
12. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.
13. **Mangasarian O.L.** A Newton method for linear programming // J. Optim. Theory Appl. 2004. Vol. 121, no. 1. P. 1–18.
14. **Kanzow C., Qi H., Qi L.** On the minimum norm solution of linear programs // J. Optim. Theory Appl. 2003. Vol. 116, no. 2. P. 333–345.
15. Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования / В.А. Гаранжа, А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко, М.Х. Нгуен // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1369–1384.
16. **Попов Л.Д.** Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 206–221.

Голиков Александр Ильич
канд. физ.-мат. наук
вед. науч. сотрудник
ВЦ РАН им. А.А.Дородницына

Поступила 14.01.2014

Евтушенко Юрий Гаврилович
д-р физ.-мат. наук, академик РАН
директор
ВЦ РАН им. А.А. Дородницына
e-mail: evt@ccas.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.542

НЕАБЕЛЕВЫ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА НЕРАЗРЕШИМЫЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ[1]

Е. Н. Демина, Н. В. Маслова

Получено полное описание неабелевых композиционных факторов конечной группы, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой имеет примарный индекс, и завершено описание В. А. Ведерникова неабелевых композиционных факторов конечной группы, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой холлова.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, разрешимая подгруппа, холлова подгруппа, композиционный фактор, примарный индекс.

E. N. Demina, N. V. Maslova. Nonabelian composition factors of a finite group with arithmetic constraints to nonsolvable maximal subgroups.

We obtain a complete description of nonabelian composition factors of a finite group in which any nonsolvable maximal subgroup has a primary index. We also complete V.A. Vedernikov's description of nonabelian composition factors of a finite group in which any nonsolvable maximal subgroup is a Hall subgroup.

Keywords: finite group, maximal subgroup, solvable subgroup, Hall subgroup, composition factor, primary index.

1. Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин "группа" в значении "конечная группа".

Хорошо известно, что в разрешимой группе все максимальные подгруппы разрешимы и имеют примарные индексы. Однако обратное утверждение неверно: существуют неразрешимые группы, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима и имеет примарный индекс. Пример такой группы дает простая группа $PSL_2(7)$.

Гуральником [19] были описаны максимальные подгруппы примарных индексов в неабелевых простых группах и строение групп, в которых каждая максимальная подгруппа имеет примарный индекс. Неразрешимые группы, все локальные подгруппы которых разрешимы, были изучены Томпсоном [24]. Многими авторами изучались группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса (не обязательно максимальная) является группой, близкой к нильпотентной. Например, П.П. Барышовец [11] доказал, что группами $PSL_2(5)$, $PSL_2(7)$, $SL_2(5)$ и $SL_2(7)$ исчерпываются все неразрешимые группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса нильпотентна или является группой Шмидта (минимальной ненильпотентной группой). Ослабив условия и рассмотрев конечные группы, в которых неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы, получаем более широкий класс групп. Возникают следующие вопросы: *каково строение неразрешимой группы, все неразрешимые максимальные подгруппы которой имеют примарные индексы, и, в частности, каковы неабелевы композиционные факторы такой группы*?

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), фонда Дмитрия Зимина "Династия", Уральского отделения РАН (проект 14-1-НП-27) и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Через $Soc(G)$ обозначается цоколь группы G, т. е. подгруппа, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами.

Одним из основных результатов данной статьи является

Теорема 1. *Пусть G — неразрешимая группа, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой имеет примарный индекс. Тогда*

(i) *неабелевы композиционные факторы группы G попарно изоморфны и исчерпываются группами из следующего списка*:

(1) $PSL_2(2^p)$, *где p — простое число*;

(2) $PSL_2(3^p)$, *где p — простое число*;

(3) $PSL_2(p^{2^w})$, *где p — нечетное простое число и $w \geq 0$*;

(4) $Sz(2^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(5) $PSL_3(3)$;

(ii) *для каждой простой группы S из списка пункта (i) найдется группа G, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой имеет примарный индекс, такая, что $Soc(G) \cong S$.*

Следствие 1. *В простой неабелевой группе G все неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы тогда и только тогда, когда G изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $PSL_2(2^p)$, *где p — простое число*;

(2) $PSL_2(3^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(3) $PSL_2(p)$, *где p — простое число, $p > 3$ и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$*;

(4) $Sz(2^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(5) $PSL_3(3)$;

(6) $L_2(11)$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Подгруппа H конечной группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π простых чисел.

В [2] получено полное описание неабелевых простых групп, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа холлова (см. [2, теорема 1]), и незавершенное описание неабелевых композиционных факторов конечной неразрешимой группы, каждая неразрешимая максимальная подгруппа которой холлова (см. лемму 8). В настоящей работе мы завершаем это описание. Доказана следующая

Теорема 2. *Пусть каждая неразрешимая максимальная подгруппа группы G холлова. Тогда этим же свойством обладает каждый неабелев композиционный фактор группы G.*

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [3; 9; 14; 16].

Обозначим через $\mathfrak{T}_{pr}$ класс всех групп, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа имеет примарный индекс, а через $\mathfrak{T}_h$ — класс групп, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа холлова.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i и число ненулевых компонент конечно. Введем на $\mathcal{M}$ естественный частичный порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Через ψ обозначим введенную в [5] функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность

$(s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \ldots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

Пусть q — натуральная степень простого числа и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетных n и q и $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Будем обозначать через V векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ для четного n параметр ε называется *знаком* этой группы и соответствующего ей векторного пространства V.

На основе классификации конечных простых групп М. Ашбахер в [10] описал семейство естественных геометрически определенных подгрупп конечных простых классических групп, которое было разбито им на восемь классов C_i $(1 \leq i \leq 8)$, называемых теперь *классами Ашбахера*. Подгруппы из классов Ашбахера конечных простых классических групп подробно изучены в [21], мы используем эти результаты.

Нам будет полезно следующее легко проверяемое утверждение.

Лемма 1. *Класс $\mathfrak{T}_{pr}$ замкнут относительно взятия факторгрупп.*

Также нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2 (следствие из теоремы Жигмонди [25]). *Пусть n и q — натуральные числа, $q \geq 2$ и $n \geq 3$. Если пара (q, n) отлична от $(2, 6)$, то существует простое число r, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$.*

В обозначениях леммы 2 любое такое простое число r называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Заметим, что примитивный простой делитель числа $q^n - 1$ может быть определен неоднозначно. Например, $11^3 - 1 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, $11^2 - 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ и $11 - 1 = 2 \cdot 5$. Таким образом, примитивными простыми делителями числа $11^3 - 1$ являются простые числа 7 и 19. Множество примитивных простых делителей числа $q^n - 1$ будем обозначать через $R_n(q)$.

Лемма 3. *Пусть S — конечная простая группа лиева типа, не имеющая нетривиальных диагональных автоморфизмов, σ — полевой автоморфизм простого порядка группы S и $X = C_S(\sigma)$. Тогда класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как в рассматриваемом случае группа внутренне-диагональных автоморфизмов группы S совпадает с группой $Inn(S)$, которую будем отождествлять с S, ввиду [17, теорема 2.5.12] $\mathrm{Aut}(S) = S \leftthreetimes \Phi\Gamma$, где Φ и Γ — канонические группы полевых и графовых автоморфизмов соответственно, и Φ лежит в центре $\Phi\Gamma$. Поэтому $\mathrm{Aut}(S) = SC_{\mathrm{Aut}(S)}(\sigma)$. Поскольку группа $X = S \cap C_{\mathrm{Aut}(S)}(\sigma)$ инвариантна относительно $C_{\mathrm{Aut}(S)}(\sigma)$, класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно действия группы $SC_{\mathrm{Aut}(S)}(\sigma) = \mathrm{Aut}(S)$.

Лемма доказана.

Лемма 4 [19, теорема 1]. *Пусть G — неабелева простая группа, H — собственная подгруппа в G такая, что $|G : H| = p^{\alpha}$, где p — простое число. Тогда выполнено одно из следующих условий*:

(1) $G = A_m$, $H \cong A_{m-1}$ *и* $m = p^{\alpha}$;

(2) $G = PSL_m(q)$, H — *стабилизатор прямой или гиперплоскости и* $|G : H| = (q^m - 1)/(q - 1) = p^{\alpha}$ (*в этом случае m — простое число*);

(3) $|G : H| = 11$, $G \cong PSL_2(11)$ *и* $H \cong A_5$;

(4) $|G : H| = 23$, $G \cong M_{23}$ *и* $H \cong M_{22}$;

(5) $|G : H| = 11$, $G \cong M_{11}$ *и* $H \cong M_{10}$;

(6) $G \cong PSU_4(2)$ *и* $H \cong 2^4 : A_5$ — *параболическая подгруппа индекса* 27.

Лемма 5 [24, следствие 1]. *В неабелевой простой группе G каждая максимальная подгруппа разрешима тогда и только тогда, когда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) $PSL_2(2^p)$, *где p — простое число*;

(2) $PSL_2(3^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(3) $PSL_2(p)$, *где p — простое число, $p > 3$ и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$*;

(4) $Sz(2^p)$, *где p — нечетное простое число*;

(5) $PSL_3(3)$.

Лемма 6. *Пусть $G = PGL_2(q)$, где $q = p^f \geq 5$ и p — нечетное простое число. Тогда максимальные подгруппы группы G, которые не содержат $Soc(G)$, содержатся в следующем списке*:

(1) $(C_p)^f \leftthreetimes C_{q-1}$;

(2) $D_{2(q-1)}$, *где $q \neq 5$*;

(3) $D_{2(q+1)}$;

(4) S_4, *где $q = p \equiv \pm 3 \pmod 8$*;

(5) $PGL_2(q_0)$, *где $q = q_0^r$ и r — нечетное простое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из [12, табл. 8.7] (см. также [15, теорема 3.5]).

Пусть G — конечная группа, $L = L_1 \times \ldots \times L_m$ — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа в G, $L_i \cong S$ для $1 \leq i \leq m$ и $X \leq S$. Группа G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{L_1, \ldots, L_m\}$. Можно считать, что $L_1 = S$. Так как G действует транзитивно на Ω, имеем $m = |G : N_G(S)|$. Зафиксируем некоторую полную систему $B = \{g_1, \ldots, g_m\}$ представителей правых смежных классов группы G по подгруппе $N_G(S)$. Тогда подгруппы $S^{g_1}, S^{g_2}, \ldots, S^{g_m}$ попарно различны, и, не уменьшая общности, мы будем считать, что $L_i = S^{g_i}$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Для любой подгруппы $X \leq S$ положим $X_i = X^{g_i}$ и $Y(G, L, S, X, B) = \langle X_1, \ldots, X_m \rangle$.

Лемма 7. *Пусть подгруппа $Y = Y(G, L, S, X, B)$ группы G определена так же, как перед леммой. Если класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$, *то $Y^G = Y^L$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из доказательства [7, предложение 1].

Предложение 1. *Пусть S — простая неабелева группа, обладающая подгруппой X такой, что*

(1) *класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$;

(2) *индекс $|S : Z|$ не является степенью простого числа для любой максимальной в S подгруппы Z, содержащей X.*

Тогда

(i) *если подгруппа X неразрешима, то группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{X}_{pr}$*;

(ii) *если подгруппа X разрешима и G — группа из класса $\mathfrak{X}_{pr}$ такая, что $L = Soc(G) = L_1 \times \ldots \times L_m$, где $L_i \cong S$ для всех i, то факторгруппа G/L разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что заключение предложения неверно. Среди групп из класса $\mathfrak{X}_{pr}$, обладающих композиционным фактором, изоморфным S, выберем группу G наименьшего возможного порядка. Ввиду леммы 1 наибольшая нормальная подгруппа группы G, у которой нет композиционных факторов, изоморфных S, тривиальна.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду [9, предложение 8.2]

$$L = L_1 \times \cdots \times L_m,$$

где $L_1, \ldots, L_m$ — попарно изоморфные простые подгруппы. Так как L имеет композиционный фактор, изоморфный S, получаем, что $L_i \simeq S$ для любого $i = 1, \ldots, m$. В частности, группа L неразрешима, и G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{L_1, \ldots, L_m\}$. Можно считать, что $S = L_1$. Пусть подгруппа $Y = Y(G, L, S, X, B)$ определена так же, как перед леммой 7.

По лемме 7 имеем $Y^G = Y^L$. Ввиду аргумента Фраттини, $G = LN_G(Y)$. С использованием соответствующей теоремы о гомоморфизмах получаем, что $|G : N_G(Y)| = |L : L \cap N_G(Y)|$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(Y)$. Тогда $G = LM$. Отсюда следует, что $L \not\leq M$. В частности, найдется подгруппа L_i, $1 \leq i \leq m$, такая, что $L_i \not\leq M$. Ввиду того, что $X_i \leq Y \leq M$, имеем $X_i \leq L_i \cap M \leq Z_i < L_i$, где Z_i — некоторая максимальная подгруппа в L_i, содержащая X_i.

С использованием соответствующей теоремы о гомоморфизмах получаем

$$|G : M| = |LM : M| = |L : L \cap M| = |L : L_i \cdot (L \cap M)| \cdot |L_i \cdot (L \cap M) : L \cap M|$$

$$= |L : L_i \cdot (L \cap M)| \cdot |L_i : (L_i \cap M)| = |L : L_i \cdot (L \cap M)| \cdot |L_i : Z_i| \cdot |Z_i : (L_i \cap M)|.$$

Таким образом, индекс $|L_i : Z_i|$ делит индекс $|G : M|$, следовательно, по условию (2) индекс $|G : M|$ не является степенью простого числа. Теперь из включения $G \in \mathfrak{T}_{pr}$ следует, что подгруппа M разрешима. Если подгруппа $X \cong X_i$ неразрешима, то получаем противоречие в силу того, что $X_i \leq Y \leq M$. Отсюда следует (i). Если X разрешима, то по соответствующей теореме о гомоморфизмах $G/L = (M \cdot L)/L \cong M/(M \cap L)$, и поскольку M разрешима, то любая ее факторгруппа разрешима; отсюда вытекает (ii).

Предложение доказано.

Следствие 2. *Пусть S — простая неабелева группа, обладающая максимальной подгруппой X такой, что*

(1) *класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$;

(2) *индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа.*

Тогда

(i) *если X неразрешима, то группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$;*

(ii) *если X разрешима и G — группа из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ такая, что $L = Soc(G) = L_1 \times \ldots \times L_m$, где $L_i \cong S$ для всех i, то факторгруппа G/L разрешима.*

Лемма 8 [2, теорема 2]. *Пусть G — неразрешимая группа из класса $\mathfrak{T}_h$. Тогда каждый неабелев композиционный фактор группы G принадлежит классу $\mathfrak{T}_h$ или классу*

$$\{Sz(q) \mid q = 2^{2m+1},\ 2m+1 \text{ — составное число}\}.$$

Лемма 9 [2, лемма 3]. *Пусть S — простая неабелева группа, обладающая неразрешимой подгруппой X такой, что*

(1) *класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$;

(2) *любая собственная подгруппа Z из S, содержащая X, не является холловой в S.*

Тогда S не изоморфна никакому неабелеву композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_h$.

3. Неабелевы композиционные факторы групп из класса $\mathfrak{T}_{pr}$

Предложение 2. *Пусть S изоморфна одной из 26 спорадических групп или группе Титса ${}^2F_4(2)'$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду [14] в любой спорадической группе S есть неразрешимая максимальная подгруппа X, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$, такая, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть $S \cong A_n$ при $n \geq 5$. Тогда*

(i) группа S изоморфна композиционному фактору группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ тогда и только тогда, когда $n \leq 6$;

(ii) если $n \leq 6$ и G — группа из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ такая, что $L = Soc(G) = L_1 \times \ldots \times L_m$, где $L_i \cong A_n$ для всех i, то факторгруппа G/L разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что ввиду [14] группа $A_5 \cong PSL_2(4) \cong PSL_2(5)$ лежит в классе $\mathfrak{T}_{pr}$. Группа $A_6 \cong PSL_2(9)$ не лежит в классе $\mathfrak{T}_{pr}$, однако ввиду [14] все максимальные подгруппы группы $\mathrm{Aut}(A_6)$, не содержащие A_6, разрешимы, а все максимальные подгруппы группы $\mathrm{Aut}(A_6)$, содержащие A_6, имеют индекс 2. Поэтому группа $\mathrm{Aut}(A_6)$ лежит в классе $\mathfrak{T}_{pr}$. Таким образом, можно считать, что $n \geq 7$, и, следовательно, $\mathrm{Aut}(A_n) \cong S_n$.

Будем считать, что $\mathrm{Aut}(A_n) = S_n$. Ввиду [22] подгруппа $X = K \cap A_n$, где $S_n > K \cong S_2 \times S_{n-2}$, является максимальной подгруппой в A_n. Рассуждая как в [7, предложение 3], показываем, что класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Заметим, что подгруппа X неразрешима и ввиду леммы 4 индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Поэтому ввиду следствия $2(i)$ группа $S \cong A_n$ при $n \geq 7$ не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$. Таким образом, справедливо утверждение (i).

Утверждение (ii) следует из следствия $2(ii)$ и [14].

Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть $S \cong PSL_n(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 2$ и $(n,q) \neq (2,2),(2,3)$. Тогда*

(i) группа S изоморфна некоторому композиционному фактору группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ тогда и только тогда, когда либо $(n,q) \in \{(3,2),(3,3)\}$, либо $n = 2$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) p нечетно и $l = 2^w$ для некоторого целого неотрицательного числа w;

(2) $p \in \{2,3\}$ и l — простое число;

(ii) если G — группа из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ такая, что $L = Soc(G) = L_1 \times \ldots \times L_m$, где $L_1, L_2, \ldots, L_m$ изоморфны группе из списка пункта (i) при $(n,q) \notin \{(2,7),(3,2)\}$, то факторгруппа G/L разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда $n = 2$.

Ввиду леммы 5, если $q = 2^p$, где p — простое число, или $q = 3^p$, где p — нечетное простое число, то все максимальные подгруппы S разрешимы. Все максимальные подгруппы группы $\mathrm{Aut}(A_6) \cong \mathrm{Aut}(PSL_2(9))$ также разрешимы или имеют примарные индексы, как это следует из предложения 3.

Если p — нечетное простое число и l — степень двойки, то ввиду леммы 6 все максимальные подгруппы группы $PGL_2(q)$, не содержащие $PSL_2(q)$, разрешимы. При этом $|PGL_2(q) : PSL_2(q)| = 2$.

Пусть либо $p = 2$ и l не является простым числом, либо $p = 3$ и l не является ни простым числом, ни степенью двойки, либо $p > 3$ и l не является степенью двойки. Рассмотрим подгруппу $X = N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого порядка r группы S, причем r нечетно, если p нечетно. Ввиду [12, табл. 8.1] подгруппа X является максимальной подгруппой в S из класса Ашбахера C_5, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [21, предложение 4.5.3] и наложенных на p и l ограничений подгруппа

$$X \cong \frac{q-1}{(q-1,2)\left[q^{1/r}-1, \dfrac{q-1}{(q-1,2)}\right]}.PGL_2(q^{1/r})$$

неразрешима. Из леммы 4 следует, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Пусть $n=3$.

Ввиду [14] имеем $PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$, а каждая максимальная подгруппа группы $PSL_3(3)$ разрешима. Таким образом, группы $PSL_3(2)$ и $PSL_3(3)$ лежат в классе $\mathfrak{T}_{pr}$. Поэтому можно считать, что $q \geq 4$.

Пусть 3 делит $q-1$. Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S, являющуюся стабилизатором в S разложения $V = V_1 \oplus V_2$ в прямую сумму подпространств V_1 и V_2, где $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 2$. Ввиду [21, табл. 3.5.A, предложение 4.1.4] X — это подгруппа в S порядка $\dfrac{q-1}{(q-1,3)}\, q\,(q^2-1)$, класс сопряженности в S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Также из [21, предложение 4.1.4] следует, что подгруппа X неразрешима.

Так как $\psi(3) \geq \psi(1)$, ввиду [6, предложение 1] получаем, что индекс $|S:X|$ нечетен. Поэтому ввиду [20; 23] и [5, теорема 1] возможными максимальными собственными надгруппами подгруппы X являются стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1, стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2, $Y_3 = N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого нечетного порядка r группы S, и стабилизатор Y_4 ортогонального разложения $V = V_1^0 \oplus V_2^0 \oplus V_3^0$, где $\dim V_i^0 = 1$ для всех i. Ввиду [21, предложение 4.2.9] подгруппа $Y_4 \cong \dfrac{(q-1)^2}{(q-1,3)}.S_3$ разрешима, поэтому $X \not\leq Y_4$. Ввиду [21, предложение 4.5.3] имеем

$$|Y_3| = \frac{q-1}{3\left[q^{1/r}-1, \dfrac{q-1}{3}\right]}\, q^{3/r}(q^{3/r}-1)\,(q^{2/r}-1).$$

Так как 3 делит $q-1$ и $q \neq 8$, то $R_{2r}(q^{1/r}) \neq \varnothing$ ввиду леммы 2. Но примитивный простой делитель числа $q^2-1 = (q^{1/r})^{2r}-1$ не делит $|Y_3|$, поэтому $X \not\leq Y_3$.

Таким образом, максимальные собственные надгруппы подгруппы X — это стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Вычислим их индексы: $|S:Y_1| = |S:Y_2| = (q^3-1)/(q-1) = q^2+q+1$. Поскольку 3 делит $q-1$, имеем $q^2+q+1 = (3k+1)^2+3k+1+1 = 9k^2+9k+3 = 3(3k(k+1)+1)$, поэтому каждый из индексов $|S:Y_1|$ и $|S:Y_2|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду предложения $1(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Пусть 3 не делит $q-1$ и q нечетно. Тогда ввиду [12, табл. 8.3] подгруппа $X \cong PSO_3(q)$ является максимальной подгруппой в S из класса Ашбахера C_8. Нетрудно понять, что при $q \geq 4$ подгруппа X неразрешима. По [21, табл. 3.5.A, предложение 4.8.4] класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из леммы 4 следует, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Пусть 3 не делит $q-1$ и $q = 2^w$ для $w \geq 2$. Тогда ввиду [12, табл. 8.3] подгруппа $X = N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого порядка r группы S, является максимальной подгруппой в S из класса Ашбахера C_5. Ввиду [21, предложение 4.5.3] подгруппа X неразрешима. По [21, табл. 3.5.A, предложение 4.5.3] класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из леммы 4 следует, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Пусть $n > 3$.

Если n четно, рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S, являющуюся стабилизатором в S подпространства V_1 из V, где $\dim V_1 = n/2$. Ввиду [21, табл. 3.5.A] это параболическая максимальная подгруппа в S, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [21, предложение 4.1.17]. Кроме того, ввиду [21, предложение 4.1.17] подгруппа X неразрешима. По лемме 4 индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Если n нечетно, рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S, являющуюся стабилизатором в S множества $\{V_1, V_2\}$, где $0 < V_1 < V_2 < V$, $\dim V_1 = 2$ и $\dim V_2 = n - 2$. Это параболическая подгруппа в S, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [21, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22]. Также из [21, предложение 4.1.22] следует, что подгруппа X неразрешима. Ввиду [4, § 2] максимальными собственными надгруппами подгруппы X являются стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Ввиду леммы 4 каждый из индексов $|G : Y_1|$ и $|G : Y_2|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду предложения $1(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$. Таким образом, справедливо утверждение (i).

Для группы $PSL_3(3)$ утверждение (ii) следует из [14] и следствия $2(ii)$. Для групп $PSL_2(5) \cong A_5$ и $PSL_2(9) \cong A_6$ утверждение (ii) доказано в предложении $3(ii)$. Ввиду [12, табл. 8.1] при четном q и при нечетном $q > 9$ в группе $S = PSL_2(q)$ существует максимальная подгруппа X порядка $2(q + 1)$, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду леммы 4 индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Применение следствия $2(ii)$ завершает доказательство утверждения (ii).

Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть $S \cong PSU_n(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 3$ и $(n, q) \neq (3, 2)$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.*

Доказательство. Пусть $n = 3$. Ввиду [14] в группе $S = PSU_3(3)$ есть неразрешимая максимальная подгруппа $X \cong PSL_2(7)$, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$, такая, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$. Поэтому можно считать, что $q > 3$.

Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S, являющуюся стабилизатором в S невырожденного одномерного подпространства U из V. Ввиду [12, табл. 8.5] и [21, предложение 4.1.4] X — неразрешимая максимальная в S подгруппа порядка $\dfrac{q+1}{(q+1,3)}\,q(q^2-1)$. Также из [21, табл. 3.5.B, предложение 4.1.4] следует, что класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из леммы 4 следует, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Пусть $n \geq 4$.

Ввиду [14] в группе $S = PSU_4(2)$ есть неразрешимая максимальная подгруппа $X \cong S_6$, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$, такая, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$. Поэтому можно считать, что $(n, q) \neq (4, 2)$.

Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S, являющуюся стабилизатором в S вполне изотропного двумерного подпространства U из V. Ввиду [4, § 2] X является параболической максимальной подгруппой в S. Из [21, табл. 3.5.B, предложение 4.1.18] следует, что класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [21, предложение 4.1.18] подгруппа X неразрешима. Из леммы 4 следует, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть $S \cong PSp_{2n}(q)$, где $q = p^w$, p — простое число, $n \geq 2$ и $(n,q) \neq (2,2)$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.*

Доказательство. Группа $PSp_4(3) \cong PSU_4(2)$ не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{T}_{pr}$, как это следует из предложения 5. Поэтому можно считать, что $(n,q) \neq (2,3)$.

Пусть $(n,p) \neq (2,2)$. Рассмотрим в S подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S, являющуюся стабилизатором в S вполне изотропного одномерного подпространства U из V. Ввиду [4, § 2] X является параболической максимальной подгруппой в S. Ввиду [21, теорема 2.1.4, табл. 3.5.C, предложение 4.1.19] класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и при $(n,q) \neq (2,3)$ подгруппа X неразрешима. Ввиду леммы 4 индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Пусть $S = PSp_4(q)$, где $q = 2^w$, $w = rv \geq 2$ и r — некоторый простой делитель числа w. Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_5 группы S, являющуюся централизатором полевого автоморфизма σ простого порядка r группы S. Из [12, табл. 8.14] следует, что X — максимальная подгруппа в G. Поскольку $(q-1,2) = 1$, группа S не имеет нетривиальных диагональных автоморфизмов, поэтому ввиду леммы 3 класс сопряженности этой подгруппы в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [21, предложение 4.5.4] подгруппа $X \cong PSp_4(q^{1/r})$ неразрешима. Из леммы 4 следует, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть $S \cong P\Omega_{2n+1}(q)$, где $n \geq 3$, или $S \cong P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, где $n \geq 4$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу X из класса Ашбахера C_1 группы S, являющуюся стабилизатором в S вполне вполне сингулярного одномерного подпространства U из V. Ввиду [4, § 2] X является параболической максимальной подгруппой в S. Из [21, табл. 3.5.D, предложение 4.1.20] следует, что класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и подгруппа X неразрешима. Из леммы 4 следует, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 8. *Пусть $S \cong E_7(q)$ или $G \cong E_8(q)$. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.*

Доказательство. Рассмотрим в S произвольную параболическую максимальную подгруппу X. Класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ (см. [3, III]). Ввиду [4, § 2, (2.2)] подгруппа X неразрешима. Из леммы 4 следует, что индекс $|S:X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть* $S \cong {}^2E_6(q^2)$*. Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса* $\mathfrak{T}_{pr}$*.*

Доказательство. Ввиду [1, теорема 4] группа S содержит неразрешимую параболическую максимальную подгруппу X, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ (см. [3, III]). Из леммы 4 следует, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 10. *Пусть* $S \cong {}^3D_4(q^3)$*. Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса* $\mathfrak{T}_{pr}$*.*

Доказательство. Ввиду [1, теорема 3] группа S содержит неразрешимую параболическую максимальную подгруппу X, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ (см. [3, III]). Из леммы 4 следует, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 11. *Пусть* $S \cong {}^2F_4(2^{2n+1})$*, где* $n \geq 1$*. Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса* $\mathfrak{T}_{pr}$*.*

Доказательство. Ввиду [1, теорема 5] группа S содержит неразрешимую параболическую максимальную подгруппу X, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ (см. [3, III]). Из леммы 4 следует, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 12. *Пусть* $S \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$*, где* $n \geq 1$*. Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса* $\mathfrak{T}_{pr}$*.*

Доказательство. Ввиду [12, табл. 8.43] группа S содержит неразрешимую максимальную подгруппу $X \cong {}^2G_2(3^{(2n+1)/r})$, где r — некоторый простой делитель числа $2n+1$, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из леммы 4 следует, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 13. *Пусть* $S \cong E_6(q)$*. Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из* $\mathfrak{T}_{pr}$*.*

Доказательство. Рассмотрим в S параболическую максимальную подгруппу $X = G_J$, где $J = \{r_1, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ (рис. 1), класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ (см. [3, III]). Ввиду [4, § 2, (2.2)] подгруппа X неразрешима. Из леммы 4 следует, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 14. *Пусть* $S = F_4(q)$*. Тогда группа* S *не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса* $\mathfrak{T}_{pr}$*.*

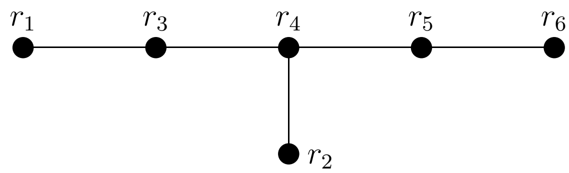


Рис. 1. Диаграмма Дынкина корневой системы типа E_6.

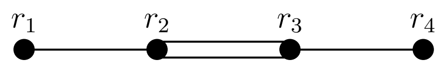


Рис. 2. Диаграмма Дынкина корневой системы типа F_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в S параболическую подгруппу $X = G_J$, где $J = \{r_2, r_3\}$ (рис. 2), класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ [3, III]. Ввиду [4, § 2,(2.2)] подгруппа X неразрешима. Собственные надгруппы X — параболические максимальные в S подгруппы $X_1 = G_{J_1}$, где $J_1 = \{r_1, r_2, r_3\}$, и $X_2 = G_{J_2}$, где $J_2 = \{r_2, r_3, r_4\}$. Из леммы 4 следует, что индексы $|S : X|$, $|S : X_1|$ и $|S : X_2|$ не являются степенями простых чисел. Значит, ввиду предложения $1(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 15. *Пусть $S = G_2(q)$, где $2 \neq q = p^w$ и p — простое число. Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w \neq 1$. Рассмотрим в S подгруппу X, являющуюся централизатором в S полевого автоморфизма простого порядка r группы S. Ввиду [17, определение 2.5.13, предложение 4.9.1] подгруппа X неразрешима, а ввиду [4, § 7, (7.8)] подгруппа X максимальна в S. Из леммы 3 следует, что класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду леммы 4 индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Пусть $w = 1$. Ввиду [12, табл. 8.41,8.42] группа S содержит неразрешимую максимальную подгруппу $X \cong 2^3.PSL_3(2)$, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из леммы 4 следует, что индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия $2(i)$ группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$.

Предложение доказано.

Предложение 16. *Пусть $S = {}^2B_2(2^w)$, где $w > 1$. Тогда*

(i) группа S изоморфна некоторому композиционному фактору группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ тогда и только тогда, когда w — простое число;

(ii) если G — группа из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ такая, что $L = Soc(G) = L_1 \times \ldots \times L_m$, где $L_i \cong {}^2B_2(2^w)$ для всех i и w — простое число, то факторгруппа G/L разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если w — простое число, то ввиду леммы 5 все максимальные подгруппы группы S разрешимы.

Пусть w — непростое число и r — некоторый простой делитель числа w. Рассмотрим в S подгруппу X, являющуюся централизатором в S полевого автоморфизма порядка r группы S. Ввиду [17, определение 2.5.13, предложение 4.9.1] подгруппа X неразрешима, а ввиду [11, табл. 8.16] подгруппа X максимальна в S, и класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду леммы 4 индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Значит, ввиду следствия 2(i) группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$, поэтому справедливо утверждение (i).

Ввиду [12, табл. 8.16] при простом w в группе $S = {}^2B_2(2^w)$ существует максимальная в S подгруппа X порядка $2^{2w}(2^w-1)$, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду леммы 4 индекс $|S : X|$ не является степенью простого числа. Применение следствия 2(ii) завершает доказательство утверждения (ii).

Предложение доказано.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Описание неабелевых композиционных факторов групп из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ следует из предложений 2–16. Покажем, что все неабелевы композиционные факторы группы из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ попарно изоморфны. Пусть G — группа из класса $\mathfrak{T}_{pr}$ такая, что $L = Soc(G) = L_1 \times \ldots \times L_m$, где $L_1, L_2, \ldots, L_m$ изоморфны неабелевой простой группе S. Если $S \ncong PSL_2(7)$, то из предложений 3, 4 и 16 следует, что факторгруппа G/L разрешима. Если $S \cong PSL_2(7)$, то в факторгруппе G/L все максимальные подгруппы имеют примарные индексы. Поэтому ввиду [19, следствие 3] фактор-группа $(G/L)/S(G/L)$ либо тривиальна, либо изоморфна $PSL_2(7)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Ввиду [12, табл. 8.1] в группе $PSL_2(q_0^r)$, где $q_0 \geq 4$ и r — простое число, существует неразрешимая максимальная подгруппа $X = N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого порядка r группы S, индекс которой ввиду леммы 4 не является степенью простого числа. Ввиду [12, табл. 8.2] в группе $PSL_2(q)$, где $q = 9$ или $5 < q$ — простое число такое, что $q^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod 5$, существует неразрешимая максимальная подгруппа $X \cong A_5$, индекс которой ввиду леммы 4 не является степенью простого числа при всех $q \neq 11$. Ввиду [14] в группе $PSL_2(11)$ все неразрешимые максимальные подгруппы имеют примарные индексы.

Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 2. Ввиду леммы 8 достаточно показать, что если $S \cong {}^2B_2(2^w)$, где w — нечетное непростое число, то группа S не изоморфна никакому неабелеву композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_h$. Пусть $r \neq w$ — некоторый простой делитель числа w. Рассмотрим в S подгруппу $X \cong {}^2B_2(2^{w/r})$, являющуюся централизатором в S полевого автоморфизма порядка r группы S. Как и при доказательстве предложения 16 замечаем, что подгруппа X максимальна в S, неразрешима, и класс сопряженности X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из [18, теорема 3.1] следует, что подгруппа X не холлова в S. Значит, ввиду леммы 9 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{T}_h$.

Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность А. С. Кондратьеву за ценные замечания, позволившие улучшить первоначальный текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 1. С. 17–35.
2. **Ведерников В. А.** Конечные группы, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа холлова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 71–82.
3. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2009. 310 с.
4. **Кондратьев А.С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.

5. **Маслова Н. В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.
6. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым линейным, унитарным или симплектическим цоколем // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 189–208
7. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
8. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, в которых все максимальные подгруппы холловы // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.
9. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
10. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
11. **Baryshovets P.P.** Finite nonsolvable groups in which subgroups of nonprimary index are nilpotent or are Shmidt groups // Ukrain. Math. J. 1981. Vol. 33, no. 1. P. 37–39.
12. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
13. **Carter R. W.** Simple groups of Lie Type. London: John Wiley and Sons. 1972. 339 p.
14. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
15. **Giudici M.** Maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2, q)$. Preprint arXiv: math/0703685. URL: http://arxiv.org/pdf/math.GR/0703685.pdf .
16. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Chelsea Publishing Company, 1968. 519 p.
17. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40, no. 3).
18. **F. Gross** Hall subgroups of order not divisible by 3 // Rocky Mount. J. Math. 1993. Vol. 23, no. 2. P. 569—591.
19. **Guralnick R. M.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311.
20. **Kantor W.M.** Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // J. Algebra. 1987. Vol. 106, no. 1. P. 15–45.
21. **Kleidman P., Liebeck M.,** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.
22. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383.
23. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc (2). 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
24. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437.
25. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, № 1. P. 265–284.

Поступила 17.03.2014

Демина Екатерина Николаевна
канд. физ.-мат. наук
старший преподаватель
ГБОУ ВПО г. Москвы "Московский городской педагогический университет"
e-mail: deminaenmf@yandex.ru

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
старший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 517.986.62

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДНЕЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ И ГАНКЕЛЕВЫ ОПЕРАТОРЫ НА КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ[1]

Р. В. Дыба, А. Р. Миротин

Рассматривается обобщение понятия функции ограниченной средней осцилляции и ганкелева оператора на случай компактных абелевых групп с линейно упорядоченной группой характеров. Дается описание пространств функций ограниченной средней осцилляции и функций ограниченной средней осцилляции аналитического типа на таких группах в терминах ограниченности соответствующих операторов Ганкеля в предположении, что группа характеров содержит наименьший положительный элемент.

Ключевые слова: оператор Ганкеля, ограниченный оператор, ограниченная средняя осцилляция, линейно упорядоченная абелева группа, компактная абелева группа.

R. V. Dyba, A. R. Mirotin. Functions of bounded mean oscillation and Hankel operators on compact abelian groups.

Generalizations of the notions of function of bounded mean oscillation and Hankel operator to the case of compact abelian groups with linearly ordered dual group is considered. Spaces of functions of bounded mean oscillation and of bounded mean oscillation of analytic type on such groups are described in terms of the boundedness of corresponding Hankel operators under the assumption that the dual group contains a minimal positive element.

Keywords: Hankel operator, bounded operator, bounded mean oscillation, linearly ordered abelian group, compact abelian group.

1. Введение

Пространство $BMO(G)$ функций ограниченной средней осцилляции на компактной абелевой группе G были определены в работе [1] (относительно классического случая группы вращений окружности см., например, [2]), а ганкелевы операторы на таких группах, рассматриваемые ниже, — в [3]; другая версия рассматривалась в [4] (по поводу классической теории операторов Ганкеля см. [5;6]). Теория этих операторов тесно связана с обобщениями на группы операторов Тёплица (см., например, [7], в частности список литературы), а также операторов Винера — Хопфа [8]. Данная работа посвящена изучению связи теории пространств функций ограниченной средней осцилляции и функций ограниченной средней осцилляции аналитического типа на группе G с теорией операторов Ганкеля в пространствах Харди $H^2(G)$. Основной результат (теорема 2) дает описание пространств $BMO(G)$ и $BMOA(G)$ в терминах ограниченности соответствующих операторов Ганкеля при условии, что группа характеров группы G содержит наименьший положительный элемент (класс таких групп весьма широк и описан в [8, лемма 3.2]). Остальные утверждения работы носят вспомогательный характер. Обобщение на рассматриваемый случай теоремы двойственности Феффермана будет дано в другой работе авторов. При этом будет выполнена программа, для классического случая намеченная в [5, с.189, 190].

[1]Работа выполнена при поддержке второго из авторов Государственной программой научных исследований Республики Беларусь (проект № 20111164).

2. Обозначения и вспомогательные сведения

Всюду ниже G есть нетривиальная связная компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара dx и линейно упорядоченной группой характеров X [9], X_+ — положительный конус в X. Другими словами, X есть дискретная абелева группа, в которой выделена подполугруппа X_+, содержащая единичный характер $\mathbf{1}$ и такая, что $X_+ \cap X_+^{-1} = \{\mathbf{1}\}$ и $X = X_+ \cup X_+^{-1}$. При этом полугруппа X_+ индуцирует в X линейный порядок, согласованный со структурой группы, по правилу $\xi \leq \chi := \chi\xi^{-1} \in X_+$. Далее мы положим $X_- := X \setminus X_+ = X_+^{-1} \setminus \{\mathbf{1}\}$.

Как известно, абелева группа X может быть линейно упорядочена тогда и только тогда, когда она не имеет кручения (см., например, [10]), что, в свою очередь, равносильно тому, что ее группа характеров G компактна и связна [9] (при этом линейный порядок в X, вообще говоря, не единственен). В приложениях в роли X часто выступают подгруппы аддитивной группы $\mathbb{R}^n$, наделенные дискретной топологией, так что G является боровской компактификацией группы X. В частности, в качестве X можно взять группу $\mathbb{Z}^n$, наделенную лексикографическим порядком. В этом случае X имеет наименьший положительный элемент $(0, \ldots, 0, 1)$, а $G = \mathbb{T}^n$ — n-мерный тор. Относительно других примеров см. [7].

Через $\widehat{\varphi}$ мы будем обозначать преобразование Фурье функции φ из $L^1(G)$, т. е.

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_G \varphi(x)\overline{\xi(x)}dx, \ \xi \in X.$$

О п р е д е л е н и е 1. Пространство Харди $H^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ над G определяется следующим образом (см., например, [11]):

$$H^p(G) = \{f \in L^p(G)\colon \widehat{f}(\chi) = 0 \ \forall \chi \in X_-\}.$$

Обозначим через $H^2_-(G)$ ортогональное дополнение подпространства $H^2(G)$ пространства $L^2(G)$. Тогда

$$H^2_-(G) = \{f \in L^2(G)\colon \widehat{f}(\chi) = 0 \ \forall \chi \in X_+\}.$$

При этом X является ортонормированным базисом пространства $L^2(G)$, X_+ — ортонормированным базисом пространства $H^2(G)$, а X_- — ортонормированным базисом пространства $H^2_-(G)$. Через P_+ и P_- мы будем обозначать ортопроекторы из $L^2(G)$ на $H^2(G)$ и $H^2_-(G)$ соответственно.

Напомним определение преобразования Гильберта на группе G. Мы ограничимся случаем линейного порядка на X, принадлежащим С. Бохнеру и Г. Хелсону (см., например, [11, гл. 8]), более общая теория построена в [12, гл. 6; 13]. Для любой функции u из $L^2(G, \mathbb{R})$ существует единственная функция $\widetilde{u}$ из $L^2(G, \mathbb{R})$ такая, что $\widehat{\widetilde{u}}(1) = 0$ и $u + i\widetilde{u} \in H^2(G)$. Функция $\widetilde{u}$ называется *гармонически сопряженной с u*. Линейное отображение $\mathcal{H}$, получаемое в результате продолжения отображения $u \mapsto \widetilde{u}$ на (комплексное) $L^2(G)$ по линейности, называется *преобразованием Гильберта* на группе G. Этот оператор ограничен в $L^2(G)$.

Доказательство следующей леммы можно найти в [12, лемма 6.5.5] или [13, лемма 5].

Лемма 1. *Если $u \in L^2(G)$, то $\widehat{\widetilde{u}} = -i\mathrm{sgn}_{X_+} \cdot \widehat{u}$, где $\mathrm{sgn}_{X_+} := 1_{X_+} - 1_{X_+^{-1}}$.*

3. Некоторые свойства пространств функций ограниченной средней осцилляции на группе G

Следующие определения мотивированы известной теоремой Ч. Феффермана [14] (см. также [5, с. 189]).

О п р е д е л е н и е 2. Определим пространства $BMO(G)$ *функций ограниченной средней осцилляции* и $BMOA(G)$ *функций ограниченной средней осцилляции аналитического типа* на группе G следующим образом:

$$BMO(G) := \{f + \widetilde{g} : f, g \in L^\infty(G)\},$$

$$BMOA(G) := BMO(G) \cap H^1(G),$$

$$\|\varphi\|_{BMO} := \inf\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty : \varphi = f + \widetilde{g}, f, g \in L^\infty(G)\} \ (\varphi \in BMO(G)).$$

Норма в пространстве $BMOA(G)$ определяется так же, как и в $BMO(G)$.

В представленном ниже предложении вложения функциональных пространств понимаются в смысле [15, с. 124].

Предложение 1. *Имеют место следующие непрерывные вложения пространств:*

$$L^\infty(G) \subset BMO(G) \subset \bigcap_{1<p<\infty} L^p(G).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in BMO(G)$. По определению она представима в виде $\varphi = f + \widetilde{g}$, где $f, g \in L^\infty(G) \subset L^p(G)$ при всех $p \in (1; \infty)$. Кроме того, для этих p имеем $\mathcal{H}g = \widetilde{g} \in L^p(G)$ и оператор $\mathcal{H} : L^p(G) \to L^p(G)$ ограничен (теорема М. Рисса; см., например, [11, теорема 8.7.2]). Тот факт, что $L^\infty(G)$ содержится в $BMO(G)$, сразу вытекает из определения 2. Таким образом, $L^\infty(G) \subset BMO(G) \subset \bigcap_{1<p<\infty} L^p(G)$.

Вложение $L^\infty(G) \to BMO(G)$ непрерывно в силу очевидного неравенства $\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_\infty$ $(f \in L^\infty(G))$. Рассмотрим вложение $BMO(G) \to L^p(G)$. Для любого $p \in (1, \infty)$ в силу вышеупомянутой теоремы М. Рисса для некоторой константы K_p при всех $\varphi \in BMO(G), \varphi = f + \widetilde{g}, f, g \in L^\infty(G)$ справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_p \leq \|f\|_p + \|\widetilde{g}\|_p \leq \|f\|_\infty + K_p\|g\|_\infty \leq (1 + K_p)(\|f\|_\infty) + \|g\|_\infty).$$

Переходя к инфимуму по всевозможным разложениям функции φ, получим непрерывность вложения $BMO(G)$ в $L^p(G)$.

Предложение 2. *Пространства $BMO(G)$ и $BMOA(G)$ являются банаховыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим абсолютно сходящийся в $BMO(G)$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n, \quad h_n \in BMO(G). \tag{3.1}$$

Согласно определению нормы пространства $BMO(G)$ для любого n существуют функции $f_n, g_n \in L^\infty$ такие, что $h_n = f_n + \widetilde{g_n}$ и

$$\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty < \|h_n\|_{BMO} + \frac{1}{2^n}.$$

Поэтому числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty)$, а вслед за ним и ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_\infty$ сходятся. Значит, в силу полноты пространства $L^\infty(G)$ ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} g_n \tag{3.2}$$

сходятся в нем, т. е. существуют функции $f, g \in L^\infty(G)$ такие, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{N} f_k - f \right\|_\infty = 0, \ \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{N} g_k - g \right\|_\infty = 0.$$

Докажем, что ряды (3.2) сходятся в пространстве $BMO(G)$. По предложению 1 $L^\infty(G) \subset BMO(G)$, и $\|f\|_{BMO} \le \|f\|_\infty$ для любой функции $f \in L^\infty(G)$. Поэтому

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N} f_k - f\Big\|_{BMO} \le \Big\|\sum_{k=0}^{N} f_k - f\Big\|_\infty \to 0.$$

Следовательно, $\sum_{k=0}^N f_k \to f$ в пространстве $BMO(G)$. Аналогично для второго ряда. Далее, поскольку $\mathcal{H}L^\infty(G) \subset BMO(G)$ и $\|\mathcal{H}g\|_{BMO} \le \|g\|_\infty$ для любой функции $g \in L^\infty(G)$, то

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N} \widetilde{g_k} - \widetilde{g}\Big\|_{BMO} = \Big\|\mathcal{H}\Big(\sum_{k=0}^{N} g_k - g\Big)\Big\|_{BMO} \le \Big\|\sum_{k=0}^{N} g_k - g\Big\|_\infty \to 0,$$

а значит, $\sum_{k=0}^N \widetilde{g_k} \to \widetilde{g}$ в пространстве $BMO(G)$. Так как $\sum_{n=0}^N h_n = \sum_{k=0}^N f_k + \sum_{k=0}^N \widetilde{g_k}$, то отсюда следует сходимость ряда (3.1) в этом пространстве. Согласно критерию полноты нормированных пространств, пространство $BMO(G)$ является банаховым.

Теперь рассмотрим абсолютно сходящийся в $BMOA(G)$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n, \quad h_n \in BMOA(G). \tag{3.3}$$

Как показано выше, ряд (3.3) сходится к функции $h \in BMO(G)$. Заметим, что в силу предложения 1 $BMO(G) \subset L^2(G) \subset L^1(G)$, причем ряд (3.3) сходится в $L^2(G)$. Из определения $BMOA(G)$ следует, что $\widehat{h_n}(\chi) = 0$ для всех $\chi \in X_-$, $n \ge 0$. Тогда для всех $\chi \in X_-$ имеем по теореме Планшереля $\widehat{h}(\chi) = \sum_{n=0}^\infty \widehat{h_n}(\chi) = 0$, а потому $h \in BMOA(G)$. Следовательно, $BMOA(G)$ банахово, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Для любой функции ψ из $L^2(G)$ верно равенство*

$$\widetilde{\psi} = -i(P_+\psi - P_-\psi - \widehat{\psi}(\mathbf{1})).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Планшереля $\psi = \sum_{\chi\in X} \widehat{\psi}(\chi)\chi$ (ряд сходится в $L^2(G)$). Положим $\varphi := -i(P_+\psi - P_-\psi - \widehat{\psi}(\mathbf{1}))$. Тогда имеем для любого $\xi \in X$ с учетом ортогональности характеров

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_G \varphi(x)\overline{\xi(x)}dx = -i\sum_{\chi\in X_+}\widehat{\psi}(\chi)\int_G \chi(x)\overline{\xi(x)}dx$$

$$+\, i\sum_{\chi\in X_-}\widehat{\psi}(\chi)\int_G \chi(x)\overline{\xi(x)}dx + i\widehat{\psi}(\mathbf{1})\int_G \overline{\xi(x)}dx$$

$$= -i1_{X_+}(\xi)\widehat{\psi}(\xi) + i1_{X_-\setminus\{\mathbf{1}\}}(\xi)\widehat{\psi}(\xi) + i1_{\{\mathbf{1}\}}(\xi)\widehat{\psi}(\xi) = -i\mathrm{sgn}_{X_+}\widehat{\psi}(\xi).$$

Так как $\widehat{\widetilde{\psi}} = -i\mathrm{sgn}_{X_+}\widehat{\psi}$ по лемме 1, то $\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ для всех $\xi \in X$ и, значит, $\widetilde{\psi} = \varphi$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$BMOA(G) = BMO(G) \cap H^2(G).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как G компактно, то $L^2(G) \subset L^1(G)$, а значит, $H^2(G) \subset H^1(G)$. Поэтому $BMO(G) \cap H^2(G) \subset BMOA(G)$. С другой стороны, если $\varphi \in BMOA(G)$, то $\varphi \in BMO(G) \subset L^2(G)$ и $\widehat{\varphi}(\chi) = 0$ для всех $\chi \in X_-$. Следовательно, $\varphi \in BMO(G) \cap H^2(G)$. Лемма доказана.

Предложение 3. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) $BMO(G) = P_- L^\infty(G) + P_+ L^\infty(G)$, *причем*

$$\|\varphi\|_{*BMO} := \inf\{\max(\|f_1\|_\infty, \|g_1\|_\infty) : \varphi = P_- f_1 + P_+ g_1, f_1, g_1 \in L^\infty(G)\}$$

— *эквивалентная норма*;

(2) $BMOA(G) = P_+ L^\infty(G)$, *причем*

$$\|\varphi\|_{*BMOA} := \inf\{\|g_1\|_\infty : \varphi = P_+ g_1,\ g_1 \in L^\infty(G)\}$$

— *эквивалентная норма.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Рассмотрим произвольную функцию φ из $BMO(G)$, $\varphi = f + \widetilde{g}, f, g \in L^\infty(G)$. В силу леммы 2

$$\varphi = P_+ f + P_- f - i(P_+ g - P_- g - \widehat{g}(\mathbf{1})) = P_+(f - ig + i\widehat{g}(\mathbf{1})) + P_-(f + ig) = P_+ g_1 + P_- f_1,$$

где функции $g_1 = f - ig + i\widehat{g}(\mathbf{1})$ и $f_1 = f + ig$ принадлежат $L^\infty(G)$. Поскольку $\|f_1\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \|g_1\|_\infty \leq 2(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$, то $\|\varphi\|_{*BMO} \leq 2\|\varphi\|_{BMO}$.

Обратно, рассмотрим произвольную функцию

$$\varphi \in P_+ L^\infty(G) + P_- L^\infty(G), \varphi = P_- f_1 + P_+ g_1.$$

Из леммы 2 следует, что

$$P_- h = \frac{1}{2}(h - i\widetilde{h} - \widehat{h}(\mathbf{1})) \text{ и } P_+ h = \frac{1}{2}(h + i\widetilde{h} + \widehat{h}(\mathbf{1}))$$

для всех $h \in L^\infty(G)$. Поэтому

$$\varphi = P_- f_1 + P_+ g_1 = \frac{1}{2}(f_1 - i\widetilde{f_1} - \widehat{f_1}(\mathbf{1})) + \frac{1}{2}(g_1 + i\widetilde{g_1} + \widehat{g_1}(\mathbf{1}))$$

$$= \frac{1}{2}(f_1 + g_1 - \widehat{f_1}(\mathbf{1}) + \widehat{g_1}(\mathbf{1})) + \frac{1}{2}(i\widetilde{g_1} - i\widetilde{f_1}) = f + \widetilde{g} \in BMO(G),$$

где $f = \frac{1}{2}(f_1 + g_1 - \widehat{f_1}(\mathbf{1}) + \widehat{g_1}(\mathbf{1}))$ и $g = \frac{1}{2}(ig_1 - if_1), f, g \in L^\infty(G)$.

Далее,

$$\|\varphi\|_{BMO} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leq \frac{3}{2}(\|f_1\|_\infty + \|g_1\|_\infty) \leq 3\|\varphi\|_{*BMO}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{1}{3}\|\varphi\|_{BMO} \leq \|\varphi\|_{*BMO} \leq 2\|\varphi\|_{BMO},$$

и первое утверждение доказано.

(2) Второе равенство следует из первого и леммы 3:

$$BMOA(G) = (P_- L^\infty(G) + P_+ L^\infty(G)) \cap H^2(G) = P_+ L^\infty(G).$$

А так как $\|\varphi\|_{*BMO} = \|\varphi\|_{*BMOA}$ при $\varphi \in BMOA(G)$, утверждение о нормах следует из (1) (впрочем, как и в случае (1), легко проверить напрямую, что

$$\frac{3}{2}\|\varphi\|_{BMO} \leq \|\varphi\|_{*BMOA} \leq 2\|\varphi\|_{BMO}).$$

Предложение доказано.

Следствие 1. *Справедливо равенство* $BMOA(G) = P_+ BMO(G)$.

Лемма 4. *Если $\varphi \in BMO(G)$, то и $\overline{\varphi} \in BMO(G)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in BMO(G)$. Тогда по предложению 3 для некоторых $f, g \in L^\infty(G)$ имеем

$$\varphi = P_+ g + P_- f = \sum_{\chi \in X_+} a_\chi \chi + \sum_{\xi \in X_-} b_\xi \xi,$$

где $f = \sum_{\xi \in X} b_\xi \xi, g = \sum_{\chi \in X} a_\chi \chi$ — разложения Фурье. Поэтому, снова воспользовавшись предложением 3, имеем

$$\overline{\varphi} = \sum_{\chi \in X_+} \overline{a_\chi} \bar{\chi} + \sum_{\xi \in X_-} \overline{b_\xi} \bar{\xi} = \sum_{\chi \in X_+ \setminus \{\mathbf{1}\}} \overline{a_\chi} \bar{\chi} + \overline{a_1} \mathbf{1} + \sum_{\xi \in X_-} \overline{b_\xi} \bar{\xi} = P_- f_1 + P_+ g_1 \in BMO(G),$$

где $f_1 = \sum_{\xi \in X} \overline{a_\xi} \xi, g_1 = \overline{a_1} \mathbf{1} + \sum_{\chi \in X \setminus \{\mathbf{1}\}} \overline{b_\chi} \chi, f_1, g_1 \in L^\infty(G)$. Лемма доказана.

4. Связь с операторами Ганкеля

Определение 3. Пусть k — функция на X_+. *Ганкелевой формой на X_+ с ядром k* называют комплексную билинейную форму вида

$$A(a, b) = \sum_{\chi, \eta \in X_+} k(\chi \eta) a(\chi) b(\eta),$$

определенную первоначально на финитных функциях на X_+.

Далее важную роль будет играть следующий результат, обобщающий классическую теорему Нехари [16].

Теорема 1 (Нехари — Вонга [17]). *Ганкелева форма с ядром k на X_+ ограничена тогда и только тогда, когда ее ядро имеет вид $k(\chi) = \widehat{\varphi}(\overline{\chi})$, $\chi \in X_+$, где $\varphi \in L^\infty(G)$. При этом $\|\varphi\|_\infty \le M$, где M — константа ограниченности формы A. Кроме того, норма формы A равняется $\|\varphi\|_\infty$ для некоторой функции φ, удовлетворяющей указанным выше условиям.*

Нам понадобятся две реализации операторов Ганкеля.

Определение 4. Оператор $\Gamma : l_2(X_+) \to l_2(X_+)$, определенный первоначально на финитных функциях на X_+, называется *ганкелевым* (*оператором Ганкеля*) *в* $l_2(X_+)$, если существует функция $a = a_\Gamma$ на X_+ такая, что для всех $\chi, \xi \in X_+$ выполняется равенство

$$\langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, 1_{\{\xi\}} \rangle = a(\chi \xi)$$

($1_{\{\xi\}}$ — индикатор одноточечного подмножества $\{\xi\} \subset X$; угловые скобки обозначают скалярное произведение в $l_2(X_+)$).

Определение 5. Пусть $\varphi \in L^2(G)$. *Оператором Ганкеля (ганкелевым оператором) в $H^2(G)$ с символом φ* назовем оператор $H_\varphi : H^2(G) \to H^2_-(G)$, определяемый первоначально на пространстве тригонометрических полиномов аналитического типа (линейных комбинациях характеров из X_+) равенством

$$H_\varphi f = P_-(\varphi f).$$

Лемма 5. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1.*

(а) *Справедливо равенство $X_- = X_+^{-1} \chi_1^{-1}$. Следовательно, отображения*

$$i : \{1_{\{\chi\}}\}_{\chi \in X_+} \to X_+ : 1_{\{\chi\}} \mapsto \chi, \; j : \{1_{\{\chi\}}\}_{\chi \in X_+} \to X_- : 1_{\{\chi\}} \mapsto \chi^{-1} \chi_1^{-1}$$

продолжаются единственным образом до изоморфизмов гильбертовых пространств

$$i : l_2(X_+) \to H^2(G), \; j : l_2(X_+) \to H^2_-(G).$$

(б) *Оператор H_φ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ унитарно эквивалентен ограниченному ганкелеву оператору в $l_2(X_+)$ и обратно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) Так как $X_+ \setminus \chi_1 X_+ = \{\mathbf{1}\}$, то $\chi_1 X_+ = X_+ \setminus \{\mathbf{1}\}$; первое утверждение получается отсюда переходом к обратным элементам. Поэтому, когда χ пробегает X_+, $\chi^{-1}\chi_1^{-1}$ пробегает X_-, а потому j (и, очевидно, i) является биекциями. Второе утверждение теперь следует из теоремы Рисса — Фишера.

(б) Положим $\Gamma = j^{-1} H_\varphi i$. Тогда этот оператор является ганкелевым в $l_2(X_+)$. Действительно, для любых $\chi, \xi \in X_+$

$$\langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, 1_{\{\xi\}} \rangle_{l_2} = \langle j^{-1} P_-(\varphi\chi), j^{-1}(\overline{\xi}\chi_1^{-1}) \rangle_{l_2} = \langle \varphi\chi, P_-(\overline{\xi}\chi_1^{-1}) \rangle_{L^2}$$

$$= \langle \varphi\chi, \overline{\xi}\chi_1^{-1} \rangle_{L^2} = \widehat{\varphi}(\overline{\chi\xi}\chi_1^{-1}) = a_\Gamma(\chi\xi),$$

где $a_\Gamma(\chi) := \widehat{\varphi}(\overline{\chi}\chi_1^{-1}),\ \chi \in X_+$.

Если еще $\varphi \in L^\infty(G)$, то оператор Γ ограничен вслед за H_φ.

Обратно, если Γ есть ограниченный ганкелев оператор в $l_2(X_+)$, то положим $A = j\Gamma i^{-1}$. Тогда $\langle A\chi, \bar{\xi} \rangle = \langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, j^{-1}\xi^{-1} \rangle = \langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, 1_{\{\zeta\}} \rangle$, где $\chi \in X_+, \xi \in X_+ \setminus \{\mathbf{1}\},\ \xi = \zeta\chi_1,\ \zeta \in X_+$. Отсюда, $\langle A\chi, \bar{\xi} \rangle = a(\chi\zeta) = a(\chi\xi\chi_1^{-1})$ зависит лишь от $\chi\xi$, а потому, снова в силу следствия теоремы 2.1 из [3], оператор A имеет вид H_φ, где $\varphi \in L^\infty(G)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Оператор Ганкеля Γ в $l_2(X_+)$ ограничен тогда и только тогда, когда существует функция $\psi \in L^\infty(G)$ такая, что $a_\Gamma(\chi) = \widehat{\psi}(\chi)$ для любого $\chi \in X_+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим билинейную форму (f, g — финитные функции на X_+)

$$A(f, g) := \langle \Gamma f; \bar{g} \rangle.$$

Поскольку $f = \sum_{\chi \in X_+} f(\chi) 1_{\{\chi\}}, g = \sum_{\xi \in X_+} g(\xi) 1_{\{\xi\}}$, то

$$\langle \Gamma f, \bar{g} \rangle = \sum_{\chi, \xi \in X_+} a_\Gamma(\chi\xi) f(\chi) g(\xi),$$

а значит, форма A является ганкелевой. По теореме Нехари — Вонга форма A, а вместе с ней и оператор Γ ограничены тогда и только тогда, когда существует функция $\psi_1 \in L^\infty(G)$ такая,что для любого $\chi \in X_+$ выполняется равенство $a_\Gamma(\chi) = \widehat{\psi_1}(\bar{\chi})$, и осталось положить в этой формуле $\psi(x) = \psi_1(x^{-1})$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть в группе X существует наименьший положительный элемент. Имеют место следующие равенства:*

$$BMOA(G) = \{\varphi \in H^2(G) \colon H_{\overline{\varphi}} \text{ ограничен}\}, \tag{4.1}$$

$$BMO(G) = \{\varphi \in L^2(G) \colon H_{\overline{\varphi}}, H_\varphi \text{ ограничены}\}. \tag{4.2}$$

Кроме того, формулы

$$\|\varphi\|_H := \|H_{\overline{\varphi}}\| + \|H_\varphi\|,\ \|\varphi\|'_H := \|H_{\overline{\varphi}}\|$$

задают полунормы на пространствах $BMO(G)$ и $BMOA(G)$ соответственно, нулевые подпространства которых совпадают с пространством $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$ постоянных функций, причем нормы, отвечающие этим полунормам после соответствующей факторизации, эквивалентны норме $\|\cdot\|_{BMO}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на несколько шагов.

1. Докажем сначала, что *для функции $\varphi \in L^2(G)$ оператор H_φ ограничен тогда и только тогда, когда $P_-\varphi \in BMO(G)$*. Для этого воспользуемся обозначениями и результатами, содержащимися в лемме 5 и ее доказательстве. Сперва покажем, что H_φ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\text{существует функция } \psi_1 \in L^\infty(G) \text{ такая, что } \widehat{\psi_1}|X_- = \widehat{\varphi}|X_-. \tag{$*$}$$

В самом деле, оператор H_φ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор $\Gamma = j^{-1}H_\varphi i$. В доказательстве утверждения (б) леммы 5 показано, что последний оператор является ганкелевым в $l_2(X_+)$. Значит, по лемме 6 оператор Γ ограничен тогда и только тогда, когда существует функция $\psi \in L^\infty(G)$ такая, что $\widehat{\psi}(\chi) = a_\Gamma(\chi) = \widehat{\varphi}(\overline{\chi}\chi_1^{-1})$ для всех $\chi \in X_+$ (последнее равенство установлено в доказательстве леммы 5). Положим $\psi_1(x) = \chi_1^{-1}(x)\psi(x^{-1})$. Тогда $\widehat{\psi_1}(\bar{\chi}\chi_1^{-1}) = \widehat{\psi}(\chi)$ для любого $\chi \in X_+$, а потому $\widehat{\psi_1}(\bar{\chi}\chi_1^{-1}) = \widehat{\varphi}(\bar{\chi}\chi_1^{-1})$. Таким образом, равенство $\widehat{\psi}(\chi) = \widehat{\varphi}(\overline{\chi}\chi_1^{-1})$ для всех $\chi \in X_+$ эквивалентно равенству $\widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ для всех $\xi \in X_-$ и равносильность ограниченности оператора H_φ и условия $(*)$ доказана.

Докажем теперь, что $P_-\varphi \in BMO(G)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $(*)$.

Пусть выполнено условие $(*)$. Из леммы 2 следует, что

$$P_-\psi_1 = (\psi_1 - \widehat{\psi_1}(\mathbf{1}))/2 + \widetilde{(i\psi_1/2)} \in BMO(G).$$

Это обуславливает необходимость, поскольку

$$P_-\psi_1 = \sum_{\xi \in X_-} \widehat{\psi_1}(\xi)\xi = \sum_{\xi \in X_-} \widehat{\varphi}(\xi)\xi = P_-\varphi.$$

Пусть теперь $P_-\varphi \in BMO(G)$. Тогда $P_-\varphi = f + \widetilde{g}$, где $f, g \in L^\infty(G)$. Снова применяя лемму 2, имеем

$$P_-\varphi = P_-f + P_-(-i(P_+g - P_-g - \widehat{g}(\mathbf{1}))) = P_-(f + ig + i\widehat{g}(\mathbf{1})).$$

Рассмотрим функцию $\psi_1 = f + ig + i\widehat{g}(\mathbf{1}) \in L^\infty(G)$. Так как $P_-\psi_1 = P_-\varphi$, то $\widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ для всех $\xi \in X_-$, т. е. условие $(*)$ выполняется.

2. Докажем равенство (4.1). Пусть $\varphi \in BMOA(G)$. Из лемм 3 и 4 следует, что $\varphi \in H^2(G)$, причем $\overline{\varphi} \in BMO(G)$. Тогда по предложению 3 $\overline{\varphi} = P_+f + P_-g$ для некоторых $f, g \in L^\infty(G)$, а значит, $P_-\overline{\varphi} = P_-g \in BMO(G)$. Таким образом, по доказанному на шаге 1 оператор $H_{\overline{\varphi}}$ ограничен и, стало быть,

$$BMOA(G) \subset \{\varphi \in H^2(G) \colon H_{\overline{\varphi}} \text{ ограничен}\}.$$

Обратно, рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in H^2(G)$, для которой оператор $H_{\overline{\varphi}}$ ограничен. По доказанному на шаге 1 $P_-\overline{\varphi} \in BMO(G)$. Поскольку $\varphi \in H^2(G)$, то $\varphi = \sum_{\chi \in X_+} a_\chi \chi$. Тогда

$$\overline{\varphi} = \sum_{\chi \in X_+} \overline{a_\chi}\bar{\chi} = \overline{a_1}\mathbf{1} + P_-\overline{\varphi} \in BMO(G).$$

По лемме 4 $\varphi \in BMO(G)$, что с учетом леммы 3 завершает доказательство равенства (4.1).

3. Пусть теперь $\varphi \in BMO(G)$. По предложению 1 $\varphi \in L^2(G)$. В то же время из предложения 3 следует, что

$$BMO(G) = BMOA(G) + \overline{BMOA(G)}.$$

Если $\varphi = f_1 + \overline{f_2}$, $f_1, f_2 \in BMOA(G)$, то $H_{\overline{\varphi}} = H_{\overline{f_1}} + H_{f_2} = H_{\overline{f_1}}$ и аналогично $H_\varphi = H_{\overline{f_2}}$, причем из равенства (4.1) следует, что эти операторы ограничены. Следовательно,

$$BMO(G) \subset \{\varphi \in L^2(G) \colon H_{\overline{\varphi}}, H_\varphi \text{ ограничены}\}.$$

Обратно, пусть $\varphi \in L^2(G)$ и операторы $H_{\overline{\varphi}}, H_\varphi$ ограничены. Так как $\varphi = f_1 + f_2'$, где $f_1 \in H^2(G)$ и $f_2' \in H^2_-(G)$, то $H_\varphi = H_{f_1} + H_{f_2'} = H_{\overline{f_2}}$, где $f_2 = \overline{f_2'} \in H^2(G)$. Так как оператор H_φ ограничен, то, снова применяя (4.1), получаем, что $f_2 \in BMOA(G)$. Аналогично доказывается, что $f_1 \in BMOA(G)$. Следовательно, $\varphi \in BMOA(G) + \overline{BMOA(G)} = BMO(G)$, и равенство (4.2) доказано.

4. Поскольку $\|\varphi\|_H = \|\varphi\|'_H$ при $\varphi \in BMOA(G)$, достаточно доказать эквивалентность норм $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_{BMO}$. Ясно, что $\|\cdot\|_H$ является полунормой. Далее, если $\|\varphi\|_H = 0$, то $P_-\overline{\varphi} = P_-\varphi = 0$, что влечет $\varphi = const$. Обратное утверждение очевидно. Ниже для φ из $BMO(G)$ через $\dot{\varphi} := \varphi + \mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$ мы обозначаем элемент факторпространства $BMO(G)/\mathbb{C}\cdot\mathbf{1}$. Пусть $\varphi = P_-f + P_+g$, где $f, g \in L^\infty(G)$ (предложение 3). Используя разложения в ряд Фурье по характерам в $L^2(G)$, легко проверить, что

$$\overline{\varphi} = P_+\overline{f} + P_-\overline{g} + (\widehat{\overline{g}}(\mathbf{1}) - \widehat{\overline{f}}(\mathbf{1}))\mathbf{1}.$$

Следовательно, $P_-\overline{\varphi} = P_-\overline{g}$. Поэтому

$$\|\varphi\|_H = \|H_{P_-\overline{\varphi}}\| + \|H_{P_-\varphi}\| = \|H_{P_-\overline{g}}\| + \|H_{P_-f}\|$$

$$= \|H_{\overline{g}}\| + \|H_f\| \leq \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\max(\|g\|_\infty, \|f\|_\infty).$$

Переходя к инфимуму по f, g, получаем с учетом предложения 3, что $\|\varphi\|_H \leq 2\|\varphi\|_{*BMO} \leq 4\|\varphi\|_{BMO}$. Отсюда следует, что для любого комплексного c имеем $\|\dot{\varphi}\|_H = \|\varphi + c\cdot\mathbf{1}\|_H \leq 4\|\varphi + c\cdot\mathbf{1}\|_{BMO}$, а стало быть,

$$\|\dot{\varphi}\|_H \leq 4\inf_{c\in\mathbb{C}} \|\varphi + c\cdot\mathbf{1}\|_{BMO} = 4\|\dot{\varphi}\|_{BMO}.$$

Ввиду предложения 2 для доказательства эквивалентности норм теперь достаточно показать, что пространство $(BMO(G), \|\cdot\|_H)$ (а потому и $(BMO(G)/\mathbb{C}\cdot\mathbf{1}, \|\cdot\|_H)$) банахово. Для этого рассмотрим фундаментальную последовательность $(\varphi_n) \subset (BMO(G), \|\cdot\|_H)$. Последовательность операторов $(H_{\overline{\varphi}_n})$ равномерно сходится к некоторому ограниченному оператору $A : H^2(G) \to H^2_-(G)$, и при этом последовательность операторов (H_{φ_n}) равномерно сходится к некоторому ограниченному оператору $B : H^2(G) \to H^2_-(G)$. Как отмечено выше, если $\varphi_n = P_-f_n + P_+g_n,\ f_n, g_n \in L^\infty(G)$, то $P_-\overline{\varphi_n} = P_-\overline{g}_n$, а потому $H_{\overline{\varphi}_n} = H_{\overline{g}_n}$. В силу обобщения теоремы Нехари из [3] для любого $\chi \in X_+$ выполняется равенство $H_{\overline{g}_n}S_\chi = P_-S_\chi H_{\overline{g}_n}$ $(S_\chi : L^2(G) \to L^2(G), f \mapsto \chi f)$. В пределе получаем $AS_\chi = P_-S_\chi A$ для любого $\chi \in X_+$, откуда, снова в силу обобщенной теоремы Нехари, $A = H_g$ для некоторой функции $g \in L^\infty(G)$. Аналогично $B = H_{\overline{g}_1}$ для некоторой функции $g_1 \in L^\infty(G)$. Непосредственно проверяется, что для сопряженных операторов справедливо равенство $H^*_{\varphi_n} = P_+H_{\overline{\varphi}_n}|H^2_-(G)$. Отсюда следует, что $B^* = P_+A|H^2_-(G)$, т.е. $H^*_{\overline{g_1}} = P_+H_g|H^2_-(G) = H^*_{\overline{g}}$. Значит, $H_{\overline{g}} = H_{\overline{g_1}} = B$. При этом

$$\|\varphi_n - \overline{g}\|_H = \|H_{\overline{\varphi}_n} - H_g\| + \|H_{\varphi_n} - H_{\overline{g}}\| = \|H_{\overline{\varphi}_n} - A\| + \|H_{\varphi_n} - B\| \to 0$$

$(n \to \infty)$, что завершает доказательство эквивалентности норм для $BMO(G)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть в группе X существует наименьший положительный элемент, $\varphi \in L^2(G)$. Оператор H_φ ограничен тогда и только тогда, когда $H_\varphi = H_g$ для некоторой функции $g \in L^\infty(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как показано на шаге 1 доказательства теоремы 1, оператор H_φ ограничен тогда и только тогда, когда $P_-\varphi \in BMO(G)$. В силу предложения 3 $P_-\varphi = P_-g$ для некоторой функции $g \in L^\infty(G)$, а потому $H_\varphi = H_g$. Обратное утверждение очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дыба Р.В., Миротин А.Р.** Свойства операторов Ганкеля над положительными конусами линейно упорядоченных абелевых групп // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф. (Минск, 5-9 ноября 2012 г.) / Ин-т математики НАН Беларуси. Ч. 1. Минск, 2012. С. 37–38.
2. **Гарнетт Дж.** Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.

3. **Дыба Р.В.** Теорема Нехари на компактных абелевых группах с линейно упорядоченной группой характеров // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 3 (8). С. 57–60. URL: http://pfmt.gsu.by (дата обращения: 22.07.2013).
4. **Yan Chaozong, Chen Xiaoman, Guo Kunyu.** Hankel operators and Hankel algebras // Chin. Ann. Math. Ser. B. 1998. No. 1. P. 65–76.
5. **Nikolski N.K.** Operators, functions, and systems: An easy reading: in 2 vol. Providence: Amer. Math. Soc., 2002. Vol. I. 461 p.
6. **Пеллер В.В.** Операторы Ганкеля и их приложения. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 1028 с.
7. **Миротин А.Р.** Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 5. С. 101–116.
8. **Adukov V.** Wiener-Hopf operators on a subsemigroup of a discrete torsion free abelian group // Int. Eq. Oper. Th. 1993. Vol. 16, no. 3. P. 305–332.
9. **Понтрягин Л.С.** Непрерывные группы. 2-е изд. М.: ГИТТЛ, 1954. 515 с.
10. **Кокорин А.И., Копытов В.М.** Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972. 199 с.
11. **Rudin W.** Fourier analysis on groups. New York; London: Intersciense Publishers, 1962. 285 p.
12. **Миротин А.Р.** Гармонический анализ на абелевых полугруппах. - Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. 207 с.
13. **Mirotin A.R.** On Hilbert transform in context of locally compact abelian groups // Int. J. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 51, no. 4. P. 597–608.
14. **Fefferman C.** Characterization of bounded mean oscillation // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77. P. 587–588.
15. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
16. **Nehari Z.** On bounded bilinear forms // Ann. of Math. (2). 1957. Vol. 65, no. 1. P. 153–162.
17. **Wang J.** Note on theorem of Nehari on Hankel forms // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 24, no. 1. P. 103–105.

Дыба Роман Викторович
аспирант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: rdybabox@yandex.by

Поступила 15.07.2013

Миротин Адольф Рувимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: amirotin@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 519.856

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ДОПУСТИМОГО АФФИННО-МАСШТАБИРУЮЩЕГО МЕТОДА ДЛЯ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Г. Жадан

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается прямой допустимый аффинно-масштабирующий метод, в котором точки итерационного процесса могут принадлежать границе допустимого множества.

Ключевые слова: линейная задача полуопределенного программирования, прямой аффинно-масштабирующий метод, наискорейший спуск.

V. G. Zhadan. On a variant of a feasible affine scaling method for semidefinite programming.

A linear problem of semidefinite programming is considered. For its solution, a primal feasible affine scaling method is proposed, in which the points of the iterative process may belong to the boundary of the feasible set.

Keywords: linear semidefinite programming problem, primal affine scaling method, steepest descent.

Введение

Линейные задачи полуопределенного программирования представляют собой важный раздел линейной оптимизации [1]. Данные задачи интенсивно изучаются начиная с 90-х годов прошлого века [2]. За это время были разработаны различные численные методы их решения, главным образом аффинно-масштабирующего типа (прямые, двойственные и прямо-двойственные). В частности, в [3] был предложен один из вариантов прямого метода внутренней точки, который также можно трактовать как аффинно-масштабирующий. Было показано, что метод обладает локальной сходимостью. Если стартовая точка в таком методе берется из относительной внутренности допустимого множества, то метод при надлежащем выборе шага перемещения ведет себя как релаксационный, т. е. все последующие точки принадлежат допустимому множеству и значение целевой функции убывает от итерации к итерации. Поэтому возникает идея брать максимально возможный шаг, чтобы увеличить эффективность метода и сделать его глобально сходящимся. Однако такая стратегия выбора шага приводит к тому, что на какой-то итерации точка может оказаться на границе допустимого множества и направление перемещения, подсчитанное в этой точке, выводит за его пределы. Выходом из этой ситуации может служить изменение правых частей в граничных точках, которое не позволяло бы траекториям покидать допустимое множество. Возможный подход к такому изменению был рассмотрен в [4], где направление перемещения строилось в виде суммы двух направлений, одно из которых принадлежит минимальной грани конуса положительно полуопределенных матриц, содержащей текущую точку, а второе — сопряженной грани. В настоящей работе также используется идея разбиения направления на две составляющие. Однако теперь в качестве второго направления берется собственный вектор двойственной невязки, подсчитанный в этой точке. Данное изменение правых частей является в некотором смысле обобщением подхода, применявшегося в [5] для задач линейного программирования.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-00805), программы ведущих научных школ (НШ-4640.2014.1) и программы Президиума РАН П-18.

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся некоторые сведения о геометрических свойствах допустимого множества. Основной вариант допустимого метода описывается в разд. 2. В разд. 3 рассматривается вариант метода, когда направление перемещения принадлежит минимальной грани. Совместное направление, при котором возможен сход с минимальной грани, строится в разд. 4. Наконец, в разд. 5 показывается, что траектория при таком выборе направления перемещения, а также шага перемещения из условия наискорейшего спуска не покидает допустимое множество и сходится глобально.

1. Задача полуопределенного программирования

Пусть $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n. Пусть, кроме того, $\mathbb{S}^n_+$ и $\mathbb{S}^n_{++}$ — подмножества из $\mathbb{S}^n$, состоящие соответственно из положительно полуопределенных и положительно определенных матриц. Множество $\mathbb{S}^n_+$ является конусом в $\mathbb{S}^n$, множество $\mathbb{S}^n_{++}$ — его внутренностью. Для указания на то, что матрица $M \in \mathbb{S}^n$ положительно полуопределена (положительно определена), будем пользоваться также неравенством $M \succeq 0$ ($M \succ 0$). Конус $\mathbb{S}^n_+$ не является полиэдральным, его размерность равняется так называемому "треугольному" числу $n_\triangle = n(n+1)/2$.

Скалярное (внутреннее) произведение между двумя квадратными матрицами L и M порядка n определяется как след матрицы $L^T M$ и обозначается

$$L \bullet M = \mathrm{tr}\,(L^T M) = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} m_{ij},$$

где l_{ij} и m_{ij} — (ij)- элементы соответственно матриц L и M. Если L и M — две положительно полуопределенные матрицы из $\mathbb{S}^n$, то $L \bullet M \geq 0$ и $L \bullet M = 0$ в том и только том случае, когда $LM = ML = 0_{nn}$. Более того, согласно теореме Фейера (о следе) матрица $L \in \mathbb{S}^n$ положительно полуопределена тогда и только тогда, когда $L \bullet M \geq 0$ для всех $M \succeq 0$, т. е. конус $\mathbb{S}^n_+$ является *самосопряженным.*

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\begin{gathered} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \qquad i = J^m, \qquad X \succeq 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь и ниже: J^k — множество индексов от 1 до k, матрицы C, X и A_i, $i \in J^m$, принадлежат пространству $\mathbb{S}^n$.

Двойственной к (1.1) является задача

$$\begin{gathered} \max \langle b, u \rangle, \\ \sum_{i=1}^{m} u^i A_i + V = C, \qquad V \succeq 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathbb{S}^n$, угловые скобки обозначают обычное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что задачи (1.1) и (1.2) имеют решения. Кроме того, считаем, что матрицы A_i, $i \in J^m$, линейно независимы и C не принадлежит линейному подпространству, порожденному этими матрицами.

Обозначим допустимое множество в исходной задаче (1.1) через $\mathcal{F}_P$, т. е.

$$\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_A \cap \mathbb{S}^n_+, \qquad \mathcal{F}_A = \left\{ X \in \mathbb{S}^n \colon A_i \bullet X = b^i,\ i \in J^m \right\}.$$

Его относительной внутренностью является множество $\mathcal{F}^0_P = \mathcal{F}_P \cap \mathbb{S}^n_{++}$.

Ниже нам потребуются некоторые известные результаты (см., например, [2]), касающиеся геометрических свойств допустимого множества $\mathcal{F}_P$. Для произвольной матрицы M обозначим через $\mathcal{R}(M)$ пространство ее столбцов, через $\mathcal{N}(M)$ — ее нуль-пространство (ядро).

Рассмотрим сначала конус $\mathbb{S}^n_+$. *Грани* конуса $\mathbb{S}^n_+$ тесно связаны с подпространствами $\mathcal{L}$ пространства $\mathbb{R}^n$, а именно $\mathcal{G}$ есть грань $\mathbb{S}^n_+$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{L}) = \left\{X \in \mathbb{S}^n_+ \colon \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{L}\right\}$$

для некоторого $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$. Если размерность $\mathcal{L}$ равна r, то $\operatorname{rank} X \le r$ для всех элементов X из $\mathcal{G}(\mathcal{L})$, а размерность $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ равняется $r_\triangle$. Сама матрица X может быть представлена в виде $X = Q\Lambda Q^T$, где Q — матрица полного ранга размера $n \times r$ и $\Lambda \in \mathbb{S}^r_+$. Для всех матриц $X \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ матрица Q одна и та же. *Сопряженная грань* $\mathcal{G}^\star(\mathcal{L})$ к грани $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ определяется как грань, соответствующая ортогональному подпространству $\mathcal{L}^\perp$, т.е. $\mathcal{G}^\star(\mathcal{L}) = \mathcal{G}(\mathcal{L}^\perp)$.

Для точки $X \in \mathbb{S}^n_+$ обозначим через $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ *минимальную грань* конуса $\mathbb{S}^n_+$, содержащую X:

$$\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+) = \{Y \in \mathbb{S}^n_+ \colon \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)\}.$$

Таким образом, если матрица $X \in \mathbb{S}^n_+$ имеет ранг r, то грань $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ изоморфна конусу $\mathbb{S}^r_+$ и, следовательно, имеет размерность $r_\triangle$. Сопряженная грань $\mathcal{G}^*_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ изоморфна конусу $\mathbb{S}^{n-r}_+$ и имеет размерность $(n-r)_\triangle$.

Обратимся теперь к допустимому множеству $\mathcal{F}_P$ в прямой задаче. Для матрицы $X \in \mathcal{F}_P$ обозначим через $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P)$ *минимальную грань* множества $\mathcal{F}_P$, содержащую X. Если для $X \in \mathcal{F}_P$ минимальная грань совпадает с ней самой, то такая матрица является *крайней точкой* множества $\mathcal{F}_P$.

Допустимое множество $\mathcal{F}_P$ есть пересечение конуса $\mathbb{S}^n_+$ с аффинным множеством $\mathcal{F}_A$. Так как пересечение двух выпуклых множеств является гранью тогда и только тогда, когда оно является пересечением двух граней, то грань множества $\mathcal{F}_P$ определяется как $\mathcal{G}(\mathcal{L}) \bigcap \mathcal{F}_A$, а минимальная грань для $X \in \mathcal{F}_P$ есть теперь

$$\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P) = \mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+) \bigcap \mathcal{F}_A = \{Y \in \mathcal{F}_P \colon \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)\}.$$

Пусть r есть ранг матрицы X и $X = QQ^T$, где Q — матрица полного ранга размера $n \times r$. Положим $A_i^Q = Q^T A_i Q$, $i \in J^m$. Размерность грани $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P)$ равняется величине

$$\dim \mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{F}_P) = r_\triangle - \operatorname{rank}\left[A_1^Q, \dots, A_m^Q\right]. \tag{1.3}$$

Из (1.3), в частности, следует, что матрица X ранга r является крайней точкой множества $\mathcal{F}_P$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\left[A_1^Q, \dots, A_m^Q\right] = r_\triangle$. Для линейно независимых матриц A_1, $A_2, \dots, A_m$ данное равенство может выполняться только в случае, когда $r_\triangle \le m$.

Возьмем произвольную матрицу X из допустимого множества $\mathcal{F}_P$ ранга r. Предположим, что

$$X = Q \operatorname{Diag}(\eta_1, \dots, \eta_r, 0, \dots, 0)\, Q^T, \tag{1.4}$$

где Q — ортогональная матрица порядка n. Касательное пространство к $\mathbb{S}^n_+$ в X имеет следующий вид [6]:

$$\mathcal{T}_X = \left\{Q \begin{bmatrix} G & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} Q^T \colon G \in \mathbb{S}^r,\ H \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}\right\}.$$

Здесь $\mathbb{R}^{k \times l}$ — пространство $(k \times l)$-матриц. Размерность $\mathcal{T}_X$ определяется рангом матрицы X и вычисляется как

$$\dim \mathcal{T}_X = r_\triangle + r(n-r) = n_\triangle - (n-r)_\triangle.$$

Если матрица $\Delta X \in \mathcal{T}_X$ и $H \ne 0_{r(n-r)}$, то $X \pm \alpha\, \Delta X$ не содержится в $\mathbb{S}^n_+$ для $\alpha > 0$.

Обозначим через $\mathcal{N}_A$ подпространство в $\mathbb{S}^n$, параллельное аффинному множеству $\mathcal{F}_A$. Размерность $\mathcal{N}_A$ в силу сделанного предположения о линейной независимости матриц A_i, $i \in J^m$, равна $n_\triangle - m$. Дадим теперь определение невырожденной точки $X \in \mathcal{F}_P$ для прямой задачи (1.1), следуя [7].

О п р е д е л е н и е 1.1. Точка $X \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_A = \mathbb{S}^n$.

Так как $\dim \mathbb{S}^n = n_\triangle$, то равенство $\mathcal{T}_X + \mathcal{N}_A = \mathbb{S}^n$ имеет место только тогда, когда

$$\dim \mathcal{T}_X + \dim \mathcal{N}_A \geq \dim \mathbb{S}^n,$$

откуда вытекает неравенство $m \leq n_\triangle - (n-r)_\triangle$. Данное неравенство является необходимым условием невырожденности допустимой точки X в прямой задаче (1.1).

Определение 1.2. Прямая задача полуопределенного программирования (1.1) является *невырожденной*, если все точки $X \in \mathcal{F}_P$ оказываются невырожденными.

Пусть X_* и $[u_*, V_*]$ — решения соответственно задач (1.1) и (1.2). Тогда матрицы X_* и V_* коммутируют между собой и выполняется условие дополнительности $\eta_*^i \theta_*^i = 0$, $i \in J^n$, для собственных чисел этих матриц. Условие строгой дополнительности означает, что одновременно $\eta_*^i + \theta_*^i > 0$ для всех $i \in J^n$.

2. Допустимый аффинно-масштабирующий метод

Введем сначала дополнительные обозначения. Если M — квадратная матрица порядка n, то символом $\mathrm{vec}\, M$ обозначается прямая сумма ее столбцов, т. е. вектор-столбец длины n^2, в котором последовательно один под другим располагаются столбцы матрицы M. Для симметричных матриц имеет смысл вместо вектор-столбца $\mathrm{vec}\, M$ рассматривать вектор-столбец $\mathrm{hvec}\, M$. В него также помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы M, но не полностью, а только их нижние части, начинающиеся с диагонального элемента. Аналогичным образом определяется вектор-столбец $\mathrm{svec}\, M$. От $\mathrm{hvec}\, M$ он отличается только тем, что все элементы, не стоящие на диагонали матрицы M, при помещении в $\mathrm{svec}\, M$ умножаются на $\sqrt{2}$. Как вектор $\mathrm{hvec}\, M$, так и вектор $\mathrm{svec}\, M$ имеют длину $n_\triangle$.

Для перехода от вектора $\mathrm{vec}\, M$ к вектору $\mathrm{hvec}\, M$ и для обратного перехода используются специальные *элиминационные* и *дуплицирующие* матрицы (см. [8]). Элиминационная матрица $\mathcal{L}_n$ для каждой квадратной матрицы M порядка n совершает преобразование $\mathcal{L}_n \mathrm{vec}\, M = \mathrm{hvec}\, M$. Напротив, дуплицирующая матрица $\mathcal{D}_n$ для каждой симметричной матрицы M порядка n осуществляет обратное преобразование $\mathcal{D}_n \mathrm{hvec}\, M = \mathrm{vec}\, M$. Матрица $\mathcal{L}_n$ имеет размер $n_\triangle \times n^2$, матрица $\mathcal{D}_n$ — размер $n^2 \times n_\triangle$. Обе матрицы $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ являются матрицами полного ранга, равного $n_\triangle$. Матрица $\mathcal{L}_n$ — полуортогональная, т. е. $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_n^T = I_{n_\triangle}$. Кроме того, $\mathcal{L}_n \mathcal{D}_n = I_{n_\triangle}$.

Пусть E_n — квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны единице. Пусть, кроме того, D_2 — диагональная матрица порядка $n_\triangle$, на диагонали которой располагается вектор $\mathrm{svec}\, E_n$. Наряду с матрицами $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ в дальнейшем будем пользоваться также матрицами $\tilde{\mathcal{L}}_n = D_2 \mathcal{L}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n D_2^{-1}$.

Таким образом, если M — симметричная матрица порядка n, то, как можно проверить,

$$\mathrm{svec}\, M = \tilde{\mathcal{L}}_n \mathrm{vec}\, M = \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathrm{vec}\, M, \qquad \mathrm{vec}\, M = \tilde{\mathcal{D}}_n \mathrm{svec}\, M.$$

Для матриц $\tilde{\mathcal{L}}_n$ и $\tilde{D}_n$ сохраняется свойство $\tilde{\mathcal{L}}_n \tilde{\mathcal{D}}_n = I_{n_\triangle}$.

При работе с векторами вида $\mathrm{vec}\, M$ будем нумеровать их элементы не числами натурального ряда, а парами индексов из следующего набора:

$$J^n_\square = \{(1,1), \ldots, (n,1), (1,2), \ldots, (n,2), \ldots, (1,n), \ldots, (n,n)\}. \tag{2.1}$$

Всего в таком наборе n^2 парных индексов. Номера вида (i,i), в которых первый индекс совпадает со вторым, будем называть *диагональными*. Набор $J^n_\square$ содержит n таких диагональных номеров, а именно $(1,1)$, $(2,2)$, …, (n,n). Те номера (i,j) из $J^n_\square$, в которых индексы i и j отличны друг от друга, будем называть *внедиагональными*. При этом если $i > j$, то такой номер (i,j) называется *младшим внедиагональным* номером.

Следующий набор парных индексов удобно использовать при работе с векторами $\mathrm{hvec}\, M$ или $\mathrm{svec}\, M$. Это набор

$$J^n_\triangle = \{(1,1), \dots, (n,1), (2,2), \dots, (n,2), (3,3), \dots, (n,n)\},$$

содержащий $n_\triangle$ парных индексов. В него входят только диагональные номера и младшие внедиагональные номера.

Обратимся теперь к задачам полуопределенного программирования (1.1) и (1.2). Мы предположили, что их решения существуют. Тогда в силу необходимых и достаточных условий оптимальности система равенств и неравенств

$$\begin{array}{rcl} X \bullet V & = & 0, \\ A_i \bullet X & = & b^i, \quad i \in J^m, \\ V & = & C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \\ X \succeq 0, & & V \succeq 0 \end{array} \tag{2.2}$$

обязательно имеет решение.

Обозначим через $X \circ V$ симметризованное произведение матриц X и V из $\mathbb{S}^n$, т. е. матрицу $X \circ V = (XV + VX)/2$. Данное произведение обладает полезным свойством, а именно для матриц $X \in \mathbb{S}^n_+$ и $V \in \mathbb{S}^n_+$ равенство $X \circ V = 0_{nn}$ возможно в том и только в том случае, когда $XV = VX = 0_{nn}$.

Воспользуемся также тем, что и равенство $X \bullet V = 0$ для X и V из $\mathbb{S}^n_+$ выполняется тогда и только тогда, когда $XV = VX = 0_{nn}$. Поэтому первое равенство из (2.2) может быть переписано в виде

$$X \circ V = 0_{nn}. \tag{2.3}$$

Заменим теперь в системе (2.2), (2.3) матричные равенства на их векторные аналоги. С учетом известной формулы $\mathrm{vec}\,(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}\, B$, справедливой для любых матриц A, B и C, для которых определено произведение ABC, получаем

$$X^\otimes \,\mathrm{vec}\, V = 0_{n^2}, \qquad \mathcal{A}_{vec}\,\mathrm{vec}\, X = b, \qquad \mathrm{vec}\, V = \mathrm{vec}\, C - \mathcal{A}^T_{vec} u. \tag{2.4}$$

Здесь $X^\otimes$ — кронекеровская сумма матрицы X, определяемая как

$$X^\otimes = [X \otimes I_n + I_n \otimes X]/2.$$

Через $\mathcal{A}_{vec}$ обозначена матрица размера $m \times n^2$ со строками $\mathrm{vec}\, A_i$, $i \in J^m$.

Учтем симметричность матриц. Тогда система (2.4) заменяется на следующую:

$$\tilde{X}^\otimes \mathrm{svec}\, V = 0_{n_\triangle}, \qquad \mathcal{A}_{svec}\,\mathrm{svec}\, X = b, \qquad \mathrm{svec}\, V = \mathrm{svec}\, C - \mathcal{A}^T_{svec} u. \tag{2.5}$$

В (2.5) и ниже $\tilde{X}^\otimes = \tilde{\mathcal{L}}_n X^\otimes \tilde{\mathcal{D}}_n$, $\mathcal{A}_{svec}$ — матрица размера $m \times n_\triangle$ со строками $\mathrm{svec}\, A_i$, $i \in J^m$.

Подставим вектор $\mathrm{svec}\, V$ из третьего равенства в первое и умножим его левую и правую части на матрицу $\mathcal{A}_{svec}$. В результате приходим к уравнению относительно вектора u:

$$\Gamma(\tilde{X}^\otimes) u = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}^\otimes \mathrm{svec}\, C, \tag{2.6}$$

где через $\Gamma(\tilde{X}^\otimes)$ обозначена матрица $\Gamma(\tilde{X}^\otimes) = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}^\otimes \mathcal{A}^T_{svec}$.

Если матрица $\Gamma(\tilde{X}^\otimes)$ неособая, то, разрешая уравнение (2.6) относительно u, получаем:

$$u = u(X) = \Gamma^{-1}(\tilde{X}^\otimes)\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}^\otimes \mathrm{svec}\, C. \tag{2.7}$$

В [3] показано, что при предположении о невырожденности прямой задачи (1.1) матрица $\Gamma(\tilde{X}^\otimes)$ оказывается неособой для всех точек X из некоторой области, содержащей допустимое множество $\mathcal{F}_P$. В дальнейшем нам потребуются обозначения

$$V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \qquad V(X) = V(u(X)).$$

Утверждение 2.1. *Пусть точка* X_* *является решением прямой задачи* (1.1). *Тогда пара* $[u_*, V_*]$*, где* $u_* = u(X_*)$*,* $V_* = V(u_*)$*, есть решение двойственной задачи* (1.2).

Доказательство. Так как, по предположению, обе задачи (1.1) и (1.2) имеют решение, то в силу условий оптимальности (2.5) найдутся $\bar{u}$ и $\bar{V} \succeq 0$ такие, что $\bar{V} = V(\bar{u})$ и выполняется равенство $\tilde{X}_*^{\otimes} \mathrm{svec}\, \bar{V} = 0_{n_\triangle}$. Пара $[\bar{u}, \bar{V}]$ является решением задачи (1.2). Если теперь умножить это равенство слева на матрицу $\mathcal{A}_{svec}$ и подставить в него выражение $\mathrm{svec}\, \bar{V} = \mathrm{svec}\, C - \mathcal{A}_{svec}^T \bar{u}$, то оно перейдет в следующее равенство:

$$\Gamma(\tilde{X}_*^{\otimes})\bar{u} = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_*^{\otimes} \mathrm{svec}\, C. \tag{2.8}$$

Матрица $\Gamma(\tilde{X}_*^{\otimes})$ из-за предположения о невырожденности задачи (1.1) неособая. Поэтому равенство (2.8), если его рассматривать как уравнение относительно $\bar{u}$, может иметь только единственное решение.

С другой стороны, согласно формуле (2.7) $u_* = \Gamma^{-1}(\tilde{X}_*^{\otimes})\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_*^{\otimes} \mathrm{svec}\, C$. Подставляя данное значение u_* в (2.8), получаем, что оно тоже удовлетворяет этому уравнению. Отсюда приходим к выводу, что u_* и V_* совпадают соответственно с $\bar{u}$ и $\bar{V}$. Таким образом, пара $[u_*, V_*]$ есть решение двойственной задачи (1.2).

Утверждение доказано.

Пусть $\mathrm{svec}\, V(X) = \mathrm{svec}\, C - \mathcal{A}_{svec}^T u(X)$. Заменим в первом равенстве из (2.5) вектор $\mathrm{svec}\, V$ на найденный $\mathrm{svec}\, V(X)$:

$$\tilde{X}^{\otimes}(I_{n_\triangle} - \mathcal{A}_{svec}^T\, \Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes})\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}^{\otimes})\mathrm{svec}\, C = 0_{n_\triangle}.$$

Это система $n_\triangle$ нелинейных уравнений относительно $n_\triangle$ переменных — компонент вектора $\mathrm{svec}\, X$. Для ее решения можно применять различные численные методы решения систем нелинейных уравнений, в частности метод простой итерации.

Обозначим

$$\Delta_{svec}(X) = \tilde{X}^{\otimes}(I_{n_\triangle} - \mathcal{A}_{svec}^T\, \Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes})\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}^{\otimes})\mathrm{svec}\, C. \tag{2.9}$$

Взяв $X_0 \in \mathcal{F}_P^0$ и применяя метод простой итерации, приходим к итерационному процессу

$$\mathrm{svec}\, X_{k+1} = \mathrm{svec}\, X_k - \alpha_k \Delta_{svec}(X_k). \tag{2.10}$$

Здесь $\alpha_k > 0$ — шаг спуска. В матричном представлении процесс (2.10) запишется как

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \Delta(X_k), \qquad \Delta(X) = X \circ V(X). \tag{2.11}$$

Укажем на простейшие свойства такого итерационного процесса.

Утверждение 2.2 [3]. *Для любой точки* $X \in \mathcal{F}_P$ *выполняются неравенство* $C \bullet \Delta(X) \geq 0$ *и равенства* $A_i \bullet \Delta(X) = 0$*, где* $i \in J^m$.

Пусть теперь $X \in \mathbb{S}_+^n$ и

$$X = QD(\eta)Q^T, \tag{2.12}$$

где Q — ортогональная матрица порядка n, $D(\eta)$ — диагональная матрица с вектором собственных значений $\eta = [\eta^1, \ldots, \eta^n]$ на диагонали. Тогда

$$X^{\otimes} = (Q \otimes Q)D(\eta^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T).$$

Здесь $\eta^{\otimes}$ — диагональ диагональной матрицы $D^{\otimes}(\eta)$. Матрица $Q \otimes Q$ порядка n^2 также будет ортогональной, и $(Q \otimes Q)^{-1} = Q^T \otimes Q^T$. Если предположить, что матрица $X \in \mathcal{F}_P$ не является положительно определенной, а лишь положительно полуопределенной, то она принадлежит относительной границе множества $\mathcal{F}_P$ и среди собственных чисел η^i имеются нулевые.

Пусть $V^Q = Q^T V Q$ — матрица, являющаяся представлением матрицы V в ортонормированном базисе, задаваемом столбцами матрицы Q.

Утверждение 2.3. *Пусть точка X принадлежит относительной границе допустимого множества $\mathcal{F}_P$. Тогда направление $\Delta(X)$ принадлежит касательному подпространству $\mathcal{T}_X$ к конусу $\mathbb{S}^n_+$ в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. После подстановки разложения (2.12) в выражение (2.9) для вектора $\Delta_{svec}(X)$ и перехода к вектору $\Delta_{vec}(X) = \tilde{\mathcal{D}}_n \Delta_{svec}(X)$ получаем

$$\Delta_{vec}(X) = (Q \otimes Q) D(\eta^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T) \operatorname{vec} V(X) = (Q \otimes Q) D(\eta^{\otimes}) \operatorname{vec} V^Q(X).$$

Отсюда видно, что $\Delta_{vec}(X) = \operatorname{vec} QY(X)Q^T$, где $Y(X)$ — матрица с прямой суммой столбцов $D(\eta^{\otimes}) \operatorname{vec} V^Q(X)$, т. е. $Y(X) = D(\eta) \circ V^Q(X)$.

Считаем, не умаляя общности, что матрица X имеет ранг $r < n$ и $\eta^i > 0$, $i \in J^r$. Тогда у вектора $\eta^{\otimes}$ все элементы с парными номерами $(i, j) \in J^n_{\square}$ такими, что $r < i, j \le n$, — нулевые. Поэтому у матрицы $Y(X)$ правая нижняя квадратная подматрица порядка $n - r$ — нулевая. Таким образом, направление $\Delta(X)$ принадлежит касательному подпространству к конусу $\mathbb{S}^n_+$ в точке X.

Утверждение доказано.

Согласно утверждению 2.2 итерационный процесс (2.11) является релаксационным. Как показано в [3], он локально сходится к решению задачи (1.1), если шаг α_k берется постоянным и достаточно малым, а для решений задач (1.1) и (1.2) выполнено условие строгой дополнительности. Однако для того чтобы добиться наибольшего убывания значения целевой функции на текущей итерации, следует взять шаг α_k максимально возможным при условии, что следующая точка X_{k+1} удовлетворяет неравенству $X_{k+1} \succeq 0$. Но при таком выборе шага α_k точка X_{k+1} может оказаться на границе множества $\mathcal{F}_P$. В силу утверждения 2.3 в этом случае направление $\Delta(X)$ принадлежит касательному подпространству к конусу $\mathbb{S}^n_+$ в этой точке и, в принципе, может выводить за пределы данного конуса и, стало быть, за пределы $\mathcal{F}_P$. Поэтому необходимо изменить подход к определению направления $\Delta(X)$ в граничных точках допустимого множества.

3. Направление из минимальной грани

Предположим теперь, что точка X принадлежит относительной границе множества $\mathcal{F}_P$, т. е. среди собственных чисел матрицы X имеются нулевые. Рассмотрим, как изменится направление $\Delta(X)$, если дополнительно потребовать, чтобы оно принадлежало минимальной грани, содержащей X. С этой целью обратимся к “сужению” исходной задачи (1.1) на эту грань.

Пусть $X \in \mathbb{S}^n_+$ и ранг X равен $r < n$. Считаем по-прежнему, что для матрицы X имеет место разложение (2.12), причем положительные собственные числа находятся в начале вектора η (см. (1.4)). Пусть Q_B — левая $n \times r$ подматрица ортогональной матрицы Q, а $D(\eta_B)$ — левая верхняя диагональная подматрица матрицы $D(\eta)$ порядка r, т. е. $X = Q_B D(\eta_B) Q_B^T$. Тогда указанное “сужение” задачи (1.1) на минимальную грань $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ запишется в виде

$$\begin{gathered} \min \ C \bullet X, \\ A^i \bullet X = b^i, \qquad i \in J^m, \qquad X \in \mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Учтем далее, что точки $X \in \mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ представимы в виде $X = Q_B Z Q_B^T$, где $Z \in \mathbb{S}^r_+$. Подставляя в (3.1) вместо X данное разложение, приходим к системе

$$\begin{gathered} \min \ C^{Q_B} \bullet Z, \\ A_i^{Q_B} \bullet Z = b^i, \qquad i \in J^m, \qquad Z \succeq 0, \end{gathered}$$

где $C^{Q_B} = Q_B^T C Q_B$ и $A_i^{Q_B} = Q_B^T A_i Q_B$, $i \in J^m$. Двойственной к данной задаче будет система

$$\max \langle b, u\rangle,$$
$$\sum_{i=1}^m u^i A_i^{Q_B} + V^{Q_B} = C^{Q_B}, \qquad V^{Q_B} \succeq 0.$$

Соответствующие условия оптимальности (2.2), (2.3) теперь могут быть записаны в виде

$$\begin{array}{rcl} Z \circ V^{Q_B} & = & 0, \\ A_i^{Q_B} \bullet Z & = & b^i, \quad i \in J^m, \\ V^{Q_B} & = & C^{Q_B} - \sum\limits_{i=1}^m u^i A_i^{Q_B}, \\ Z \succeq 0, & & V^{Q_B} \succeq 0. \end{array}$$

Переходя к векторной форме представления равенств, аналогичной (2.4), получаем

$$\tilde{Z}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\, V^{Q_B} = 0_{r_\triangle}, \qquad \mathcal{A}_{svec}^{Q_B}\,\mathrm{svec}\, Z = b, \qquad \mathrm{svec}\ V^{Q_B} = \mathrm{svec}\ C^{Q_B} - (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T u.$$

Здесь и ниже $\tilde{Z}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_r Z^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_r$. Матрица $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ имеет размер $m \times r_\triangle$, ее строками являются векторы $\mathrm{svec}\, A_i^{Q_B}$, $i \in J^m$.

Далее поступаем полностью аналогично тому, как это делалось ранее для нахождения направления $\Delta(X)$ в основном варианте допустимого метода. С этой целью выведем сначала уравнение для определения вектора u:

$$\Gamma_{Q_B}(\tilde{Z}^{\otimes}) u = \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \tilde{Z}^{\otimes} \mathrm{svec}\, C^{Q_B}, \tag{3.2}$$

в котором $\Gamma_{Q_B}(\tilde{Z}^{\otimes}) = \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \tilde{Z}^{\otimes} (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Точка $X = Q_B D(\eta_B) Q_B^T$ является *регулярной*, если матрицы $A_i^{Q_B}$, $i \in J^m$, линейно независимы. В противном случае эта точка называется *нерегулярной*.

Таким образом, любая невырожденная крайняя точка X ранга r, удовлетворяющего равенству $r_\triangle = m$, является регулярной. Крайняя точка X ранга r, в которой $r_\triangle < m$, заведомо нерегулярная. Верно и обратное: все регулярные точки являются невырожденными. Это следует из достаточных условий невырожденности (см. [7]).

Предположим, что точка $X = Q_B Z Q_B^T$, в которой $Z = D(\eta_B) > 0_r$, является регулярной. Разрешая уравнение (3.2), получаем

$$u(Z) = \Gamma_{Q_B}^{-1}(\tilde{Z}^{\otimes}) \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \tilde{Z}^{\otimes} \mathrm{svec}\, C^{Q_B}, \quad \mathrm{svec}\, V^{Q_B} = \mathrm{svec}\, C^{Q_B} - (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \Gamma_{Q_B}^{-1}(\tilde{Z}^{\otimes}) \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \tilde{Z}^{\otimes} \mathrm{svec}\, C^{Q_B}.$$

Имеем также для соответствующего направления $\Delta(Z)$ в векторном представлении

$$\Delta_{svec}(Z) = \tilde{Z}^{\otimes}[I_{r_\triangle} - (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \Gamma_{Q_B}^{-1}(\tilde{Z}^{\otimes}) \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \tilde{Z}^{\otimes}]\mathrm{svec}\, C^{Q_B}. \tag{3.3}$$

Теперь наша цель состоит в том, чтобы найти выражение для направления $\Delta^{Q_B}(X)$ в исходном пространстве $\mathbb{S}^n$ опять же в векторном виде. Имеем

$$\Delta_{svec}^{Q_B}(X) = \tilde{\mathcal{L}}_n\, \mathrm{vec}(Q_B \Delta(Z) Q_B^T) = \tilde{\mathcal{L}}_n (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{D}}_r \Delta_{svec}(Z). \tag{3.4}$$

Таким образом, надо выразить $\Delta_{svec}(Z)$ через исходную матрицу X.

Обозначим через $\eta_B^{\otimes}$ диагональ матрицы $D^{\otimes}(\eta_B)$ и через $\tilde{\eta}_B^{\otimes}$ вектор $\tilde{\eta}_B^{\otimes} = \mathcal{L}_r \eta_B^{\otimes}$. Имеет место следующий результат.

Лемма 3.1. *Пусть* $Z = D(\eta_B)$ *и*

$$\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B} = \tilde{\mathcal{D}}^T_n (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{L}}^T_r D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{3.5}$$

Пусть, кроме того, $\Gamma(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) = \mathcal{A}_{svec} \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B} \mathcal{A}^T_{svec}$ *и*

$$\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) = I_{n_\triangle} - \mathcal{A}^T_{svec} \Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \mathcal{A}_{svec} \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}. \tag{3.6}$$

Тогда

$$\Delta_{svec}(Z) = D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \operatorname{svec} C. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выразим сначала матрицу $\Gamma_{Q_B}(Z)$ через матрицу $\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}$. Проводя выкладки, получаем

$$\begin{aligned}
\Gamma_{Q_B}(Z) &= \mathcal{A}^{Q_B}_{svec} \tilde{Z}^{\otimes} (\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T = \mathcal{A}^{Q_B}_{svec} \tilde{\mathcal{L}}_r D^{\otimes}(\eta_B) \tilde{\mathcal{D}}_r (\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T = \mathcal{A}^{Q_B}_{vec} \tilde{\mathcal{L}}^T_r \tilde{\mathcal{L}}_r D(\eta^{\otimes}_B) (\mathcal{A}^{Q_B}_{vec})^T \\
&= \mathcal{A}_{vec} (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{L}}^T_r \tilde{\mathcal{L}}_r D(\eta^{\otimes}_B) (Q^T_B \otimes Q^T_B) \mathcal{A}^T_{vec} \\
&= \mathcal{A}_{svec} \tilde{\mathcal{D}}^T_n (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{L}}^T_r \tilde{\mathcal{L}}_r D(\eta^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{D}}_r \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{A}^T_{svec} \\
&= \mathcal{A}_{svec} \tilde{\mathcal{D}}^T_n (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{L}}^T_r D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{A}^T_{svec} = \mathcal{A}_{svec} \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B} \mathcal{A}^T_{svec} = \Gamma(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Кроме того, учтем, что

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}^{\otimes} \operatorname{svec} C^{Q_B}(\eta_B) &= \tilde{\mathcal{L}}_r D^{\otimes}(\eta_B) \tilde{\mathcal{D}}_r \operatorname{svec} C^{Q_B} = \tilde{\mathcal{L}}_r D(\eta^{\otimes}_B) \operatorname{vec} C^{Q_B} \\
&= \tilde{\mathcal{L}}_r D(\eta^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{D}}_r \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \operatorname{vec} C = D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n \operatorname{svec} C,
\end{aligned}$$

а также что

$$(\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T = \tilde{\mathcal{L}}_r (\mathcal{A}^{Q_B}_{vec})^T = \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \mathcal{A}^T_{vec} = \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{A}^T_{svec}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{Q_B}_{svec} \tilde{Z}^{\otimes} \operatorname{svec} C^{Q_B} &= \mathcal{A}_{svec} \tilde{\mathcal{D}}^T_n (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{L}}^T_r D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n \operatorname{svec} C \\
&= \mathcal{A}_{svec} \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B} \operatorname{svec} C.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Используя (3.8) и (3.9), получаем, что выражение (3.3) для $\Delta_{svec}(Z)$ может быть переписано в виде

$$\Delta_{svec}(Z) = D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n [I_{n_\triangle} - \mathcal{A}^T_{svec} \Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \mathcal{A}_{svec} \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}] \operatorname{svec} C,$$

из чего следует (3.7).

Лемма доказана.

На основании утверждения леммы 3.1 и формулы (3.4) приходим к выводу, что

$$\Delta^{Q_B}_{svec}(X) = \tilde{\mathcal{L}}_n (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{D}}_r D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q^T_B \otimes Q^T_B) \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \operatorname{svec} C. \tag{3.10}$$

Недостатком выражения (3.10) является несимметричный вид матрицы, стоящей перед вектором $\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \operatorname{svec} C$. На самом деле ее можно представить и в симметричном виде.

Обозначим через $\mathcal{Q}_B$ матрицу $\mathcal{Q}_B = Q_B \otimes Q_B$ размера $n^2 \times r^2$. Пусть q_j — j-й столбец матрицы Q_B, где $j \in J^r$. Пусть, кроме того, $q^{(i)}_j$ — i-й элемент вектора q_j, где $i \in J^n$. Согласно определению произведения матриц по Кронекеру получаем, что элементами матрицы $\mathcal{Q}_B$ являются следующие величины: $\mathcal{Q}^{(s,t)(k,l)}_B = q^s_k q^t_l$, где $(s,t) \in J^n_\square$ и $(k,l) \in J^r_\square$. Здесь использованы парные номера из наборов (2.1).

Введем еще одно обозначение. Для произвольной квадратной матрицы M порядка r обозначим через $\widehat{M}$ квадратную матрицу того же порядка r, которая получается из M следующим образом. Все наддиагональные элементы матрицы $\widehat{M}$ — нулевые, а все диагональные и поддиагональные элементы $\widehat{M}$ совпадают с соответствующими элементами матрицы M, причем поддиагональные элементы удваиваются. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\widehat{M} = \tilde{\mathcal{L}}^T_r \tilde{\mathcal{L}}_r M$ (см. также [8]).

Лемма 3.2. *Пусть $M \in \mathbb{S}^r$. Тогда имеет место равенство*

$$\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{Q}_B \operatorname{vec} M = \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}_B \operatorname{vec} \widehat{M}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Умножая матрицу $\mathcal{Q}_B$ слева на матрицу $\tilde{\mathcal{L}}_n$, получаем результирующую матрицу $\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{Q}_B$ размера $n_\triangle \times r^2$, в которой все строки $\mathcal{Q}_B$ с парными номерами $(s,t) \notin J^n_\triangle$ удаляются. Остальные строки $\mathcal{Q}_B$ сохраняются. Однако если их парные номера (s,t) из $J^n_\triangle$ внедиагональные, то эти строки умножается на коэффициент $\sqrt{2}$. Таким образом, для этих номеров выполняется условие

$$(\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{Q}_B)^{(s,t)(k,l)} = \sqrt{2}\, q_k^{(s)} q_l^{(t)}, \qquad (k,l) \in J^r_\square. \tag{3.12}$$

С другой стороны, если умножить матрицу $\mathcal{Q}_B$ слева на матрицу $\tilde{\mathcal{D}}_n^T$, то получим опять матрицу размера $n_\triangle \times r^2$. У нее строки с парными диагональными номерами остаются прежними, т. е. такими же, как у матрицы $\mathcal{Q}_B$. Для строк с внедиагональными номерами (s,t) из $J^n_\triangle$ (младшими внедиагональными номерами) получаем

$$(\tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}_B)^{(s,t)(k,l)} = 1/\sqrt{2}\, [q_k^{(s)} q_l^{(t)} + q_k^{(t)} q_l^{(s)}], \qquad (k,l) \in J^r_\square. \tag{3.13}$$

Пусть $J^n_{\triangle,d} = \{(s,s) \in J^n_\triangle : s \in J^n\}$, $J^n_{\triangle,nd} = J^n_\triangle \setminus J^n_{\triangle,d}$. Множества $J^n_{\triangle,d}$ и $J^n_{\triangle,nd}$ — подмножества индексного множества $J^n_\triangle$, состоящие соответственно из диагональных и младших внедиагональных номеров.

Для диагональных номеров (s,s), в которых $s \in J^n$, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{(k,l)\in J^r_\square} q_k^{(s)} q_l^{(s)} (\operatorname{vec} M)^{(k,l)} &= \sum_{(k,l)\in J^r_{\triangle,dg}} q_k^{(s)} q_l^{(s)} (\operatorname{vec} M)^{(k,l)} + 2 \sum_{(k,l)\in J^r_{\triangle,ndg}} q_k^{(s)} q_l^{(s)} (\operatorname{vec} M)^{(k,l)} \\ &= \sum_{(k,l)\in J^r_\triangle} q_k^{(s)} q_l^{(s)} (\operatorname{vec} \widehat{M}\,)^{(k,l)}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь $(\operatorname{vec} M)^{(k,l)}$ — (k,l)-й элемент вектора $\operatorname{vec} M$. Для внедиагональных номеров $(s,t) \in J^n_\triangle$ получаем соответственно

$$\begin{aligned}\sum_{(k,l)\in J^r_\square} [q_k^{(s)} q_l^{(t)} + q_k^{(t)} q_l^{(s)}] (\operatorname{vec} \widehat{M}\,)^{(k,l)} &= \sum_{(k,l)\in J^r_\triangle} [q_k^{(s)} q_l^{(t)} + q_k^{(t)} q_l^{(s)}] (\operatorname{vec} \widehat{M}\,)^{(k,l)} \\ &= 2 \sum_{(k,l)\in J^r_\square} q_k^{(s)} q_l^{(t)} (\operatorname{vec} M)^{(k,l)}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) с учетом (3.12), (3.13) приходим к равенству (3.11).

Лемма доказана.

Утверждение 3.1. *Для вектора $\Delta^{Q_B}_{svec}(X)$ справедливо выражение*

$$\Delta^{Q_B}_{svec}(X) = \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B} \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \operatorname{svec} C. \tag{3.16}$$

Доказательство. Поскольку вектор $\tilde{\mathcal{D}}_r D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q_B^T \otimes Q_B^T) \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{P}(X_{Q_B}) \operatorname{svec} C$ есть прямая сумма столбцов некоторой симметричной матрицы M порядка r, то, заменяя матрицу $\tilde{\mathcal{D}}_r$ на матрицу $\tilde{\mathcal{L}}_r^T$, вместо $\operatorname{vec} M$ будем иметь $\operatorname{vec} \widehat{M}$. Поэтому согласно утверждению леммы 3.2 наряду с (3.10) справедливо представление

$$\Delta^{Q_B}_{svec}(X) = \tilde{\mathcal{D}}_n^T (Q_B \otimes Q_B) \tilde{\mathcal{L}}_r^T D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B) \tilde{\mathcal{L}}_r (Q_B^T \otimes Q_B^T) \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{P}(X_{Q_B}) \operatorname{svec} C,$$

которое с учетом введенного обозначения (3.5) записывается как (3.16).

Утверждение доказано.

Отметим, что для направления $\Delta^{Q_B}(X)$ в пространстве $\mathbb{S}^n$ сохраняются равенства и неравенство из утверждения 2.2. Кроме того, из приведенных выкладок следует, что зависимость $u(Z)$ также можно свести к зависимости $u(X)$, а именно

$$u = u(X) = \Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}\operatorname{svec} C. \tag{3.17}$$

Недостатком направления $\Delta^{Q_B}(X)$ является невозможность, двигаясь вдоль него, покинуть минимальную грань $\mathcal{G}_{\min}(X;\mathcal{F}_P)$. Поэтому, чтобы преодолеть этот недостаток, следует несколько изменить подход к выбору направления перемещения.

4. Возмущенное направление

Пусть по-прежнему точка X принадлежит границе $\mathcal{F}_P$ и $V(X)$ не есть положительно полуопределенная матрица. Для $V(X)$ также имеет место разложение $V(X) = HD(\theta)H^T$, где H — ортогональная матрица со столбцами h_i, $i \in J^n$, $\theta \in \mathbb{R}^n$ — вектор собственных значений $V(X)$. Считаем, что ранг матрицы $V(X)$ равен $s \le n$ и первым s столбцам $h_1, h_2, \ldots, h_s$ матрицы H соответствуют ненулевые собственные значения $V(X)$. Тогда

$$V(X) = \sum_{j=1}^{s}\theta_j H_j, \qquad H_j = h_j h_j^T. \tag{4.1}$$

В силу сделанного предположения относительно матрицы $V(X)$ среди ее собственных значений найдется хотя бы одно отрицательное. Пусть это будет значение θ^{j_*}. Ему соответствует собственный вектор h_{j_*}. Предположим, что h_{j_*} не принадлежит подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$, порожденному столбцами матрицы Q_B. Тогда согласно (4.1) $V^{h_{j_*}}(X) = h_{j_*}^T V(X) h_{j_*} = \theta^{j_*} < 0$.

Возьмем далее некоторое $\varepsilon > 0$. Теперь вместо направления $\Delta^{Q_B}(X)$, принадлежащего минимальной грани, нас будет интересовать направление

$$\Delta^{Q_B,\,h_{j_*}}(X) = \Delta^{Q_B}(X) + \varepsilon\,\Delta^{h_{j_*}}(X), \tag{4.2}$$

где

$$\Delta^{Q_B}(X) = Q_B\Lambda_B Q_B^T, \qquad \Lambda_B = D(\eta_B)\circ V^{Q_B}(\tilde{u}), \qquad \Delta^{h_{j_*}}(X) = V^{h_{j_*}}(\tilde{u})H_{j_*}. \tag{4.3}$$

Здесь первое направление $\Delta^{Q_B}(X)$ принадлежит грани $\mathcal{G}_{\min}(X;\mathbb{S}^n_+)$, содержащей точку X. Поскольку $h_{j_*} \notin \mathcal{L}(Q_B)$, второе направление $\Delta_{h_{j_*}}(X)$ выводит за пределы этой грани. Вектор двойственных переменных $\tilde{u}$ теперь будем искать, исходя из условий, что для возмущенного вектора перемещений $\Delta(X) = \Delta^{Q_B,h_{j_*}}(X)$ сохраняются равенства $A_i \bullet \Delta(X) = 0$, $i \in J^m$.

Пусть $\tilde{G}_{h_{j_*}} = (h_{j_*}^T \otimes h_{j_*}^T)\tilde{\mathcal{D}}_n$ и $\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}} = \tilde{G}^T_{h_{j_*}}\tilde{G}_{h_{j_*}}$. Введем обозначения:

$$\psi = \tilde{G}_{h_{j_*}}\mathcal{A}^T_{svec}\Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\mathcal{A}_{svec}\tilde{G}^T_{h_{j_*}} > 0, \qquad c(\varepsilon,\psi) = (1+\varepsilon\psi)^{-1} > 0.$$

Матрица $\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}$ — симметричная порядка $n_\triangle$.

Лемма 4.1. *Пусть X — регулярная граничная точка $\mathcal{F}_P$ и собственный вектор h_{j_*} матрицы $V(X)$ не принадлежит $\mathcal{L}(Q_B)$. Тогда для вектора $\tilde{u}$ справедливо разложение $\tilde{u} = u + \varepsilon\Delta u$, где u определяется согласно* (3.17) *и*

$$\Delta u = c(\varepsilon,\psi)\,\Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\,\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\operatorname{svec} C. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. После подстановки выражения для $\Delta^{Q_B,h_{j_*}}(X)$ из (4.2) имеем

$$A_i \bullet [Q_B(D(\eta_B)\circ V^{Q_B}(\tilde{u}))Q_B^T + \varepsilon\, V^{h_{j_*}}(\tilde{u})H_{j_*}] = 0, \qquad i \in J^m. \tag{4.5}$$

Представим равенства (4.5) в векторном виде. Прежде всего выразим в векторном виде первое слагаемое из левой части (4.5):

$$\langle \mathrm{svec}\, A_i^{Q_B}, \mathrm{svec}\,(D(\eta_B) \circ V^{Q_B}(\tilde{u}))\rangle = \langle \mathrm{svec}\, A_i^{Q_B}, D(\tilde{\eta}_B^{\otimes})\, \mathrm{svec}\, V^{Q_B}(\tilde{u})\rangle. \tag{4.6}$$

Если воспользоваться обозначением (3.5) для матрицы $\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}$, то, объединяя все правые части в (4.6), получаем, что эти правые части можно записать в виде

$$\mathcal{A}_{svec}^{Q_B} D^{\otimes}(\tilde{\eta}_B)\, \mathrm{svec}\, V^{Q_B}(\tilde{u}) = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}\, \mathrm{svec}\, C - \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}(\mathcal{A}_{svec})^T \tilde{u}.$$

Далее, поскольку

$$V^{h_{j*}}(\tilde{u}) = C^{h_{j*}} - \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}^i A_i^{h_{j*}} = h_{j*}^T C h_{j*} - \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}^i h_{j*}^T A_i h_{j*},$$

то $V^{h_{j*}}(\tilde{u}) = (h_{j*}^T \otimes h_{j*}^T)(\mathrm{vec}\, C - \mathcal{A}_{vec}^T \tilde{u})$, или, с учетом симметричности матриц,

$$V^{h_{j*}}(\tilde{u}) = (h_{j*}^T \otimes h_{j*}^T)\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathrm{svec}\, C - \mathcal{A}_{svec}^T \tilde{u}).$$

Учтем также, что

$$A_i \bullet H_{j*} = \mathrm{tr}\,(A_i\, H_{j*}) = \mathrm{tr}(h_{j*}^T A_i h_{j*}) = A_i^{h_{j*}} = (h_{j*}^T \otimes h_{j*}^T)\tilde{\mathcal{D}}_n\, \mathrm{svec}\, A_i,$$

откуда $\mathcal{A}_{vec}^{h_{j*}} = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{\mathcal{D}}_n^T (h_{j*} \otimes h_{j*})$. Следовательно,

$$\mathcal{A}_{svec}^{h_{j*}} \mathrm{svec}\, V^{h_{j*}}(\tilde{u}) = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}(\mathrm{svec}\, C - \mathcal{A}_{svec}^T \tilde{u}).$$

Таким образом, система уравнений (4.5) относительно вектора $\tilde{u}$ принимает вид

$$[\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_{Q_B}^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T + \varepsilon\, \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T]\tilde{u} = [\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_{Q_B}^{\otimes} + \varepsilon\, \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}]\mathrm{svec}\, C. \tag{4.7}$$

Обозначим: $\tilde{\Gamma}(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}) = \Gamma(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}) + \Gamma_p(\tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes})$, где матрица $\Gamma(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes})$ определена в (3.8), а вторая матрица $\Gamma_p(\tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes})$ имеет вид $\Gamma_p(\tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}) = \varepsilon\, \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T$. Матрица $\tilde{\Gamma}(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}, \tilde{E}_{h_{j*}^{\otimes}})$ неособая, поскольку в силу регулярности точки X матрица $\Gamma(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes})$ положительно определенная. Тогда, разрешая систему уравнений (4.7), находим

$$\tilde{u} = \tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes})[\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_{Q_B}^{\otimes} + \varepsilon\, \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}]\mathrm{svec}\, C.$$

Применим формулу Шермана—Моррисона—Вудберри для обращения матрицы $\tilde{\Gamma}(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes}, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes})$. Полагая для упрощения записи $\Gamma = \Gamma(\tilde{X}_{Q_B}^{\otimes})$, имеем

$$\tilde{\Gamma}^{-1} = \Gamma^{-1} - \varepsilon(1 + \varepsilon\psi)^{-1}\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T\, \Gamma^{-1}.$$

Обозначим далее для сокращения записи $F_1 = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{X}_{Q_B}^{\otimes} \mathrm{svec}\, C$, $F_2 = \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}} \mathrm{svec}\, C$. Тогда

$$\tilde{u} = \Gamma^{-1}F_1 - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T\, \Gamma^{-1}F_1 + \varepsilon\, \Gamma^{-1}F_2 - \varepsilon^2 c(\varepsilon,\psi)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\, E_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T\, \Gamma^{-1}F_2$$

или, с учетом выражения для $u = \Gamma^{-1}F_1$, имеем

$$\tilde{u} = \{I_m - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T\}u + \varepsilon\, \Gamma^{-1}\{I_m - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T\, \Gamma^{-1}\}F_2.$$

Если, кроме того, принять во внимание выражение для F_2, то получаем

$$\tilde{u} = \{I_m - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\, \mathcal{A}_{svec}^T\}u + \varepsilon\, \Gamma^{-1}\{\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes} - \varepsilon\psi c(\varepsilon,\psi)\mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}_{h_{j*}}^{\otimes}\}\mathrm{svec}\, C$$

или

$$\tilde{u} = \{I_m - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\,\mathcal{A}^T_{svec}\}u + \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\,\mathrm{svec}\,C. \tag{4.8}$$

Из (4.8) приходим к выводу, что для $\tilde{u}$ справедливо разложение $\tilde{u} = u + \varepsilon\Delta u$, в котором

$$\Delta u = c(\varepsilon,\psi)[\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}} - \Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\,\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}]\,\mathrm{svec}\,C,$$

причем Δu с помощью матрицы $\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})$, введенной в (3.6), можно записать в виде (4.4).

Лемма доказана.

Найдем далее выражение для $\Delta^{Q_B,h_{j_*}}(X)$.

Утверждение 4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1. *Тогда направление* $\Delta^{Q_B,h_{j_*}}(X)$ *в векторном представлении имеет вид*

$$\Delta^{Q_B,h_{j_*}}_{svec}(X) = [\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) + \tilde{c}(\varepsilon,\psi)\mathcal{P}^T(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})]\,\mathrm{svec}C, \tag{4.9}$$

где $\tilde{c}(\varepsilon,\psi) = \varepsilon c(\varepsilon,\psi) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (4.3), (3.5) и учитывая утверждения лемм 3.2 и 4.1, имеем

$$\begin{aligned}
\Delta^{Q_B}_{svec}(X) &= \tilde{\mathcal{L}}_n(Q_B\otimes Q_B)\,\mathrm{vec}(D(\eta_B)\circ V^{Q_B}(\tilde{u})) = \tilde{\mathcal{L}}_n(Q_B\otimes Q_B)D^{\otimes}(\eta_B)\,\mathrm{vec}\,V^{Q_B}(\tilde{u})\\
&= \tilde{\mathcal{L}}_n(Q_B\otimes Q_B)D^{\otimes}(\eta_B)(Q_B^T\otimes Q_B^T)\tilde{\mathcal{D}}_n\,\mathrm{svec}\,V(\tilde{u})\\
&= \tilde{\mathcal{L}}_n(Q_B\otimes Q_B)\tilde{\mathcal{D}}_r\tilde{\mathcal{L}}_r D^{\otimes}(\eta_B)\mathcal{D}_r\tilde{\mathcal{L}}_r(Q_B^T\otimes Q_B^T)\tilde{\mathcal{D}}_n\,\mathrm{svec}\,V(\tilde{u})\\
&= \tilde{\mathcal{L}}_n(Q_B\otimes Q_B)\tilde{\mathcal{D}}_r D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B)\tilde{\mathcal{L}}_r(Q_B^T\otimes Q_B^T)\tilde{\mathcal{D}}_n\,\mathrm{svec}\,V(\tilde{u}) = \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}(\mathrm{svec}\,V(u) - \varepsilon\mathcal{A}^T_{svec}\Delta u)\\
&= \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}[I_{n_\triangle} - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}]\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\,\mathrm{svec}\,C.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Соответственно для $\Delta^{h_{j_*}}(X)$ получаем

$$\begin{aligned}
\Delta^{h_{j_*}}_{svec}(X) &= \mathrm{svec}\,(h_{j_*}V^{h_{j_*}}(\tilde{u})\,h^T_{j_*}) = \tilde{\mathcal{L}}_n(h_{j_*}\otimes h_{j_*})\,\mathrm{vec}(h^T_{j_*}V(\tilde{u})h_{j_*})\\
&= \tilde{\mathcal{L}}_n(h_{j_*}\otimes h_{j_*})(h^T_{j_*}\otimes h^T_{j_*})\tilde{\mathcal{D}}_n\,\mathrm{svec}\,V(\tilde{u}) = \tilde{\mathcal{L}}_n(h_{j_*}\otimes h_{j_*})(h^T_{j_*}\otimes h^T_{j_*})\tilde{\mathcal{D}}_n[\mathrm{svec}\,V(u) - \varepsilon\mathcal{A}^T_{svec}\,\Delta u]\\
&= \tilde{\mathcal{L}}_n(h_{j_*}\otimes h_{j_*})(h^T_{j_*}\otimes h^T_{j_*})\tilde{\mathcal{D}}_n[I_{n_\triangle} - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}]\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\,\mathrm{svec}\,C\\
&= \tilde{\mathcal{D}}^T_n(h_{j_*}\otimes h_{j_*})(h^T_{j_*}\otimes h^T_{j_*})\tilde{\mathcal{D}}_n[I_{n_\triangle} - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}]\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\,\mathrm{svec}\,C\\
&= \tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}[I_{n_\triangle} - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}]\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\,\mathrm{svec}\,C.
\end{aligned}$$

Так как $\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}} = \tilde{G}^T_{h_{j_*}}\tilde{G}_{h_{j_*}}\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{G}^T_{h_{j_*}}\tilde{G}_{h_{j_*}} = \psi\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}$, поэтому $\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}[I_{n_\triangle} - \varepsilon c(\varepsilon,\psi)\mathcal{A}^T_{svec}\,\Gamma^{-1}\mathcal{A}_{svec}\,\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}] = (1-\varepsilon\psi c(\varepsilon,\psi))\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}} = c(\varepsilon,\psi)\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}$ и, следовательно,

$$\Delta^{h_{j_*}}_{svec}(X) = c(\varepsilon,\psi)\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\,\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\,\mathrm{svec}\,C. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) приходим к (4.9).

Утверждение доказано.

Отметим, что для соответствующего направления $\Delta(X) = \Delta^{Q_B,h_{j_*}}(X)$ в пространстве $\mathbb{S}^n$ сохраняются равенства и неравенство из утверждения 2.2.

5. Итерационный процесс

Рассмотрим обобщение итерационного процесса (2.10), в котором помимо $\Delta_{svec}(X)$ используются направления $\Delta_{svec}^{Q_B}(X)$ или $\Delta_{svec}^{Q_B, h_{j_*}}(X)$.

Пусть теперь направление (2.9) берется в качестве $\Delta_{svec}(X)$ только в том случае, когда $X \succ 0$, т. е. когда точка X принадлежит относительной внутренности множества $\mathcal{F}_P$. В противном случае в качестве $\Delta_{svec}(X)$ берем направление $\Delta_{svec}^{Q_B}(X)$, причем если существует такой собственный вектор h_{j_*} матрицы $V(X)$, которому соответствует отрицательное собственное значение, и при этом h_{j_*} не принадлежит минимальной грани $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathbb{S}^n_+)$, то полагаем $\Delta_{svec}(X) = \Delta_{svec}^{Q_B, h_{j_*}}(X)$.

Обозначим через $\mathrm{Matr}(\mathrm{svec}\, M)$ симметричную матрицу M, которой соответствует вектор $\mathrm{svec}\, M$, и рассмотрим теперь вопрос о том, будет ли матрица $\mathrm{Matr}(\mathrm{svec\ X} - \alpha \Delta_{svec}^{Q_B, h_{j_*}}(X))$ положительно полуопределенной по крайней мере для α достаточно малых.

Предполагая, что точка X является регулярной, разобьем вектор $\Delta_{svec}^{Q_B, h_{j_*}}(X)$ на два слагаемых: $\Delta_{svec}^{Q_B, h_{j_*}}(X) = \Delta_{svec}^{(1)}(X) + \Delta_{svec}^{(2)}(X)$, где

$$\Delta_{svec}^{(1)}(X) = \tilde{X}^{\otimes}_{Q_B} [I_{n_\triangle} - \tilde{c}(\varepsilon, \psi) \mathcal{A}^T_{svec}\, \Gamma^{-1} \mathcal{A}_{svec}\, \tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}] \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\, \mathrm{svec}\, C,$$

$$\Delta_{svec}^{(2)}(X) = \tilde{c}(\varepsilon, \psi) \tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\, \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\, \mathrm{svec}\, C.$$

Им соответствуют направления $\Delta^{(1)}(X)$ и $\Delta^{(2)}(X)$ в матричном пространстве $\mathbb{S}^n$. Первое направление $\Delta^{(1)}(X)$ принадлежит грани $\mathcal{G}_{\min}(X; \mathcal{S}^n_+)$, второе направление $\Delta^{(2)}(X)$ выводит за пределы этой грани.

Имеем $\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\mathrm{svec}\, C = \mathrm{svec}\, V(u)$. Следовательно, $\tilde{G}_{h_{j_*}} \tilde{\mathcal{D}}_n\, \mathrm{svec}\, V(u) = \mathrm{vec}\, V^{h_{j_*}}(u) = \theta_{j_*} < 0$. Поэтому $\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}\, \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\, \mathrm{svec}\, C = \tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}} \mathrm{svec}\, V(u) = \theta_{j_*} \tilde{\mathcal{D}}^T_n\, \mathrm{svec}\, H_{j_*} = \theta_{j_*} \tilde{\mathcal{L}}_n\, \mathrm{svec}\, H_{j_*}$. Двигаясь из точки X с шагом $\alpha > 0$ вдоль направления, обратному к направлению $\Delta(X) = \Delta^{(1)}(X) + \Delta^{(2)}(X)$, получаем

$$X(\alpha) = X - \alpha \Delta(X) = Q_B \left(Z - \alpha \Delta(Z)\right) Q_B^T - \alpha \tilde{c}(\varepsilon, \psi) \theta_{j_*} H_{j_*}, \tag{5.1}$$

где $Z = D(\eta_B)$, а $\Delta(Z)$ — симметричная матрица порядка r, которой соответствует вектор

$$\Delta_{vec}(Z) = D(\eta^{\otimes}_B)(Q_B^T \otimes Q_B^T) \tilde{\mathcal{D}}_n [I_{n_\triangle} - \tilde{c}(\varepsilon, \psi) \mathcal{A}^T_{vec}\, \Gamma^{-1} \mathcal{A}_{vec}\, \tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}}]\, \mathrm{svec}\, V(u).$$

Понятно, что матрица $Z - \alpha \Delta(Z)$ при α достаточно малых будет оставаться положительно определенной. Так как H_{j_*} — положительно полуопределенная матрица единичного ранга и $\theta_{j_*} < 0$, то второе слагаемое в (5.1) также будет оставаться положительно полуопределенной матрицей, причем для любого $\alpha > 0$. Таким образом, максимально возможный шаг α_k определяется из условия, когда положительно определенная матрица $Z - \alpha \Delta(Z)$ при увеличении α впервые становится положительно полуопределенной.

Такой шаг α_k на k-й итерации можно найти, если воспользоваться, например, коньюктивным приведением двух симметричных матриц Z_k и $\Delta(Z_k)$, одна из которых является положительно определенной. Тогда, взяв некоторую невырожденную матрицу P порядка r, получаем

$$P^T Z_k P = I_n, \qquad P^T \Delta(Z_k) P = D(\omega_k), \tag{5.2}$$

где $\omega_k = [\omega_k^1, \ldots, \omega_k^r]$ — вектор, составленный из собственных чисел матрицы $\hat{Z}_k = Z_k^{-1} \Delta(Z_k)$. Все числа $\omega_k^1, \ldots, \omega_k^r$ действительные. Согласно (5.2) имеем $\Delta(Z_k) = (P^{-1})^T D(\omega_k) P^{-1}$ и $Z_k = (P^{-1})^T P^{-1}$. Поэтому

$$Z_{k+1} = (P^{-1})^T [I_k - \alpha_k D(\omega_k)] P^{-1} = (P^{-1})^T D(e - \alpha_k \omega_k) P^{-1},$$

где e — r-мерный вектор, состоящий из единиц.

Пусть $\omega_k^{\max}$ — максимальное положительное число из набора собственных чисел $\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n$ и $\hat{\alpha}_k = 1/\omega_k^{\max}$. В качестве α_k берем $\hat{\alpha}_k$. Отсутствие такого конечного положительного числа $\omega_k^{\max}$ означает, что задача (1.1) не имеет решения.

Если все точки траектории оказываются регулярными, то итерационный процесс (2.10) полностью определен. Более того, если сделать дополнительное предположение, что $m = r_\triangle$ для некоторого $r > 0$ $\big($такое условие выполняется, в частности, когда аффинное многообразие $\mathcal{N}_A$ задается через линейное отображение одного матричного пространства в другое матричное пространство (см., например, [9])$\big)$, то в тех случаях, когда текущая регулярная точка X_k оказывается крайней, последующая точка X_{k+1} также будет крайней, т.е. метод начинает себя вести как симплекс-метод.

Покажем, что рассмотренный итерационный процесс позволяет для любой стартовой точки $X_0 \in \mathcal{F}_P$ попасть в некоторую окрестность $\mathcal{S}(X_*)$ решения X_* задачи (1.1), где уже можно применять основной вариант метода (2.10). Обозначим $\mathcal{U}_f = \{X \in \mathcal{F}_P \colon C \bullet X \leq f\}$. Если f_* — оптимальное значение целевой функции в задаче (1.1) и множество $\mathcal{U}_{f_*}$ состоит из единственной точки (например, если для решений прямой и двойственной задач выполнено условие строгой дополнительности), то всегда можно указать $\tilde{f} > f_*$ такое, что $\mathcal{U}_{\tilde{f}} \subseteq \mathcal{S}(X_*)$. Считаем, что все точки траектории $\{X_k\}$ являются регулярными.

Теорема 5.1. *Пусть точка $X_0 \in \mathcal{F}_P$ такова, что множество $\mathcal{U}_{f_0}$ ограничено. Тогда можно указать номер $K \geq 1$ такой, что $X_k \in \mathcal{U}_{\tilde{f}}$ для $k \geq K$.*

Доказательство. Предположим, что итерационный процесс генерирует бесконечную последовательность точек, ни одна из которых не принадлежит множеству $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$. Так как множество $\mathcal{U}_{f_0}$ ограничено, то у последовательности $\{X_k\}$ существуют предельные точки. Пусть $X_{k_l} \to \bar{X}$.

Считаем для общности, что в качестве направлений перемещения используются возмущенные направления $\Delta_{svec}^{Q_B, h_{j*}}(X)$, вычисленные в соответствующих точках X_{k_l} (в противном случае следует в качестве $\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j*}}$ взять нулевую матрицу). Обе матрицы $\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})$ и $\mathcal{P}^T(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\tilde{E}^{\otimes}_{h_{j*}}\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})$ в (4.9) — симметричные и положительно полуопределенные. Симметричность первой матрицы следует из разложения $\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}\mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) = (\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}$. Здесь

$$\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) = I_{n_\triangle} - (\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}\mathcal{A}^T_{svec}\Gamma^{-1}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})\mathcal{A}_{svec}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}$$

— матрица ортогонального проектирования.

Так как все матрицы, входящие в (4.9)), ограничены в совокупности по норме в некоторой окрестности точки $\bar{X}$, то длина шагов α_{k_l} не может стремиться к нулю, т.е. они ограничены снизу положительным числом. Кроме того, последовательность значений целевой функции $\{C \bullet X_{k_l}\}$ монотонно убывающая и ограниченная снизу значением $C \bullet \bar{X}$. Поэтому в предельной точке $X = \bar{X}$ должно выполняться

$$\|\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}\operatorname{svec} C\|_F = 0, \tag{5.3}$$

где $\|M\|_F$ — норма Фробениуса матрицы M, причем в (5.3) ортогональная матрица Q из (2.12), а также ее разбиение на подматрицы Q_B и Q_N соответствуют точке $\bar{X}$. Отсюда следует, что вектор $(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}\operatorname{svec} C$ принадлежит пространству столбцов матрицы $(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}\mathcal{A}^T_{svec}$, т.е. можно указать такое $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, что

$$(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}\operatorname{svec} C = (\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}\mathcal{A}^T_{svec}\bar{u}. \tag{5.4}$$

Равенство (5.4) сохранится и после умножения его обеих частей на матрицу $(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B})^{1/2}$. Тогда его можно переписать в виде

$$\tilde{\mathcal{D}}_n(Q_B \otimes Q_B)\tilde{\mathcal{L}}_r^T D(\tilde{\eta}^{\otimes}_B)[\operatorname{svec} C^{Q_B} - (\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T\bar{u}] = 0_{n_\triangle}. \tag{5.5}$$

Поскольку матрица, стоящая в (5.5) перед квадратной скобкой, имеет полный ранг по столбцам, то это означает, что $\operatorname{svec} V^{Q_B}(\bar{u}) = 0_{r_\triangle}$. Из-за того что матрица C не принадлежит линейному подпространству, порожденному матрицами A_i, $i \in J^m$, это возможно только в том случае, когда $r_\triangle \leq m$, где r — ранг матрицы $\bar{X}$. Таким образом, $\bar{X}$ — крайняя точка множества $\mathcal{F}_P$.

Пусть $M^Q = Q^T M Q$. Имеем $\bar{X}^Q \succeq 0$. Кроме того, из $\bar{X}^Q \bullet V^Q(\bar{u}) = 0$ следует, что $\bar{X} \bullet \bar{V} = 0$, где $\bar{V} = \bar{V}(\bar{u})$. Но точка $\bar{X}$ не есть решение задачи, поэтому у матрицы $\bar{V}$ существует отрицательное собственное значение θ_{j_*}, причем соответствующий собственный вектор h_{j_*} не принадлежит подпространству $\mathcal{L}(Q_B)$, ибо иначе матрица $\bar{V}^{Q_B}$ была ненулевой. Далее, так как $\operatorname{svec} \bar{V} = \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \operatorname{svec} C$, то $\langle \operatorname{svec} C, \mathcal{P}^T(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \tilde{E}^{\otimes}_{h_{j_*}} \mathcal{P}(\tilde{X}^{\otimes}_{Q_B}) \operatorname{svec} C \rangle = \theta_{j_*} < 0$. Это приводит к тому, что при X_{k_l}, достаточно близких к $\bar{X}$, значение функции $C \bullet X$ убывает на величину, ограниченную снизу некоторым положительным числом. В результате на некоторой итерации должно стать $C \bullet X_{k_l} < C \bullet \bar{X}$, что невозможно. Поэтому $X_k \in \mathcal{U}_{\tilde{f}}$ для k достаточно больших.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В силу произвольности выбора уровня $\tilde{f}$ можно утверждать, что описанный итерационный процесс сходится глобально на множестве $\mathcal{F}_P$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
2. Handbook of Semidefinite Programming / eds. H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 656 p.
3. **Бабынин М. С., Жадан В. Г.** Прямой метод внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1780–1801.
4. **Жадан В. Г.** Прямой мультипликативно-барьерный метод с наискорейшим спуском для линейной задачи полуопределенного программирования // Оптимизация и приложения. Вып. 2. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 107–131.
5. **Жадан В. Г.** Конечные барьерно-проективные методы для линейного программирования // Методы оптимизации и их приложения: тр. XI Байкальской междунар. шк.-семинара. Пленарные доклады. Иркутск: Изд-во СЭИ СО РАН, 1998. С. 140–144.
6. **Арнольд В. И.** О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2(158). С. 101–114.
7. **Alizadeh F., Haeberly J.-P. F., Overton M. L.** Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Math. Programming. Ser. B. 1997. Vol. 77, no. 1. P. 111–128.
8. **Magnus J. R., Neudecker H.** The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Alg. Disc. Methods. 1980. Vol. 1, no. 4. P. 422–449.
9. **Lasserre J.B.** Linear programming with positive semi-definite matreces // Math. Problems in Engineering. 1996. Vol. 2, iss. 6. P. 499–522.

Жадан Виталий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила 01.02.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 517.95

ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА[1]

С. В. Захаров

Изучается асимптотика обобщенного решения стационарной системы уравнений Навье — Стокса в ограниченной области Ω трехмерного пространства при ограничении на обобщенное число Рейнольдса. Методами функционального анализа доказана теорема о приближении точного решения однородной краевой задачи частичными суммами найденного ряда с любой степенью точности по норме пространства $C(\overline{\Omega})$. Для нестационарной системы уравнений Навье — Стокса доказано асимптотическое приближение по норме пространства $L_2(\Omega)$.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, асимптотическое приближение.

S. V. Zakharov. Justification of the asymptotics of solutions of the Navier–Stokes system for low Reynolds numbers.

Asymptotics of a generalized solution of the steady-state Navier–Stokes system of equations in a bounded domain Ω of the three-dimensional space is studied under constraint on the generalized Reynolds number. By methods of functional analysis a theorem about approximation of the exact solution of the homogeneous boundary value problem by partial sums of the found series up to any degree of accuracy in the norm of space $C(\overline{\Omega})$ is proved. For the non-steady-state Navier–Stokes system of equations asymptotic approximation in the norm of space $L_2(\Omega)$ is proved.

Keywords: the Navier–Stokes system, asymptotic approximation.

1. Стационарное течение

Рассмотрим систему уравнений Навье — Стокса, описывающую стационарное поле скоростей v^σ вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области Ω трехмерного пространства:

$$v^\rho \partial_\rho v^\sigma - \varepsilon \triangle v^\sigma = -\partial_\sigma p + f^\sigma, \tag{1.1}$$

$$\partial_\sigma v^\sigma = 0, \tag{1.2}$$

где $\partial_\sigma = \partial/\partial x_\sigma$, $\sigma, \rho \in \{1,2,3\}$, по повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3, $\varepsilon > 0$, $\triangle$ — оператор Лапласа. На границе области Ω поставим однородное краевое условие

$$v^\sigma|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3}$$

Будем считать, что вся потенциальная составляющая внешних сил уже содержится в градиенте давления $\partial_\sigma p$, а соленоидальная составляющая такова, что интеграл

$$\int\limits_\Omega f^\sigma(x)\Phi^\sigma(x)dx$$

определяет ограниченный функционал над Φ в $H(\Omega)$ (для этого будет достаточно потребовать, например, $f^\sigma \in L_{6/5}(\Omega)$) и удовлетворяется следующее ограничение на обобщенное число Рейнольдса:

$$\frac{|f|_{H(\Omega)}}{\mu_1^{1/4}\varepsilon^2} < \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.289, \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00322) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

где

$$|f|_{H(\Omega)} = \sup_{\|\Phi\|=1} \left| \int\limits_{\Omega} f^{\sigma}(x)\Phi^{\sigma}(x)dx \right|,$$

$\mu_1 = \mu_1(\Omega)$ — наименьшее собственное значение оператора $-\triangle$ с условием (1.3). Здесь и далее используется гильбертово пространство $H(\Omega)$ соленоидальных векторных полей, понимаемое как пополнение пространства финитных соленоидальных вектор-функций со скалярным произведением

$$[U, V] = \int\limits_{\Omega} \partial_{\sigma} U^{\rho}(x) \partial_{\sigma} V^{\rho}(x)dx$$

и нормой

$$\|U\| = \left(\int\limits_{\Omega} \partial_{\sigma} U^{\rho}(x) \partial_{\sigma} U^{\rho}(x)dx \right)^{1/2}.$$

По теореме О.А. Ладыженской [1] существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) с условием (1.4), т. е. такой элемент $v \in H(\Omega)$, что $[A_0 v + F - \varepsilon v, \Phi] = 0$ при всех $\Phi \in H(\Omega)$, где

$$\forall \Phi \in H(\Omega) \quad [A_0 v, \Phi] = \int\limits_{\Omega} v^{\sigma} v^{\rho} \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx, \tag{1.5}$$

$$F \in H(\Omega) \colon \forall \Phi \in H(\Omega) \quad [F, \Phi] = \int\limits_{\Omega} f^{\sigma} \Phi^{\sigma} dx. \tag{1.6}$$

Причем для этого решения справедлива оценка

$$\|v\| < \frac{\mu_1^{1/4} \varepsilon}{2\sqrt{3}}. \tag{1.7}$$

Представляет интерес естественный вопрос о поведении решения $v(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть для поля внешних сил имеет место разложение

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{1.8}$$

т. е.

$$\forall N \geqslant 2 \; \exists M_N > 0 \colon \left| f - \sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n f_n \right|_{H(\Omega)} \leqslant M_N \varepsilon^{N+1},$$

а коэффициенты f_n обладают теми же свойствами интегрируемости, что и f. В таких предположениях в работе [2] построен асимптотический ряд

$$v(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x), \tag{1.9}$$

приближающий точное решение $v(x, \varepsilon)$ по норме пространства $H(\Omega)$. Кроме того, в [3] аналогичный результат получен для обобщенного решения стационарной системы Навье — Стокса на многообразии, диффеоморфном двумерной сфере.

Схема построения асимптотического ряда состоит в следующем. Для функции (1.6) из разложения (1.8) получаем ряд

$$F(x, \varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n F_n(x), \tag{1.10}$$

т. е. $\forall N \geqslant 2 \ \ \exists K_N > 0 \ : \|F - \sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n F_n\|_{H(\Omega)} \leqslant K_N \varepsilon^{N+1}$, где

$$F_n \in H(\Omega)\colon \forall \Phi \in H(\Omega) \quad [F_n, \Phi] = \int\limits_{\Omega} f_n^{\sigma}(x)\Phi^{\sigma}(x)dx.$$

Чтобы найти коэффициенты $v_n(x)$, подставим ряды (1.10) и (1.9) в функциональное уравнение $A_0 v + F = \varepsilon v$ и воспользуемся формальным тождеством

$$\left[A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n, \Phi\right] = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=1}^{n-1} \int\limits_{\Omega} v_{n-m}^{\sigma} v_m^{\rho} \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx,$$

которое вытекает из формулы (1.5). В результате приравнивания выражений при одинаковых степенях ε получаем рекуррентную систему уравнений для коэффициентов v_n:

$$A_0 v_1 + F_2 = v_1, \tag{1.11}$$

$$A_1 v_2 + F_3 = v_2, \tag{1.12}$$

....

$$A_1 v_n + \widetilde{F}_{n+1} = v_n, \tag{1.13}$$

где

$$[A_1 w, \Phi] = \int\limits_{\Omega} (v_1^{\sigma} w^{\rho} + v_1^{\rho} w^{\sigma}) \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx, \tag{1.14}$$

$$[\widetilde{F}_{n+1}, \Phi] = [F_{n+1}, \Phi] + \sum_{m=2}^{n-1} \int\limits_{\Omega} v_{n+1-m}^{\sigma} v_m^{\rho} \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx. \tag{1.15}$$

По теореме О.А. Ладыженской [1] уравнение (1.11) имеет единственное решение, поскольку выполнено достаточное условие

$$\|F_2\| < \frac{\mu_1^{1/4}}{2\sqrt{3}}, \tag{1.16}$$

вытекающее из предположения (1.4) и соотношения $|f|_H = \|F\| = \varepsilon^2 \|F_2\| + O(\varepsilon^3)$ с достаточно малым ε. Кроме того, справедлива оценка

$$\|v_1\| \leqslant \|F_2\|. \tag{1.17}$$

Разрешимость остальных уравнений установим методом Лерэ — Шаудера [4]. Для этого с помощью теорем вложения [5] доказывается, что оператор A_1 компактен. Далее предполагая, что $\forall \lambda \in [0,1]$ существует решение уравнения $\lambda(A_1 v_2 + F_3) = v_2$, найдем априорную оценку для v_2, т. е. покажем ограниченность решений по совокупности. Из предыдущего уравнения вытекает соотношение $\|v_2\|^2 = \lambda[A_1 v_2, v_2] + \lambda[F_3, v_2]$. Используя формулу (1.14), оценку (1.17), неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} v^{\rho} u^{\sigma} \partial_{\sigma} u^{\rho} dx\right| \leqslant 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|v\| \cdot \|u\|^2 \tag{1.18}$$

и тождество

$$\int\limits_{\Omega} v^{\sigma} u^{\rho} \partial_{\sigma} u^{\rho} dx = \int\limits_{\Omega} v^{\sigma} \partial_{\sigma} |u|^2 dx = 0 \qquad \forall u \in H(\Omega), \tag{1.19}$$

получаем

$$\Big|[A_1 w, w]\Big| \leqslant 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|v_1\| \cdot \|w\|^2 \leqslant 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|F_2\| \cdot \|w\|^2.$$

Тогда
$$\|v_2\|^2 \leqslant 2\sqrt{3}\lambda\mu_1^{-1/4}\|F_2\|\cdot\|v_2\|^2 + \lambda\|F_3\|\cdot\|v_2\|,$$
$$\|v_2\| \leqslant \frac{\lambda\|F_3\|}{1-2\sqrt{3}\lambda\mu_1^{-1/4}\|F_2\|} \leqslant \frac{\|F_3\|}{1-2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4}\|F_2\|},$$
где знаменатель строго больше нуля в силу (1.16). Отсюда по теореме Лерэ — Шаудера вытекает существование решения уравнения (1.12).

Предполагая, что уже найдены решения v_1, v_2, ..., v_{n-1}, докажем разрешимость уравнения (1.13). Из компактности оператора A_1 и формулы (1.15) вытекает компактность отображения $v \mapsto A_1v+\widetilde{F}_{n+1}$. Допустим, что $\forall\lambda\in[0,1]$ существует решение уравнения $\lambda(A_1v_n+\widetilde{F}_{n+1}) = v_n$. Действуя по той же схеме, получаем
$$\|v_n\|^2 = \lambda[A_1v_n, v_n] + \lambda[F_{n+1}, v_n] + \lambda\sum_{m=2}^{n-1}\int\limits_\Omega v^\sigma_{n+1-m}v^\rho_m\partial_\sigma v^\rho_n dx.$$

Тогда
$$\|v_n\|^2 \leqslant 2\sqrt{3}\lambda\mu_1^{-1/4}\|F_2\|\|v_n\|^2 + \lambda\left(\sum_{m=2}^{n-1}\|v_{n+1-m}\|\|v_m\| + \|F_{n+1}\|\right)\|v_n\|.$$

Следовательно,
$$\|v_n\| \leqslant \frac{\sum\limits_{m=2}^{n-1}\|v_{n+1-m}\|\|v_m\| + \|F_{n+1}\|}{1-2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4}\|F_2\|}.$$
Отсюда вытекает существование решения уравнения (1.13).

Допустим, что уравнение (1.13) имеет решения v_n и $\widetilde{v}_n$. Полагая $w = v_n - \widetilde{v}_n$, имеем $A_1w = w$. Умножая скалярно на w, получаем
$$\int\limits_\Omega v_1^\sigma\partial_\sigma|w|^2dx + \int\limits_\Omega v_1^\rho w^\sigma\partial_\sigma w^\rho dx = \|w\|^2.$$

С учетом (1.18) и (1.19) это дает
$$\|w\|^2 \leqslant 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4}\|v_1\|\cdot\|w\|^2, \qquad \|v_1\| \geqslant \frac{\mu_1^{1/4}}{2\sqrt{3}},$$
что противоречит неравенствам (1.17) и (1.16):
$$\|v_1\| \leqslant \|F_2\| < \frac{\mu_1^{1/4}}{2\sqrt{3}}.$$
Тем самым доказана единственность решений v_n и однозначно построен формальный асимптотический ряд (1.9).

Теорема 1. *Пусть $v\in H(\Omega)$ — обобщенное решение краевой задачи* (1.1)–(1.3) *с условием* (1.4). *Тогда $\forall N\geqslant 2$ найдутся $N-1$ функций $v_n\in H(\Omega)$ и число $C>0$ такие, что*
$$\left\|v - \sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon^n v_n\right\|_{H(\Omega)} < C\varepsilon^N. \qquad \square$$

Покажем, что при определенных условиях асимптотика является равномерной.

Теорема 2. *Если граница $\partial\Omega$ и внешние силы $f^\sigma(x)$ достаточно гладкие, чтобы решения $v^\sigma(x)$ и $v_n^\sigma(x)$ обладали непрерывными производными вплоть до третьего порядка (см.* [1, гл. 5, § 4]), *то при $N \geqslant 2$ справедливо равномерное по $x \in \Omega$ асимптотическое представление*

$$v^\sigma(x) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n v_n^\sigma(x) + O\left(\varepsilon^N\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим

$$v^\sigma(x) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n v_n^\sigma(x) + U_N(x)$$

в уравнение (1.1) и воспользуемся уравнениями $\triangle v_n^\sigma - v_1^\rho \partial_\rho v_n^\sigma - v_n^\rho \partial_\rho v_1^\sigma + f_n^\sigma = \partial_\sigma p_n$ для коэффициентов v_n. Получаем

$$\triangle U_N^\sigma - U_N^\rho \partial_\rho S_N^\sigma - v^\rho \partial_\rho U_N^\sigma + \varepsilon^{N+2}\Phi_N^\sigma = \partial_\sigma p - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^{n+1} \partial_\sigma p_n,$$

где

$$S_N^\sigma = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n v_n^\sigma, \qquad \varepsilon^{N+2}\Phi_N^\sigma = f^\sigma - \sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon^n f_n^\sigma + \sum_{n=N+2}^{2N} \varepsilon^n \sum_{i,j} v_i^\rho \partial_\rho v_j^\sigma.$$

Поскольку $\operatorname{div} v = \operatorname{div} v_n = 0$, из теоремы об ортогональном разложении пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [1, гл. 1, § 2]) вытекает ортогональность $\triangle U_N^\sigma$ и $\partial_\sigma p$, $\partial_\sigma p_n$. Тогда умножая полученное уравнение на $\triangle U_N^\sigma$ и интегрируя по $x \in \Omega$, получаем

$$\varepsilon \|\triangle U_N^\sigma\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \triangle U_N^\sigma U_N^\rho \partial_\rho S_N^\sigma dx + \int\limits_\Omega \triangle U_N^\sigma v^\rho \partial_\rho U_N^\sigma dx + \varepsilon^{N+2} \int\limits_\Omega \triangle U_N^\sigma \Phi_N^\sigma dx.$$

Учитывая непрерывность $\partial_\rho S_N^\sigma$ и v^ρ, применим неравенство Гёльдера и оценку $\|U_N\|_{H(\Omega)} \leqslant K_N \varepsilon^N$. В результате имеем

$$\varepsilon \|\triangle U_N^\sigma\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K_{1,N} \|\triangle U_N^\sigma\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|U_N\|_{H(\Omega)} + K_{2,N}\varepsilon^{N+2} \|\triangle U_N^\sigma\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K_{3,N}\varepsilon^N \|\triangle U_N^\sigma\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

Отсюда

$$\|\triangle U_N^\sigma\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K_{3,N}\varepsilon^{N-1}.$$

Воспользуемся непрерывностью вложения $W_2^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ (см. [5]) и неравенством (см. [1])

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant M_0 \|\triangle u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, получаем оценки

$$\|U_N^\sigma\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant M_1 \|U_N^\sigma\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant M_2 \|\triangle U_N\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant M_{3,N}\varepsilon^{N-1}.$$

Тогда

$$\max_{x\in\Omega} \left| v^\sigma(x) - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n v_n^\sigma(x) \right| \leqslant \|U_{N+1}^\sigma\|_{C(\overline{\Omega})} + \varepsilon^{N+1} \|v_{N+1}^\sigma\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant M_{4,N}\varepsilon^N. \qquad \square$$

2. Нестационарное течение

Теперь рассмотрим нестационарную систему уравнений Навье — Стокса

$$\partial_t v^\sigma + v^\rho \partial_\rho v^\sigma - \varepsilon \triangle v^\sigma = -\partial_\sigma p + f^\sigma, \tag{2.20}$$

$$\partial_\sigma v^\sigma = 0 \tag{2.21}$$

с условиями

$$v^\sigma(x,0) = \varepsilon a^\sigma(x), \qquad v^\sigma|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.22}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $a \in W_{2,2}(\Omega) \cap H(\Omega)$,

$$f = \varepsilon^2 f_2(x, \varepsilon t) + \varepsilon^3 f_3(x, t, \varepsilon).$$

Асимптотику построим в виде

$$v = \varepsilon v_1(x, \varepsilon t) + \varepsilon^2 w(x, t, \varepsilon). \tag{2.23}$$

Удобно рассматривать обобщенное решение, понимаемое как соленоидальное поле, удовлетворяющее соотношению

$$\int_0^T \int_\Omega (v_\theta^\sigma \Phi^\sigma + \varepsilon \partial_\rho v^\sigma \partial_\rho \Phi^\sigma - v^\sigma v^\rho \partial_\sigma \Phi^\rho - f^\sigma \Phi^\sigma) dx d\theta = 0 \tag{2.24}$$

для любого соленоидального поля Φ. Полагая

$$s = \varepsilon t, \qquad p = \varepsilon^2 p_2(x, \varepsilon t) + \varepsilon^3 p_3(x, t, \varepsilon),$$

для v_1 получаем начально-краевую задачу

$$\partial_s v_1^\sigma + v_1^\rho \partial_\rho v_1^\sigma - \varepsilon \triangle v_1^\sigma = -\partial_\sigma p_2 + f_2^\sigma, \tag{2.25}$$

$$\partial_\sigma v_1^\sigma = 0, \tag{2.26}$$

$$v_1^\sigma(x,0) = a^\sigma(x), \qquad v_1^\sigma|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.27}$$

Существует единственное решение этой задачи, если (см. [1, гл. VI, §1–§3], теоремы 1 и 4)

$$\left(\|v_1(x,0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \int_0^{T_1} \|f_2(x,s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} ds \right)$$

$$\times \left(\left\| \frac{\partial v_1(x,0)}{\partial s} \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \max_{0 \leqslant s \leqslant T_1} \|f_2(x,s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \int_0^{T_1} \left\| \frac{\partial f_2(x,s)}{\partial s} \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} ds \right) < K(\Omega),$$

где

$$K(\Omega) = \frac{1}{3} \left[\max_{u \in \overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)} \frac{\left(\int_\Omega u^4 dx \right)^{1/2}}{\int_\Omega \sum_{\sigma=1}^3 \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_\sigma} \right)^2 dx} \right]^{-2},$$

а $\dfrac{\partial v_1(x,0)}{\partial s}$ выражается через $a(x)$ посредством уравнения (2.25).

Подставляя (2.23) в уравнение (2.24) и полагая $\Phi = w$ при $0 \leqslant \theta \leqslant t$, $\Phi = 0$ при $t \leqslant \theta \leqslant T$, находим

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega [w_\theta^\sigma w^\sigma + \varepsilon \partial_\rho w^\sigma \partial_\rho w^\sigma - \varepsilon v_1^\rho w^\sigma \partial_\sigma w^\rho - v^\sigma w^\rho \partial_\sigma w^\rho - f_3^\sigma w^\sigma]\, dx\, d\theta = 0,$$

где

$$\int\limits_\Omega v^\sigma \partial_\sigma (w^\rho)^2 dx = 0,$$

поскольку v — соленоидальное поле. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2}\|w(x,t,\varepsilon)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \varepsilon \int\limits_0^t \|w(x,\theta,\varepsilon)\|_H^2 d\theta = \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v_1^\rho w^\sigma \partial_\sigma w^\rho dx\, d\theta + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f_3^\sigma w^\sigma dx\, d\theta,$$

где

$$\left| \int\limits_\Omega v_1^\rho w^\sigma \partial_\sigma w^\rho dx \right| \leqslant C_0 \|v_1\|_H \|w\|_H^2.$$

Из априорных оценок $\|v_1\|_H \leqslant M_1 \|a\|_{\mathbf{L}_2}$ и $\|v\|_H \leqslant M_2 \varepsilon$ вытекает, что $\|w\|_H = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$. Тогда

$$\|w\|_{\mathbf{L}_2}^2 \leqslant \varepsilon C_1 \int\limits_0^t \|w\|_H^2 d\theta + \varepsilon C_2 \int\limits_0^t \|w\|_{\mathbf{L}_2} d\theta.$$

Из этого неравенства получаем $W_\varepsilon^2 \leqslant C_3 \varepsilon^{-1} + C_4 \varepsilon W_\varepsilon$, где $W_\varepsilon = \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant T} \|w\|_{\mathbf{L}_2}$. Поэтому

$$W_\varepsilon \leqslant C_5 \varepsilon^{-1/2}.$$

Учитывая (2.23), приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Для решения v задачи* (2.20)–(2.22) *справедлива оценка*

$$\|v - \varepsilon v_1\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant M \varepsilon^{3/2},$$

где $v_1 = v_1(x, \varepsilon t)$ — это решение задачи (2.25)–(2.27)*, $M > 0$, а норма вычисляется при фиксированном $t \in [0, T]$.* □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961. 204 с.
2. **Захаров С.В.** Регулярная асимптотика обобщенного решения стационарной системы Навье — Стокса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 108–113.
3. **Захаров С.В.** Асимптотика обобщенного решения стационарной системы Навье — Стокса на многообразии, диффеоморфном сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т.19, № 4. С. 119–124.
4. **Гилбарг Д., Трудингер Н.С.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
5. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила 10.02.2014

Том 20 № 2 2014

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЕМ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ С ОДИНАКОВЫМ ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ[1]

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. Доказано, что если G и G_1 — неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно одной характеристики, то графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда либо $\{G, G_1\} = \{A_1(8), A_2(2)\}$, либо $q = q_1$ и пара $\{G, G_1\}$ совпадает с одной из пар $\{B_n(q), C_n(q)\}$, где q нечетно, $\{B_3(q), D_4(q)\}$, $\{C_3(q), D_4(q)\}$.

Ключевые слова: конечная простая группа лиева типа, граф простых чисел, спектр.

M. R. Zinov'eva. Finite simple groups of Lie type over a field of the same characteristic with the same prime graph.

For a finite group G, let $\pi(G)$ be the set of prime divisors of its order, and let $\omega(G)$ be the set of orders of its elements. Define on $\pi(G)$ a graph with the following adjacency relation: distinct vertices r and s from $\pi(G)$ are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$. This graph is called the *Grünberg–Kegel graph* or *prime graph* of the group G and is denoted by $GK(G)$. We prove that, if G and G_1 are nonisomorphic finite simple groups of Lie type over fields of orders q and q_1, respectively, of the same characteristic, then the graphs $GK(G)$ and $GK(G_1)$ coincide if and only if either $\{G, G_1\} = \{A_1(8), A_2(2)\}$ or $q = q_1$ and the pair $\{G, G_1\}$ coincides with one of the pairs $\{B_n(q), C_n(q)\}$ for odd q, $\{B_3(q), D_4(q)\}$, and $\{C_3(q), D_4(q)\}$.

Keywords: finite simple group of Lie type, prime graph, spectrum.

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

В "Коуровской тетради" [1] А.В. Васильев поставил вопрос 16.26:

Существует ли такое натуральное число k, что никакие k попарно неизоморфных конечных неабелевых простых групп не могут иметь один и тот же граф простых чисел? Гипотеза: $k = 5$.

Заметим, что существуют четыре попарно неизоморфные конечные неабелевы простые группы с одинаковым графом простых чисел, а именно, J_2, A_9, $C_3(2)$, $D_4(2)$.

Описаны конечные простые группы, графы простых чисел которых совпадают с графами простых чисел спорадических групп (Хаги [2]) и графами простых чисел знакопеременных групп (М.А. Звездина [3]). Гипотеза А.В. Васильева в этих случаях подтверждается.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.A03.21.0006).

В данной работе рассматриваются две конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики. Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [4–7], и порядки групп лиева типа (см. [8]), мы получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть G и G_1 — неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков $q = p^f$ и $q_1 = p^{f_1}$ соответственно, где p — простое число и f, f_1 — натуральные числа. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\{G, G_1\} = \{A_1(8), A_2(2)\}$;
(2) $\{G, G_1\} = \{B_n(q), C_n(q)\}$, *где p нечетно*;
(3) $\{G, G_1\} = \{B_3(q), D_4(q)\}$;
(4) $\{G, G_1\} = \{C_3(q), D_4(q)\}$.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(n)$ обозначается множество простых делителей натурального числа n. Обозначим $\pi(|G|)$ через $\pi(G)$. На множестве $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел группы* G и обозначается через $GK(G)$. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \ldots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. В [4; 5] описаны связные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [6;7] был получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Множество вершин графа называется *кокликой*, если его вершины попарно несмежны. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(q, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число q.

Согласно [7] мы вводим два множества $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$. Обозначим через $\theta(G)$ пересечение всех коклик максимального размера графа $GK(G)$, а через $\Theta(G)$ — множество $\{\theta(G)\}$. Множество $\Theta'(G)$ состоит из всех подмножеств $\theta'(G)$ из $\pi(G) \setminus \Theta(G)$, для которых $\theta(G) \cup \theta'(G)$ — коклика максимального размера в графе $GK(G)$.

Лемма 1 (теорема Жигмонди [9]). *Пусть q и n — натуральные числа, $q \geq 2$, $n \geq 2$. Существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев*: $q = 2$ *и* $n = 6$; $q = 2^k - 1$ *для некоторого простого числа k и* $n = 2$.

В обозначениях леммы 1 простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$ и обозначается через $r_n(q)$ или кратко r_n, если q фиксировано.

Определяем, как в [6], функцию $\eta(x)$ на множестве натуральных чисел: $\eta(x) = x$ при нечетном x и $\eta(x) = x/2$ при четном x.

Пусть n — натуральное число. Следуя [6; 7], положим $m_1(B, n) = 2^{2n+1} - 1$, $m_2(B, n) = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $m_3(B, n) = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$, $m_1(F, n) = 2^{2n+1} - 1$, $m_2(F, n) = 2^{2n+1} + 1$, $m_3(F, n) = 2^{4n+2} + 1$, $m_4(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{2n+1} + 1$, $m_5(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{3n+2} + 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $m_6(F, n) = 2^{4n+2} + 2^{3n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Если G — группа Сузуки или группа Ри над конечным полем, то обозначим через $S_i(G)$ — множество $\pi(m_i(B, n))$ для $G = {}^2B_2(2^{2n+1})$ и множество $\pi(m_i(F, n)) \setminus \{3\}$ для $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$. Если группа G фиксирована, то положим $S_i = S_i(G)$ и обозначим через s_i любое простое число из S_i.

Используя результаты [4–7], составим следующие табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1

Конечные простые группы G лиева типа над полем характеристики 2 с $t(G) \leq 6$

G	Условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	Элементы $\Theta'(G)$
$^2A_3(2)$		2	2	2	$\{5\}$	$\{2\}$,$\{3\}$
$C_2(q)$	$q > 2$	2	2	2	$\{r_4\}$	$\{2\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2\}$
$C_3(2)$		2	2	2	$\{7\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$
$D_4(2)$		2	2	2	$\{7\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$
$^3D_4(2)$		2	2	2	$\{13\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{7\}$
$A_5(2)$		2	3	2	$\{5,7,31\}$	$\varnothing$
$A_6(2)$		2	3	2	$\{31,127\}$	$\{5\}$,$\{7\}$
$C_4(2)$		2	3	2	$\{5,7,17\}$	$\varnothing$
$^3D_4(q)$	$q > 2$	2	3	2	$\{r_3,r_6,r_{12}\}$	$\varnothing$
$^2F_4(2)'$		2	3	2	$\{3,5,13\}$	$\varnothing$
$C_4(4)$		2	4	2	$\{7,13,17,257\}$	$\varnothing$
$C_4(q)$	$q > 4$	2	4	2	$\{r_3,r_4,r_6,r_8\}$	$\varnothing$
$C_6(2)$		2	5	1	$\{7,11,13,17,31\}$	$\varnothing$
$C_6(q)$	$q > 2$	2	5	1	$\{r_5,r_8,r_{10},r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$
$A_3(4)$		3	3	1	$\{2,7,17\}$	$\varnothing$
$A_3(q)$	$q > 4$	3	3	1	$\{2,r_3,r_4\}$	$\varnothing$
$A_5(q)$	$q > 2$, $(q-1)_3 \neq 3$	3	3	1	$\{r_5\}$	$\{2,r_6\}$, $\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_6\}$
$A_5(q)$	$q > 4$, $(q-1)_3 = 3$	3	3	1	$\{r_5\}$	$\{2,r_6\}$, $\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_6\}$, $\{3,r_6\}$
$^2A_3(4)$		3	3	1	$\{2,13,17\}$	$\varnothing$
$^2A_3(8)$		3	3	1	$\{2,19,r_4\}$	$\varnothing$
$^2A_3(q)$	$q > 8$	3	3	1	$\{2,r_4,r_6\}$	$\varnothing$
$^2A_5(q)$	$(q+1)_3 \neq 3$	3	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{2,r_3\}$, $\{r_6,r_4\}$, $\{r_4,r_3\}$
$^2A_5(q)$	$q > 2$,$(q+1)_3 = 3$	3	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{2,r_3\}$, $\{r_6,r_4\}$, $\{r_4,r_3\}$, $\{3,r_3\}$
$C_3(4)$		3	3	1	$\{7,13\}$	$\{2\}$,$\{17\}$
$C_3(8)$		3	3	1	$\{19,73\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$C_3(q)$	$q > 8$	3	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$D_4(4)$		3	3	1	$\{7,13\}$	$\{2\}$,$\{17\}$
$D_4(8)$		3	3	1	$\{19,73\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$D_4(q)$	$q > 8$	3	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$A_2(8)$		3	3	2	$\{2,3,73\}$	$\varnothing$
$A_2(q)$	$q > 8$, $(q-1)_3 \neq 3$	3	3	2	$\{2,r_2,r_3\}$	$\varnothing$
$A_3(2)$		3	3	2	$\{2,5,7\}$	$\varnothing$
$A_4(q)$	$(q-1)_5 \neq 5$	3	3	2	$\{r_4,r_5\}$	$\{2\}$,$\{r_3\}$
$A_4(q)$	$(q-1)_5 = 5$	3	3	2	$\{r_4,r_5\}$	$\{2\}$,$\{5\}$,$\{r_3\}$
$A_5(4)$		3	3	2	$\{r_5\}$	$\{2,13\}$, $\{7,17\}$, $\{13,17\}$, $\{3,13\}$
$A_7(2)$		3	3	2	$\{127\}$	$\{2,17\}$, $\{17,31\}$, $\{7,17\}$, $\{5,31\}$
$^2A_2(8)$		3	3	2	$\{2,7,19\}$	$\varnothing$
$^2A_2(q)$	$q \neq 8$,$(q+1)_3 \neq 3$	3	3	2	$\{2,r_1,r_6\}$	$\varnothing$
$^2A_4(2)$		3	3	2	$\{2,5,11\}$	$\varnothing$
$^2A_4(q)$	$q > 2$, $(q+1)_5 \neq 5$	3	3	2	$\{r_4,r_{10}\}$	$\{2\}$,$\{r_6\}$
$^2A_4(q)$	$(q+1)_5 = 5$	3	3	2	$\{r_4,r_{10}\}$	$\{2\}$,$\{5\}$,$\{r_6\}$
$^2D_4(2)$		3	3	2	$\{7,17\}$	$\{2\}$,$\{5\}$
$^2D_5(2)$		3	3	2	$\{11,17\}$	$\{2\}$,$\{5\}$,$\{7\}$
$G_2(4)$		3	3	2	$\{7,13\}$	$\{2\}$,$\{5\}$
$G_2(8)$		3	3	2	$\{19,73\}$	$\{2\}$,$\{7\}$
$G_2(q)$	$q \neq 4$, $q \equiv 1 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_2\}$,$\{r_1 \neq 3\}$
$G_2(q)$	$q \neq 8$, $q \equiv 2 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3,r_6\}$	$\{2\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2 \neq 3\}$
$A_1(q)$	$q > 3$	3	3	3	$\{2,r_1,r_2\}$	$\varnothing$
$A_2(2)$		3	3	3	$\{2,3,7\}$	$\varnothing$
$^2A_5(2)$		3	3	3	$\{7,11\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$
$A_7(q)$	$q > 2$	3	4	1	$\{r_5,r_6,r_7\}$	$\{r_4\}$,$\{r_8\}$
$A_8(2)$		3	4	1	$\{17,31,73,127\}$	$\varnothing$
$A_9(2)$		3	4	1	$\{73,127\}$	$\{5,11\}$, $\{11,17\}$, $\{17,31\}$

Продолжение табл. 1

G	Условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	Элементы $\Theta'(G)$
$^2A_7(q)$		3	4	1	$\{r_3, r_{10}, r_{14}\}$	$\{r_4\}$, $\{r_8\}$
$D_5(q)$	$q > 2$	3	4	1	$\{r_3, r_5, r_8\}$	$\{r_4\}$, $\{r_6\}$
$D_6(q)$	$q > 2$	3	4	1	$\{r_5, r_8, r_{10}\}$	$\{r_3\}$, $\{r_6\}$
$^2D_5(q)$	$q > 2$	3	4	1	$\{r_6, r_8, r_{10}\}$	$\{r_3\}$, $\{r_4\}$
$A_6(q)$	$q > 2$	3	4	2	$\{r_4, r_5, r_6, r_7\}$	$\varnothing$
$^2A_6(q)$		3	4	2	$\{r_3, r_4, r_{10}, r_{14}\}$	$\varnothing$
$C_5(2)$		3	4	2	$\{11, 17, 31\}$	$\{5\}$,$\{7\}$
$D_5(2)$		3	4	2	$\{5, 7, 17, 31\}$	$\varnothing$
$D_6(2)$		3	4	2	$\{7, 11, 17, 31\}$	$\varnothing$
$F_4(2)$		3	4	3	$\{5, 7, 13, 17\}$	$\varnothing$
$A_8(q)$	$q > 2$	3	5	1	$\{r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\varnothing$
$A_9(q)$	$q > 2$	3	5	1	$\{r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{r_5\}$, $\{r_{10}\}$
$^2A_8(q)$		3	5	1	$\{r_3, r_8, r_{10}, r_{14}, r_{18}\}$	$\varnothing$
$^2A_9(q)$		3	5	1	$\{r_3, r_8, r_{14}, r_{18}\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
$C_5(q)$	$q > 2$	3	5	1	$\{r_3, r_5, r_6, r_8, r_{10}\}$	$\varnothing$
$^2D_7(2)$		3	5	1	$\{11, 13, 31, 43\}$	$\{7\}$,$\{17\}$
$A_{10}(2)$		3	5	2	$\{17, 73, 127, r_{11}\}$	$\{11\}$,$\{31\}$
$F_4(q)$	$q > 2$	3	5	3	$\{r_3, r_4, r_6, r_8, r_{12}\}$	$\varnothing$
$A_{11}(q)$	$q > 4$	3	6	1	$\{r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}\}$	$\{r_6\}$, $\{r_{12}\}$
$^2A_{11}(q)$	$q > 2$	3	6	1	$\{r_5, r_8, r_{14}, r_{18}, r_{22}\}$	$\{r_3\}$, $\{r_{12}\}$
$C_7(q)$	$q > 2$	3	6	1	$\{r_5, r_7, r_{10}, r_{12}, r_{14}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$,$\{r_8\}$
$D_7(q)$	$q > 2$	3	6	1	$\{r_3, r_5, r_7, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\varnothing$
$D_8(q)$	$q > 2$	3	6	1	$\{r_5, r_7, r_8, r_{10}, r_{12}, r_{14}\}$	$\varnothing$
$^2D_7(q)$	$q > 2$	3	6	1	$\{r_5, r_6, r_8, r_{10}, r_{12}, r_{14}\}$	$\varnothing$
$A_{10}(q)$	$q > 2$	3	6	2	$\{r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}\}$	$\varnothing$
$A_{11}(2)$		3	6	2	$\{11, 13, 17, 73, 127, r_{11}\}$	$\varnothing$
$A_{11}(4)$		3	6	2	$\{r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}\}$	$\{13\}$,$\{241\}$
$^2A_{10}(q)$		3	6	2	$\{r_3, r_5, r_8, r_{14}, r_{18}, r_{22}\}$	$\varnothing$
$^2A_{11}(2)$		3	6	2	$\{17, 19, 31, 43, 683\}$	$\{7\}$,$\{13\}$
$C_7(2)$		3	6	2	$\{11, 13, 31, 43, 127\}$	$\{7\}$,$\{17\}$
$D_7(2)$		3	6	2	$\{7, 11, 13, 17, 31, 127\}$	$\varnothing$
$D_8(2)$		3	6	2	$\{11, 13, 17, 31, 43, 127\}$	$\varnothing$
$A_2(q)$	$q \neq 4$, $(q-1)_3 = 3$	4	4	2	$\{2, 3, r_2, r_3\}$	$\varnothing$
$^2A_2(q)$	$q > 2$, $(q+1)_3 = 3$	4	4	2	$\{2, 3, r_1, r_6\}$	$\varnothing$
$^2D_4(q)$	$q > 2$	4	4	2	$\{r_3, r_6, r_8\}$	$\{2\}$,$\{r_4\}$
$^2F_4(8)$		4	4	3	$\{37, 109\}$	$\{3, s_3\}$, $\{2, 19\}$, $\{7, 19\}$, $\{s_3, 19\}$
$A_2(4)$		4	4	4	$\{2, 3, 5, 7\}$	$\varnothing$
$^2B_2(q)$	$q \geq 8$	4	4	4	$\{2, s_1, s_2, s_3\}$	$\varnothing$
$^2D_6(2)$		4	5	1	$\{11, 13, 17, 31\}$	$\{5\}$,$\{7\}$
$^2D_6(q)$	$q > 2$	4	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$,$\{r_6\}$
$E_6(2)$		4	5	2	$\{5, 17, 31, 73\}$	$\{7\}$,$\{13\}$
$E_6(q)$	$q > 2$	4	5	2	$\{r_5, r_8, r_9\}$	$\{r_3, r_4\}$, $\{r_4, r_{12}\}$, $\{r_6, r_{12}\}$
$^2E_6(q)$	$q > 2$	4	5	2	$\{r_8, r_{10}, r_{18}\}$	$\{r_3, r_{12}\}$, $\{r_4, r_6\}$, $\{r_4, r_{12}\}$
$^2F_4(q)$	$q \geq 32$	4	5	3	$\{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$	$\varnothing$
$^2E_6(2)$		4	5	4	$\{11, 13, 17, 19\}$	$\{5\}$,$\{7\}$

Т а б л и ц а 2

Конечные простые группы G лиева типа над полем нечетной характеристики p с $t(G) \leq 4$

G	Условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	Элементы $\Theta'(G)$
$A_2(3)$		2	2	2	$\{13\}$	$\{2\}$,$\{3\}$
$A_2(q)$	$(q-1)_3 \neq 3,\ q+1 = 2^k > 4$	2	2	2	$\{r_3\}$	$\{p\}$,$\{r_1\}$,$\{2 = r_2\}$
$C_2(3)$		2	2	2	$\{5\}$	$\{2\}$,$\{3\}$

Продолжение табл. 2

G	Условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	Элементы $\Theta'(G)$
$C_2(q)$	$q>3$	2	2	2	$\{r_4\}$	$\{p\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2\}$
${}^2A_2(3)$		2	2	2	$\{7\}$	$\{2\}$,$\{3\}$
${}^2A_2(9)$		2	2	2	$\{73\}$	$\{2\}$,$\{3\}$,$\{5\}$
${}^2A_2(q)$	$(q+1)_3\neq 3, q-1=2^k>8$	2	2	2	$\{r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_2\}$,$\{2=r_1\}$
$A_3(q)$	$q>3,(q-1)_2\neq 4$	2	3	1	$\{p,r_3,r_4\}$	$\varnothing$
$A_5(q)$	$q>3,(q-1)_3\neq 3$	2	3	1	$\{r_5\}$	$\{p,r_6\},\{r_3,r_4\},\{r_4,r_6\}$
$A_5(q)$	$q>7,(q-1)_3=3$	2	3	1	$\{r_5\}$	$\{p,r_6\},\{r_3,r_4\},\{r_4,r_6\},\{3,r_6\}$
${}^2A_3(q)$	$(q+1)_2\neq 4$	2	3	1	$\{p,r_4,r_6\}$	$\varnothing$
${}^2A_5(q)$	$(q+1)_3\neq 3$	2	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{p,r_3\},\{r_6,r_4\},\{r_4,r_3\}$
${}^2A_5(q)$	$q\neq 5,(q+1)_3=3$	2	3	1	$\{r_{10}\}$	$\{p,r_3\},\{r_6,r_4\},\{r_4,r_3\},\{3,r_3\}$
$B_3(q),C_3(q)$	$q>3$	2	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_4\}$
$D_4(q)$	$q>3$	2	3	1	$\{r_3,r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_4\}$
$A_2(q)$	$(q-1)_3=3,q+1=2^k$	2	3	2	$\{3,p,r_3\}$	$\varnothing$
$A_2(q)$	$(q-1)_3\neq 3,q+1\neq 2^k$	2	3	2	$\{p,r_2\neq 2,r_3\}$	$\varnothing$
$A_3(3)$		2	3	2	$\{3{,}5{,}13\}$	$\varnothing$
$A_4(q)$	$(q-1)_5\neq 5$	2	3	2	$\{r_4,r_5\}$	$\{p\}$,$\{r_3\}$
$A_4(q)$	$(q-1)_5=5$	2	3	2	$\{r_4,r_5\}$	$\{5\}$,$\{p\}$,$\{r_3\}$
$A_5(3)$		2	3	2	$\{11\}$	$\{3{,}7\}$,$\{5{,}13\}$,$\{5{,}7\}$
$A_5(7)$		2	3	2	$\{2801\}$	$\{7,43\}$,$\{5,19\}$,$\{5,43\}$,$\{3,43\}$
${}^2A_2(q)$	$(q+1)_3=3,q-1=2^k$	2	3	2	$\{3,p,r_6\}$	$\varnothing$
${}^2A_2(q)$	$(q+1)_3\neq 3,q-1\neq 2^k$	2	3	2	$\{p,r_1\neq 2,r_6\}$	$\varnothing$
${}^2A_4(q)$	$(q+1)_5\neq 5$	2	3	2	$\{r_4,r_{10}\}$	$\{p\}$,$\{r_6\}$
${}^2A_4(q)$	$(q+1)_5=5$	2	3	2	$\{r_4,r_{10}\}$	$\{5\}$,$\{p\}$,$\{r_6\}$
${}^2A_5(5)$		2	3	2	$\{521\}$	$\{5,31\}$,$\{7,13\}$,$\{13,31\}$,$\{3,31\}$
$B_3(3),C_3(3)$		2	3	2	$\{7,13\}$	$\{3\}$,$\{5\}$
$D_4(3)$		2	3	2	$\{7,13\}$	$\{3\}$,$\{5\}$
${}^3D_4(q)$		2	3	2	$\{r_3,r_6,r_{12}\}$	$\varnothing$
$A_7(q)$	$q>5,(q-1)_2\neq 8$	2	4	1	$\{r_5,r_6,r_7\}$	$\{r_4\}$,$\{r_8\}$
${}^2A_7(q)$	$q\neq 3,(q+1)_2\neq 8$	2	4	1	$\{r_3,r_{10},r_{14}\}$	$\{r_4\}$,$\{r_8\}$
$D_5(q)$	$q>5,q\not\equiv 5 \pmod 8$	2	4	1	$\{r_3,r_5,r_8\}$	$\{r_4\}$,$\{r_6\}$
$D_6(q)$	$q>3$	2	4	1	$\{r_5,r_8,r_{10}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$
${}^2D_5(q)$	$q\not\equiv 3 \pmod 8$	2	4	1	$\{r_6,r_8,r_{10}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$
$A_2(q)$	$(q-1)_3=3,q+1\neq 2^k$	2	4	2	$\{p,3,r_2\neq 2,r_3\}$	$\varnothing$
$A_6(q)$		2	4	2	$\{r_4,r_5,r_6,r_7\}$	$\varnothing$
$A_7(3)$		2	4	2	$\{7,11,1093\}$	$\{5\}$,$\{41\}$
$A_7(5)$		2	4	2	$\{r_5,7,19531\}$	$\{13\}$,$\{313\}$
${}^2A_2(q)$	$(q+1)_3=3,q-1\neq 2^k$	2	4	2	$\{p,3,r_1\neq 2,r_6\}$	$\varnothing$
${}^2A_6(q)$		2	4	2	$\{r_3,r_4,r_{10},r_{14}\}$	$\varnothing$
${}^2A_7(3)$		2	4	2	$\{13,61,547\}$	$\{5\}$,$\{41\}$
$B_4(q),C_4(q)$		2	4	2	$\{r_3,r_4,r_6,r_8\}$	$\varnothing$
$D_5(3)$		2	4	2	$\{11,13,41\}$	$\{5\}$,$\{7\}$
$D_6(3)$		2	4	2	$\{11,41,61\}$	$\{7\}$,$\{13\}$
${}^2D_4(q)$		2	4	2	$\{r_3,r_6,r_8\}$	$\{p\}$,$\{r_4\}$
$A_3(q)$	$q>5,(q-1)_2=4$	3	3	1	$\{r_3,r_4\}$	$\{p\}$,$\{2\}$
${}^2A_3(q)$	$q\neq 3,\ (q+1)_2=4$	3	3	1	$\{r_4,r_6\}$	$\{p\}$,$\{2\}$
$A_3(5)$		3	3	2	$\{13,31\}$	$\{2\}$, $\{5\}$
$G_2(q)$	$q\equiv 1 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3,r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_2\}$,$\{r_1\neq 3\}$
$G_2(q)$	$q\equiv 2 \pmod 3$	3	3	2	$\{r_3,r_6\}$	$\{p\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2\neq 3\}$
$A_1(q)$	$q>3$	3	3	3	$\{p,r_1,r_2\}$	$\varnothing$
${}^2A_3(3)$		3	3	3	$\{5,7\}$	$\{2\}$, $\{3\}$
$G_2(3)$		3	3	3	$\{7,13\}$	$\{2\}$, $\{3\}$
$G_2(q)$	$q=3^m>3$	3	3	3	$\{r_3,r_6\}$	$\{3\}$,$\{r_1\}$,$\{r_2\}$
$A_7(q)$	$q>9,(q-1)_2=8$	3	4	1	$\{r_5,r_6,r_7\}$	$\{r_4\}$,$\{r_8\}$
${}^2A_7(q)$	$q\neq 7,(q+1)_2=8$	3	4	1	$\{r_3,r_{10},r_{14}\}$	$\{r_4\}$,$\{r_8\}$
$D_5(q)$	$q>5,q\equiv 5 \pmod 8$	3	4	1	$\{r_3,r_5,r_8\}$	$\{r_4\}$,$\{r_6\}$

Продолжение табл. 2

G	Условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	Элементы $\Theta'(G)$
$^2D_5(q)$	$q>3, q\equiv 3 \pmod 8$	3	4	1	$\{r_6, r_8, r_{10}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$
$A_7(9)$		3	4	2	$\{r_5, 73, r_7\}$	$\{41\}$,$\{r_8\}$
$^2A_7(7)$		3	4	2	$\{19, r_{10}, r_{14}\}$	$\{5\}$,$\{1201\}$
$D_5(5)$		3	4	2	$\{31, r_5, 313\}$	$\{7\}$,$\{13\}$
$^2D_5(3)$		3	4	3	$\{7, 41, 61\}$	$\{5\}$,$\{13\}$

Лемма 2 (Героно [10]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

Лемма 3. *Пусть p — простое число, a — натуральное число, $s = r_a(p)$. Если s делит $p^b - 1$, где b — натуральное число, то a делит b.*

Доказательство. По [4, лемма 2] имеем: s делит $(p^a-1, p^b-1) = p^{(a,b)} - 1$. Если $(a,b) < a$, то $s \neq r_a(p)$, противоречие. Значит, $(a,b) = a$. Следовательно, a делит b. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть q — степень простого числа. Тогда $r_3(q) \notin \{3,5,11,17,41,71\}$, $r_4(q) \notin \{7,19,71,547\}$, $r_5(q) \notin \{5,7,13,17,19,73,127,313,547,1093\}$, $r_6(q) \notin \{3,5,11,17,41,71\}$, $r_7(q) \notin \{5,7,11,13,17,31,41,61,73,313\}$, $r_8(q) \notin \{5,7,11,13,61,71,127,547,1093\}$, $r_9(q) \notin \{11,13,17\}$, $r_{10}(q) \notin \{5,7,13,17,73,127,313,547,1093\}$, $r_{11}(q) \notin \{11,13,17,73,127\}$, $r_{12}(q) \neq 5$, $r_{14}(q) \notin \{5,7,11,13,17,31,41,61,73,313\}$, $r_{18}(q) \notin \{11,13,17\}$, $r_{22}(q) \notin \{11,13,17,73,127\}$.*

Доказательство. Заметим, что по малой теореме Ферма число 3 делит $q(q^2-1)$, число 5 делит $q(q^4-1)$, 11 делит $q(q^{10}-1)$, 17 делит $q(q^{16}-1)$, 41 делит $q(q^{40}-1)$, 71 делит $q(q^{70}-1)$. Отсюда $r_3(q) \notin \{3,5,11,17,41,71\}$. Аналогично получаем утверждение леммы в других случаях. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Пусть $q = p^f$ и $q_1 = p^{f_1}$, где p — простое число, f, f_1 — натуральные числа, G и G_1 — неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно. Далее мы рассмотрим возможности для G.

Лемма 5. *Пусть $G = A_1(q)$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда $G = A_1(8)$ и $G_1 \cong A_2(2)$.*

Доказательство. По табл. 1 и 2 $s(G) = 3$, $t(G) = 3$, $\Theta(G) = \{p, r_1, r_2\}$, $\Theta'(G) = \varnothing$. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Тогда $t(G_1) = 3$, $s(G_1) = 3$ и все максимальные коклики графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$ содержат p. Отсюда по табл. 1 G_1 изоморфна одной из групп $A_1(q_1)$ или $A_2(2)$.

Пусть $G_1 \cong A_2(2)$. Тогда $\{2, r_1, r_2\} = \{2,3,7\}$, т. е. $\{r_1, r_2\} = \{3,7\}$. Если $r_1 = 3$ и $r_2 = 7$, то 3 делит $q-1 = 2^f - 1$ и 7 делит $q^2 - 1 = 2^{2f} - 1$, поэтому 6 делит f. Если $f = 6$, то $r_2 \in \{5,13\}$; противоречие. Если $f > 6$, то по лемме 1 существует число $r_f(2) \notin \{3,7\}$; противоречие. Если $r_1 = 7$ и $r_2 = 3$, то 7 делит $q-1 = 2^f - 1$ и 3 делит $q^2-1 = 2^{2f}-1$, поэтому 3 делит f. Если $f = 6$, то $r_2 \in \{5,13\}$; противоречие. Если $f > 6$, то получаем противоречие. Значит, $f = 3$ и $q = 8$. Графы простых чисел групп $A_1(8)$ и $A_2(2)$ — коклики $\{2,3,7\}$, т. е. $GK(A_1(8)) = GK(A_2(2))$.

Пусть $G_1 \cong A_1(q_1)$. Предположим, что $3 < q = p^f \equiv \epsilon \pmod 4$, где $\epsilon = \pm 1$. Тогда $|G| = q(q^2-1)/2$ и $3 < q_1 = p^{f_1} \equiv \epsilon_1 \pmod 4$, где $\epsilon_1 = \pm 1$. Отсюда $|G_1| = q_1(q_1^2 - 1)/2$. Имеем $\pi(p^{2f} - 1) = \pi(p^{2f_1} - 1)$. Предположим, что $f_1 \neq f$. Без ограничения общности можно считать, что $f_1 > f$. По лемме 1 существует число $r_{2f_1}(p) \notin \pi(p^{2f} - 1)$; противоречие. Значит, $f_1 = f$, $q_1 = q$, $G_1 \cong G$; противоречие.

Пусть $q = 2^f > 2$. Тогда $|G| = q(q^2 - 1)$ и $q_1 = 2^{f_1} > 2$. Отсюда $|G_1| = q_1(q_1^2 - 1)$. Имеем $\pi(2^{2f} - 1) = \pi(2^{2f_1} - 1)$. Предположим, что $f_1 \neq f$. Без ограничения общности можно считать, что $f_1 > f$. По лемме 1 при $f_1 \neq 3$ существует число $r_{2f_1}(2) \notin \pi(2^{2f} - 1)$; противоречие. Итак, $f_1 = 3$ и $f = 2$, это противоречит неравенству $\pi(2^6 - 1) \neq \pi(2^4 - 1)$. Значит, $f_1 = f$, $q_1 = q$ и $G_1 \cong G$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — одна из групп $A_2(2)$, $A_2(4)$, $A_2(8)$, $A_3(2)$, $A_3(4)$, $A_5(2)$, $A_5(4)$, $A_6(2)$, $A_7(2)$, $A_8(2)$, $A_9(2)$, $A_{10}(2)$, $A_{11}(2)$, $A_{11}(4)$, $C_3(2)$, $C_3(4)$, $C_3(8)$, $C_4(2)$, $C_4(4)$, $C_5(2)$, $C_6(2)$, $C_7(2)$, $D_4(2)$, $D_4(4)$, $D_4(8)$, $D_5(2)$, $D_6(2)$, $D_7(2)$, $D_8(2)$, ${}^2A_2(4)$, ${}^2A_2(8)$, ${}^2A_3(2)$, ${}^2A_3(4)$, ${}^2A_3(8)$, ${}^2A_4(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_{11}(2)$, ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$, $G_2(4)$, $G_2(8)$, $F_4(2)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(2)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(8)$, ${}^2F_4(2)'$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $G = A_2(2)$ *и* $G_1 \cong A_1(8)$;

(2) $G = C_3(q)$ *и* $G_1 \cong D_4(q)$, *где* $q \in \{2, 4, 8\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — одна из групп $A_5(4)$, $A_7(2)$, $A_8(2)$, $A_{10}(2)$, $A_{11}(4)$, $C_6(2)$, ${}^2A_3(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2D_6(2)$, $F_4(2)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(2)$. Тогда из равенства $GK(G) = GK(G_1)$ получаем, что $t(2, G_1) = t(2, G)$, $t(G_1) = t(G)$, $s(G_1) = s(G)$ и множества коклик максимального размера графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают. По табл. 1 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G = A_2(2)$. По табл. 1 G_1 изоморфна $A_1(q_1)$. По лемме 5 $G = A_2(2)$ и $G_1 \cong A_1(8)$, т. е. выполняется утверждение (1).

Пусть $G = A_5(2)$. Тогда $\pi(G_1) = \pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$. По [11] $G_1 \cong A_4(2)$. По табл. 1 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $G \in \{A_2(4), A_3(2), A_3(4), A_6(2), A_9(2), C_4(2), C_4(4), C_5(2), C_7(2), D_6(2), D_7(2), D_8(2), {}^2A_2(4), {}^2A_{11}(2), {}^2D_4(2), G_2(4), G_2(8)\}$, то по [11] и табл. 1 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $G \in \{A_2(8), D_5(2), {}^2A_2(8), {}^2A_3(4), {}^2A_3(8), {}^2A_4(2), {}^2A_6(2), {}^2D_5(2), {}^2D_7(2), {}^3D_4(2)\}$, то по [11] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $G \in \{C_3(q), D_4(q)\}$, где $q \in \{2, 4, 8\}$, то по [11] и табл. 1 выполняется утверждение (2).

Если $G = {}^2F_4(8)$, то по табл. 1 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G = {}^2F_4(2)'$. По табл. 1 имеем $\Theta(G) = \{3, 5, 13\}$, $\Theta'(G) = \varnothing$, $G_1 \cong {}^3D_4(q)$, $\Theta(G_1) = \{r_3, r_6, r_{12}\}$ и $\Theta'(G_1) = \varnothing$. Так как $3 \notin \{r_3, r_6, r_{12}\} = \Theta(G_1)$, то $\Theta(G) \neq \Theta(G_1)$. Следовательно, $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G = A_{11}(2)$. Тогда $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, \ldots, 127\}$. По [11] и табл. 1 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G = A_{11}(4)$. По табл. 1 имеем $\Theta(G) = \{r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}\}$, $\Theta'(G) = \{\{13\}, \{241\}\}$ и G_1 изоморфна ${}^2A_{10}(q_1)$ или $A_{10}(q_1)$, где $q_1 > 2$. Тогда $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, \ldots, 683\}$. По [11] $G_1 \cong A_{10}(4)$ или $G_1 \cong {}^2A_{10}(2)$. Заметим, что $r_{24}(2) = 241$. Предположим, что $G_1 \cong A_{10}(4)$. Тогда $\Theta(A_{10}(4)) = \{r_6(4), r_7(4), r_8(4), r_9(4), r_{10}(4), r_{11}(4)\}$ и $\Theta'(A_{10}(4)) = \varnothing$. Отсюда $\{241\} \not\subseteq \Theta(A_{10}(4)) \cup \Theta'(A_{10}(4))$; противоречие. Предположим, что $G_1 \cong {}^2A_{10}(2)$. Тогда $\Theta({}^2A_{10}(2)) = \{r_3(2), r_5(2), r_8(2), r_{14}(2), r_{18}(2), r_{22}(2)\} = \{7, 17, 19, 31, 43, 683\}$, $\Theta'({}^2A_{10}(2)) = \varnothing$. Отсюда $\{241\} \not\subseteq \Theta({}^2A_{10}(2)) \cup \Theta'({}^2A_{10}(2))$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — одна из групп $A_2(3)$, $A_3(3)$, $A_3(5)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, $A_7(3)$, $A_7(5)$, $A_7(9)$, $C_2(3)$, $B_3(3)$, $C_3(3)$, $D_4(3)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(3)$, ${}^2A_2(3)$, ${}^2A_2(9)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(5)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, ${}^2D_5(3)$, $G_2(3)$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\{G, G_1\} = \{B_3(3), C_3(3)\}$;

(2) $\{G, G_1\} = \{B_3(3), D_4(3)\}$;

(3) $\{G, G_1\} = \{C_3(3), D_4(3)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — одна из групп $A_2(3)$, $A_3(5)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, $A_7(9)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(3)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(5)$, ${}^2A_7(7)$, ${}^2D_5(3)$, $G_2(3)$. По табл. 2 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G \in \{A_3(3), {}^2A_2(3), {}^2A_2(9)\}$. Тогда $\pi(G) = \pi(G_1) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 73\}$ и по [11] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G = C_2(3)$. Тогда $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5\}$ и по [11] $G_1 \cong A_1(9)$. По табл. 2 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G \in \{C_3(3), B_3(3), D_4(3)\}$. Тогда $\pi(G) = \pi(G_1) = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ и по [11] G_1 изоморфна одной из групп $A_2(9)$, $B_3(3)$, $C_3(3)$ или $D_4(3)$. По табл. 2 G_1 изоморфна одной из групп $C_3(3)$, $B_3(3)$ или $D_4(3)$, т. е. выполняется заключение леммы.

Пусть $G = A_7(3)$. По табл. 2 в графе $GK(G)$ имеется две коклики максимального размера $\{5, 7, 11, 1093\}$ и $\{41, 7, 11, 1093\}$, и G_1 изоморфна одной из групп $A_6(q_1)$, где $q_1 > 2$, ${}^2A_6(q_1)$, $B_4(q_1)$, $C_4(q_1)$.

Предположим, что $G_1 \cong A_6(q_1)$, где $q_1 > 2$. По табл. 2 $\Theta(G_1) = \{r_4(q_1), r_5(q_1), r_6(q_1), r_7(q_1)\}$ и $\Theta'(G_1) = \varnothing$. По лемме 4 $r_6(q_1) = 7$, $r_4(q_1) \in \{5, 41\}$, т. е. 41 делит $q_1^4 - 1 = 3^{4f_1} - 1$. Отсюда f_1 четно. Если $f_1 = 2$, то $r_3(q_1) = 7$; противоречие. По лемме 1 при $f_1 \geq 4$ существует число $r_{4f_1}(3) \notin \{5, 41\}$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2A_6(q_1)$. По табл. 2 $\Theta(G_1) = \{r_3(q_1), r_4(q_1), r_{10}(q_1), r_{14}(q_1)\}$ и $\Theta'(G_1) = \varnothing$. По лемме 4 $r_3(q_1) = 7$ и $r_4(q_1) \in \{5, 41\}$, т. е. 41 делит $q_1^4 - 1 = 3^{4f_1} - 1$. Отсюда f_1 четно. Если $f_1 = 2$, то $r_3(q_1) \in \{7, 13\}$; противоречие. По лемме 1 при $f_1 \geq 4$ существует число $r_{4f_1}(3) \notin \{5, 41\}$; противоречие.

Предположим, что G_1 изоморфна $B_4(q_1)$ или $C_4(q_1)$. Заметим, что по табл. 2 $\Theta(G_1) = \{r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$ и $\Theta'(G_1) = \varnothing$. По лемме 4 $\{11\} \not\subseteq \{r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$; противоречие.

Случаи $G = A_7(5)$ и $G = {}^2A_7(3)$ рассматриваются аналогично случаю $G = A_7(3)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G — одна из групп $A_2(q)$ $(q = 2^s - 1)$, ${}^2A_2(q)$ $(q = 2^s - 1)$, $C_2(q)$ $(q > 3)$, $C_3(q)$ $(4 < q \neq 8)$, $B_3(q)$ $(4 < q \neq 8)$, $D_4(q)$ $(4 < q \neq 8)$, ${}^2D_4(q)$ $(q > 2)$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\{G, G_1\} = \{B_3(q), C_3(q)\}$, *где q нечетно*;

(2) $\{G, G_1\} = \{B_3(q), D_4(q)\}$;

(3) $\{G, G_1\} = \{C_3(q), D_4(q)\}$.

Доказательство. Пусть $G = A_2(q)$, где $q = 2^s - 1$. Предположим, что $(q-1)_3 \neq 3$. По лемме 2 $q = p$. Отсюда $q = 3$ или $q = p \geq 7$. Имеем $|G| = p^3(p^2-1)(p^3-1)/d$, где $d = (3, p-1)$. Если $q = 3$, то по лемме 7 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Значит, $q = p \geq 7$. По табл. 2 и лемме 7 группа G_1 изоморфна одной из групп $A_2(q_1)$, где $q_1 + 1 = 2^k > 4$ и $(q_1 - 1)_3 \neq 3$, $C_2(q_1)$, где $q_1 > 3$, ${}^2A_2(q_1)$, где $q_1 - 1 = 2^k > 8$ и $(q_1 + 1)_3 \neq 3$.

Предположим, что $G_1 \cong A_2(q_1)$, где $q_1 + 1 = 2^k > 4$ и $(q_1 - 1)_3 \neq 3$. По лемме 2 $q_1 = p = q$. Значит, $G_1 \cong G$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong C_2(q_1)$, где $q_1 > 3$. Тогда $|G_1| = q_1^4(q_1^2 - 1)(q_1^4 - 1)/d_1$, где $d_1 = (2, q_1 - 1)$. По лемме 1 существует число $r_{4f_1}(p) \in \pi(G_1) \setminus \pi(G)$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2A_2(q_1)$, где $q_1 - 1 = 2^k > 8$ и $(q_1 + 1)_3 \neq 3$. По лемме 2 $q_1 = p = q = 3$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случае $(q - 1)_3 = 3$.

Пусть $G = {}^2A_2(q)$, где $q = 2^s - 1$. Тогда либо $q = 3$, либо $q - 1 \neq 2^k \geq 4$ и $(q+1)_3 \neq 3$. Если $q = 3$, то по лемме 7 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Во втором случае, рассуждая, как в первом абзаце доказательства, также получаем противоречие.

Пусть $G = C_2(q)$, где $q > 3$. Тогда $|G| = q^4(q^2 - 1)(q^4 - 1)/d$, где $d = (2, q - 1)$. По табл. 1 и 2 группа G_1 изоморфна одной из групп $A_2(q_1)$, где $q_1 + 1 = 2^k$ и $(q_1 - 1)_3 \neq 3$, $C_2(q_1)$, где $q_1 > 3$, ${}^2A_2(q_1)$, где $q_1 - 1 = 2^k > 8$ и $(q_1 + 1)_3 \neq 3$. Случай $G_1 \cong A_2(q_1)$, где $q_1 + 1 = 2^k$ и $(q_1 - 1)_3 \neq 3$ рассмотрен ранее.

Предположим, что $G_1 \cong C_2(q_1)$, где $q_1 > 3$. Тогда $|G_1| = q_1^4(q_1^2 - 1)(q_1^4 - 1)/d_1$, где $d_1 = (2, q_1-1)$. Пусть $s = r_{4f}(p)$. Тогда s делит $q_1^4 - 1 = p^{4f_1} - 1$. По лемме 3 имеем $4f_1 = 4fk$, где k —

натуральное число. Отсюда $f_1 = fk$ и $q_1 = q^k$. Следовательно, $|G_1| = q^{4k}(q^{2k}-1)(q^{4k}-1)/d_1$, где $d_1 = (2, q_1-1)$. По лемме 1 при $k \geq 2$ существует число $r_{4k}(q) \in \pi(G_1)\setminus\pi(G)$; противоречие. Значит, $k = 1$ и $q_1 = q$. Следовательно, $G_1 \cong C_2(q)$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2A_2(q_1)$, где $q_1 - 1 = 2^l > 8$ и $(q_1+1)_3 \neq 3$. По лемме 2 $q_1 = p$. Отсюда $|G_1| = p^3(p^2-1)(p^3+1)/d$, где $d = (3, p+1)$. По лемме 1 существует число $s = r_{4f}(p)$. При $f \geq 2$ имеем $s \in \pi(G) \setminus \pi(G_1)$; противоречие. При $f = 1$ по [4, лемма 2] число s делит $(p^4-1, p^6-1) = p^{(4,6)} - 1 = p^2 - 1$; противоречие с примитивностью числа s.

Пусть $G \in \{B_3(q), C_3(q), D_4(q)\}$, где $4 < q \neq 8$. Тогда $|G| = q^9(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)/d$ или $|G| = q^{12}(q^2-1)(q^4-1)^2(q^6-1)/d$, где $d = (2, q-1)$. По леммам 6 и 7, табл. 1 и 2 группа G_1 изоморфна одной из групп $C_3(q_1)$ или $D_4(q_1)$, где $q_1 > 3$ при нечетном q_1 и $q_1 > 8$ при четном q_1. Тогда $|G_1| = q_1^9(q_1^2-1)(q_1^4-1)(q_1^6-1)/d_1$ или $|G_1| = q_1^{12}(q_1^2-1)(q_1^4-1)^2(q_1^6-1)/d_1$, где $d_1 = (2, q_1-1)$. Пусть $s = r_{6f}(p)$. Тогда s делит $q_1^6 - 1 = p^{6f_1} - 1$ или $q_1^4 - 1 = p^{4f_1} - 1$. В первом случае по лемме 3 имеем $6f_1 = 6fk$, где k — натуральное число. Отсюда $f_1 = fk$ и $q_1 = q^k$. Следовательно, $|G_1| = q^{9k}(q^{2k}-1)(q^{4k}-1)(q^{6k}-1)/d_1$ или $|G_1| = q^{12k}(q^{2k}-1)(q^{4k}-1)^2(q^{6k}-1)/d_1$, где $d_1 = (2, q_1-1)$. По лемме 1 при $k \geq 2$ существует число $r_{6k}(q) \in \pi(G_1)\setminus\pi(G)$; противоречие. Значит, $k = 1$ и $q_1 = q$. Во втором случае по лемме 3 имеем $4f_1 = 6fk$, где k — натуральное число. Отсюда $f_1 = 3fk/2$ и $q_1 = q^{3k/2}$. Следовательно, $|G_1| = q^{27k/2}(q^{3k}-1)(q^{6k}-1)(q^{9k}-1)/d_1$ или $|G_1| = q^{18k}(q^{3k}-1)(q^{6k}-1)^2(q^{9k}-1)/d_1$. По лемме 1 существует число $r_{9k}(q) \in \pi(G_1)\setminus\pi(G)$; противоречие. Заметим, что $\pi(C_3(q)) = \pi(D_4(q))$. По [7, предложения 2.4 и 2.5] нечетные простые числа r и s, отличные от p, несмежны в $GK(C_3(q))$ тогда и только тогда, когда они несмежны в $GK(D_4(q))$. По [6, предложение 3.1] p и нечетное простое число r несмежны в $GK(C_3(q))$ тогда и только тогда, когда они несмежны в $GK(D_4(q))$. Если q нечетно, то по [6, предложения 4.3 и 4.4] 2 и нечетное простое число r несмежны в $GK(C_3(q))$ тогда и только тогда, когда они несмежны в $GK(D_4(q))$. Значит, $GK(C_3(q)) = GK(D_4(q))$. Следовательно, $G_1 \in \{C_3(q), D_4(q)\}$.

Предположим, что $G = D_4(q)$, где $4 < q \neq 8$, и $G_1 \cong D_4(q_1)$, где $4 < q_1 \neq 8$. Как в предыдущем абзаце, доказывается, что $q_1 = q$. Следовательно, G_1 изоморфна одной из групп $C_3(q)$, $B_3(q)$, $D_4(q)$, т. е. выполняется заключение леммы.

Пусть $G = {}^2D_4(q)$, где $q > 2$. По табл. 1 и 2 $G_1 \cong {}^2D_4(q_1)$, где $q_1 > 2$. Рассуждая как в случае $G \in \{B_3(q), C_3(q), D_4(q)\}$ и G_1 изоморфна одной из групп $B_3(q_1)$, $C_3(q_1)$, $D_4(q_1)$, получим, что $G_1 \cong {}^2D_4(q)$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$, где $n \geq 3$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда $G = A_2(2)$ и $G_1 \cong A_1(8)$.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. По лемме 8 можно считать, что $(n, q) \neq (3, 2^s - 1)$.

Если $G \in \{A_2(2), A_2(4), A_2(8), A_3(2), A_3(4), A_5(2), A_5(4), A_6(2), A_7(2), A_8(2), A_9(2), A_{10}(2), A_{11}(2), A_{11}(4)\}$, то по лемме 6 выполняется заключение леммы. Если $G \in \{A_2(3), A_3(3), A_3(5), A_5(3), A_5(7), A_7(3), A_7(5), A_7(9)\}$, то по лемме 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Группа G имеет порядок $q^{n(n-1)/2}\prod_{i=2}^{n}(q^i-1)/d$, где $d = (n, q-1)$. Так как $t(G_1) = t(G)$, $t(2, G_1) = t(2, G)$ и $s(G_1) = s(G)$, то либо G_1 изоморфна одной из групп $A_{n_1-1}(q_1)$, $B_{n_1}(q_1)$, $C_{n_1}(q_1)$, $D_{n_1}(q_1)$, ${}^2A_{n_1-1}(q_1)$, ${}^2D_{n_1}(q_1)$, либо $G = A_4(q)$ и $G_1 \cong G_2(q_1)$, где q и q_1 четны, либо $G = A_{15}(q)$ ($(q-1)_2 = 16$) и $G_1 \cong E_7(q_1)$, где q и q_1 нечетны. В последнем случае по [6, табл. 4] имеем $t(p, G) = 3$ и $t(p, G_1) = 5$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$, где $n_1 \geq 3$. Если $t(G) \leq 6$ и q четно, то по табл. 1 и леммам 6 и 8 $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$. Если $t(G) \leq 4$ и q нечетно, то по табл. 2 и леммам 7 и 8 имеем $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$. В остальных случаях $t(G) = [(n+1)/2]$. Так как $t(G_1) = t(G)$ имеем $n_1 = n \pm 1$.

Группа G_1 имеет порядок $q_1^{n_1(n_1-1)/2}\prod_{i=2}^{n_1}(q_1^i-1)/d_1$, где $d_1 = (n_1, q_1-1)$. Пусть $s = r_{nf}(p)$. Тогда s делит $q_1^l - 1 = p^{lf_1} - 1$ для некоторого натурального числа $l \leq n_1$. По лемме 3 имеем

$lf_1 = nfk$ для некоторого натурального числа k. Следовательно,

$$\frac{f_1}{f} = \frac{nk}{l}. \tag{2.1}$$

Пусть $s_1 = r_{n_1 f_1}(p)$. Тогда s_1 делит $q^j - 1 = p^{jf} - 1$ для некоторого натурального числа $j \leq n$. По лемме 3 имеем $jf = n_1 f_1 t$ для некоторого натурального числа t. Следовательно,

$$j = n_1 t \, \frac{f_1}{f} = \frac{nn_1}{l} \, kt. \tag{2.2}$$

Если $l \leq n_1 - 1$, то $j \geq nn_1/(n_1 - 1) > n$; противоречие. Если $l = n_1$, то из (2.2) следует, что $j = nkt \leq n$. Отсюда $kt \leq 1$. Значит, $kt = 1$, т. е. $k = t = 1$. Из (2.1) следует, что

$$\frac{f_1}{f} = \frac{n}{n_1}. \tag{2.3}$$

Если $n_1 = n$, то из равенства (2.3) получаем, что $q_1 = q$ и $G_1 \cong G$; противоречие. Пусть $n_1 = n \pm 1$. Без ограничения общности можно считать, что $n_1 = n + 1$. Пусть $s_2 = r_{(n-1)f}(p)$. Тогда s_2 делит $q_1^i - 1 = p^{if_1} - 1$ для некоторого натурального числа $i \leq n_1$. По лемме 3 имеем $if_1 = (n-1)fu$ для некоторого натурального числа u. Из последнего равенства и равенства (2.3), получаем, что

$$i = (n-1)u \, \frac{f}{f_1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) un_1 \geq \frac{2}{3} \, un_1. \tag{2.4}$$

Если $u \geq 2$, то $i > n_1$; противоречие. Если $u = 1$, то из (2.4) следует, что i нецелое; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong B_{n_1}(q_1)$ или $G_1 \cong C_{n_1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп $C_4(2)$, $C_4(4)$, $C_5(2)$, $C_6(2)$, $C_7(2)$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \cong C_2(q)$, где $q > 2$, то по леммам 7 и 8 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если G_1 изоморфна одной из групп $B_3(q)$, $C_3(q)$, то по леммам 6–8 G_1 изоморфна одной из групп $B_3(q)$, $C_3(q)$, $D_4(q)$.

Пусть $n_1 \geq 4$ и $(n_1, q_1) \neq (4,2), (5,2), (6,2), (7,2)$. Тогда $t(G_1) = [(3n+5)/4]$. Если $n_1 \geq 5$, то $t(G) = t(G_1) \geq 5$. Отсюда $n \geq 9$. По [6, табл. 4] $t(p, G) = 3$. Значит, $t(p, G_1) = 3$ и n_1 нечетно.

Как в случае $G_1 \cong A_{n_1 - 1}(q_1)$ получаем, что

$$i = \frac{n-1}{n} n_1, \tag{2.5}$$

где i — натуральное число. Если $n_1 = 4$, то из (2.5) получаем, что $n = 4$. По [6, табл. 4] $t(p, G) = 3$, но $t(p, G_1) = 2$; противоречие. Если $n_1 \geq 5$, то n_1 нечетно. Так как $t(G_1) = t(G)$, то $n_1 \in \{2n/3 - 5/3, 2n/3 - 1, 2n/3 - 1/3\}$. Ввиду равенства (2.5) число i не является натуральным; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong D_{n_1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, $D_7(2)$, $D_8(2)$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \cong D_4(q_1)$, то по леммам 6–8 $\{G, G_1\} = \{B_3(q), D_4(q)\}$ или $\{G, G_1\} = \{C_3(q), D_4(q)\}$.

Пусть $n_1 > 4$ и $(n_1, q_1) \neq (5,2), (6,2)$. Рассуждая, как в случае $G_1 \cong A_{n_1 - 1}(q_1)$, получаем противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2A_{n_1 - 1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2A_2(4)$, ${}^2A_2(8)$, ${}^2A_3(2)$, ${}^2A_3(4)$, ${}^2A_3(8)$, ${}^2A_4(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_{11}(2)$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2A_2(3)$, ${}^2A_2(9)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(5)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, то по лемме 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $t(G) \leq 6$ и q четно, то по табл. 1 и лемме 6 $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$. Если $t(G) \leq 4$ и q нечетно, то по табл. 2 и лемме 7 $n_1 = n$. В остальных случаях $t(G) = [(n+1)/2]$. Так как $t(G_1) = t(G)$, имеем $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$. Отсюда $|G_1| = q_1^{n_1(n_1-1)/2} \prod_{i=2}^{n_1}(q_1^i - (-1)^i)/d_1$, где $d_1 = (n_1, q_1 + 1)$.

Пусть $s = r_{nf}(p)$. Тогда s делит $q_1^l - 1 = p^{lf_1} - 1$, где $l \leq 2n_1$ для нечетного n_1 и $l \leq 2(n_1 - 1)$ для четного n_1. По лемме 3 имеем $lf_1 = nfk$ для некоторого натурального числа k. Следовательно,

$$\frac{f_1}{f} = \frac{nk}{l}. \tag{2.6}$$

Пусть n_1 нечетно. Тогда $n_1 \in \{n-1, n\}$. Пусть $s_1 = r_{2n_1f_1}(p)$ (s_1 делит $q_1^{n_1} + 1$). Тогда s_1 делит $q^j - 1 = p^{jf} - 1$ для некоторого натурального числа $j \leq n$. По лемме 3 имеем $jf = 2n_1f_1t$, где t — натуральное число. Следовательно,

$$j = 2n_1t\,\frac{f_1}{f} = 2nn_1\frac{kt}{l}. \tag{2.7}$$

Если $l < 2n_1$, то $j > n$; противоречие. Если $l = 2n_1$, то из (2.7) следует, что $j = nkt \leq n$. Значит, $k = t = 1$. Если $n_1 = n$, то из (2.6) следует, что $f = 2f_1$, т. е. $q = q_1^2$. Следовательно, $|G| = q_1^{n(n-1)}\prod_{i=2}^n(q_1^{2i} - 1)/d$, где $d = (n, q_1^2 - 1)$, $|G_1| = q_1^{n(n-1)/2}\prod_{i=2}^n(q_1^i - (-1)^i)/d_1$, где $d_1 = (n, q_1 + 1)$. По лемме 1 существует число $r_{2(n-1)}(q_1) \in \pi(G) \setminus \pi(G_1)$; противоречие. Значит, $n_1 = n - 1$. Тогда $f_1/f = n/(2(n-1))$. Пусть $s_2 = r_{(n-1)f}(p)$. Тогда s_2 делит $q_1^i - 1 = p^{if_1} - 1$ для некоторого натурального числа $i \leq 2n_1 = 2(n-1)$. По лемме 3 имеем $if_1 = (n-1)fu$, где u — натуральное число. Следовательно, $i = (n-1)uf/f_1 = (n-1)u2(n-1)/n = 2(n^2 - 2n + 1)u/n$. Отсюда $u \geq n/2$ и, следовательно, $i \geq (n-1)^2 > 2(n-1)$; противоречие.

Пусть n_1 четно. Тогда $n_1 \in \{n, n+1\}$. Как при нечетном n_1, получаем, что $f_1/f = n/(2(n_1 - 1))$. Если $n_1 = n + 1$, то $f = 2f_1$, т. е. $q = q_1^2$. Следовательно, $|G| = q_1^{n(n-1)}\prod_{i=2}^n(q_1^{2i} - 1)/d$, где $d = (n, q_1^2 - 1)$, и $|G_1| = q_1^{n(n+1)/2}\prod_{i=2}^{n+1}(q_1^i - (-1)^i)/d_1$, где $d_1 = (n+1, q_1+1)$. По лемме 1 при $n > 3$ существует число $r_{2(n-1)f_1}(p) \in \pi(G) \setminus \pi(G_1)$; противоречие. При $n = 3$ имеем $|G| = q_1^6\prod_{i=2}^3(q_1^{2i} - 1)/d$, где $d = (3, q_1^2 - 1)$, и $|G_1| = q_1^6\prod_{i=2}^4(q_1^i - (-1)^i)/d_1$, где $d_1 = (4, q_1 + 1)$. По лемме 1 существует число $r_{3f_1}(p) \in \pi(G) \setminus \pi(G_1)$; противоречие. Значит, $n_1 = n$. Тогда $f_1/f = n/(2(n-1))$. Как в конце предыдущего абзаца получаем противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2D_{n_1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_5(3)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \cong {}^2D_4(q)$, где $q > 2$, то по лемме 8 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $n_1 > 4$ и $(n_1, q_1) \neq (5,2), (6,2), (7,2)$. Рассуждая, как в случае $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$, получаем противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong G_2(q_1)$, где q_1 четно. Тогда $G = A_4(q)$, где q четно. Рассуждая, как в случае $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $G = B_n(q)$, где $n \geq 3$, или $G = C_n(q)$, где $n \geq 2$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\{G, G_1\} = \{B_n(q), C_n(q)\}$, где p нечетно;

(2) $\{G, G_1\} = \{B_3(q), D_4(q)\}$;

(3) $\{G, G_1\} = \{C_3(q), D_4(q)\}$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Если $G \in \{C_4(2), C_4(4), C_5(2), C_6(2), C_7(2)\}$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G = C_2(q)$, где $q > 2$, то по леммам 7 и 8 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G \in \{B_3(q), C_3(q)\}$, то по леммам 6–8 G_1 изоморфна одной из групп $B_3(q)$, $C_3(q)$, $D_4(q)$ и выполнено одно из утверждений (1)–(3).

По леммам 5 и 9 можно предполагать, что $G_1 \not\cong A_{n_1-1}(q_1)$.

Пусть $G = C_n(q)$ или $B_n(q)$, где $n > 3$ и $(n, q) \neq (4,2), (5,2), (6,2), (7,2)$. Тогда $t(G) = [(3n+5)/4]$. Группа G имеет порядок $q^{n^2}\prod_{i=1}^n(q^{2i} - 1)/d$, где $d = (2, q-1)$. Так как $t(G_1) = t(G)$, $t(2, G_1) = t(2, G)$ и $s(G_1) = s(G)$, то либо G_1 изоморфна одной из групп $B_{n_1}(q_1)$, $C_{n_1}(q_1)$, $D_{n_1}(q_1)$, ${}^2A_{n_1-1}(q_1)$, ${}^2D_{n_1}(q_1)$, либо $G = B_5(q)$ и $G_1 \cong F_4(q_1)$ ($q_1 > 2$), либо $G = C_5(q)$ и $G_1 \cong F_4(q_1)$ ($q_1 > 2$).

Предположим, что $G_1 \cong B_{n_1}(q_1)$ или $G \cong C_{n_1}(q_1)$, где $n_1 > 3$ и $(n_1, q_1) \neq (4,2), (5,2), (6,2), (7,2)$. Тогда $t(G_1) = [(3n_1 + 5)/4]$. Так как $t(G_1) = t(G)$, то $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$. Если $n_1 = n \pm 1$, то по [6, табл. 4] либо $t(p, G) = 2$ и $t(p, G_1) = 3$, либо $t(p, G) = 3$ и $t(p, G_1) = 2$; противоречие. Значит, $n_1 = n$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем, что $q_1 = q$. Таким образом, $\{G, G_1\} = \{B_n(q), C_n(q)\}$ и выполняется утверждение (1).

Предположим, что $G_1 \cong D_{n_1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, $D_7(2)$, $D_8(2)$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \cong D_4(q)$, то по леммам 6–8 $G \in \{B_3(q), C_3(q)\}$ и выполняется утверждения (2), (3).

Пусть $n_1 > 4$. Если $n_1 \not\equiv 3 \pmod 4$ и $(n_1, q) \neq (5,2), (6,2)$, то $t(G_1) = [(3n_1+1)/4]$. Если $n_1 \equiv 3 \pmod 4$, то $t(G_1) = (3n_1+3)/4$. Так как $t(G_1) = t(G)$, то $n_1 \in \{n, n+1, n+2\}$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем, что $q_1 = q$ и либо $n_1 = n$, либо $n_1 = n+1$ и $n \equiv 0, 3 \pmod 4$. Если $n_1 = n$, то $|G_1| = q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d_1$, где $d_1 = (4, q^n - 1)$. По лемме 1 существует число $r_{2n}(q) \in \pi(G) \setminus \pi(G_1)$; противоречие. Если $n_1 = n+1$, то $|G_1| = q^{n(n+1)}(q^{n+1}-1)\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1)/d_1$, где $d_1 = (4, q^{n+1}-1)$. Если n четно, то по лемме 1 существует число $r_{n+1}(q) \in \pi(G_1) \setminus \pi(G)$; противоречие. Если n нечетно, то $n \equiv 3 \pmod 4$. По [6] имеем $\Theta(G) = \{r_i \mid (n+1)/2 < \eta(i) \leq n\}$, $\Theta'(G) = \{\{r_{(n-1)/2}\}, \{r_{n-1}\}, \{r_{n+1}\}\}$, $\Theta(G_1) = \{r_i \mid (n+1)/2 \leq \eta(i) \leq n+1, i \neq 2(n+1)\}$, $\Theta'(G_1) = \varnothing$. Отсюда $\{r_{(n-1)/2}\} \not\subseteq \Theta(G_1) \cup \Theta'(G_1) = \Theta(G) \cup \Theta'(G)$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2A_{n_1-1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2A_2(4)$, ${}^2A_2(8)$, ${}^2A_3(2)$, ${}^2A_3(4)$, ${}^2A_3(8)$, ${}^2A_4(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_{11}(2)$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2A_2(3)$, ${}^2A_2(9)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(5)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, то по лемме 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

По лемме 8 $(n, q) \neq (3, 2^s - 1)$. Рассматривая отдельно случаи четного и нечетного n и рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2D_{n_1}(q_1)$, где $n_1 \geq 4$. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_5(3)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \cong {}^2D_4(q_1)$, где $q_1 > 2$, то по лемме 8 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $n_1 > 4$ и $(n_1, q_1) \neq (5,2), (6,2), (7,2)$. Тогда $t(G_1) = [(3n_1+4)/4]$. Так как $t(G_1) = t(G)$ и $t(p, G) = t(p, G_1)$, то по [6, табл. 4] и [7] $n_1 = n \equiv 3 \pmod 4$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$ и $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем, что $q_1 = q$. По [6] имеем $\Theta(G) = \{r_i \mid (n+1)/2 < \eta(i) \leq n\}$, $\Theta'(G) = \{\{r_{(n-1)/2}\}, \{r_{n-1}\}, \{r_{n+1}\}\}$, $\Theta(G_1) = \{r_i \mid (n-1)/2 \leq \eta(i) \leq n, i \neq n, (n-1)/2\}$, $\Theta'(G_1) = \varnothing$. Отсюда $\{r_{(n-1)/2}\} \not\subseteq \Theta(G_1) \cup \Theta'(G_1) = \Theta(G) \cup \Theta'(G)$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong F_4(q_1)$, где $q_1 > 2$. Тогда $G \in \{B_5(q), C_5(q)\}$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $G = D_n(q)$, где $n \geq 4$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда $G = D_4(q)$ и G_1 изоморфна $B_3(q)$ или $C_3(q)$.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Если $G \in \{D_5(2), D_5(3), D_5(5), D_6(2), D_6(3), D_7(2), D_8(2)\}$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G = D_4(q)$, то по леммам 6–8 группа G_1 изоморфна $B_3(q)$ или $C_3(q)$.

Если $G_1 \cong B_n(q)$ или $G_1 \cong C_n(q)$, то по лемме 10 $\{G, G_1\} = \{B_3(q), D_4(q)\}$ или $\{G, G_1\} = \{C_3(q), D_4(q)\}$. По леммам 5, 9 и 10 можно предполагать, что G_1 не изоморфна ни одной из групп $A_{n_1-1}(q_1)$, $B_{n_1}(q_1)$, $C_{n_1}(q_1)$.

Пусть $n > 4$. Если $n \not\equiv 3 \pmod 4$ и $(n, q) \neq (5,2), (6,2)$, то $t(G) = [(3n+1)/4]$. Если $n \equiv 3 \pmod 4$, то $t(G) = (3n+3)/4$. Группа G имеет порядок $q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d$, где $d = (4, q^n - 1)$. Так как $t(G_1) = t(G)$, $t(2, G_1) = t(2, G)$ и $s(G_1) = s(G)$, то G_1 изоморфна одной из групп $D_{n_1}(q_1)$, ${}^2A_{n_1-1}(q_1)$, ${}^2D_{n_1}(q_1)$.

Предположим, что $G_1 \cong D_{n_1}(q_1)$. Тогда $|G_1| = q_1^{n_1(n_1-1)}(q_1^{n_1}-1)\prod_{i=1}^{n_1-1}(q_1^{2i}-1)/d_1$, где $d_1=(4,q_1^{n_1}-1)$.

Пусть $n_1>4$. Если $n_1 \not\equiv 3 \pmod 4$ и $(n_1,q_1)\neq(5,2),(6,2)$, то $t(G_1)=[(3n_1+1)/4]$. Если $n_1\equiv 3 \pmod 4$, то $t(G_1)=(3n_1+3)/4$. Так как $t(G_1)=t(G)$, то $n_1\in\{n,n-1,n+1\}$.

Пусть $s=r_{2(n-1)f}(p)$. Тогда s делит $q_1^{2l}-1=p^{2lf_1}-1$ для некоторого натурального числа $l\le n_1$. По лемме 3 имеем $2lf_1=2(n-1)fk$, где k — натуральное число. Следовательно,

$$\frac{f_1}{f}=\frac{(n-1)k}{l}. \tag{2.8}$$

Пусть $s_1=r_{2(n_1-1)f_1}(p)$. Тогда s_1 делит $q^{2j}-1=p^{2jf}-1$ для некоторого натурального числа $j\le n$. По лемме 3 имеем $2jf=2(n_1-1)f_1t$, где t — натуральное число. Следовательно, из (2.8) имеем

$$j=(n_1-1)t\,\frac{f_1}{f}=\frac{(n_1-1)(n-1)}{l}\,kt. \tag{2.9}$$

Пусть $l=n_1$. Тогда $j=(n_1-1)(n-1)kt/n_1$. Если $kt\ge 2$, то $j\ge 8(n-1)/5>n$; противоречие. Значит, $k=t=1$. Из (2.9) следует, что $j=(n_1-1)(n-1)/n_1$. Если $n_1=n$ или $n_1=n+1$, то j не является целым числом; противоречие. Если $n_1=n-1$, то из (2.8) следует, что $f_1=f$ и $q_1=q$. Тогда $|G|=q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d$, где $d=(4,q^n-1)$, и $|G_1|=q^{(n-1)(n-2)}(q^{n-1}-1)\prod_{i=1}^{n-2}(q^{2i}-1)/d_1$, где $d_1=(4,q^{n-1}-1)$. По лемме 1 существует число $r_{2(n-1)}(q)\in\pi(G)\setminus\pi(G_1)$; противоречие.

Пусть $l=n_1-1$. Тогда $j=(n-1)kt$. Если $kt\ge 2$, то $j\ge 2(n-1)>n$; противоречие. Значит, $kt=1$, т. е. $k=t=1$. Из (2.8) следует, что $f_1/f=(n-1)/(n_1-1)$. Если $n_1=n$, то $f_1=f$, $q_1=q$ и $G_1\cong G$; противоречие. Если $n_1=n+1$, то $f_1/f=(n-1)/n$. Пусть $s_2=r_{2(n-2)f}(p)$. Тогда s_2 делит $q_1^{2i}-1=p^{2if_1}-1$ для некоторого натурального числа $i\le n_1$. По лемме 3 имеем $2if_1=2(n-2)fu$ для некоторого натурального числа u. Следовательно, $i=(n-2)u\,f/f_1=(n-2)u\,n/(n-1)=(n^2-2n)u/(n-1)$. Так как i — целое число, то $u\ge n-1$. Отсюда $i\ge n^2-2n>n$; противоречие. Аналогично рассматривается случай $n_1=n-1$.

Итак, $l\le n_1-2$. При $kt\ge 2$ имеем $j\ge (n_1-1)(n-1)kt/(n_1-2)>n$; противоречие. Значит, $k=t=1$. Если $n_1=n+1$, то из (2.9) следует, что $j=n(n-1)/l\le n$. Отсюда $l=n-1$. Из (2.8) получаем, что $f_1=f$ и $q_1=q$. Тогда $|G|=q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d$, где $d=(4,q^n-1)$, и $|G_1|=q^{n(n+1)}(q^{n+1}-1)\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1)/d_1$, где $d_1=(4,q^{n+1}-1)$. По лемме 1 существует число $r_{2n}(q)\in\pi(G_1)\setminus\pi(G)$; противоречие. Если $n_1=n-1$, то из (2.9) следует, что $j\ge(n-2)(n-1)/(n-3)>n$; противоречие. Если $n_1=n$, то из (2.9) следует, что $j=(n-1)^2/l>(n^2-2n)/(n-2)=n$; противоречие.

Предположим, что $G_1\cong {}^2A_{n_1-1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2A_2(4)$, ${}^2A_2(8)$, ${}^2A_3(2)$, ${}^2A_3(4)$, ${}^2A_3(8)$, ${}^2A_4(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_{11}(2)$, то по лемме 6 $GK(G)\neq GK(G_1)$; противоречие. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2A_2(3)$, ${}^2A_2(9)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(5)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, то по лемме 7 $GK(G)\neq GK(G_1)$; противоречие.

По лемме 8 $(n,q)\neq(3,2^s-1)$. Рассматривая отдельно случаи четного и нечетного n и рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G=A_{n-1}(q)$, $G_1\cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем противоречие.

Предположим, что $G_1\cong {}^2D_{n_1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_5(3)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$, то по леммам 6 и 7 $GK(G)\neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1\cong {}^2D_4(q_1)$, где $q_1>2$, то по лемме 8 $GK(G)\neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $n_1>4$ и $(n_1,q_1)\neq(5,2),(6,2),(7,2)$. Тогда $t(G_1)=[(3n_1+4)/4]$. Так как $t(G_1)=t(G)$, то $n_1\in\{n-2,n-1,n\}$. Рассуждая аналогично случаю $G_1\cong D_{n_1}(q_1)$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если $G={}^2A_{n-1}(q)$, где $n\ge 3$, то графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Если $G \in \{{}^2A_2(4), {}^2A_2(8), {}^2A_3(2), {}^2A_3(4), {}^2A_3(8), {}^2A_4(2), {}^2A_5(2), {}^2A_6(2), {}^2A_{11}(2)\}$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G \in \{{}^2A_2(3), {}^2A_2(9), {}^2A_3(3), {}^2A_5(5), {}^2A_7(3), {}^2A_7(7)\}$, то по лемме 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

По леммам 5, 9–11 можно предполагать, что G_1 не изоморфна ни одной из групп $A_{n_1-1}(q_1)$, $B_{n_1}(q_1)$, $C_{n_1}(q_1)$, $D_{n_1}(q_1)$.

Так как $t(G_1) = t(G)$, $t(2, G_1) = t(2, G)$ и $s(G_1) = s(G)$, то либо G_1 изоморфна одной из групп ${}^2A_{n_1-1}(q_1)$, ${}^2D_{n_1}(q_1)$, либо $G = {}^2A_4(q)$ и $G_1 \cong G_2(q_1)$, где q и q_1 четны, либо $G = {}^2A_{15}(q)$, $(q+1)_2 = 16$ и $G_1 \cong E_7(q_1)$, где q и q_1 нечетны. В последнем случае по [6, табл. 4] $t(p, G) = 3$ и $t(p, G_1) = 5$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2A_{n_1-1}(q_1)$. По лемме 8 $(n, q) \neq (3, 2^s - 1)$. Рассматривая отдельно случаи четного и нечетного n и рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем, что $G_1 \cong G$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2D_{n_1-1}(q_1)$. Если G_1 изоморфна одной из групп ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_5(3)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \cong {}^2D_4(q_1)$, где $q_1 > 2$, то по лемме 8 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $n_1 > 4$ и $(n_1, q_1) \neq (5, 2), (6, 2), (7, 2)$. Рассматривая отдельно случаи четного и нечетного n и рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong G_2(q_1)$, где q_1 четно. Тогда $G = {}^2A_4(q)$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 13. *Если $G = {}^2D_n(q)$, где $n \geq 4$, то графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Если $G \in \{{}^2D_4(2), {}^2D_5(2), {}^2D_5(3), {}^2D_6(2), {}^2D_7(2)\}$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G = {}^2D_4(q)$, где $q > 2$, то по лемме 8 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

По леммам 5, 9–12 можно предполагать, что G_1 не изоморфна ни одной из групп $A_{n_1-1}(q_1)$, $B_{n_1}(q_1)$, $C_{n_1}(q_1)$, $D_{n_1}(q_1)$, ${}^2A_{n_1-1}(q_1)$.

Пусть $n > 4$ и $(n, q) \neq (5, 2), (6, 2), (7, 2)$. Так как $t(G_1) = t(G)$, $t(2, G_1) = t(2, G)$ и $s(G_1) = s(G)$, то $G_1 \cong {}^2D_{n_1}(q_1)$. Если $n_1 > 4$, то, рассуждая, как в доказательстве леммы 9 (случай $G = A_{n-1}(q)$, $G_1 \cong A_{n_1-1}(q_1)$), получаем, что $G_1 \cong G$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 14. *Если $G \in \{G_2(q), F_4(q), {}^3D_4(q), {}^2B_2(q), {}^2G_2(q), {}^2F_4(q)\}$, то графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$. Если $G \in \{G_2(3), G_2(4), G_2(8), F_4(2), {}^3D_4(2), {}^2F_4(8), {}^2F_4(2)'\}$, то по леммам 6 и 7 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

По леммам 5, 9–13 можно предполагать, что G_1 — группа исключительного лиева типа.

Пусть $G = G_2(q)$, где $q > 3$. Тогда группа G имеет порядок $q^6(q^2-1)(q^6-1)$. Так как $t(G_1) = t(G) = 3$, из [7, табл. 2] следует, что $G_1 \cong G_2(q_1)$. Отсюда $|G_1| = q_1^6(q_1^2-1)(q_1^6-1)$.

Пусть $s = r_{6f}(p)$. Тогда s делит $q_1^6 - 1 = p^{6f_1} - 1$. По лемме 3 имеем $6f_1 = 6fk$, где k — натуральное число. Отсюда $f_1 = fk$ и $q_1 = q^k$. Следовательно, $|G_1| = q^{6k}(q^{2k}-1)(q^{6k}-1)$. По лемме 1 при $k \geq 2$ существует число $r_{6k}(q) \in \pi(G_1) \setminus \pi(G)$; противоречие. Значит, $k = 1$, $q_1 = q$ и $G_1 \cong G$; противоречие.

Пусть $G = F_4(q)$, где $q > 2$. Из [6, табл. 5] и [7, табл. 2] следует, что G_1 изоморфна $F_4(q_1)$ или ${}^2F_4(q_1)$. Аналогично случаю $G = G_2(q)$, $G_1 \cong G_2(q_1)$ получаем, что $G_1 \cong G$; противоречие.

Пусть $G = {}^3D_4(q)$, где $q > 2$. Из [7, табл. 2] следует, что $G_1 \cong {}^3D_4(q_1)$. Аналогично случаю $G = G_2(q)$, $G_1 \cong G_2(q_1)$ получаем, что $G_1 \cong G$; противоречие.

Пусть $G = {}^2B_2(q)$. Из [7, табл. 2] следует, что $G_1 \cong {}^2B_2(q_1)$. Аналогично случаю $G = G_2(q)$, $G_1 \cong G_2(q_1)$ получаем, что $G_1 \cong G$; противоречие.

Пусть $G = {}^2G_2(q)$. Из [7, табл. 2] следует, что $G_1 \cong {}^2G_2(q_1)$. Аналогично случаю $G = G_2(q)$, $G_1 \cong G_2(q_1)$ получаем, что $G_1 \cong G$; противоречие.

Пусть $G = {}^2F_4(q)$, где $q > 8$. Из [7, табл. 2] следует, что G_1 изоморфна $F_4(q_1)$ или ${}^2F_4(q_1)$. Аналогично случаю $G = G_2(q)$, $G_1 \cong G_2(q_1)$ получаем, что $G_1 \cong G$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 15. *Если $G \in \{E_6(q), {}^2E_6(q), E_7(q), E_8(q)\}$, то графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Пусть $G = E_6(q)$. Тогда группа G имеет порядок $q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)/d$, где $d = (3, q-1)$. Если $q = 2$, то по лемме 6 $G_1 \cong G$; противоречие. Если $q \neq 2$, то из [7, табл. 2] следует, что G_1 изоморфна $E_6(q_1)$ или ${}^2E_6(q_1)$.

Предположим, что $G_1 \cong E_6(q_1)$. Группа G_1 имеет порядок $q_1^{36}(q_1^2-1)(q_1^5-1)(q_1^6-1)(q_1^8-1)(q_1^9-1)(q_1^{12}-1)/d_1$, где $d_1 = (3, q_1-1)$.

Пусть $s = r_{12f}(p)$. Тогда s делит $q_1^{24}-1 = p^{24f_1}-1$ или $q_1^{45}-1 = p^{45f_1}-1$.

Если s делит $q_1^{24}-1 = p^{24f_1}-1$, то по лемме 3 имеем $24f_1 = 12f\,k$, где k — натуральное число. Следовательно,

$$\frac{f_1}{f} = \frac{k}{2}. \tag{2.10}$$

Пусть $s_1 = r_{12f_1}(p)$. Тогда s_1 делит $q^{24}-1 = p^{24f}-1$ или $q^{45}-1 = p^{45f}-1$. По лемме 3 имеем $24f = 12f_1t$ или $45f = 12f_1t$ для некоторого натурального числа t. Следовательно, из (2.10) получаем, что

$$\frac{f}{f_1} = \frac{t}{2} = \frac{2}{k} \tag{2.11}$$

или

$$\frac{f}{f_1} = \frac{4t}{15} = \frac{2}{k}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что $kt = 15/2$; противоречие. Из (2.11) следует, что $kt = 4$. Отсюда $k \in \{1, 2, 4\}$. Если $k = 2$, то $f_1 = f$ и $q_1 = q$, следовательно, $G_1 \cong G$; противоречие. Без ограничения общности можно считать, что $k = 4$, $f_1 = 2f$ и $q_1 = q^2$. По лемме 1 существует число $r_{24}(q) \in \pi(G_1) \setminus \pi(G)$; противоречие.

Если s делит $q_1^{45}-1 = p^{45f_1}-1$, то по лемме 3 имеем $45f_1 = 12fk$ для некоторого натурального числа k. Следовательно,

$$\frac{f_1}{f} = \frac{4k}{15}. \tag{2.13}$$

Пусть $s_1 = r_{12f_1}(p)$. Тогда s_1 делит $q^{24}-1 = p^{24f}-1$ или $q^{45}-1 = p^{45f}-1$. По лемме 3 имеем $24f = 12f_1t$ или $45f = 12f_1t$ для некоторого натурального числа t. Следовательно, из (2.13) получаем, что

$$\frac{f}{f_1} = \frac{t}{2} = \frac{15}{4k} \tag{2.14}$$

или

$$\frac{f}{f_1} = \frac{4t}{15} = \frac{15}{4k}. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) следует, что $kt \in \{15/2, 225/16\}$; противоречие.

Предположим, что $G_1 \cong {}^2E_6(q_1)$. Тогда группа G_1 имеет порядок $q_1^{36}(q_1^2-1)(q_1^5+1)(q_1^6-1)(q_1^8-1)(q_1^9+1)(q_1^{12}-1)/d_1$, где $d_1 = (3, q_1+1)$. Полагаем $s = r_{12f}(p)$ и $s_1 = r_{18f_1}(p)$ и рассуждая, как в случае $G_1 \cong {}^2E_6(q_1)$, получим, что $f_1/f \in \{2/3, 5/6, 4/3, 5/2\}$.

Пусть $s_2 = r_{9f}(p)$. Тогда s_2 делит $q_1^{72}-1 = p^{72f_1}-1$ или $q_1^{10}-1 = p^{10f_1}-1$.

Если s_2 делит $q_1^{10}-1 = p^{10f_1}-1$, то по лемме 3 имеем $10f_1 = 9f\,u$ для некоторого натурального числа u. Следовательно, $u = 10/9\,f_1/f \in \{20/27, 25/27, 40/27, 25/9\}$; противоречие.

Если s_2 делит $q_1^{72}-1=p^{72f_1}-1$, то по лемме 3 имеем $72f_1=9fu$ для некоторого натурального числа u. Следовательно, $u=8\,f_1/f\in\{16/3,20/3,32/3,20\}$. Таким образом, $f_1/f=5/2$.

Пусть $s_3=r_{12f_1}(p)$. Тогда s_3 делит $q^{24}-1=p^{24f}-1$ или $q^{45}-1=p^{45f}-1$. По лемме 3 имеем $24f=12f_1v$ или $45f=12f_1v$ для некоторого натурального числа v. Следовательно, $v\in\{4/5,3/2\}$; противоречие.

Пусть $G={}^2E_6(q)$. Если $q=2$, то по лемме 6 $G_1\cong G$; противоречие. Если $q\neq 2$, то из [7, табл. 2] следует, что G_1 изоморфна $E_6(q_1)$ или ${}^2E_6(q_1)$. Случай $G_1\cong E_6(q)$ уже рассмотрен. Случай $G_1\cong {}^2E_6(q_1)$ рассматривается аналогично случаю $G=E_6(q)$ и $G_1\cong E_6(q_1)$. Имеем $q_1=q$, $G_1\cong G$; противоречие.

Пусть $G=E_7(q)$. Из [7, табл. 2] следует, что $G_1\cong E_7(q_1)$. Как в случае $G=E_6(q)$ и $G_1\cong E_6(q_1)$ получаем, что $q_1=q$, $G_1\cong G$; противоречие.

Пусть $G=E_8(q)$. Из [7, табл. 2] следует, что $G_1\cong E_8(q_1)$. Как в случае $G=E_6(q)$ и $G_1\cong E_6(q_1)$ получаем, что $q_1=q$, $G_1\cong G$; противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 5–15 и их доказательств следует заключение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/~alglog/18kt.pdf.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
6. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
8. Atlas of finite groups / J. H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
10. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m=y^n+1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
11. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electronic Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Зиновьева Марианна Рифхатовна

Поступила 29.10.2013

канд. физ.-мат. наук
докторант
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Том 20 № 2 2014

УДК 519.17+512.54

АВТОМОРФИЗМЫ ГРАФОВ ХИГМЕНА С $\mu = 6$[1]

Н. Д. Зюляркина, А. А. Махнёв

Графом Хигмена назовем сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m-2)$. В графах Хигмена параметр μ принимает значения 4,6,7 и 8. Найдены возможные порядки автоморфизмов графов Хигмена с $\mu = 6$ и выяснено строение подграфов неподвижных точек этих автоморфизмов.

Ключевые слова: граф, автоморфизм, подграф неподвижных точек.

N. D. Zyulyarkina, A. A. Makhnev. Automorphisms of Higman graphs with $\mu = 6$.

We call a strongly regular graph with $v = \binom{m}{2}$ and $k = 2(m-2)$ a Higman graph. In Higman graphs, the parameter μ takes values 4, 6, 7, and 8. We find possible orders of automorphisms of Higman graphs with $\mu = 6$ and study the structure of fixed-point subgraphs of these automorphisms.

Keywords: graph, automorphism, fixed-point subgraph.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Для подграфа Δ графа Γ через $\Delta^\perp$ обозначим $\cap_{a\in\Delta} a^\perp$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$. Графом ранга 3 называется сильно регулярный граф с такой вершинно транзитивной группой автоморфизмов, что стабилизатор вершины действует транзитивно на ее окрестности и на ее антиокрестности.

Через $K_{m,n}$ обозначим полный двудольный граф с долями порядков m, n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$a \times b$-решеткой*, если $|X| = a$, $|Y| = b$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф на множестве неупорядоченных пар из X называется *треугольным графом* $T(m)$, если $|X| = m$, а пары $\{x, y\}$ и $\{u, w\}$ смежны тогда и только тогда, когда $|\{x, y\} \cap \{u, w\}| = 1$. Граф $T(m)$ является сильно регулярным с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m-2)$ и $\mu = 4$. Если Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m-2)$ и $\mu = 4$, то либо Γ изоморфен $T(m)$, либо $m = 8$ и Γ изоморфен одному из трех графов Чанга.

Графы ранга 3 с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m-2)$ изучал Д. Хигмен [1]. Он доказал, что если G — группа подстановок ранга 3 степени $\binom{m}{2}$, $m \geq 5$, с подстепенью $2(m-2)$, то либо G

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), а также в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

изоморфна 4-транзитивной подгруппе из S_m, действующей на 2-элементных подмножествах, либо G изоморфна подгруппе $P\Gamma L_2(8)$ из S_9, действующей на 2-элементных подмножествах, либо выполняется одно из утверждений:

(1) $\mu = 6$ и $m = 9, 17, 27$ или 57;

(2) $\mu = 7$ и $m = 51$;

(3) $\mu = 8$ и $m = 28, 36, 325, 903$ или 8128.

Позднее, в [2] были классифицированы графы ранга 3 и в случаях (1)–(3) имеется единственный граф с $\mu = 6, m = 9$, реализуемый с помощью группы $G_2(2)'$.

Фактически в [1] было доказано, что сильно регулярный граф Γ с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m-2)$ либо изоморфен треугольному графу $T(m)$ или одному из графов Чанга, либо выполняется одно из утверждений (1)–(3), либо $\mu = 6$, $m = 7$ и Γ изоморфен дополнительному графу к $T(7)$.

Графом Хигмена назовем сильно регулярный граф Γ с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m-2)$. В работе найдены возможные автоморфизмы графов Хигмена с $\mu = 6$ и подграфы неподвижных точек этих автоморфизмов. Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_j(g)$ обозначим число вершин $u \in \Gamma$ таких, что $(u, u^g) \in R_j$. Отметим, что полученные результаты анонсированы в работе [3].

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(36, 14, 4, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, $p = 2$ или 3 и $\alpha_1(g) = 6r$;*

(2) *Ω является 1-кликой, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 14$ или 3-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 6r$;*

(3) *Ω является l-кокликой, $p = 2$ и $l \in \{4, 6, 8\}$;*

(4) *$p = 3$, $\Omega \subset a^{\perp}$ для некоторой вершины a, $\Omega(a)$ является 2×4-решеткой (и в этом случае $\alpha_1(g) = 0$) или Ω является объединением двух или трех изолированных треугольников;*

(5) *$p = 2$, $|\Omega| \leq 18$, степень вершины в графе Ω четна и меньше 14.*

Теорема 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(136, 30, 8, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20r + 4$ или $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 34$;*

(2) *Ω является 1-кликой и $p = 3, 5$ или Ω является 3-кликой, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 70r + 42$ или Ω является 4-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30r + 12$ или Ω является 7-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30r + 24$;*

(3) *Ω является t-кокликой, $p = 3$ и $t \in \{4, 7, 10, 13, 16\}$ или $p = 2$ и $t \in \{6, 8, 10, 16\}$;*

(4) *Ω не является пустым графом, кликой или кокликой, и $p \in \{2, 3\}$.*

Теорема 3. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(351, 50, 13, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. Тогда порядок группы G_a не делится на 25 и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф и либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 45r + 9$, либо $p = 13$ и $\alpha_1(g) = 195r + 30$;*

(2) *Ω является l-кликой и либо*

(*i*) *$l = 1$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 50s$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20s + 10$, либо*

(*ii*) *$p = 3$, l делится на 3 и $\alpha_1(g) = 45s - 4l - 6$ или $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 30s - 4l - 6$;*

(3) *Ω является t-кокликой, $p = 2$, t нечетно, $5 \leq 3 \leq 25$ и $\alpha_1(g) = 30s - 4t - 6$;*

(4) *$p = 7$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(36, 15, 6, 6)$ и $\alpha_1(g) = 105r$;*

(5) *$p = 5$, $26 \leq |\Omega| \leq 116$, степень вершины в Ω не меньше 10 и не больше 40, и $a^{\perp}$ не содержится в Ω для любой вершины $a \in \Omega$;*

(6) *$p = 3$, $|\Omega| \leq 102$ и в случае равенства имеем $\alpha_1(g) = 246$;*

(7) *$p = 2$, Ω не является кликой или кокликой.*

Теорема 4. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(1596, 110, 55, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G *и* $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 19\}$ *и выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф и либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 60r + 24$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 90r - 6$, *либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 210r + 84$, *либо* $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 570r + 114$;

(2) Ω *является* l-*кликой*, $l \leq 28$ *и либо*

(*i*) $l = 1$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 30r - 10$ *или* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 330r + 110$, *либо*

(*ii*) l *делится на* 3, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) + 4l = 30r - 6$;

(3) Ω *является* t-*кокликой*, $p = 2$, $t \leq 56$ *четно и* $4t + \alpha_1(g) = 30r - 6$;

(4) Ω — *непустой граф, не являющийся кликой или кокликой*, $p \leq 11$ *и*

(*i*) $|\Omega| \leq 298$, *если* $p = 11$,

(*ii*) $|\Omega| \leq 364$, *если* $p = 7$,

(*iii*) $|\Omega| \leq 466$, *если* $p = 5$,

(*iv*) $|\Omega| \leq 507$, *если* $p = 3$,

(*v*) $|\Omega| \leq 526$, *если* $p = 2$.

Доказательство теорем опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом графу Γ соответствует симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где R_0 — отношение равенства на множестве вершин X графа Γ, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пусть π_i — ортогональное проектирование $\mathbf{C}^v$ на i-е собственное подпространство W_i матрицы смежности A графа Γ. Так как A перестановочна с любой матрицей из $\psi(G)$, то подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления группы G, полученного при проектировании π_i. Тогда для любого $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ верно равенство $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2} Q_{ij}\alpha_j(g)$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если Γ имеет целочисленные собственные значения, то число $\chi_i(g)$ является целым.

Приведем также две комбинаторные леммы.

Лемма 1.1 [5, лемма 2.4]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), Δ — *индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, \ldots, d_N$. *Тогда* $(v - N) - (kN - 2M) + \lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum \binom{d_i}{2} = x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i$ *и* $(\sum i x_i)^2 \leq \sum x_i \sum i^2 x_i$, *где* x_i — *число вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ.

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ — *индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, [6, §2]).

Лемма 1.3. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями, g — автоморфизм графа Γ простого порядка p и χ — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности m собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p и p делит $m - \chi(g)$.*

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 3 и предложения 2 [7], примененного к циклической группе $\langle g \rangle$.

2. Случай $\mu = 6,\ m = 9$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$ и $\mu = 6$. Тогда $m = 7, 9, 17, 27$ или 57. Если $m = 7$, то Γ изоморфен дополнительному графу для треугольного графа $T(7)$. В этом случае Γ — граф ранга 3.

В этом разделе предполагается, что $m = 9$. Тогда Γ имеет параметры $(36, 14, 4, 6)$ и собственные значения 2 и -4 кратностей 21 и 14. Пусть g — элемент из G простого порядка p, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, X_i — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Лемма 2.1. *Значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 14, равно $\chi_2(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/6 + 1$, и если Ω — пустой граф, клика или коклика, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф, $p = 2$ или 3 и $\alpha_1(g) = 6r$;*

(2) Ω *является либо 1-кликой, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 14$, либо 3-кликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 6r$;*

(3) Ω *является l-кокликой, $p = 2$ и либо $l = 4$ и $\alpha_1(g) = 6r + 2$, либо $l = 6$ и $\alpha_1(g) = 6r$, либо $l = 8$ и $\alpha_1(g) = 6r + 4$.*

Доказательство. По условию леммы Γ имеет неглавные собственные значения $2, -4$ кратностей 21 и 14. Далее

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & -4 \\ 21 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 21 & 3 & -3 \\ 14 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 14, вычисляется как

$$\chi_2(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/6 + 1.$$

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ или 3 и $\alpha_1(g) = 6r$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является l-кликой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем $l \le 1 + k/4$. В случае $l = 1$ число p делит 14 и 21, поэтому $p = 7$, $\alpha_1(g) = 6r + 2$ делится на 7 и $\alpha_1(g) = 14$. Отсюда Γ имеет $\langle g \rangle$-орбиту Δ, изоморфную дополнительному графу к семиугольнику, и можно считать, что вершина из Δ смежна с ее образами под действием g, g^2. Пусть Y_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $y_i = |Y_i|$. По лемме 1.1 имеем $\sum y_i = 29$, $\sum i y_i = 70$, $\sum \binom{i}{2} y_i = 56$ и $y_0 + \sum \binom{i}{2} y_i = 15$. Если Δ содержится в $[a]$, то $y_7 = 1, y_0 = y_3 = \ldots = y_6 = 0$, противоречие с тем, что $[a] - \Delta \subseteq X_0$. Значит, Δ содержится в $\Gamma - a^{\perp}$. Если $y_i \neq 0$ для $i \ge 4$, то $y_i \ge 7$ и $\sum \binom{i}{2} y_i \ge 21$, противоречие. Теперь $y_i = 0$ для $i \ge 4$, поэтому $y_0 = 1, y_2 = y_3 = 14$. Так как число ребер между Δ и $[a]$ равно 42, то $Y_3 = [a]$, $Y_2 = \Gamma - (a^{\perp} \cup \Delta)$. Итак, либо $[a]$ является объединением двух 7-коклик (и $[a]$ — дополнительный граф для графа инцидентности проективной плоскости порядка 2), а $\Gamma - a^\perp$ является объединением трех $\langle g\rangle$-орбит, изоморфных дополнительному графу к семиугольнику, либо $[a]$ и $\Gamma-(a^\perp\cup\Delta)$ являются объединением двух семиугольников.

В случае $l=2$ число p делит 13 и 2, противоречие. В случае $l=4$ число p делит 11 и 2, снова противоречие. Значит, $l=3$ число p делит 12 и 3, поэтому $p=3$ и $\alpha_1(g)=6r$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является l-кокликой, $l\geq 2$. Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $l\leq 4v/(k+4)=8$. Далее, p делит $21-(l-1)$, 14 и 6, поэтому $p=2$ и l четно. Далее, каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, в частности $l>2$. В случае $l=8$ имеем $x_4=28$ и $\alpha_1(g)\in\{4,10,16,22,28\}$.

Если $l\leq 6$, то по лемме 1.1 имеем $x_0+x_2+x_4+x_6=36-l$, $2x_2+4x_4+6x_6=14l$ и $x_2+6x_4+15x_6=6\binom{l}{2}$. В случае $l=4$ имеем $x_0=6, x_2=24, x_4=2$ и $\alpha_1(g)\in\{2,8,14,20,26,32\}$.

В случае $l=6$, вычитая из двух третьих равенств второе, получим $x_4+3x_6=12$. Вычитая из суммы первого и третьего равенств второе, получим $x_0+3x_4+10x_6=36$. Поэтому $x_0=x_6=0, x_4=12, x_2=18$ и $\alpha_1(g)\in\{0,6,12,18,24,30\}$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть Ω — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $p=3$, *либо $\Omega\subset a^\perp$ для некоторой вершины a, $\Omega(a)$ является 2×4-решеткой (и в этом случае $\alpha_1(g)=0$), либо Ω является объединением двух или трех изолированных треугольников*;

(2) $p=2$, $|\Omega|\leq 18$, *степень вершины в графе Ω четна и меньше* 14.

Доказательство. Заметим, что Γ не содержит собственных сильно регулярных подграфов с $\lambda=4,\mu=6$. Иначе собственный сильно регулярный подграф Δ имеет параметры $(8,6,4,6)$ или $(16,9,4,6)$, противоречие с тем, что каждая вершина из $\Gamma-\Delta$ смежна не более чем с одной вершиной из Δ.

Если $p\geq 7$, то Ω имеет параметры $\lambda'=4$, $\mu'=6$ и по теореме Боуза — Доулинга Ω — сильно регулярный подграф, противоречие.

Если $p=5$, то Ω имеет параметры $\lambda'=4$ и $\mu'\in\{1,6\}$. Поэтому степень каждой вершины в Ω равна 9 или 14. Если $[a]\subset\Omega$, то каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с 6 вершинами из Ω и $\alpha_1(g)=0$, поэтому $\alpha_0(g)$ делится на 3 и $[x]\subset\Omega$ для любой вершины x из $\Omega-a^\perp$. Таким образом, $\Omega-a^\perp$ является кликой и $\Omega-a^\perp=\{b\}$, противоречие.

Значит, Ω — реберно регулярный подграф степени 9 с $\lambda'=4$ и число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ равно $5|\Omega|$, но не больше $6(36-|\Omega|)$. Поэтому $|\Omega|\leq 216/11$ и $|\Omega|\leq 16$, противоречие с тем, что тогда Ω — сильно регулярный подграф с параметрами (16,9,4,6).

Пусть $p=3$. Тогда $|\Omega(a)\cap\Omega(b)|\in\{1,4\}$, если a,b — смежные вершины из Ω, $|\Omega(c)\cap\Omega(d)|\in\{0,3,6\}$, если c,d — несмежные вершины из Ω. Далее, степень вершины в графе Ω равна 2, 5, 8, 11 или 14. Заметим, что если Ω содержит вершину степени 2, то эта вершина лежит в изолированном треугольнике графа Ω. Допустим, что Ω не является объединением изолированных треугольников.

Пусть вершина u смежна с u^g. Тогда $[u^{g^2}]$ содержит t вершин из $[u]\cap[u^g]$, по $3-t$ вершин из $[u]-[u^g]$, $[u^g]-[u]$ и $6+t$ вершин из $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)$. Поэтому Γ содержит $6-t$ вершин, несмежных с вершинами из $\{u,u^g,u^{g^2}\}$ и $|\Omega|\leq 6$.

Пусть вершина u несмежна с u^g. Тогда $[u^{g^2}]$ содержит s вершин из $[u]\cap[u^g]$, по $6-s$ вершин из $[u]-[u^g]$, $[u^g]-[u]$ и $2+s$ вершин из $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)$. Поэтому Γ содержит $9-s$ вершин, несмежных с вершинами из $\{u,u^g,u^{g^2}\}$ и $|\Omega|\leq 9$.

Если $|\Omega|=6$, то Ω является кликой, противоречие. Пусть $|\Omega|=9$. Тогда $\alpha_1(g)=0$. Если Ω содержит вершину степени 2, то Ω является объединением изолированного треугольника и 6-клики, противоречие. Значит, Ω содержит вершину a степени 8, степень любой вершины в графе $\Omega(a)$ равна 4, и пересечение окрестностей двух несмежных вершин из $\Omega(a)$ содержит точно 2 вершины. Поэтому вторая окрестность любой вершины в графе $\Omega(a)$ является 3-кликой и Ω является 2×4-решеткой. Утверждение (1) доказано.

Пусть $p = 2$. Тогда $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| \in \{0, 2, 4\}$, если a, b — смежные вершины из Ω; $|\Omega(c) \cap \Omega(d)| \in \{0, 2, 4, 6\}$, если c, d — две несмежные вершины из Ω. Далее, степень вершины в графе Ω четна. Если $u \in \Gamma - \Omega$, то Ω содержит не более 6 вершин из $[u] \cap [u^g]$ и не более 12 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$, поэтому $|\Omega| \leq 18$.

Допустим, что степень вершины a в графе Ω равна 14. Тогда $|[a] \cap [u]| = 6$ для любой вершины u из $\Gamma - \Omega$, $[u] \cap \Omega \subset [a]$, $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_0(g)$ делится на 6. Если $b \in \Omega - a^\perp$, то $[b]$ содержится в Ω и $[u] \cap \Omega \subset [b]$, противоречие. Лемма и теорема 1 доказаны. $\square$

В работе [8] получена классификация сильно регулярных графов с параметрами (36,14,4,6). Имеется 105 таких графов, из них автоморфизм порядка 7 имеют 2 графа, один из них — с группой автоморфизмов порядка $2^6 3^3 7$ (это граф ранга 3 для $U_3(3)$), а другой — с группой автоморфизмов порядка 21.

3. Случай $\mu = 6$, $m = 17$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$, $\mu = 6$ и $m = 17$. Тогда Γ имеет параметры $(136, 30, 8, 6)$ и собственные значения 6 и -4 кратностей 51 и 84. Пусть g — элемент из G простого порядка p, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, X_i — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Лемма 3.1. *Значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности* 51, *равно* $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/10$, *и если* Ω — *пустой граф, клика или коклика, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф и либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20r + 4$, *либо* $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 34$;

(2) Ω *является* l-*кликой и либо*

- (*i*) $l = 1$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 50r + 40$ *или* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30r$, *либо*
- (*ii*) $l = 3$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 70r + 42$, *либо*
- (*iii*) $l = 4$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30r + 12$, *либо*
- (*iv*) $l = 7$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30r + 24$;

(3) Ω *является* t-*кокликой и либо* $p = 3$ *и* $t \in \{4, 7, 10, 13, 16\}$, *либо* $p = 2$ *и* $t \in \{8, 10, 16\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Γ имеет неглавные собственные значени $6, -4$ кратностей 51 и 84. Далее,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 6 & -4 \\ 105 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 51 & 51/5 & -17/5 \\ 84 & -56/5 & 12/5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 51, равно $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/40$. Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/10.$$

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ или 17. Если $p = 2$, то число $(\alpha_1(g) - 34)/10$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 20r + 4$.. Если $p = 17$, то $\alpha_1(g) = 10w + 4$ делится на 17, поэтому $\alpha_1(g) = 34$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является l-кликой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем $l \leq 1 + k/4$. В случае $l = 1$ число p делит 30 и 105, поэтому либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 50r + 40$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30r$. В случае $l \geq 2$ и различных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $[a] - b^\perp$ содержит 21 вершину, а $[a] \cap [b] - \Omega$ содержит $8 - (l - 2)$ вершин. Поэтому либо $p = 7$, $l = 3$, $\alpha_1(g) = 10w - 2$ делится на 7 и $\alpha_1(g) = 70r + 42$, либо $p = 3$ и $l = 4, 7$. Если $l = 4$, то $\alpha_1(g) = 10w + 2$ делится на 3 и

$\alpha_1(g) = 30r+12$. Если $l = 7$, то $\alpha_1(g) = 10w+4$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 30r+24$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является t-кокликой, $t \geq 2$. Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $t \leq 4v/(k+4) = 16$. Далее, p делит $106-t$ и 6, поэтому либо $p = 2$ и t четно, либо $p = 3$ и $t-1$ делится на 3. Далее, $\sum x_i = 136-t$, $\sum ix_i = 30t$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 6\binom{t}{2}$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $x_0 + \sum \binom{i-}{2} x_i = 3t^2 + 136 - 34t$.

Если $p = 3$, то для любой вершины u из $\Gamma - \Omega$ число $|[u] \cap \Omega|$ не больше 7 и $x_8 = 0$. Поэтому $\sum x_i = 136-t$, $x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7 = 30t$ и $x_2+3x_3+6x_4+10x_5+15x_6+21x_7 = 6\binom{t}{2}$. Если $t = 4$, то $\alpha_1(g) = 30r+18$, $x_0 = 48-x_3-3x_4$, $x_1 = 3x_3+8x_4+48$ и $x_2 = 36-3x_3-6x_4$. В случае $x_4 = 6$ имеем $x_0 = 30, x_1 = 96, x_2 = x_3 = 0$ и $x_2 = 36 - 3x_3 - 6x_4$.

Если $p = 2$, то любая вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, поэтому $t \neq 2$, $x_0+x_2+x_4+x_6+x_8 = 136-t$, $x_2+2x_4+3x_6+4x_8 = 15t$ и $x_2+6x_4+15x_6+28x_8 = 6\binom{t}{2}$. Отсюда $x_4 + 3x_6 + 6x_8 = 3t(t-6)/4$ и $t \neq 4$.

В случае $t = 6$ имеем $\alpha_1(g) = 10r$, $2x_2 + 4x_4 + 6x_6 = 180$ и $x_2 + 6x_4 + 15x_6 = 90$, поэтому $x_2 = 90, x_4 = x_6 = 0$ и $x_0 = 40$. В этом случае X_0 — регулярный граф степени 18 на 40 вершинах. Противоречие с леммой 1.2.

В случае $t = 8$ имеем $x_0+x_2+x_4+x_6+x_8 = 128$, $x_2+2x_4+3x_6+4x_8 = 120$ $x_4+3x_6+6x_8 = 12$ и $\alpha_1(g) = 10r + 2$. Если $x_8 = 2$, то $x_4 = x_6 = 0, x_2 = 112, x_0 = 14$. В этом случае для $u \in X_8$ и $a \in \Omega(u)$ подграф $[a] \cap [u]$ содержит u^g и 7 вершин из X_2. Противоречие с тем, что $|[u]| \geq 1 + 8 + \binom{8}{2}$. Значит, $x_8 = 0$, $x_4 = 12 - 3x_6$, $x_0 = 20 - x_6$ и $x_2 = 96 + 3x_6$.

В случае $t = 10$ имеем $x_4 = 30 - 3x_6 - 6x_8$, $x_2 = 90 + 3x_6 + 8x_8$, $x_0 = 6 - x_6 - 3x_8$ и $\alpha_1(g) = 10r + 4$. Если $x_8 = 2$, то $x_0 = x_6 = 0, x_4 = 18$ и $x_2 = 106$.

В случае $t = 12$ имеем $x_0+x_2+x_4+x_6+x_8 = 124$, $x_2+2x_4+3x_6+4x_8 = 180$ и $x_4+3x_6+6x_8 = 54$. Противоречие с тем, что $x_0 = -2 - x_6 - 3x_8$.

В случае $t = 14$ имеем $x_0+x_2+x_4+x_6+x_8 = 122$, $x_2+2x_4+3x_6+4x_8 = 210$ и $x_4+3x_6+6x_8 = 84$ и $\alpha_1(g) = 10r - 2$. Противоречие с тем, что $x_0 = -4 - x_6 - 3x_8$.

В случае $t = 16$ имеем $x_4 = 120$ и $\alpha_1(g) = 10r$. □

Лемма 3.2. *Пусть Ω — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой. Тогда Γ не содержит собственных сильно регулярных подграфов с $\lambda = 8, \mu = 6$ и $p \leq 5$.*

Доказательство. Пусть Δ — сильно регулярный граф с $\lambda = 8, \mu = 6$. Тогда $n^2 = 4 + 4(k-6)$, $n = 2u$, $k = u^2 + 5$, собственные значения графа Δ равны $1+u, -(u-1)$ и кратность собственного значения $1+u$ равна $(u-2)(u^2+5)(u^2+u+4)/12u$. Поэтому u делит 40.

Если Γ содержит собственный сильно подграф Δ с $\lambda = 8, \mu = 6$, то $u = 4$, Δ имеет параметры $(64, 21, 8, 6)$, противоречие с тем, что каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна не более чем с одной вершиной из Δ.

Если $p > 7$, то Ω имеет параметры $\lambda' = 8$, $\mu' = 6$ и по теореме Боуза — Доулинга Ω — сильно регулярный подграф, противоречие.

Если $p = 7$, то каждое ребро графа Ω лежит в 1 или 8 треугольниках, а $\mu_\Omega = 6$. Пусть Ω содержит β_i вершин, смежных точно с $7i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$. Если вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, то $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 7 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Отсюда $\gamma \leq 3$ и $\beta_0 = 0$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $7|\Omega|$ и не больше $3|\Gamma - \Omega|$, то $|\Omega| \leq 38$.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 7 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда для u из $[a] - \Omega$ и w из $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ подграф $[a] \cap [w]$ содержит не менее 3 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ и $u^{\langle g \rangle}$ не меньше $91 \cdot 3$ и не больше $7 \cdot 21$. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $14|\Omega|$ и не больше $3|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \leq 408/17 = 24$.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 14 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда для w из $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ подграф $[a] \cap [w]$ содержит не менее 3 вершин из $[a] - \Omega$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ и $[a] - \Omega$ не меньше $112 \cdot 3$ и не больше $14 \cdot 21$. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $21|\Omega|$ и не больше $3|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \leq 408/24 = 17$.

Так как Ω не является кликой или кокликой, то Ω — регулярный граф степени 9. Если в Ω нет ребер, лежащих в 8 треугольниках, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', 9, 1, 6)$, противоречие с тем, что $25+4 \cdot 3$ не является квадратом. Поэтому Ω содержит такие смежные вершины a, b, что $[a] \cap [b] \subset \Omega$. В этом случае $|\Omega| = 17$ и $\Omega - a^{\perp}$ — регулярный граф степени 3 на 7 вершинах, противоречие. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть Ω — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой. Тогда $p \neq 5$.*

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда каждое ребро графа Ω лежит в 3 или 8 треугольниках, а $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| \in \{1, 6\}$ для любых двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$. Пусть Σ_i — множество вершин из Ω, смежных точно с $5i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$, $\sigma_i = |\Sigma_i|$. Очевидно $\sigma_6 = 0$. Если $a \in \Sigma_5$, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 3 на 5 вершинах, противоречие. Значит, $\sigma_5 = 0$ и степень любой вершины в графе Ω не меньше 10.

Если $[a] \subset \Omega$, то для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $[u] \cap \Omega$ содержит 6 вершин из $[a]$, поэтому $u^{\langle g \rangle}$ — коклика, $\alpha_1(g) = 0$ и $[u] \cap \Omega$ содержится в $[a]$. Если $b \in \Omega - a^{\perp}$, то b не смежна с вершинами из $\Gamma - \Omega$, поэтому $[u] \cap \Omega = [a] \cap [b]$, противоречие. Значит, $\Omega = a^{\perp}$, противоречие с тем, что для $b \in [a]$ подграф $[b] - a^{\perp}$ имеет 21 вершину. Итак, $\sigma_0 = 0$.

Пусть $a \in \Sigma_1$, $u \in [a] - \Omega$. Так как $|[a] \cap [u]| = 8$, то $|[u] \cap \Omega(a)| \geq 4$ и подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кликой. Далее, каждая вершина из $\Gamma - a^{\perp}$ смежна с единственной вершиной из $u^{\langle g \rangle}$ и $\Omega \subset a^{\perp}$, противоречие с тем, что для $b \in \Omega(a)$ подграф $[b] - a^{\perp}$ имеет 21 вершину. Значит, $\sigma_1 = 0$.

Пусть вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, $\Delta = [u]$ и $\Delta_0 = \Omega \cap \Delta$. Покажем, что если $\gamma > 4$, то $|\Omega| \leq 26$. Пусть $|\Omega| \geq 31$.

Если $u^{\langle g \rangle}$ — клика, то $[u] \cap [u^g]$ содержит γ вершин из Δ_0 и 3 вершины из $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $\gamma \leq 5$. В случае $\gamma = 5$ каждая вершина из $\Gamma - (u^{\langle g \rangle} \cup \Delta_0)$ смежна не более чем с одной вершиной из $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $[u]$ содержит 9 вершин из $u^{\langle g \rangle} \cup \Omega$ и не более одной вершины в каждой $\langle g \rangle$-орбите длины 5, отличной от $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $|\Gamma - \Omega| \geq 110$.

Если $u^{\langle g \rangle}$ — коклика, то $\gamma \leq 6$. В случае $\gamma = 6$ каждая вершина из $\Gamma - (u^{\langle g \rangle} \cup \Omega(u))$ смежна не более чем с одной вершиной из $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $[u]$ содержит 6 вершин из Ω и не более одной вершины в каждой $\langle g \rangle$-орбите длины 5. Отсюда $|\Gamma - \Omega| \geq 125$.

В случае $\gamma = 5$ найдутся две $\langle g \rangle$-орбиты длины 5, вершины которых смежны с парами вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Поэтому $[u]$ содержит 5 вершин из Ω, по 2 вершины в указанных двух $\langle g \rangle$-орбитах длины 5 и не более одной вершины в каждой из оставшихся $\langle g \rangle$-орбит длины 5. Отсюда $|\Gamma - \Omega| \geq 120$.

Если $u^{\langle g \rangle}$ — пятиугольник, то для подходящего i подграф $[u] \cap [u^{g^i}]$ содержит γ вершин из $[u] \cap \Omega$ и вершину из $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $\gamma \leq 5$. В случае $\gamma = 5$ каждое ребро из $u^{\langle g \rangle}$ лежит в окрестностях 3 вершин из $\Gamma - (u^{\langle g \rangle} \cup \Omega(u))$. Поэтому найдутся точно три $\langle g \rangle$-орбиты длины 5, вершины которых смежны с парами вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Теперь $[u]$ содержит 7 вершин из $u^{\langle g \rangle} \cup \Omega$, по 2 вершины в трех орбитах $w_i^{\langle g \rangle}$ $(i = 1, 2, 3)$ длины 5, отличных от $u^{\langle g \rangle}$, и не более одной вершины в каждой из оставшихся $\langle g \rangle$-орбит длины 5. Отсюда $|\Gamma - \Omega| \geq 105$.

Если Δ_0 содержит изолированную вершину a, то $[a]$ содержит три орбиты $w_i^{\langle g \rangle}$ $(i = 1, 2, 3)$. В этом случае $\Omega - \Delta$ содержит не более 12 вершин, смежных с вершинами из $\{w_1, w_2, w_3\}$, и не более 10 вершин, смежных с парами вершин из Δ_0. Противоречие с тем, что любая из оставшихся вершин из $\Omega - \Delta$ смежна с 25 вершинами из $\Gamma - \Omega$.

Если степень вершины a в Δ_0 равна 1, то можно считать, что a смежна с парами вершин в двух орбитах $w_i^{\langle g \rangle}$ $(i = 1, 2, 3)$. Поэтому $\Delta_0 - a^{\perp}$ содержит 2 вершины степени 3 и $L = \Delta_0 - \{a\}$ является 4-кликой. В этом случае $\Omega - \Delta$ содержит не более 13 вершин, смежных с вершинами из $\{w_1, w_2, w_3\}$, и не более $6+3$ вершин, смежных с ребрами графа Δ_0. Противоречие с тем, что любая из оставшихся вершин из $\Omega - \Delta$ смежна с 25 вершинами из $\Gamma - \Omega$.

Если число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ больше, чем $4|\Gamma - \Omega|$, то в $\Gamma - \Omega$ найдется вершина u, смежная с 5 вершинами из Ω, и $|\Gamma - \Omega| \geq 105$. Если $|\Omega| > 31$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $10|\Omega|$ и не больше $4|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| = 36$.

Пусть $a \in \Sigma_4$. Тогда $|\Omega(a)| = 10$ и степень каждой вершины в $\Omega(a)$ равна 3 или 8. Если для некоторой вершины $b \in \Omega(a)$ имеем $|[b] \cap \Omega(a)| = 8$, то для вершины $d \in \Omega(a) - b^{\perp}$ подграф $[b] \cap [d]$ содержит a, 3 вершины из $\Omega(a) \cap [b]$ и 2 вершины e, e' из $\Omega(b) - a^{\perp}$. Теперь $[a] \cap [e]$ содержит b, d и 4 вершины из $\Omega(a) \cap [b]$, в частности, степень e в графе $\Omega(b)$ равна 8 и степень b в Ω не меньше 15. Далее, еще для одной вершины $c \in \Omega(a) - \{b\}$ имеем $|[c] \cap \Omega(a)| = 8$ (так как число вершин степени 3 в графе $\Omega(a)$ четно).

Покажем, что $\sigma_2 = 0$. Пусть $a \in \Sigma_2$, $[a] - \Omega = u^{\langle g \rangle} \cup w^{\langle g \rangle}$, X — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных с единственной вершиной из $\Omega - a^{\perp}$ и $x = |X|$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ не меньше $x + 6(20 - x)$ и не больше $15 \cdot 6$, поэтому $x \geq 6$. Докажем, что если $u \in [a] - \Omega$, то $|\Omega(a) \cap [u]| > 0$ и $|\Omega| \geq 31$. Допустим, что $[u]$ не пересекает $\Omega(a)$. Тогда $u^{\langle g \rangle}$ является кликой и u не смежна с единственной вершиной из $w^{\langle g \rangle}$ (скажем, с w). В этом случае $w^{\langle g \rangle}$ является кокликой, иначе $[u] \cap [w]$ содержит a, 2 вершины из $w^{\langle g \rangle}$ и 4 из $u^{\langle g \rangle}$. Теперь $[w]$ содержит 3 вершины из $\Omega(a)$ и $[w] \cap [w^g]$ содержит a, 3 вершины из $\Omega(a)$ и 5 вершин из $u^{\langle g \rangle}$, противоречие. Так как для смежной с u вершины $c \in \Omega(a)$ имеем $|\Omega(c) \cap (\Gamma - a^{\perp})| \geq 6$, то $|\Omega| \geq 31$.

Если $|\Omega| = 36$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $8 \cdot 20 + 28 \cdot 10$ и не больше $100 \cdot 4$, противоречие.

Значит, $|\Omega| = 31$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ не меньше $x + 6(20 - x)$ и не больше $10 \cdot 6$, поэтому $x \geq 12$. Если $c \in \Sigma_2 - \{a\}$, Y — множество вершин из $\Omega(c)$, смежных точно с одной вершиной из $\Omega - a^{\perp}$, то $|Y| \geq 12$ и $|X \cup Y| \geq 16$, поэтому число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $18 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 11 \cdot 15 = 545$. Если же $\sigma_2 = 1$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $14 \cdot 20 + 10 + 16 \cdot 15 = 530$. В любом случае некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 вершинами из Ω, противоречие.

Итак, $\sigma_2 = 0$. Если $|\Omega| \geq 16$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $15|\Omega|$ и не больше $5|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \leq 31$. В случае $|\Omega| = 31$ имеем $20\sigma_4 + 15(31 - \sigma_4) \leq 420$ и $\sigma_4 \leq -9$, противоречие.

Если $|\Omega| = 11$, то Ω является кликой, противоречие. Пусть $|\Omega| = 16$. Если Ω содержит вершину a степени 15, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 9 на 15 вершинах. Значит, Ω — сильно регулярный граф с параметрами (16,10,8,6), противоречие.

Пусть $|\Omega| = 21$. Если $\sigma_3 \neq 0$, то Ω содержит 2 вершины a, c степени 15. Далее, либо вершины a, c смежны и Ω содержит a, c, 8 вершин из $[a] \cap [c]$ и по 6 вершин из $[a] - c^{\perp}$, $[c] - a^{\perp}$, либо вершины a, c несмежны и Ω содержит a, c, 6 вершин из $[a] \cap [c]$ и по 9 вершин из $[a] - c^{\perp}$, $[c] - a^{\perp}$. В любом случае имеем противоречие.Значит, Ω — сильно регулярный граф с параметрами (21,10,3,6), поэтому $\sum x_i = 115$, $\sum ix_i = 420$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 75$, противоречие с тем, что $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = -230$.

Итак, $|\Omega| = 26$. Если $\sigma_3 \neq 0$, то Ω содержит 2 вершины a, b степени 15. Пусть X — множество вершин c из $\Omega(a)$ таких, что $|[c] \cap (\Omega - a^{\perp})| = 1$, $x = |X|$, Y — множество вершин d из $\Omega(b)$ таких, что $|[d] \cap (\Omega - b^{\perp})| = 1$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ не меньше $x + 6(15 - x)$ и не больше $10 \cdot 6$, поэтому $x \geq 5$. Симметрично, $|Y| \geq 5$.

Допустим, что вершины a, b несмежны. Тогда Ω содержит a, b, 6 вершин из $[a] \cap [b]$ и по 9 вершин из $[a] - b^{\perp}$, $[b] - a^{\perp}$. В этом случае $|\Omega(a) \cap [d]| = 6$ для любой вершины $d \in \Omega - a^{\perp}$ и $x = 5$. Пусть $e \in \Omega(b) \cap [a]$ и $[e]$ содержит δ вершин из $\Omega(a) \cap [b]$. Тогда $(\Omega(a) - b^{\perp}) \cap [e] \subseteq X$, иначе для вершины $d \in (\Omega(a) - b^{\perp}) \cap [e]$ подграф $[b] \cap [d]$ содержит e и 6 вершин из $\Omega - a^{\perp}$. Теперь $[e]$ содержит a, b, δ вершин из $\Omega(a) \cap [b]$, $3 - \delta$ или $8 - \delta$ вершин из X и $3 - \delta$ или $8 - \delta$ вершин из Y, поэтому $\delta = 3$ и $|X \cap [e]| \in \{0, 5\}$. Значит, $\Omega(a) \cap [b]$ — регулярный граф степени 3 на 6 вершинах, поэтому $\Omega \cap [b]$ является полным двудольным графом $K_{3,3}$ или треугольной призмой. Если $[e]$ не пересекает X, то $[e]$ содержит 5 вершин из Y. Пусть вершина e' из $\Omega_a \cap [b]$ не смежна с e. Тогда $\Omega(e) \cap [e']$ содержит a, b, 2 или 3 вершины из $\Omega(a) \cap [b]$ и 2 или 1 вершину из $X \cup Y$, противоречие с тем, что $\Omega(e) \cap [e']$ содержит 0 или 5 вершин из $X \cup Y$.

Итак, вершины a, b смежны. Тогда Ω содержит a, b, 8 вершин из $[a] \cap [b]$, по 6 вершин из $[a] - b^\perp$, $[b] - a^\perp$ и 4 вершины вне $a^\perp \cup b^\perp$. Пусть $X \cap Y$ содержит вершину e. Если a, b несмежны с некоторой вершиной $d \in \Omega(e)$, то $\Omega(d)$ содержит e и по 3 вершины из $[a] \cap [b]$, $[a] - b^\perp$ и из $[b] - a^\perp$. Так как $|\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)| = 4$, то $|\Omega(d)| = 10$. Пусть $f \in [e] \cap \Omega(d)$ и $[f]$ содержит δ вершин из $\Omega(e) \cap [d]$. Если $\delta > 0$, то $\Omega(f)$ содержит a, b, e, еще 5 вершин из $[a] \cap [b]$, по вершине из $[a] - c^\perp$, $[c] - a^\perp$ и не более 4 вершин из $\Omega - (a^\perp \cup c^\perp)$. Противоречие с тем, что степень f в Ω не меньше 15. Значит, $\delta = 0$, $\Omega(d)$ содержит a, b, d, e, 1 или 6 вершин из $[a] - c^\perp$, 1 или 6 вершин из $[c] - a^\perp$ и не более 3 вершин из $\Omega - (a^\perp \cup c^\perp \cup \{b\})$. Противоречие с тем, что либо $|\Omega(d)| \leq 9$, либо $11 \leq |\Omega(d)| \leq 14$.

Значит, можно считать, что $\Omega(e)$ содержит вершину c из $[b] - a^\perp$. Тогда $\Omega(c)$ содержит b, e, еще 2 вершины из $[b] \cap [e]$, 2 вершины из $[a] - b^\perp$, 0 или 5 вершин из $[b] - a^\perp$ и не более 3 вершин из $\Omega - (a^\perp \cup c^\perp)$. Поэтому либо $6 \leq |\Omega(d)| \leq 9$, либо $11 \leq |\Omega(d)| \leq 14$, противоречие.

Таким образом, X не пересекает Y, $\sigma_3 = 2$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $24 \cdot 20 + 2 \cdot 15 = 510$.

Если X содержит вершину c из $[a] \cap [b]$, то $c \in Y$, противоречие. Поэтому $X \cup Y$ не пересекает $[a] \cap [b]$. Пусть $c \in X$. Тогда $\Omega(b) \cap [c]$ содержит либо 5 вершин из $[a] \cap [b]$, либо вершину из $[b] - a^\perp$ и 4 вершины из $[a] \cap [b]$. Отсюда число ребер между X и $[a] \cap [b]$ не меньше 20 и некоторая вершина e из $[a] \cap [b]$ смежна по крайней мере с 3 вершинами из X. Противоречие с тем, что степень e в Ω не меньше 12.

Лемма и теорема 2 доказаны. □

4. **Случай** $\mu = 6,\ m = 27$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$, $\mu = 6$ и $m = 27$. Тогда Γ имеет параметры $(351, 50, 13, 6)$ и собственные значения 11 и -4 кратностей 90 и 260. Пусть g — элемент из G простого порядка p, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, X_i — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Лемма 4.1. *Значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности* 90, *равно* $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 54)/15$, *и если* Ω *— пустой граф, клика или коклика, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф и либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 45r + 9$, *либо* $p = 13$ *и* $\alpha_1(g) = 195r + 30$;

(2) Ω *является* l*-кликой и либо*

 (*i*) $l = 1$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 50s$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20s + 10$, *либо*

 (*ii*) $p = 3$, l *делится на* 3 *и* $\alpha_1(g) = 45s - 4l - 6$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 30s - 4l - 6$;

(3) Ω *является* t*-кокликой,* $p = 2$, t *нечетно,* $5 \leq 3 \leq 25$ *и* $\alpha_1(g) = 30s - 4t - 6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Γ имеет неглавные собственные значения $11, -4$ кратностей 90 и 260. Далее,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50 & 11 & -4 \\ 300 & -12 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 90 & 99/5 & -18/5 \\ 260 & -104/5 & 13/5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 90, равно $\chi_1(g) = (50\alpha_0(g) + 11\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g))/195$. Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 54)/15.$$

Пусть Ω — пустой граф. Тогда $p = 3$ или 13. Если $p = 3$, то $(\alpha_1(g) - 54)/15$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 45r + 9$. Если $p = 13$, то $\alpha_1(g) = 15w + 54$ делится на 13, поэтому $\alpha_1(g) = 195r + 30$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является l-кликой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем $l \le 1 + k/4$ и $l \le 13$. В случае $l = 1$ имеем $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/10 - 5$ и $p = 2, 5$. Если $p = 5$, то $\alpha_1(g)/10$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 50s$. Если $p = 2$, то $\alpha_1(g) = 20s + 10$.

В случае $l \ge 2$ для различных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $[a] - b^{\perp}$ содержит 36 вершин, а $[a] \cap [b] - \Omega$ содержит $13 - (l - 2)$ вершин. Поэтому $p \in \{2, 3\}$ и $4l + \alpha_1(g) - 54$ делится на 15. Далее, $\sum x_i = 351 - l$, $\sum ix_i = l(51 - l)$, $\sum \binom{i}{2} x_i = \binom{l}{2}(15 - l)$. Если $l = 3$, то $x_0 = 240 - x_3$, $x_2 = 36 - 3x_3$, $x_1 = 72 + 3x_3$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\alpha_1(g) = 30s - 4l - 6$. Пусть $p = 3$. Тогда $(4l + \alpha_1(g) - 54)/15$ делится на 3, поэтому l делится на 3 и $\alpha_1(g) = 45s - 4l - 6$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является t-кокликой, $t \ge 2$. Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $t \le 4v/(k + 4) = 26$. Далее, p делит 44 и 6, поэтому $p = 2$, t нечетно и $\alpha_1(g) = 30s - 4t - 6$. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Если вершины u, u^g смежны, то $|[u] \cap \Omega|$ нечетно, а если вершины u, u^g несмежны, то $|[u] \cap \Omega|$ четно. Далее, $\sum x_i = 351 - t$, $\sum ix_i = 50t$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 6\binom{t}{2}$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 3t^2 + 351 - 54t$.

Если $t = 3$, то $x_2 = 18 - 3x_3$, $x_1 = 114 + 3x_3$, $x_0 = 216 - x_3$ и $\alpha_1(g) = x_1 + x_3 = 114 + 4x_3 = 30s - 18$. Поэтому $x_3 = 33 + 15s/2$, противоречие. $\square$

До конца раздела предполагается, что Ω — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой. Пусть Σ_i — множество вершин из Ω, смежных точно с pi вершинами из $\Gamma - \Omega$, тогда $\sigma_i = |\Sigma_i|$.

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если подграф* Δ *является* 13-*кликой,* Y_i — *множество вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ *и* $y_i = |Y_i|$, *то* $y_2 = 156$, $y_1 = 182$, *вершина из* Y_2 *смежна с* 28 *вершинами из* Y_1 *и* 20 *вершинами из* Y_2, *вершина из* Y_1 *смежна с* 25 *вершинами из* Y_1 *и* 24 *вершинами из* Y_2;

(2) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с* $\lambda = 13$, $\mu = 6$ *и* $p \le 7$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.1 имеем $\sum y_i = 338$, $\sum iy_i = 494$, $\sum \binom{i}{2} y_i = 156$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 0$. Отсюда $y_2 = 156$, $y_1 = 182$. Пусть вершина из Y_2 смежна с β_i вершинами из Y_i. Тогда $\beta_1 + \beta_2 = 48$, $\beta_1 + 2\beta_2 = 24 + 44$, поэтому $\beta_1 = 28, \beta_2 = 20$. Пусть вершина из Y_1 смежна с γ_i вершинами из Y_i. Тогда $\gamma_1 + \gamma_2 = 49$, $\gamma_1 + 2\gamma_2 = 13 + 60$, поэтому $\gamma_1 = 25, \gamma_2 = 24$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Δ — сильно регулярный граф с $\lambda = 13$, $\mu = 6$. Тогда $n^2 = 49 + 4(k - 6)$, $n = 2u + 1$, $k = u^2 + u - 6$, собственные значения графа Δ равны $4 + u, -(u - 3)$ и кратность собственного значения $4 + u$ равна $(u - 4)(u^2 + u - 6)(u^2 + 2u - 9)/(12u + 6)$. Поэтому $2u + 1$ делит $9 \cdot 25 \cdot 39$.

Если Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с $\lambda = 13, \mu = 6$, то $u = 6$, Δ имеет параметры $(111, 30, 13, 6)$, противоречие с тем, что каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна не более чем с одной вершиной из Δ.

Если $p > 13$, то Ω имеет параметры $\lambda' = 13$, $\mu' = 6$ и по теореме Боуза — Доулинга Ω — сильно регулярный подграф, противоречие.

Если $p = 13$, то каждое ребро графа Ω лежит в 0 или 13 треугольниках, а $\mu_\Omega = 6$. Если вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, то $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 13 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Отсюда $\gamma \le 2$ и $\sigma_0 = 0$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $13|\Omega|$ и не больше $2|\Gamma - \Omega|$, то $|\Omega| \le 39$ и $\sigma_1 = 0$.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 26 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда для w из $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ подграф $[a] \cap [w]$ содержит не менее 4 вершин из $[a] - \Omega$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ и $[a] - \Omega$ не меньше $286 \cdot 4$ и не больше $26 \cdot 36$. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $39|\Omega|$ и не больше $2|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \leq 936/41$ и $|\Omega| = 13$, противоречие.

Если $p = 11$, то $|\Omega|$ сравнимо с -1 по модулю 11, каждое ребро графа Ω лежит в 2 или 13 треугольниках, а $\mu_\Omega = 6$. Если вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, то $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 11 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Отсюда $\gamma \leq 4$ и $\sigma_0 = 0$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $11|\Omega|$ и не больше $4|\Gamma - \Omega|$, то $|\Omega| \leq 87$.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 11 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда для w из $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ подграф $[a] \cap [w]$ содержит не менее 2 вершин из $[a] - \Omega$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma - ([a] \cup \Omega)$ и $[a] - \Omega$ не меньше $253 \cdot 2$ и не больше $11 \cdot 36$. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $22|\Omega|$ и не больше $4|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \leq 54$.

Пусть вершина a из Ω смежна с 44 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда Ω является полным двудольным графом на 12 вершинах, противоречие. Значит, степень каждой вершины в Ω равна 17 или 28.

Если $|\Omega| = 32$ и a — вершина степени 28 в Ω, то степень в Ω вершины из $\Omega - a^\perp$ не больше 8. Поэтому Ω — регулярный граф степени 17. Далее, $\Omega(a)$ содержит 14 вершин степени 13 и 3 вершины c_1, c_2, c_3 степени 2. Противоречие с тем, что $\Omega(c_1) \cap [c_2]$ содержит a и 14 вершин из $\Omega - a^\perp$.

Если $|\Omega| = 43$ и a — вершина степени 28 в Ω, то $\Omega - a^\perp$ регулярный граф степени 11 на 14 вершинах. Противоречие с тем, что для двух несмежных вершин b_1, b_2 из $\Omega - a^\perp$ подграф $\Omega(b_1) \cap [b_2]$ содержит не менее 10 вершин из $\Omega - a^\perp$. Поэтому Ω — регулярный граф степени 17 на 43 вершинах, противоречие.

Итак, $|\Omega| = 54$ и число ребер между $\Gamma - \Omega$ и Ω равно $22\sigma_2 + 33(54 - \sigma_2)$ и не больше $4 \cdot 297$. Отсюда $\sigma_2 \geq 54$ и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 4 вершинами из Ω. Теперь число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $14x + 25(28 - x) = 25 \cdot 6$, противоречие. □

Лемма 4.3. *Пусть Ω — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой. Если $p = 7$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(36, 15, 6, 6)$ и $\alpha_1(g) = 105r$.*

Доказательство. Пусть $p = 7$, $z_i = x_i/7$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 1 по модулю 7, каждое ребро графа Ω лежит в 6 или 13 треугольниках, а $\mu_\Omega = 6$.

Если вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, то $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 7 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Отсюда $\gamma \leq 8$. Так как порядок клики в Γ не больше 13, то $\gamma \leq 6$, причем в случае $\gamma = 6$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ является кликой или кокликой. Но если $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой, то $[a] \cap [u]$ содержит 5 вершин из Ω и 8 из $[a] - \Omega$. Далее, каждая из этих 8 вершин смежна с единственной вершиной из $u^{\langle g \rangle}$ и $|[a]| \geq 5 + 7 \cdot 9$, противоречие.

Пусть $[a] \subset \Omega$. Тогда для u из $\Gamma - a^\perp$ подграф $[a] \cap [u]$ содержит все 6 вершин из $[u] \cap \Omega$. Теперь вершина $b \in \Omega - a^\perp$ не смежна с вершинами из $\Gamma - \Omega$, поэтому $[b] \subset \Omega$, $[b] \cap [u]$ содержит все 6 вершин из $[u] \cap \Omega$ и $|\Gamma - \Omega| = 7$, противоречие. Таким образом, $\sigma_0 = 0$.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 7 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда для u из $[a] - \Omega$ подграф $[a] \cap [u]$ содержит не более 6 вершин из $u^{\langle g \rangle}$ и не менее 7 вершин из Ω, противоречие. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $14|\Omega|$ и не больше $6|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \leq 99$.

Пусть вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 вершинами из Ω, $\Delta = u^{\langle g \rangle} \cup ([u] \cap \Omega)$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $y_i = |Y_i|$. Тогда $\sum y_i = 338$, $\sum i y_i = 13 \cdot 38 = 494$, $\sum \binom{i}{2} y_i = 156$. Поэтому $y_2 = 156, y_1 = 182$ и $|\Gamma - \Omega| \leq 7 + 6 \cdot 28 = 175$, противоречие с тем, что $|\Omega| \leq 99$. Итак, любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с 5 вершинами из Ω.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 14 вершинами из $\Gamma-\Omega$ и $[a]-\Omega=u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle}$. Тогда $[a]\cap[u]$ содержит не более 4 вершин из Ω и не менее 9 вершин из $\Gamma-\Omega$. Если $u^{\langle g\rangle}$ не является кликой, то степень u в графе $u^{\langle g\rangle}$ равна 4 и $[u]$ содержит 5 вершин из $w^{\langle g\rangle}$. Для несмежной с u вершины u^{g^i} подграф $[u]\cap[u^{g^i}]$ содержит a и не менее 3 вершин в каждом из подграфов $u^{\langle g\rangle}$ и $w^{\langle g\rangle}$. Значит, $u^{\langle g\rangle}, w^{\langle g\rangle}$ — клики и $[u]$ содержит не менее 3 вершин из $w^{\langle g\rangle}$. Теперь можно считать, что вершины u, w несмежны и $[u]\cap[w]$ содержит a и по 3 вершины из $u^{\langle g\rangle}$ и из $w^{\langle g\rangle}$. Значит, каждая вершина из Ω смежна по крайней мере с 21 вершиной из $\Gamma-\Omega$, число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ не меньше $21|\Omega|$ и не больше $5|\Gamma-\Omega|$, поэтому $|\Omega|\le 64$.

Пусть вершина a из Ω смежна с 42 вершинами из $\Gamma-\Omega$. Тогда $\Omega(a)$ является регулярным графом степени 6 на 8 вершинах, поэтому $\Omega(a)$ — полный многодольный граф $K_{4\times 2}$. Противоречие с тем, что для двух несмежных вершин $c_1, c_2\in\Omega(a)$ подграф $[c_1]\cap[c_2]$ содержит a и 6 вершин из $\Omega(a)$. Итак, степень каждой вершины в Ω равна 15, 22 или 29.

Пусть степень вершины a в Ω равна 15. Тогда на $[a]-\Omega$ имеется семь $\langle g\rangle$-орбит. Если $\Omega(a)$ содержит вершину степени 13, то для $e\in\Omega(a)-c^{\perp}$ подграф $\Omega(a)\cap[e]$ содержит не менее 6 вершин из $[b]$, противоречие. Поэтому $\Omega(a)$ является регулярным графом степени 6 на 15 вершинах.

Пусть степень вершины a в Ω равна 29. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega-a^{\perp}$ не меньше $29\cdot 8$ и не больше $6\cdot 34$, противоречие. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ не меньше $28|\Omega|$ и не больше $5|\Gamma-\Omega|$, поэтому $|\Omega|\le 50$.

Пусть степень вершины a в Ω равна 22. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega-a^{\perp}$ не меньше $22\cdot 8$ и не больше $6\cdot 27$, противоречие. Таким образом, Ω — регулярный граф степени 15.

Для $a\in\Omega$ число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega-a^{\perp}$ равно $15\cdot 8=6(|\Omega|-16)$. Поэтому $|\Omega|=36$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (36,15,6,6). Теперь $\sum z_i=45$, $\sum iz_i=36\cdot 5=180$, $\sum\binom{i}{2}z_i=270$ и $z_0+\sum\binom{i-1}{2}z_i=135$. Отсюда $z_3=135-z_0-3z_4-6z_5$, $z_2=3z_0+3z_4+8z_5-135$ и $z_1=45-3z_0-z_4-3z_5$. Теперь $3z_0+3z_4+8z_5\ge 135$ и $9z_0+3z_4+9z_5\le 135$, поэтому $z_0=z_5=0$ и $z_4=45$. Положим $\mathcal{L}=\{[u]\cap\Omega\mid u\in\Gamma-\Omega\}$. Тогда каждое ребро графа Ω лежит на единственной прямой из $\mathcal{L}$.

Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)=105r$. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть $a\in\Omega$. Если $p=5$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *если a, b — различные вершины из Ω, то либо вершины a, b смежны и $|\Omega-(a^{\perp}\cup b^{\perp})|$ сравнимо с 4 по модулю 5, либо вершины a, b несмежны и $|\Omega-(a^{\perp}\cup b^{\perp})|$ делится на 5*;

(2) *если вершина u из $\Gamma-\Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, то $u^{\langle g\rangle}$ либо коклика и $\gamma\le 6$, либо пятиугольник и $\gamma\le 5$, либо клика и $\gamma\le 10$, причем в случае $\gamma>8$ подграф $[u]\cap\Omega$ содержит несмежные вершины и $\mu([u]\cap\Omega)\le 1$*;

(3) *$\sigma_i=0$ для $i\in\{0,1,2,9,10\}$ и $26\le|\Omega|\le 121$.*

Доказательство. Пусть $p=5$, $z_i=x_i/5$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 1 по модулю 5, каждое ребро графа Ω лежит в 3, 8 или 13 треугольниках, $|\Omega(a)\cap\Omega(b)|\in\{1,6\}$ для любых двух несмежных вершин $a, b\in\Omega$ и степень в Ω вершины из Σ_i равна $50-5i$.

Пусть a, b — различные вершины из Ω. Если вершины a, b смежны, то Γ содержит a, b, 13 вершин из $[a]\cap[b]$, по 36 вершин из $[a]-b^{\perp}$, $[b]-a^{\perp}$ и 264 вершины вне $a^{\perp}\cup b^{\perp}$. Поэтому $|\Omega-(a^{\perp}\cup b^{\perp})|$ сравнимо с 4 по модулю 5.

Если же вершины a, b несмежны, то Γ содержит a, b, 6 вершин из $[a]\cap[b]$, по 44 вершины из $[a]-b^{\perp}$, $[b]-a^{\perp}$ и 255 вершин вне $a^{\perp}\cup b^{\perp}$. Поэтому $|\Omega-(a^{\perp}\cup b^{\perp})|$ делится на 5. Утверждение (1) доказано.

Пусть вершина u из $\Gamma-\Omega$ смежна с γ вершинами из Ω. Если $u^{\langle g\rangle}$ — коклика, то $\gamma\le 6$, а если $u^{\langle g\rangle}$ — пятиугольник, то $\gamma\le 5$. Если же $u^{\langle g\rangle}$ — клика, то $\gamma\le 10$, причем в случае $\gamma>8$ подграф $[u]\cap\Omega$ содержит несмежные вершины и $\mu([u]\cap\Omega)\le 1$. Утверждение (2) доказано.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 5 вершинами из $\Gamma-\Omega$. Тогда для u из $[a]-\Omega$ подграф $[a]\cap[u]$ содержит не более 4 вершин из $u^{\langle g\rangle}$ и не менее 9 вершин из Ω. Значит, $u^{\langle g\rangle}$ является кликой и $[a] \cap [u]$ содержит точно 9 вершин из Ω. Так как $[a] \cap [u]$ не содержит геодезических 2-путей, то $[a] \cap [u]$ является объединением изолированных клик. Ввиду леммы 4.2 подграф $[a] \cap [u]$ не содержит 7-клик. Подсчитаем число ребер x между $[a] \cap [u]$ и $\cup_{i \in \{0,1,\dots,4\}}([u^{g^i}] - a^\perp)$. Если $[a] \cap [u]$ содержит 6-клику, то $x \geq 15 \cdot 6 + 30 \cdot 3 = 180$, а если $[a] \cap [u]$ не содержит 6-клик, то $x \geq 20 \cdot 5 + 25 \cdot 4 = 200$. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $\cup_{i \in \{0,1,\dots,4\}}([u^{g^i}] - a^\perp)$ смежна по крайней мере с 6 вершинами из $[a] \cap [u]$. Значит, $\sigma_1 = 0$.

Пусть вершина a из Ω смежна точно с 45 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 3 на 5 вершинах, противоречие. Значит, $\sigma_{10} = \sigma_9 = 0$.

Пусть $[a] \subset \Omega$. Тогда для любой вершины u из $\Gamma - \Omega$ подграф $[u] \cap \Omega$ содержит 6 вершин из $[a]$. Если подграф $u^{\langle g \rangle}$ — не клика, то он является кокликой и для $c \in [a] \cap [u]$ подграф $[c] \cap [u]$ содержит не более 5 вершин из $[a]$ и не менее 8 вершин из $\Gamma - \Omega$. Противоречие с тем, что тогда $|[c] - a^\perp| \geq 40$. Значит, для любой вершины u из $\Gamma - \Omega$ подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кликой и $\alpha_1(g) = |\Gamma - \Omega|$. Отсюда $|\Omega| = 5t + 1$, $(20t - 50)/15$ делится на 5 и $t = (15s + 10)/4$. Поэтому либо $s = 2$ и $|\Omega| = 51$, либо $s = 6$ и $|\Omega| = 126$. В любом случае имеем противоречие. Значит, $\sigma_0 = 0$.

Пусть $a \in \Sigma_2$ и $[a] - \Omega = u^{\langle g \rangle} \cup w^{\langle g \rangle}$. Если $|[u] \cap \Omega(a)| = \beta$, то $|[a] \cap [u] - \Omega| = 13 - \beta$, поэтому $4 \leq \beta \leq 7$. В случае $\beta = 4$ подграф $u^{\langle g \rangle} \cup w^{\langle g \rangle}$ является кликой и $|[w] \cap \Omega(a)| = 4$. Пусть $\Delta = \{a\} \cup u^{\langle g \rangle} \cup w^{\langle g \rangle}$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $y_i = |Y_i|$. Тогда $y_i = 0$ для $6 < i < 11$, $\sum y_i = 340$, $\sum i y_i = 440$ и $\sum \binom{i}{2} y_i = 220$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 120$. Если $[u] \cap [w] \cap \Omega(a)$ содержит вершину b, то $\Delta \cup \{b\}$ является 12-кликой. Пусть Z_i — множество вершин из $\Gamma - (\Delta \cup \{b\})$, смежных точно с i вершинами из $\Delta \cup \{b\}$, $z_i = |Z_i|$. Тогда $z_i = 0$ для $6 < i$, $\sum z_i = 339$, $\sum i z_i = 468$ и $\sum \binom{i}{2} z_i = 66 \cdot 3 = 198$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $z_0 + \sum \binom{i-1}{2} z_i = 69$. Вершины из $([u] \cup [w]) \cap \Omega(a)$ попадают в Z_6 и $\binom{5}{2} z_6 = 60$. Далее, $[b] \cap [u]$ содержит a, $w^{\langle g \rangle}$, 4 вершины из $u^{\langle g \rangle}$ и 3 новых вершины из $\Gamma - \Omega$ (всего 15 вершин, смежных с вершинами из $u^{\langle g \rangle}$). Симметрично, $[b]$ содержит 15 новых вершин, смежных с вершинами из $w^{\langle g \rangle}$, поэтому $|[b] \cap (\Gamma - \Omega)| \in \{35, 40\}$. Заметим, что $[u]$ содержит 11 вершин из $\Delta \cup \{b\}$, по 3 вершины из Z_6, $[b] - \Delta$, 14 или 15 вершин из $\cup_i [w^{g^i}]$ и 19 или 18 вершин из Z_1. Если $|[b] \cap (\Gamma - \Omega)| = 40$, то $z_3 = 0$, $z_2 = 75 + 3 + 30 = 108$, $z_1 = 180 + 30 + 6 = 216$, $z_0 = 9$. Если же $|[b] \cap (\Gamma - \Omega)| = 35$, то $z_3 = 5$, $z_2 = 65 + 3 + 20 = 88$, $z_1 = 190 + 35 + 11 = 236$, $z_0 = 4$.

Положим $[u] \cap \Omega(a) - \{b\} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Тогда $\{c_1, c_2, c_3\}$ — объединение изолированных клик, число 2-путей с началом c_i, концом в $\Delta \cup \{b\}$ и средней вершиной в $\Gamma - (\Delta \cup \{c_1, c_2, c_3\})$ равно 48. Если вершина c_1 изолирована в $\{c_1, c_2, c_3\}$, то c_1 смежна с 8 вершинами из $[a]$ и из $[u^{g^i}]$, противоречие с тем, что $|[c_1]| \geq 54$. Значит, $\{c_1, c_2, c_3\}$ — клика, c_i смежна с 6 вершинами из $[a]$, $[u^{g^i}]$ и из Z_0, $[c_1] \cap [c_2]$ содержит c_3, 6 вершин из Δ, не более 3 вершин из $Z_1 \cap \Omega(a)$ и не менее 3 вершин из Z_0. Отсюда $[c_1] \cap [c_2] \cap [c_3]$ содержит точно 6 вершин из Z_0. Положим $[w] \cap \Omega(a) - \{b\} = \{d_1, d_2, d_3\}$. Тогда $\{d_1, d_2, d_3\}$ — клика и $[d_1] \cap [d_2] \cap [d_3]$ содержит точно 6 вершин из Z_0. Пусть $o_1, o_2 \in Z_0 \cap [c_i] \cap [d_j]$. Тогда число 2-путей с началом o_i и концом в $\Delta \cup \{b\}$ равно 72, поэтому $[o_i]$ содержит 36 вершин из Z_1 и 8 из Z_0. Противоречие с тем, что $[o_1] \cap [o_2]$ содержит 7 вершин из Z_0, 6 вершин из Z_6 и 6 вершин из $Z_1 \cap [b]$.

Итак, в случае $\beta = 4$ подграф $[u] \cap \Omega(a)$ не пересекает $[w] \cap \Omega(a)$, $y_6 = 8$ и

$$y_0 + \sum_{i<6} \binom{i-1}{2} y_i = 40.$$

Заметим, что $[a]$ содержит 10 вершин из Δ, 8 вершин из Y_6 и 32 вершины из Z_1. Аналогично, $[u]$ содержит 10 вершин из Δ, 4 вершины из Y_6, 20 новых вершин, смежных с вершинами из $w^{\langle g\rangle}$ и 16 вершин из Y_1. Отсюда $y_0 = 40$, $y_1 = 192$, $y_2 = 100$, $y_6 = 8$.

В случае $\beta = 5$ подграфы $u^{\langle g\rangle}, w^{\langle g\rangle}$ являются кликами и для несмежной с w вершины u^{g^i} подграф $[u^{g^i}] \cap [w]$ содержит 8 вершин из $u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$, противоречие.

В случае $\beta = 6$ подграфы $u^{\langle g\rangle}, w^{\langle g\rangle}$ являются кликами и для несмежной с w вершины u^{g^i} подграф $[u^{g^i}] \cap [w]$ содержит a и 6 вершин из $u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$, противоречие.

В случае $\beta = 7$ подграфы $u^{\langle g\rangle}, w^{\langle g\rangle}$ являются кликами и $[u]$ содержит 2 вершины из $w^{\langle g\rangle}$. Теперь $[u] \cap [u^{g^i}]$ содержит 8 вершин из Δ, 3 вершины из $u^{\langle g\rangle}$ и 0 или 1 вершину из $w^{\langle g\rangle}$. Поэтому на $\Gamma - (\Omega \cup w^{\langle g\rangle})$ либо имеются три $\langle g\rangle$-орбиты, вершины которых смежны с парами вершин из $u^{\langle g\rangle}$, либо имеется одна $\langle g\rangle$-орбита, вершины которой смежны с тройками вершин из $u^{\langle g\rangle}$. Далее, число $\langle g\rangle$-орбит на $\Gamma - \Omega$, пересекающих $[u]$, равно 35 в первом случае и 36 — во втором. Для несмежных вершин u, w^{g^i} подграф $[u] \cap [w^{g^i}]$ содержит a и 4 вершины из $[a] - \Omega$. Поэтому число $\langle g\rangle$-орбит на $\Gamma - \Omega$, пересекающих $[u] \cup [w]$ не меньше 67, противоречие. Таким образом, $\sigma_2 = 0$.

Пусть $|\Omega| = 16$. Тогда Ω — регулярный граф степени 10 и $\mu_\Omega = 6$. Если a, c смежные вершины из Ω и $|[a] \cap \Omega(c)| = 3$, то $|\Omega| \geq 17$, противоречие. Поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами (16,10,8,6), противоречие с тем, что $(8-6)^2 + 4(10-6)$ — не квадрат.

Пусть $|\Omega| = 21$. Если Ω содержит вершину степени 15, то Ω содержит две вершины a, b степени 15. Если вершины a, b несмежны, то $|\Omega| \geq 2 + 6 + 18$, противоречие. Значит, вершины a, b смежны и либо $|\Omega| \geq 2+8+12+4$, либо $|\Omega(a) \cap [b]| = 13$. В последнем случае для вершины $c \in \Omega(a) - b^\perp$ подграф $\Omega(b) \cap [c]$ содержит a, 3 вершины из $[a]$ и 2 из $[b] - a^\perp$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 10. Если a, b несмежные вершины из Ω и $|[a] \cap \Omega(b)| = 1$, то $\Omega \subset a^\perp \cup b^\perp$ и для $\{c\} = [a] \cap \Omega(b)$ число $|\Omega(c)|$ сравнимо с 3 по модулю 5. Итак, $\mu_\Omega = 6$. Так как число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно 60, но не больше $6 \cdot 10$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (21,10,3,6). Далее, $x_0+x_1+x_2+x_3 = 330$, $x_1+2x_2+3x_3 = 840$, $x_2+3x_3 = 1050$ и $x_0 + x_3 = 540$, противоречие.

Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $15|\Omega|$ и не больше $8|\Gamma - \Omega|$, то $|\Omega| \leq 121$.□

Лемма 4.5. *Пусть $p = 3$. Тогда $|\Omega| \leq 102$, и в случае равенства имеем $\alpha_1(g) = 246$.*

Доказательство. Обозначим через x_i $(i = 0, \ldots, [k/p])$ число вершин из Ω, смежных с pi вершинами из $\Gamma - \Omega$, y_i $(i = 0, \ldots, \lambda - 1)$ — число вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных с i вершинами из Ω, и положим $|\Omega| = n$. Составим уравнения:

$$\sum_{i=0}^{16} x_i = n,\ \sum_{i=0}^{12} y_i = 351 - n,\ \sum_{i=0}^{16} 3ix_i = \sum_{i=0}^{12} iy_i,$$

$$\sum_{i=0}^{16} 3i(3i-1)/2 \cdot x_i = \lambda/2 \cdot \sum_{i=0}^{12} (k-i)y_i + \mu/2 \cdot \sum_{i=0}^{12} (v-n-(k-i)-1)y_i - \sum_{i=0}^{12} (k-i)(k-i-1)/2 \cdot y_i,$$

$$\sum_{i=0}^{12} i(i-1)/2 \cdot y_i = \lambda/2 \cdot \sum_{i=0}^{16} (k-pi)x_i + \mu/2 \cdot \sum_{i=0}^{16} (n-(k-pi)-1)x_i - \sum_{i=0}^{16} (k-pi)(k-pi-1)/2 \cdot x_i.$$

Кроме того, выполняется условие неотрицательности x_i, y_i.

При $n = 111, 114, 117$ решений нет.

При n=108 имеется единственное решение $x_9 = 108, y_{12} = 243$, но тогда число $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 54)/15 = (4\Delta 108 + 243 - 54)/15 = 207/5$ не является целым.

Если $n = 105$, то минимум $\sum_{i=\mu+1}^{12} y_i$ равен 475/2. Следовательно, $\alpha_1(g) \geq 240$. Но для $\alpha_1(g) = 240, 243, 246$ значение $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 54)/15$ равно, соответственно, 202/5, 203/5, 204/5, т. е значение характера не целое. Противоречие.

Если $n = 102$, то минимум $\sum_{i=\mu+1}^{12} y_i$ равен 231. Значение $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 54)/15$ является целым при $\alpha_1(g) = 231, 246$ (значение $\chi_1(g)$ соответственно равно 39 и 40). Так как $\chi_1(g) - 190$ делится на 3, то $\alpha_1(g) = 246$.

Лемма и теорема 3 доказаны. □

5. Случай $\mu = 6,\ m = 57$

Пусть Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$, $\mu = 6$ и $m = 57$. Тогда Γ имеет параметры $(1596, 110, 28, 6)$, и собственные значения 26 и -4 кратностей 209 и 1386. Пусть g — элемент из G простого порядка p, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, X_i — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Лемма 5.1. *Значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности* 209, *равно* $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 114)/30$, *и если* Ω *— пустой граф, клика или коклика, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф и либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 60r + 24$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 90r - 6$, *либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 210r + 84$, *либо* $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 570r + 114$;

(2) Ω *является* l*-кликой,* $l \le 28$ *и либо*

(*i*) $l = 1$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 120r - 40$ *или* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 330r + 110$, *либо*

(*ii*) l *делится на 3,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) + 4l = 90r - 6$;

(3) Ω *является* t*-кокликой,* $p = 2$, $t \le 56$ *четно и* $4t + \alpha_1(g) = 60r - 36$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Γ имеет неглавные собственные значения $26, -4$ кратностей 209 и 1386. Далее

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 110 & 26 & -4 \\ 1485 & -27 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 209 & 247/5 & -19/5 \\ 1386 & -252/5 & 14/5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 209, равно $\chi_1(g) = (55\alpha_0(g) + 13\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/420$. Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 114)/30$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2, 3, 7$ или 19. Если $p = 2$, то $\alpha_1(g) = 60r + 24$. Если $p = 3$, то $\alpha_1(g) = 90r - 6$. Если $p = 7$, то $\alpha_1(g) = 210r + 84$. Если $p = 19$, то $\alpha_1(g) = 570r + 114$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является l-кликой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем $l \le 1 + k/4$ и $l \le 28$. В случае $l = 1$ число p делит 110 и 1385, поэтому либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 120r - 40$, либо $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 330r + 110$.

В случае $l \ge 2$ для различных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $[a] - b^\perp$ содержит 81 вершину, а $[a] \cap [b] - \Omega$ содержит $28 - (l-2)$ вершин. Поэтому $p = 3$, l делится на 3, $(\alpha_1(g) + 4l)/3 + 2$ делится на 10 и $\alpha_1(g) + 4l = 90r - 6$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является t-кокликой, $t \ge 2$. Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $t \le 4v/(k+4) = 56$. Далее, p делит 104 и 6, поэтому $p = 2$ и t четно. Так как $\chi_1(g) = (4t + \alpha_1(g) - 114)/30$, то $4t + \alpha_1(g) = 60r - 36$. □

До конца раздела предполагается, что Ω — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой. Пусть Σ_i — множество вершин из Ω, смежных точно с pi вершинами из $\Gamma - \Omega$, $\sigma_i = |\Sigma_i|$.

Лемма 5.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *пусть* Δ *является* m*-кликой из* Γ, Y_i *— множество вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ, *и* $y_i = |Y_i|$, *тогда*

(*i*) *если* $m = 28$, *то* $y_2 = 756$, $y_1 = 812$, *вершина из* Y_2 *смежна с* 58 *вершинами из* Y_1 *и* 50 *вершинами из* Y_2, *вершина из* Y_1 *смежна с* 55 *вершинами из* Y_1 *и* 54 *вершинами из* Y_2,

(*ii*) *если* $m = 27$, *то* $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 354$;

(2) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с* $\lambda = 28, \mu = 6$ *и* $p \le 19$;

(3) *число* p *не равно* 19.

Доказательство. Пусть Δ является 28-кликой. По лемме 1.1 имеем $\sum y_i = 1568$, $\sum iy_i = 2324$ и $\sum \binom{i}{2} y_i = 756$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 0$. Отсюда $y_2 = 756$, $y_1 = 812$. Пусть вершина из Y_2 смежна с β_i вершинами из Y_i. Тогда $\beta_1 + \beta_2 = 108$, $\beta_1 + 2\beta_2 = 54 + 104$, поэтому $\beta_1 = 58, \beta_2 = 50$. Пусть вершина из Y_1 смежна с γ_i вершинами из Y_i. Тогда $\gamma_1 + \gamma_2 = 109$, $\gamma_1 + 2\gamma_2 = 28 + 135$, поэтому $\gamma_1 = 55, \gamma_2 = 54$.

Пусть Δ является 27-кликой. По лемме 1.1 имеем $\sum y_i = 1569$, $\sum iy_i = 2268$ и $\sum \binom{i}{2} y_i = 1053$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 2622 - 2268 = 354$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ψ — сильно регулярный граф с $\lambda = 28, \mu = 6$. Тогда $n^2 = 484 + 4(k-6)$, $n = 2u$, $k = u^2 - 115$, собственные значения графа Ψ равны $11 + u, -(u-11)$ и кратность собственного значения $11 + u$ равна $(u-12)(u^2-115)(u^2+u-126)/(12u)$. Поэтому u делит $12 \cdot 115 \cdot 126$.

Если Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Ψ с $\lambda = 13, \mu = 6$, то $u = 14$, Ψ имеет параметры $(111, 81, 13, 6)$, противоречие с тем, что $k\lambda$ нечетно.

Если $p > 28$, то Ω имеет параметры $\lambda' = 28$, $\mu' = 6$ и по теореме Боуза — Доулинга Ω — сильно регулярный подграф, противоречие.

Если $p = 23$, то $|\Omega|$ сравнимо с 9 по модулю 23, каждое ребро графа Ω лежит в 5 или 28 треугольниках, а $\mu_\Omega = 6$. Если вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, то $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 23 вершины из $u^{\langle g \rangle}$. Отсюда $\gamma \le 7$ и в случае $\gamma = 7$ подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кликой, противоречие. Если $\gamma = 6$, то $u^{\langle g \rangle}$ — коклика и $|\Gamma - (([u] \cap \Omega) \cup u^{\langle g \rangle})| \ge 114 \cdot 23$, противоречие. Отсюда $\gamma \le 5$ и $\sigma_0 = 0$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $23|\Omega|$ и не больше $5|\Gamma - \Omega|$, то $|\Omega| \le 285$ и $\sigma_1 = 0$.

Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $46|\Omega|$ и не больше $5|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \le 147$. Пусть вершина a из Ω смежна точно с 92 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Тогда $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 5 на 18 вершинах. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[a] - \Omega$ смежна с 5 вершинами из $\Omega(a)$. Теперь степень вершины в графе Ω равна 64 или 41. Пусть a, b — две вершины из Σ_2. Если вершины a, b несмежны, то Ω содержит 6 вершин из $[a] \cap [b]$ и по 58 вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$. Поэтому степень вершины из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ в графе Ω не больше 12+22, противоречие. Значит, Σ_2 является кликой. Если вершины a, b смежны, то Ω содержит 28 вершин из $[a] \cap [b]$ и по 35 вершин из $[a] - b^\perp$, $[b] - a^\perp$. Теперь степень вершины из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ в графе Ω не больше 12+46, поэтому $|\Omega| = 147$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $46 \cdot 30 + 69 \cdot 117$ и не больше $5 \cdot (1596 - 147)$. Значит, $\sigma_2 \le 1$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $46 + 69(|\Omega| - 1)$ и не больше $5|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \le 101$. Если $|\Omega| = 101$, то $\sigma_2 = 1$ и для вершин $a \in \Sigma_2, b \in \Omega - a^\perp$ подграф $\Omega(b)$ содержит 6 вершин из $[a]$ и 35 вершин из $\Omega - a^\perp$. Противоречие с тем, что $\Omega - a^\perp$ является 36-кликой. Значит, $|\Omega| = 78$ и Ω — регулярный граф степени 41. Снова для $a \in \Omega$ получим противоречие с тем, что $\Omega - a^\perp$ является 36-кликой. Утверждение (2) доказано.

Если $p = 19$, то $|\Omega|$ делится на 19, каждое ребро графа Ω лежит в 9 или 28 треугольниках, а $\mu_\Omega = 6$. Пусть вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω. Тогда $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 19 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Отсюда $\gamma \le 11$.

Пусть $\gamma = 6$ и подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой. Тогда $\Gamma - (([u] \cap \Omega) \cup u^{\langle g \rangle})$ содержит не менее $19 \cdot 104$ вершин, противоречие. Итак, если подграф $u^{\langle g \rangle}$ не является кликой, то $\gamma \le 5$.

В случае $\gamma \ge 7$ подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кликой и $\gamma \le 9$. Пусть $\gamma = 9$, $\Delta = ([u] \cap \Omega) \cup u^{\langle g \rangle}$. Тогда Δ является 28-кликой и по утверждению (1) подграф Ω содержит 9 вершин из Δ, 144 вершины из Y_2 и $9 \cdot 18$ вершин из Y_1. Противоречие с тем, что $|\Omega|$ не делится на 19. Значит, $\gamma \le 8$

и $\sigma_1 = 0$. Если $a \in \Sigma_5$, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 9 на 15 вершинах, противоречие. Поэтому $\sigma_5 = 0$ и степень вершины в Ω не меньше 34.

Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $6|\Omega - a^\perp|$ и не меньше 550, поэтому $|\Omega - a^\perp| \geq 98$ и $|\Omega| \geq 209$. Отсюда число ребер между $\Omega - a^\perp$ и $\Gamma - \Omega$ не меньше $38 \cdot 98$ и не больше $1387 \cdot 2$, противоречие. Значит, $\sigma_0 = 0$.

Пусть $a \in \Sigma_2$, $[a] - \Omega = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$. Если $|[u] \cap \Omega(a)| = \beta$, то $|[a] \cap [u] - \Omega| = 28 - \beta$ и для двух несмежных вершин u, w^{g^i} подграф $[a] - \Omega$ содержит u, w^{g^i}, не более 5 вершин из $[u] \cap [w^{g^i}]$ и не менее $23 - \beta$ вершин из $[u] - [w^{g^i}]$ и из $[w^{g^i}] - [u]$. Поэтому $53 - 2\beta \leq 38$ и $\beta = 8$, противоречие. Итак, $\sigma_2 = 0$ и степень каждой вершины в Ω равна 53 или 34. Далее, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $57|\Omega|$ и не больше $8|\Gamma - \Omega|$, поэтому $|\Omega| \leq 190$.

Поскольку Ω не является сильно регулярным графом с $\lambda = 28, \mu = 6$, то он содержит такие смежные вершины a, c, что $|\Omega(a) \cap [c]| = 9$. Тогда Ω содержит a, c, 9 вершин из $[a] \cap [c]$, не менее 24 вершин в каждом из подграфов $[a] - c^\perp$, $[c] - a^\perp$ и не менее 17 вершин вне $a^\perp \cup c^\perp$. Теперь для $b \in \Omega - (a^\perp \cup c^\perp)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не менее 22 вершин вне $a^\perp \cup c^\perp$, поэтому $|\Omega| \geq 95$. В случае $|\Omega| = 95$ для двух несмежных вершин $b, d \in \Omega - (a^\perp \cup c^\perp)$ подграф $\Omega(b) \cap [d]$ содержит не менее 10 вершин вне $a^\perp \cup c^\perp$, противоречие. Отсюда $|\Omega| \geq 114$.

Пусть $|\Omega| = 114$. Допустим, что Ω содержит 2 вершины a, b степени 53. Если вершины a, b несмежны, то Ω содержит a, b, 6 вершин из $[a] \cap [b]$, по 47 вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и 12 вершин вне $a^\perp \cup b^\perp$. Противоречие с тем, что для вершины $c \in \Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ подграф $\Omega(c)$ содержит не более 12 вершин из $a^\perp \cup b^\perp$ и не более 11 вершин из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$. Значит, подграф Σ_3 является кликой. Допустим, что Ω содержит a, b, 9 вершин из $[a] \cap [b]$, по 43 вершины из $[a] - b^\perp$, $[b] - a^\perp$ и 17 вершин вне $a^\perp \cup b^\perp$. Тогда для вершины $c \in \Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ подграф $\Omega(c)$ содержит не более 12 вершин из $a^\perp \cup b^\perp$ и не более 16 вершин из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$, противоречие. Итак, Ω содержит a, b, 28 вершин из $[a] \cap [b]$, по 24 вершины из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и 36 вершин вне $a^\perp \cup b^\perp$. Для вершины $c \in \Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ подграф $\Omega(c)$ содержит не более 12 вершин из $a^\perp \cup b^\perp$ и не менее 22 вершин из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$. Противоречие с тем, что для двух несмежных вершин $c, d \in \Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ подграф $\Omega(c) \cap [d]$ содержит не менее 10 вершин из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$.

Значит, $\sigma_3 = 0$ и подграф Ω является регулярным графом степени 34. Пусть X — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных точно с 5 вершинами из $\Omega - a^\perp$, $x = |X|$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$, $\Omega - a^\perp$ равно $5x + 24(34 - x) = 79 \cdot 6$ и $x = 18$. Далее, число ребер между X и $\Omega(a) - X$ не меньше $18 \cdot 11$ и некоторая вершина из $\Omega(a) - X$ смежна по крайней мере с 12 вершинами из X, противоречие.

Для $a \in \Omega$ пусть M_i — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных с $5 + 19i$ вершинами из $\Omega - a^\perp$ и $m_i = |M_i|$.

Пусть $|\Omega| = 133$. Если степень a в Ω равна 53, то $m_0 + m_1 + m_2 = 53$ и $5m_0 + 24m_1 + 43m_2 = 474$. Вычитая из второго равенства 5 первых, получим $m_1 = 11 - 2m_2$, $m_0 = 42 + m_2$. Далее, для несмежных вершин $b, c \in M_0$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит 5 вершин из $\Omega(a)$ и $\Omega(a)$ содержится в $b^\perp \cup c^\perp$. Если $\Omega(a)$ — регулярный граф, то $\Omega(a)$ — кореберно регулярный граф с параметрами (53,28,5). Для $e \in \Omega(a) \cap [b] - c^\perp$ подграф $\Omega(e)$ содержит 22 вершины из $[a] \cap [b] - [c]$ и не более чем 6 вершин из $\Omega(a) - b^\perp$. противоречие с тем, что для $d \in [a] \cap [b] - ([c] \cup [e])$ подграф $\Omega(d)$ содержит не менее 18 вершин из $\Omega(a) - b^\perp$. Значит, $\Omega(a)$ содержит вершину e степени 9 и $\Omega(a) - e^\perp$ содержит 33 вершины из M_0, противоречие.

Итак, $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 34 и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 19, равно $4 \cdot 133$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)/19 - 8$ делится на 30 и $\alpha_1(g)/19 = 38$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 19, не больше $5 \cdot 39 + 8 \cdot 38$.

Пусть $|\Omega| = 190$. Так как $190 \cdot 3 = 570$, а $7 \cdot 74 = 518$, то на $\Gamma - \Omega$ имеются 52 $\langle g\rangle$-орбиты, попадающие в окрестности 8 вершин из Ω. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)/19 + 4$ делится на 30 и $\alpha_1(g)/19 = 56$. Значит, на $\Gamma - \Omega$ имеются 18 $\langle g\rangle$-орбит, в которых вершины u, u^g несмежны. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 19, не меньше $3 \cdot 190$ и не больше $5 \cdot 18 + 8 \cdot 56$.

Пусть $|\Omega| = 171$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g) = 60$. Если $a \in \Sigma_3$, то $m_0 + m_1 + m_2 = 53$ и $5m_0 + 24m_1 + 43m_2 = 702$. Вычитая из второго равенства 5 первых, получим $m_1 + 2m_2 = 437/19 = 23$, поэтому $m_1 = 23 - 2m_2,\ m_0 = 32 + m_2$. В частности, $[a]$ содержит не менее 32 вершин из Σ_4. Если $\Gamma - a^\perp$ содержит вершину из Σ_3, то $\sigma_4 \geq 58$. Если же Σ_3 является кликой, то $\sigma_3 \leq 28$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 19, не меньше $3 \cdot 113 + 4 \cdot 58 = 571$ и не больше $5 \cdot 15 + 8 \cdot 60 = 555$.

Пусть $|\Omega| = 152$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)/19 - 4$ делится на 30. Пусть β — число кликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 19.

Если $a \in \Sigma_3$, то $m_0 + m_1 + m_2 = 53$ и $5m_0 + 24m_1 + 43m_2 = 588$. Вычитая из второго равенства 5 первых, получим $m_1 + 2m_2 = 323/19 = 17$, поэтому $m_1 = 17 - 2m_2, m_0 = 36 + m_2$. В частности, $[a]$ содержит не менее 36 вершин из Σ_4.

Если Σ_3 является кликой, то $\sigma_4 \geq 124$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 19, не меньше $3 \cdot 28 + 4 \cdot 124 = 572$ и не больше $5 \cdot 12 + 8 \cdot 64$. Значит, Σ_3 не является кликой. Пусть a, b — две несмежные вершины из Σ_3. Тогда Ω содержит 6 вершин из $[a] \cap [b]$, по 47 вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и 50 вершин вне $a^\perp \cup b^\perp$. Положим $\Delta = \Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ и покажем, что $\Delta \subset \Sigma_4$. Если $c \in \Delta \cap \Sigma_3$ и $d \in \Delta - c^\perp$, то $|\Delta(c)| \geq 41$ и $|\Delta(d)| \leq 14$, противоречие. Теперь Σ_4 содержит не менее 66 вершин из $a^\perp \cup b^\perp$ и 50 вершин из Δ. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 19, не меньше $3 \cdot 36 + 4 \cdot 116 = 572$ и не больше $5 \cdot 12 + 8 \cdot 64$. Отсюда $\sigma_3 = 36$ и $\Omega(a) \cap [b] \subset \Sigma_4$, поэтому Σ_3 — объединение двух изолированных 18-клик.

Таким образом, $M_1 = \Sigma_3(a)$ и в $[a] - \Omega$ нет вершин, смежных с вершинами из $\Sigma_3(a)$. Противоречие с тем, что каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 5 или 8 вершинами из Ω. □

Лемма 5.3. *Число p не равно* 17.

Доказательство. Пусть $p = 17$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с -2 по модулю 17, каждое ребро графа Ω лежит в 11 или 28 треугольниках, а $\mu_\Omega = 6$. Если $a \in \Sigma_5$, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 11 на 25 вершинах, противоречие. Значит, $\sigma_i = 0$ для $i \geq 5$.

Если вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с γ вершинами из Ω, то $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 17 вершин из $u^{\langle g\rangle}$. Отсюда $\gamma \leq 13$. Так как порядок клики в Γ не больше 28, то $\gamma \leq 11$ и $\sigma_1 = 0$. В случае $\gamma = 6$ орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кликой или кокликой. Но если $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой, то $[a] \cap [u]$ содержит 5 вершин из Ω и 23 из $[a] - \Omega$. Далее, каждая из этих 23 вершин смежна с единственной вершиной из $u^{\langle g\rangle}$ и $|[a]| \geq 5 + 17 \cdot 23$, противоречие. Итак, если подграф $u^{\langle g\rangle}$ не является кликой, то $\gamma \leq 5$.

Заметим, что степень вершины u в графе $\Gamma - \Omega$ не меньше 99 и число ребер между $[u] - \Omega$ и $\Gamma - (\Omega \cup u^\perp)$ не меньше $99 \cdot 70$, поэтому $|\Gamma - \Omega| \geq 1255$ и $|\Omega| \leq 338$.

Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $6|\Omega - a^\perp|$ и не меньше 1430, поэтому $|\Omega - a^\perp| \geq 239$ и $|\Omega| \geq 355$, противоречие. Значит, $\sigma_0 = 0$.

Пусть $\gamma = 11$, $\Delta = ([u] \cap \Omega) \cup u^{\langle g\rangle}$. Тогда Δ является 28-кликой и по утверждению (1) подграф Ω содержит 11 вершин из Δ, 110 вершин из Y_2 и не менее $11 \cdot 12$ вершин из Y_1, поэтому $|\Omega| \geq 253$. Пусть $a \in \Sigma_2$, $[a] - \Omega = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$. Если $|[u] \cap \Omega(a)| = \beta$, то $|[a] \cap [u] - \Omega| = 28 - \beta$ и для двух несмежных вершин u, w^{g^i} подграф $[a] - \Omega$ содержит u, w^{g^i}, не более 5 вершин из $[u] \cap [w^{g^i}]$ и не менее $23 - \beta$ вершин из $[u] - [w^{g^i}]$ и из $[w^{g^i}] - [u]$. Поэтому $53 - 2\beta \leq 34$ и $\beta = 10$. Теперь $[a] \cap [u]$ содержит 26 вершин из Δ и 2 вершины из $w^{\langle g\rangle}$. Противоречие с тем, что $w \in Y_3$. Значит, $\sigma_2 = 0$ и $[u] \cap \Omega \subset \Sigma_3$.

Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 264$ делится на 510. Если $|\Omega| \geq 270$, то либо $\alpha_1(g)/17 \leq 58$, либо $|\Omega| = 338$ и $\alpha_1(g)/17 = 72$. В первом случае имеем противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, не меньше $270 \cdot 3$ и не больше $58 \cdot 11 + 20 \cdot 5$. Во втором случае число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, не меньше $338 \cdot 3$ и не больше $72 \cdot 11 + 2 \cdot 5$, снова противоречие.

Значит, $|\Omega| = 253$ и $\alpha_1(g)/17 = 62$. Так как число вершин нечетной степени в Ω четно, то Ω содержит вершину e степени 42. Пусть M_i — множество вершин из $\Omega(e)$, смежных с $17i - 4$

вершинами из $\Omega - e^{\perp}$. Тогда $m_1 + m_2 + m_3 = 42$, $13m_1 + 30m_2 + 47m_3 = 210 \cdot 6$. Вычитая из второго равенства 13 первых, получим $m_2 + 2m_3 = 42$, поэтому $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = 42$. Таким образом, смежные с e вершины из $\Gamma - \Omega$ несмежны с вершинами из Σ_3. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, равно $253 \cdot 3 + \sigma_4$ и не больше $62 \cdot 11 + 5 \cdot 17$, поэтому $\sigma_4 \le 7$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, не больше $62 \cdot 11 + 10 + 5 \cdot 13$.

Итак, каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с 10 вершинами из Ω и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $51|\Omega|$ и не больше $10(1596 - |\Omega|)$. Поэтому $|\Omega| \le 253$. Но в случае $|\Omega| = 253$ имеем $\alpha_1(g)/17 = 62$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, равно $253 \cdot 3 + \sigma_4$ и не больше $62 \cdot 10 + 5 \cdot 17$, противоречие. Итак, $|\Omega| \le 236$ и $|\Gamma - \Omega| \ge 17 \cdot 80$.

Предположим, что Ω содержит вершину e степени 42. Пусть M_i — множество вершин из $\Omega(e)$, смежных с $17i - 4$ вершинами из $\Omega - e^{\perp}$, $m_i = |M_i|$. Тогда $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 42$, $13m_1 + 30m_2 + 47m_3 + 64m_4 = 6(|\Omega| - 43)$. Поэтому $|\Omega| \ge 134$, причем в случае $|\Omega| = 134$ получим $m_1 = 42, m_2 = m_3 = m_4 = 0$. Здесь Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(134, 42, 28, 6)$, противоречие. Итак, если Ω содержит вершину e степени 42, то $151 \le |\Omega| \le 236$. Для вершины a степени 76 в Ω число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ не больше $159 \cdot 6$, но не меньше $76 \cdot 13$. Поэтому Ω не содержит вершин степени 76.

Пусть a — вершина степени 28 в графе $\Omega(e)$. Если $b \in \Omega(e) - a^{\perp}$, то $\Omega(b)$ содержит не более 12 вершин из $\Omega(e) - a^{\perp}$ и степень b в $\Omega(e)$ равна 11. Таким образом, подграф Φ, индуцированный вершинами степени 28 в графе $\Omega(e)$, является γ-кликой и $\gamma \le 26$. Если $\gamma \ge 12$, то каждая вершина из $\Omega(e) - \Phi$ смежна не более чем с 5 вершинами из Φ, поэтому $\gamma(29 - \gamma) \le 5(42 - \gamma)$ и $\gamma = 26$. В этом случае каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из $\Phi \cup \{e\}$ и $|\Gamma - \Omega| \ge 17(4m_1 + 4) + 3(\gamma - m_1) \cdot 17$. Если $m_1 \le 11$, то $m_2 + m_3 \ge 31$ и $|\Omega| = 236$, противоречие. Значит, $m_1 \ge 12$ и $|\Gamma - \Omega| \ge 17(52 + 42)$, снова противоречие.

Значит, $\gamma \le 11$, поэтому $m_2 + m_3 \ge 31$, $|\Omega| = 236$, $m_2 = 36 - 2m_3, m_1 = 6 + m_3$ и $m_3 \in \{0, \ldots, 5\}$. Пусть a — вершина степени 59 в Ω, N_i — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных с $17i - 4$ вершинами из $\Omega - a^{\perp}$, $n_i = |N_i|$. Тогда $n_1 + n_2 + n_3 = 59$, $13n_1 + 30n_2 + 47n_3 = 176 \cdot 6$. Вычитая из второго равенства 13 первых, получим $n_2 = 17 - 2n_3$, $n_1 = 42 + n_3$. Пусть x — число вершин степени 42 в Ω. Тогда $x \ge 76$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, равно $4x + 3(3236 - x)$. Отсюда $x \le 92$, число ребер между Σ_3 и Σ_4 не меньше $144 \cdot 42$ и окрестность вершины из Σ_4 содержит в среднем $72 \cdot 21/23$ вершин из Σ_3, противоречие.

Итак, Ω не содержит вершин степени 42. Пусть a — вершина степени 59 в Ω. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ не меньше $59 \cdot 30$, поэтому $|\Omega| \ge 372$ и $|\Gamma - \Omega| \le 72 \cdot 17$. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, не меньше $372 \cdot 2$ и не больше $72 \cdot 10$, противоречие.

Таким образом, Ω — регулярный граф степени 76. Пусть a — вершина из Ω. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ не меньше $76 \cdot 47$, поэтому $|\Omega| \ge 678$ и $|\Gamma - \Omega| \le 54 \cdot 17$. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 17, не меньше $678 \cdot 2$ и не больше $54 \cdot 10$, противоречие.$\square$

Лемма 5.4. *Если $p = 13$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) $|\Omega|$ *сравнимо с* -3 *по модулю* 13, $|\Omega| \le 231$, *и вершина* u *из* $\Gamma - \Omega$ *смежна не более чем с* 15 *вершинами из* Ω (*смежна не более чем с* 6 *вершинами из* Ω, *если* $u^{\langle g \rangle}$ *не является кликой*);

(2) $\sigma_i = 0$ *для* $i \in \{1, 2, 6, 7, 8\}$.

Доказательство. Пусть $p = 13$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с -3 по модулю 13, каждое ребро графа Ω лежит в 2, 15 или 28 треугольниках, а $\mu_{\Omega} = 6$. Методами линейного программирования получается оценка $|\Omega| \le 270$, но при $|\Omega| > 231$ значение $\chi_1(g)$ не целое. Поэтому $|\Omega| \le 231$.

Если вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с $\gamma \ge 2$ вершинами из Ω, то $[u] \cap \Omega$ является кликой и для различных вершин $a, b \in [u] \cap \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\gamma - 2$ вершин из $[u] \cap \Omega$ и 13 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Отсюда $\gamma \le 17$. Так как порядок клики в Γ не больше 28, то $\gamma \le 15$ и $\sigma_1 = 0$. В случае $\gamma = 6$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ является кликой или кокликой. Но если $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой, то $[a] \cap [u]$ содержит 5 вершин из Ω и 23 из $[a] - \Omega$. Далее, каждая из этих 23 вершин смежна с единственной вершиной из $u^{\langle g\rangle}$ и $|[a]| \geq 5+13\cdot 23$, противоречие. Итак, если подграф $u^{\langle g\rangle}$ не является кликой, то $\gamma \leq 5$.

Если $a \in \Sigma_8$, то $\Omega(a)$ регулярный граф степени 2 на 6 вершинах, и $\Omega(a)$ содержится в $[b]$ для любой вершины $b \in \Omega - a^{\perp}$. В этом случае $|\Omega| \geq 16$ и $|\Omega(c)\cap[d]| \geq 10$ для любых двух несмежных вершин $c, d \in \Omega(a)$, противоречие. Значит, $\sigma_8 = 0$.

Если $a \in \Sigma_2$, $[a]-\Omega = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$, то $u^{\langle g\rangle}$ является кликой. Иначе для несмежных вершин u, u^{g^i} подграф $[u]\cap[u^{g^i}]$ содержит не более 4 вершин из $\Omega(a)$ и не более 2 вершин из $[a]-\Omega$. Противоречие с тем, что $[u]\cap[a]$ содержит не менее 24 вершин из $[a]-\Omega$. Теперь $[u]\cap[u^g]$ содержит 11 вершин из $u^{\langle g\rangle}$, не более 14 вершин из $\Omega(a)$ и не менее 3 вершин из $w^{\langle g\rangle}$. Если $w^{g^i} \notin [u]$, то $[w^{g^i}]\cap[u]$ содержит a и по 3 вершины из $u^{\langle g\rangle}$ и из $w^{\langle g\rangle}$, противоречие. Значит, $\{a\}\cup u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle}$ является 27-кликой и число треугольников с основанием в $u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle}$ и вершиной в $\Gamma - a^{\perp}$ равно 325. Противоречие с тем, что $|\Gamma-\Omega| \geq 26+26\cdot 81-325$. Следовательно, $\sigma_2 = 0$.

Если $a \in \Sigma_7$, то $\Omega(a)$ содержит вершины степени 2 и 15. Пусть Ψ — подграф из $\Omega(a)$, состоящий из вершин степени 15 в $\Omega(a)$. Тогда Ψ является кликой четного порядка. Так как число ребер между Ψ и $\Omega(a)-\Psi$ равно $|\Psi|(16-|\Psi|)$, но не больше $2(19-|\Psi|)$, то либо $|\Psi| \leq 2$, либо $|\Psi| = 16$.

Если $|\Psi| \leq 2$, то число ребер между $\Omega(a)-\Psi$ и $[a]-\Omega$, деленное на 13, не меньше 34 и некоторая вершина из $[a]-\Omega$ смежна с 5 вершинами из $\Omega(a)-\Psi$, противоречие с тем, что степень каждой вершины в $\Omega(a)-\Psi$ не больше 2. Значит, $|\Psi| = 16$ и $\Omega(a)-\Psi$ является треугольником $\{d,e,f\}$. Если $[d]\cup[e]\cup[f]$ содержит точно 26 вершин из $[a]-\Omega$, то Ψ является объединением 5 подграфов Ψ_i, вершины которых смежны с разными $\langle g\rangle$-орбитами на $[a]-(\Omega\cup[d])$. Далее, каждая вершина из $\Omega - a^{\perp}$ смежна с вершиной из $\{d,e,f\}$ и с единственной вершиной в каждом из подграфов $\Psi_1,\ldots,\Psi_5$. Заметим, что для любых двух вершин $b, c \in \Psi$ получим $|\Omega(b)-a^{\perp}| = |\Omega(c)-a^{\perp}|$. В самом деле, вершина x из $\Omega(c)-b^{\perp}$ смежна с 5 вершинами из Ψ и с единственной вершиной x' из $\Omega(b)-c^{\perp}$. Обратно, вершина x' из $\Omega(b)-c^{\perp}$ смежна с единственной вершиной x из $\Omega(c)-a^{\perp}$. Отсюда $|\Omega-a^{\perp}| = |\Psi_i|\cdot|\Omega(c)-a^{\perp}|$. Противоречие с тем, что 16 не делится на 5.

Значит, $[d]\cup[e]\cup[f]$ содержит 39 вершин из $[a]-\Omega$, Ψ является объединением 4 подграфов Ψ_i, вершины которых смежны с разными $\langle g\rangle$-орбитами на $[a]-(\Omega\cup[d]\cup[e])$. Далее, каждая вершина из $\Omega-a^{\perp}$ смежна либо с 2 вершинами из $\{d,e,f\}$ и с единственной вершиной в каждом из подграфов $\Psi_1,\ldots,\Psi_4$, либо с 3 вершинами из $\{d,e,f\}$ и с единственной вершиной в 3 из 4 подграфов $\Psi_1,\ldots,\Psi_4$. Положим $\delta = |\Omega(d)\cap[e]\cap[f]-\{a\}|$ и заметим, что $|\Omega(d)-a^{\perp}| \geq 16$. Тогда $[d]\cap[e]$ содержит a, f, 13 вершин из $[a]-\Omega$, δ вершин из $\Omega(f)$ и $13-\delta$ вершин из $\Omega-f^{\perp}$. Поэтому $|\Omega(d)| = 29-\delta$ и $\delta = 10$. Противоречие с тем, что $|\Omega| = 20+10+3\cdot 3$. Итак, $\sigma_7 = 0$.

Если $a \in \Sigma_6$, то $\Omega(a)$ содержит вершины степени 2, 15 и 28. Пусть Φ — подграф из $\Omega(a)$, состоящий из вершин степени 28 в $\Omega(a)$. Тогда Φ является кликой. Заметим, что если вершина $c \in \Omega(a)$ не смежна с некоторой вершиной из Φ, то степень c в $\Omega(a)$ равна 2. Если $|\Phi| \geq 16$, то каждая вершина из $\Omega(a)-\Phi$ не смежна с некоторой вершиной из Φ и число ребер между Φ и $\Omega(a)-\Phi$ равно $|\Phi|(29-|\Phi|)$, но не больше $2(32-|\Phi|)$, поэтому $|\Phi| \geq 29$, противоречие.

Допустим, что $|\Phi| \geq 6$, и пусть Ψ — множество вершин $b \in \Omega(a)$ таких, что $\Phi \subset b^{\perp}$. Тогда Ψ является кликой, $|\Psi| \leq 16$ и число ребер между Ψ и $\Omega(a)-\Psi$ равно $|\Phi|(29-|\Psi|)+|\Psi-\Phi|(15-|\Psi|)$, но не больше $2(32-|\Psi|)$, противоречие.

Если b, c — две несмежные вершины, имеющие степень 15 в $\Omega(a)$ и $[b]\cap[c]$ содержит δ вершин из $\Omega(a)$, то $\Omega(a)$ содержит по $15-\delta$ вершин из $[b]-[c]$, $[c]-[b]$ и δ вершин вне $b^{\perp}\cup c^{\perp}$, $\delta \leq 5$. Отсюда степень вершины из $\Omega(a)-(b^{\perp}\cup c^{\perp})$ в $\Omega(a)$ не больше 14 и поэтому равна 2. Если $|\Phi| = 5$, то $\delta = 5$, причем каждая вершина из Φ смежна с 2 вершинами из $\Omega(a)-(b^{\perp}\cup c^{\perp})$, в частности $\Omega(a)-(b^{\perp}\cup c^{\perp})$ является 5-кокликой. Противоречие с тем, что каждая вершина из этой коклики смежна с двумя $\langle g\rangle$-орбитами на $[a]-\Omega$.

Если $|\Phi| = 4$, то $\delta = 4$, причем каждая вершина из Φ смежна с вершиной из $\Omega(a)-(b^{\perp}\cup c^{\perp})$. Поэтому $\Omega(a)-(b^{\perp}\cup c^{\perp})$ является объединением двух изолированных ребер и $[a]-(\Omega\cup[b]\cup[c])$

содержит четыре $\langle g\rangle$-орбиты, по две из которых попадают в окрестности ребер из $\Omega(a) - (b^\perp \cup c^\perp)$. Для двух оставшихся на $[a] - \Omega$ орбит $u^{\langle g\rangle}$ и $w^{\langle g\rangle}$ вершины u, w смежны с 12-кликами L_1, L_2 из $\Omega(a)$. Противоречие с тем, что вершина из Φ смежна с 12 вершинами из $[u]$.

Если $|\Phi| = 3$, то подграф на вершинах степени 2 в $\Omega(a)$ содержит 3 или 5 вершин, причем он не содержит 3-коклик. Отсюда $\delta = 3$ для любых несмежных вершин b, c степени 15 в $\Omega(a)$, поэтому $\Omega(a)$ содержит изолированный треугольник $\{d, e, f\}$. Следовательно, некоторая вершина из $[a] - (\Omega \cup [d])$ смежна по крайней мере с 7 вершинами степени 15 в $\Omega(a)$. Противоречие с тем, что вершина из Φ смежна с 8 вершинами из $[u]$.

Если $|\Phi| = 2$, то подграф на вершинах степени 2 в $\Omega(a)$ содержит 4 вершины d, e, f, h. Допустим, что вершина d смежна с обеими вершинами из Φ. Тогда $\{e, f, h\}$ — треугольник и $[a] - (\Omega \cup [d] \cup [e] \cup [f] \cup [h]) = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$. Поэтому вершина из Φ смежна по крайней мере с 7 вершинами из $[u]$ или из $[w]$, противоречие.

Значит, вершины из Φ смежны с разными вершинами d, e. Теперь либо вершины d, e смежны и $\{d, e, f, h\}$ — объединение двух изолированных ребер, либо вершины d, e несмежны и $\{d, f, h, e\}$ — объединение двух изолированных ребер или 3-путь. В любом случае $[a] - (\Omega \cup [d] \cup [e] \cup [f] \cup [h]) = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$. Снова вершина из Φ смежна с 7 вершинами из $[u]$ или из $[w]$, противоречие.

Если $|\Phi| = 1$, то подграф на вершинах степени 2 в $\Omega(a)$ содержит 3 вершины d, e, f. Далее, $\Omega(a)$ содержит не менее 22 вершин степени 15, несмежных с вершинами из $\{d, e, f\}$. Поэтому $[a] - (\Omega \cup [d] \cup [e] \cup [f])$ содержит вершину u, смежную с 6 вершинами степени 15 в $\Omega(a)$. Противоречие с тем, что вершина из Φ смежна с 7 вершинами из $[u]$.

Значит, $|\Phi| = 0$. Пусть Ψ — подграф вершин степени 15 в $\Omega(a)$. Так как $\Omega(a) - \Psi$ не содержит 3-коклик, то $|\Omega(a) - \Psi| \le 6$. В случае $|\Psi| = 26$ подграф $\Omega(a) - \Psi$ является объединением двух изолированных треугольников. Противоречие с тем, что $[b] \cap [c]$ содержит 6 вершин из $\Omega(a)$ для двух несмежных вершин $b, c \in \Psi$.

В случае $|\Psi| = 28$ подграф $\Omega(a) - \Psi$ является объединением двух изолированных ребер $\{d, e\}$ и $\{f, h\}$. Поэтому $[a] - (\Omega \cup [d] \cup [f]) = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$. Положим $L_1 = [u] \cap \Psi$, $L_2 = [w] \cap \Psi$, $[d] \cap [e] - (\{a\} \cup ([a] - \Omega)) = \{x\}$ и $[f] \cap [h] - (\{a\} \cup ([a] - \Omega)) = \{y\}$. Если $|L_1| + |L_2| = 28$, то $\{a\} \cup L_1 \cup u^{\langle g\rangle}$ является 28-кликой. В этом случае вершина из $\Omega - (a^\perp \cup \{x, y\})$ смежна с единственной вершиной из $\{d, e\}$ и из $\{f, h\}$, с двумя вершинами из L_1 и из L_2. Противоречие с тем, что $\Omega(d) - a^\perp$ содержит по 5 вершин из $[f], [h]$ и $|\Omega(d) - a^\perp| \le 11$.

Допустим, что $|L_1| = 14$, $|L_2| = 13$. Без ограничения общности $x \in \Psi$, $[x]$ содержит L_2 и каждая вершина из $L_1 - ([f] \cup [h])$ смежна с 2 вершинами из L_2. Противоречие с тем, что некоторая вершина из L_2 смежна с 3 вершинами из 28-клики $\{a\} \cup L_1 \cup u^{\langle g\rangle}$. Значит, $|L_1| = |L_2| = 13$, $x, y \in \Psi$. Без ограничения общности,$[x]$ содержит L_1, $[y]$ содержит L_2, поэтому x, y несмежны. Противоречие с тем, что $|[u] \cap [x]| > 6$.

Пусть $|\Psi| = 30$, $\Omega(a) - \Psi = \{d, e\}$. Если вершины d, e несмежны, то $[a] - (\Omega \cup [d] \cup [e]) = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$. Положим $L_1 = [u] \cap \Psi$, $L_2 = [w] \cap \Psi$, $[d] \cap \Psi = \{x_1, x_2\}$, $[e] \cap \Psi = \{y_1, y_2\}$. Тогда $\Omega(a) \cap [x_1]$ содержит d, не более 3 вершин из $\{x_2, y_1, y_2\}$ и не менее 11 вершин из $L_1 \cup L_2$. Противоречие с тем, что $|[u] \cap [x_1]| > 6$ или $|[w] \cap [x_1]| > 6$.

Значит, вершины d, e смежны. Если $d, e \in [b]$ для некоторой вершины $b \in \Psi$, то $\Psi - b^\perp$ является 16-кликой и степень вершины из $\Psi(b)$ в графе $\Omega(a)$ меньше 15. Положим $[d] \cap \Psi = \{b\}$, $[e] \cap \Psi = \{c\}$. Тогда $\Psi - b^\perp = L_1$ является 15-кликой и каждая вершина из $L_1 - \{c\}$ смежна с единственной вершиной из $\Psi(b)$. Отсюда $\Psi - L_1 = L_2$ является 15-кликой и каждая вершина из $L_2 - \{b\}$ смежна с единственной вершиной из L_1. Поэтому $c \in L_1$.

Заметим, что некоторая вершина $u \in [a] - (\Omega \cup [d])$ смежна по крайней мере с 7 вершинами из $\Psi - \{b, c\}$. Далее, $[u] \cap \Psi$ является кликой и $[u] \cap \Psi$ содержится в L_1 или в L_2, поэтому $\{a\} \cup u^{\langle g\rangle} \cup L_i$ является 29-кликой, противоречие. Итак, $\sigma_6 = 0$. □

Лемма 5.5. *Если $p = 13$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) $\sigma_0 = 0$ *и степень вершины в* Ω *равна* 45 *или* 58;

(2) *окрестность вершины* $a \in \Omega$ *не содержит* 26-*клику из* $[a] - \Omega$;

(3) *если* $a \in \Omega$, *то* $[a] - \Omega$ *содержит некликовую* $\langle g\rangle$*-орбиту*;

(4) *если* $a \in \Omega$, *то* $[a] - \Omega$ *содержит не менее двух некликовых* $\langle g\rangle$*-орбит.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 13$. Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Тогда каждая вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 вершинами из $\Omega(a)$ и $u^{\langle g\rangle}$ является кликой. Поэтому $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) = v = 1596$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 114$ делится на 30 и $|\Omega| - 36$ делится на 130. Отсюда $|\Omega| = 166$. Пусть M_i — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных точно с $13i - 10$ вершинами из $\Omega - a^{\perp}$, $m_i = |M_i|$. Тогда $\sum m_i = 110$, число ребер между $[a]$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $55 \cdot 6$ и $m_1 = 110$. Противоречие с тем, что степень в Ω вершины из $\Omega(a)$ равна 32. Итак, $\sigma_0 = 0$.

По лемме 5.4 степень вершины в Ω равна $45, 58$ или 71. Но в последнем случае $|\Omega| \geq 1 + 71 + 71 \cdot 16/6$, противоречие с тем, что $|\Omega| \leq 231$. Значит, $\sigma_3 = 0$. Утверждение (1) доказано.

Пусть окрестность вершины $a \in \Omega$ содержит 26-клику L из $[a] - \Omega$. Тогда $L = u^{\langle g\rangle} \cup w^{\langle g\rangle}$ для некоторых вершин $u, w \in [a] - \Omega$. Если $\Omega(a) \cap [w]$ содержит вершину e, то $L \cup \{a, e\}$ является 28-кокликой и ввиду леммы 5.2 имеем $|\Omega(a)| \leq 3 + 29$, противоречие. Значит, $[a] \cap [u]$ и $[a] \cap [w]$ содержат по 3 вершины из $[a] - (\Omega \cup L)$. Пусть Y_i — множество вершин из $\Gamma - (\{a\} \cup L)$, смежных точно с i вершинами из $\{a\} \cup L$, $y_i = |Y_i|$. По лемме 5.2 имеем $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 354$.

Пусть $a \in \Sigma_4$ и $[a] - (\Omega \cup L)$ содержит две орбиты $p^{\langle g\rangle}$ и $q^{\langle g\rangle}$. Если $p^{\langle g\rangle}$ не является кликой, то $[a] \cap [p]$ содержит не более 5 вершин из L, не более 4 вершин из Ω, не более 8 вершин из $p^{\langle g\rangle}$ и не менее 11 вершин из $q^{\langle g\rangle}$, противоречие. Значит, $p^{\langle g\rangle}$ и $q^{\langle g\rangle}$ являются кликами. Если $p^{\langle g\rangle} \cup q^{\langle g\rangle}$ является кликой, то для несмежной с p вершины $z \in L$ подграф $[p] \cap [z]$ содержит a и 6 вершин из $[a] - \Omega$, противоречие. Теперь p смежна с тремя вершинами из L, не более чем с двумя вершинами из $q^{\langle g\rangle}$ и с s-кликой P из $\Omega(a)$, $11 \leq s \leq 13$. Аналогично, q смежна с t-кликой Q из $\Omega(a)$, $11 \leq t \leq 13$. Вершина из $P \cup Q$ смежна по крайней мере с 29 вершинами из $\Omega - a^{\perp}$. Итак, $|\Omega| \geq 1 + 58 + (22 \cdot 29 + 36 \cdot 16)/6$, противоречие с тем, что $|\Omega| \leq 231$.

Пусть $a \in \Sigma_5$ и $[a] - (\Omega \cup L)$ содержит три орбиты $p^{\langle g\rangle}$, $q^{\langle g\rangle}$ и $r^{\langle g\rangle}$. Положим $\Omega_0 = \Omega(a) - ([p] \cup [q] \cup [r])$, $\omega = |\Omega_0|$. Так как каждая из вершин p, q, r смежна не более чем с 14 вершинами из $\Omega(a)$, то $\omega \geq 3$ и для $b \in \Omega_0$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит не более 15 вершин из $\Omega(a) - \Omega_0$ и не менее 13 вершин из Ω_0. Если Ω_0 — клика, то $14 \leq \omega \leq 27$ и любая вершина из $\Omega(a) - \Omega_0$ смежна либо не более чем с 5 вершинами из Ω_0, либо со всеми вершинами из Ω_0. Пусть $\Omega(a) - \Omega_0$ содержит β вершин, смежных со всеми вершинами из Ω_0. Тогда число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ равно $\omega(29 - \omega)$, но не больше $(5 - \beta)(45 - \omega - \beta)$. Если $\beta > 0$, то $\omega(29 - \omega) \leq \beta\omega + (5 - \beta)(45 - \omega - \beta)$ и $\omega \in \{14, 15\}$. В случае $\omega = 14$ имеем $\beta^2 - 22\beta - 45 \geq 0$, а в случае $\omega = 15$ имеем $\beta^2 - 20\beta - 60 \geq 0$. В любом случае $\beta \geq 23$, противоречие с тем, что пересечение окрестностей вершины из Ω_0 и подходящей вершины из $\{p, q, r\}$ содержит не менее 8 вершин. Значит, $\beta = 0$ и $\omega(29 - \omega) \leq 5(45 - \omega)$, поэтому $\omega \geq 25$.

Пусть c — вершина из $\Omega(a) - \Omega_0$. Если $\omega = 27$, то число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ равно 54. Противоречие с тем, что $\{a\} \cup \Omega_0$ является 28-кликой, и по лемме 5.2 любая вершина из $\Omega(a) - \Omega_0$ смежна не более чем с 1 вершиной из Ω_0. Если $\omega = 25$, то любая вершина из $\Omega(a) - \Omega_0$ смежна точно с 5 вершинами из Ω_0, и число ребер между $\Omega_0 - [c]$ и $\Omega - (\Omega_0 \cup c^{\perp})$ равно 100, противоречие. Значит, $\omega = 26$ и число ребер между $\Omega(a) - \Omega_0$ и Ω_0 равно 78. Отсюда можно считать, что c смежна точно с 5 вершинами из Ω_0 и число ребер между $\Omega_0 - [c]$ и $\Omega - (\Omega_0 \cup c^{\perp})$ равно 63, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $a \in \Omega$ и все $\langle g\rangle$-орбиты на $[a] - \Omega$ являются кликами.

Пусть $a \in \Sigma_5$ и $[a] - \Omega$ содержит 5 кликовых орбит $w_i^{\langle g\rangle}$, $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Тогда $[a] \cap [w_1]$ содержит не более 2 вершин из $w_i^{\langle g\rangle}$ для $i \in \{2, \ldots, 5\}$ и не менее 8 вершин из Ω. Положим $\Omega_0 = \Omega(a) - (\cup_i [w_i])$. Если $[a] \cap [w_i]$ содержит не более 1 вершины из $w_j^{\langle g\rangle}$ для $j \neq i$, то $|\Omega_0| \leq 3$ и степень вершины из Ω_0 в графе $\Omega(a)$ не больше $5 \cdot 5 + 2$. В этом случае $|\Omega_0| = 0$ и можно считать, что $|[w_1] \cap \Omega(a)| \geq 10$. Если $[a] \cap [w_1]$ не пересекает $w_i^{\langle g\rangle}$, то $|[w_i] \cap \Omega(a)| \geq 10$ и либо $|\Omega_0| = 1$, либо $|\Omega_0| < 0$. Если $[a] \cap [w_1]$ содержит точно 1 вершину из $w_j^{\langle g\rangle}$ для трех значений j, то $|\Omega_0| \le -1$. Значит, $[a]\cap[w_1]$ содержит точно 1 вершину из $w_j^{\langle g\rangle}$ для двух значений j, и снова либо $|\Omega_0| = 1$, либо $|\Omega_0| < 0$.

Итак, $[a] \cap [w_i]$ содержит точно 2 вершины из $w_j^{\langle g\rangle}$ для любых различных i, j, и $|\Omega_0| = 5$. Пусть $b \in \Omega_0$. Тогда $\Omega(a) \cap [b]$ содержит либо по 5 вершин из $[w_i]$ и 3 вершины из Ω_0, либо 4 вершины из $[w_i]$, по 5 вершин из $[w_j]$ для $j \ne i$ и 4 вершины из Ω_0. Если b, c — две несмежные вершины из Ω_0, то $\Omega(a) \cap [b] \cap [c]$ содержит по 2 вершины из $[w_i]$ и 3 вершины из Ω_0, противоречие. Значит, Ω_0 является кликой.

Заметим, что вершина из $\Omega(a) \cap [w_i]$ смежна либо с 0 вершин из Ω_0, либо точно с одной вершиной c из Ω_0 (и любая вершина из $\Omega_0 - \{c\}$ смежна с 4 вершинами из $\Omega(a) \cap [w_i]$), либо с 5 вершинами из Ω_0. Если число ребер между $\Omega(a) \cap [w_i]$ и Ω_0 не меньше 22, то $\Omega(a) \cap [w_i]$ содержит точно 5 вершин, смежных с 5 вершинами из Ω_0, и 3 вершины, смежные с 0 вершин из Ω_0. Таким образом, можно считать, что $\Omega(a)\cap[w_i]$ содержит точно 5 вершин, смежных с 5 вершинами из Ω_0 для $i = 1, \dots, 4$. Далее, $\Omega(a) \cap [w_5]$ содержит либо 4 вершины, смежные с 5 вершинами из Ω_0, и 4 вершины, смежные с 0 вершин из Ω_0, либо 3 вершины, смежные с 5 вершинами из Ω_0, и 5 вершин, смежных с 1 вершиной из Ω_0.

Теперь вершина d из $\Omega(a) \cap [w_1]$, смежная с 5 вершинами из Ω_0, смежна с 3 вершинами из $\Omega - ([w_1] \cup \Omega_0)$. Если d смежна с вершиной из $\Omega(a) \cap [w_i]$ для $i \in \{2, 3, 5\}$, то для вершины e из $\Omega(a) \cap [w_i] - [d]$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит a, 5 вершин из Ω_0 и вершину из $\Omega(a) \cap [w_i]$, противоречие. Значит, $[d]$ содержит 3 вершины из $\Omega(a) \cap [w_5]$. Если $\Omega(a) \cap [w_5] - [d]$ содержит вершину e, смежную с 5 вершинами из Ω_0, то $[d]\cap[e]$ содержит a, 5 вершин из Ω_0 и 3 вершины из $\Omega(a) \cap [w_5]$, противоречие. Поэтому $\Omega(a) \cap [w_5]$ содержит точно 3 вершины, смежные с 5 вершинами из Ω_0, все попадающие в $[d]$. Противоречие с тем, что объединение $\{a\} \cup \Omega_0$ с множеством всех вершин из $\Omega(a)$, смежных с 5 вершинами из Ω_0, является 29-кликой. Итак, $a \notin \Sigma_5$.

Пусть $a \in \Sigma_4$ и $[a] - \Omega$ содержит 4 кликовые орбиты $w_i^{\langle g\rangle}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$. Положим $\Omega_0 = \Omega(a) - (\cup_i [w_i])$. Тогда $[a]\cap[w_1]$ содержит не более 2 вершин из $w_i^{\langle g\rangle}$ для $i \in \{2, \dots, 4\}$ и не менее 10 вершин из Ω. Далее, степень любой вершины в Ω_0 не меньше 8.

Допустим, что Ω_0 является кликой. Пусть $c \in [w_i] \cap \Omega(a)$. Если c смежна с 5 вершинами из Ω_0, то вершины из $\Omega_0 - [c]$ несмежны с вершинами из $[w_i] \cap \Omega$, а любая вершина из $\Omega_0 \cap [c]$ смежна не более чем с 5 вершинами из $[w_i] \cap \Omega$. Поэтому число ребер между Ω_0 и $[w_i] \cap \Omega$ не больше 25. Если c смежна с 4 вершинами из Ω_0, то вершина из $\Omega_0 - [c]$ смежна не более чем с 1 вершиной из $[w_i]\cap\Omega$, поэтому число ребер между Ω_0 и $[w_i]\cap\Omega$ не больше $21 + |\Omega_0|$. Так как $10 \le |\Omega_0| \le 18$, то число ребер между Ω_0 и $\Omega - \Omega_0$ не меньше 190. С другой стороны, число ребер между $[w_i] \cap \Omega$ и Ω_0 не больше 39 и не больше 28, если $|[w_i] \cap \Omega| = 14$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω_0 и $\Omega - \Omega_0$ не больше 156.

Значит, Ω_0 не является кликой и $|\Omega_0| \ge 14$. Среди вершин $x \in \Omega_0$ таких, что $x^\perp$ не содержит Ω_0, выберем вершину b наибольшей степени γ в Ω_0.

Пусть $|\Omega_0| = 18$. Тогда число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ не больше 240. Далее, $\gamma \le 13$ и если $\gamma = 13$, то число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ не меньше $5 \cdot 11 + 4 \cdot 20 + 9 \cdot 15$, противоречие. Значит, $\gamma \le 12$ и число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ не меньше $5 \cdot 11 + 13 \cdot 15 = 250$, противоречие.

Пусть $|\Omega_0| = 16$. Тогда число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ не больше 230. Далее, $\gamma \le 11$ и число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ не меньше $5 \cdot 11 + 11 \cdot 17$, противоречие.

Пусть $|\Omega_0| = 14$. Тогда число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ не больше 220. Далее, $\gamma \le 9$ и число ребер между Ω_0 и $\Omega(a) - \Omega_0$ не меньше $5 \cdot 11 + 5 \cdot 19 + 6 \cdot 19 = 264$, противоречие. Утверждение (3) доказано.

Пусть $a \in \Omega$ и $[a] - \Omega$ содержит кликовые $\langle g\rangle$-орбиты $u_i^{\langle g\rangle}$ и единственную некликовую $\langle g\rangle$-орбиту $w^{\langle g\rangle}$. Тогда $[a] \cap [w]$ содержит не более 4 вершин из Ω, не более 5 вершин из $u_i^{\langle g\rangle}$ и не менее $24 - 5(i - 1)$ вершин из $w^{\langle g\rangle}$. Отсюда $a \in \Sigma_5$, и степень w в $w^{\langle g\rangle}$ не меньше 4. Положим $\Delta = w^{\langle g\rangle} - w^\perp$, $\Delta' = u_1^{\langle g\rangle} - [w]$.

Допустим, что $[a] \cap [w]$ содержит 5 вершин из $u_1^{\langle g \rangle}$. Тогда $|\Delta'| = 8$ и каждая вершина из Δ' смежна с 5 вершинами из Δ. Отсюда $|\Delta| = 8$ и число ребер между $w^{\langle g \rangle} \cap [w]$ и Δ не больше 12. Поэтому некоторая вершина w' из Δ смежна не более чем с 1 вершиной из $w^{\langle g \rangle} \cap [w]$ и с 3 вершинами из Δ. Теперь для $u' \in \Delta' - [w']$ подграф $[u'] \cap [w']$ содержит a, 5 вершин из $u_1^{\langle g \rangle}$ и вершину из $\Delta(w')$, противоречие.

Итак, $[a] \cap [w]$ содержит не более 4 вершин из Ω и из $u_i^{\langle g \rangle}$ и не менее 8 вершин из $w^{\langle g \rangle}$. Отсюда $|\Delta'| = 9$ и каждая вершина из Δ' смежна по крайней мере с 3 вершинами из Δ. Так как $|\Delta| = 4$, то некоторая вершина из Δ смежна с 7 вершинами из Δ', противоречие. Утверждение (4) доказано. □

Лемма 5.6. *Число p не равно* 13.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 13$, y — число кликовых орбит на $\Gamma - \Omega$.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$, u смежна с 15 вершинами из Ω и $L = ([u] \cap \Omega) \cup u^{\langle g \rangle}$. Тогда L является 28-кликой. Пусть Y_i — множество вершин из $\Gamma - L$, смежных точно с i вершинами из L, $y_i = |Y_i|$. По лемме 5.2 имеем $y_1 = 812$, $y_2 = 756$. Если $[u] \cap \Omega$ содержит вершину a из Σ_4, то вершина $w \in [a] - (L \cup \Omega)$ смежна не более чем с одной вершиной из $L - \{a\}$ и не более чем с пятью вершинами из $\Omega(a)$. Поэтому степень каждой вершины в графе $[a] - (L \cup \Omega)$ не меньше 22. Противоречие с тем, что любая пара несмежных вершин из $[a] - (L \cup \Omega)$ имеет не менее 7 общих соседей. Теперь любая вершина из $[a] \cap \Omega$ содержит 26 вершин из $Y_2 \cap u^{\langle g \rangle}$ и не менее 26 вершин из Y_1. Далее, Y_1 содержит точно $29 \cdot 13$ вершин, смежных с вершиной из $u^{\langle g \rangle}$, противоречие с тем, что $26 \cdot 15 + 29 \cdot 13 > 756$.

Пусть $205 \le |\Omega| \le 231$. Тогда $|\Gamma - \Omega| \le 107 \cdot 13$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 13, не меньше 820. Из утверждения (3) леммы 5.5 следует, что число некликовых $\langle g \rangle$-орбит на $\Gamma - \Omega$ не меньше 82. Поэтому число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 13, не больше $25 \cdot 14 + 82 \cdot 5 = 350 + 410$, противоречие.

Значит, $|\Omega| \le 192$. Если $a \in \Sigma_4$, то $|\Omega| \ge 1 + 58 + 58 \cdot 16/6$, противоречие. Значит, $\sigma_4 = 0$.

Если $a \in \Sigma_5$, то $|\Omega| \ge 1 + 45 + 45 \cdot 16/6 = 166$. Поэтому $|\Gamma - \Omega| \le 110 \cdot 13$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 13, не меньше 830. Из утверждения (3) леммы 5.5 следует, что число некликовых $\langle g \rangle$-орбит на $\Gamma - \Omega$ не меньше 67. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 13, не больше $33 \cdot 14 + 67 \cdot 5 = 797$. Лемма доказана. □

С помощью компьютерных вычислений доказано, что $|\Omega| \le 298$, если $p = 11$, $|\Omega| \le 364$, если $p = 7$, $|\Omega| \le 466$, если $p = 5$, $|\Omega| \le 507$, если $p = 3$, и $|\Omega| \le 526$, если $p = 2$.

Теорема 4 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Higman D.G.** Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees, I // Arch. Math. 1970. Vol. 21. P. 151–156.
2. **Liebeck M.W., Saxl J.** The finite primitive permutation groups of rank 3 // Bull. London Math. Soc. 1986. Vol. 18, no. 2. P. 165–172.
3. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Автоморфизмы полутреугольных графов, имеющих $\mu = 6$ // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 4. С. 439–442.
4. **Cameron P.** Permutation Groups. Cambridge: Cambr. Univ. Press., 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts; no. 45.)
5. **Махнев А.А., Токбаева А.А.** Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $(76, 35, 18, 14)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 185–194.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Combin. 1993. Vol. 14, no. 5. P. 397–407.

7. **Mačaj M., Širáň J.** Search for properties of the missing Moore graph // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432, no. 9. P. 2381–2398.
8. **Spence E.** Regular two-graphs on 36 vertices // Linear Algebra Appl. 1995. Vol. 226/228. P. 459–497.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН
зав. отд. алгебры и топологии
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Зюляркина Наталья Дмитриевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: toddeath@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 517.977

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЯЮЩИХ ДВА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК[1]

К. С. Кобылкин

В работе рассматривается общая труднорешаемая задача полиэдрального отделения двух конечных множеств точек A и B в $\mathbb{R}^d$, находящихся в общем положении, наименьшим по мощности числом гиперплоскостей в смысле булевой функции из заданного класса Σ. Даются детерминированные и вероятностные нижние оценки этого числа для двух различных классов функций Σ.

Ключевые слова: k-полиэдральная отделимость, булева функция, монохромный остров, разброс.

K. S. Kobylkin. Lower bounds for the number of hyperplanes separating two finite sets of points.

We consider the NP-hard polyhedral separability problem for two subsets A and B of points in general position in $\mathbb{R}^d$ with the fewest number of hyperplanes in the sense of boolean functions from a given class Σ. Both deterministic and probabilistic lower bounds are obtained for this number for two different classes of functions Σ.

Keywords: k-polyhedral separability, boolean function, monochromatic island, combinatorial discrepancy.

Введение

Поиск семейства гиперплоскостей малой мощности, разделяющего в некотором смысле два конечных множества точек в $\mathbb{R}^d$, является интересной оптимизационной задачей, возникающей как в статистическом обучении [22; 24] в классе коллективных кусочно-линейных алгоритмов классификации, так и в комбинаторной оптимизации [18], в частности в задачах так называемого классового покрытия множества [1]. При этом в задачах обучения нет обязательного условия точного (корректного) разделения двух множеств ввиду наличия шума, тогда как в геометрических задачах данное требование присутствует. Настоящая работа посвящена задачам точного разделения конечных множеств в векторных пространствах фиксированной размерности семейством гиперплоскостей наименьшей мощности в следующем смысле. Пусть задано конечное множество $C \subset \mathbb{R}^d$ из m точек, находящихся в общем положении, а также некоторая функция $\psi\colon C \to \{-1, 1\}$, называемая *раскраской* множества C. Условие общности положения точек множества C означает, что никакие $d+1$ точки из C не лежат на одной $(d-1)$-мерной гиперплоскости. Пусть $A = \{c \in C\colon \psi(c) = 1\}$, $B = \{c \in C\colon \psi(c) = -1\}$ и $\mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}B \neq \varnothing$, где conv обозначает выпуклую оболочку множества.

Определение 1 [17]. Два конечных множества A и B в $\mathbb{R}^d$ *k-полиэдрально отделимы* в смысле булевой функции $\varphi = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ от k аргументов, если найдется такой набор векторов $X = \{[x^i, x_0^i]\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{d+1}$, что функция $\varphi(\chi(l_1(x)), \ldots, \chi(l_k(x)))$ принимает значение *истина* для всякого $x \in A$ и дает значение *ложь* для любого $x \in B$, где $l_i(x) = (x^i, x) - x_0^i$, $i = 1, \ldots, k$,

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} \textit{истина}, \text{ если } \alpha > 0, \\ \textit{ложь} \text{ в случае, когда } \alpha < 0, \\ \text{не определена при } \alpha = 0 \end{cases}$$

($(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$).

Нас будут интересовать нижние границы для оптимального значения следующей задачи.

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

З а д а ч а Minimum Polyhedral Separability ($\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$). Пусть Σ — некоторый класс булевых функций, зависящих от конечного числа аргументов. Найти формулу $\varphi \in \Sigma$ с минимальным числом аргументов $k_0 = k_0(\Sigma, C, \psi)$, а также набор векторов $X = \{[x^i, x_0^i]\}_{i=1}^{k_0} \in \mathbb{R}^{d+1}$, обеспечивающий k_0-полиэдральную отделимость множеств A и B в смысле функции φ.

Поскольку многие интересные геометрические задачи, являющиеся частными случаями задачи $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$, суть труднорешаемы, нахождение нижних границ их оптимального значения становится необходимым при оценке точности полиномиальных алгоритмов поиска приближенного решения этих задач. Мы опишем эти частные случаи ниже, задавая в формулировке задачи $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$ класс булевых функций Σ. Во-первых, взяв в качестве Σ класс дизъюнкций конечного числа термов, являющихся конъюнкциями непересекающихся множеств, включающих t булевых переменных, где $t \in \mathbb{N}$ задано, получаем задачу Class Cover о минимальном покрытии множества A геометрическими фигурами [1], не имеющими общих точек с множеством B, возникающую в алгоритмическом обучении. Во-вторых, если Σ — класс конъюнкций любого конечного числа булевых переменных, то $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$ становится задачей отделения A от B поверхностью выпуклого многогранного множества с минимальным числом $(d-1)$-мерных граней [18]. В-третьих, рассмотрим мажоритарную булеву функцию от нечетного числа аргументов k, определяемую как $\dfrac{k+1}{2}$-я пороговая функция:

$$\mathrm{MAJ}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{cases} \textit{истина}, & \text{если истинны по крайней мере } \frac{k+1}{2} \text{ ее аргументов,} \\ \textit{ложь} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае, когда Σ совпадает с классом MAJ мажоритарных булевых функций от любого нечетного числа аргументов, имеем задачу $\mathrm{MASC\text{-}GP}(d)$ о минимальном разделяющем комитете аффинных функций [22].

Под *допустимым* решением задачи $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$, как обычно, понимается пара (φ, X), в которой $\varphi \in \Sigma$, а $X \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — набор векторов, обеспечивающий $|X|$-полиэдральную отделимость множеств A и B в смысле функции φ, $|X|$ совпадает с числом аргументов φ. Множество C мощности m и его раскраска ψ предполагаются фиксированными, поэтому во всех обозначениях ниже термы C и ψ опускаются.

В работе дается более точная по сравнению с известной нижняя оценка величины $k_0(P_2)$, где P_2 — множество всех булевых функций, зависящих от конечного числа аргументов, исследуется точность этой оценки. Поскольку для любого заданного класса булевых функций Σ при условии существования допустимого решения задачи $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$ верно неравенство $k_0(\Sigma) \geq k_0(P_2)$, полученные нижние границы будут таковыми и для величины $k_0(\Sigma)$. Пользуясь общеизвестным подходом на основе неравенств Чернова—Хеффдинга и обобщения леммы о случайной раскраске [16], мы получаем похожие нижние оценки оптимального значения $k_0(\Sigma)$ для классов $\Sigma = P_2$ и $\Sigma = \mathrm{MAJ}$ в предположении случайности раскраски элементов множества C, когда независимо в каждой точке $c \in C$ функция ψ принимает одно из двух значений: 1 или -1 с вероятностями $g(c)$ и $1 - g(c)$ соответственно, что представляет интерес при исследовании характеристик приближенных алгоритмов поиска решения задач полиэдральной отделимости в предположении вероятностной природы входных данных. Также эти оценки обосновывают эффективность простого рандомизированного алгоритма с некоторым образом определенной на множестве C функцией g для получения раскраски с заданной нижней границей для величины $k_0(\Sigma)$.

1. Оценки числа разделяющих гиперплоскостей в классе произвольных булевых функций

Переформулируем задачу $\mathrm{MinPS}(P_2, d)$ в более простом виде.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что набор гиперплоскостей $\mathcal{H}$ *разделяет точки* множеств A и B, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ в $\mathcal{H}$ найдется строго разделяющая их гиперплоскость.

Рассмотрим следующую труднорешаемую даже при $d = 2$ [14, доказательство теоремы 6] задачу.

З а д а ч а Minimum Separating Set of Hyperplanes (MinSSH(d)). Найти минимальный по мощности набор гиперплоскостей, разделяющий точки множеств A и B.

Обозначим через $k_1 = k_1(C, \psi)$ ее оптимальное значение. Допустимым решением задачи считается любой конечный набор гиперплоскостей, разделяющий точки множеств A и B. Если на входящие в него гиперплоскости наложить дополнительное ограничение параллельности координатным гиперплоскостям, то MinSSH(d) совпадает с возникающей в анализе данных труднорешаемой [7, теорема 2] уже при $d = 2$ задачей оптимальной дискретизации признаков.

Утверждение 1. *Задачи* MinSSH(d) *и* MinPS(P_2, d) *эквивалентны.*

Прежде чем перейти к доказательству этого утверждения, введем некоторые определения и обозначения. Пусть $\mathcal{H} = \{H^i\}_{i=1}^k$ — набор гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$ и $f_d(\mathcal{H})$ — число таких открытых выпуклых многогранников Δ, ограниченных гиперплоскостями из $\mathcal{H}$, что $\Delta \cap \bigcup_{i=1}^k H^i = \varnothing$.

О п р е д е л е н и е 3. Многогранники вида Δ будем называть *ячейками.* Совокупность гиперплоскостей $\mathcal{H}$ назовем *конфигурацией.* Скажем, что $\mathcal{H}$ — *простая* конфигурация, если пересечение любых $l \le d+1$ ее гиперплоскостей имеет размерность $d - l$ с учетом соглашения о том, что размерность пустого множества равна -1.

Нам также понадобится следующий результат.

Утверждение 2 [9, лемма 1.2]. *Если $\mathcal{H}$ — простая конфигурация k гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, то*

$$f_d(\mathcal{H}) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } k < d, \\ \sum\limits_{i=0}^{d} C_k^i & \text{в случае, когда } k \ge d. \end{cases}$$

Перейдем к доказательству утверждения 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{H} = \{H^i\}_{i=1}^{k_1}$ — оптимальный набор гиперплоскостей для задачи MinSSH(d), где $H^i = \{x\colon l_i(x) \triangleq (x^i, x) - x_0^i = 0\}$, $i = 1, \ldots, k_1$. Ввиду общности положения точек из C можно считать такую конфигурацию простой и, кроме того, предполагать, что $C \cap \bigcup_{i=1}^{k_1} H^i = \varnothing$. Любой ячейке Δ конфигурации $\mathcal{H}$ отвечает булев вектор

$$\tau(\Delta) = (\chi(l_1(x_0)), \ldots, \chi(l_{k_1}(x_0))) \in \{\textit{истина}, \textit{ложь}\}^{k_1},$$

где $x_0 \in \Delta$. Зададим булеву функцию от k_1 переменных:

$$\varphi(\tau(\Delta)) = \begin{cases} \textit{истина}, \text{ если } \Delta \cap A \ne \varnothing, \\ \textit{ложь} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Это определение корректно, поскольку число ячеек в $\mathcal{H}$ по утверждению 2 не превосходит 2^{k_1}. Очевидно, множества A и B будут k_1-полиэдрально отделимы в смысле φ и $k_1 \ge k_0(P_2)$. Приводимый ниже факт завершает доказательство эквивалентности задач MinPS(P_2, d) и MinSSH(d).

Утверждение 3. *Пусть Σ — некоторый класс булевых функций. Набор гиперплоскостей $\mathcal{H} = \{H^i\}_{i=1}^k$, определяемый произвольным допустимым решением (φ, X) задачи* MinPS(Σ, d) *согласно формуле*

$$H^i = \{x\colon l_i(x) = (x^i, x) - x_0^i = 0\}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

где $\varphi \in \Sigma$ — функция от k аргументов и $X = \{[x^i, x_0^i]\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{d+1}$, является допустимым решением задачи MinSSH(d).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения k-полиэдральной отделимости следует, что $C \cap \bigcup_{i=1}^{k} H^i = \varnothing$. Поскольку $\varphi(\chi(l_1(x)), \ldots, \chi(l_k(x)))$ истинна при $x = a$ и ложна для $x = b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$, то $\chi(l_{i_0}(a)) \neq \chi(l_{i_0}(b))$ для некоторого $i_0 = i_0(a, b) \in \mathbb{N}_k$. Значит, гиперплоскость $l_{i_0}(x) = 0$ строго разделяет точки a и b. Тогда $\mathcal{H}$ будет допустимым решением задачи MinSSH(d) для множеств A и B. Кроме того, $k_0(\Sigma) \geq k_1$.

Утверждение доказано.

Сформулируем оценки для оптимального значения k_1 задачи MinSSH(d) при отсутствии ограничений на разделяющие гиперплоскости. Нам понадобится следующий результат.

Теорема 1 [14, предложение 3]. *Справедлива верхняя оценка* $k_1 \leq 2\left\lceil \dfrac{\lfloor (m-d)/2 \rfloor}{d} \right\rceil + 1.$

Здесь и в дальнейшем $\lceil x \rceil$ и $\lfloor x \rfloor$ обозначают наименьшее целое (соответственно, наибольшее целое), большее или равное (соответственно, меньшее или равное) вещественному x. Дадим еще некоторые определения и обозначения.

О п р е д е л е н и е 4. *Монохромным островом* [10] называется множество точек S, содержащееся в каком-либо из двух множеств A или B, например, в A, выпуклая оболочка которого не пересекается с множеством B, при этом $C \cap \operatorname{conv} S = S$. *Выпуклым монохромным разбиением* [8] множества C считается любое разбиение множества C на монохромные острова с непересекающимися выпуклыми оболочками. Обозначим через $p_d = p_d(C, \psi)$ наименьшую мощность выпуклого монохромного разбиения множества C. Для произвольного $k \in \mathbb{N}_m$ монохромный остров называется *k-сепарабельным* [10], если он может быть отделен от своего дополнения до C выпуклым многогранным множеством с не более чем k $(d-1)$-мерными гранями.

Пусть f и g — некоторые функции натурального аргумента n. Всюду в работе используются стандартные обозначения $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$ и $f(n) = \Theta(g(n))$. Первое из них равносильно существованию такой константы $T > 0$, что для всех достаточно больших n справедливо неравенство $|f(n)| \leq T|g(n)|$, второе — выполнению обратного неравенства между f и g, наконец, третье эквивалентно существованию двух положительных констант T_1 и T_2 с условием $T_1|g(n)| \leq |f(n)| \leq T_2|g(n)|$ для всех достаточно больших n. Ниже мы несколько уточним справедливую для достаточно больших p_d оценку $k_1 = \Omega(\sqrt[d]{p_d})$, которую можно отнести к фольклору (она легко выводится из утверждения 2), заменив в ней p_d на величину p_{hd}, равную мощности наименьшего выпуклого монохромного разбиения C на h-сепарабельные острова для некоторого $h \in \mathbb{N}_m$.

Теорема 2. *Пусть $d \geq 2$. Верно двойное неравенство*

$$h \geq k_1 \geq k_2 = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{d}{e^{3/2}} \sqrt[d]{p_{hd} - 1} \right\rceil & \text{при } \ p_{hd} \geq 4^d, \\ \lceil \log_2 p_{hd} \rceil, \text{ если } \ p_{hd} < 4^d, \end{cases} \tag{1}$$

где $h = \min\left\{ 2\left\lceil \dfrac{\lfloor (m-d)/2 \rfloor}{d} \right\rceil + 1, \left\lfloor \left(\dfrac{p_d}{2} \right)^2 \right\rfloor \right\}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $\lfloor p_d^2/4 \rfloor \geq k_1$. Рассмотрим произвольное наименьшее выпуклое монохромное разбиение Π_0 множества C, включающее p_d островов. Очевидно, что в Π_0 всякие два острова линейно разделимы. Пусть $\mathcal{H}_0$ — такой наименьший по мощности набор гиперплоскостей, что для любых двух островов, один из которых содержится в A, а другой лежит во множестве B, в наборе $\mathcal{H}_0$ имеется строго разделяющая их гиперплоскость. Очевидно, набор $\mathcal{H}_0$ допустим для задачи MinSSH(d). Значит,

$$(p_d/2)^2 \geq p_d(A)(p_d - p_d(A)) \geq |\mathcal{H}_0| \geq k_1,$$

где $p_d(A)$ — число островов в Π_0, содержащихся целиком во множестве A. С учетом теоремы 1 имеем $k_1 \leq h$.

Рассмотрим оптимальный набор $\mathcal{H}$ из k_1 гиперплоскостей для задачи MinSSH(d) с множествами A и B. Ввиду общности положения точек множества C можно считать, что $\mathcal{H}$ является простой конфигурацией, при этом никакая точка из C не лежит ни на одной из гиперплоскостей в $\mathcal{H}$. Следовательно, всякая точка множества C содержится в некоторой ячейке, определяемой конфигурацией $\mathcal{H}$. Значит, $\mathcal{H}$ индуцирует выпуклое монохромное разбиение C на h-сепарабельные острова. Обозначим мощность этого разбиения через $r_d = r_d(C, \psi)$. Очевидно, $r_d \geq p_{hd}$. С другой стороны, $f_d(\mathcal{H}) \geq r_d$. В случае, когда $p_{hd} \geq 4^d$, имеем $k_1 \geq 2d$ по утверждению 2. Поскольку по тому же утверждению в этом случае $f_d(\mathcal{H}) \leq dC_{k_1}^d + 1$ и $C_{k_1}^d \leq k_1^d/d!$, то $k_1 \geq \sqrt[d]{(d-1)!\,(p_{hd}-1)}$, откуда с учетом неравенств $d! \geq d^{d+1/2}/e^d$ и $d \leq e^d$ оценку можно продолжить: $k_1 \geq (d/d^{1/(2d)}e)\sqrt[d]{p_{hd}-1} \geq (d/e^{3/2})\sqrt[d]{p_{hd}-1}$. Если же $p_{hd} < 4^d$, то, очевидно, $k_1 \geq \log_2 p_{hd}$.

Теорема доказана.

Сохраняя обозначения теоремы 2, несколько уточним ее для $d = 2$.

Утверждение 4. *При $d = 2$ справедливо неравенство*

$$k_1 \geq \left\lceil \frac{\sqrt{8p_{hd} - 7} - 1}{2} \right\rceil.$$

Доказательство. Очевидно, $k_1 \geq 2$ ввиду линейной неразделимости множеств A и B. Следуя доказательству теоремы 2, имеем квадратное неравенство $f_2(\mathcal{H}) = 1 + [k_1(k_1 + 1)]/2 \geq p_{hd}$ относительно k_1, разрешая которое, получаем требуемое соотношение.

Утверждение доказано.

Укажем диапазон изменения p_d. Пусть $p_d(m)$ — минимальное число множеств, достаточных для разбиения всякого подмножества в $\mathbb{R}^d$ из m точек, находящихся в общем положении, и любой заданной на нем раскраски на монохромные острова с непересекающимися выпуклыми оболочками. Следующая теорема уточняет результат, данный Думитреску и Пачем (см. [8, доказательство теоремы 4]).

Теорема 3. *Пусть $m > d \geq 2$. Тогда $p_d(m) \leq m/d + 3$.*

Из этой теоремы при $m > d \geq 2$ вытекает двойное неравенство $3 \leq p_d \leq m/d + 3$. Верхняя оценка для p_d непосредственно следует из теоремы 3. Оценка снизу также очевидна, поскольку A и B линейно неразделимы. Интересной задачей является получение верхней оценки для p_{hd} в случае, когда $p_d \ll \sqrt{m}$.

Из теоремы 2 следует, что оптимальное число гиперплоскостей меняется в достаточно широком интервале между $\sqrt[d]{p_d}$ и $p_d^2/4$. Расположение островов, входящих в минимальное выпуклое монохромное разбиение множества C, может давать $k_1 = \Theta(p_d)$.

Пример 1. Определим конфигурацию точек C и раскраску ψ таким образом, чтобы $B \cap \mathrm{conv} A = \varnothing$ и $k_1 = k_0(\Sigma)$, где Σ — класс конъюнкций любого конечного числа булевых переменных. Обозначим через M произвольный ограниченный телесный выпуклый многогранник с t $(d-1)$-мерными гранями. Расположим точки из A внутри M, а точки из B — в дополнении до M следующим образом. Пусть H_i — гиперплоскость, проходящая через некоторую $(d-1)$-мерную грань многогранника M, где $i = 1, \ldots, t$. Для всякого i определим множества $A_i \subset H_i^1$ и $B_i \subset H_i^2$, каждое мощности td, на симметричных относительно H_i параллельных гиперплоскостях H_i^1 и H_i^2 таким образом, чтобы всякому элементу $a \in A_i$ отвечал симметричный ему относительно гиперплоскости H_i элемент $b \in B_i$. Гиперплоскости H_i^1 и H_i^2 должны быть достаточно близко расположены друг к другу. Точнее, должны быть выполнены следующие два условия. Во-первых, любая разделяющая d точек из A_i и отвечающие им d точек из B_i гиперплоскость должна проходить таким образом, чтобы множество $A_j \cup B_j$ лежало относительно нее по одну сторону для всякого $j \neq i$. Положим $A = \bigcup_{i=1}^t A_i$ и $B = \bigcup_{i=1}^t B_i$. Добавим в A все вершины M. Во-вторых, всякий отрезок, соединяющий две точки $b \in B_i$ и $b' \in B_j$, где $j \neq i$, должен пересекаться с $\operatorname{conv} A$. Некоторой вариацией точек A и B можно добиться выполнения условия общности положения с сохранением двух вышеупомянутых свойств. Для всяких $d+1$ точек из B, не все из которых лежат в каком-то одном множестве B_i, включим в A некоторую точку из M, принадлежащую их выпуклой оболочке. Любая гиперплоскость, разделяющая две пары симметричных "разноцветных" точек во множествах $A_i \cup B_i$ и $A_j \cup B_j$, где $j \neq i$, проходит не более, чем через t $(d-1)$-мерных граней M и разделяет не более чем $t(d-1)$ таких пар симметричных точек. Значит, $k_1 = t$. Поскольку минимальное выпуклое монохромное разбиение множества C составлено из островов A и $B_1, \dots, B_t$ (в любом другом таком разбиении некоторые острова из B имеют меньшую td мощность), то $p_d = k_1 + 1$.

Опишем теперь ситуацию, когда $k_1 = \Theta(\sqrt[d]{p_d})$.

П р и м е р 2. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t > 4$ — заданное натуральное число. В кубе $I = [0, t+(t+1)\varepsilon]^d$ разместим t^d единичных кубов $I(s_1, \dots, s_d)$ с центрами в точках $\big(s_1(1+\varepsilon)-1/2, \dots, s_d(1+\varepsilon)-1/2\big)$, где $s_i \in \mathbb{N}_t$ и $i \in \mathbb{N}_d$. Рассмотрим множество

$$B_0 = \cup\{H(s,i)\colon s \in \mathbb{N}_{t-1},\ i \in \mathbb{N}_d\},$$

где $H(s,i)$ — пересечение куба I с гиперплоскостью $x_i = s(1+\varepsilon) + \varepsilon/2$. Всякое множество $H(s,i)$, очевидно, содержится в полосе, определяемой гиперплоскостями $x_i = s(1+\varepsilon)+\varepsilon/2 \pm \varepsilon/4$, которая, в свою очередь, не содержит точек из объединения $\cup\{I(s_1, \dots, s_d)\colon s_i \in \mathbb{N}_t,\ i \in \mathbb{N}_d\}$. Значит, B_0 лежит в объединении $(t-1)d$ полос.

Построим конечное множество C и его раскраску ψ, определив соответствующие множества A и B. Расположим внутри всякого куба $I(s_1, \dots, s_d)$ множество $A(s_1, \dots, s_d)$ из $d+1$ точек таким образом, чтобы точки из $A = \cup\{A(s_1, \dots, s_d)\colon s_i \in \mathbb{N}_t,\ i \in \mathbb{N}_d\}$ находились в общем положении.

Составим множество B из точек множества B_0 следующим образом. Для любого подмножества точек $a^{(1)}, \dots, a^{(d+1)}$ множества A с условием, что не существует таких $s_i^0 \in \mathbb{N}_t$, где $i \in \mathbb{N}_d$, и что все они содержатся в каком-то одном множестве $A(s_1^0, \dots, s_d^0)$, включим во множество B произвольную точку из B_0, лежащую внутри выпуклой оболочки $\operatorname{conv}\{a^{(p)}\colon p \in \mathbb{N}_{d+1}\}$. Поскольку конечно число подмножеств множества A, удовлетворяющих этому условию, то конечным также будет множество B. Кроме того, сколь угодно малой вариацией точек множества $C = A \cup B$ можно добиться выполнения условия общности положения с сохранением всех вышеупомянутых свойств. Поскольку мощность наибольшего монохромного острова во множестве A мощности $t^d(d+1)$ равна $d+1$, то $p_d(A) = t^d$, где $p_d(A)$ — число островов минимального выпуклого монохромного разбиения множества C, содержащихся целиком во множестве A. Ввиду соотношений $p_d \geq t^d + 1 > 4^d$ и $p_{hd} \geq p_d$ по теореме 2 имеем, что $k_1 \geq dt/e^{3/2}$. Легко видеть, что $k_1 \leq 2(t-1)d$, откуда $k_1/\sqrt[d]{p_d} = \Theta(1)$, что завершает описание примера.

Можно несколько огрубить нижнюю оценку для k_1 в неравенстве (1), оценив величину p_{hd} снизу.

О п р е д е л е н и е 5. Положим $\psi(S) = \sum\limits_{c \in S} \psi(c)$, где $S \subseteq C$, $\Pi = \Pi(C) = \{S \subseteq C\colon C \cap \operatorname{conv} S = S\}$ и $\rho = m/p_{hd}$. (*Комбинаторным*) *разбросом* [19] класса Π относительно раскраски ψ на множестве C назовем величину $\operatorname{disc}(C, \Pi, \psi) = \max\limits_{S \in \Pi} |\psi(S)|$.

Через $\bar{m}_0 = \bar{m}_0(C, \psi)$ также обозначим величину, равную мощности наибольшего монохромного острова в C.

Утверждение 5. *Верна оценка* $\rho \leq \bar{m}_0 \leq \operatorname{disc}(\Pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенство $\rho \leq \bar{m}_0$. Пусть $m^{(t)}$ — мощность t-го острова, входящего в минимальное выпуклое монохромное разбиение множества C на h-сепарабельные острова, где $t = 1, \dots, p_{hd}$. По определению

$$\rho = \frac{m}{p_{hd}} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p_{hd}} m^{(t)}}{p_{hd}} \leq \frac{p_{hd}\,\bar{m}_0}{p_{hd}} = \bar{m}_0.$$

Поскольку П содержит всякий наибольший монохромный остров S, определяемый раскраской ψ, и $|\psi(S)| = |S|$, то $\bar{m}_0 \le \mathrm{disc}(\Pi)$.

Утверждение доказано.

При $d = 2$ величина $\bar{m}_0$, в отличие от p_{h2}, может быть эффективно вычислена за время $O(m^3 \log m)$ [10].

Применение к оценке точности некоторых приближенных алгоритмов. Опишем использование нижней границы, данной в неравенстве (1), для оценки точности одного приближенного алгоритма решения задачи MinSSH(2). Можно адаптировать приближенный алгоритм $\mathcal{A}$ [2] поиска минимального покрытия множества C при заданной раскраске ψ набором непересекающихся "монохроматических" кругов для получения соответствующего допустимого решения задачи MinSSH(2).

Ниже под выпуклым многоугольником понимается пересечение конечного набора замкнутых полуплоскостей.

Определение 6. *Комплексом* [21] назовем такой набор выпуклых многоугольников, дающий в объединении всю плоскость, что всякая грань (пустое множество, вершина, ребро) любого многоугольника входит в комплекс, и пересечение любых двух многоугольников является гранью каждого из них.

Определение 7. Пусть дано семейство кругов $Z_1, \ldots, Z_s$, x_i и r_i — центр и радиус круга Z_i. Положим $pow(x, Z_i) = \|x - x_i\|^2 - r_i^2$, $i = 1, \ldots, s$. *Диаграммой мощности* [3] для этого семейства кругов назовем комплекс, образованный выпуклыми многоугольниками (называемыми *ячейками диаграммы*)

$$W_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon pow(x, Z_i) \le pow(x, Z_j)\ \forall j \in \mathbb{N}_s \backslash \{i\}\}, \qquad i \in \mathbb{N}_s,$$

а также их гранями.

По набору Ξ из r непересекающихся кругов, получаемому алгоритмом $\mathcal{A}$, легко построить допустимый для задачи MinSSH(2) набор прямых. Для этого за время $O(r \log r)$ достаточно построить для семейства Ξ диаграмму мощности $\mathcal{P}$ с пространственными затратами $O(r)$ [3, теорема 7], а затем построить прямые, проходящие через ребра диаграммы $\mathcal{P}$, за время $O(r)$. Покажем, что полученный набор L из k_3 прямых допустим для задачи MinSSH(2). Действительно, всякая ячейка W диаграммы $\mathcal{P}$ определяется некоторым кругом $Z = Z(W) \in \Xi$. Поскольку круги в Ξ не пересекаются, то $Z \subset W$. С другой стороны, ячейки диаграммы $\mathcal{P}$ также не пересекаются по внутренности, т. е. W не содержит точек отличных от Z кругов из Ξ, откуда немедленно следует допустимость L для задачи MinSSH(2). Оценим величину k_3 сверху. Справедливо

Утверждение 6 [3, лемма 1]. *Диаграмма мощности для любого семейства $p \ge 3$ кругов на плоскости состоит не более чем из p ячеек, $3p - 6$ ребер и $2p - 5$ вершин.*

Отсюда $k_3 \le 3r - 6$. Далее, легко проверяется следующее неравенство: $(\sqrt{8x - 7} - 1)/2 \ge \sqrt{2x}/2$, где $x \ge 3$. С учетом утверждения 4 выразим точность $\Delta_1 = k_3/k_1$ результирующего приближенного алгоритма для задачи MinSSH(2) через точность $\Delta_2 = r/p_{h2}$ процедуры приближенного поиска минимального покрытия непересекающимися "монохроматическими" кругами:

$$k_3/k_1 \le \frac{6r - 12}{\sqrt{8p_{h2} - 7} - 1} \le \frac{3\sqrt{2}r}{\sqrt{p_{h2}}} \le 3\sqrt{2}\Delta_2\sqrt{p_{h2}} \le 6\Delta_2 k_1.$$

Изложенный выше подход менее эффективен при $d > 2$, поскольку сложность диаграммы мощности с ростом d имеет более высокий порядок по r. Кроме того, заявленная оценка для k_1, определяемая неравенством (1), становится менее точной для больших размерностей d. Тем не менее полученная оценка интересна с теоретической точки зрения. Как будет показано ниже, с ее помощью можно обосновать применение простых рандомизированных алгоритмов получения конфигураций точек и соответствующих раскрасок с заданными свойствами по числу разделяющих гиперплоскостей.

2. Вероятностные оценки снизу для минимального числа гиперплоскостей

Нами будут даны оценки снизу для k_1 в предположении вероятностной природы точек множества C и раскраски ψ. Для их вывода будет использоваться общеизвестный подход, основанный на неравенствах Хеффдинга—Чернова, являющийся обобщением леммы о случайной раскраске [16]. Рассмотрим вероятностную постановку задачи MinSSH(d), где разбиение $C = A \cup B$ является реализацией некоторой *случайной раскраски* множества C, под которой понимается случайный процесс $\psi_g = \psi_g(C)$, определенный на C, принимающий независимо в каждом $c \in C$ значение 1 с вероятностью $g(c)$ и значение -1 с вероятностью $1 - g(c)$, $g\colon C \to [0,1]$ — заданная функция. Эта постановка довольно естественно возникает в статистическом обучении, где точки разделяемых обучающих подвыборок принадлежат каждому из двух классов с некоторой зависящей от их расположения в $\mathbb{R}^d$ вероятностью. В отличие от рассматриваемой нами ситуации, однако, в задачах обучения модель порождения данных, как правило, неизвестна.

Определение 8. Положим $\mathrm{E}\psi_g(S) = 2\sum\limits_{c\in S} g(c) - |S|$. Величину $\mathrm{disc}_\omega(C,\Pi,g) = \max\limits_{S\in\Pi}|\mathrm{E}\psi_g(S)|$ будем называть *ожидаемым разбросом* класса Π относительно случайной раскраски ψ_g множества C.

Предположим дополнительно, что точки множества C распределены непрерывно и независимо друг от друга, и обозначим через $K \subseteq \mathbb{R}^d$ носитель этого распределения. При этом считается, что функция g задана на всем множестве K. Положим

$$\delta(m,g,K) \triangleq \sup_{C\subset K,\,|C|=m} \mathrm{disc}_\omega(C,\Pi,g).$$

Сформулируем два известных результата. Во-первых, справедлива

Теорема 4 [11, теорема 2]. *Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые случайные величины с условием, что $\mathrm{P}(a_i \le \xi_i \le b_i) = 1$ для всякого $1 \le i \le n$, где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ — заданные константы, и $S_n = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i$. Тогда при всех $x > 0$ выполнено неравенство*:

$$\mathrm{P}\{|S_n - \mathrm{E}S_n| \ge x\} \le 2\exp\Big(-2x^2\Big/\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2\Big).$$

Определение 9. Скажем, что точки конечного множества $C \subset \mathbb{R}^d$ находятся в *выпуклом положении*, если точка c строго отделима гиперплоскостью от множества $C\backslash\{c\}$ для всякого $c \in C$. Кроме того, под *выпуклым телом* в $\mathbb{R}^d$ понимается выпуклый компакт с непустой внутренностью.

Во-вторых, верна

Теорема 5 [4, теорема]. *Вероятность $p(m,K)$ того, что m точек, равномерно распределенных независимо друг от друга в произвольном выпуклом теле K единичного объема в $\mathbb{R}^d$, имеют выпуклое положение, удовлетворяет двойному неравенству для всех $m \ge m^*$:*

$$c_1 < m^{\frac{2}{d-1}} \sqrt[m]{p(m,K)} < c_2,$$

где положительные величины c_1, c_2 и m^* зависят только от d.

Указанные в теореме константы будут зависеть от объема тела K в случае, когда оно имеет неединичный объем (см. [4, лемма]). Ниже будет дана оценка сверху для логарифма числа $|\Pi|$ выпуклых многогранников с вершинами в точках множества C, распределенных равномерно в некотором выпуклом теле в $\mathbb{R}^d$. Порядок логарифма математического ожидания этого числа был сообщен без доказательства в [6, теорема 2.1]. Для строгости изложения приводится доказательство несколько переработанной формулировки этого факта.

Лемма 1 [6]. *Пусть $0 < \eta < 1$. Если точки из C распределены равномерно и независимо друг от друга в d-мерном выпуклом теле K единичного объема, то с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, верно равенство*

$$\ln|\Pi| = O(m^{\frac{d-1}{d+1}}) - \ln\eta.$$

Доказательство. Пусть $C(v) = \{c_j : j \in v\}$, где $v \in V = \{J \subseteq \mathbb{N}_m : J \neq \varnothing\}$. Введем индикаторную случайную величину

$$\xi(v) = \begin{cases} 1, & \text{если точки из } C(v) \text{ находятся в выпуклом положении,} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и сумму $\xi_m = \sum\limits_{v \in V} \xi(v)$. Всякому множеству $S \in \Pi$ можно взаимнооднозначно сопоставить вершины выпуклой оболочки $\operatorname{conv} S$, откуда $|\Pi| = \xi_m$. По теореме 5 для математического ожидания величины ξ_m можно записать цепочку неравенств при $m \geq 2m^*$ с учетом свойства $C_m^i \leq (em/i)^i$:

$$\mathrm{E}\xi_m = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \, p(i, K) \leq \sum_{i=1}^{m^*-1} C_m^i \, p(i, K) + \sum_{i=m^*}^{m} C_m^i \big(c_2 / i^{\frac{2}{d-1}}\big)^i \leq m^* C_m^{m^*} + \sum_{i=1}^{m} \big(e c_2 m / i^{\frac{d+1}{d-1}}\big)^i.$$

Дифференцированием, как и при доказательстве результата в случае $d = 2$ [5, теорема 3], найдем максимум по i среди слагаемых полученной суммы. Положим $f(x, m, d) \triangleq (exm)^{\frac{d-1}{d+1}}/e$. Глобальный максимум достигается, вообще говоря, в вещественной точке $i = f(c_2, m, d) > 0$. Значит, оценку для $\mathrm{E}\xi_m$ можно продолжить при $m \geq M^*$, где M^* зависит только от d и $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{E}\xi_m \leq \frac{m^{m^*}}{(m^* - 1)!} + m \exp\Big(\frac{(d+1) f(c_2, m, d)}{d-1}\Big) \leq g(m, d, \varepsilon) = \exp\Big(\frac{(1+\varepsilon)(d+1) f(c_2, m, d)}{d-1}\Big),$$

где ε — заданное малое число.

Применяя неравенство Маркова, имеем

$$\mathrm{P}\Big\{\xi_m \geq \frac{g(m, d, \varepsilon)}{\eta}\Big\} \leq \eta \, \frac{\mathrm{E}\xi_m}{g(m, d, \varepsilon)} \leq \eta,$$

откуда с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, выполнено равенство

$$\ln \xi_m = O(m^{\frac{d-1}{d+1}}) - \ln\eta. \tag{2}$$

Лемма доказана.

Следующая теорема фактически продолжает нижнюю оценку величины k_1, данную в неравенстве (1), для случайных раскрасок. Из нее вытекает, что можно ограничить сверху мощность наибольшего монохромного острова конфигурации точек C и раскраски ее элементов суммой удвоенного ожидаемого разброса и величины $\ln|\Pi|$. Для краткости, терм C будет опускаться в обозначении величины $\operatorname{disc}_\omega(C, \Pi, g)$.

Теорема 6. *Пусть $\bar{m}_0$ отвечает произвольной реализации некоторой случайной раскраски ψ_g множества C, где g — заданная функция, и $0 < \eta < 1$. С вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, справедлива оценка*

$$\bar{m}_0 \leq 2\left(\operatorname{disc}_\omega(\Pi, g) + \ln(2|\Pi|) - \ln\eta\right). \tag{3}$$

Если, кроме того, точки из C выбраны независимо друг от друга из равномерного распределения в d-мерном выпуклом теле K единичного объема, а функция g определена на всем теле K, то с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, при больших m выполнено неравенство

$$\bar{m}_0 \leq 2\,\delta(m, g, K) + O\big(m^{\frac{d-1}{d+1}}\big) - 4\ln\eta. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 4. Для всякого $S \in \Pi$ и любого $c \in S$ величины $\psi_g(c)$, $c \in S$, независимы и принимают значения ± 1. Тогда выполнено неравенство

$$\mathrm{P}\{|\psi_g(S) - \mathrm{E}\psi_g(S)| \geq x\} \leq 2\exp\Big(-\frac{x^2}{2|S|}\Big),$$

где $x > 0$. Как в [16, доказательство леммы 4.1], подставим в него $x = x(S) = \sqrt{2|S|y}$, где $y = \ln(2|\Pi|) - \ln\eta > 0$, и просуммируем по всем $S \in \Pi$. Значит, с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, для всех $S \in \Pi$ одновременно выполнено неравенство

$$|\psi_g(S)| - |\mathrm{E}\psi_g(S)| \leq |\psi_g(S) - \mathrm{E}\psi_g(S)| \leq x(S).$$

Пусть $\Pi_1 \subset \Pi$ — множество всех монохромных островов в C. Для произвольного $C_0 \in \Pi_1$ с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, верно неравенство

$$|C_0| - |\mathrm{E}\psi_g(C_0)| \leq \sqrt{2|C_0|y}.$$

Разрешая это квадратное неравенство относительно $t = \sqrt{|C_0|}$, с учетом вогнутости функции $f(z) = \sqrt{z}$ имеем $t \leq \sqrt{2y + 2|\mathrm{E}\psi_g(C_0)|}$, откуда $|C_0| \leq 2(|\mathrm{E}\psi_g(C_0)| + y) \leq 2\left(\mathrm{disc}_\omega(\Pi, g) + y\right)$, т. е. $\bar{m}_0 \leq 2\left(\mathrm{disc}_\omega(\Pi, g) + y\right)$.

В случае, когда точки из $C = \{c_j\}_{j=1}^m$ распределены равномерно в d-мерном выпуклом теле K единичного объема, с учетом того что невыполнение хотя бы одного из неравенств (2) и (3) может произойти с вероятностью, не большей 2η, оценка (4) вытекает из (2) и (3).

Теорема доказана.

Если не накладывать никаких ограничений на конфигурацию точек из C, неравенство (3) может давать тривиальную оценку. Так, если точки множества C находятся в выпуклом положении, а $g \equiv 1/2$, то $|\Pi| = 2^m$, что влечет оценку $\bar{m}_0 \leq (m+1)\ln 4 - 2\ln\eta$.

Приводимая ниже оценка снизу для k_1 для равномерных конфигураций точек из C легко получается одновременным применением теорем 2 и 6 с учетом утверждения 5.

Следствие 1. *Пусть $\alpha < 1$ и точки из C выбраны независимо из равномерного распределения в выпуклом теле K единичного объема. Если $\delta(m, g, K) = O\left(m^\alpha\right)$, то $k_1 = \Omega(m^{\frac{\beta}{d}})$, где $\beta = \min\big\{1-\alpha,\, 2/(d+1)\big\}$ с близкой к 1 вероятностью.*

Приведем пример случайной раскраски, удовлетворяющей условиям следствия. Пусть точки из C распределены равномерно в единичном кубе. Зададим функцию g следующим образом: $|g(x) - 1/2| \leq \varepsilon(m)$ для любого $x \in [0,1]^d$, где $\varepsilon(m) = 1/(2m^\lambda)$ и $\lambda > 0$. Имеем для любого $S \subseteq C$, что

$$|\mathrm{E}\psi_g(S)| = \Big|2\sum_{c \in S}(g(c) - 1/2)\Big| \leq 2m\varepsilon(m) = m^{1-\lambda},$$

откуда $\delta(m, g, K) \leq m^{1-\lambda}$. С ростом m такая раскраска все более приближается к раскраске с $g \equiv 1/2$.

Задавая определенным образом функцию g на конфигурациях точек, выбранных случайно из равномерного распределения, можно с помощью простого рандомизированного алгоритма получить раскраску точек с заданной нижней границей для k_1. Однако следствие при этом не дает никакой информации о точном порядке величины k_1.

3. Оценка числа разделяющих гиперплоскостей для мажоритарных булевых функций

Рассмотрим задачу $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$, в которой Σ — класс мажоритарных булевых функций. Ниже дается нижняя оценка величины $k_0(\Sigma)$ для произвольных конфигураций C из m точек в общем положении в $\mathbb{R}^d$ при условии, что известен ожидаемый разброс случайной раскраски ψ_g (т.е. задана функция g) относительно класса множеств

$$\Pi_2 = \{S \subseteq C \colon \exists z \in \mathbb{R}^d \ \exists z_0 \in \mathbb{R} \colon S = C \cap \{x \colon (z,x) > z_0\}\}.$$

Всякое $S \in \Pi_2$ является *k-множеством*, т. е. множеством мощности $k = |S|$, строго отделимым от своего дополнения до C некоторой гиперплоскостью.

Вначале рассмотрим случай детерминированной раскраски ψ, учитывая следующий результат (см. [15] и [22, теорема 2.4]).

Теорема 7. *Пусть $A \cap B = \varnothing$ и m_0 — мощность такого наибольшего по числу точек подмножества $A' \cup B' \subset A \cup B$, что $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$, при этом множества A' и B' строго отделимы гиперплоскостью. Тогда $m_0 > m/2$ и*

$$k_0(\Sigma) \geq \left\lceil \frac{m}{2m_0 - m} \right\rceil.$$

Отметим, что параметр m_0 при $d = 2$ может быть эффективно вычислен [12] за время $O(m^2)$. Нахождение этого параметра помогает при выборе приближенного алгоритма решения задачи $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$. Так, поскольку известный алгоритм Мазурова — Хачая [13] дает за время $O(m)$ приближенное решение (φ, X) задачи $\mathrm{MinPS}(\Sigma, d)$ с $|X| = O(m)$, то его точность (т. е. отношение $|X|/k_0(\Sigma)$) для раскраски с условием $2m_0 - m = O(\sqrt{m \ln m}\,)$ равна $O(\sqrt{m \ln m}\,)$, что совпадает с точностью существенно более трудоемкого алгоритма [23], основанного на анализе структуры всех максимальных линейно разделимых подсистем во множестве $A \cup B$.

В обозначениях этой теоремы имеет место следующий результат.

Утверждение 7. *Верно неравенство* $2m_0 - m \leq 2\,\mathrm{disc}(\Pi_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обозначения теоремы 7, можно записать:

$$2m_0 - m = 2|A'| + 2|B'| - |A| - |B| = |A'| - |B \backslash B'| + |B'| - |A \backslash A'|,$$

откуда, с учетом того что множества $S_1 = A' \cup (B \backslash B')$ и $S_2 = B' \cup (A \backslash A')$ содержатся в Π_2, можно продолжить оценку $2m_0 - m = \psi(S_1) - \psi(S_2) \leq 2\,\mathrm{disc}(\Pi_2)$.

Утверждение доказано.

Конфигурации точек в общем положении в $\mathbb{R}^d$ и раскраски их элементов с условием, что $k_0(\Sigma) = \Omega(m)$, описаны в работах [20] и [13]. Подробнее, в них рассматривались такие множества C из $m = 2j + d$ точек в $\mathbb{R}^d$ с заданной на них раскраской ψ, что для всякого открытого полупространства P, возможно совпадающего с $\mathbb{R}^d$, выполнено неравенство $|P \cap A| + |B \backslash \mathrm{cl}\, P| \geq j$, где cl обозначает замыкание множества. Поскольку $m_0 = j + d$, то с учетом утверждения 7 имеем $\mathrm{disc}(\Pi_2) \geq d/2$. С другой стороны, $\mathrm{disc}(\Pi_2) \leq d$. Действительно, пусть, от противного, найдутся подмножества $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$ с условием, что $C \cap P = A' \cup B'$ для некоторого открытого полупространства P и $||A'| - |B'|| > d$. Для определенности считаем, что $|A'| > |B'|$, откуда $|A'| + |B \backslash B'| > |B| + d$. Поскольку $|A| \leq j + d$, то $|B| \geq j$, т. е. $|A'| + |B \backslash B'| > j + d$, что невозможно. В работе [20], где впервые рассматривались такая конфигурация точек и ее раскраска, дается некий алгоритм ее порождения, т. е. раскраска с $\mathrm{disc}(\Pi_2) = \Theta(1)$ может быть построена алгоритмически.

Следующая теорема сообщает равномерную по почти всем реализациям нижнюю оценку для $k_0(\Sigma)$, которую можно считать продолжением оценки, данной в теореме 7, для случайных раскрасок.

Теорема 8. *Пусть $0 < \eta < 1$ и $d \geq 2$. Для произвольной реализации случайной раскраски ψ_g точек множества C, где g — заданная функция, с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, верно неравенство*

$$k_0(\Sigma) \geq \frac{m}{2\left(\mathrm{disc}_\omega\left(\Pi_2, g\right) + \sqrt{m(d \ln(em) - \ln \eta)}\,\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сохраним обозначения доказательства утверждения 7. По теореме 4 с вероятностью, не меньшей $1-\eta$, одновременно выполнены оба неравенства

$$\psi_g(S_1) - \mathrm{E}\psi_g(S_1) \le \sqrt{2|S_1|y} \qquad \text{и} \qquad \psi_g(S_2) - \mathrm{E}\psi_g(S_2) \ge -\sqrt{2|S_2|y},$$

где $y = \ln(2|\Pi_2|) - \ln\eta$. Верна цепочка неравенств

$$\psi_g(S_1) - \psi_g(S_2) \le \mathrm{E}\psi_g(S_1) - \mathrm{E}\psi_g(S_2) + \sqrt{2y}\big(\sqrt{|S_1|} + \sqrt{|S_2|}\big) \le 2(\mathrm{disc}_\omega\,(\Pi_2, g) + \sqrt{ym}). \tag{5}$$

Оценим величину $|\Pi_2|$ сверху. Для всякого множества $S \in \Pi_2$ существует строго отделяющая его от $C\backslash S$ гиперплоскость. С помощью переноса и поворота этой гиперплоскости можно добиться того, чтобы она проходила через d точек из C с сохранением свойства нестрого разделять S и $C\backslash S$. Значит, $|\Pi_2| \le 2C_m^d \le 2(em/d)^d$. Продолжим оценку в неравенстве (5):

$$\psi_g(S_1) - \psi_g(S_2) \le 2\big(\mathrm{disc}_\omega\,(\Pi_2, g) + \sqrt{m(d\ln(em) - \ln\eta)}\,\big).$$

Доказательство теоремы завершает применение теоремы 7.

Из теоремы непосредственно вытекает

Следствие 2. *Если* $\mathrm{disc}_\omega\,(\Pi_2, g) = O\big(\sqrt{m\ln m}\,\big)$, *то* $k_0(\Sigma) = \Omega\big(\sqrt{m/\ln m}\,\big)$ *с близкой к* 1 *вероятностью. В случае, когда* $\mathrm{disc}_\omega\,(\Pi_2, g) = O\,(m^\alpha)$, *где* $1/2 < \alpha \le 1$, *справедливо* $k_0(\Sigma) = \Omega(m^{1-\alpha})$.

Пусть $m \ge d+1$. Раскраска, определяемая неравенством

$$|g(c) - 1/2| \le \varepsilon(m) = \sqrt{(d/m)(\ln m/\ln d)}/2$$

для любого $c \in C$, удовлетворяет условиям данного следствия. Заметим, что здесь мы не накладываем никаких ограничений на конфигурацию точек множества C, кроме общности положения.

4. Заключение

В общей геометрической задаче полиэдральной отделимости наименьшим числом гиперплоскостей двух множеств, определяемых произвольной раскраской конечного множества точек в общем положении в $\mathbb{R}^d$, установлены детерминированные и равномерные по классу почти всех раскрасок вероятностные нижние границы этого числа для двух различных классов булевых функций. Эти границы эффективны при оценке точности некоторых приближенных алгоритмов решения задачи полиэдральной отделимости на плоскости. Кроме того, они обосновывают применение простых рандомизированных алгоритмов получения конфигураций точек и соответствующих раскрасок с заданным числом разделяющих гиперплоскостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Agarwal P., Suri S.** Surface approximation and geometric partitions // Proc. of 5th ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA'94'). 1994. P. 24–33.
2. **Aronov B., Har-Peled S.** On approximating the depth and related problems // SIAM J. Comput. 2008. Vol. 38, no. 3. P. 899–921.
3. **Aurenhammer F.** Power diagrams: properties, algorithms, and applications // SIAM J. Comput. 1987. Vol. 16, no. 1. P. 78–96.
4. **Barany I.** A note on Sylvester's four-point problem // Studia Sci. Math. Hungar. 2001. Vol. 38, no. 1. P. 73—77.
5. **Barany I.** Sylvester's question: the probability that n points are in convex position // The Annals of Probability. 1999. Vol. 27, no. 4. P. 2020–2034.

6. **Barany I.** Random points, convex bodies, lattices // Proc. of the International Congress of Math. 2002. Vol. 3. P. 527–536.
7. **Chlebus B., Nguyen S.H.** On finding optimal discretizations for two attributes // Rough sets and current trends in computing (Warsaw, 1998). Lecture Notes in Comput. Sci. Berlin: Springer, 1998. Vol. 1424. P. 537–544.
8. **Dumitrescu A., Pach J.** Partitioning colored point sets into monochromatic parts // Algorithms and data structures (Providence, RI, USA, 2001). Lecture Notes in Comput. Sci. Berlin: Springer, 2001. Vol. 2125. P. 264–275.
9. **Edelsbrunner H.** Algorithms in combinatorial geometry. Springer-Verlag, 1989. 423 p.
10. **Fischer P.** Sequential and parallel algorithms for finding a maximum convex polygon // Comp. Geom. 1997. Vol. 7, no. 3. P. 187–200.
11. **Hoeffding W.** Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc. 1963. Vol. 58, no. 301. P. 13–30.
12. **Houle M.E.** Algorithms for weak and wide separation of sets // Discrete Appl. Math. 1993. Vol. 45, no. 2. P. 139–159.
13. **Khachay M.Yu.** On approximate algorithm for minimal committee of a system of linear inequalities // Pattern Recognition and Image Analysis. 2003. Vol. 13, no. 3. P. 459–464.
14. **Khachay M.Yu., Poberii M.I.** Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position // Informatica. 2009. Vol. 20, no. 2. P. 217–234.
15. **Kobylkin K.S.** Necessary condition for committee existence // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. Vol. 12, no. 1. P. 26–31.
16. **Matousek J.** Geometric discrepancy: An illustrated guide. Ser. Algorithms and Combinatorics. Berlin: Springer, 1999. Vol. 18. 288 p.
17. **Megiddo N.** On the complexity of polyhedral separability // Discrete Comput. Geom. 1988. Vol. 3, no. 4. P. 325–337.
18. **Mitchell J., Suri S.** Separation and approximation of polyhedral surfaces // Comp. Geom. 1995. Vol. 5, no. 2. P. 95–114.
19. **Алон Н., Спенсер Дж.** Вероятностный метод. М.: Бином, 2007. 320 с.
20. **Гейл Д.** Соседние вершины на выпуклом многограннике // Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. ст. / ред. Г. У. Кун, А. У Таккер. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 470 с.
21. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 320 с.
22. **Мазуров Вл. Д., Хачай М. Ю.** Комитетные конструкции // Изв. Урал. гос. ун-та. 1999. № 2. С. 77–108. (Математика и механика).
23. **Мазуров Вл. Д., Хачай М. Ю.** Бустинг и полиномиальная аппроксимируемость задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 231–236.
24. **Маценов А. А.** Комитетный бустинг: минимизация числа базовых алгоритмов при простом голосовании // Тр. Всеросс. конф. ММРО-13. М.: Макс-Пресс, 2007. С. 180–183.

Кобылкин Константин Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: kobylkinks@gmail.com

Поступила 06.03.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ГРУПП $E_7(2)$ И $E_7(3)$ ПО ГРАФУ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ[1]

А. С. Кондратьев

Доказано, что группы $E_7(2)$ и $E_7(3)$ распознаются по графу простых чисел. Как следствие, завершено положительное решение проблемы В. Д. Мазурова о том, что любая конечная простая группа, граф простых чисел которой имеет по крайней мере три компоненты связности, либо распознаваема по спектру, либо изоморфна A_6.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спектр, граф простых чисел, распознавание по спектру или по графу простых чисел.

A. S. Kondrat'ev. Recognizability of groups $E_7(2)$ and $E_7(3)$ by prime graph.

It is proved that the groups $E_7(2)$ and $E_7(3)$ are recognized by prime graph. As corollary, it is completed the positive solution of the Mazurov's problem that every finite group whose the prime graph has at least three connected components is either reconizable by spectrum or isomorphic to A_6.

Keywords: finite group, simple group, spectrum, prime graph, recognition by spectrum or by prime graph.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля (см. [48, теорема A]). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [48] и автора [11]. Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в теории групп.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [16]) или по графу простых чисел.

Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру* (соответственно *графу простых чисел*), если она определяется с точностью до изоморфизма в классе конечных групп своим спектром (соответственно графом простых чисел). Ясно, что из распознаваемости конечной групп по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру. Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или графу простых чисел заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости (которое было введено автором в [1]), более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой* по спектру (соответственно графу простых чисел), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

В двух работах О. А. Алексеевой и автора [2; 3] была доказана квазираспознаваемость по спектру конечных простых групп, отличных от группы A_6, граф Грюнберга — Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности. Известно, что группа A_6 не квазираспознаваема по спектру. В [16] В. Д. Мазуров поставил следующий вопрос: *верно ли, что любая конечная простая группа G с условием $s(G) \geq 3$, не изоморфная A_6, распознаваема по спектру?*

В работах разных авторов, начиная с 1983 г. (см. [2–5; 9; 10; 12–15; 17; 18; 22–24; 26; 27; 30–46]), был получен положительный ответ на этот вопрос для всех конечных простых групп G с условием $s(G) \geq 3$, кроме исключительных групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$.

В данной работе делается завершающий шаг положительного ответа на вопрос В. Д. Мазурова. Этот шаг вытекает из следующего более сильного результата.

Теорема. *Группы $E_7(2)$ и $E_7(3)$ распознаваемы по графу простых чисел.*

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [19; 20; 28]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p, $\pi(n)$ и $\tau(n)$ обозначаются соответственно p-часть числа n, множество всех простых делителей числа n и множество всех простых чисел s таких, что $n/2 < s \leq n$.

Пусть G — конечная группа. Ее спектр $\omega(G)$ частично упорядочен относительно делимости и однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных элементов. Обозначим множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Положим $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\mu_i(G) = \{n \in \mu(G) \mid \pi(n) \subseteq \pi_i(G)\}$ для $1 \leq i \leq s(G)$.

Множество попарно не смежных вершин графа называется его *кокликой*. Обозначим через $t(G)$ наибольшую из мощностей коклик графа $\Gamma(G)$, а через $t(r, G)$ — наибольшую из мощностей коклик графа $\Gamma(G)$, содержащих простое число r.

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Лемма 1 (теорема Грюнберга — Кегеля [48, Theorem A]). *Для группы G с несвязным графом $\Gamma(G)$ верно одно из следующих утверждений*:

(а) *G — группа Фробениуса*;

(б) *G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно*;

(в) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \leq A \leq \mathrm{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leq s(P)$ и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 2 [11; 48; 13, лемма 4]. *Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Тогда*

(а) *$|\mu_i(P)| = 1$ для $i > 1$, ниже $n_i(P)$ обозначает единственный элемент из $\mu_i(P)$ для $i > 1$;*

(б) *P и $n_i(P)$ для $2 \leq i \leq s(P)$ и $s(P) \geq 3$ указаны в приведенной ниже таблице.*

Из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, не изоморфная группе Фробениуса или 2-фробениусовой группе, и P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда для каждого $i \in \{2, \dots, s(G)\}$ существует $j \in \{2, \dots, s(P)\}$ такое, что $n_i(G) = n_j(P)$.*

Лемма 4 (теорема Васильева [6]). *Пусть G — конечная группа, для которой $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда G является расширением разрешимой группы K посредством группы A*

такой, что $Inn(P) \le A \le \mathrm{Aut}(P)$, *где* P — *простая неабелева группа с условием* $t(P) \ge t(G)-1$. *Кроме того, верно одно из следующих утверждений*:

(а) P *изоморфна* A_7 *или* $L_2(q)$ *для некоторого нечетного числа* q *и* $t(P)=t(2,P)=3$;

(б) *для каждого простого числа* $r \in \pi(G)$, *не смежного с* 2 *в* $\mathrm{GK}(G)$, *силовская* r-*подгруппа группы* G *изоморфна силовской* r-*подгруппе группы* P *и, в частности*, $t(2,P) \ge t(2,G)$.

Лемма 5 [7; 8]. *Пусть* P — *конечная простая группа с* $s(P) \ge 3$. *Тогда ее параметры* $t(P)$ *и* $t(2,P)$ *такие, как в таблице.*

Лемма 6 (теорема Жигмонди [21; 49]). *Пусть* $q \ge 2$ *и* $n \ge 3$ — *натуральные числа. Если* $(q,n) \ne (2,6)$, *то существует простое число, делящее* q^n-1 *и не делящее* q^i-1 *при любом натуральном* $i<n$.

Параметры простых групп P с $s(P) \ge 3$

P	Ограничения на P	$t(P)$	$t(2,P)$	$n_2(P),\dots,n_{s(P)}(P)$
A_n	$n>6$, n и $n-2$ просты	$\lvert\tau(n)\rvert+1$	3	$n,\ n-2$
$A_1(q)$	$3<q\equiv\varepsilon 1 \pmod 4$, $\varepsilon=\pm$	3	3	$char(GF(q)),\ (q+\varepsilon 1)/2$
$A_1(q)$	$q>2$, q четно	3	3	$q-1,\ q+1$
${}^2A_5(2)$		3	3	$7,\ 11$
${}^2D_p(3)$	$p=2^m+1\ge 3$, p просто	$[(3p+4)/4]$	2	$(3^{p-1}+1)/2,\ (3^p+1)/4$
$G_2(q)$	$q\equiv 0 \pmod 3$	3	3	$q^2-q+1,\ q^2+q+1$
${}^2G_2(q)$	$q=3^{2m+1}>3$	5	3	$q-\sqrt{3q}+1,\ q+\sqrt{3q}+1$
$F_4(2)$		4	3	$13, 17$
$F_4(q)$	$q>2$ четно	5	3	$q^4-q^2+1,\ q^4+1$
${}^2F_4(8)$		4	4	$37,\ 109$
${}^2F_4(q)$	$q=2^{2m+1}>8$	5	4	$q^2-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1,$ $q^2+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1$
$E_7(2)$		8	5	$73,\ 127$
$E_7(3)$		8	3	$757,\ 1093$
M_{11}		3	3	$5,\ 11$
M_{23}		4	4	$11,\ 23$
M_{24}		4	3	$11,\ 23$
J_3		3	3	$17,\ 19$
HiS		4	3	$7,\ 11$
Suz		4	3	$11,\ 13$
Co_2		4	3	$11,\ 23$
Fi_{23}		5	3	$17,\ 23$
F_3		5	4	$19,\ 31$
F_2		8	3	$31,\ 47$
$A_2(4)$		4	4	$3,\ 5,\ 7$
${}^2B_2(q)$	$q=2^{2m+1}>3$	4	4	$q-1,\ q-\sqrt{3q}+1,\ q+\sqrt{3q}+1$
${}^2E_6(2)$		5	4	$13,\ 17,\ 19$
$E_8(q)$	$q\equiv 2,3 \pmod 4$	12	5	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1},\ q^8-q^4+1,\ \frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$
M_{22}		4	4	$5,\ 7,\ 11$
J_1		4	4	$7,\ 11,\ 19$
$O'N$		5	4	$11,\ 19,\ 31$
LyS		6	4	$31,\ 37,\ 67$
Fi'_{24}		6	4	$17,\ 23,\ 29$
F_1		11	5	$41,\ 59,\ 71$
$E_8(q)$	$q\equiv 0,1,4 \pmod 5$	12	5	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1},\ \frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1},\ q^8-q^4+1,\ \frac{q^{10}+1}{q^2+1}$
J_4		7	6	$23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 43$

В обозначениях леммы 6 простое число, делящее q^n-1 и не делящее q^i-1 при любом натуральном $i<n$, называется *примитивным простым делителем* числа q^n-1, а множество всех примитивных простых делителей числа q^n-1 обозначается через $R_n(q)$. В рассматриваемом нами случае $q\in\{2,3\}$.

Лемма 7 (лемма Мазурова [14, лемма 1]). *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|,|N|)=1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C|\in\omega(G)$ для некоторого $s\in\pi(N)$.*

2. Доказательство теоремы

Пусть $L=E_7(q)$, где $q\in\{2,3\}$. Тогда по [20] множество $\pi(L)$ равно $\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,43,73,127\}$ при $q=2$ и $\{2,3,5,7,11,13,17,19,37,41,61,73,547,757,1093\}$ при $q=3$. Ввиду леммы 2 имеем $s(L)=3$ и множество $\{n_2(L),n_3(L)\}$ равно $\{73,127\}$ при $q=2$ и $\{757,1093\}$ при $q=3$. Ввиду леммы 5 имеем $t(L)=8$, $t(2,L)$ равно 5 при $q=2$ и 3 при $q=3$. Ввиду [7, табл. 5, 7] граф $\Gamma(L)$ имеет коклику $\{2,r_7,r_{14},r_9,r_{18}\}$ при $q=2$ и $\{2,r_7,r_9\}$ при $q=3$, где $r_i\in R_i(q)$. Поэтому такой кокликой является множество $\{2,19,43,73,127\}$ при $q=2$ и $\{2,757,1093\}$ при $q=3$.

Докажем сначала квазираспознаваемость группы L по графу простых чисел. Пусть G — конечная группа с условием $\Gamma(G)=\Gamma(L)$ и $N=F(G)$. Положим $\overline{G}=G/N$. В силу лемм 1, 2 и 3 имеем $\mathrm{Inn}(P)\trianglelefteq\overline{G}\le\mathrm{Aut}(P)$, где P — конечная простая группа с условиями

$$s(P)\ge 3,\quad \pi(N)\cup\pi(\bar{G}/\mathrm{Inn}(P))\subseteq\pi_1(G)\quad\text{и}\quad \{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{n_i(P)\mid\ 2\le i\le s(P)\}.\tag{2.1}$$

Поскольку числа $n_2(L)$ и $n_3(L)$ просты, множество $\{n_2(G),n_3(G)\}$ равно $\{73^m,127^n\}$ при $q=2$ и $\{757^m,1093^n\}$ при $q=3$, где m и n — некоторые натуральные числа.

По условию $t(G)=t(L)\ge 3$ и $t(2,G)=t(2,L)\ge 2$, следовательно, ввиду леммы 4 имеем

$$t(P)\ge t(L)-1=7\quad\text{и}\quad t(2,P)\ge t(2,L).\tag{2.2}$$

Ввиду таблицы и леммы 5 группа P изоморфна одной из следующих групп: A_p, где $p\ge 7$ и $p-2$ — простые числа; ${}^2D_p(3)$, где $p=2^m+1\ge 3$ — простое число; $E_7(2)$; $E_7(3)$; $E_8(t)$, где t — некоторая степень простого числа; F_2; F_1; J_4. Далее рассматриваются все эти возможности для P.

Пусть $P\cong A_p$, где $p\ge 7$ и $p-2$ — простые числа. Если $q=2$, то ввиду условия (2.1) $\{73^m,127^n\}=\{p,p-2\}$, что невозможно. Если $q=3$, то $\{757^m,1093^n\}=\{p,p-2\}$, что невозможно.

Пусть $P\cong{}^2D_p(3)$, где $p=2^m+1\ge 3$ — простое число. Ввиду леммы 5 и условия (2.2) $t(P)=[(3p+4)/4]\ge t(L)-1=7$ и $t(2,P)=3\ge t(2,L)$, следовательно, $p\ge 17$ и $q=3$. Поскольку тогда $|\pi(G)|=|\pi(L)|=15$, имеем $[(3p+4)/4]=t(P)\le|\pi(G)|=15$ и, следовательно, $p=17$. Поэтому $\{757^m,1093^n\}=\{(3^{16}+1)/2,(3^{17}+1)/4\}=\{21523361,32285041\}$. Но числа 21523361 и 32285041 не делятся на 757 и 1093; противоречие.

Пусть $P\cong E_8(t)$. Ввиду [7; 8] $t(P)=12$ и граф $\Gamma(L)$ имеет коклику $\{r_5,r_7,r_8,r_9,r_{10},r_{12},r_{14},r_{15},r_{18},r_{20},r_{24},r_{30}\}$, где $r_i\in R_i(t)$. Числа из этой коклики взаимно просты с делителем $t(t^3-1)(t^4-1)$ числа $|P|$. Но по лемме 6 число $t(t^3-1)(t^4-1)$ делится по крайней мере на 4 попарно различных простых числа. Поэтому $|\pi(P)|\ge 12+4=16$. Но $\pi(P)\subseteq\pi(G)$ и $|\pi(G)|=|\pi(L)|\le 15$; противоречие.

Если $P\cong F_2$, то $\{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{31,47\}$, что невозможно.

Если $P\cong F_1$, то $\{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{41,59,71\}$, что невозможно.

Если $P\cong J_4$, то $\{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{23,29,31,37,43\}$, что невозможно.

Итак, группа P изоморфна $E_7(2)$ или $E_7(3)$. Поскольку $\pi(E_7(2))\ne\pi(E_7(3))$, $P\cong L$. Квазираспознаваемость по графу простых чисел группы L доказана.

Предположим, что $N = F(G) \neq 1$. Ввиду леммы 1 достаточно рассматривать случай, когда N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p из $\pi_1(G)$ и P действует точно и неприводимо на N.

Предположим, что $p \neq q$.

Пусть $q = 2$. Согласно [20] в P существует параболическая максимальная подгруппа R вида $R = U : S$, где $|U| = 2^{42}$ и $S \cong L_7(2)$. В S существует циклическая подгруппа $\langle x \rangle$ простого порядка 127 (цикл Зингера), образующего компоненту связности в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $U : \langle x \rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя к группе $NU\langle x \rangle$ лемму 7, получим, что $127p \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $q = 3$. В P существует параболическая максимальная подгруппа R, полученная выбрасыванием последней (концевой) вершины из схемы Дынкина для P. Тогда R имеет вид $R = U : S$, где $|U| = 3^{27}$ и S' — квазипростая группа лиева типа $E_6(3)$. В S' существует циклическая подгруппа $\langle x \rangle$ простого порядка 757, образующего компоненту связности в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $U : \langle x \rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя к группе $NU\langle x \rangle$ лемму 7, получим, что $757p \in \omega(G)$; противоречие.

Таким образом, $p = q$.

Если $q = 3$, то по [29, теорема 1.3] каждый элемент из P фиксирует некоторый неединичный элемент из N, что противоречит несвязности графа $\Gamma(G)$.

Пусть $q = 2$. Ввиду [20] дополнение Леви параболической максимальной подгруппы группы P, полученной выбрасыванием последней (концевой) вершины из схемы Дынкина для P, изоморфно $E_6(2)$ и поэтому содержит элемент порядка 73. Согласно [47, следствие 5.1] этот элемент фиксирует некоторый неединичный элемент из N. Но это противоречит тому, что вершины 73 и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$.

Итак, $N = 1$ и $G = \overline{G}$.

Предположим, что $\mathrm{Inn}(P) < G$. Тогда ввиду [20, Table 5] $q = 3$ и $G \cong \mathrm{Aut}(E_7(3)) \cong E_7(3) : 2$. Группа G изоморфна группе $C_X(\sigma)$, где X — связная простая присоединенная линейная алгебраическая группа типа E_7 над алгебраически замкнутым полем характеристики 3 и σ — эндоморфизм Стейнберга группы X (см. [28, теорема 6.2.2(g)]). Согласно [25, табл. 3 и разд. 10] в G есть абелева подгруппа (максимальный тор типа $E_7(a_1)$) порядка $3^7 - 1 = 2 \cdot 1093$; противоречие с тем, что вершины 1093 и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость некоторых конечных простых групп по множеству порядков элементов // Укр. мат. конгр. 2001. Алгебра і теор. чисел. Секція 1: Тез. доп. Киев, 2001. С. 4.
2. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 1003–1008.
3. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
4. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Распознаваемость по спектру групп ${}^2D_p(3)$ для нечетного простого числа p // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 3–11.
5. **Васильев А.В.** Распознаваемость групп $G_2(3^n)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 130–142.
6. **Васильев А.В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
8. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
9. Распознавание конечных простых групп $F_4(2^m)$ по спектру / А.В. Васильев, М.А. Гречкосеева, В.Д. Мазуров, Х.П. Чао, Г.Ю. Чен, В.Дж. Ши // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1256–1262.

10. **Заварницин А.В.** Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r+1$ и $r+2$ для простого r и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 648-661.
11. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
12. **Кондратьев А.С.** Распознаваемость по спектру групп $E_8(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 182–184.
13. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 360–371.
14. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
15. **Мазуров В.Д.** Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
16. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138.
17. **Мазуров В.Д., Су М.Ч., Чао Х.П.** Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.
18. **An J.B., Shi W.J.** The characterization of finite simple groups with no elements of order six // Commun. Algebra. 2000. Vol. 28, no. 7. P. 3351–3358.
19. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
20. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
21. **Bang A.S.** Talteoretiske undersølgelser // Tidsskrift. Math. 1886. Vol. 5, no. 4. P. 70–80, 130–137.
22. **Brandl R., Shi W.J.** Finite groups whose element orders are consecutive integers // J. Algebra. 1991. Vol. 143, no. 2. P. 388–400.
23. **Brandl R., Shi W.J.** A characterization of finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ricerche di Mat. 1993. Vol. 42, no. 1. P. 193–198.
24. **Brandl R., Shi W.J.** The characterization of $PSL(2,q)$ by its element orders // J. Algebra. 1994. Vol. 163, no. 1. P. 109–114.
25. **Carter R.W.** Conjugacy classes in the Weyl group // Compositio Mathematica. 1972. Vol. 25, no. 1. P. 1–59.
26. **Darafsheh M.R., Moghaddamfar A.R.** A characterization of some finite groups by their element orders // Algebra Colloq. 2000. Vol. 7, no. 4. P. 467–476.
27. **Deng H.W., Shi W.J.** The characterization of Ree groups ${}^2F_4(q)$ by their element orders // J. Algebra. 1999. Vol. 217, no. 1. P. 180–187.
28. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40, no. 3).
29. **Guralnik R.M., Tiep P.H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6. P. 271–310.
30. **Li H.L., Shi W.J.** A characteristic property of some sporadic simple groups // Chinese Ann. Math. 1993. Vol. 14A, no. 2. P. 144–151 (in Chinese).
31. **Lipschutz S., Shi W.J.** Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Progress in Natural Sci. 2000. Vol. 10, no. 1. P. 11–21.
32. **Mazurov V.D., Shi W.J.** A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. Vol. 5, no. 3. P. 285–288.
33. **Praeger C. E., Shi W.J.** A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra. 1994. Vol. 22, no. 5. P. 1507–1530.
34. **Shi W.J.** A new characterization of some projective special linear groups and the finite groups in which every element has prime order or order $2p$ // J. Southwest-China Teachers University (N.S.). 1983. Vol. 8, no. 1. P. 23–28 (in Chinese).
35. **Shi W.J.** A characteristic property of $PSL_2(7)$ // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1984. Vol. 36, no. 3. P. 354–356.
36. **Shi W.J.** A characterization of some $PSL_2(q)$ // J. Southwest-China Teachers University (N.S.). 1985. Vol. 10, no. 2. P. 25–32 (in Chinese).
37. **Shi W.J.** A characteristic property of A_5 // J. Southwest-China Teachers University (N.S.). 1986. Vol. 11, no. 3. P. 11–14 (in Chinese).
38. **Shi W.J.** A characteristic property of A_8 // Acta Mathematica Sinica (N.S.). 1987. Vol. 3, No. 1. P. 92–96.

39. **Shi W.J.** A characteristic property of J_1 and $PSL_2(2^n)$ // Adv. in Math. 1987. Vol. 16. P. 397–401 (in Chinese).
40. **Shi W.J.** A characteristic property of Mathieu groups // Chinese Ann. Math. 1988. Vol. 9A, no. 5. P. 575–580 (in Chinese).
41. **Shi W.J.** A characterization of the Conway simple group Co_2 // J. Math. (PRC). 1989. Vol. 9. P. 171–172.
42. **Shi W.J.** A characterization of the Higman-Sims group // Houston J. Math. 1990. Vol. 16, no. 4. P. 597–602.
43. **Shi W.J.** A characterization of Suzuki simple groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 114, no. 3. P. 589–591.
44. **Shi W.J.** The characterization of the sporadic simple groups by their element orders // Algebra Colloq. 1994. Vol. 1, no. 2. P. 159–166.
45. **Shi W.J., Li H.L.** A characteristic property of M_{12} and $PSU(6,2)$ // Acta Math. Sin. 1989. Vol. 32, no. 6. P. 758–764 (in Chinese).
46. **Shi W.J., Yang W.Z.** A new characterization of A_5 and finite groups in which every nonidentity element has prime order // J. Southwest-China Teachers College. Ser. B. 1984. Vol. 1. P. 36–40 (in Chinese).
47. **Suprunenko I.D., Zalesski A.E.** Fixed vectors for elements in modules for algebraic groups // Intern. J. Algebra Comput. 2007. Vol. 17, no. 5-6. P. 1249–1261.
48. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
49. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, no. 1. P. 265–284.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 18.02.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.542.5

О ГЛАВНЫХ ФАКТОРАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ $^2E_6(q^2)$ [1]

В. В. Кораблева

Для конечной простой группы скрученного лиева типа $^2E_6$ уточняется описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал. Результаты представлены в виде теоремы, в которой для каждой параболической максимальной подгруппы группы $^2E_6(q^2)$ даются фрагменты главных рядов, входящие в унипотентный радикал этой параболической подгруппы. Приводится таблица, в которой указываются порождающие элементы и порядки соответствующих главных факторов.

Ключевые слова: конечная группа лиева типа, параболическая подгруппа, главный фактор.

V. V. Korableva. On chief factors of parabolic maximal subgroups of the groups $^2E_6(q^2)$.

For a finite simple group of twisted Lie type $^2E_6$, the description of chief factors of parabolic maximal subgroups contained in its unipotent radical is refined. The results are presented as a theorem, in which, for every parabolic maximal subgroup of the group $^2E_6(q^2)$, fragments of chief series contained in the unipotent radical of this parabolic subgroup are given. Generating elements and orders of the corresponding chief factors are presented in a table.

Keywords: finite group of Lie type, parabolic subgroup, chief factor.

Введение

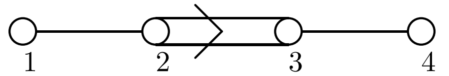
Одной из фундаментальных задач теории групп является изучение подгруппового строения данной группы. Группы лиева типа составляют основной массив конечных простых групп. Изучение унипотентных подгрупп группы лиева типа является ключом в понимании ее строения и свойств. В предыдущей работе автора [1] было получено уточненное описание главных факторов параболических максимальных подгрупп, входящих в унипотентный радикал, для всех групп нормального лиева типа, за исключением специальных групп (определение ниже). В данной работе продолжаются исследования в этом направлении и рассматривается скрученная группа $^2E_6(q^2)$.

Пусть G — группа Шевалле над полем K характеристики p и $P = UL$ — параболическая подгруппа в G, где U — унипотентный радикал и L — дополнение Леви в P. Будем говорить, что группа G *специальная*, если $p = 2$ для групп типа B_l, C_l, F_4 и $p \leqslant 3$ для групп типа G_2. Из результатов работы [2] следует, что для неспециальных групп G факторы нижнего центрального ряда группы U являются вполне приводимыми KL-модулями и разложимы в прямое произведение главных факторов группы P. Число этих факторов не зависит от поля K, а зависит только от лиева типа группы G.

В настоящей работе автор уточняет описание главных факторов каждой параболической максимальной подгруппы для конечной простой группы $^2E_6(q^2)$, входящих в унипотентный радикал. Эти главные факторы являются неприводимыми $GF(q)L$-модулями или $GF(q^2)L$-модулями. Доказана следующая теорема.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13–01–00469) и лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант Правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Теорема. *Пусть $G = {}^2E_6(q^2)$ — конечная простая скрученная группа лиева типа и P_k — параболическая максимальная подгруппа группы G, полученная удалением k-й вершины диаграммы Дынкина типа F_4 в стандартном упорядочении вершин*



Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) *Фрагмент главного ряда группы P_k, входящий в ее унипотентный радикал U, имеет вид*

(*a*) $U = U_1 > U_2 > 1$ *при* $k = 1$ *и* $k = 4$,

(*b*) $U = U_1 > U_2 > U_3 > 1$ *при* $k = 2$,

(*c*) $U = U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > 1$ *при* $k = 3$.

(2) *Порядки главных факторов соответствующих главных рядов содержатся в следующем списке*:

(*a*) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{20}$, $\mid U_2 \mid = q$ *при* $k = 1$;

(*b*) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{18}$, $\mid U_2/U_3 \mid = q^9$, $\mid U_3 \mid = q^2$ *при* $k = 2$;

(*c*) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{12}$, $\mid U_2/U_3 \mid = q^{12}$, $\mid U_3/U_4 \mid = q^4$, $\mid U_4 \mid = q^3$ *при* $k = 3$;

(*d*) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{16}$, $\mid U_2 \mid = q^8$ *при* $k = 4$.

Полезные следствия из доказательства этой теоремы составляют содержание табл. 1, 2, которые приведены в конце работы.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Обозначения и терминология, связанные с теорией представлений групп, алгебраическими группами и конечными группами лиева типа, в основном стандартны, их можно найти в [3–7].

Зафиксируем поле K и присоединенную группу Шевалле $G = G(K)$. Пусть Φ — система корней группы G, π — множество простых корней и Φ^+ — соответствующее множество положительных корней в Φ. Известно, что $G = \langle x_\gamma(t) \mid t \in K, \gamma \in \Phi\rangle$ и корневая подгруппа $X_\gamma = \{x_\gamma(t) \mid t \in K\}$, соответствующая корню $\gamma \in \Phi$, изоморфна аддитивной группе поля K. Для любого подмножества простых корней J из π обозначим через Φ_J множество корней из Φ, натянутых на J, и положим $\Phi_J^+ = \Phi^+ \cap \Phi_J$. Зафиксируем параболическую подгруппу $P = P_J$, соответствующую подмножеству J из π. Тогда P — стандартная параболическая подгруппа в G, соответствующая системе корней Φ_J. Известно разложение Леви подгруппы P: $P = UL$, где $U = \langle X_\gamma \mid \gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+\rangle$ — унипотентный радикал, L — дополнение Леви в P. Известно, что $U = \prod X_\gamma$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем корням $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+$. Обозначим j-й член нижнего центрального ряда группы U через $U^{(j)}$, где $j \geqslant 1$ и $U = U^{(1)}$.

Для любого $\gamma \in \Phi^+$ запишем $\gamma = \gamma_J + \gamma_{J'}$, где $\gamma_J = \sum\limits_{r \in J} c_r r$ и $\gamma_{J'} = \sum\limits_{r \in \pi\setminus J} d_r r$ $(0 \leqslant c_r, d_r \in \mathbb{Z})$. Число $ht(\gamma) = \sum\limits_{r\in J} c_r + \sum\limits_{r \in \pi\setminus J} d_r$ называется *высотой* корня γ. Следуя [2], число $level(\gamma) = \sum\limits_{r\in\pi\setminus J} d_r$ назовем *уровнем* корня γ, а величину $shape(\gamma) = \gamma_{J'}$ — *шейпом* корня γ. Для любого $j \geqslant 1$ положим $U_j = \langle X_\gamma \mid \gamma \in \Phi^+, level(\gamma) \geqslant j\rangle$.

Из коммутаторной формулы Шевалле следует, что каждая подгруппа U_j является нормальной в P, а фактор-группа U_j/U_{j+1} изоморфна $\prod X_\gamma$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем положительным корням γ, для которых $level(\gamma) = j$.

Для всех корней $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+$, у которых $level(\gamma) = j$ и $shape(\gamma) = S$, положим

$$V_S = \Bigg(\prod_{\substack{shape(\gamma)=S,\\ level(\gamma)=j}} X_\gamma \Bigg) U_{j+1}/U_{j+1} \text{ и запишем } U_j/U_{j+1} = \prod V_S,$$

где S пробегает множество различных шейпов корней уровня j из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$.

Для любого $j \geqslant 1$ группа L действует сопряжениями на фактор-группе U_j/U_{j+1}. Если $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J$ и $level(\gamma) = j$, то положим $cx_\gamma(t)U_{j+1} = x_\gamma(ct)U_{j+1}$ для элементов $c, t \in K$. Таким образом, фактор-группа U_j/U_{j+1} становится KL-модулем. С помощью коммутаторной формулы Шевалле легко получается следующая лемма.

Лемма 1. (1) *Векторное пространство V_S над полем K изоморфно внешней прямой сумме корневых подгрупп X_γ для которых $shape(\gamma) = S$.*

(2) *V_S нормализуется группой L и является KL-подмодулем модуля U_j/U_{j+1}.*

Если A и B — нормальные подгруппы группы P, B — подгруппа A и фактор-группа A/B — минимальная нормальная подгруппа в P/B, то A/B называется *главным фактором* группы P.

Лемма 2 [2, теорема 2]. *Пусть $G = G(K)$ — неспециальная группа Шевалле над полем K, подгруппы $P = UL$, U_j, $U^{(j)}$ и V_S для $j \geqslant 1$ такие, как определены выше. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *$U_j = U^{(j)}$ для любого $j \geqslant 1$.*

(2) *Если $|K| > 5$, S и S' — различные шейпы, то V_S и $V_{S'}$ являются неэквивалентными KL-модулями.*

(3) *Для каждого $j \geqslant 1$ модуль U_j/U_{j+1} изоморфен прямой сумме неприводимых модулей V_S, где сумма берется в произвольном порядке по всем различным шейпам S корней уровня j из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$. В частности, U_j/U_{j+1} — вполне приводимый KL-модуль.*

(4) *V_S является главным фактором группы P для любого шейпа S.*

Группы лиева типа имеют полезную интерпретацию в виде подгрупп линейных алгебраических групп. Пусть $\overline{G} = G(\overline{GF(p)})$, где $\overline{GF(p)}$ — алгебраическое замыкание конечного поля простого порядка p. Рассмотрим $\overline{G}$ как алгебраическую группу присоединенного типа, и пусть она неспециальна. Автоморфизм поля $\overline{GF(p)}$ может быть задан как отображение $x \mapsto x^{p^a}$ для $x \in \overline{GF(p)}$ и подходящего натурального a. Положим $q = p^a$ и обозначим соответствующий полевой автоморфизм группы $\overline{G}$ через q. Обозначим через σ эндоморфизм группы $\overline{G}$ с конечным централизатором $\overline{G}_\sigma = \{g \in \overline{G} \mid g^\sigma = g\}$ (образ элемента g при отображении σ обозначаем через g^σ). Известно (см. [8]), что $\sigma = q\tau$, где τ — графовый автоморфизм группы $\overline{G}$ (возможно, тривиальный). Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — подгруппа из $\overline{G}_\sigma$, порожденная всеми ее p-элементами. Тогда G является конечной группой лиева типа. В случае, когда автоморфизм τ является тривиальным, группа G называется *нескрученной* или *расщепленной*. В остальных случаях группа G называется *скрученной*.

Далее будем различать обозначения подгрупп и элементов алгебраических групп, их отмечаем чертой сверху, а соответствующие им объекты конечных групп пишем без черты. В группе $\overline{G}$ выбираем σ-инвариантную параболическую подгруппу $\overline{P} = \overline{U}\,\overline{L}$, где $\overline{U}$ — унипотентный радикал и $\overline{L}$ — дополнение Леви в $\overline{P}$. Тогда $P = G \cap \overline{P}_\sigma$ является параболической подгруппой в группе G с унипотентным радикалом $U = \overline{U}_\sigma$ и дополнением Леви $L = G \cap \overline{L}_\sigma$. Положим $L_0 = O^{p'}(L)$. Если группа G нескрученная, то типы системы корней групп G и $\overline{G}$ совпадают. Заметим, что σ действует на каждой подгруппе $\overline{U}_j$ $(j \geqslant 1)$ и переставляет слагаемые $\overline{V}_S$ в фактор-группе $\overline{U}_j/\overline{U}_{j+1}$. При доказательстве нашей теоремы существенно используются следующие две леммы.

Лемма 3 [2, леммы 5, 6]. (1) *$(\overline{U}_j/\overline{U}_{j+1})_\sigma = (\overline{U}_j)_\sigma \overline{U}_{j+1}/\overline{U}_{j+1}$ для всех $j \geqslant 1$. В частности, фактор-модули $(\overline{U}_j)_\sigma/(\overline{U}_{j+1})_\sigma$ и $(\overline{U}_j/\overline{U}_{j+1})_\sigma$ являются L-изоморфными.*

(2) *Если группа $\overline{G}$ неспециальная, то $(\overline{U}^{(j)})_\sigma = (\overline{U}_\sigma)^{(j)}$ для каждого $j \geqslant 1$.*

Лемма 4 [2, лемма 7]. *Пусть группа $\overline{G}$ неспециальная и S – фиксированный шейп корней из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Если $\overline{V}_S^\sigma = \overline{V}_S$, то $(\overline{V}_S)_\sigma$ является абсолютно неприводимым $GF(q)L_0$-модулем.*

(2) *Если $\overline{V}_S^\sigma \neq \overline{V}_S$ и $\mid \tau \mid = 2$, то $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma)_\sigma$ является абсолютно неприводимым $GF(q^2)L_0$-модулем.*

Пусть корни шейпа S имеют уровень j. Если $\overline{V}_S^\sigma \neq \overline{V}_S$ и $\mid \tau \mid = 2$, то $\overline{V}_S^{\sigma^2} = \overline{V}_S$ и σ^2 индуцирует $GF(q^2)$-линейное преобразование пространства U_j/U_{j+1}. Аддитивная группа $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma)_\sigma$ порождается элементами вида $\overline{x}_\gamma(t)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\gamma^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1}$, где t пробегает поле $GF(q^2)$ и ρ — биекция системы корней Φ, соответствующая графовому автоморфизму τ. Для элементов $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J$ уровня j и для $c, t \in GF(q^2)$ положим

$$c(\overline{x}_\gamma(t)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\gamma^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1}) = \overline{x}_\gamma(ct)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\gamma^\rho}(c^q t^q)\overline{U}_{j+1}.$$

Таким образом, группа $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma)_\sigma \cong (\overline{V}_S)_{\sigma^2}$ становится $GF(q^2)L$-модулем.

Как частный случай [2, теорема 3] получается следующее

Предложение. *Пусть $G = {}^2E_6(q^2)$ — конечная скрученная группа лиева типа, соответствующая эндоморфизму $q\tau$ простой алгебраической группы типа E_6, $P = UL$ — параболическая подгруппа в G с унипотентным радикалом U и дополнением Леви L в P. Тогда факторы нижнего центрального ряда группы U являются прямыми суммами главных факторов группы P, каждый из которых есть $GF(q)L$-модуль или $GF(q^2)L$-модуль.*

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим систему корней Φ типа E_6. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 — ее простые корни, а диаграмма Дынкина имеет вид, представленный на рис. 1. Обозначив через $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$ произвольный корень $\sum_{i=1}^6 c_i p_i$ из Φ ($c_i \in \mathbb{Z}$), получим множество положительных корней Φ^+, состоящее из элементов

$$100000, 010000, 001000, 000100, 000010, 000001, 101000, 010100, 001100, 000110, 000011, 101100,$$
$$011100, 010110, 001110, 000111, 111100, 101110, 011110, 010111, 001111, 111110, 101111, 011210,$$
$$011111, 111210, 111111, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221, 112321, 122321.$$

Существует отображение ρ системы на себя, индуцированное следующей симметрией ее диаграммы Дынкина (см. рис. 2). Обозначим образ корня $\gamma \in \Phi$ при этом отображении через γ^ρ и образ подмножества корней A из Φ — через A^ρ. Любая ρ-орбита множества Φ^+ имеет вид $\{\gamma\}$

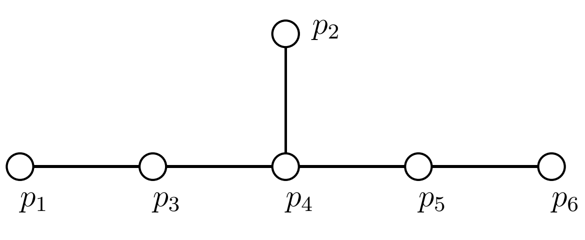


Рис. 1

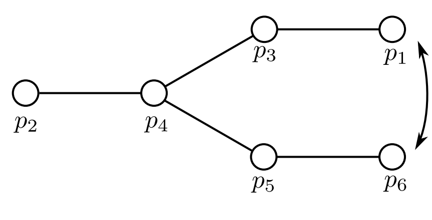


Рис. 2

или $\{\gamma,\gamma^\rho\}$, так как $\rho^2=1$. Укажем эти орбиты:

$$\{010000\},\{000100\},\{010100\},\{001110\},\{011110\},\{101111\},\{011210\},\{111111\},\{111211\},$$
$$\{112221\},\{112321\},\{122321\},\{100000,000001\},\{001000,000010\},\{101000,000011\},$$
$$\{001100,000110\},\{101100,000111\},\{011100,010110\},\{111100,010111\},\{101110,001111\},$$
$$\{111110,011111\},\{111210,011211\},\{112210,011221\},\{111221,112211\}.$$

Далее зафиксируем некоторые обозначения. В конечной группе $E_6(q^2)$ рассмотрим две подгруппы. Первая состоит из элементов $x_\alpha(t)$, где $t\in GF(q)$ и α образует одноэлементную ρ-орбиту множества Φ^+, а вторая — из элементов $x_\beta(t)x_{\beta^\rho}(t^q)$, где $t\in GF(q^2)$ и β является представителем двухэлементной ρ-орбиты множества Φ^+. Первую всегда будем обозначать через X_α, а вторую — через X_β, причем будем записывать эти подгруппы аддитивно, таким образом, $X_\alpha=\{x_\alpha(t)\mid t\in GF(q)\}$ и $X_\beta=\{x_\beta(t)+x_{\beta^\rho}(t^q)\mid t\in GF(q^2)\}$. Корневые подгруппы алгебраической группы $\overline{G}=E_6(\overline{GF(p)})$ всегда обозначаем далее через $\overline{X}_\gamma$ для $\gamma\in\Phi$.

Рассмотрим четыре σ-инвариантные параболические подгруппы $\overline{P}_{J_i}$ в группе $\overline{G}$, соответствующие следующим четырем подсистемам простых корней: $J_1=\{p_1,p_3,p_4,p_5,p_6\}$, $J_2=\{p_1,p_2,p_3,p_5,p_6\}$, $J_3=\{p_1,p_2,p_4,p_6\}$ и $J_4=\{p_2,p_3,p_4,p_5\}$.

Для J_1 множество $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_1}$ состоит из корней 010000, 010100, 011100, 010110, 111100, 011110, 010111, 111110, 011210, 011111, 111210, 111111, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221, 112321, 122321. Корень $122321\in\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_1}$ имеет шейп, равный $2p_2$, а остальные корни из $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_1}$ имеют шейп, равный p_2. Нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U}=\overline{U}_1>\overline{U}_2>1$ и $\overline{U}_1=\prod\overline{X}_\gamma$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем корням $\gamma\in\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_1}$, а $\overline{U}_2=\overline{X}_{122321}$. Представим множество корней $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_1}$ в виде объединения трех непересекающихся подмножеств $A_1=\{010000, 010100, 011110, 011210, 111111, 111211, 112221, 112321, 122321\}$, $B_1=\{011100, 111100, 111110, 111210, 112210, 112211\}$, $B_1^\rho=\{010110, 010111, 011111, 011211, 011221, 111221\}$. Множества A_1 и $B_1\cup B_1^\rho$ являются объединениями одноэлементных и двухэлементных ρ-орбит корней $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_1}$ соответственно. Имеем

$$U=(\overline{U})_\sigma=\langle x_\alpha(t),x_\beta(s)x_{\beta^\rho}(s^q)\mid\alpha\in A_1,\beta\in B_1,t\in GF(q),s\in GF(q^2)\rangle\cong\oplus_{\alpha\in A_1}X_\alpha\oplus_{\beta\in B_1}X_\beta.$$

Так как $\overline{V}^\sigma_{p_2}=(\overline{U}_1/\overline{U}_2)^\sigma=\overline{V}_{p_2}$ и $\overline{V}^\sigma_{2p_2}=(\overline{U}_2)^\sigma=\overline{V}_{2p_2}$, то по лемме 4 модули $(\overline{V}_{p_2})_\sigma$ и $(\overline{V}_{2p_2})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$-модулями. Воспользовавшись леммой 3, найдем их строение. Получаем $(\overline{V}_{p_2})_\sigma=(\overline{U}_1/\overline{U}_2)_\sigma\cong(\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma\cong\oplus_{\alpha\in A_1\setminus\{122321\}}X_\alpha\oplus_{\beta\in B_1}X_\beta$, $(\overline{V}_{2p_2})_\sigma=(\overline{U}_2)_\sigma\cong(\overline{U}_2)_\sigma=(\overline{X}_{122321})_\sigma=X_{122321}=\{x_{122321}(t)\mid t\in GF(q)\}$.

Для J_2 множество $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_2}$ состоит из корней 000100,010100, 001100, 000110, 101100, 011100, 010110, 001110, 000111, 111100, 101110, 011110,010111,001111, 111110, 101111, 011210, 011111, 111210, 111111, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221, 112321, 122321. Укажем шейпы корней из этого множества. Корни 112321, 122321 имеют шейп, равный $3p_4$, и неподвижны при действии ρ, корни 011210, 111210, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221 — шейп, равный $2p_4$, а остальные корни из $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_2}$ — шейп, равный p_4. Нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U}=\overline{U}_1>\overline{U}_2>\overline{U}_3>1$. Так как $(\overline{V}_{p_4})^\sigma=(\overline{U}_1/\overline{U}_2)^\sigma=\overline{V}_{p_4}$, $(\overline{V}_{2p_4})^\sigma=(\overline{U}_2/\overline{U}_3)^\sigma=\overline{V}_{2p_4}$, $\overline{V}^\sigma_{3p_4}=(\overline{U}_3)^\sigma=\overline{V}_{3p_4}$, то по лемме 4 модули $(\overline{V}_{p_4})_\sigma$, $(\overline{V}_{2p_4})_\sigma$ и $(\overline{V}_{3p_4})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$-модулями. Лемма 3 уточняет их строение. Получаем $(\overline{V}_{p_4})_\sigma\cong(\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma\cong\oplus_{\alpha\in C_2}X_\alpha\oplus_{\beta\in D_2}X_\beta$, где $C_2=\{000100, 010100, 001110, 011110, 101111, 111111\}$ и $D_2=\{001100, 101100, 011100, 111100, 101110, 111110\}$. Аналогично $(\overline{V}_{2p_4})_\sigma=(\overline{U}_2/\overline{U}_3)_\sigma\cong(\overline{U}_2)_\sigma/(\overline{U}_3)_\sigma\cong\oplus_{\alpha\in A_2}X_\alpha\oplus_{\beta\in B_2}X_\beta$, где $A_2=\{011210, 111211, 112221\}$ и $B_2=\{111210, 112210, 112211\}$, а $(\overline{V}_{3p_4})_\sigma=(\overline{U}_3)_\sigma\cong(\overline{U}_3)_\sigma\cong X_{112321}\oplus X_{122321}$, где $X_{112321}=\{x_{112321}(t)\mid t\in GF(q)\}$ и $X_{122321}=\{x_{122321}(t)\mid t\in GF(q)\}$.

Рассмотрим $J_3=\{p_1,p_2,p_4,p_6\}$. Представим множество $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_3}$ в виде объединения непересекающихся подмножеств следующим образом: $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_3}=A_3\cup A_3^\rho\cup B_3\cup C_3\cup C_3^\rho\cup D_3$. Корни из множеств $A_3=\{001000, 101000, 001100, 101100, 011100, 111100\}$, $A_3^\rho=\{000010,000110,$

000011,010110, 000111, 010111}, $B_3 = \{$001110, 101110, 011110, 001111, 111110, 101111, 011210, 011111, 111210, 111111, 011211, 111211$\}$, $C_3 = \{112210, 112211\}$, $C_3^\rho = \{011221, 111221\}$, $D_3 = \{112221, 112321, 122321\}$ имеют шейпы, равные p_3,p_5, $p_3 + p_5$,$2p_3 + p_5$, $p_3 + 2p_5$,$2p_3 + 2p_5$ соответственно, причем $B_3^\rho = B_3$ и $D_3^\rho = D_3$. Отметим, что $\overline{V}_{p_5} = \overline{V}^\sigma_{p_3} \neq \overline{V}_{p_3}, \overline{V}_{p_3} = \overline{V}^\sigma_{p_5} \neq \overline{V}_{p_5}, \overline{V}^\sigma_{p_3+p_5} = \overline{V}_{p_3+p_5}, \overline{V}_{p_3+2p_5} = \overline{V}^\sigma_{2p_3+p_5} \neq \overline{V}_{2p_3+p_5}, \overline{V}_{2p_3+p_5} = \overline{V}^\sigma_{p_3+2p_5} \neq \overline{V}_{p_3+2p_5}, \overline{V}^\sigma_{2p_3+2p_5} = \overline{V}_{2p_3+2p_5}$ и нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > \overline{U}_3 > \overline{U}_4 > 1$. По лемме 2 имеем $\overline{U}_1/\overline{U}_2 = \overline{V}_{p_3} \oplus \overline{V}_{p_5}$, $\overline{U}_2/\overline{U}_3 = \overline{V}_{p_3+p_5}$, $\overline{U}_3/\overline{U}_4 = \overline{V}_{2p_3+p_5} \oplus \overline{V}_{p_3+2p_5}$, $\overline{U}_4 = \overline{V}_{2p_3+2p_5}$. Теперь, используя леммы 3 и 4, получаем

$$(\overline{U}_1/\overline{U}_2)_\sigma \cong (\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma \cong (\overline{V}_{p_3} \oplus \overline{V}_{p_5})_\sigma \cong \oplus_{\beta\in A_3} X_\beta,$$

$$(\overline{U}_2/U_3)_\sigma = (\overline{V}_{p_3+p_5})_\sigma \cong \oplus_{\alpha\in B_3^1} X_\alpha \oplus_{\beta\in B_3^2} X_\beta,$$

$$(\overline{U}_3/\overline{U}_4)_\sigma \cong (\overline{U}_3)_\sigma/(\overline{U}_4)_\sigma \cong (\overline{V}_{p_3+2p_5} \oplus \overline{V}_{2p_3+p_5})_\sigma \cong \oplus_{\beta\in C_3} X_\beta,$$

$$(\overline{U}_4)_\sigma = (\overline{V}_{2p_3+2p_5})_\sigma \cong \oplus_{\alpha\in D_3} X_\alpha,$$

где $B_3^1 = \{$001110, 011110, 011210, 101111, 111111, 111211$\}$ и $B_3^2 = \{$101110, 111110, 111210$\}$.

Рассмотрим $J_4 = \{p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Представим множество $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_4}$ в виде объединения непересекающихся подмножеств следующим образом: $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_4} = A_4 \cup A_4^\rho \cup B_4$, где корни из множества $A_4 = \{100000, 101000, 101100, 111100, 101110, 111110, 111210, 112210\}$ имеют шейп, равный p_1, корни из множества $A_4^\rho = \{000001, 000011, 000111, 010111, 001111, 011111, 011211, 011221\}$ — шейп, равный p_6, а корни из множества $B_4 = \{101111, 111111, 111211, 112211, 1111221, 112221, 12321, 122321\}$ — шейп, равный $p_1 + p_6$. Отметим, что $\overline{V}_{p_6} = \overline{V}^\sigma_{p_1} \neq \overline{V}_{p_1}, \overline{V}_{p_1} = \overline{V}^\sigma_{p_6} \neq \overline{V}_{p_6}, \overline{V}^\sigma_{p_1+p_6} = \overline{V}_{p_1+p_6}$ и нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > 1$. По лемме 2 имеем $\overline{U}_1/\overline{U}_2 = \overline{V}_{p_1} \oplus \overline{V}_{p_6} \cong \oplus_{level(\gamma)=1} \overline{X}_\gamma$ и $\overline{U}_2 = \overline{V}_{p_1+p_6} \cong \oplus_{shape(\gamma)=p_1+p_6} \overline{X}_\gamma$. Теперь, используя леммы 3 и 4, получаем $(\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma \cong (\overline{U}_1/\overline{U}_2)_\sigma = (\overline{V}_{p_1} \oplus \overline{V}_{p_6})_\sigma \cong \oplus_{\beta\in A_4} X_\beta$, $(\overline{U}_2)_\sigma = (\overline{V}_{p_1+p_6})_\sigma \cong X_{112211} \oplus_{\alpha\in B_4\setminus\{112211,111221\}} X_\alpha$, где $X_{112211} = \{x_{112211}(t) + x_{111221}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$.

Занесем полученные результаты в табл. 1. Второй и третий столбцы таблицы содержат корни для подгрупп вида X_α и X_β соответственно, являющихся прямыми слагаемыми неприводимого модуля, указанного в первом столбце.

Т а б л и ц а 1

$G = O^{p'}((E_6(\overline{GF(p)}))_\sigma)$		
$(\overline{V}_S)_\sigma \cong \oplus_{\alpha,\beta} X_\alpha \oplus X_\beta$	$X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in GF(q)\}$	$X_\beta = \{x_\beta(t) + x_{\beta^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$
$(\overline{V}_{p_2})_\sigma$	010000, 010100, 011110, 011210, 111111, 111211, 112221, 112321,	011100, 111100, 111110, 111210, 112210, 112211
$(\overline{V}_{2p_2})_\sigma$	122321	—
$(\overline{V}_{p_4})_\sigma$	000100, 010100, 001110, 011110, 101111, 111111	001100, 101100, 011100, 111100, 101110, 111110
$(\overline{V}_{2p_4})_\sigma$	011210, 111211, 112221	111210, 112210, 112211
$(\overline{V}_{3p_4})_\sigma$	112321, 122321	—
$(\overline{V}_{p_3} \oplus \overline{V}_{p_5})_\sigma$	—	001000, 101000, 001100, 101100, 011100, 111100
$(\overline{V}_{p_3+p_5})_\sigma$	001110, 011110, 011210, 101111, 111111, 111211	101110, 111110, 111210
$(\overline{V}_{p_3+2p_5} \oplus \overline{V}_{2p_3+p_5})_\sigma$	—	112210, 112211
$(\overline{V}_{2p_3+2p_5})_\sigma$	112221, 112321, 122321	—
$(\overline{V}_{p_1} \oplus \overline{V}_{p_6})_\sigma$	—	100000, 101000, 101100, 111100, 101110, 111110, 111210, 112210
$(\overline{V}_{p_1+p_6})_\sigma$	101111, 111111, 111211, 112221, 112321, 122321	112211

Таблица 2

$G = {}^2E_6(q^2), V_S \cong \prod_\lambda X^1_\lambda \prod_\mu X^1_\mu, \mid V_S \mid = q^m$			
V_S	$\lambda : X^1_\lambda = \{x_\alpha(t) \mid t \in GF(q)\}$	$\mu : X^1_\mu = \{x_\beta(t)x_{\beta^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$	m
$V_{\tilde{p}_1}$	$1000, 1100, 1120, 1220, 1122, 1222, 1242, 1342$	$1110, 1111, 1121, 1221, 1231, 1232$	20
$V_{2\tilde{p}_1}$	2342	—	1
$V_{\tilde{p}_2}$	$0100, 1100, 0120, 1120, 0122, 1122$	$0110, 0111, 1110, 1111, 0121, 1121$	18
$V_{2\tilde{p}_2}$	$1220, 1222, 1242$	$1221, 1231, 1232$	9
$V_{3\tilde{p}_2}$	$1342, 2342$	$---$	2
$V_{\tilde{p}_3}$	$---$	$0010, 0011, 0110, 0111, 1110, 1111$	12
$V_{2\tilde{p}_3}$	$0120, 1120, 1220, 0122, 1122, 1222$	$0121, 1121, 1221$	12
$V_{3\tilde{p}_3}$	—	$1231, 1232$	4
$V_{4\tilde{p}_3}$	$1242, 1342, 2342$	—	3
$V_{\tilde{p}_4}$	—	$0001, 0011, 0111, 1111, 0121, 1121,$ $1221, 1231$	16
$V_{2\tilde{p}_4}$	$0122, 1122, 1222, 1242, 1342, 2342$	1232	8

Система корней Φ типа E_6 разбивается на сорок восемь классов вида $\{r\}$ или $\{r, r^\rho\}$, где $r \in \Phi$, образующих систему корней $\tilde{\Phi}$ типа F_4. Обозначим эти классы (корни) в $\tilde{\Phi}$ через $\alpha_1\tilde{p}_1 + \alpha_2\tilde{p}_2 + \alpha_3\tilde{p}_3 + \alpha_4\tilde{p}_4$ в соответствии с обозначениями системы корней типа F_4. Выпишем множество $\tilde{\Phi}^+$ классов, соответствующих положительным корням:

$\tilde{p}_1 = \{p_2\}, \tilde{p}_2 = \{p_4\}, \tilde{p}_3 = \{p_3, p_5\}, \tilde{p}_4 = \{p_1, p_6\}, \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \{p_2 + p_4\}$, $\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 = \{p_3 + p_4, p_4 + p_5\}$,
$\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3, p_5 + p_6\}, \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 = \{p_2 + p_3 + p_4, p_2 + p_4 + p_5\}, \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 = \{p_3 + p_4 + p_5\}$,
$\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3 + p_4, p_4 + p_5 + p_6\}$, $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 = \{p_2 + p_3 + p_4 + p_5\}$,
$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4, p_2 + p_4 + p_5 + p_6\}$, $\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 = \{p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5\}$,
$\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3 + p_4 + p_5, p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}$, $\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5, p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 3\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5, p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 3\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6, p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\}$,
$\tilde{p}_1 + 3\tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 2p_5 + p_6\}$,
$2\tilde{p}_1 + 3\tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4 = \{p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 2p_5 + p_6\}$.

Если r корень из Φ, то для классов $C = \{r\}$ первого вида соответствующая корневая подгруппа $X^1_C = \{x_C(t) = x_r(t) \mid t = t^q, t \in GF(q^2)\}$ имеет порядок q, а для классов $C = \{r, r^\rho\}$ второго вида корневая подгруппа $X^1_C = \{x_C(t) = x_r(t)x_{r^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$ имеет порядок q^2. Для составления табл. 2 введем дополнительные обозначения. В скрученной группе ${}^2E_6(q^2)$ подгруппы первого вида будем обозначать через X^1_λ, где $\lambda \in \widetilde{\Phi}$ является одноэлементным классом, а подгруппы второго вида будем обозначать через X^1_μ, где $\mu \in \widetilde{\Phi}$ является двухэлементным классом. Таким образом, в этих обозначениях $X^1_\lambda = \{x_\alpha(t) \mid t \in GF(q)\}$ для $\lambda = \{\alpha\}$, а $X^1_\mu = \{x_\beta(t)x_{\beta^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$ для $\mu = \{\beta, \beta^\rho\}$. Корень $\alpha_1\tilde{p}_1 + \alpha_2\tilde{p}_2 + \alpha_3\tilde{p}_3 + \alpha_4\tilde{p}_4 \in \widetilde{\Phi}$ обозначим для краткости через $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Таблица 1 примет другой вид. В первом столбце табл. 2 укажем главные факторы $V_S = V_{j\tilde{p}_k}$, входящие в унипотентный радикал каждой параболической максимальной подгруппы P_k скрученной группы лиева типа ${}^2E_6(q^2)$. Напомним, что по лемме 1 модуль V_S изоморфен (в аддитивной записи) прямой сумме корневых подгрупп, которые выписываются во втором и третьем столбцах таблицы. Корневые подгруппы параметризуются корнями из системы корней типа F_4, причем подгруппы второго столбца имеют порядок, равный q, а подгруппы из третьего столбца — порядок, равный q^2. Теперь порядки главных факторов легко вычисляются, запишем показатели m их степени q в четвертый столбец.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Алгебра и комбинаторика: тез. докл. Междунар. конф. Екатеринбург, 2013. С. 84–85.
2. **Azad H., Barry M., Seitz G.** On the structure of parabolic subgroup // Comm Algebra. 1990. Vol. 18, no. 2. P. 551–562.
3. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. VII-VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
4. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. L.: John Wiley and Sons, 1972. 332 p.
5. **Carter R.W.** Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters. L.: John Wiley and Sons, 1993. 544 p.
6. **Humphreys J.** Modular representation of finite groups of Lie type. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 233 p.
7. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
8. **Steinberg R.** Endomorphisms of linear algebraic groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1968. 108 p. (Mem. Amer. Math. Soc.; vol. 80.)

Кораблева Вера Владимировна
д-р физ.-мат. наук
Челябинский государственный университет,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: vvk@csu.ru

Поступила 13.03.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 519.172.4

О $K_{1,3}$-СВОБОДНЫХ ГРАФАХ ДЕЗА ДИАМЕТРА БОЛЬШЕ ДВУХ

А. В. Митянина

Графом Деза с параметрами (v, k, b, a) называется регулярный граф на v вершинах степени k такой, что для любых двух его вершин число их общих соседей равно или b, или a. В статье получено описание графов Деза диаметра больше двух, не содержащих в качестве порожденных подграфов $K_{1,3}$.

Ключевые слова: $K_{1,3}$-свободные графы, графы Деза, графы Деза диаметра больше двух.

A. V. Mityanina. On $K_{1,3}$-free Deza graphs with diameter greater than 2.

A Deza graph with parameters (v, k, b, a) is a k-regular graph with v vertices where any two vertices have either a or b common neighbors. We describe $K_{1,3}$-free Deza graphs with diameter greater than 2.

Keywords: $K_{1,3}$-free graphs, Deza graphs, Deza graphs with diameter greater than 2.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [1].

Все рассматриваемые графы являются неориентированными, без петель и кратных ребер. Смежность между вершинами графа u и w будем обозначать через $u \sim w$. *Порожденным подграфом* графа G называется подграф, вершины которого смежны тогда и только тогда, когда они смежны в графе G. Обозначим через $[w]$ множество всех соседей вершины w (а также подграф, порожденный на этом множестве вершин) и назовем $[w]$ *окрестностью вершины* w, а число $|[w]|$ — *степенью вершины* w. Обозначим через $w^\perp$ подграф на множестве вершин $[w] \cup \{w\}$ и назовем $w^\perp$ *замкнутой* окрестностью вершины w. Обозначим через $G_i(w)$ множество вершин, которые находятся в G на расстоянии i от вершины w (подграф графа G, порожденный на этом множестве вершин). Для вершин u и w графа G, находящихся на расстоянии i, обозначим через $b_i(u, w)$ число вершин в пересечении $G_{i+1}(u)$ с $[w]$.

Граф, состоящий из одного просто цикла на n вершинах, будем называть *n-угольником*. *Кубическим* называется регулярный граф степени 3. Полный граф на n вершинах будем называть *n-кликой*.

Раздуванием (inflation) графа G будем называть реберный граф такого графа, который получается из G с помощью замены всех его ребер на пути длины два.

Граф является *реберно регулярным*, если он регулярен и для любых его смежных вершин u и w для некоторого числа λ имеем $|[u] \cap [w]| = \lambda$. Граф является *вполне регулярным*, если он регулярен и для любых различных его вершин u и w для некоторых констант $\lambda \geqslant 0$, $\mu > 0$ имеем

$$|[u] \cap [w]| = \begin{cases} \lambda, \text{ если } d(u, w) = 1; \\ \mu, \text{ если } d(u, w) = 2. \end{cases}$$

Граф является *сильно регулярным*, если он регулярен и для любых различных его вершин u и w для некоторых констант λ, μ имеем $|[u] \cap [w]| = \lambda$, если $u \sim w$, и $|[u] \cap [w]| = \mu$ в противном случае. Естественным обобщением класса сильно регулярных графов является класс графов Деза, который впервые появился в статье [2]. Граф G называется (v, k, b, a)-*графом Деза*, если он содержит точно v вершин, является регулярным графом степени k и существуют такие константы b и a $(b \geq a)$, что любые различные вершины $u, w \in G$ имеют либо b, либо a общих соседей. Заметим, что для параметров графа будет выполняться неравенство $0 \leq a \leq b \leq k < v$. Графы Деза, которые не являются сильно регулярными, принято делить на классы в зависимости от их диаметра. Если граф Деза не является сильно регулярным и имеет диаметр 2, его называют точным графом Деза. Систематическое изучение этого класса графов было начато в коллективной работе [3].

Реберные точные графы Деза были изучены в статье [4]. Хорошо известно, что реберные графы не содержат порожденные подграфы, изоморфные $K_{1,3}$. Графы, которые не содержат порожденные подграфы, изоморфные $K_{1,3}$, будем называть $K_{1,3}$-свободными. Полное описание дистанционно-регулярных $K_{1,3}$-свободных графов было получено А. Блокхусом и А. Е. Броувером в [5]. В работе [6] В. В. Кабановым и А. А. Махневым представлена классификация всех связных $K_{1,3}$-свободных μ-регулярных графов. Данная статья посвящена характеризации $K_{1,3}$-свободных графов Деза диаметра больше двух.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть граф G — связный $K_{1,3}$-свободный граф Деза диаметра больше двух, тогда G является одним из следующих графов*:

1) *раздувание кубического графа*;
2) *реберный граф кубического графа без треугольников*;
3) *n-угольник, где $n \geqslant 6$*;
4) *граф икосаэдра.*

Доказательство. Пусть граф G удовлетворяет условию теоремы, т. е. является связным графом Деза с параметрами (v, k, b, a), где $0 \leq a < b \leq k < v$, и $K_{1,3}$-свободным диаметра больше двух. Заметим, что $a = 0$, $k \geq 2$ и если $d(u, w) = 2$, то $|[u] \cap [w]| = b$.

М. Эриксон с соавторами в статье [3, утверждение 1.1] определили некоторые ограничения для графов Деза с диаметром $d = 2$. Докажем аналогичное утверждение для графов Деза диаметра больше двух.

Лемма. *Пусть G является (v, k, b, a)-графом Деза диаметра больше двух. Определим для вершины u следующие параметры*:

$$\alpha(u) = |\{w \in [u] \colon |[u] \cap [w]| = a\}|, \quad \beta(u) = |\{w \in [u] \colon |[u] \cap [w]| = b\}|.$$

Тогда $a = 0$ и имеет место соотношение

$$\alpha(u) \cdot (k-1) + \beta(u) \cdot (k-b-1) = |G_2(u)| \cdot b.$$

Доказательство. Зафиксируем вершину u графа G. Обозначим через N количество упорядоченных троек (u, w, x), где $u \sim w$, $w \sim x$, $x \in G_2(u)$. Количество упорядоченных троек (u, w, x), содержащих вершину w такую, что $|[u] \cap [w]| = a = 0$, равно $\alpha(u) \cdot (k-1)$. Количество упорядоченных троек (u, w, x), содержащих вершину w такую, что $|[u] \cap [w]| = b$, равно $\beta(u) \cdot (k-b-1)$. Тогда $N = \alpha(u) \cdot (k-1) + \beta(u) \cdot (k-b-1)$.

С другой стороны, количество различных вершин x, входящих в упорядоченные тройки (u, w, x), будет равно $|G_2(u)|$. Кроме того, для любых вершин u и w графа G таких, что $d(u, w) = 2$, выполняется $|[u] \cap [w]| = b$, $b \geqslant 1$. Следовательно, число N можно вычислить как $N = |G_2(u)| \cdot b$. Приравняв полученные выражения для числа N, получаем соотношение $\alpha(u) \cdot (k-1) + \beta(u) \cdot (k-b-1) = |G_2(u)| \cdot b$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть граф G — реберно регулярный граф с параметром λ. Тогда λ равно 0 или b.

1. Пусть $\lambda = 0$. Так как G является $K_{1,3}$-свободным графом, то степень любой вершины равна двум. Следовательно, граф G является n-угольником, где $n \geqslant 6$.

2. Пусть граф G — реберно регулярный граф с параметром $\lambda = b$, $b \geqslant 1$. Поскольку граф G связный, он является вполне регулярным графом с параметрами $\lambda = b$, $\mu = b$, отсюда согласно следствию 1.2.4 (ii) из [7], выполняется равенство $k = 2\lambda + 3 - \mu$, т. е. $k = b + 3$. Заметим также, что в этом случае параметры $\alpha(u) = 0$ и $\beta(u) = k$ для любой вершины u из графа G.

Определим значение параметра $G_2(u)$ для некоторой вершины u графа G в соответствии с леммой:

$$|G_2(u)| = \frac{k(k-b-1)}{b} = \frac{2(b+3)}{b} = 2 + \frac{6}{b}.$$

Так как параметр $|G_2(u)|$ может принимать только целые значения, то b делит 6.

Поскольку граф G является реберно регулярным графом с параметром $\lambda = b$, то согласно [8] значения $b_1(u,w)$ для всех пар вершин u и w графа G одинаковы и обозначаются b_1. Параметры b_1 и $|G_2(w)|$ для любой вершины w графа G принимают значения $b_1 = k-\lambda-1 = 2$ и $|G_2(w)| = 2+6/b$ соответственно. Так как $|G_2(w)|(k-2b_1+2) = 2b+8+6/b$ и $kb_1 = 2b+6$, то выполняется утверждение (2) основной теоремы из статьи [8]. Поэтому граф G является либо реберным графом кубического графа без треугольников, либо графом икосаэдра.

3. Пусть граф G не является реберно регулярным графом. Тогда в графе G найдутся два ребра x_1y_1 и x_2y_2 таких, что $|[x_1] \cap [y_1]| = 0$ и $|[x_2] \cap [y_2]| = b$. Поскольку граф G является связным по условию теоремы, найдется простая цепь, соединяющая вершину y_1 с вершиной y_2. Будем перемещаться по этой цепи, начиная с ребра x_1y_1, до тех пор, пока не встретим ребро, для вершин которого количество общих соседей равно b. Как только такое ребро найдется, зафиксируем вершину u, которая является общей для найденного ребра uw_2 и для предыдущего ребра в цепи uw_1. Отметим, что $|[u] \cap [w_1]| = 0$, $|[u] \cap [w_2]| = b$, где $b \geqslant 1$, и в этом случае параметр k принимает значения, не меньшие 3.

Так как граф G является $K_{1,3}$-свободным, то все вершины из множества $[u] \backslash (\{w_1\} \cup \{w_2\})$ смежны с вершиной w_2. Тогда $\alpha(u) = 1$, $\beta(u) = k-1$, $|[u]| = b+2 = k$, и граф G имеет параметры $(v, b+2, b, 0)$.

Из леммы следует, что параметр $G_2(u)$ для графа G принимает значение $G_2(u) = 2+2/b$. Параметр $G_2(u)$ является целым числом, отсюда следует: b делит 2.

3.1. Рассмотрим случай $b = 2$.

Граф G имеет параметры $(v,4,2,0)$. Рассмотрим некоторую вершину x графа G, и пусть окрестность этой вершины состоит из вершин y_1, y_2, y_3, y_4. Поскольку граф G имеет параметры $b = 2, a = 0$, каждая вершина окрестности $[x]$ будет иметь степень либо 0, либо 2. А так как граф G по условию теоремы является $K_{1,3}$-свободным, то окрестность $[x]$ не содержит 3-коклику. Следовательно, окрестность любой вершины графа G может быть либо четырехугольником, либо представляет собой объединение $K_1 \cup K_3$. Поскольку $b = 2$, окрестность не может быть четырехугольником.

Рассмотрим зафиксированную в п. 3 вершину u, для которой выполняется: $w_1 \sim u$, $w_2 \sim u$, $|[u] \cap [w_1]| = 0$, $|[u] \cap [w_2]| = b, b \geqslant 1$. Заметим, что $[u] = K_1 \cup K_3$, где $K_1 = \{w_1\}$, $K_3 = \{w_2, w_3, w_4\}$,. Согласно определенному ранее строению окрестности любой вершины и параметрам графа G существуют различные вершины w_{i1}, $i = 2,3,4$ такие, что w_{i1} смежна с соответствующей w_i, где $i = 2,3,4$. Так как $u \in [w_1] \cap [w_2]$, в графе G существует вершина x такая, что $x \in [w_1] \cap [w_2] \setminus \{u\}$. Но окрестность вершины w_2 полностью определена, из чего следует равенство $x = w_{21}$. Из аналогичных рассуждений для вершин w_1 и w_3, w_4 получаем следующее: вершина w_1 смежна со всеми w_{i1}, $i = 2,3,4$ и $[w_1] = \{u\} \cup K_3$. Таким образом, для всех вершин графа G однозначно определены их окрестности и граф G является $(8,4,2,0)$-графом Деза, который имеет диаметр, равный двум, что противоречит условию теоремы.

3.2. Рассмотрим случай $b = 1$.

Граф G имеет параметры $(v,3,1,0)$. Поскольку граф G является $K_{1,3}$-свободным, окрестность любой вершины графа будет содержать не менее одного ребра. В то же время окрестность вершины не может являться полным графом на трех вершинах, так как в этом случае окрестности всех вершин графа будут определены и граф будет являться полным графом на четырех вершинах, что противоречит условиям теоремы. Кроме того, окрестность вершины не может быть изоморфна графу $K_{1,2}$, так как $b = 1$. Следовательно, окрестность любой вершины графа G представляет собой объединение $K_1 \cup K_2$.

Пусть окрестность произвольной вершины u графа G содержит вершины w_1, w_2, w_3, где $w_2 \sim w_3$ и $w_1 \nsim w_2, w_1 \nsim w_3$. Тогда в соответствии с параметрами графа G существуют вершины $w_{2,1}, w_{3,1}$ вне окрестности вершины u такие, что $w_{2,1} \sim w_2$ и $w_{3,1} \sim w_3$ соответственно. При этом $w_{2,1} \neq w_{3,1}$, в противном случае получаем противоречие с параметром b. Поскольку все окрестности вершин графа G устроены одинаково, видим, что если все вершины треугольника u, w_2, w_3 объединить в одну вершину для каждого треугольника из графа G, то мы получим кубический граф. Теперь мы видим, что граф G является раздуванием кубического графа.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
2. **Deza A., Deza M.** The ridge graph of the metric polytope and some relatives // Polytopes: Abstract, convex and computational / Ed. T. Bisztriczky et al. (Scarborough, ON, 1993). NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Vol. 440. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 359–372.
3. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson [et al.] // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
4. **Кабанов В.В., Митянина А.В.** Реберные точные графы Деза // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 165–177.
5. **Blokhuis A., Brouwer A.E.** Determinationof the distance-regular graphs without 3-claws // Discrete Math. 1997. Vol. 163, no.1-3. P. 225–227.
6. **Кабанов В.В., Махнев А.А.** Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности // Мат. сб. 1196. Т. 187, № 10. С. 73–86.
7. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. N. Y.; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 485 p.
8. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Новая оценка для числа вершин реберно регулярных графов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 817–832.

Митянина Анастасия Владимировна
преподаватель
Челябинский гос. университет
e-mail: nastya.mityanina@gmail.com

Поступила 05.02.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ С ФАКТОРИЗАЦИЕЙ $G = G_\pi B$, $2 \notin \pi$

Э. М. Пальчик

Получена классификация конечных простых групп, факторизуемых холловой подгруппой нечетного порядка и некоторой собственной подгруппой.

Ключевые слова: конечная простая группа, факторизация, холлова подгруппа.

E. M. Pal'chik. Finite simple groups with factorization $G = G_\pi B$, $2 \notin \pi$.

A classification of finite simple groups factorizable by a Hall subgroup of odd order and some proper subgroup is obtained.

Keywords: finite simple group, factorization, Hall subgroup.

Введение

Рассматриваются только конечные группы и используются стандартные обозначения и терминология из [1; 2].

В работе [3] получен следующий результат.

Теорема A [3, следствие 1]. *Пусть X — конечная простая группа с собственными подгруппами H и B, где H — холлова подгруппа нечетного порядка с $|\pi(H)| > 1$, $X = HB$. Тогда*:

1) $|\pi(H \cap B)| \leq 1$;

2) *если $H \cap B = 1$, то $(|H|, |B|) = 1$ и X, B, H описаны* в [4, теорема 1.1];

3) *если $\pi(H \cap B) = \{s\}$, то s — наименьший простой делитель числа $|H|$.*

Целью этой работы является описание конечных простых групп $X = HB$, удовлетворяющих условиям теоремы A и условию 3) из заключения теоремы A.

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть X — конечная простая группа с собственными подгруппами H и B, $X = HB$, H — холлова π-подгруппа нечетного порядка, $|\pi| = |\pi(H)| > 1$, $\pi(H \cap B) = \{s\}$, где s — наименьший простой делитель числа $|H|$. Тогда $H = A \leftthreetimes H_s$, где A — абелева холлова s'-подгруппа в H, и выполняется одно из следующих условий*:

$X \cong L_2(7)$, $H \cong Z_7 \leftthreetimes Z_3$, $B \cong S_4$;

$X \cong L_2(11)$, $H \cong Z_{11} \leftthreetimes Z_3$, $B \cong A_5$;

$X \cong L_2(19)$, $H \cong Z_{19} \leftthreetimes Z_9$, $B \cong A_5$;

$X \cong M_{11}$, $H \cong Z_{11} \leftthreetimes Z_5$, $B \cong M_{10}$;

$X \cong M_{23}$, $H \cong Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$, $B \cong M_{22}$;

$X \cong L_n(q)$, n — нечетное простое число, $H \cong Z_a \leftthreetimes Z_n$, где $a = (q^n - 1)/(q - 1)$, $n = s$ — примитивный делитель числа $q^{n-1} - 1$, B — холлова параболическая максимальная подгруппа в X, $H \cap B \cong Z_s$.

1. Некоторые обозначения и предварительные результаты

Некоторые обозначения приводятся для удобства чтения.

π — некоторое множество простых чисел;

π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел;

(m, n) — наибольший общий делитель чисел m и n;

$\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей целого числа n;

n_π — π-часть натурального числа n, т.е. наибольший делитель m числа n такой, что $\pi(m) \subseteq \pi$;

$\pi(X) = \pi(|X|)$, $|X|$ — число различных элементов конечного множества X;

$|X : H|$ — индекс подгруппы H в группе X;

$|X : H|_{r'}$ — r'-часть числа $|X : H|$, где r — простой делитель числа $|X : H|$;

G_π — холлова π-подгруппа группы G порядка $|G|_\pi$;

G_p — силовская p-подгруппа группы G, где p — простое число;

$Chev(r)$ — множество конечных групп лиева типа с полем определения характеристики r [1, с. 84];

$Chev = \bigcup\limits_r Chev(r)$, где r пробегает все простые числа;

$Spor$ — множество, состоящее из 26 спорадических конечных простых групп;

$G' = [G, G]$;

$\widehat{G}$ — универсальная накрывающая для $G/Z(G)$, где $G \in Chev$;

$\mathfrak{M} = \{L_2(q), Sz(q), U_3(q), {}^2G_2(q) \mid q > 3\}$;

$\mathfrak{N} = \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}$;

m-делитель группы G — простой делитель порядка группы $G \in Chev$, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы из группы G;

D_n, Z_n, E_n — соответственно диэдральная, циклическая, элементарная абелева группа порядка n;

$e(q, t)$ — наименьшее натуральное число e, такое, что $q^e \equiv 1 \pmod t$, где t — нечетное простое число, q — целое число и $(q, t) = 1$ (т.е. t — примитивный простой делитель числа $q^e - 1$);

$e(q, 2) = 1$, если 4 делит $(q - 1)$, и $e(q, 2) = 2$, если 4 делит $(q - 3)$ для нечетного целого числа q;

$A < \cdot\, G$ — A — максимальная подгруппа группы G.

Лемма 1 [5, лемма 3]. *Пусть $\widehat{G} \in Chev(p)$, $H = \widehat{G}_\pi$, $\pi \subseteq \pi(G)$, $|\pi| > 1$, $\{2, p\} \nsubseteq \pi$. Пусть r — наибольшее простое число из π, R — силовская r-подгруппа из H, $A = Z(R)$. Тогда $A \lhd H$ и $H/C_H(A)$ является секцией группы Вейля $W(\widehat{G})$.*

Лемма 2. *Пусть $G \in Chev$, W — ее группа Вейля. Если простое число $p > 2$ делит $|W|$ и силовская p-подгруппа W_p группы W является циклической, то $|W_p| = p$.*

Доказательство. Группы Вейля конечных групп лиева типа известны [6, с. 24–34]. Если $G \in \{A_n(q),\ {}^2A_n(q),\ B_n(q),\ C_n(q),\ D_n(q),\ {}^2D_n(q)\}$, то W содержит единственную секцию, изоморфную S_k для некоторого целого числа k, порядок которой делится на $|W_p|$. По [7, лемма 5.2.2(d)] $|W_p| = p$. Если $G \in \{G_2(q),\ {}^3D_4(q)\}$, то $|W| = 2^2{\cdot}3$. Если $G \in \{{}^2B_2(q),\ {}^2F_4(q),\ {}^2G_2(q)\}$, то W есть 2-группа. У остальных пяти серий групп лиева типа силовская 3-подгруппа группы W не является циклической группой. У группы $E_8(q)$ W_5 не циклическая [8, с. 85]. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа X удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда*

(1) $X \notin \mathfrak{N}$;

(2) $X \notin \mathfrak{M}$ *или* $X \cong L_2(q)$, *где* $q \in \{7,\ 11,\ 19\}$.

Доказательство. (1) В группах $D_4(2)$, $C_3(2)$, ${}^2A_3(2)$ нет холловой подгруппы H с $|\pi(H)| > 1$ [8, с. 85, 46, 26]. Если $X \cong A_5(2)$, то в [3, с. 33] показано, что если в X существует подгруппа H с $|\pi(H)| > 1$, то $|H| = 5 \cdot 31$. Но тогда условие $|\pi(H \cap B)| = 1$ влечет $|X : B| \in \{5,\ 31\}$, что невозможно [4, теорема 5.8]. Этим утверждение(1) доказано.

(2) Если $G \cong L_2(q)$, то из [9] следует, что только группы с $q \in \{7,\ 11,\ 19\}$ удовлетворяют условию теоремы 1. Группы $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$ не имеют факторизаций по [2, теорема B]. Среди групп $U_3(q)$ только группы с $q \in \{3,\ 5\}$ факторизуемы [2, следствие 2]. Но у них нет холловой подгруппы H с $|\pi(H)| > 1$ [8, с. 14, 34]. Этим утверждение (2) доказано. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $G \in Chev(q)\backslash\{\mathfrak{N}\}$, t — m-делитель группы G, $d = |Z(\widehat{G})|$. Тогда*:

(1) *если $G \in \mathfrak{M}$, то t не делит $q(q-1)/d$, где $d \le 3$;*

(2) *если $G \notin \mathfrak{M}$, то t не делит $q(q^2-1)/d$ и $t > 3$;*

(3) *t не делит d, если $t \neq 2,\ 3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Параболические подгруппы групп из множества $\mathfrak{M}$ исчерпываются борелевскими подгруппами, порядки которых делятся на $q(q-1)/d$, где $d = (2,\ q-1)$ или $d = (3,\ q+1)$ у групп $L_2(q)$ и $U_3(q)$ соответственно. Поэтому $t \neq 2, 3$ и утверждение (1) доказано.

(2) В группах лиева ранга $n > 1$ есть минимальные параболические подгруппы с множителем Леви L ранга 1, порядок которого делится на $q(q^2-1)/d$, кроме $L \cong Sz(q)$. Отсюда следует, что $t \neq 2, 3$, если в G есть множители Леви L типов $L_2(q)$, $U_3(q)$ или ${}^2G_2(q)$ (тогда 3 делит $|L|$). Если предположить, что в G есть множители Леви только типа $L \cong Sz(q)$, то по [1, предложение 2.17(ii)] $G \in Chev(2)$. Поэтому все параболические (в частности, все 2-локальные подгруппы, в том числе централизаторы инволюций) являются $3'$-группами. Простые группы с S_4-свободными централизаторами инволюций описаны в [10, теорема 2]. Проверка групп из заключения этой теоремы показывает, что все они имеют параболические подгруппы, не являющиеся $3'$-подгруппами (напомним, что $n > 1$). Поэтому $t \neq 2,\ 3$. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть $t \notin \{2,\ 3\}$ и t делит d. Тогда t делит $q-1$ или $q+1$ по [1, с. 316]. Но это невозможно по (1) и (2). Этим утверждение (3) доказано. Лемма доказана.

Лемма 5 [11, леммы 4 и 5]. *Пусть $G \in Chev(r)\backslash\{\mathfrak{N}\}$, $Z(G) = 1$, t — m-делитель группы G. Тогда*:

(1) *если $t > 3$, то в G существует максимальный тор T такой, что t делит $|T|$ и $C_G(x) = T$ для элемента $1 \neq x \in T$ порядка t (в частности, $T_t = G_t$ есть TI-подгруппа в G);*

(2) *если $t > 3$, то G_t — циклическая группа.*

Лемма 6. *Пусть G — одна из простых групп $L_n(q)$ с $n \ge 3$, $PSp_{2n}(q)$ с $n \ge 3$, $P\Omega_{2n+1}(q)$ с $n \ge 2$, $P\Omega^{\pm}_{2n}(q)$ с $n \ge 4$, $U_n(q)$ с $n \ge 3$ или $G_2(q)$, причем $G \notin \mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$.*

Положим $b(G) = q^n - 1$ при $G = L_n(q)$, $b(G) = q^{2n} - 1$ при $G \in \{PSp_{2n}(q),\ P\Omega_{2n+1}(q),\ P\Omega^{-}_{2n}(q),\ U_n(q)$ с нечетным $n\}$, $b(G) = q^{2(n-1)} - 1$ при $G \in \{U_n(q)$ с четным $n,\ P\Omega^{+}_{2n}(q)\}$, $b(G) = q^4 + q^2 + 1$ при $G \cong G_2(q)$. Тогда

(1) *каждый примитивный простой делитель t (простой делитель t, если $G \cong G_2(q)$) числа $b(G)$ является m-делителем группы G;*

(2) *каждый m-делитель t группы G является либо примитивным делителем числа $b(G)$, либо делителем числа $b(G)$ при $G \cong G_2(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q = r^f$ для некоторого простого числа r и натурального числа f. Оба утверждения следуют из рассмотрения множителей Леви параболических подгрупп указанных групп [12, теоремы 3.5, 3.7–3.11]. Рассмотрим отдельно группу $G \cong G_2(q)$, где $q > 2$. $|G|_{r'} = (q^6-1)(q^2-1)$. В группе G есть параболические группы с множителями Леви только типа $A_1(q)$. Поэтому t должен быть делителем числа $q^6 - 1 = (q^2-1)(q^4+q^2+1) = (q^2-1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1)$. Тогда t делит q^2-q+1 или t делит q^2+q+1.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства леммы 6, [7, теорема 4.10.2(в)] и того факта, что группа Вейля для группы $G = G_2(q)$ имеет порядок $2^2 \cdot 3$ следует, что силовские подгруппы максимальных торов порядков q^2-q+1 и q^2+q+1 группы $G_2(q)$ являются циклическими. Поэтому эти торы — циклические. Если холлова подгруппа H группы G лежит в одном из этих торов, то 3 не делит $|H|$ и $H' = 1$ (см. также [5, лемма 7(2)]).

Лемма 7. *Предположим, что группа $G = PSL_n(q)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1, *t — m-делитель группы G. Если $t \in \sigma$, то s не делит $q-1$.*

Доказательство. Предположим, что s делит $q-1$. Тогда $e(q, s) = a = 1$. По [13, теорема 8.8] возможны два случая: $a = s-1 = 1$ или $e(q, t) = a = 1$. Так как $s > 2$ по условию, то первый случай исключается. Из леммы 6 следует, что t есть примитивный делитель числа $q^n - 1$, т.е. t не делит $q-1$. Поэтому и второй случай невозможен. Лемма доказана.

Лемма 8. *Предположим, что группа $G = PSU_n(q)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1, *t — m-делитель группы G. Если $t \in \sigma$, то s не делит $q+1$.*

Доказательство. Если s делит $q+1$, то s делит q^2-1 и $e(q, s) = 2$ (так как $s > 2$). Из леммы 6 следует, что если $n-1$ есть четное число, то $e(q, t) = 2n$, а если $n-1$ — нечетное число, то $e(q, t) = 2n-2$.

Пусть $e(q, s) = a = 2$. По [13, теорема 8.8] возможны только следующие случаи:

1) $2 = e(q, t) = \left\{\begin{matrix} 2n-2 \\ 2n \end{matrix}\right.$; 2) $2 = s-1$ и $2 = \left\{\begin{matrix} 2n-2 \\ 2n \end{matrix}\right.$; 3) $2 = (s-1)/2$ и $2 = \left\{\begin{matrix} 2n-2 \\ 2n \end{matrix}\right.$; 4) $2 = s-1$ и $2s = \left\{\begin{matrix} 2n-2 \\ 2n \end{matrix}\right.$, $s \equiv 1 \pmod 4$; 5) $2 = (s-1)/2$, $2s = \left\{\begin{matrix} 2n-2 \\ 2n \end{matrix}\right.$, $s \equiv 3 \pmod 4$. Случаи 1)–3) невозможны ввиду $n \notin \{1, 2\}$. Случай 4) невозможен, так как $s = 3 \not\equiv 1 \pmod 4$. Случай 5) невозможен, так как $s = 5 \not\equiv 3 \pmod 4$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим 3 случая: 1. $X \in Chev$, $Z(X) = 1$; 2. $X \in Spor$; 3. $X \in \{A_n \mid n \geq 5\}$.

1. Пусть $X \in Chev(r)$. Предположим, что $r \in \pi(H)$. По [14, теорема 3.2] $H_r = X_r \lhd H$. Тогда $X = HB = N(X_r)\,B$. Если лиев ранг группы X больше 1, то по [15, предложение 2.10] $X \in \{L_3(2),\ L_4(2),\ U_4(2)\}$. Группа $L_3(2) \cong L_2(7)$ есть в заключении теоремы. Для групп $L_4(2)$, $U_4(2)$ с холловой подгруппой H не выполняется условие $|\pi(H)| > 1$. Если лиев ранг группы X равен 1, то $X \in \mathfrak{M}$. Из леммы 3(2) следует, что только группы $L_2(q)$ с $q \in \{7, 11, 19\}$ удовлетворяют условию теоремы 1. Поэтому пусть $\{2, r\} \nsubseteq \pi(H)$. По [5, теорема 1] H имеет нормальную абелеву холлову s'-подгруппу A, где s — наименьший простой делитель $|H|$. По [5, теорема 4] A содержится в некотором максимальном торе T_1 группы X. Так как r делит $|B|$, то по [15, теорема 2.2] $B \subseteq B_0$ и $X = HB = HB_0$, где B_0 — максимальная в X параболическая подгруппа. В дальнейшем используем факторизацию $X = HB_0$ и обозначаем B_0 как B. По лемме 3 можно считать, что $X \notin \mathfrak{N}$, $X \notin \mathfrak{M}$. Из [16, лемма 3] следует, что существует m-делитель t группы X. Так как $X \notin \mathfrak{M}$, то по лемме 4 $t > 3$ и G_t — циклическая группа по лемме 5. t не делит $|B|$ по определению m-делителя. Поэтому t делит $|H|$, $t \neq s$, s делит $|B|$.

Предположим, что H — абелева группа. По условию $H \cap B = D \neq 1$. Тогда $\langle D^X \rangle = \langle D^{HB} \rangle = \langle D^B \rangle \lhd X$, что противоречит простоте группы X. Итак,

$$H' \neq 1, \quad H = A \leftthreetimes H_s, \quad t > 3 \text{ делит } |H|, \quad t \neq s, \quad H \cap B \text{ есть } s\text{-группа}. \tag{2.1}$$

Пусть $C = C_X(A) \supseteq T_1$. Так как A есть H-инвариантная группа, то и C есть H-инвариантная группа и существует подгруппа HC.

Пусть $1 \neq y \in A_t$, $y^t = 1$. Из цикличности $A_t = G_t$ следует, что $\langle y \rangle \lhd H$ и по лемме 5, теоремам 1 и 2 в [11] существует максимальный тор T такой, что

$$C(y) = T \supseteq T_1 \supseteq A, \quad C = C_X(A) = T, \quad T_1 = T, \quad \text{группа } H/H \cap C \cong Z \subseteq Z_{t-1}. \tag{2.2}$$

Предположим, что простое число f делит $|HC|$ и $f \notin \pi(H)$, $f \in \pi(T)$. Тогда $C_f \lhd HC$. Из $X = HB = HCB$ следует, что $C_f \subseteq HC \cap B$. Тогда $\langle C_f^X \rangle = \langle C_f^{HCB} \rangle = \langle C_f^B \rangle \lhd X$ в противоречие с простотой группы X. Поэтому

$$\pi(T) \subseteq \pi(H). \tag{2.3}$$

Предположим, что $T\cap H_s=1$. Тогда $T=A$. Из $\langle y\rangle\lhd H$ следует (ввиду (2.3) и (2.2)), что

$$\text{если } T\cap H_s=1, \text{ то } H_s \text{ — циклическая группа.} \tag{2.4}$$

Рассмотрим холлову подгруппу H_sH_t из X. По (2.1) $s<t$. Поэтому группа H_sH_t удовлетворяет условию леммы 1. Тогда группа $H_sH_t/H_t\cong H_s$ является секцией группы Вейля $W(X)$ группы X. По лемме 2 $|H_s|=|G_s|=|W(X)|_s=s$. По (2.1) тогда B — холлова подгруппа в X. Но из $X=HB=AB$ и [17, теорема 5] следует, что либо $|\pi(A)|=1$ и X есть в заключении теоремы, либо $X\cong L_n(q)$, n — нечетное простое число, $(n,q-1)=1$, $|A|=|T|=(q^n-1)/(q-1)$. Поэтому $H=A\leftthreetimes Z_n$ [18, с. 185], т. е. $n=s$. По теореме Эйлера s делит $q^{n-1}-1$ и ввиду того, что H — холлова подгруппа, s есть примитивный делитель числа $q^{n-1}-1$, иначе s^2 делит $|X|$. Это есть в заключении теоремы.

Пусть, наконец,

$$T\cap H_s=F\neq 1. \tag{2.5}$$

Из $F\lhd H_s$ следует, что $Z(H_s)\cap F=Z\neq 1$. Пусть $1\neq z\in Z$, $z^s=1$, $C_1=C_X(z)\supseteq H$. Так как $z\in T$, то по [19, (2.9)] C_1 содержит нормальные подгруппы $L=L_1*\ldots*L_m*Y$, $m\geq 0$, и $TL=C_1^0$ такие, что для каждого $i=\overline{1,m}$ L_i — группа лиева типа с полем определения порядка q^{m_i}, $m_i>0$, $Y\subseteq Z(L_1*\ldots*L_m)\cap T$, C_1/TL изоморфна подгруппе из $Z(\widehat{X})$. Более того, так как $z^s=1$, s — простое число, то по [7, теорема 4.2.2(d)] C_1/TL — элементарная абелева s-группа. По [7, теорема 4.2.2(в)] T индуцирует на каждой компоненте L_i внутреннедиагональные автоморфизмы.

Так как $s\neq r$, $s>2$, то $|C_1/C_1^0|\leq s$ ввиду цикличности $Z(\widehat{X})$ [1, с. 316].

Предположим, что t не делит $|L|$. По лемме Фраттини, тогда $T_t=G_t$ нормализует некоторую силовскую r-подгруппу R из L. Но тогда по теореме Бореля — Титса [7, теорема 3.1.3] t делит порядок некоторой параболической подгруппы из X, что противоречит определению m-делителя. Поэтому

$$\text{если } t \text{ не делит } |L|, \text{ то } L=1,\ C_1^0=T. \tag{2.6}$$

Из (2.1) и (2.6) следует, что $C_1^0\subset C_1$ и $C_1/C_1^0\cong Z_s\cong H/H\cap T$. В частности, из условий $s>2$, (2.1), s делит $|Z(\widehat{X})|$ и [1, с. 316] следует, что $X\in\{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q)\}$, так как группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ не факторизуемы по [2, теорема В]. Но если s делит $Z(\widehat{X})|$, то s делит $(n,q-1)$ и делит $q-1$ или s делит $(n,q+1)$ и делит $q+1$. Противоречие с леммами 8 и 7 исключает этот случай из рассмотрения. Поэтому

$$t \text{ делит } |L|.$$

Предположим, что $L=L_1*\ldots*L_mY$ и $m>1$. Если для некоторого множителя L_j t не делит $|L_j|$, то по лемме Фраттини существует t-элемент a в L, который нормализует силовскую r-подгруппу R из L_j. Но тогда по теореме Бореля — Титса [7, теорема 3.1.3] t делит порядок некоторой параболической подгруппы из X, что противоречит определению m-делителя группы X. Поэтому ввиду цикличности G_t имеем

$$L=L_1,\ \ C_1\supseteq HL,\ \ C_1^0=TL,\ \ |C_1/C_1^0|\leq s,\ \ t \text{ не делит } |Z(C_1^0)|,\ |G_t|=|L/Z(L)|_t. \tag{2.7}$$

Предположим, что $X\cong D_n(q)$, $n\geq 4$, $X\notin\mathfrak{N}$. Из леммы 6 следует, что t — примитивный делитель числа $q^{2(n-1)}-1\neq 2^6-1$. Поэтому $e(q,\,t)=2(n-1)$. По [13, теорема 8.8] тогда и для s должно быть $e(q,\,s)=2(n-1)$. Но тогда и s по лемме 6 будет m-делителем группы X. Тогда по лемме 5 либо $s=3$, либо X_s — циклическая группа. Но если $s=3$, то $e(q,\,s)\leq 2$ и $2(n-1)\leq 2$, что невозможно для $n\geq 4$. Если же $X_s\cong H_s$ — циклическая группа, то по (2.5) и (2.1) $F_1=B\cap F\lhd H$ и из $X=HB$ следует, что $\langle F_1^X\rangle=\langle F_1^{HB}\rangle=\langle F_1^B\rangle\lhd X$. Итак, $X\ncong D_n(q)$. Предположим, что $G\cong G_2(q)$. По замечанию 1 $H'=1$, что противоречит (2.1). Поэтому $X\ncong G_2(q)$. Предположим, что $G\cong F_4(q)$. По [2, теорема В] G не имеет фактора типа B, определенного выше перед (2.1). Остальные исключительные группы не факторизуемы [2, теорема B]. По (2.1) H — неабелева подгруппа в X. Из леммы 6 следует, что достаточно рассмотреть простые группы

$$A_{l-1}(q),\ B_l(q),\ C_l(q),\ {}^2D_l(q),\ {}^2A_{l-1}(q).$$

Пусть $X \cong A_{l-1}(q)$. По лемме 6(1) $t \in \pi(q^l-1)$. В X есть максимальный циклический тор порядка $(q^l-1)/(q-1)(l,\, q-1)$ [20, с. 213]. По [11, теоремы 1, 2] это есть тор T, указанный в (2.2) и определенный как $T = C_X(y)$. Поэтому $A \subseteq T$. По [5, теорема 4] $H = H_s \leftthreetimes A$.

Аналогично, по [20] в простых группах $B_l(q)$, $C_l(q)$, ${}^2D_l(q)$, ${}^2A_{l-1}(q)$ есть максимальные циклические торы T соответственно порядков $(q^l+1)/(2,\, q-1)$, $(q^l+1)/(2,\, q-1)$, $(q^l+1)/(4,\, q^l+1)$, $(q^l+1)/(q+1)(l,\, q+1)$, l — четное; $(q^{l-1}+1)/(l,\, q+1)$ l — нечетное. Как и в случае с $X \cong A_{l-1}(q)$, имеем $A \subseteq T$, $H = H_s \leftthreetimes A$. Итак, получаем, что

$$T \text{ — циклическая группа.} \tag{2.8}$$

Если $T \cap B_s = F_2 \neq 1$, то из (2.2), (2.3) и (2.8) следует, что $F_2 \lhd H$, $\langle F_2^X \rangle = \langle F_2^{HB} \rangle = \langle F_2^B \rangle \lhd X$. Поэтому по условию $F_2 = 1$. Итак,

$$|B_s| = s, \quad H_s = T_s \leftthreetimes B_s, \quad T \cap B = 1. \tag{2.9}$$

Из $X = HB$ и $H \subset C_1$ следует, что $C_1 = H(C_1 \cap B)$. Пусть $C_1 \cap B = B_1$. Из $L \lhd C_1$ и [21, лемма 4] следует, что $L = (L \cap H)(L \cap B_1)$ и $L \cap H$ есть холлова подгруппа в L. По (2.9) H_s — метациклическая группа. По [22, теорема IV.8.6] H_s — абелева группа. По [23, (10-4)(2)] H_s — гомоциклическая группа, т.е. $H_s \cong Z_s \times Z_s \cong \langle z \rangle \times B_s$ (по леммам 7, 8 и [1, с. 316] s не делит $Z(\widehat{G})$, а группа ${}^2E_6(q)$ не факторизуема [2, теорема B]).

Предположим, что $B_s \nsubseteq L$. По (2.7) и (2.9) тогда $C_1/C_1^0 \cong Z_s$. Но после (2.6) показано, что тогда имеем противоречие с леммами 7 и 8. Итак, s делит $|L|$. Имеем $t \in \pi(L \cap T)$, $L \cap H = (L \cap T)B_s$. Пусть $Z(L) = Z$, $\overline{L} = L/Z$, $\overline{B}_1^* = B_1^*Z/Z$, $\overline{L \cap T} = (L \cap T)Z/Z$, где $B_1^* = L \cap B_1$.

Если $\overline{L}'$ — простая неабелева группа, то она удовлетворяет условиям теоремы 5 в [17], как имеющая нильпотентный холлов фактор $\overline{L \cap T}$. По этой теореме с учетом того, что $t > 3$ и $L \in Chev(r)$, получаем:

$\overline{L}' \cong L_2(q^b)$, где $q = 2^k$ для некоторого натурального числа k;

$\overline{L}' \cong L_n(q^b)$, n — нечетное простое число, $(n,\, q^b-1) = 1$ (поэтому $Z = 1$), $|\overline{L \cap T}| = (q^{bn}-1)/(q^b-1)$ (b возникает по [7, теорема 4.2.2(e)], $b \geq 1$).

Так как $\overline{B}_s = B_sZ/Z$ нормализует тор $\overline{T \cap L}$ порядка $(q^{bn}-1)/(q^b-1)$ или $(2^{2kb}-1)/(2^{kb}-1)$, то $s = n$ [18, с. 185]. Поэтому случай с $n = 2$ исключается ввиду $s > 2$. Поэтому

$$Z = 1, \quad L \cong \overline{L} \cong L_n(q^b), \quad s = n \text{ — нечетное простое число.} \tag{2.10}$$

Так как B_1^* — холлова подгруппа в L по (2.9) и $|B_1^*|_s = s = |L|_s$, то

$$s \text{ — примитивный делитель числа } q^{b(s-1)} - 1 \tag{2.11}$$

(в противном случае s^2 делит $|L|$; s делит $q^{b(s-1)}-1$ по теореме Эйлера).

Заметим, что из теоремы Бореля — Титса [7, теорема 3.1.3] следует, что t является m-делителем и в группе L (в противном случае t — не m-делитель группы X). Поэтому из леммы 6 следует, что

$$t \text{ — примитивный делитель числа } q^{bn} - 1 = q^{bs} - 1, \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{array}{l} t \text{ — примитивный делитель:} \\ \text{числа } q^l - 1, \text{ если } X \cong A_{l-1}(q); \\ \text{числа } q^{2l} - 1, \text{ если } X \in \{B_l(q),\ C_l(q),\ {}^2D_l(q)\}; \\ \text{числа } q^{2l} - 1, \text{ если } X = {}^2A_{l-1}(q) \text{ с четным числом } l-1; \\ \text{числа } q^{2l-2} - 1, \text{ если } X = {}^2A_{l-1}(q) \text{ с нечетным числом } l-1. \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

По [13, теорема 8.8] для $a = e(q, s)$ и $c = e(q, t)$ могут иметь место только следующие возможности.

1) Для $A_{l-1}(q)$:

(i) $a = c$, что невозможно по (2.11), (2.12);

(ii) $a = s - 1 = b(s - 1)$, $c = 1 = bs = l$ ввиду (2.12) и (2.13), что невозможно по (2.10);

(iii) $a = s - 1 = b(s - 1)$, $c = s = bs = l$, откуда следует $b = 1$, $s = l = n$ по (2.10) и $X = L$, что есть в заключении теоремы.

2) Для $B_l(q)$ и $C_l(q)$: $a = c$, что невозможно по (2.11) и (2.12).

3) Для ${}^2D_l(q)$:

(i) $a = c$, что, как и в 2), невозможно;

(ii) $a = b(s - 1)$, $c = 2a = 2b(s - 1) = bs$, что невозможно по (2.10);

(iii) $a = b(s - 1)$, $c = a/2 = bs$, что также невозможно, так как $a = b(s - 1) \neq 2bs$.

4) Для ${}^2A_{l-1}(q)$:

(i) $a = b(s - 1) = c = bs$, что невозможно;

(ii) $a = b(s - 1) = s - 1$, $c = 2 = bs$, что невозможно по (2.10);

(iii) $a = b(s - 1) = (s - 1)/2$, $c = 2 = bs$, что невозможно как и в (ii);

(iv) $a = b(s - 1) = s - 1$, $c = 2s = bs$, что противоречиво;

(v) $a = b(s - 1) = (s - 1)/2$, $c = 2s = bs$, что невозможно, так как $b \neq 1/2$.

Все случаи из (2.13) оказались невозможными, кроме случая $X = L = L_n(q)$, который есть в заключении теоремы 1.

Если $\overline{L}'$ не простая группа, то $\overline{L} \in \{A_1(2),\ A_1(3),\ {}^2A_2(2),\ {}^2B_2(2)\}$, тогда либо $t > 3$ не делит $|\overline{L}|$, либо $t = 5$, $q = 2$ (${}^2B_2(2) \cong Z_5 \leftthreetimes Z_4$ [8]). По теореме Эйлера 5 делит $(q^4 - 1)$. Поэтому из (2.13) получаем, что если $X \cong A_{l-1}(q)$, то $l \leq 4$, $X \in \{PSL_3(2),\ PSL_2(2),\ PSL_4(2)\}$. 5 делит $|X|$, если $X \cong PSL_4(2) \cong A_8$. Но A_8 не удовлетворяет условию теоремы 1 для $|\pi(H)| > 1$. Если $X \not\cong A_{l-1}(q)$, то из (2.13) получаем $2l \leq 4$ или $2l - 2 \leq 4$. Откуда $X \cong B_2(2) \cong S_6$ или $X \cong {}^2A_{l-1}(2)$ с нечетным числом $l - 1 \leq 2$. Но S_6 и ${}^2A_2(2)$ — не простые группы. Эти случаи противоречивы.

2. Пусть $X \in Spor$. Из [14, следствие 6.13; 4, теорема 5.8] сразу же получаем, что только группы Матье M_{11} и M_{23} удовлетворяют условию теоремы.

3. Пусть $X \in \{A_n \,|\, n \geq 5\}$. Из [12, теорема 8.1] следует, что группы A_n, $n \geq 5$, не имеют холловых подгрупп H нечетного порядка с $|\pi(H)| > 1$.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1 анонсирована в [24, теорема 1].

Следующее замечание кажется интересным.

З а м е ч а н и е 2. Пусть FS — множество конечных простых неабелевых групп. Множество групп $G \in FS$, факторизуемых двумя холловыми подгруппами взаимно простых порядков G_π и $G_{\pi'}$ с $|\pi| > 1$ и $|\pi'| > 1$ обозначим $FS(G_\pi G_{\pi'})$. Это множество можно найти в заключении теоремы 1.1 в [4]. Множество групп $G \in FS$, факторизуемых холловой подгруппой G_π, где $2 \notin \pi$ и $|\pi| > 1$ (холловой подгруппой $G_{\pi'}$, где $2 \in \pi'$ и $|\pi'| > 1$) и собственной подгруппой B, $|\pi(B)| > 1$, обозначим через $FS(G_\pi B)$ $(FS(G_{\pi'} B))$. Из теорем A, 1 и [4] следует, что $FS(G_\pi B) = FS(G_\pi G_{\pi'}) \cup \{L_2(19)\}$, а из [4] и [25] следует, что $FS(G_{\pi'} B) = FS(G_\pi G_{\pi'}) \cup \{A_8,\ M_{24}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир. 1982. 352 с.
2. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups // Memoirs of AMS. 1990. Vol. 86, no. 432. P. 1–151.
3. **Пальчик Э.М.** О конечных факторизуемых группах с холловым фактором нечетного порядка // Весцi НАН Беларусi, сер. физ.-мат.н. 2009. № 4. С. 30–34.
4. **Arad Z., Fisman E.** On finite factorizable groups // J. Algebra. 1984. Vol. 86, no. 2. P. 522–548.

5. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
6. **Carter R.** Conjugacy classes in the Weil group // Composito Math. 1972. Vol. 25, no. 1. P. 1–59.
7. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40, no. 3).
8. Atlas of finite groups / J. H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Ito N.** On the factorizations of the linear fraction of group $LF(2, p^n)$ // Acta Sci. Math. Szeged. 1953. No. 15. P. 79–84.
10. **Махнев А.А.** Конечные группы с самоцентрализующейся подгруппой порядка 6 // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 91–102.
11. **Пальчик Э.М.** О свойствах некоторых простых делителей порядков минизотропных торов конечных грипп лиева типа // Весцi НАН Беларусi, сер. фiз.-мат.н. 2012. № 4. С. 66–71.
12. **Wilson R.** The Finite simple group. London: Springer-Verlag, 2009. 298 p.
13. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, вып. 5 (401). С. 3–46.
14. **Gross F.** On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. 1986. Vol. 52, no. 3. P. 464–494.
15. **Curtis C.W., Kantor W.M., Seitz G.M.** The 2-trausitive permutation representation of the finite Chevalley groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 218. P. 1–59.
16. **Тютянов В.Н., Шеметков Л.А.** Тройные факторизации в конечных группах // Докл. НАН Беларусi. 2002. Т. 46, № 4. С. 52–55.
17. **Пальчик Э.М.** О конечных факторизуемых группах с нильпотентным холловым фактором // Весцi НАН Беларусi, сер. фiз.-мат.н. 2009. № 2. С. 52–56.
18. Семинар по алгебраическим группам: сб. ст. / ред. А. А. Кириллов. М.: Мир. 1973. 315 с.
19. **Seitz G.M.** The root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type // Pacific J. Math. 1983. Vol. 106, no. 1. P. 153–244.
20. **Aschbacher M., Kleidman P.** On a conjecture of Quillen and a lemma of Robinson // Arch. Math. 1990. Vol. 55, no. 3. P. 209–217.
21. **Монахов В.С.** Конечные группы с холловыми добавлениями к примитивным подгруппам // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 359–368.
22. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 793 S.
23. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of the finite groups of characteristic 2 type // Memoirs AMS. 1983. Vol. 42, no. 276. P. 1–731.
24. **Palchik E.M.** Finite simple factorizable groups with a Hall factor // Тезисы Междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящен. 80-летию со дня рождения А. И. Старостина. Екатеринбург: изд-во “УМЦ-УПИ”, 2011. С. 189–190.
25. **Пальчик Э.М.** Конечные простые факторизуемые группы с холловым фактором четного порядка // Весцi НАН Беларусi, сер. фiз.-мат. н. 2013. № 1. С. 50–63.

Пальчик Эдуард Михайлович
Поступила 20.07.2013
д-р физ.-мат. наук, профессор
Полоцкий государственный университет
e-mail: bashunsviat@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 519.6

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ И СВОЙСТВАХ, СВЯЗАННЫХ СО СХОДИМОСТЬЮ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов

Рассматриваются свойства широко понимаемых измеримых пространств, обеспечивающие сохранение максимальности при сужении ультрафильтров до фильтров соответствующего подпространства. Исследуются условия, гарантирующие сходимость образов ультрафильтров, состоящих из открытых множеств, при действии непрерывных отображений.

Ключевые слова: база фильтра, измеримое пространство, топология, ультрафильтр

E. G. Pytkeev, A. G. Chentsov. On the structure of ultrafilters and properties related to convergence in topological spaces.

We consider properties of broadly understood measurable spaces that provide the preservation of maximality when ultrafilters are restricted to filters of the corresponding subspace. We study conditions that guarantee the convergence of images of ultrafilters consisting of open sets under continuous mappings.

Keywords: filter base, measurable space, topology, ultrafilter.

1. Введение

В дальнейшем используем сокращения: БУ — база ультрафильтра, БФ — база фильтра, в/з — вещественнозначная (функция), ИП — измеримое пространство, к.-а. — конечно-аддитивная (мера), ОЭ — обобщенный элемент, п/а — полуалгебра, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр.

В различных разделах математики возникает потребность в построении расширений исходного пространства. В теории экстремальных задач, и в частности в теории управления, это связано с теоремами существования и вопросами корректности (см., например, [1;2]). Заметим, что на практике зачастую интересны решения “на грани фола” с точки зрения соблюдения исходной системы ограничений (см., в частности, [3;4]). Однако непосредственный поиск таких решений обычно бывает сопряжен с большими трудностями, поскольку при их построении речь идет фактически о проблеме достижимости в условиях ограничений асимптотического характера. В этой связи оказываются полезными процедуры, связанные с расширением пространства обычных решений, которое сводится к построению обобщенной задачи о достижимости со стандартными ограничениями; в конструкциях такого рода стремятся к тому, чтобы пространство ОЭ или обобщенных решений было компактным и содержащим обычные решения в виде всюду плотного множества.

Данный подход, используемый в [1–4], допускает определенные аналогии с расширением ТП (см. [5; 6] и др.), хотя имеются и ощутимые различия (так, в топологии объектом расширения является ТП, в то время как в задачах прикладной математики множество обычных решений, как правило, никакой топологией не оснащается). Напомним в этой связи, что в [7] для целей расширения абстрактной задачи о достижимости была применена (с некоторыми

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12–01–00537, 13–01–90414 укр–ф_а, 13–04–00847, 13–07–00181), программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12-П-1-1012, 12-П-1-1019) и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

несущественными модификациями) компактификация Стоуна — Чеха. Данное направление отражено в целом ряде публикаций, из которых сейчас отметим [8–10], где в качестве ОЭ использовались у/ф широко понимаемых ИП. В [8] намечен общий подход к построению расширений в классе у/ф, в [9, гл. 10] приведены основные свойства и соотношения, связывающие у/ф и к.-а. $(0,1)$-меры, а в [10] указан пример ИП с алгеброй множеств, для которого удается получить исчерпывающее описание множества всех у/ф данного ИП. Последнее существенно, поскольку в процедуре [7] так называемые свободные у/ф (см. [6, 3.6]) не реализуются конструктивно, что затрудняет их практическое использование (между тем именно такие у/ф ответственны за реализацию нетривиальных вариантов асимптотического поведения). В работах [11–14] представления, установленные в [9], получили дальнейшее развитие. Они, однако, были ориентированы на применение ИП в традиционном понимании (использовались алгебры и п/а множеств).

В то же время схема, намеченная в [8], позволяет применять (в виде широко понимаемых ИП) также и ТП: в качестве базового семейства множеств согласно подходу [8] можно использовать топологию или семейство замкнутых множеств. Последний вариант связывался в [8, §8] с реализацией схемы расширения Волмэна. Что же касается использования (в связи с конструкциями [8]) самих топологий, то данная возможность не рассматривалась. В настоящей работе этому случаю уделяется основное внимание: исследуется важный с точки зрения конструкций [11; 13; 14] вопрос о том, когда непрерывное отображение из одного ТП в другое переводит “открытые” (состоящие из открытых множеств) у/ф первого ТП в сходящиеся БФ второго.

Другой вопрос, также связанный в своей основе с методами упомянутых работ, касается представлений у/ф ИП в терминах у/ф семейства всех п/м исходного пространства (см., в частности, [15; 16]). В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять (понимаемое в широком смысле) ИП для того, чтобы сужения “полных” у/ф на соответствующее (данному ИП) подпространство сохраняли максимальность; получены некоторые следствия этого положения. Таким образом, в статье исследуется круг вопросов, связанных с представлением и свойствами у/ф ИП, понимаемых в широком смысле. Данные вопросы были инициированы исследованиями в области расширений задач о достижимости в ТП. Упомянутые задачи, в свою очередь, являются развитием постановки важной для теории управления задачи о построении и исследовании областей достижимости (см. [17; 18]).

Элементы теории расширений широко использовались в работах школы Н. Н. Красовского по теории управления. Применение скользящих режимов в задачах теории дифференциальных игр сыграло наряду с правилом экстремального сдвига важную роль при доказательстве фундаментальной теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [19]).

2. Общие обозначения и определения

Используем стандартную теоретико-множественную символику: кванторы, пропозициональные связки. Как обычно, $\varnothing$ — пустое множество; def заменяет фразу “по определению”, $\exists!$ — фразу “существует и единственно”. Принимаем аксиому выбора. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Каждому объекту x сопоставляем синглетон $\{x\}$, содержащий x. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X; $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$ (элементы $\mathrm{Fin}(X)$ — непустые конечные п/м X и только они). В качестве X может использоваться семейство. Через B^A обозначаем множество всех отображений из множества A в множество B; при $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ C при действии f. Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — множества, $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$, то $f^1[\mathcal{A}] \overset{\triangle}{=} \{f^1(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$. Для любых непустых множеств M и N полагаем $(\mathrm{su})[M; N] \overset{\triangle}{=} \{f \in N^M \mid f^1(M) = N\}$, получая множество всех сюръекций M на N. Обычным образом определяем сужение отображения на непустое п/м области определения: если P и Q — множества, $f \in Q^P$ и $R \in \mathcal{P}'(P)$, то $(f|R) \in Q^R$ определяется условиями $(f|R)(x) = f(x)\ \forall x \in R$. Если $\mathbb{S}$ — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{S}))$, то $\mathbf{C}_{\mathbb{S}}[\mathcal{S}] \triangleq \{\mathbb{S} \setminus S\colon S \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{S}))$ есть семейство, двойственное к $\mathcal{S}$.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ не являются множествами, используем обычное соглашение: для всяких множества T и числа $n \in \mathbb{N}$ в виде $T^n \triangleq T^{\overline{1,n}}$ имеем множество всех кортежей $(t_i)_{i \in \overline{1,n}}$ таких, что $t_j \in T\ \forall j \in \overline{1,n}$. В качестве T может использоваться семейство (получаем кортежи, "составленные" из множеств).

Специальные семейства. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество I. Тогда

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\,\&\,(I \in \mathcal{I})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{2.1}$$

есть множество всех π-систем [20, с. 14] п/м I с "нулем" и "единицей"; π-системы из множества

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \forall x \in I \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{L}\colon (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\} \tag{2.2}$$

условимся называть *отделимыми*. В виде семейства

$$(\mathrm{LAT})_0[I] \triangleq \{\mathfrak{L} \in \pi[I] \mid A \cup B \in \mathfrak{L}\ \forall A \in \mathfrak{L}\ \forall B \in \mathfrak{L}\} \tag{2.3}$$

имеем множество всех решеток п/м I с "нулем" и "единицей" (в связи с (2.3) см. (2.1)). При этом, как легко видеть,

$$\begin{aligned}(\mathrm{alg})[I] &\triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\}\\ &= \{\mathcal{A} \in \tilde{\pi}^0[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[I]),\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \Big\{\tau \in \pi[I] \,\Big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[I]). \tag{2.5}$$

Итак, алгебры п/м I (см. (2.4)) и топологии на I (см. (2.5)) являются решетками из семейства (2.3). Важный класс отделимых π-систем, не являющихся, вообще говоря, решетками, составляют п/а. В этой связи при $\mathcal{I} \in \pi[I],\ M \in \mathcal{P}(I)$ и $n \in \mathbb{N}$ введем

$$\Delta_n(M, \mathcal{I}) = \Big\{(J_k)_{k \in \overline{1,n}} \in \mathcal{I}^n \,\Big|\, (M = \bigcup_{k=1}^{n} J_k)\,\&\,(J_p \cap J_q = \varnothing\ \forall p \in \overline{1,n}\ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\})\Big\}.$$

Тогда $\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(I \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\pi}^0[I])$ есть множество всех п/а п/м I; $(\mathrm{alg})[I] \subset \Pi[I]$. Если $\mathcal{J} \in \Pi[I]$, то $\mathbf{a}^0_I(\mathcal{J}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(A, \mathcal{J}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I]$ есть алгебра, порожденная п/а $\mathcal{J}$. Элементы семейства

$$(\mathbf{q} - \mathrm{alg})[I] \triangleq \Big\{\mathcal{L} \in \pi[I] \,\Big|\, \forall L \in \mathcal{L}\ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\colon I \setminus L = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{K}} \Lambda\Big\} \tag{2.6}$$

условимся называть *квазиалгебрами* п/м I; $\Pi[I] \subset (\mathbf{q} - \mathrm{alg})[I] \subset \tilde{\pi}^0[I]$. В итоге имеем цепочку

$$(\mathrm{alg})[I] \subset \Pi[I] \subset (\mathbf{q} - \mathrm{alg})[I] \subset \tilde{\pi}^0[I] \subset \pi[I] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)). \tag{2.7}$$

В дополнение к (2.7) напомним, что (см. (2.4), (2.5)) $(\mathrm{alg})[I] \subset (\mathrm{LAT})_0[I]$ и $(\mathrm{top})[I] \subset (\mathrm{LAT})_0[I]$.

Фильтры и базы фильтров. Полагаем в дальнейшем, что

$$\beta_0[I] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\}, \tag{2.8}$$

получая множество всех БФ множества I. В виде

$$\mathfrak{F}[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\,\& \\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall J \in \mathcal{P}(I)\ (F \subset J) \Longrightarrow (J \in \mathcal{F}))\} \tag{2.9}$$

имеем множество всех фильтров множества I, а в виде

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I]\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{2.10}$$

— множество всех у/ф I. Стандартный способ построения фильтров реализуется посредством баз (см. (2.8)): если $\mathcal{B} \in \beta_0[I]$, то

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \overset{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset F\} \in \mathfrak{F}[I]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I]. \tag{2.11}$$

Хорошо известно [5, гл. I] следующее свойство мажорирования:

$$\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I]\ \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]\colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U}. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) получаем очевидное следствие:

$$\forall \mathcal{B} \in \beta_0[I]\ \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]\colon \mathcal{B} \subset \mathcal{U}; \tag{2.13}$$

это свойство широко используется в дальнейшем. Точки I отождествляются с тривиальными у/ф: $(I - \mathrm{ult})[x] \overset{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(I) \mid x \in G\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]\ \forall x \in I$.

Фильтры π-систем. В пределах настоящего пункта фиксируем, наряду с множеством I, $I \neq \varnothing$, также π-систему $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Здесь и далее пару $(I, \mathcal{I})$ именуем ИП, понимая, конечно, данный термин расширительно. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\,\& \\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{I}\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\} \tag{2.14}$$

есть множество всех фильтров ИП $(I, \mathcal{I})$. Кроме того, в виде

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall L \in \mathcal{I}\ (L \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\} \tag{2.15}$$

имеем [8, (5.8)] непустое множество всех у/ф ИП $(I, \mathcal{I})$. Тогда (см. [3, разд. 2.4; 4, гл. I])

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I]. \tag{2.16}$$

В то же время аналог (2.16) для у/ф уже не имеет, вообще говоря, места (см. [8, замечание 5.3]). Из (2.14), (2.16) следует, что

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I]. \tag{2.17}$$

В связи с (2.16), (2.17) отметим также следующее известное [3, (2.4.5)] равенство:

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) = \{\mathcal{F} \cap \mathcal{I}\colon \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I]\}. \tag{2.18}$$

В связи с аналогом (2.16) для случая тривиальных у/ф множества I отметим, что [21, (5.9)]

$$(\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]) \Longleftrightarrow ((I - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\ \forall x \in I). \tag{2.19}$$

Ниже рассматриваются обобщения свойства (2.19) на случай произвольных у/ф множества I (важно добиться "распространения" положения в правой части (2.19) на случай свободных [6, 3.6] у/ф). Отметим легко проверяемое свойство

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\ \exists \mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \colon \mathcal{U} = \mathfrak{U} \cap \mathcal{I}. \tag{2.20}$$

В (2.20) имеем (по смыслу) суждение о продолжаемости у/ф с сохранением максимальности.

Введем в рассмотрение свободные у/ф ИП $(I, \mathcal{I})$, полагая, что

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \,\Big|\, \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing \Big\}$$

(множество всех свободных у/ф рассматриваемого ИП); $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \setminus \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I})$, где $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{(I - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{I} \colon x \in I\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{I}))$ — множество всех тривиальных фильтров ИП $(I, \mathcal{I})$. При $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]$ множества $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I})$ и $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I})$ образуют разбиение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$.

Полагаем далее, что $\beta_I^0(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[I] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{I}\}$, выделяя тем самым БФ, состоящие из "измеримых" множеств.

3. Некоторые частные случаи

В настоящем разделе фиксируем непустое множество I, оснащаемое различными типами решеток (п/м I), рассматриваемых как π-системы (см. (2.7)) в конструкциях, подобных (2.17). С учетом [9, (10.6.13)] имеем, что

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\ \forall \mathcal{I} \in \Pi[I]\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]. \tag{3.1}$$

Как следствие получаем из (2.7) и (3.1), что

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\ \forall \mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[I]\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]. \tag{3.2}$$

В связи с (3.2) напомним следующее хорошо известное свойство [22, *I.2.3]:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A}\ (A \in \mathcal{U}) \vee (I \setminus A \in \mathcal{U})\}\ \forall \mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[I] \tag{3.3}$$

(подробнее см. [3, предложение 2.2.6]). Из (3.3) следует (поскольку $\mathcal{P}(I) \in (\mathrm{alg})[I]$), что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \forall A \in \mathcal{P}(I)\ (A \in \mathcal{U}) \vee (I \setminus A \in \mathcal{U})\}. \tag{3.4}$$

Далее отметим, что [8, § 6] $\forall \mathcal{J} \in (\mathrm{LAT})_0[I]\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\ \forall A \in \mathcal{J}\ \forall B \in \mathcal{J}$

$$(A \cup B \in \mathcal{U}) \Longrightarrow ((A \in \mathcal{U}) \vee (B \in \mathcal{U})). \tag{3.5}$$

С учетом (2.3) рассуждением по индукции проверяется, что $\forall \mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_0[I]\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{L})$

$$\bigcup_{L \in \mathcal{K}} L \in \mathfrak{L}. \tag{3.6}$$

В свою очередь, с учетом (3.5), (3.6) устанавливается (по индукции), что $\forall \mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_0[I]\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{L})$

$$\Big(\bigcup_{L \in \mathcal{K}} L \in \mathcal{U}\Big) \Longrightarrow (\exists \Lambda \in \mathcal{K} \colon \Lambda \in \mathcal{U}). \tag{3.7}$$

Учтем, что $\mathcal{P}(I) \in (\mathrm{LAT})_0[I]$. Тогда из (3.7) вытекает, что $\forall \mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}(I))$

$$\Big(\bigcup_{L \in \mathcal{K}} L \in \mathfrak{U}\Big) \Longrightarrow (\exists \Lambda \in \mathcal{K} \colon \Lambda \in \mathfrak{U}). \tag{3.8}$$

4. Сужение ультрафильтров

В настоящем разделе фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Рассмотрим условия, при которых реализуется аналог (2.18) в классе у/ф. В этой связи отметим, что [9, (10.6.15)]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{I} \colon \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]\} \ \forall \mathcal{I} \in \Pi[\mathbf{I}]. \tag{4.1}$$

Свойство (4.1) допускает обобщение, рассматриваемое ниже.

Предложение 4.1. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathbf{q} - \mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, *то* $\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]$. С учетом (2.7) и (2.18) получаем, что

$$\mathfrak{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{4.2}$$

Покажем, что $\mathfrak{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В самом деле, допустим противное: $\mathfrak{U} \cap \mathcal{L} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда согласно (2.15), (4.2) для некоторого множества $A \in \mathcal{L} \setminus (\mathfrak{U} \cap \mathcal{L})$

$$A \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}. \tag{4.3}$$

Поскольку $\mathcal{L}$ — квазиалгебра, то согласно (2.6) для некоторого семейства $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ справедливо равенство

$$\mathbf{I} \setminus A = \bigcup_{L \in \mathcal{K}} L. \tag{4.4}$$

Напомним, что $A \in \mathcal{L}$ и, вместе с тем, $A \notin \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}$. Тогда $A \notin \mathfrak{U}$ и как следствие (см. (3.4)) $\mathbf{I} \setminus A \in \mathfrak{U}$ (поскольку $\mathfrak{U}$ есть у/ф). С учетом (4.4) получаем, что

$$\bigcup_{L \in \mathcal{K}} L \in \mathfrak{U}. \tag{4.5}$$

Из (3.8) и (4.5) имеем для некоторого множества $M \in \mathcal{K}$ свойство $M \in \mathfrak{U}$, а тогда $M \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}$ и согласно (4.3) $A \cap M \neq \varnothing$. Последнее невозможно, поскольку (см. (4.4)) $M \subset \mathbf{I} \setminus A$. Противоречие означает, что на самом деле $\mathfrak{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Предложение доказано.

Предложение 4.2. *Если* $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]$, *то истинна импликация*

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]) \Longrightarrow (\mathcal{L} \in (\mathbf{q} - \mathrm{alg})[\mathbf{I}]). \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (4.6). Тогда, в частности, $(I - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in \mathbf{I}$. Поэтому (см. (2.19)) $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$. Покажем, что

$$\forall L \in \mathcal{L} \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \colon \mathbf{I} \setminus L = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{K}} \Lambda. \tag{4.7}$$

Допустим противное: для некоторого множества $A \in \mathcal{L}$

$$\mathbf{I} \setminus A \neq \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{K}} \Lambda \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}). \tag{4.8}$$

Тогда $A \neq \varnothing$ и $A \neq \mathbf{I}$, при этом $\mathfrak{L} \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid L \subset \mathbf{I} \setminus A\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и, более того (см. (2.2)), $\mathbf{I} \setminus A = \bigcup\limits_{L \in \mathfrak{L}} L$. Вместе с тем из (4.8) легко следует свойство $\mathbf{I} \setminus (A \cup (\bigcup\limits_{L \in \mathcal{K}} L)) \neq \varnothing \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{L})$. Поэтому

$$\mathfrak{B} \overset{\triangle}{=} \Big\{\mathbf{I} \setminus \Big(A \cup \Big(\bigcup_{L \in \mathcal{K}} L\Big)\Big) \colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{L})\Big\} \in \beta_0[\mathbf{I}],$$

а тогда в силу (2.13) имеем для некоторого у/ф $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]$ вложение $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$. С учетом сделанного ранее предположения $\mathfrak{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, а потому (см. (2.15))

$$(A \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}) \Longrightarrow (A \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}). \tag{4.9}$$

Посылка импликации (4.9) истинна. Действительно, пусть $\mathbb{U} \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}$. Если $\mathbb{U} \subset \mathbf{I} \setminus A$, то $\{\mathbb{U}\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{L})$, $\mathbf{I} \setminus (A \cup \mathbb{U}) \in \mathfrak{B}$ и как следствие $\mathbf{I} \setminus (A \cup \mathbb{U}) \in \mathfrak{U}$, откуда имеем свойство $\mathbf{I} \setminus \mathbb{U} \in \mathfrak{U}$, противоречащее выбору $\mathbb{U}$. Итак, остается допустить, что $\mathbb{U} \cap A \neq \varnothing$. Поскольку выбор $\mathbb{U}$ был произвольным, посылка (4.9) истинна. Поэтому (см. (4.9)) $A \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}$. Вместе с тем $\varnothing \in \mathfrak{L}$, $\{\varnothing\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{L})$, а тогда $\mathbf{I} \setminus A \in \mathfrak{B}$ и как следствие $\mathbf{I} \setminus A \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие ($A \in \mathfrak{U}$ и $\mathbf{I} \setminus A \in \mathfrak{U}$), которое и доказывает (4.7). Осталось учесть (2.6).

Предложение доказано.

Теорема 4.1. *Справедливо равенство* $(\mathbf{q} - \mathrm{alg})[\mathbf{I}] = \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к непосредственной комбинации предложений 4.1 и 4.2.

Из (2.20) и предложения 4.1 вытекает, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \colon \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]\} \ \forall \mathcal{L} \in (\mathbf{q} - \mathrm{alg})[\mathbf{I}]$. Заметим в связи с (4.1), что хотя определения полуалгебры и квазиалгебры близки, имеются квазиалгебры, не являющиеся полуалгебрами. Здесь же отметим, что $(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] = (\mathbf{q} - \mathrm{alg})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]$. Поэтому из теоремы 4.1 и предложения 4.1 получаем следующие предложение и теорему.

Предложение 4.3. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]$, *то* $(\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]) \Longrightarrow (\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}])$.

Теорема 4.2. *Справедливо равенство* $(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] = \{\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]\}$.

5. Оценочные представления множества "полных" ультрафильтров

В настоящем разделе фиксируем непустое множество I. Основное внимание уделяем поиску представлений у/ф из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$. Будем исходить при этом из того, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \forall L \in \mathcal{P}(I) \ (L \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\}. \tag{5.1}$$

Из (2.10), (5.1) следует с очевидностью, что $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \ \forall \mathcal{L} \in \pi[I]$

$$\mathcal{U} \subset \{S \in \mathcal{P}(I) \mid S \cap L \neq \varnothing \ \forall L \in \mathcal{U} \cap \mathcal{L}\}. \tag{5.2}$$

Предложение 5.1. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathbf{q} - \mathrm{alg})[I]$, *то* $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \ \exists \mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$:

$$\mathfrak{U} \subset \mathcal{U} \subset \{S \in \mathcal{P}(I) \mid S \cap L \neq \varnothing \ \forall L \in \mathfrak{U}\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получается комбинацией (5.2) и предложения 4.1.

С учетом (2.7) из предложения 5.1 извлекаются полезные частные случаи, соответствующие $\mathcal{L} \in \Pi[I]$ и $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[I]$. В последнем случае имеем

$$\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[I] \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \ \exists \mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \colon \mathfrak{U} \subset \mathcal{U} \subset \{S \in \mathcal{P}(I) \mid S \cap L \neq \varnothing \ \forall L \in \mathfrak{U}\}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим теперь пример использования (5.3), привлекая положения [10]. До конца настоящего раздела фиксируем числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $a < b$, и полагаем $I = [a, b]$ (I — невырожденный промежуток в $\mathbb{R}$). В дальнейшем при обозначении промежутков $\mathbb{R}$ (открытых, полуоткрытых и замкнутых) используем только квадратные скобки. С учетом этого фиксируем в настоящем разделе п/а $\mathcal{J} \triangleq \{J \in \mathcal{P}(I) \mid \exists c \in I \ \exists d \in I \colon (]c, d[\subset J) \& (J \subset [c, d])\} \in \Pi[I]$, а также алгебру $\mathcal{A} \triangleq \mathbf{a}_I^0(\mathcal{J}) \in (\mathrm{alg})[I]$, порожденную п/а $\mathcal{J}$. Итак, $(I, \mathcal{A})$ есть ИП с алгеброй множеств. Напомним некоторые положения [10]. В терминах множества $\beta_I^{00}(\mathcal{A}) \triangleq \{\mathcal{B} \in \beta_I^0(\mathcal{A}) \mid (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\}$ всех БУ на ИП $(I, \mathcal{A})$ имеем следующие свойства:

$$(\mathcal{J}_t^{(-)} \triangleq \{[c, t[\colon c \in [a, t[\} \in \beta_I^{00}(\mathcal{A})\ \forall t \in]a, b])\ \& \\ (\mathcal{J}_t^{(+)} \triangleq \{]t, c]\colon c \in]t, b]\} \in \beta_I^{00}(\mathcal{A})\ \forall t \in [a, b[). \tag{5.4}$$

Оказывается [10], что у/ф, порожденные базами (5.4), исчерпывают $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A})$, а потому

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) = \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{A}) \cup \{(I - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}] \cap \mathcal{A}\colon t \in]a, b]\} \cup \{(I - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}] \cap \mathcal{A}\colon t \in [a, b[\}. \tag{5.5}$$

В (5.5) имеем исчерпывающее описание множества всех у/ф ИП $(I, \mathcal{A})$. С учетом (3.2) получаем, что $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$. Данное обстоятельство (см. также (5.5)) позволяет применить (5.3) для изучения $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$. Здесь важно то, что (5.5) полностью определяет $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. В этой связи рассмотрим одно полезное представление, связанное с пространством $B(I, \mathcal{A})$ [23, гл. IV]. Условимся о соглашении: для всяких множеств M, $M \neq \varnothing$, и $N \in \mathcal{P}(M)$ через $\chi_N[M]$ обозначаем индикатор N [22, с. 56]: $\chi_N[M] \in \mathbb{R}^M$ и при этом $\chi_N[M](x) \triangleq 1$ при $x \in N$ и $\chi_N[M](x) \triangleq 0$ при $x \in M \setminus N$, т. е. M играет роль параметра, характеризующего область определения индикатора.

Через $\mathbb{B}(I)$ обозначаем множество всех ограниченных в/з функций на I; $\mathbb{B}(I) \subset \mathbb{R}^I$. Линейное пространство $\mathbb{B}(I)$ оснащаем обычной sup-нормой $\|\cdot\|$ [23, с. 261]. Если $L \in \mathcal{P}(I)$, то полагаем $\chi_L \triangleq \chi_L[I]$. При $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[I]$ через $B_0(I, \mathcal{L})$ обозначаем линейную оболочку множества $\{\chi_L\colon L \in \mathcal{L}\}$ (линейные операции в $\mathbb{R}^I$ определяем поточечно), а замыкание $B_0(I, \mathcal{L})$ в смысле $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|)$ — через $B(I, \mathcal{L})$, что согласуется с [23]. Получаем банахово пространство, у которого $B^*(I, \mathcal{L})$ — топологическое сопряженное к $B(I, \mathcal{L})$ — изометрически изоморфно пространству $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ всех ограниченных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$ в (сильной) норме-вариации (см. [23, гл. IV; 24, §§ 3.6, 4.11]). Отображение

$$\mu \longmapsto \Big(\int_I f\, d\mu\Big)_{f \in B(I, \mathcal{L})}\colon \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(I, \mathcal{L}),$$

где интеграл понимается в простейшем смысле [24, гл. 3], определяет изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(I, \mathcal{L})$ (при традиционных вариантах нормирования). Для наших целей существенны случаи $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{P}(I)$, при этом $\mathbb{B}(I) = B(I, \mathcal{P}(I))$.

Другой вариант индикатора получаем, рассматривая $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[I]$; имеется в виду $\mathbb{X}_{\mathcal{S}}^{(\mathcal{L})} \triangleq \chi_{\mathcal{S}}[\mathcal{L}]$. В качестве $\mathcal{S}$ можно использовать у/ф ИП $(I, \mathcal{L})$. Тогда $\mathbb{X}_{\mathcal{U}}^{(\mathcal{L})} \in \mathbb{A}(\mathcal{L})\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В частности, $\mathbb{X}_{\mathcal{U}} \triangleq \mathbb{X}_{\mathcal{U}}^{(\mathcal{P}(I))} \in \mathbb{A}(\mathcal{P}(I))\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$. При этом [9, теорема 10.8.1] $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[I]\ \forall f \in B(I, \mathcal{L})\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists U \in \mathcal{U}\colon$

$$\Big| f(x) - \int_I f\, d\mathbb{X}_{\mathcal{U}}^{(\mathcal{L})} \Big| < \varepsilon \quad \forall x \in U. \tag{5.6}$$

В силу (5.6) можно при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[I]$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ рассматривать

$$\Big(\int_I f\, d\mathbb{X}_{\mathcal{U}}^{(\mathcal{L})}\Big)_{f \in B(I, \mathcal{L})} \in B^*(I, \mathcal{L}) \tag{5.7}$$

как правило сопоставления (ярусной) в/з функции из $B(I, \mathcal{L})$ ее предела по у/ф $\mathcal{U}$. Используем (5.7) при $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{P}(I)$. В последнем случае имеем при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$, что

$$\Big(\int_I f\, d\mathbb{X}_{\mathcal{U}}\Big)_{f \in \mathbb{B}(I)} \in \mathbb{B}^*(I), \tag{5.8}$$

где $\mathbb{B}^*(I)$ — топологическое сопряженное к $\mathbb{B}(I)$ (пространство ограниченных линейных функционалов на $\mathbb{B}(I)$). Согласно (5.6) $\forall f \in \mathbb{B}(I)$ $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ $\exists U \in \mathcal{U}$:

$$\Big| f(x) - \int\limits_I f\, d\mathbb{X}_{\mathcal{U}} \Big| < \varepsilon \quad \forall x \in U. \tag{5.9}$$

Напомним здесь же, что (при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$) $\mathbb{X}^{(\mathcal{A})}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{A}} = (\mathbb{X}_{\mathcal{U}} | \mathcal{A})$ [9, (10.6.2)], а потому (см. [24, (4.4.27)])

$$\int\limits_I f\, d\mathbb{X}^{(\mathcal{A})}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{A}} = \int\limits_I f\, d\mathbb{X}_{\mathcal{U}} \quad \forall f \in B(I, \mathcal{A}). \tag{5.10}$$

Вернемся к обсуждению (5.5), учитывая, что $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{A})) \vee (\exists t \in]a, b] \colon \mathcal{U} \cap \mathcal{A} = (I - \mathbf{fi})[\mathcal{J}^{(-)}_t] \cap \mathcal{A})$$
$$\vee (\exists t \in [a, b[\colon \mathcal{U} \cap \mathcal{A} = (I - \mathbf{fi})[\mathcal{J}^{(+)}_t] \cap \mathcal{A}). \tag{5.11}$$

Все возможности, отмеченные в (5.11), обсудим отдельно, фиксируя $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$.

1) Если $\mathfrak{U} \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{A})$, то $\exists! x \in I \colon \mathfrak{U} = (I - \mathrm{ult})[x]$ (учитываем, что $\{s\} = [s, s] \in \mathcal{A}$ $\forall s \in I$).

2) Пусть $\mathfrak{U} \cap \mathcal{A} = (I - \mathbf{fi})[\mathcal{J}^{(-)}_p] \cap \mathcal{A}$ для некоторого числа $p \in]a, b]$. Тогда (см. (5.4))

$$[c, p[\in \mathfrak{U} \cap \mathcal{A} \ \forall c \in [a, p[. \tag{5.12}$$

При этом $\mathfrak{U} \subset \{S \in \mathcal{P}(I) \mid S \cap [c, p[\neq \varnothing \ \forall c \in [a, p[\}$. Понятно (см. (2.9)), что $I \setminus [c, p[\notin \mathfrak{U}$ $\forall c \in [a, p[$. Напомним с учетом (5.10), что [10, предложение 7.1] $\forall f \in B(I, \mathcal{A})$ $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ $\exists \delta \in]0, \infty[$:

$$\Big| f(x) - \int\limits_I f\, d\mathbb{X}_{\mathfrak{U}} \Big| < \varepsilon \quad \forall x \in]p - \delta, p[\cap I. \tag{5.13}$$

Согласно (5.13) имеем, что (интегральный) функционал

$$\Big(\int\limits_I f\, d\mathbb{X}_{\mathfrak{U}} \Big)_{f \in \mathbb{B}(I)} \in \mathbb{B}^*(I) \tag{5.14}$$

осуществляет на $B(I, \mathcal{A})$ вычисление предела слева в точке p. С другой стороны, из (5.9) вытекает (см. (5.12)), что $\forall f \in \mathbb{B}(I)$ $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ $\exists U \in \mathfrak{U}$:

$$\Big| f(x) - \int\limits_I f\, d\mathbb{X}_{\mathfrak{U}} \Big| < \varepsilon \quad \forall c \in [a, p[\quad \forall x \in U \cap [c, p[. \tag{5.15}$$

При этом согласно (5.12) для множества U в (5.15) $U \cap [c, p[\neq \varnothing$ $\forall c \in [a, p[$. Итак, результат действия функционала (5.14) на функцию из $\mathbb{B}(I)$ зависит только от значений, принимаемых данной функцией в сколь угодно малой левой полуокрестности точки p. Это позволяет (см. (5.13)) рассматривать (5.14) как функционал обобщенного предела слева в точке p (имеем аналогию с банаховым пределом [25, с. 88]).

3) Пусть $\mathfrak{U} \cap \mathcal{A} = (I - \mathbf{fi})[\mathcal{J}^{(+)}_q] \cap \mathcal{A}$ для некоторого числа $q \in [a, b[$. При этом (см. (5.4))

$$]q, c] \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{A} \ \forall c \in]q, b]. \tag{5.16}$$

Тогда $\mathfrak{U} \subset \{S \in \mathcal{P}(I) \mid S \cap]q, c] \neq \varnothing \ \forall c \in]q, b]\}$. При этом (см. (2.9)) $I \setminus]q, c] \notin \mathfrak{U}$ $\forall c \in]q, b]$. Напомним, что (см. (5.10), [10, предложение 7.1]) $\forall f \in B(I, \mathcal{A})$ $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ $\exists \delta \in]0, \infty[$

$$\Big| f(x) - \int\limits_I f\, d\mathbb{X}_{\mathfrak{U}} \Big| < \varepsilon \quad \forall x \in]q, q + \delta[\cap I. \tag{5.17}$$

Итак (см. (5.17)), функционал (5.14) реализует вычисление предела справа при действии на функции из $B(I, \mathcal{A})$. Однако согласно (5.9) $\forall f \in \mathbb{B}(I)\ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists U \in \mathfrak{U}$:

$$\Big| f(x) - \int\limits_I f\, d\mathbb{X}_{\mathfrak{U}} \Big| < \varepsilon \quad \forall c \in]q, b] \quad \forall x \in U \cap]q, c]. \tag{5.18}$$

Отметим (см. (5.16)), что для множества U из (5.18) $U \cap]q, c] \neq \varnothing\ \forall c \in]q, b]$. Итак (см. (5.18)), результат действия функционала (5.14) на любую функцию из $\mathbb{B}(I)$ зависит только от значений, принимаемых данной функцией в сколь угодно малой правой полуокрестности точки q. Это позволяет (см. (5.17)) рассматривать (5.14) как функционал обобщенного предела справа в точке q (снова имеем аналогию с банаховым пределом [25, с. 88]).

Возвращаясь к (5.11), получаем, поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, что каждый у/ф из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ "привязан" определенным образом к некоторой точке из I: соответствующий этому у/ф интегральный функционал есть либо операция вычисления (значения функции в данной точке), либо односторонний обобщенный предел. Никаких других у/ф множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ не содержит (отображение $\mathcal{U} \longmapsto \Big(\int_I f\, d\mathbb{X}_{\mathcal{U}}\Big)_{f \in \mathbb{B}(I)} : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \longrightarrow \mathbb{B}^*(I)$ биективно, а потому описание $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ в терминах функционалов (5.8) правомерно).

6. Фильтры топологий

Отметим, что согласно (2.5) топологии могут рассматриваться как варианты π-систем из множества (2.1). Этот вариант представляется интересным в связи с исследованием пространства отображений из ИП в ТП (здесь ИП понимается расширительно; см. разд. 2), для которых образы у/ф являются сходящимися БФ (см. [21]). В качестве таких отображений уместно (с учетом (2.5)) попытаться использовать непрерывные. Некоторые конструкции такого рода обсуждаются в дальнейшем. Фиксируем в настоящем разделе непустое множество E и топологию $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, которую предполагается использовать в качестве π-системы из множества (2.1). Тем самым реализуется ТП (E, τ), которое сейчас рассматривается как вариант ИП разд. 2. С учетом этого введем в рассмотрение множества $\mathbb{F}^*(\tau)$ и $\mathbb{F}_0^*(\tau)$. Тогда, в частности, согласно (2.16) $\mathcal{F} \cap \tau \in \mathbb{F}^*(\tau)$ при $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ и как следствие (см. (2.17))

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \tau \in \mathbb{F}^*(\tau)\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]. \tag{6.1}$$

При этом согласно (2.15) имеем (см. (2.1)), что

$$\mathbb{F}_0^*(\tau) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\tau) \mid \forall G \in \tau\ (G \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (G \in \mathcal{U})\}. \tag{6.2}$$

Если $x \in E$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$ и, в частности, $N_\tau^0(x) \in \beta_0[E]$, а потому

$$N_\tau(x) \triangleq (E - \mathbf{fi})[N_\tau^0(x)] \in \mathfrak{F}[E] \tag{6.3}$$

есть фильтр окрестностей x в смысле [5, гл. I] ($N_\tau^0(x)$ и $N_\tau(x)$ не обладают, вообще говоря, максимальностью). Если $M \in \mathcal{P}(E)$, то $\mathrm{cl}(M, \tau)$ есть def замыкание M в ТП (E, τ). Кроме того, в терминах семейства $\langle \tau \rangle_M \triangleq \{G \in \tau \mid G \subset M\} \in \mathcal{P}'(\tau)$ определяется внутренность M: $(\tau - \mathrm{Int})[M]$ есть def объединение всех множеств $G \in \langle \tau \rangle_M$. В частности, при $S \in \mathcal{P}(E)$ определено $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(S, \tau)] \in \tau$. Если $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(S, \tau)] = \varnothing$, то S нигде не плотно в смысле ТП (E, τ). При $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ определены множества $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B, \tau)]$, $B \in \mathcal{B}$. Иногда потребуются открытые окрестности множеств: если $M \in \mathcal{P}(E)$, то $\mathcal{N}_\tau^0[M] \triangleq \{G \in \tau \mid M \subset G\}$ (если $M \neq \varnothing$, то $\mathcal{N}_\tau^0[M] \in \mathbb{F}^*(\tau)$). Если $\Sigma \in \mathcal{P}(E)$, то $(\tau - \mathrm{Fr})[\Sigma] \triangleq \mathrm{cl}(\Sigma, \tau) \cap \mathrm{cl}(E \setminus \Sigma, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$ есть граница Σ. Наконец, следуя [5, гл. I], определяем сходимость БФ в ТП: $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]\ \forall y \in E$

$$(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Longrightarrow} y) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(y) \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]). \tag{6.4}$$

В частности, определена сходимость фильтров и, кроме того, $\mathbb{F}_0^*(\tau) \subset \mathbb{F}^*(\tau) \subset \beta_0[E]$, а потому (6.4) определяет сходимость “открытых” фильтров и у/ф.

Предложение 6.1. *Если* $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$, *то истинна следующая импликация*: $((E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]\cap\tau \in \mathbb{F}_0^*(\tau)) \Longrightarrow ((\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B,\tau)] \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} \overset{\triangle}{=} (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \tau = \{G \in \tau \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset G\} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$. Пусть вместе с тем $B_0 \in \mathcal{B}$ обладает свойством $(\tau-\mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B_0,\tau)] = \varnothing$. Тогда $W \overset{\triangle}{=} E\setminus\mathrm{cl}(B_0,\tau)\in\tau$ всюду плотно в (E,τ): $E = \mathrm{cl}(W,\tau)$. С учетом (2.8) проверяется, что $W \notin \mathcal{U}$ и (согласно (6.2)) $(W \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (W \in \mathcal{U})$. Поэтому для некоторого $V \in \mathcal{U}$ имеем $W \cap V = \varnothing$. Вместе с тем

$$V \cap \mathrm{cl}(W,\tau) = V \cap E = V \neq \varnothing. \tag{6.5}$$

Пусть (см. (6.5)) $v \in V$. Тогда $V \in N_\tau^0(v)$ и, поскольку $v \in \mathrm{cl}(W,\tau)$, непременно $W \cap V \neq \varnothing$, что противоречит выбору V. Противоречие доказывает, что на самом деле в $\mathcal{B}$ нигде не плотного множества B_0 существовать не может и $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B,\tau)] \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B}$.

Предложение доказано.

Введем в рассмотрение следующее множество, “составленное” из БФ:

$$\beta_0^\natural[E|\tau] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[E] \mid \forall G \in \tau \ (G \cap B \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B}) \Longrightarrow (G \in (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}])\}. \tag{6.6}$$

Предложение 6.2. *Если* $\mathcal{B} \in \beta_0^\natural[E|\tau]$, *то истинна следующая эквиваленция*: $((E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]\cap \tau \in \mathbb{F}_0^*(\tau)) \Longleftrightarrow ((\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B,\tau)] \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B})$.

Доказательство. Согласно (6.1) $\mathcal{U} \overset{\triangle}{=} (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \tau \in \mathbb{F}^*(\tau)$. Пусть $\mathcal{U} \notin \mathbb{F}_0^*(\tau)$. Тогда в силу (6.2) для некоторого множества $V \in \tau \setminus \mathcal{U}$ имеем свойство

$$V \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}. \tag{6.7}$$

Легко видеть, что $\mathcal{N}_\tau^0[B] \subset \mathcal{U} \ \forall B \in \mathcal{B}$. Тогда согласно (6.7)

$$V \cap G \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B} \ \forall G \in \mathcal{N}_\tau^0[B]. \tag{6.8}$$

Как следствие получаем следующее свойство:

$$\mathrm{cl}(V,\tau) \cap B \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B}. \tag{6.9}$$

В самом деле, пусть $B_* \in \mathcal{B}$. Из (6.8) следует, что

$$V \cap G \neq \varnothing \ \forall G \in \mathcal{N}_\tau^0[B_*]. \tag{6.10}$$

При этом $\Omega \overset{\triangle}{=} E \setminus \mathrm{cl}(V,\tau) \in \tau$, а потому $(B_* \subset \Omega) \Longrightarrow (\Omega \in \mathcal{N}_\tau^0[B_*])$. С учетом (6.10) имеем $B_* \setminus \Omega \neq \varnothing$, т. е. $B_* \cap \mathrm{cl}(V,\tau) \neq \varnothing$. Поскольку выбор B_* был произвольным, (6.9) установлено. Коль скоро $V \in \tau$, имеем равенство

$$(\tau - \mathrm{Fr})[V] = \mathrm{cl}(V,\tau) \setminus V. \tag{6.11}$$

Как следствие $\mathrm{cl}(V,\tau) = V \cup (\tau-\mathrm{Fr})[V]$. По выбору $\mathcal{B}$ имеем следующую импликацию: $(V \cap B \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B}) \Longrightarrow (V \in (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}])$. Это означает, что $(V \cap B \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{B}) \Longrightarrow (V \in \mathcal{U})$. По выбору V получаем, что $V \cap B_0 = \varnothing$ для некоторого множества $B_0 \in \mathcal{B}$. Легко видеть, что

$$\mathcal{B}_0 \overset{\triangle}{=} \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset B_0\} \in \beta_0[E]. \tag{6.12}$$

Из (6.12) легко следует, что $\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_0 \colon B_2 \subset B_1$. Итак, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_0$ — суть эквивалентные БФ. В частности, $\mathcal{U} = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_0] \cap \tau$, причем $\forall G \in \tau$

$$(G \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}_0) \Longrightarrow (G \in \mathcal{U}). \tag{6.13}$$

Вместе с тем, $V \cap B = \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}_0$. С учетом (6.9) и (6.11) получаем, следовательно, что

$$(\tau - \mathrm{Fr})[V] \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}_0. \tag{6.14}$$

Для множества $\mathbb{H} \overset{\triangle}{=} E \setminus (\tau - \mathrm{Fr})[V] = (E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau)) \cup V \in \tau$ имеем равенство $(\tau - \mathrm{Fr})[V] \cap \mathbb{H} = \varnothing$. С учетом (6.13) получаем, что $(\mathbb{H} \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}_0) \Longrightarrow (\mathbb{H} \in \mathcal{U})$. Поэтому согласно (6.14) имеем истинность импликации $(\mathbb{H} \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}_0) \Longrightarrow ((\tau - \mathrm{Fr})[V] \cap \mathbb{H} \neq \varnothing)$, а потому (см. определение $\mathbb{H}$) для некоторого множества $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0$ справедливо равенство $\mathbb{H} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, т. е. $\mathbf{B} \subset E \setminus \mathbb{H}$ и, в результате, $\mathbf{B} \subset (\tau - \mathrm{Fr})[V]$. Поэтому $\mathrm{cl}(\mathbf{B}, \tau) \subset (\tau - \mathrm{Fr})[V]$. Из (6.11) легко следует теперь, что $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(\mathbf{B}, \tau)] = \varnothing$. Поскольку, в частности, $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ (см. (6.12)), то $\exists B \in \mathcal{B} \colon (\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B, \tau)] = \varnothing$. Тем самым установлена истинность импликации

$$(\mathcal{U} \notin \mathbb{F}_0^*(\tau)) \Longrightarrow (\exists B \in \mathcal{B} \colon (\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B, \tau)] = \varnothing). \tag{6.15}$$

Из (6.15) вытекает, в свою очередь, что

$$((\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B, \tau)] \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}) \Longrightarrow (\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)). \tag{6.16}$$

С учетом предложения 6.1 имеем, однако, истинность импликации $(\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)) \Longrightarrow ((\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B, \tau)] \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B})$. Из (6.16) и определения $\mathcal{U}$ получаем требуемое утверждение.

Предложение доказано.

В связи с предложением 6.2 напомним, что [10, предложение 3.1] $\forall \mathcal{B} \in \beta_E^0(\tau)$

$$((E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \tau \in \mathbb{F}_0^*(\tau)) \Longleftrightarrow (\forall G \in \tau\ (G \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}) \Longrightarrow (\exists B \in \mathcal{B} \colon B \subset G)). \tag{6.17}$$

Особенностью предложения 6.2 является то, что в нем рассматривается БФ, не обязательно состоящая из открытых множеств, в отличие от (6.17). Если же $\mathcal{B} \in \beta_E^0(\tau)$, то при $B \in \mathcal{B}$ непременно выполнено $(\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B, \tau)] \neq \varnothing$, поскольку $\varnothing \neq B \subset \mathrm{cl}(B, \tau)$.

Предложение 6.3. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$, *то* $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(U, \tau) = \{x \in E \mid \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из определений с учетом (6.2).

Рассмотрим множество

$$\mathbb{Z}[\tau] \overset{\triangle}{=} \Big\{ \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\tau) \,\Big|\, \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z}) \Big\}$$

всех центрированных семейств открытых множеств в ТП (E, τ). В силу предложения 6.3

$$\Big(\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{cl}(G, \tau) \neq \varnothing\ \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\tau] \Big) \Longrightarrow (\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)\ \exists x \in E \colon \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x). \tag{6.18}$$

При доказательстве (6.18) используется тот очевидный факт (см. (2.14)), что $\mathbb{F}^*(\tau) \subset \mathbb{Z}[\tau]$. В связи с условием посылки импликации (6.18) отметим, что данное условие выполнено в классе H-замкнутых ТП (когда дополнительно предполагается аксиома T_2; см. [6]). С другой стороны, в общем случае (E, τ)

$$(\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)\ \exists x \in E \colon \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x) \Longrightarrow \Big(\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{cl}(G, \tau) \neq \varnothing\ \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\tau] \Big). \tag{6.19}$$

З а м е ч а н и е 6.1. Свойства, подобные (6.18), (6.19), известны в случае H-замкнутых ТП (см., например, [26, замечание 4.13]). Поскольку отделимость (E,τ) здесь не предполагалась, приведем схему доказательства, полагая выполненным утверждение посылки доказываемой импликации (6.19). Итак, пусть все у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\tau)$ сходятся. Выберем произвольно $\mathcal{T} \in \mathbb{Z}[\tau]$. Посредством БФ

$$\mathcal{T}_0 \overset{\triangle}{=} \Big\{ \bigcap_{G \in \mathcal{K}} G \colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{T}) \Big\} \in \beta_0[E] \tag{6.20}$$

реализуется фильтр $\mathcal{F}_0 \overset{\triangle}{=} (E-\mathbf{fi})[\mathcal{T}_0] \cap \tau \in \mathbb{F}^*(\tau)$, а потому для некоторого у/ф $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$ имеем $\mathcal{F}_0 \subset \mathfrak{U}$. Поскольку (см. (6.20)) $\mathcal{T}_0 \subset \tau$, то $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathfrak{U}$. По предположению о сходимости "открытых" у/ф имеем для некоторого $y_0 \in E$ свойство $\mathfrak{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} y_0$. С учетом предложения 6.3 и вложения $\mathcal{T} \subset \mathfrak{U}$ получаем, что $y_0 \in \bigcap\limits_{G \in \mathcal{T}} \mathrm{cl}(G,\tau)$. Поскольку выбор $\mathcal{T}$ был произвольным, импликация (6.19) установлена.

Из (6.18) и (6.19) получаем в качестве следствия, что

$$(\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)\ \exists x \in E \colon \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x) \Longleftrightarrow \Big(\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{cl}(G,\tau) \neq \varnothing\ \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\tau] \Big). \tag{6.21}$$

Если же (E,τ) — хаусдорфово ТП, то согласно (6.21) имеем, что $(\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)\ \exists! x \in E \colon \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x) \Longleftrightarrow \big(\bigcap\limits_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{cl}(G,\tau) \neq \varnothing\ \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\tau] \big)$.

7. Сходимость образов "открытых" ультрафильтров

В настоящем разделе фиксируем два ТП, (X,τ) и (Y,θ), $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$. Итак, $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $\theta \in (\mathrm{top})[Y]$. В первом из упомянутых ТП будем рассматривать те или иные у/ф, составленные из открытых множеств. Как обычно, $C(X,\tau,Y,\theta) \overset{\triangle}{=} \{ g \in Y^X \mid g^{-1}(G) \in \tau\ \forall G \in \theta \}$. В результате действия фиксированного отображения $f \in C(X,\tau,Y,\theta)$ получаем БФ в Y. При этом $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[Y]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[X]$. В частности, при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$ имеем $f^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[Y]$, и согласно (6.4) при $y \in Y$ $(f^1[\mathcal{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y) \Longleftrightarrow (\forall S \in N_\theta(y)\ \exists U \in \mathcal{U} \colon f^1(U) \subset S)$. Будем исследовать условия сходимости каждой такой БФ. Это связано с условиями, обеспечивающими принадлежность f специальному пространству отображений работы [21], которое существенно использовалось в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера. Итак, далее f — непрерывное в смысле (X,τ) и (Y,θ) отображение из множества Y^X.

Предложение 7.1. *Если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$, то справедливо равенство*

$$\{ y \in Y \mid f^1[\mathcal{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y \} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(f^1(U),\theta). \tag{7.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в левой части (7.1). Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда $\omega \in Y$ и

$$\forall S \in N_\theta(\omega)\ \exists U \in \mathcal{U} \colon f^1(U) \subset S. \tag{7.2}$$

Пусть $U_0 \in \mathcal{U}$ и $S_0 \in N_\theta(\omega)$. Используя (7.2), подберем $U^0 \in \mathcal{U}$ так, что $f^1(U^0) \subset S_0$. Тогда $U_0 \cap U^0 \neq \varnothing$ и, как следствие, $\varnothing \neq f^1(U_0 \cap U^0) \subset f^1(U_0) \cap f^1(U^0) \subset f^1(U_0) \cap S_0$. Поскольку выбор S_0 был произвольным, установлено, что $f^1(U_0) \cap S \neq \varnothing\ \forall S \in N_\theta(\omega)$. Итак, $\omega \in \mathrm{cl}(f^1(U_0),\theta)$. Коль скоро и выбор U_0 был произвольным, ω есть элемент множества-пересечения в правой части (7.1). Итак,

$$\Omega \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(f^1(U),\theta). \tag{7.3}$$

Пусть y_* — элемент множества в правой части (7.3). Тогда $y_* \in Y$ и при этом $f^1(U) \cap G \neq \varnothing$ $\forall U \in \mathcal{U}$ $\forall G \in N^0_\theta(y_*)$. Как следствие

$$U \cap f^{-1}(G) \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U} \ \forall G \in N^0_\theta(y_*). \tag{7.4}$$

С учетом непрерывности f имеем, однако, что $f^{-1}(G) \in \tau$ $\forall G \in N^0_\theta(y_*)$. Тогда в силу (6.2) из (7.4) следует, что $f^{-1}(G) \in \mathcal{U}$ $\forall G \in N^0_\theta(y_*)$. Таким образом, при $G \in N^0_\theta(y_*)$ непременно $f^1(f^{-1}(G)) \in f^1[\mathcal{U}]$ и, кроме того, $f^1(f^{-1}(G)) \subset G$. Из этих положений согласно (6.3) вытекает, что при $S \in N_\theta(y_*)$ для некоторого $B \in f^1[\mathcal{U}]$ имеет место $B \subset S$, а потому $S \in (Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{U}]]$. Итак, $N_\theta(y_*) \subset (Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{U}]]$, а потому $f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\theta}{\Longrightarrow} y_*$. В итоге $y_* \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения, противоположного (7.3).

Предложение доказано.

Предложение 7.2. *Если $f \in (\mathrm{su})[X;Y]$, то истинна импликация*

$$(\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\tau) \ \exists y \in Y\colon f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\theta}{\Longrightarrow} y) \Longrightarrow \Big(\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{cl}(G,\theta) \neq \varnothing \ \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\theta]\Big). \tag{7.5}$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (7.5). Допустим, однако, что

$$\exists \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\theta]\colon \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{cl}(G,\theta) = \varnothing. \tag{7.6}$$

С учетом (7.6) выберем и зафиксируем семейство $\mathcal{Z} \in \mathbb{Z}[\theta]$, для которого пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(G,\theta)$, $G \in \mathcal{Z}$, пусто. В силу непрерывности f $\tilde{\mathcal{Z}} \triangleq \{f^{-1}(G)\colon G \in \mathcal{Z}\} \in \mathcal{P}'(\tau)$, и, кроме того, $\mathrm{cl}(f^{-1}(A),\tau) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}(A,\theta))$ $\forall A \in \mathcal{P}(Y)$. Как следствие пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(S,\tau)$, $S \in \tilde{\mathcal{Z}}$, пусто. С другой стороны, $\tilde{\mathcal{Z}} \in \mathbb{Z}[\tau]$. В самом деле, пусть $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(\tilde{\mathcal{Z}})$. Подберем $n \in \mathbb{N}$ и биекцию $(\tilde{Z}_i)_{i \in \overline{1,n}}\colon \overline{1,n} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{K}$ (n — мощность $\mathbb{K}$), после чего выберем кортеж $(\mathbf{G}_i)_{i \in \overline{1,n}}\colon \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{Z}$ со свойством $\tilde{Z}_j = f^{-1}(\mathbf{G}_j)$ $\forall j \in \overline{1,n}$. Тогда $\mathbf{K} \triangleq \{\mathbf{G}_i\colon i \in \overline{1,n}\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})$ и в силу центрированности $\mathcal{Z}$ и сюръективности f (имеем $f^{-1}(S) \in \mathcal{P}'(X)$ при $S \in \mathcal{P}'(Y)$) получаем

$$\bigcap_{G \in \mathbb{K}} G = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{Z}_i = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(\mathbf{G}_i) = f^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i\Big) = f^{-1}\Big(\bigcap_{G \in \mathbf{K}} G\Big) \neq \varnothing.$$

Итак, требуемая центрированность семейства $\tilde{\mathcal{Z}}$ установлена, откуда следует, что $\hat{\mathcal{Z}} \triangleq \big\{\bigcap_{G \in \mathcal{K}} G\colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\tilde{\mathcal{Z}})\big\} \in \beta_0[X]$. С учетом этого введем фильтр $\hat{\mathcal{F}} \triangleq (X - \mathbf{fi})[\hat{\mathcal{Z}}] \in \mathfrak{F}[X]$ и рассмотрим “открытый” фильтр $\hat{\mathcal{F}}_0 \triangleq \hat{\mathcal{F}} \cap \tau \in \mathbb{F}^*(\tau)$ (см. (6.1)), для которого подберем “открытый” у/ф $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\tau)$ со свойством $\hat{\mathcal{F}}_0 \subset \mathfrak{U}$. При этом $\tilde{\mathcal{Z}} \subset \mathfrak{U}$. В силу максимальности $\mathfrak{U}$ (по предположению) для некоторого $y_0 \in Y$ $f^1[\mathfrak{U}] \stackrel{\theta}{\Longrightarrow} y_0$. Из предложения 7.1 следует поэтому, что

$$y_0 \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \mathrm{cl}(f^1(U),\theta). \tag{7.7}$$

В силу сюръективности f имеем $f^1(f^{-1}(T)) = T$ $\forall T \in \mathcal{P}(Y)$. Пусть $\Omega \in \mathcal{Z}$. В частности, $\Omega \in \theta \setminus \{\varnothing\}$, $f^{-1}(\Omega) \in \tilde{\mathcal{Z}}$ и, как следствие, $f^{-1}(\Omega) \in \mathfrak{U}$, причем $f^1(f^{-1}(\Omega)) = \Omega$. С учетом (7.7) получаем, что $y_0 \in \mathrm{cl}(\Omega,\theta)$. Поскольку выбор Ω был произвольным, установлено, что $y_0 \in \mathrm{cl}(G,\theta)$ $\forall G \in \mathcal{Z}$. Это противоречит выбору $\mathcal{Z}$. Полученное при условии (7.6) противоречие завершает обоснование (7.5).

Предложение доказано.

Предложение 7.3. *Пусть*

$$\Big(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} \mathrm{cl}(G,\theta) \neq \varnothing \ \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\theta]\Big) \,\&\, ((\theta - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(f^1(\mathbf{G}),\theta)] \neq \varnothing \ \forall \mathbf{G} \in \tau \setminus \{\varnothing\}). \tag{7.8}$$

Тогда $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)\ \exists y \in Y\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$, тогда $f^1[\mathfrak{U}] \in \beta_0[Y]$. Покажем, что

$$f^1[\mathfrak{U}] \in \beta_0^\natural[Y|\theta]. \tag{7.9}$$

Пусть $\mathbb{G} \in \theta$ таково, что $\mathbb{G} \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in f^1[\mathfrak{U}]$. Тогда $\mathbb{G} \cap f^1(U) \neq \varnothing\ \forall U \in \mathfrak{U}$. Это означает, что

$$f^{-1}(\mathbb{G}) \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathfrak{U}. \tag{7.10}$$

Поскольку $f^{-1}(\mathbb{G}) \in \tau$ в силу непрерывности f, имеем (см. (6.2), (7.10)) $f^{-1}(\mathbb{G}) \in \mathfrak{U}$ и как следствие $f^1(f^{-1}(\mathbb{G})) \in f^1[\mathfrak{U}]$, причем $f^1(f^{-1}(\mathbb{G})) \subset \mathbb{G}$. Тогда $\mathbb{G} \in (Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathfrak{U}]]$. Итак,

$$(\mathbb{G} \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in f^1[\mathfrak{U}]) \Longrightarrow (\mathbb{G} \in (Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathfrak{U}]]).$$

Поскольку выбор $\mathbb{G}$ был произвольным, установлено (см. (6.6)) свойство (7.9). Напомним, что $\mathfrak{U} \subset \tau \setminus \{\varnothing\}$, а потому в силу (7.8)

$$(\theta - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(B,\theta)] \neq \varnothing\ \forall B \in f^1[\mathfrak{U}]. \tag{7.11}$$

Из (7.9), (7.11) и предложения 6.2 вытекает, что

$$\mathcal{T} \overset{\triangle}{=} (Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathfrak{U}]] \cap \theta \in \mathbb{F}_0^*(\theta).$$

Из (6.18) и (7.8) следует теперь, что для некоторого $y_0 \in Y$ имеет место $\mathcal{T} \overset{\theta}{\Longrightarrow} y_0$. Это означает, что $\forall \mathbf{H} \in N_\theta(y_0)\ \exists B \in \mathcal{T}\colon B \subset \mathbf{H}$. В частности, поскольку $\mathcal{T} \subset (Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathfrak{U}]]$, имеем (см. (2.9)), что $N_\theta(y_0) \subset (Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathfrak{U}]]$. Это означает (см. (6.4)), что $f^1[\mathfrak{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y_0$ при произвольном выборе $\mathfrak{U}$.

Предложение доказано.

Следствие 7.1. *Если* (Y,θ) *— хаусдорфово* ТП *и выполнены условия* (7.8)*, то* $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$ $\exists! y \in Y\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Следствие означает, что в случае H-замкнутого ТП (Y,θ) непрерывное квазиоткрытое (см. второе условие в (7.8)) отображение переводит у/ф из множества $\mathbb{F}_0^*(\tau)$ в БФ множества Y, сходящиеся каждая к единственному элементу Y.

Возвращаясь к общему случаю ТП (Y,θ), отметим, что каждое из условий (7.8) существенно. Так, предложение 7.2 означает существенность первого условия в (7.8). В отношении существенности второго условия в (7.8) (квазиоткрытости f) отметим следующий

П р и м е р. Пусть $X = Y$, $\tau \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}(X)$ (дискретная топология), а пространство $(Y,\theta) = (X,\theta)$ H-замкнуто ((Y,θ) — хаусдорфово ТП, для которого

$$\bigcap_{G\in\mathcal{G}} \mathrm{cl}(G,\theta) \neq \varnothing\ \forall \mathcal{G} \in \mathbb{Z}[\theta]; \tag{7.12}$$

используем одно из эквивалентных определений H-замкнутости), но не компактно (примеры таких ТП известны: см. [26, 4.4]). Полагаем, что $f(x) = x\ \forall x \in X$, получая вариант $f \in$

$C(X,\tau,Y,\theta)$. Поскольку (Y,θ) некомпактно, найдется непустое центрированное семейство $\mathcal{F}$ замкнутых (в (Y,θ)) п/м Y с пустым пересечением. Тогда

$$\mathfrak{B} \triangleq \Big\{ \bigcap_{F\in\mathcal{K}} F\colon \mathcal{K}\in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})\Big\} \in \beta_0[Y], \quad \mathcal{F}\subset\mathfrak{B}.$$

Согласно (2.13) можно указать у/ф $\mathfrak{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ (учитываем, что $X=Y$), для которого $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{U}$. Ясно, что $\mathfrak{U}\in\mathbb{F}_0^*(\tau)$ по выбору τ. При этом

$$\bigcap_{U\in\mathfrak{U}} \mathrm{cl}(f^1(U),\theta) \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}(f^1(F),\theta) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing \tag{7.13}$$

(используем замкнутость множеств $F\in\mathcal{F}$ в ТП (Y,θ) и определение f). С учетом (7.13) и предложения 7.1 получаем, что

$$\{y\in Y \mid f^1[\mathfrak{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y\} = \varnothing. \tag{7.14}$$

В связи с этим (и предложением 7.3) отметим, что при $x\in X$ непременно $\{x\}\in\tau$, множество $f^1(\{x\})=\{x\}$ замкнуто в (Y,θ) (следствие отделимости (Y,θ)). Если допустить, что $\{x\}\in\theta$ $\forall x\in X$, то $\theta=\mathcal{P}(Y)=\mathcal{P}(X)=\tau$. Однако последнее невозможно.

В самом деле, поскольку (Y,θ) некомпактно, то $Y=X$ есть бесконечное множество. С учетом этого выберем и зафиксируем инъективную последовательность $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in Y^{\mathbb{N}}$ ($y_{i_1}\neq y_{i_2}$ при $i_1\neq i_2$).

Допустим, что $\theta=\tau$, т. е. θ — дискретная топология Y. Тогда

$$Y_n \triangleq \{y_i\colon i\in\mathbb{N},\ n\le i\}\in\theta \ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{7.15}$$

При этом $\mathfrak{Y}\triangleq\{Y_k\colon k\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{Z}[\theta]$. Вместе с тем, при $n\in\mathbb{N}$ множество Y_n замкнуто в (Y,θ) (см. (7.15)). Поэтому в силу (7.12)

$$\bigcap_{S\in\mathfrak{Y}} \mathrm{cl}(S,\theta) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(Y_n,\theta) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n \neq \varnothing,$$

что невозможно (см. (7.15)) в силу упомянутого свойства инъективности. Противоречие показывает, что ТП (Y,θ) не является дискретным, а тогда для некоторого $x_0\in X$ имеет место $\{x_0\}\notin\theta$. Вместе с тем $\{x_0\}$ замкнуто в (Y,θ), а потому

$$(\theta-\mathrm{Int})[\mathrm{cl}(f^1(\{x_0\}),\theta)] = (\theta-\mathrm{Int})[\{x_0\}] = \varnothing,$$

где $\{x_0\}\in\tau\setminus\{\varnothing\}$. Получили, что второе условие в (7.8) нарушено. С учетом (7.14) получили, что это условие (квазиоткрытость f) также существенно для справедливости предложения 7.3.

8. Заключение

Предложения 7.2 и 7.3 доставляют условия, при которых непрерывные отображения переводят "открытые" у/ф в сходящиеся БФ. Обсудим этот вопрос подробнее, придерживаясь подхода [11;14;21] и следуя обозначениям предыдущего раздела. Поскольку, в частности, $\tau\in\pi[X]$, определено [13, (5.3)] множество

$$\mathbb{F}_{\lim}[X;\tau;Y;\theta] = \{g\in Y^X \mid \forall\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\tau)\ \exists y\in Y\colon g^1[\mathcal{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} y\}. \tag{8.1}$$

При условиях, соответствующих (8.1), является вполне естественным вопрос о том, для каких отображений $f\in C(X,\tau,Y,\theta)$ имеет место

$$f\in\mathbb{F}_{\lim}[X;\tau;Y;\theta] \tag{8.2}$$

(сами пространства типа (8.1) были введены исходя из потребностей теории расширений; см. [13, разд. 5, 7]). В предложении 7.3 указаны условия, достаточные для справедливости (8.2) (см. (7.8)). Как уже отмечалось, каждое из условий в (7.8) существенно (см. предложение 7.2 и пример предыдущего раздела). Тем самым вопрос об осуществимости (8.2) в классе непрерывных отображений из (X, τ) в (Y, θ) решен с достаточной степенью полноты. Другой подход к построению отображений из $\mathbb{F}_{\lim}[X; \mathcal{L}; Y; \theta]$, где $\mathcal{L} \in \Pi[X]$, реализован в [11; 14; 21] для случая, когда (Y, θ) — тихоновская степень ТП, метризуемого полной метрикой. В качестве упомянутых отображений использовались операторы с ярусными компонентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 230 с.
3. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
4. **Chentsov A. G.** Finitely Additive Measures and Extensions of Abstract Control Problems // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, № 2. P. 1045–1206.
5. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
6. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
7. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Соврем. математика и ее прил. / АН Грузии. Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
8. **Ченцов А. Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
9. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2010. 541 с.
10. **Ченцов А. Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
11. **Ченцов А. Г.** Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 298–314.
12. **Ченцов А. Г.** К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 307–319.
13. **Ченцов А. Г.** К вопросу о представлении элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
14. **Ченцов А. Г.** К вопросу о представлении ультрафильтров и их применении в конструкциях расширений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 289–307.
15. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
16. **Ченцов А. Г.** Об одном примере построения множества притяжения с использованием пространства Стоуна // Вестн. Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 4. С. 108–124. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
17. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
18. **Красовский Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
19. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
20. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
21. **Ченцов А. Г.** Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–55.
22. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
23. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

24. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2008. 388 с.
25. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
26. **Александрян Р. А., Мирзаханян Э.А.** Общая топология: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1979. 336 с.

Поступила 10.12.2013

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Пыткеев Евгений Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: pyt@imm.uran.ru

Том 20 № 2 2014

УДК 519.853

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА НЕВЯЗКИ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

Для коррекции задачи выпуклого программирования с возможно противоречивой системой ограничений (несобственной задачи) применяется метод невязки — одна из стандартных процедур регуляризации некорректных оптимизационных моделей. В свою очередь, типичная для метода невязки постановка сводится к задаче минимизации той или иной штрафной функции. В работе применяются две классические штрафные функции — квадратичная штрафная функция и точная штрафная функция Еремина—Зангвилла. Для каждого подхода устанавливаются условия сходимости и оценки точности аппроксимации.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод невязки, методы штрафных функций.

V. D. Skarin. On the application of the residual method for the correction of inconsistent problems of convex programming.

For the correction of a convex programming problem with potentially inconsistent constraint system (an improper problem), we apply the residual method, which is a standard regularization procedure for ill-posed optimization models. Further, a problem statement typical for the residual method is reduced to the minimization problem for an appropriate penalty function. We apply two classical penalty functions: the quadratic penalty function and the Eremin–Zangwill exact penalty function. For each of the approaches, we establish convergence conditions and estimates for the approximation error.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, residual method, penalty function methods.

Введение

При математическом моделировании сложных систем, рассматриваемых в практических задачах исследования операций, часто возникают модели, ограничения которых носят противоречивый характер. Причиной возникновения противоречивых условий могут быть, например, приближенное задание исходной информации, дефицит необходимых ресурсов, завышенные требования к качеству решения. Частота появления подобных моделей влечет необходимость разработки соответствующих методов их коррекции. Здесь под коррекцией понимается преобразование противоречивой модели в одну из семейства разрешимых задач. При этом процедура коррекции должна быть объективной в том смысле, что для нее не требуется предварительных сведений о совместности системы ограничений исходной задачи, а в случае разрешимости последней будет найдено именно ее решение. Кроме того, предполагается, что коррекция будет оптимальной, т. е. из множества возможных аппроксимирующих задач выбирается конкретная модель, оптимизирующая определенный критерий качества коррекции.

Противоречивые модели составляют важнейший класс введенных в рассмотрение И. И. Ереминым [1; 2] несобственных задач линейного и выпуклого программирования. Исследование вопросов теории несобственных задач и построение эффективных процедур их коррекции продолжают оставаться актуальным направлением в современном математическом программировании.

Поскольку задачи с противоречивыми ограничениями могут возникать вследствие приближенного задания исходной информации, что связано с проблемой устойчивости решения,

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

то такие задачи представляют интерес также для теории и методов некорректных задач оптимизации [3; 4]. Поэтому стандартные способы регуляризации некорректных моделей, такие как методы Тихонова, квазирешений и невязки, имеет смысл рассматривать и для анализа несобственных задач. В данной работе исследуется возможность применения метода невязки для коррекции несобственных задач выпуклого программирования (НЗ ВП).

1. Постановка задачи, метод невязки

В качестве исходной рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые на $\mathbb{R}^n$ функции, $i = 0, 1, \ldots, m$ (для простоты выкладок будем считать их дифференцируемыми на $\mathbb{R}^n$). Обозначим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+\colon \inf\limits_x L(x, \lambda) > -\infty\}$, где $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ — функция Лагранжа, поставленная в соответствие задаче (1).

В задаче с противоречивыми ограничениями $X = \varnothing$. Если при этом $\Lambda \ne \varnothing$, то (1) называется [2] НЗ ВП 1-го рода. На практике чаще всего встречаются и исследуются (см., например, [2; 5; 6]) именно такие задачи. Для них характерно, что если заменить множество X на $X_\xi = \{x\colon f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$ так, чтобы стало $X_\xi \ne \varnothing$, то $\inf\{f_0(x)\colon x \in X_\xi\} > -\infty$.

Пусть $E = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+\colon X_\xi \ne \varnothing\}$, $\bar\xi = \arg\min\{\|\xi\|\colon \xi \in E\}$ (здесь $\|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы вектора, могут рассматриваться и другие нормы: $\|\cdot\|_1$ — октаэдрическая и $\|\cdot\|_\infty$ — чебышевская). Наряду с (1) сформулируем задачу

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X_{\bar\xi}\}. \tag{2}$$

Если в задаче (1) $X \ne \varnothing$, то $\bar\xi = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают. В противном случае (2) представляет собой пример оптимальной коррекции для несобственной задачи (1).

Предположим, что множество X_ξ для некоторого $\xi = \xi_0$ непусто и ограничено. Тогда E будет множеством выпуклым и замкнутым, что обеспечивает существование и единственность вектора $\bar\xi$. При этом нетрудно видеть, что $\bar\xi = f^+(\tilde x)$, где $\tilde x = \operatorname{Arg\,min}\|f^+(x)\|^2$. Отметим, что в силу ограниченности $X_{\bar\xi}$ задача (2) разрешима. Обозначим через $\bar x_0$ решение задачи (2) с минимальной нормой (нормальное решение), через $\bar f$ — оптимальное значение задачи (2).

Метод невязки регуляризации разрешимой задачи ВП в форме (1) в несколько рафинированном виде состоит [4] в решении последовательности задач, зависящих от числового параметра δ:

$$\min\{\|x\|^2\colon x \in X \cap M_\delta\}, \tag{3}$$

где $M_\delta = \{x\colon f_0(x) \le \delta\}$, $\delta \ge f^*$, f^* — оптимальное значение задачи (1). В этом случае для любого δ задача (3) имеет единственное решение x^*_δ. Нетрудно убедиться, что при $\delta \to f^*$ последовательность x^*_δ сходится к нормальному решению задачи (1).

Далее применим метод невязки для коррекции НЗ ВП.

2. Учет ограничений с помощью квадратичного штрафа

При исследовании методов регуляризации применительно к некорректным задачам условной оптимизации ограничения анализируемой модели обычно учитываются с помощью некоторой штрафной функции. Методы штрафных функций в силу простоты и универсальности идеи широко используются в теории и практике математического программирования. Метод квадратичного штрафа является одной из распространенных модификаций метода штрафных функций (см., например,[7–9]). С одной стороны, этот метод обеспечивает лишь асимптотическую эквивалентность исходной задачи и задачи со штрафом при неограниченном возрастании штрафного параметра. С другой — квадратичная штрафная функция обладает достаточно хорошими свойствами гладкости, что делает ее привлекательной с позиций численной минимизации.

Задаче (3) поставим в соответствие следующую проблему: найти

$$\min_x F_\delta(x, r), \tag{4}$$

$F_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\,\|f^+(x)\|^2 + \rho_0(f_0(x)-\delta)^{+^2}$, $r=[\rho,\rho_0]>0$, $\delta\in\mathbb{R}^1$.

Функция $F_\delta(x,r)$ сильно выпуклая по x на $\mathbb{R}^n$, поэтому задача (4) разрешима в единственной точке $\bar{x}_{r,\delta}$ для любых $r\in\mathbb{R}^2$, $r>0$ и $\delta\in\mathbb{R}^1$, в том числе и при $X=\varnothing$, в отличие от задачи (3). Последнее обстоятельство и позволяет использовать функцию $F_\delta(x,r)$ для анализа НЗ ВП.

Если исходная постановка (1) — НЗ ВП, то такой же будет и задача (3). В качестве аппроксимации для задачи (3) естественно принять задачу

$$\min\{\|x\|^2 : x\in X_{\bar{\xi}}\cap M_\delta\}. \tag{5}$$

Вначале установим связь между задачами (4) и (5) для случая, когда задача (5) имеет решение, т. е. когда $\delta\ge\bar{f}$.

Теорема 1. *Пусть* (1) — НЗ ВП 1-*го рода, функция Лагранжа для задачи* (5)

$$H_\delta^{\bar{\xi}}(x;u,u_0) = \|x\|^2 + (u, f(x)-\bar{\xi}) + u_0(f_0(x)-\delta),$$

где $\delta=\bar{\delta}\ge\bar{f}$, *имеет седловую точку* $[\bar{x};\bar{u},\bar{u}_0]$ *в области* $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^m_+\times\mathbb{R}^1_+)$, $\bar{x}_r=\bar{x}_{r,\bar{\delta}}$. *Тогда для любого* $r=[\rho,\rho_0]>0$ *справедливы оценки*

$$\|f^+(\bar{x}_r)-\bar{\xi}\| \le \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\Big(\frac{\|\bar{u}\|}{\sqrt{\rho}} + C(r)\Big), \tag{6}$$

$$(f_0(\bar{x}_r)-\bar{\delta})^+ \le \frac{1}{2\sqrt{\rho_0}}\Big(\frac{\bar{u}_0}{\sqrt{\rho_0}} + C(r)\Big), \tag{7}$$

$$\|\bar{x}_r-\bar{x}\| \le \frac{1}{2}\,C(r), \tag{8}$$

где $C(r)=\Big(\dfrac{\|\bar{u}\|^2}{\rho}+\dfrac{\bar{u}_0^2}{\rho_0}\Big)^{1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения седловой точки $[\bar{x};\bar{u},\bar{u}_0]$ следует

$$\|\bar{x}\|^2 \le \|x\|^2 + (\bar{u}, f(x)-\bar{\xi}) + \bar{u}_0(f_0(x)-\bar{\delta}) \tag{9}$$

для любого $x\in\mathbb{R}^n$. Из неравенства $F_{\bar{\delta}}(\bar{x}_r,r)\le F_{\bar{\delta}}(\bar{x},r)$ получим

$$\|\bar{x}_r\|^2 \le \|\bar{x}\|^2 + \rho\,\big[\,\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^+(\bar{x}_r)\|^2\,\big] - \rho_0(f_0(\bar{x}_r)-\bar{\delta})^{+^2}.$$

Отсюда с учетом (9) при $x=\bar{x}_r$ имеем

$$\rho\,\big[\,\|f^+(\bar{x}_r)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2\big] - \|\bar{u}\|\,\|f^+(\bar{x}_r)-\bar{\xi}\| + \rho_0(f_0(\bar{x}_r)-\bar{\delta})^{+^2} - \bar{u}_0(f_0(\bar{x}_r)-\bar{\delta})^+ \le 0. \tag{10}$$

Так как $\bar{\xi}=f^+(\tilde{x})$, где $\tilde{x}=\arg\min\|f^+(x)\|^2$, то

$$\|\bar{\xi}\|^2 = (\bar{\xi}, f(\tilde{x})) \le (\bar{\xi}, f(x)) - \sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i(\triangledown f_i(\tilde{x}), x-\tilde{x}) = (\bar{\xi}, f(x))$$

(здесь $\bar{\xi}_i$ — i-я компонента вектора $\bar{\xi}$, $x \in \mathbb{R}^n$). Таким образом,

$$\|\bar{\xi}\|^2 \le (\bar{\xi}, f(x)) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{11}$$

Тогда

$$\|f^+(\bar{x}_r) - \bar{\xi}\|^2 = \|f^+(\bar{x}_r)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2 - 2\,(\bar{\xi}, f^+(\bar{x}_r)) + 2\,\|\bar{\xi}\|^2 \le \|f^+(\bar{x}_r)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2.$$

Поэтому с учетом (11) из неравенства (10) получим

$$\begin{aligned}&\rho\,\|f^+(\bar{x}_r) - \bar{\xi}\|^2 - \|\bar{u}\|\,\|f^+(\bar{x}_r) - \bar{\xi}\| + \rho_0(f_0(\bar{x}_r) - \bar{\delta})^{+^2} - \bar{u}_0(f_0(\bar{x}_r) - \bar{\delta})^+\\ &= \Big[\sqrt{\rho}\,\|f^+(\bar{x}_r) - \bar{\xi}\| - \frac{\|\bar{u}\|}{2\sqrt{\rho}}\Big]^2 - \frac{\|\bar{u}\|^2}{4\rho} + \Big[\sqrt{\rho_0}\,(f_0(\bar{x}_r) - \bar{\delta})^+ - \frac{\bar{u}_0}{2\sqrt{\rho_0}}\Big]^2 - \frac{\bar{u}_0^2}{4\rho_0} \le 0.\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекают оценки (6), (7).

Поскольку $F_{\bar{\delta}}(x,r)$ — сильно выпуклая функция с модулем сильной выпуклости 1, то справедливо неравенство $\|\bar{x}_r - \bar{x}\|^2 \le F_{\bar{\delta}}(\bar{x}, r) - F_{\bar{\delta}}(\bar{x}_r, r)$ $(\forall r > 0)$. Оценивая сверху правую часть этого неравенства по аналогии с выводом неравенства (10), получим

$$\|\bar{x}_r - \bar{x}\|^2 \le -\rho\big[\|f^+(\bar{x}_r)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2\big] - \rho_0(f_0(\bar{x}_r) - \bar{\delta})^{+^2} + \|\bar{u}\|\,\|f^+(\bar{x}_r) - \bar{\xi}\| + \bar{u}_0(f_0(\bar{x}_r) - \bar{\delta})^+.$$

Преобразуя это неравенство подобно тому, как были выведены оценки (6) и (7), придем к (8).

Теорема доказана.

В следующем утверждении оценивается качество аппроксимации с помощью функции $F_\delta(x,r)$ решений задачи (2) для произвольных r и δ.

Теорема 2. *Пусть* (1) — НЗ ВП 1-*го рода,* $\bar{x}$ — *решение задачи* (2)*,* $\bar{f} = f_0(\bar{x})$*,* $\bar{x}_{r,\delta}$ — *решение задачи* (4)*. Тогда для любых* $r > 0$ *и* $\delta \in \mathbb{R}^1$ *справедливы оценки*

$$\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\| \le \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\left(\|\bar{x}\|^2 + \rho_0 \triangle^{+^2}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

$$(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ \le \frac{1}{2}\Big(\triangle^+ + \Big(\frac{\|\bar{x}\|^2}{\rho_0} + \triangle^{+^2}\Big)^{1/2}\Big), \tag{13}$$

где $\triangle = \bar{f} - \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{\xi} = [\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_m]$. Так как $\triangledown_x F_\delta(\bar{x}_{r,\delta}, r) = 0$ для всех $r > 0$ и $\delta \in \mathbb{R}^1$, то с учетом выпуклости функций $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, получим

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{\bar{x}}{2} - \bar{x}_{r,\delta}\Big\|^2 - \frac{\|\bar{x}\|^2}{4} = -(\bar{x}_{r,\delta}, \bar{x} - \bar{x}_{r,\delta})\\
&= \rho\sum_{i=1}^m f_i^+(\bar{x}_{r,\delta})(\triangledown f_i(\bar{x}_{r,\delta}), \bar{x} - \bar{x}_{r,\delta}) + \rho_0(f_0(\bar{x}_{r,\delta} - \delta)^+(\triangledown f_0(\bar{x}_{r,\delta}), \bar{x} - \bar{x}_{r,\delta})\\
&\le \rho\sum_{i=1}^m (f_i^+(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi}_i + \bar{\xi}_i)(\bar{\xi}_i - f_i(\bar{x}_{r,\delta})) + \rho_0(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+(\triangle + \delta - f_0(\bar{x}_{r,\delta}))\\
&\le \rho\sum_{i=1}^m (f_i^+(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi}_i)(\bar{\xi}_i - f_i(\bar{x}_{r,\delta})) + \rho\sum_{i=1}^m (\bar{\xi}_i^2 - \bar{\xi}_i f_i(\bar{x}_{r,\delta}))\\
&\quad - \rho_0(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^{+^2} + \rho_0\,\triangle\,(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+.\end{aligned} \tag{14}$$

Воспользуемся непосредственно проверяемым неравенством $(a^+ - b)(a-b) \geq (a-b)^{+^2}$, справедливым для любых действительных чисел a и $b \geq 0$. Применяя его и неравенство (11), из (14) при $\triangle \leq 0$ получим $\rho\,\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\|^2 + \rho_0(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^{+^2} \leq \|\bar{x}\|/4$. Отсюда

$$\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\| \leq \frac{\|\bar{x}\|}{2\sqrt{\rho}}, \qquad (f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ \leq \frac{\|\bar{x}\|}{2\sqrt{\rho_0}}. \tag{15}$$

Если же $\triangle > 0$, то из (14) следует

$$\rho\,\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\|^2 + \rho_0\Big[(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ - \frac{\triangle}{2}\Big]^2 \leq \frac{1}{4}(\|\bar{x}\|^2 + \rho_0\triangle^2),$$

т. е. $\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\,(\|\bar{x}\|^2 + \rho_0\triangle^2)^{1/2}$, $(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ \leq \frac{1}{2\sqrt{\rho_0}}\,(\|\bar{x}\|^2 + \rho_0\triangle^2)^{1/2} + \frac{\triangle}{2}$. Объединяя последние оценки с (15), получим (12), (13).

Теорема доказана.

В качестве следствия из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и существует* $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ *— седловая точка функции* $L_{\bar{\xi}}(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \bar{\xi})$ *для задачи* (2) *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. *Тогда*

1) *для любых* $r \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ *и* $\delta \in \mathbb{R}^1$ *выполняется неравенство*

$$|f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{f}| \leq \frac{1}{2}\max\Big\{\|\bar{\lambda}\|\Big(\frac{\|\bar{x}\|^2 + \rho_0\triangle^+}{\rho}\Big)^{1/2}, \Big(\frac{\|\bar{x}\|^2}{\rho_0} + \triangle^{+^2}\Big)^{1/2} + 2\,|\triangle|\Big\}; \tag{16}$$

2) *если в задаче* (4) $\rho \to \infty$, $\rho_0 \to \infty$, $|\triangle|\rho_0 \to 0$, *то* $\bar{x}_{r,\delta} \to \bar{x}_0$, *где* $\bar{x}_0$ *— нормальное решение задачи* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения седловой точки $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ имеем $(\bar{\lambda}, f(\bar{x}) - \bar{\xi}) = 0$, $\bar{f} - f_0(\bar{x}_{r,\delta}) \leq \|\bar{\lambda}\|\,\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\|$. С другой стороны, $f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{f} \leq (f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ - \triangle$. Применяя оценки (12), (13), из последних двух неравенств получим (16).

Так как $F_\delta(\bar{x}_{r,\delta}, r) \leq F_\delta(\bar{x}_0, r)$, то

$$\|\bar{x}_{r,\delta}\|^2 \leq \|\bar{x}_0\|^2 + \rho\big(\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^+(\bar{x}_{r,\delta})\|^2\big) + \rho_0\triangle^{+^2} \leq \|\bar{x}_0\|^2 + \rho_0\triangle^{+^2}. \tag{17}$$

По условию теоремы $|\triangle|\rho_0 \to 0$, тем самым $|\triangle| \to 0$, $\rho_0\triangle^{+^2} \to 0$, поэтому из (17) вытекает ограниченность последовательности $\{\bar{x}_{r,\delta}\}$. Обозначим через x' ее предельную точку. Учитывая оценки (12), (13) и (16), получаем, что при сформулированных выше условиях на параметры r и δ имеет место $x' \in X_{\bar{\xi}} \cap M_{\bar{f}}$, $\|x'\| \leq \|\bar{x}_0\|$. Поскольку $\bar{x}_0$ — единственное нормальное решение задачи (2), то $x' = \bar{x}_0$ и $\lim \bar{x}_{r,\delta} = \bar{x}_0$.

Теорема доказана.

Оценим качество сходимости $\bar{x}_{r,\delta}$ к $\bar{x}_0$.

Теорема 4. *Пусть* (1) *— НЗ ВП* 1-*го рода, функция Лагранжа* $H^{\bar{\xi}}_{\delta}(x; u, u_0)$ *для задачи* (5) *имеет при* $\delta = \bar{\delta} = \bar{f}$ *седловую точку* $[\bar{x}; \bar{u}, \bar{u}_0]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1_+)$. *Тогда для любого* $r = [\rho, \rho_0] > 0$ *и* $\delta \in \mathbb{R}^1$ *справедлива оценка*

$$\|\bar{x}_{r,\delta} - \bar{x}_0\|^2 \leq \frac{1}{16}\Big(\frac{\|\bar{u}\|^2}{\rho} + \frac{\bar{u}_0^2}{\rho_0}\Big) + \frac{\bar{u}_0}{2}\Big(|\triangle| + \frac{\triangle^+}{2}\Big) + \frac{\rho_0\triangle^{+^2}}{4},$$

где $\bar{x}_{r,\delta} = \arg\min\limits_x F_\delta(x, r)$, $\bar{x}_0$ *— нормальное решение задачи* (2), $\triangle = \bar{f} - \delta$.

Доказательство. Задача определения нормального решения $\bar{x}_0$ для (2) эквивалентна задаче (5) при $\delta = \bar{f}$. Седловая точка $[\bar{x}; \bar{u}, \bar{u}_0]$ функции $H^{\bar{\xi}}_{\delta}(x; u, u_0)$ удовлетворяет соотношениям Куна—Таккера

$$\nabla_x H^{\bar{\xi}}_{\bar{f}}(\bar{x}; \bar{u}, \bar{u}_0) = 0, \qquad \bar{u}_i(f_i(\bar{x}) - \bar{\xi}_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad \bar{u}_0(f_0(\bar{x}) - \bar{f}) = 0, \tag{18}$$

где $\bar{u} = [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m] \geq 0$, $\bar{u}_0 > 0$, $\bar{x} = \bar{x}_0$. Из условий (18) и выпуклости функций $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ следует

$$\begin{aligned} 2(\bar{x}_0, \bar{x}_0 - \bar{x}_{r,\delta}) &= \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i(\nabla f_i(\bar{x}_{r,\delta}), \bar{x}_{r,\delta} - \bar{x}_0) + \bar{u}_0(\nabla f_0(\bar{x}_0), \bar{x}_{r,\delta} - \bar{x}_0) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i(f_i(\bar{x}_{r,\delta}) - f_i(\bar{x}_0)) + \bar{u}_0(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{f}) \\ &\leq \|\bar{u}\| \, \|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\| + \bar{u}_0(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ - \bar{u}_0 \triangle. \end{aligned}$$

Отсюда и из (14) при $\bar{x} = \bar{x}_0$ получим

$$\|\bar{x}_{r,\delta} - \bar{x}_0\|^2 = (\bar{x}_0, \bar{x}_0 - \bar{x}_{r,\delta}) - (\bar{x}_{r,\delta}, \bar{x}_0 - \bar{x}_{r,\delta})$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\bar{u}\| \, \|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\| - \rho\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\|^2$$

$$-\rho_0(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^{+^2} + \Big(\frac{\bar{u}_0}{2} + \rho_0 \triangle^+\Big)(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ - \frac{\bar{u}_0 \triangle}{2}$$

$$= -\Big[\sqrt{\rho}\|(f(\bar{x}_{r,\delta}) - \bar{\xi})^+\| - \frac{\|\bar{u}\|}{4\sqrt{\rho}}\Big]^2 + \frac{\|\bar{u}\|}{16\rho} - \Big[\sqrt{\rho_0}(f_0(\bar{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ - \frac{\bar{u}_0 + 2\rho_0\triangle^+}{4\sqrt{\rho_0}}\Big]^2 + \frac{(\bar{u}_0 + 2\rho_0\triangle^+)^2}{16\rho_0} - \frac{\bar{u}_0\triangle}{2}$$

$$\leq \frac{1}{16}\Big(\frac{\|\bar{u}\|^2}{\rho} + \frac{\bar{u}_0^2}{\rho_0}\Big) + \frac{u_0^*}{2}\Big(|\triangle| + \frac{\triangle^+}{2}\Big) + \frac{\rho_0 \triangle^{+^2}}{4}.$$

Теорема доказана.

3. Применение метода точной штрафной функции

Особое место среди методов внешнего штрафа занимает метод точных штрафных функций, в развитие которого значительный вклад внес И. И. Еремин [10; 11]. Для этого метода характерно наличие пороговых значений штрафных коэффициентов, начиная с которых исходная разрешимая задача ВП и задача со штрафом становятся эквивалентными в смысле совпадения множеств оптимальных решений. Покажем, что метод точных штрафных функций применим и для оптимальной коррекции НЗ ВП.

Для задачи (3) рассмотрим следующую функцию (точную штрафную функцию Еремина — Зангвилла):

$$\Phi_\delta(x, r) = \|x\|^2 + \rho\,\|f^+(x)\|_1 + \rho(f_0(x) - \delta)^+, \qquad r = [\rho, \rho_0] > 0, \qquad \delta \in \mathbb{R}^1.$$

Сформулируем задачу

$$\min_x \Phi_\delta(x, r). \tag{19}$$

Так как функция $\Phi_\delta(x, r)$ сильно выпукла по x на $\mathbb{R}^n$, то задача (19) разрешима в единственной точке $x^*_{r,\delta}$ для любых $r \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, $\delta \in \mathbb{R}^1$. В силу специфики конструкции функции $\Phi_\delta(x, r)$ имеет смысл несколько изменить задачу (2), которая аппроксимирует исходную постановку (1) в случае несобственности последней.

Определим вектор $\tilde{\xi} = \arg\min\{\|\xi\|_1 : \xi \in E\}$. Так же, как и для $\bar{\xi}$, можно показать, что $\tilde{\xi} = f^+(x')$, где $x' \in \widetilde{X}_1 = \operatorname{Arg}\min\{\|f^+(x)\|_1\}$. Вектор $\tilde{\xi}$ существует при тех же условиях, что и вектор $\bar{\xi}$ в предыдущем разделе. Однако если $\bar{\xi}$ определялся единственным образом, то относительно $\tilde{\xi}$ это утверждать нельзя. Для $\bar{\xi}$, легко видеть, справедливо равенство $X_{\bar{\xi}} = \widetilde{X}$, где $\widetilde{X} = \operatorname{Arg}\min\{\|f^+(x)\|\}$. Относительно же $\tilde{\xi}$ можно утверждать лишь, что $X_{\tilde{\xi}} \subset \widetilde{X}_1$. Поэтому в качестве аппроксимации для задачи (1) в случае $X = \varnothing$ следует принять задачу

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{(\tilde{\xi})}\}, \tag{20}$$

где $X_{(\tilde{\xi})} = \bigcup\limits_{\tilde{\xi} \in E_1} X_{\tilde{\xi}}$, $E_1 = \{\xi \in E : \|\xi\|_1 = \|\tilde{\xi}\|_1\}$, $X_{(\tilde{\xi})} = \widetilde{X}_1$.

Соответственно если (1) — НЗ ВП, то в методе невязки вместо (5) будет рассматриваться задача

$$\min\{\|x\|^2 : x \in X_{(\tilde{\xi})} \cap M_\delta\}. \tag{21}$$

Теорема 5. *Пусть* (1) — НЗ ВП 1-*го рода, задача* (20) *разрешима,* f^* — *ее оптимальное значение. Предположим, что в задаче* (21) $\delta = \bar{\delta} \geq f^*$, x^* — *ее решение,* $\tilde{\xi} = f^+(x^*)$, *функция Лагранжа* $H_{\bar{\delta}}^{\tilde{\xi}}(x; u, u_0^*) = \|x\|^2 + (u, f(x) - \tilde{\xi}) + u_0(f_0(x) - \bar{\delta})$ *имеет седловую точку* $[x^*; u^*, u_0^*]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1_+)$. *Тогда если параметр* $r = [\rho, \rho_0]$ *функции* $\Phi_{\bar{\delta}}(x, r)$ *удовлетворяет условиям* $\rho > \|u^*\|$, $\rho_0 > u_0^*$, *выполняется неравенство*

$$\|f^+(x^*_{r,\bar{\delta}})\|_1 \leq \frac{\rho}{\rho - \|u^*\|}\,\|\tilde{\xi}\|_1. \tag{22}$$

Если при этом $\rho \to \infty$, *то* $x^*_{r,\bar{\delta}} \to x^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения седловой точки $[x^*; u^*, u_0^*]$ следует

$$\|x^*\|^2 \leq \|x\|^2 + (u^*, f(x) - \tilde{\xi}) + u_0^*(f_0(x) - \bar{\delta}) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{23}$$

Обозначив $\tilde{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_m]$, $x^*_{r,\bar{\delta}} = x^*_r$, из неравенства $\Phi_{\bar{\delta}}(x^*_r, r) \leq \Phi_{\bar{\delta}}(x^*, r)$ получим

$$\|x^*_r\|^2 \leq \|x^*\|^2 + \rho \sum_{i=1}^m (\tilde{\xi}_i - f_i^+(x^*_r)) - \rho_0 (f_0(x^*_r) - \bar{\delta})^+. \tag{24}$$

Отсюда с учетом (23) при $x = x^*_r$ имеем

$$\sum_{i=1}^m (\rho - u_i^*)(f_i^+(x^*_r) - \tilde{\xi}_i) + (\rho_0 - u_0^*)(f_0(x^*_r) - \bar{\delta})^+ \leq 0. \tag{25}$$

Далее оценим

$$\sum_{i=1}^m (\rho - u_i^*)(f_i^+(x^*_r) - \tilde{\xi}_i) \geq \min_i (\rho - u_i^*)\|f^+(x^*_r)\|_1 - \rho\,\|\tilde{\xi}\|_1 \geq (\rho - \|u^*\|)\Big(\|f^+(x^*_r)\|_1 - \frac{\rho}{\rho - \|u^*\|}\|\tilde{\xi}\|_1\Big).$$

Применяя эту оценку в неравенстве (25), получим (22).

Далее, из неравенства (24) вытекает ограниченность последовательности $\{x^*_r\}$ при $\rho \to \infty$: $\|x^*_r\| \leq \|x^*\|$. Обозначим через x' предельную точку $\{x^*_r\}$ при $\rho \to \infty$. В силу (22) и (25) получим $\|f^+(x')\|_1 = \|\tilde{\xi}\|_1$, $f_0(x') = \bar{\delta}$, $\|x'\| \leq \|x^*\|$, т. е. x' будет решением задачи (21) при $\delta = \bar{\delta}$. Так как (21) имеет единственное решение, то $\lim\limits_{\rho \to \infty} x^*_r = x' = x^*$.

Теорема доказана.

В следующем утверждении оценивается качество аппроксимации с помощью функции $\Phi_\delta(x, r)$ решений задачи (20) для произвольных r и δ.

Теорема 6. *Пусть* (1) — НЗ ВП 1-*го рода, задача* (20) *разрешима,* x_0^* — *ее нормальное решение,* $f^* = f_0(x_0^*)$, $\tilde{\xi} = f^+(x_0^*)$. *Тогда для любых* $r = [\rho, \rho_0] > 0$ *и* $\delta \in \mathbb{R}^1$ *справедливы оценки*

$$0 \le \|f^+(x_{r,\delta}^*)\|_1 - \|\tilde{\xi}\|_1 \le \frac{\|x_0^*\|^2}{2\rho} + \frac{\rho_0}{\rho}\triangle_1^+, \tag{26}$$

$$(f_0(x_{r,\delta}^*) - \delta)^+ \le \frac{\|x_0^*\|^2}{2\rho_0} + \triangle_1^+, \tag{27}$$

где $\triangle_1 = f^* - \delta$.

Если в задаче (19) $\rho \to \infty$, $\rho_0 \to \infty$, $\rho_0 | \triangle_1 | \to 0$, *то* $\lim x_{r,\delta}^* = x_0^*$.

Доказательство. Так как $x_{r,\delta}^* = \arg\min\limits_x \Phi_\delta(x, r)$, то $0 \in \partial\,\Phi_\delta(x_{r,\delta}^*, r) = 2\,x_{r,\delta}^* + \rho\,\partial\,\|f^+(x_{r,\delta}^*)\|_1 + \rho_0\,\partial\,(f_0(x_{r,\delta}^*) - \delta)^+$, где $\partial g(\bar{y})$ — символ субдифференциала функции $g(y)$ в точке $y = \bar{y}$. Выберем субградиенты $e_i(x_{r,\delta}^*) \in \partial f_i^+(x_{r,\delta}^*)$, $i = 1, \ldots, m$, $e_0(x_{r,\delta}^*) \in \partial\,(f_0(x_{r,\delta}^*) - \delta)^+$ так, чтобы $0 = 2\,x_{r,\delta}^* + \rho\sum_{i=1}^m e_i(x_{r,\delta}^*) + \rho_0 e_0(x_{r,\delta}^*)$. Из определения соответствующих субградиентов следует

$$\Big\|\frac{x_0^*}{2} - x_{r,\delta}^*\Big\|^2 - \frac{\|x_0^*\|^2}{4} = \|x_0^* - x_{r,\delta}^*\|^2 - (x_0^*, x_0^* - x_{r,\delta}^*) = -(x_{r,\delta}^*, x_0^* - x_{r,\delta}^*)$$

$$= \frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^m (e_i(x_{r,\delta}^*), x_0^* - x_{r,\delta}^*) + \frac{1}{2}\rho_0(e_0(x_{r,\delta}^*), x_0^* - x_{r,\delta}^*)$$

$$\le \frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^m (f_i^+(x_0^*) - f_i^+(x_{r,\delta}^*)) + \frac{1}{2}\rho_0\left[(f^* - \delta)^+ - (f_0(x_{r,\delta}^*) - \delta)^+\right]$$

$$\le -\frac{1}{2}\rho\,(\|f^+(x_{r,\delta}^*)\|_1 - \|\tilde{\xi}\|_1) - \frac{1}{2}\rho_0\,(f_0(x_{r,\delta}^*) - \delta)^+ + \frac{1}{2}\rho_0\,\triangle_1^+\,.$$

Поэтому $\rho(\|f^+(x_{r,\delta}^*)\|_1 - \|\tilde{\xi}\|_1) + \rho_0(f_0(x_{r,\delta}^*) - \delta)^+ \le \dfrac{\|x_0^*\|^2}{2} + \rho_0\triangle_1^+$. Отсюда непосредственно вытекают оценки (26), (27).

Из неравенства $\Phi_\delta(x_{r,\delta}^*, r) \le \Phi_\delta(x_0^*, r)$ имеем

$$\|\,x_{r,\delta}^*\|^2 \le \|x_0^*\|^2 + \rho(\|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^+(x_{r,\delta}^*)\|_1) + \rho_0(f_0(x_0^*) - \delta)^+ \le \|x_0^*\|^2 + \rho_0\,\triangle_1^+\,.$$

Так как по условию $\rho_0\triangle_1^+ \to 0$, то из (24) следует ограниченность последовательности $\{x_{r,\delta}^*\}$. Обозначим через $\tilde{x}$ ее предельную точку. Учитывая оценки (26), (27), получаем, что при сформулированных выше условиях на параметры r и δ выполняются соотношения $\|f^+(\tilde{x})\|_1 = \|\tilde{\xi}\|_1$, $f_0(\tilde{x}) \le f^*$, $\|\tilde{x}\| \le \|x_0^*\|$. Это означает, что точка $\tilde{x}$ является нормальным решением задачи (20). В силу единственности этого решения $\lim x_{r,\delta}^* = \tilde{x} = x_0^*$.

Теорема доказана.

Замечание. Доказательства теорем 1, 4, 5 предполагали существование седловой точки функции $H_\delta^\xi(x; u, u_0)$ при $\xi = \bar{\xi}$ (или $\xi = \tilde{\xi}$), а в теореме 3 требовалось наличие седловой точки у функции $L_\xi(x, \lambda)$. Задачи о седловых точках для функций $H_\delta^\xi(x; u, u_0)$ и $L_\xi(x; \lambda)$ тесно взаимосвязаны. Так, если функция $L_\xi(x, \lambda)$ имеет седловую точку, то легко видеть, что и регуляризованная по x функция $L_\xi^\alpha(x, \lambda) = L_\xi(x, \lambda) + \alpha\|x\|^2$ $(\alpha > 0)$ также обладает седловой точкой. С другой стороны, $H_\delta^\xi(x; u, u_0) = u_0\Big(L_\xi(x, \dfrac{u}{u_0}) + \dfrac{1}{u_0}\|x\|^2 - \delta\Big)$. Поэтому для любого $u_0 > 0$ функция $H_\delta^\xi(x; u, u_0)$ тоже имеет седловую точку. И, обратно, если $[\bar{x}; \bar{u}, \bar{u}_0]$ — седловая точка функции $H_\delta^\xi(x; u, u_0)$ в области $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^1)$ и $\bar{u}_0 > 0$, то $[\bar{x}, 1/\bar{u}_0]$ будет [12] седловой точкой функции $L_\xi^\alpha(x, \lambda)$ при $\alpha = 1/\bar{u}_0$.

4. Заключение

В работе рассматривались два подхода к оптимальной коррекции НЗ ВП, основанных на применении метода невязки — классического метода регуляризации некорректных задач оптимизации. В одном подходе для снятия ограничений в исходной задаче применялся метод квадратичного штрафа, во втором — метод точной штрафной функции. Каждый подход характеризовался своим определением оптимальной аппроксимирующей задачи, зависящей от выбора минимального в той или иной норме вектора коррекции правых частей ограничений. Для метода с квадратичным штрафом использовалась евклидова норма, для метода точной штрафной функции — октаэдрическая. Приведенные результаты показали работоспособность обоих подходов. Вместе с тем проявились определенные преимущества метода квадратичного штрафа. Это единственность вектора $\bar{\xi}$, разрешимость откорректированной задачи, большее разнообразие оценок сходимости. С другой стороны, метод с точным штрафом может оказаться предпочтительным при построении итерационной реализации метода, например при организации последовательности $\delta = \delta_k$, сходящейся к $\bar{f}$ (или f^*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. **Скарин В.Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
6. **Попов Л.Д.** Комбинированные штрафы и обобщенные решения несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 217–226.
7. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
8. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
9. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
10. **Еремин И.И.** Метод "штрафов" в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.
11. **Еремин И.И.** К методу штрафов в математическом программировании // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 4. С. 459–461.
12. **Скарин В.Д.** О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования 1-го рода // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 4.03.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.145

О НЕКОТОРЫХ ПОЧТИ-ОБЛАСТЯХ И ТОЧНО ДВАЖДЫ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ[1]

А. И. Созутов, Е. Б. Дураков, Е. В. Бугаева

В работе найдены достаточные условия, при которых почти-область является почти-полем, а точно дважды транзитивная группа обладает нормальной регулярной абелевой подгруппой. Если точно дважды транзитивная группа T ($\operatorname{Char} T \neq 2$) содержит группу Фробениуса с инволюцией, в дополнении которой есть подгруппа порядка > 2, нормальная в стабилизаторе точки, то группа T обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой (теорема 1). Если в почти-области нечетной характеристики есть почти-поле, содержащее мультипликативную подгруппу порядка > 2, нормальную в мультипликативной группе почти-области, то почти-область является почти-полем (теорема 2). Этот же результат справедлив в случае, когда локально нильпотентный радикал стабилизатора точки содержит 2-подгруппу порядка ≥ 16, а характеристика сравнима с 1 по модулю 16 (теорема 3).

Ключевые слова: группа, точно дважды транзитивная группа, почти-поле, почти-область, группа Фробениуса.

A. I. Sozutov, E. B. Durakov, E. V. Bugaeva. On certain near-domains and sharply 2-transitive groups.

We find sufficient conditions under which a near-domain is a near-field and a 2-transitive group has a normal regular abelian subgroup. If a sharply 2-transitive group T ($\operatorname{Char} T \neq 2$) contains a Frobenius group with involution such that its complement contains a subgroup of order > 2 that is normal in the stabilizer of a point, then T has a regular abelian normal subgroup (Theorem 1). If, in a near-domain of odd characteristic, there is a near-field containing a multiplicative subgroup of order > 2 that is normal in a multiplicative group of the near-domain, then the near-domain is a near-field (Theorem 2). This result also holds in the case when the local nilpotent radical of the stabilizer of a point contains a 2-subgroup of order ≥ 16 and the characteristic is congruent to 1 modulo 16 (Theorem 3).

Keywords: group, near-field, near-domain, Frobenius group.

1. Введение

Напомним, что группа T подстановок множества F ($|F| \geq 3$) называется *точно дважды транзитивной*, если любые две упорядоченные пары различных элементов множества F можно перевести друг в друга с помощью единственного элемента из T.

На протяжении многих лет исследование точно дважды транзитивных групп велось в рамках теории почти-областей с использованием техники вычислений в этих алгебраических системах (см., например, [1] и монографию [2]). В. Д. Мазуров [3; 4] дал прямое теоретико-групповое доказательство некоторых ключевых результатов и постановкой вопросов 11.52, 12.48 в “Коуровской тетради” [5] пробудил интерес исследователей к этой проблематике. В настоящей работе к исследованиям привлекается метод фробениусовых подгрупп, развитый в работах В.П. Шункова и одного из авторов статьи (см. монографию [6]). Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если точно дважды транзитивная группа T характеристики, отличной от 2, содержит группу Фробениуса V с инволюцией и дополнением $H = V \cap T_\alpha$, где T_α — стабилизатор точки α, и в H есть нормальная в T_α подгруппа порядка > 2, то группа T обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой.*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00509-а).

Теорема 2. *Если почти-область $F(+,\cdot)$ характеристики, отличной от 2, содержит планарное почти-поле $P(+,\cdot)$, в мультипликативной группе $P(\cdot)$ которого есть нормальная в $F(\cdot)$ подгруппа порядка > 2, то почти-область $F(+,\cdot)$ является почти-полем.*

Теорема 3. *Пусть T — точно дважды транзитивная группа нечетной характеристики p, T_α — ее стабилизатор точки, R — локально нильпотентный радикал группы T_α, $n = |T_\alpha : R| < \infty$ и $d = (n, p-1)$. Если $\dfrac{p-1}{d} = 0 \pmod{16}$, то T обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой.*

Теоремы 1, 3 дают частичные ответы на вопросы 11.52, 12.48 из [5], а теорема 2 — на проблему [2, с. 219]. Теоремы 1, 3 были анонсированы в [7; 8].

2. Определения, известные результаты

На протяжении работы $F = F(+,\cdot)$ — *почти область* (см., например, [2, гл. V]), т. е.:

1) $F(+)$ — лупа с нейтральным элементом 0;

2) $F^*(\cdot)$ — группа с нейтральным элементом 1;

3) $a + b = 0 \to b + a = 0$;

4) $0 \cdot a = 0 \to a \cdot 0 = 0$;

5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

6) существует однозначно определенный элемент $d_{a,b} \in F^*$ такой, что $a + (b + x) = (a + b) + d_{a,b} \cdot x$ для всех $x \in F$ (здесь $F^* = F \setminus \{0\}$, a, b, c — любые элементы из F).

Положим [2, с. 216]

$$T = T_2(F) = \left\{ \tau_{a,b} : \left\{ \begin{array}{l} F \to F \\ x \to a + bx \end{array} \right. \middle| \, a \in F, b \in F^* \right\} \right\}.$$

Отображение $\tau_{a,b} : x \to a + bx$ $(b \neq 0)$ называется *аффинным преобразованием.*

Предложение 1 (H. Karzel [1], см. [2, с. 217]). *$T_2(F)$ — точно дважды транзитивная группа подстановок множества F.*

Предложение 2 (M. Hall [9], J. Tits [10], G. Gratzer [11], H. Karzel [1], см. [2, с. 229, 217]). *Если T точно дважды транзитивная группа подстановок множества F ($|F| > 2$), то можно ввести на F такие две операции $+$, $\cdot$, что $(F, +, \cdot)$ будет почти-областью, а T — ее группой $T_2(F)$ аффинных преобразований.*

Почти-область $F(+,\cdot)$ является *почти-полем* (см., например, [12, с. 392]), когда:

1) $F(+)$ — абелева группа;

2) $F^*(\cdot)$ — группа;

3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ для всех $a, b, c \in F$.

Обозначим через J множество инволюций группы T.

Предложение 3 (H. Karzel [1], см. [2, с. 220]). *Для почти-области F следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Почти-область F является почти-полем.*
2. *Лупа $F(+)$ абелева.*
3. *Множество J^2 есть подгруппа в $T_2(F)$.*

Группа $V = C \leftthreetimes H$ называется *группой Фробениуса с ядром* (*инвариантным множителем*) C *и дополнением* (*неинвариантным множителем*) H, если $H \neq 1 \neq C$, каждый неединичный элемент из V содержится либо в C, либо в одной из сопряженных с H подгрупп и (V, H) — *пара Фробениуса*, т. е. $H \cap H^x = 1$ для любого $x \in V \setminus H$.

Предложение 4 [6, леммы 2.2, 2.3]. *Пусть $C \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром C и дополнением H. Тогда для любой неединичной подгруппы $A < H$ группа $C \leftthreetimes A$ также есть группа Фробениуса, C — ее ядро, A — дополнение. Если H содержит инволюцию k, то она единственна в H, $c^k = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$ и C — абелева группа.*

Почти-поле $F(+, \cdot)$ называется *планарным* (*плоским*), если для любых $a, b \in F$ и $b \neq 1$ уравнение $a + bx = x$ разрешимо в F.

Предложение 5 [2, предложение 1, п. f, с. 221]. *Группа аффинных преобразований $T_2(P)$ почти-поля P тогда и только тогда является группой Фробениуса с абелевым ядром $C = \{\tau_{a,1} | a \in P\}$ и дополнением $H = \{\tau_{0,b} | b \in P^*\}$, когда P — планарное почти-поле.*

Предложение 6 (В. Д. Мазуров [4, теорема 2]). *Пусть G — точно дважды транзитивная группа характеристики* 0. *Тогда стабилизатор точки содержит подгруппу, изоморфную мультипликативной группе рациональных чисел, а в группе G есть подгруппа, изоморфная аффинной группе поля рациональных чисел.*

3. Предварительные результаты

Пусть T — группа аффинных преобразований $x \to a + bx$ $(b \neq 0)$ почти-области $F(+, \cdot)$ и $T_\alpha \simeq F^*(\cdot)$ — стабилизатор точки $\alpha \in F$. Поскольку T точно дважды транзитивна на F (см. предложения 1, 2), мы отвлечемся от алгебраической структуры множества F и определения элементов $t \in T$ как аффинных преобразований и сосредоточим свое внимание на точно дважды транзитивном действии T на F как группы подстановок.

Условимся о некоторых обозначениях. Элементы (точки) из F будем обозначать через $\alpha, \beta, \ldots$, а результат действия подстановки $t \in T$ на точку $\gamma \in F$ — через γ^t. Если $K \leq T$, $\alpha \in F$, то $\alpha^K = \{\alpha^t \mid t \in K\}$, $T_\alpha = \{t \in T \mid \alpha^t = \alpha\}$ — стабилизатор точки α. Напомним, что для любых $\alpha \in F$ и $t \in T$ имеет место равенство $T_\alpha^t = T_\beta$, где $\beta = \alpha^t$.

Предложение 7. *$F = \alpha^T$ и $F \setminus \{\alpha\} = \beta^{T_\alpha}$ для любых различных $\alpha, \beta \in F$. Если $t \in T \setminus T_\alpha$, то $T \setminus T_\alpha = T_\alpha t T_\alpha$, $T = T_\alpha \langle t \rangle T_\alpha$, и $T_\alpha \cap T_\alpha^t = 1$.*

Доказательство. Предложение следует из предложений 1, 2 и определения точно дважды транзитивной группы. □

Предложение 8 [12, леммы 20.7.2, 20.7.3; 13, предложение 3.3]. *Множество J инволюций в T непусто, все инволюции в T сопряжены и подгруппа T_α действует сопряжениями на множестве $J \setminus T_\alpha$ транзитивно. Если в T_α есть инволюция j, то она единственна в T_α и T действует на J точно дважды транзитивно.*

Если в T_α есть инволюция j, то ввиду предложения 8 мы можем, когда это удобно, отождествлять множества F и J и обозначать стабилизатор T_α точки $\alpha \in F$ через T_j.

Подстановка t называется регулярной на F, если $\alpha^t \neq \alpha$ для любой точки $\alpha \in F$.

Предложение 9 [12, лемма 20.7.4; 13, предложение 3.5]. *Произведение двух различных инволюций из T является регулярной подстановкой.*

Неединичный элемент b группы называется строго вещественным относительно инволюции t, если $b^t = b^{-1}$. Для произвольной инволюции $v \in J$ через N_v^* обозначим множество всех строго вещественных относительно v элементов из $T \setminus T_v$ и положим $N_v = N_v^* \cup \{1\}$, $N^* = \cup_{v \in J} N_v^*$, $N = N^* \cup \{1\}$.

Предложение 10 [13, предложение 3.6]. *Если в T_α есть инволюция j, то $T = T_kJ = T_kN_v$ для любых инволюций $k, v \in J$, при этом для каждого элемента $x \in T$ имеют место равенства $|J \cap T_kx| = |N_v \cap T_kx| = 1$.*

Предложение 11 [13, предложение 3.7]. *Пусть в T_α есть инволюция, $k, v \in J$ и $k \neq v$. Тогда $kv \neq vk$ и $k^t = v$ для единственной инволюции t из J. В частности, все элементы из $J^2 \setminus \{1\}$ сопряжены в T.*

Таким образом, если в T_α есть инволюция, то в силу предложения 11 и свойств групп диэдра все неединичные элементы $vk \in J^2$ имеют один и тот же порядок — либо бесконечный, либо равный простому числу $p \neq 2$. В первом случае по определению (см., например, [2]) почти-область F и группа T имеют характеристику 0, во-втором $\mathrm{Char}\, F = \mathrm{Char}\, T = p$, если же в T_α нет инволюций, то $\mathrm{Char}\, F = \mathrm{Char}\, T = 2$.

Обозначим через X множество регулярных подстановок из T, а для каждого $t \in T$ через C_t — класс t^T сопряженных с ним элементов. Как следует из предложений 8, 9, множество X непусто. Понятно, что $X = X^{-1}$ и $N_T(X) = T$.

Предложение 12. *Если $t \in X$, то $T_\alpha C_t = T \setminus T_\alpha = T_\alpha t^{T_\alpha}$, а если $t \notin X$ и $t \neq 1$, то $T_\alpha C_t = T$. Если $t, s \in T$ и $\alpha^t \neq \alpha \neq \alpha^s$, то множество tC_s содержит элемент из T_α.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $t \in X$ имеем $\beta = \alpha^t \neq \alpha$ и по предложению 7 $T_\alpha t T_\alpha = T_\alpha t^{T_\alpha} = T \setminus T_\alpha = T_\alpha C_t$. Если $t \notin X$ и $t \neq 1$, то пересечение $C_t \cap T_\alpha$ непусто и $T_\alpha \subset T_\alpha C_t$. Ввиду предложения 7 можно считать $t \notin T_\alpha$ и $T \setminus T_\alpha = T_\alpha t^{T\alpha}$, что влечет равенство $T_\alpha C_t = T$.

Далее, пусть $s \in T$ и $\alpha = \gamma^s$. По условию $s \notin T_\alpha$ и $\gamma \neq \alpha$. По предложению 7 найдется элемент $h \in T_\alpha$ такой, что $\gamma^h = \beta$. Элемент $v = s^h$ принадлежит C_s, при этом $\beta^v = \gamma^{sh} = \alpha$, $\alpha^{tv} = \beta^v = \alpha$ и $tv \in T_\alpha$. Предложение доказано. □

Предложение 13. *Если $C = X \cup \{1\}$ — подгруппа группы T, то C нормальна в T, $T = C \rtimes T_\alpha$, $X = C_t$ $(t \in X)$ и почти-область F является планарным почти-полем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $N_T(X) = T$, то C нормальна в T, а поскольку $C \cap T_\alpha = 1$, то ввиду предложения 12 $X = C_t$. Если в T_α нет инволюций, то в силу доказанного и предложения 8 имеет место равенство $X = J$. Поэтому C — абелева группа периода 2 и ввиду предложения 12 $T = C \rtimes T_\alpha$. Если в T_α есть инволюция k, то ввиду предложений 9, 10 $X = N_k^*$ и $T = C \rtimes T_\alpha$. И так как $bc = (c^{-1}b^{-1})^{-1} = (c^{-1}b^{-1})^k = c^{-k}b^{-k} = cb$ для любых $b, c \in C$, то C — абелева группа.

Итак, $T = C \rtimes T_\alpha$, по предложению 7 (T, T_α) — пара Фробениуса и ввиду равенства $C = X \cup \{1\}$ каждый элемент из $T \setminus C$ принадлежит стабилизатору некоторой точки из F. Учитывая, что все стабилизаторы точек в T сопряжены, заключаем, что T — группа Фробениуса с ядром C и дополнением T_α. По предложению 5 F — планарное почти-поле. Предложение доказано. □

Предложение 14. *Если C — неединичная нормальная в T подгруппа и $C \cap T_\alpha = 1$, то $C^\# = C_t \subseteq X$, $T = C \rtimes T_\alpha$, группа C абелева и почти-область F является почти-полем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду условия $C \cap T_\alpha = 1$ и предложения 12 имеем $C^\# = C_t \subseteq X$, $T = C \rtimes T_\alpha$ и $C_t = t^{T_\alpha}$. Коммутативность подгруппы C доказывается так же, как и в предложении 13. По предложению 3 F является почти-полем. Предложение доказано. □

Предложение 15. *Если $\mathrm{Char}\, T \neq 2$ и для двух различных инволюций $k, v \in T$ имеет место равенство $N_k = N_v = C$, то C — нормальная в T подгруппа и $C \cap T_\alpha = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 8 $T_k \leq N_T(C)$ и $v \in N_T(C)$. По предложению 7 $T = T_k \cup T_k v T_k$, значит, $N_T(C) = T$ и поскольку все инволюции в T сопряжены (см. предложение 8), то $C = N_t$ для каждой инволюции $t \in T$. Далее, если $b, c \in C$, то $b = sk$, $c = tk$ для подходящих $s, t \in J$ и $bc^{-1} = st \in N_t = C$. Значит, C — нормальная в T подгруппа и, как доказано выше, C нормальна в T и $C \cap T_\alpha = 1$. Предложение доказано. □

Предложение 16. *Если в T есть неединичный элемент b инвертируемый каждой инволюцией из T, то $C = C_T(b)$ — нормальная в T подгруппа и $C \cap T_\alpha = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $b \in J$, то ввиду предложений 8, 9 $J \subseteq C$, $C = C_T(J)$, T_α не содержит инволюций, $A = \langle J \rangle$ — элементарная абелева нормальная в T 2-подгруппа и $A \cap T_\alpha = 1$. Применяя предложение 14 заключаем, что $A = C$, и предложение доказано.

Пусть $b \notin J$. По предложению 9 $b \in X$ и, значит, $C^\# \subseteq X$, $C_T(k) \cap C = T_k \cap C = 1$ для любой инволюции $k \in J$ и $J \subseteq B = C \leftthreetimes \langle k \rangle$. Пусть $x \in B^\#$, $x \neq k$ и $v = k^x$. По предложению 11 $v^t = k$ для подходящей инволюции $t \in J$, из чего заключаем, что $xt \in \langle k \rangle$ и $x \in \langle k, t \rangle$. Следовательно, $x^k = x^{-1}$ для каждого элемента $x \in C$, $J = Ck$ и $C = \langle J^2 \rangle$ — нормальная в T подгруппа. Как отмечено выше, $C \cap T_\alpha = 1$. Предложение доказано. □

4. Системы фробениусовых подгрупп

Пусть $P(+, \cdot)$ — поле, $P(+)$ и $P^*(\cdot)$ — соответственно аддитивная и мультипликативная группы поля P и $T_2(P)$ — группа его аффинных преобразований $x \to a + bx$. Понятно, что $T_2(P) = C \leftthreetimes A$, где $C \simeq P(+)$ и $A \simeq P^*(\cdot)$, и, поскольку для любых элементов $a, b \in P$ при $b \neq 1$ уравнение $a + bx = x$ очевидно разрешимо в P, то согласно предложению 5 $T_2(P)$ — группа Фробениуса с ядром C и дополнением A.

Предложение 17. *Если $\mathrm{Char}\, T \neq 2$, то любые две инволюции $k, v \in T$ содержатся в подгруппе $T_{kv} = C_{kv} \leftthreetimes A_k$, изоморфной группе $T_2(P)$ аффинных преобразований простого поля P характеристики $\mathrm{Char}\, T$, при этом $kv \in C_{kv} \simeq P(+)$, $k \in A_k \simeq P^*(\cdot)$ и $A_k \leq T_k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathrm{Char}\, T = 0$. Согласно предложению 6 T_α содержит подгруппу A, изоморфную мультипликативной группе поля Q рациональных чисел, а в самой группе T есть подгруппа $V = C \leftthreetimes A$, изоморфная аффинной группе $T_2(Q)$. Ввиду предложений 8–10 подгруппа A содержит инволюцию j и $C \subseteq N_j$, в частности, каждый неединичный элемент $b \in C$ есть произведение js, где $s \in J \cap V$. По предложению 11 в T найдется элемент t такой, что $k = j^t$, $v = s^t$. Имеем $V^t = C^t \leftthreetimes A^t \simeq T_2(Q)$, $kv \in C^t \simeq Q(+)$, $A^t \simeq Q(\cdot)$ и $k \in A^t \leq T_k$. Следовательно, в случае $\mathrm{Char}\, F = 0$ предложение верно.

Пусть $\mathrm{Char}\, F = p > 2$. По предложению 8 T_k действует транзитивно на $J \setminus T_k$. Поэтому для любой отличной от k инволюции $s \in \langle k, v \rangle$ найдется элемент $h_s \in T_k$ такой, что $s = v^{h_s}$. В силу предложения 8 $k^{h_s} = k$ и $h_s \in N_G(\langle k, v \rangle)$. Ввиду свойств групп диэдра $h_s \in N_G(\langle kv \rangle)$. Отсюда заключаем, что $A_k = T_k \cap N_T(\langle kv \rangle)$ изоморфна $\mathrm{Aut}\, \langle kv \rangle$ (см., например, [12, с. 102]). Поскольку kv — элемент простого порядка p, то $\langle kv \rangle \leftthreetimes A_k$ изоморфна $T_2(P)$, где P — поле из p элементов. Предложение доказано. □

Напомним обозначения: $X^Y = \{y^{-1}xy \,|\, x \in X,\, y \in Y\}$ и $A^\# = A \setminus \{1\}$.

Предложение 18. *Пусть T содержит группу Фробениуса V с ядром C и дополнением $H = V \cap T_\alpha$ и в H есть нормальная в T_α подгруппа A, содержащая инволюцию k. Тогда $A^T = A^\# N_k \cup \{1\}$ и если $t, ht \in A^T$ и $h \in T_k$, то $h \in A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду предложения 7 $A^T \cap T_k = A$ и в силу предложения 4 $M = C \leftthreetimes A$ — группа Фробениуса с абелевым ядром $C \subseteq N_k$ и дополнением A. В силу предложения 9 пересечение $A^T \cap N_k^*$ пусто и ввиду строения групп Фробениуса имеем $A^{\#T} \cap M = CA^\# \subseteq N_k A^\# = A^\# N_k$.

Пусть $v \in J \cap M$, $v \neq k$ и $b = vk$, ясно, что $b \in C^{\#}$. В силу предложения 8 $v^{T_k} = J \setminus \{k\}$ и $N_k = b^{T_k}$. Отсюда выводим, что $(A^{\#}b)^{T_k} = A^{\#}N_k$ и $A^{\#}N_k \cup \{1\} \subseteq A^T$.

Покажем, что верно и обратное включение. Пусть t — произвольный элемент из $T \setminus T_k$. По предложению 7 $t = t_1vt_2$, где $t_1, t_2 \in T_k$. Последовательно получаем $A^t = A^{t_1vt_2} = A^{vt_2}$, $A^v \subseteq CA^{\#} \cup \{1\} \subseteq A^{\#}N_k \cup \{1\}$ и поскольку $N_k^{t_2} = N_k$, то $A^t \subseteq (A^{\#}N_k)^{t_2} \cup \{1\} = A^{\#}N_k \cup \{1\}$ и ввиду произвольности элемента t $A^T \subseteq A^{\#}N_k \cup \{1\}$. Следовательно, $A^T = A^{\#}N_k \cup \{1\}$.

Пусть $t, ht \in A^T$ и $h \in T_k$, докажем, что $h \in A$. Если $t \in T_k$, то из равенства $A^T \cap T_k = A$ следует $h \in A$. Если же $t \notin T_k$, то и $ht \notin T_k$. В силу доказанного выше $t = a_1b$, $ht = a_2c$ для подходящих $a_1, a_2 \in A$ и $b, c \in N_k$. Поскольку $N_k \cap T_kb = \{x\}$ для любого $x \in N_k$ (см. предложение 10), то из $\langle A^b\rangle = \langle A^t\rangle = \langle A^{ht}\rangle = \langle A^c\rangle$ следует $b = c$, $h = a_2b$ и $h = a_2bt^{-1} = a_2a_1^{-1}$. Так как A — подгруппа, то $h \in A$, и предложение доказано. □

Предложение 19. *Если выполнены все условия предложения* 18 *и дополнительно известно, что подгруппы A и $\langle k\rangle$ не совпадают, то $N_v = N_k$ для любой инволюции $v \in J$.*

Доказательство. Пусть $v = k^t$, $b \in N_v$ и $a \in A^{\#}$. По предложению 10 $b = hc$, где $h \in T_k$, $c \in N_k$, и в силу предложения 18 $ac = df$, где $d \in N_v$ и $f \in A^t$. Поскольку $|A| > 2$, то найдется элемент $1 \neq s \in A^t$ такой, что $1 \neq fs \in A^t$, и в силу предложения 18 $acs = dfs \in N_vA^{\#t} = A^{\#}N_k$. С другой стороны, элемент $hcs = bs$ также содержится в $N_vA^{\#t} = A^{\#}N_k$ и по предложению 18 $h \in A$. Но поскольку $b \notin A^{\#}N_k$ (см. предложения 10, 18), то $h = 1$ и $b = c$. В силу произвольности элемента b из N_v, заключаем, что $N_v \subseteq N_k$. Понятно, что также $N_k \subseteq N_v$ и $N_v = N_k$. Предложение доказано. □

5. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть k — инволюция из T_α. По предложению 8 k — единственная инволюция в T_α и согласно принятым обозначениям $T_\alpha = T_k$. Пусть $V = R \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с дополнением $H = V \cap T_\alpha$ и ядром R, обозначим через A максимальную нормальную в T_k подгруппу из H. По предложению 19 $N_k = N_v$ для каждой инволюции $v \in J$. По предложениям 15, 16 $N_k = C$ — нормальная в T подгруппа и $C \cap T_\alpha = 1$, а по предложению 14 $T = C \leftthreetimes T_\alpha$ и подгруппа C абелева. Понятно также, что $F = \alpha^C$ и C регулярна на F. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $T = T_2(F)$ — группа аффинных преобразований почти области F. По предложению 1 T — точно дважды транзитивна на F и $\mathrm{Char}\, T \neq 2$. Согласно [2, V.1.4, V.1.5] $P(\cdot) \leq F(\cdot) = T_0$, где T_0 — стабилизатор точки $0 \in F$. Так как $\mathrm{Char}\, F \neq 2$, то по предложению 8 в $P(\cdot)$ и $F(\cdot) = T_0$ есть единственная инволюция k. Поскольку по условиям теоремы почти-поле P планарно и $V = T_2(P) \leq T$, то в силу предложения 5 $V = C \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с дополнением $H = P(\cdot)$ и ядром $C \simeq P(+)$. По условиям теоремы в H есть нормальная в T_0 подгруппа A порядка > 2 и ввиду единственности k в T_0 можно считать, что $k \in A$. По теореме 1 T обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой C, которая очевидно совпадает J^2, где J — множество инволюций из T, и по предложению 3 F является почти-полем. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3. Пусть T удовлетворяет условиям теоремы 3 и S — произвольная силовская 2-подгруппа группы T_α. Поскольку инволюция k в T_α единственна (см. предложение 8), то по известной теореме Шункова S либо локально циклическая группа, либо локально кватернионная (см., например, [14, теорема 2.15]). Так как R — локально нильпотентная группа, то $Q = S \cap R = O_2(R)$ и подгруппа Q нормальна в T_α. Из условия $\dfrac{p-1}{d} = 0 \,(\mathrm{mod}\, 16)$ следует, что силовская 2-подгруппа S_2 группы $T_{kv} = C_{kv} \leftthreetimes A_k \simeq T_2(P)$

из предложения 17 имеет порядок $2^m \geq 16$ и содержится в $A_k \leq T_\alpha$. Кроме того, S_2 изоморфна подгруппе мультипликативной группы поля P и потому является циклической группой $S_2 = \langle a \rangle$. Отсюда заключаем, что подгруппа $Q \cap \langle a \rangle$ содержит нормальную в T_α подгруппу A, $|A| > 2$. Это означает, что подгруппы $V = C_{kv} \leftthreetimes A_k$ и $H = V \cap T_\alpha = A_k$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. По теореме 1 $T = C \leftthreetimes T_\alpha$, где $C = N_k$ — регулярная абелева нормальная в T подгруппа. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Karzel H.** Inzidenzgruppen. Vorlezungausarbeiten von I. Peiper und K. Sorensen, Univ. Hamburg, 1965.
2. **Wähling H.** Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen Ferlag, 1987. 396 S.
3. **Мазуров В.Д.** О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, №4. С. 102–104.
4. **Мазуров В.Д.** О точно дважды транзитивных группах // Вопросы алгебры и логики. 1996. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. Т. 30. С. 114–118.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/~alglog/18kt.pdf.
6. **Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П.** Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: Изд-во КГТУ, 2004. 211 с.
7. **Созутов А.И., Бугаева Е.В., Бусаркина И.В.** О точно дважды транзитивных группах // Алгебра, логика и приложения: тез. докл. Междунар. конф. Красноярск, 2010. С. 83–85.
8. **Созутов А.И., Антосяк Е.В.** О некоторых точно дважды транзитивных группах // Теория групп: тез. сообщ. VII Междунар. школы конф., посвящ. 60-летию А.С. Кондратьева. Челябинск, 2008. С. 89.
9. **Hall M.** Projective planes// Trans. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 54, no. 2. C. 229–277.
10. **Tits J.** Sur les groupes doublement transitifs continus// Comment. Math. Helv. 1952. Vol. 26. C. 203–224.
11. **Grätzer G.** A theorem on doubly transitive permutation with application to universal algebras// Fund. Math. 1963. Vol. 53. C. 25–41.
12. **Холл М.** Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 467 с.
13. **Созутов А.И.** О группах Шункова, действующих свободно на абелевых группах// Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 188–198.
14. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Изд-во СФУ, 2011. 149 с.

Поступила 15.02.2013

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Сибирский федеральный университет
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнёва
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Дураков Евгений Борисович
канд. физ.-мат. наук, доцент
заместитель директора по учебной работе
Сибирский федеральный университет
e-mail: durakov@mail.ru

Бугаева Евгения Викторовна
ассистент
Сибирский федеральный университет
e-mail: bugaevaevgeniya@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.54+519.17+548.1

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СИММЕТРИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЯХ ГРАФОВ[1]

В. И. Трофимов

Показывается, что результаты из предыдущей работы автора о симметрических 2-расширениях графов, переносятся на симметрические p-расширения графов, где p — произвольное простое число. В частности, для произвольного простого числа p устанавливается конечность числа симметрических p-расширений локально конечного графа, группа автоморфизмов которого содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Получены также некоторые уточнения этих результатов. Кроме того, рассматривается вопрос о такой представимости симметрических расширений d-мерной решетки (и сходных с ней графов) в d-мерном аффинном евклидовом пространстве, что некоторая соответствующая симметрическому расширению вершинно-транзитивная группа автоморфизмов индуцируется кристаллографической группой движений пространства.

Ключевые слова: граф, группа автоморфизмов, симметрическое расширение графов.

V. I. Trofimov. Some remarks on symmetrical extensions of graphs.

It is proved that results from a previous paper of the author on symmetrical 2-extensions of graphs can be extended to symmetrical p-extensions of graphs for any prime p. In particular, it is proved that for any prime p there are only finitely many symmetrical p-extensions of a locally finite graph which has an abelian subgroup of finite index in its automorphism group. Some refinements of these results are also proved. In addition, it is considered a question on the possibility to represent symmetrical extensions of a d-dimension grid (and similar graphs) in the d-dimension affine Euclidean space in such a way that a corresponding vertex-transitive group of automorphisms of the extension is induced by some crystallographic group of the space.

Keywords: graph, group of automorphisms, symmetrical extension of graphs.

1. Введение

Настоящая статья примыкает к [1]. Далее мы используем терминологию и обозначения из [1].

Напомним, что связный граф $\tilde{\Gamma}$ называется *симметрическим расширением* графа Γ посредством графа Δ, если найдутся такие вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа $\tilde{\Gamma}$ и ее система импримитивности σ, что, во-первых, существует изоморфизм φ графа $\tilde{\Gamma}/\sigma$ на граф Γ и, во-вторых, подграф графа $\tilde{\Gamma}$, порожденный блоком σ, изоморфен Δ. Четверка $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ при этом называется *реализацией симметрического расширения* графа Γ посредством графа Δ. Ясно, что если существует симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ, то графы Γ и Δ допускают вершинно-транзитивные группы автоморфизмов, причем граф Γ связен (см. [1]).

Напомним, далее, что связный граф $\tilde{\Gamma}$ называется *H-симметрическим расширением* графа Γ посредством графа Δ, где H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, если найдутся такие вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа $\tilde{\Gamma}$ и ее система импримитивности σ, что, во-первых, существует изоморфизм φ графа $\tilde{\Gamma}/\sigma$ на граф Γ, для которого $\varphi G^{\sigma} \varphi^{-1} = H$, и, во-вторых, подграф графа $\tilde{\Gamma}$, порожденный блоком σ, изоморфен Δ.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), а также в рамках проекта, подпадающего под Соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013.

Четверка $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ при этом называется *реализацией H-симметрического расширения* графа Γ посредством графа Δ.

Для произвольного натурального числа q симметрическое расширение графа Γ посредством любого графа, имеющего q вершин, называется *симметрическим q-расширением* графа Γ. *H-симметрическим q-расширением* графа Γ, где q — натуральное число и H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, называется произвольное H-симметрическое расширение графа Γ посредством графа, имеющего q вершин.

Напомним также, что реализации $(\tilde{\Gamma}_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\tilde{\Gamma}_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ называются *эквивалентными*, если найдется изоморфизм графа $\tilde{\Gamma}_1$ на граф $\tilde{\Gamma}_2$, переводящий σ_1 в σ_2. Любой изоморфизм с этим свойством *осуществляет эквивалентность* реализаций $(\tilde{\Gamma}_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\tilde{\Gamma}_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений Γ посредством Δ.

Укажем на имеющиеся в [1] опечатки: на с. 297 в строке 3 сверху следует удалить “непустые” и в строке 3 снизу следует удалить “непустых”, на с. 298 в строках 17 и 15 снизу следует заменить $V(H_{\Sigma^v})$ на $V(\Sigma^v)$, на с. 299 в строке 18 снизу следует заменить “совпадает” на “совпадает на $V(\Sigma_i^{v_i})$”.

2. Конечность числа симметрических p-расширений d-мерной решетки и сходных с ней графов для произвольного простого числа p

Как отмечено в [1], теоремы 1, 2 и следствие 1 из [1] остаются справедливыми, если заменить в них 2-расширения и расширения посредством графа K_2 и графа $\bar{\mathrm{K}}_2$ соответственно на p-расширения и на расширения посредством произвольного фиксированного графа Δ, имеющего p вершин, где p — простое число. Ниже в этом разделе мы сформулируем эти обобщения теорем 1 и 2 из [1] в виде теорем 1 и 2 и докажем их. Указанное обобщение следствия 1 из [1] является частным случаем теоремы 2 настоящей работы. Отметим, что усиление приводимой ниже теоремы 1 будет получено в разд. 3 (см. теорему 3).

Предварительно докажем два предложения.

Реализацию $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ назовем *точной*, если точно действие G на σ. Из [1, предложение 8] вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть Γ — локально конечный граф и H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ. Предположим, что стабилизатор вершины графа Γ в группе H конечен. Тогда для любого конечного графа Δ имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных точных реализаций H-симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ.*

Кроме того, нам потребуется следующее, по существу очевидное, предложение.

Предложение 2. *Пусть Γ — связный граф, G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и σ — система импримитивности группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка p, где p — простое число. Пусть, кроме того, K — ядро естественного гомоморфизма $G \to G^{\sigma}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *подграфы графа Γ, порожденные блоками системы импримитивности σ, либо связны, либо не имеют ребер;*

2) *если $N \trianglelefteq K$, то на каждом блоке системы импримитивности σ группа N действует либо транзитивно, либо тривиально; если, кроме того, $1 \neq N \trianglelefteq G$, то на каждом блоке системы импримитивности σ группа N действует транзитивно;*

3) *если $K \neq 1$, то любые две вершины из одного и того же блока системы импримитивности σ смежны с одним и тем же числом вершин из любого фиксированного блока;*

4) *если у σ нет двух блоков таких, что каждая вершина одного смежна с каждой вершиной другого, то K действует точно на каждом блоке системы импримитивности σ и,*

следовательно, имеет порядок, делящий $p!$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) следует из того, что порядок связной компоненты подграфа графа Γ, порожденного блоком системы импримитивности σ, делит порядок этого блока. Далее, если $1 \neq N \trianglelefteq K$, то порядок произвольной N-орбиты делит порядок содержащего ее блока системы импримитивности σ, что влечет 2). Если $K \neq 1$, то согласно 2) блоки системы импримитивности σ есть K-орбиты на $V(\Gamma)$. Это влечет 3). Наконец, если для некоторого $X \in \sigma$ действие K на X не является точным, то с учетом связности графа Γ найдется $Y \in \sigma$ такой, что $\{X, Y\} \in E(\Gamma/\sigma)$ и поэлементный стабилизатор K_X множества X в группе K действует нетривиально на Y. Так как $K_X \trianglelefteq K$, то при этом согласно 2) группа K_X действует транзитивно на Y. Но тогда с учетом 3) каждая вершина из X смежна с каждой вершиной из Y, что доказывает 4).

Обобщением теоремы 1 из [1] является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— локально конечный граф такой, что группа* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Тогда для каждого простого числа* p *имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных симметрических* p*-расширений графа* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приводимое ниже доказательство теоремы 1 близко к доказательству теоремы 1 из [1], причем начало и конец доказательства почти дословно повторяют начало и конец доказательства теоремы 1 из [1].

Согласно предложению 5 из [1] и утверждению 1) предложения 2 для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что для каждого графа Γ, удовлетворяющего условию теоремы 1, и для каждого связного графа Δ, допускающего вершинно-транзитивную группу автоморфизмов и имеющего p вершин, существует лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений Γ посредством Δ.

Пусть Γ — произвольный граф, удовлетворяющий условию теоремы 1, Δ — произвольный связный граф, допускающий вершинно-транзитивную группу автоморфизмов и имеющий p вершин, и $\{(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i) : i \in I\}$ — некоторая система представителей (всех) классов эквивалентных между собой реализаций симметрических расширений Γ посредством графа Δ. Наша цель — доказать, что множество I конечно.

Если Γ несвязен, то $I = \varnothing$. Будем поэтому предполагать, что Γ — связный граф.

Согласно [1, предложение 3] в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ имеется лишь конечное число вершинно-транзитивных подгрупп и тем более лишь конечное число, скажем k, классов сопряженных вершинно-транзитивных подгрупп. Пусть $\{H_1, \dots, H_k\}$ — некоторая система представителей этих классов. Так как для каждого $i \in I$ подгруппа $\varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1}$ группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ вершинно-транзитивна, то, заменяя в случае необходимости $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ на реализацию, получаемую из нее домножением изоморфизма φ_i слева на подходящий автоморфизм графа Γ (получаемая таким образом реализация, очевидно, эквивалентна $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$), мы будем, не теряя общности, считать, что $\varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1} \in \{H_1, \dots, H_k\}$ для всех $i \in I$. Теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что для произвольной подгруппы H из множества подгрупп $\{H_1, \dots, H_k\}$ группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ множество

$$I_H := \{i \in I : \varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1} = H\} \tag{2.1}$$

конечно.

Итак, пусть $H \in \{H_1, \dots, H_k\}$ и I_H — множество, определенное согласно (2.1). Зафиксируем некоторую вершину v графа Γ. Согласно [1, предложение 3] группа H_v конечна. Зафиксируем некоторое порождающее множество $\{a_1, \dots, a_s\}$ (s — целое положительное число) группы H_v и некоторый набор $\{h_j : j \in J\}$ элементов группы H такой, что вершины $h_j(v), j \in J$, попарно различны и составляют множество $\Gamma(v)$. В силу связности графа Γ группа H порождается множеством $\{a_1, \dots, a_s, h_j : j \in J\}$.

Обозначим через $I_{H,1}$ множество таких $i \in I_H$, что $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ — точная реализация симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ. Согласно предложению 3 из [1] и предложению 1 множество $I_{H,1}$ конечно. Для завершения доказательства теоремы 1, следовательно, достаточно доказать конечность множества $I_{H,2} := I_H \setminus I_{H,1}$, что и делается далее.

Для $i \in I_{H,2}$ скажем, что ребро $\{w, w'\}$ графа Γ_i/σ_i имеет тип 1, если некоторая вершина графа Γ_i, содержащаяся в w, несмежна в Γ_i с некоторой вершиной графа Γ_i, содержащейся в w'. В противном случае, когда каждая вершина графа Γ_i, содержащаяся в w, смежна в Γ_i с каждой вершиной графа Γ_i, содержащейся в w', скажем, что ребро $\{w, w'\}$ графа Γ_i/σ_i имеет тип 2.

Для каждого $i \in I_{H,2}$ обозначим через $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ подграф графа Γ_i/σ_i с множеством вершин, равным $V(\Gamma_i/\sigma_i)$, ребрами которого являются в точности все ребра типа 1 графа Γ_i/σ_i. Тогда (ср. [1]) $G_i^{\sigma_i} \le \mathrm{Aut}((\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)})$ и φ_i есть изомофизм графа $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ на подграф графа Γ, допускающий H в качестве группы автоморфизмов. С учетом [1, предложение 1] для доказательства теоремы достаточно показать, что для произвольного допускающего H в качестве группы автоморфизмов подграфа Σ графа Γ множество $I_{H,2,\Sigma}$, определяемое как множество всех тех $i \in I_{H,2}$, для которых φ_i есть изомофизм графа $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ на граф Σ, конечно.

Итак, пусть Σ — произвольный подграф графа Γ, допускающий H в качестве группы автоморфизмов. Положим $J_\Sigma := \{j \in J : h_j(v) \in \Sigma(v)\}$ и обозначим через Σ^v подграф графа Σ, являющийся его связной компонентой, содержащей вершину v. Тогда (ср. [1]) подгруппа Q группы H, порожденная $\{a_1, \dots, a_s, h_j : j \in J_\Sigma\}$, имеет множество $V(\Sigma^v)$ в качестве своей орбиты и совпадает со стабилизатором этого множества в группе H. Обозначим через ρ гомоморфизм ограничения группы Q на множество $V(\Sigma^v)$. Группа $\rho(Q)$, таким образом, является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа Σ^v, порожденной множеством $\{\rho(a_1), \dots, \rho(a_s), \rho(h_j) : j \in J_\Sigma\}$. Так как по условию группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ содержит абелеву подгруппу конечного индекса, то этим свойством обладает и группа $\rho(Q)$. В частности, найдется конечное множество слов

$$\{W_1, \dots, W_r\}$$

над алфавитом

$$\{\rho(a_1), \rho(a_1)^{-1}, \dots, \rho(a_s), \rho(a_s)^{-1}, \rho(h_j), \rho(h_j)^{-1} : j \in J_\Sigma\},$$

которое является множеством определяющих соотношений группы $\rho(Q)$ для ее порождающего множества $\{\rho(a_1), \dots, \rho(a_s), \rho(h_j) : j \in J_\Sigma\}$.

Для каждого $i \in I_{H,2,\Sigma}$ выберем произвольным образом вершину $v_i \in \varphi_i^{-1}(v)$ и обозначим через Σ_i подграф графа Γ_i с множеством вершин, равным $V(\Gamma_i)$, ребрами которого являются в точности все такие ребра $\{x, x'\}$ графа Γ_i, что либо $x^{\sigma_i} = (x')^{\sigma_i}$, либо $\{x^{\sigma_i}, (x')^{\sigma_i}\}$ — ребро типа 1 графа Γ_i/σ_i. Таким образом, граф Σ_i/σ_i совпадает с графом $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ и φ_i есть изоморфизм графа Σ_i/σ_i на граф Σ. Ясно, кроме того, что $G_i \le \mathrm{Aut}(\Sigma_i)$. Определим гомоморфизм α_i группы G_i на группу $H = \varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1}$, полагая

$$\alpha_i(g) = \varphi_i g^{\sigma_i} \varphi_i^{-1} \text{ для всех } g \in G_i,$$

и обозначим через C_i его ядро $\mathrm{Ker}(\alpha_i) = \{g \in G_i : g^{\sigma_i} = 1\}$. Согласно утверждению 2) предложения 2 множество C_i-орбит на $V(\Gamma_i)$ есть в точности множество блоков системы импримитивности σ_i (группы G_i на $V(\Gamma_i)$).

Пусть $a_{i,1}, \dots, a_{i,s}$ — некоторые прообразы при гомоморфизме α_i элементов $a_1, \dots, a_s$ соответственно. Домножая в случае необходимости некоторые из элементов $a_{i,1}, \dots, a_{i,s}$ (например, слева) на подходящие элементы группы C_i, будем, не теряя общности, всюду в дальнейшем предполагать, что каждый из элементов $a_{i,1}, \dots, a_{i,s}$ стабилизирует вершину v_i. Далее, для каждого $j \in J_\Sigma$ зафиксируем некоторый прообраз $h_{i,j}$ при гомоморфизме α_i элемента h_j и обозначим через $n_{i,j}$ число вершин графа Γ_i, содержащихся в $\varphi_i^{-1}(h_j(v))$ и смежных с вершиной v_i в графе Γ_i (или, что эквивалентно, в графе Σ_i). Отметим, что $n_{i,j} \ge 1$ в силу утверждения 3) предложения 2. Зафиксируем некоторый набор $h_{i,j,1}, \dots, h_{i,j,n_{i,j}}$ элементов группы G_i, получающихся из $h_{i,j}$ домножением слева на подходящие элементы группы C_i, который обладает тем свойством, что $\{h_{i,j,1}(v_i), \ldots, h_{i,j,n_{i,j}}(v_i)\}$ совпадает с множеством вершин графа Γ_i, содержащихся в $\varphi_i^{-1}(h_j(v))$ и смежных с вершиной v_i в графе Γ_i. Наконец, зафиксируем некоторый набор $c_{i,1}, \ldots, c_{i,t}$, где t есть валентность графа Δ, элементов группы C_i, который обладает тем свойством, что $\{c_{i,1}(v_i), \ldots, c_{i,t}(v_i)\}$ совпадает с множеством вершин графа Γ_i, содержащихся в $\varphi_i^{-1}(v)$ и смежных с вершиной v_i в графе Γ_i.

Для каждого $i \in I_{H,2,\Sigma}$ обозначим через $\Sigma_i^{v_i}$ подграф графа Σ_i, являющийся его связной компонентой, содержащей вершину v_i. Произвольный блок системы импримитивности σ_i (группы G_i на $V(\Gamma_i)$) либо пересекается с $V(\Sigma_i^{v_i})$ по пустому множеству, либо содержится в $V(\Sigma_i^{v_i})$ (поскольку порождает в Σ_i связный подграф, изоморфный Δ). Обозначим через $\hat{\sigma}_i$ разбиение множества $V(\Sigma_i^{v_i})$, состоящее из содержащихся в нем блоков σ_i. Пусть, кроме того, $\hat{\varphi}_i$ — ограничение изоморфизма φ_i на подмножество $V(\Sigma_i^{v_i}/\hat{\sigma}_i)$ множества $V(\Sigma_i/\sigma_i)$. Очевидным образом $\hat{\varphi}_i$ является изоморфизмом графа $\Sigma_i^{v_i}/\hat{\sigma}_i$ на граф Σ^v.

Для каждого $i \in I_{H,2,\Sigma}$ обозначим через Q_i подгруппу группы G_i, порожденную множеством $C_i \cup \{a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}\} \cup \{h_{i,j} : j \in J_\Sigma\}$. По нашему выбору $C_i, a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}$ и $h_{i,j}, j \in J_\Sigma$, подгруппа Q_i группы G_i имеет множество $V(\Sigma_i^{v_i})$ в качестве своей орбиты и совпадает со стабилизатором этого множества в группе G_i. Обозначим через ρ_i гомоморфизм ограничения группы Q_i (как группы подстановок на $V(\Gamma_i)$) на множество $V(\Sigma_i^{v_i})$. Группа $\rho_i(Q_i)$, таким образом, является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа $\Sigma_i^{v_i}$, порожденной множеством $\rho_i(C_i) \cup \{\rho_i(a_{i,1}), \ldots, \rho_i(a_{i,s})\} \cup \{\rho_i(h_{i,j}) : j \in J_\Sigma\}$. Определим гомоморфизм $\hat{\alpha}_i$ группы $\rho_i(Q_i)$ на группу $\rho(Q) = \hat{\varphi}_i \rho_i(Q_i)^{\hat{\sigma}_i} \hat{\varphi}_i^{-1}$, полагая

$$\hat{\alpha}_i(g) = \hat{\varphi}_i g^{\hat{\sigma}_i} \hat{\varphi}_i^{-1} \text{ для всех } g \in \rho_i(Q_i),$$

и пусть $B_i := \mathrm{Ker}(\hat{\alpha}_i)$. Тогда по выбору $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}, h_{i,j}, j \in J_\Sigma$, и $h_{i,j,m}, j \in J_\Sigma, 1 \le m \le n_{i,j}$, имеем

$$\hat{\alpha}_i(\rho_i(a_{i,t})) = \rho(a_t) \text{ для всех } 1 \le t \le s,$$

$$\hat{\alpha}_i(\rho_i(h_{i,j,m})) = \hat{\alpha}_i(\rho_i(h_{i,j})) = \rho(h_j) \text{ для всех } j \in J_\Sigma, 1 \le m \le n_{i,j}.$$

Кроме того, B_i содержит $\rho_i(C_i)$ и потому с учетом утверждения 4) предложения 2 имеет порядок, кратный p и делящий $p!$.

Теперь каждому $i \in I_{H,2,\Sigma}$ и каждому $j \in J_\Sigma$ следующим образом сопоставим элементы $b_{i,m} \in B_i, 1 \le m \le r$; $b_{i,j,m} \in \rho_i(C_i), 1 \le m \le n_{i,j}$; $\beta_{i,m} \in \mathrm{Aut}(B_i), 1 \le m \le s$; $\gamma_{i,j} \in \mathrm{Aut}(B_i)$. Для каждого $1 \le m \le r$ полагаем $b_{i,m}$ равным значению слова W_m после замены в нем каждого $\rho(a_1)$ на $\rho_i(a_{i,1})$, каждого $\rho(a_1)^{-1}$ на $\rho_i(a_{i,1})^{-1}$, …, каждого $\rho(a_s)$ на $\rho_i(a_{i,s})$, каждого $\rho(a_s)^{-1}$ на $\rho_i(a_{i,s})^{-1}$, каждого $\rho(h_{j'})$ на $\rho_i(h_{i,j'})$ для всех $j' \in J_\Sigma$ и каждого $\rho(h_{j'})^{-1}$ на $\rho_i(h_{i,j'})^{-1}$ для всех $j' \in J_\Sigma$; для каждого $1 \le m \le n_{i,j}$ полагаем $b_{i,j,m} = \rho_i(h_{i,j,m} h_{i,j}^{-1})$; для каждого $1 \le m \le s$ полагаем $\beta_{i,m}$ равным сопряжению группы B_i элементом $\rho_i(a_{i,m})$; наконец, полагаем $\gamma_{i,j}$ равным сопряжению группы B_i элементом $\rho_i(h_{i,j})$.

Если мощность $|I_{H,2,\Sigma}|$ конечна, но достаточно велика, или, тем более, бесконечна, то найдутся различные $i, i' \in I_{H,2,\Sigma}$ такие, что $n_{i,j} = n_{i',j}$ для всех $j \in J_\Sigma$ и имеется изоморфизм $\delta : B_i \to B_{i'}$ со следующими свойствами:

$$b_{i',m} = \delta(b_{i,m}) \text{ для всех } 1 \le m \le r,$$

$$\rho_{i'}(C_{i'}) = \delta(\rho_i(C_i)),$$

$$(\rho_{i'}(C_{i'}))_{v_{i'}} = \delta((\rho_i(C_i))_{v_i}),$$

$$b_{i',j,m} = \delta(b_{i,j,m}) \text{ для всех } j \in J_\Sigma, 1 \le m \le n_{i,j},$$

$$\rho_{i'}(c_{i',m}) = \delta(\rho_i(c_{i,m})) \text{ для всех } 1 \le m \le t,$$

$$\beta_{i',m} = \delta \beta_{i,m} \delta^{-1} \text{ для всех } 1 \le m \le s,$$

$$\gamma_{i',j} = \delta \gamma_{i,j} \delta^{-1} \text{ для всех } j \in J_\Sigma.$$

Мы покажем, что наличие таких $i, i' \in I_{H,2,\Sigma}$ дает противоречие, и этим завершим доказательство теоремы 1.

При наличии i, i' с указанными свойствами имеется изоморфизм $\hat{\alpha}_{i,i'}$ группы $\rho_i(Q_i)$ на группу $\rho_{i'}(Q_{i'})$ такой, что

$$\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(C_i)) = \rho_{i'}(C_{i'}),$$

$$\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(a_{i,m})) = \rho_{i'}(a_{i',m}) \text{ для всех } 1 \le m \le s,$$

$$\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(c_{i,m})) = \rho_{i'}(c_{i',m}) \text{ для всех } 1 \le m \le t,$$

$$\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(h_{i,j,m})) = \rho_{i'}(h_{i',j,m}) \text{ для всех } j \in J_\Sigma,\ 1 \le m \le n_{i,j}.$$

Учитывая, что, во-первых, стабилизаторами вершины v_i и подмножества $v_i^{\sigma_i}$ в группе $\rho_i(Q_i)$ являются соответственно подгруппы $\langle(\rho_i(C_i))_{v_i}, \rho_i(a_{i,1}), \ldots, \rho_i(a_{i,s})\rangle$ и $\langle\rho_i(C_i), \rho_i(a_{i,1}), \ldots, \rho_i(a_{i,s})\rangle$, а стабилизаторами вершины $v_{i'}$ и подмножества $v_{i'}^{\sigma_{i'}}$ в группе $\rho_{i'}(Q_{i'})$ являются соответственно подгруппы $\langle(\rho_{i'}(C_{i'}))_{v_{i'}}, \rho_{i'}(a_{i',1}), \ldots, \rho_{i'}(a_{i',s})\rangle$ и $\langle\rho_{i'}(C_{i'}), \rho_{i'}(a_{i',1}), \ldots, \rho_{i'}(a_{i',s})\rangle$, и, во-вторых, элементы $\rho_i(c_{i,m})$, $1 \le m \le t$, и $\rho_i(h_{i,j,m})$, $j \in J_\Sigma, 1 \le m \le n_{i,j}$, группы $\rho_i(Q_i)$ таковы, что вершины $\rho_i(c_{i,m})(v_i)$, $1 \le m \le t$, и $\rho_i(h_{i,j,m})(v_i)$, $j \in J_\Sigma, 1 \le m \le n_{i,j}$, попарно различны и составляют множество $\Sigma_i^{v_i}(v_i)$, а элементы $\rho_{i'}(c_{i',m})$, $1 \le m \le t$, и $\rho_{i'}(h_{i',j,m})$, $j \in J_\Sigma, 1 \le m \le n_{i,j}$, группы $\rho_{i'}(Q_{i'})$ таковы, что вершины $\rho_{i'}(c_{i',m})(v_{i'})$, $1 \le m \le t$, и $\rho_{i'}(h_{i',j,m})(v_{i'})$, $j \in J_\Sigma, 1 \le m \le n_{i,j}$, попарно различны и составляют множество $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}(v_{i'})$, на основании [1, предложение 2] заключаем, что имеется изоморфизм $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ со следующими свойствами:

(i) для каждого $g \in \rho_i(Q_i)$ вершина $\hat{\varphi}_{i,i'}(g(v_i))$ совпадает с образом вершины $v_{i'}$ под действием $\hat{\alpha}_{i,i'}(g)$;

(ii) $\hat{\varphi}_{i,i'}$ переводит $\hat{\sigma}_i$ в $\hat{\sigma}_{i'}$.

Дальнейшее доказательство теоремы, по существу дословно, повторяет заключительную часть доказательства теоремы 1 из [1]. Мы следующим образом продолжим изоморфизм $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ до изоморфизма $\varphi_{i,i'}$ графа Σ_i на граф $\Sigma_{i'}$ (напомним, что $\Sigma_i^{v_i}$ — связная компонента графа Σ_i, содержащая v_i, и $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ — связная компонента графа $\Sigma_{i'}$, содержащая $v_{i'}$). Для каждой связной компоненты Σ_i^* графа Σ_i, отличной от $\Sigma_i^{v_i}$, зафиксируем некоторый элемент $g_{\Sigma_i^*}$ группы G_i, отображающий $V(\Sigma_i^{v_i})$ на $V(\Sigma_i^*)$, и некоторый элемент $g'_{\Sigma_i^*}$ группы $G_{i'}$, для которого $\alpha_{i'}(g'_{\Sigma_i^*}) = \alpha_i(g_{\Sigma_i^*})$. (Поскольку G_i — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Σ_i и $\alpha_i(G_i) = H = \alpha_{i'}(G_{i'})$ согласно (2.1), то такие элементы $g_{\Sigma_i^*}$ и $g'_{\Sigma_i^*}$ найдутся.) Положим, кроме того, $g_{\Sigma_i^{v_i}} = 1$ и $g'_{\Sigma_i^{v_i}} = 1$ (так что $\alpha_{i'}(g'_{\Sigma_i^{v_i}}) = \alpha_i(g_{\Sigma_i^{v_i}})$). Теперь для произвольной вершины w графа Σ_i полагаем

$$\varphi_{i,i'}(w) = g'_{\Sigma_i^*}(\hat{\varphi}_{i,i'}(g_{\Sigma_i^*}^{-1}(w))),$$

где Σ_i^* — связная компонента графа Σ_i, вершиной которой является w. Легко видеть, что так определенное отображение $\varphi_{i,i'}$ множества $V(\Sigma_i) = V(\Gamma_i)$ на множество $V(\Sigma_{i'}) = V(\Gamma_{i'})$ есть изоморфизм графа Σ_i на граф $\Sigma_{i'}$, продолжающий изоморфизм $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ и (в силу свойства (ii) изоморфизма $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$) переводящий σ_i в $\sigma_{i'}$.

Теперь, так же, как при доказательстве теоремы 1 из [1] (см. [1, с. 301, 302]), доказывается, что отображение $\varphi_{i,i'}$ (переводящее σ_i в $\sigma_{i'}$) есть изоморфизм графа Γ_i на граф $\Gamma_{i'}$, что дает требуемое для завершения доказательства теоремы противоречие, поскольку влечет эквивалентность реализаций $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ и $(\Gamma_{i'}, G_{i'}, \sigma_{i'}, \varphi_{i'})$ симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ вопреки их выбору.

З а м е ч а н и е 1. Анализ приведенного доказательства теоремы 1 показывает, что для локально конечного графа Γ, группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ автоморфизмов которого вершинно-транзитивна и содержит абелеву подгруппу конечного индекса, справедливо следующее утверждение. Если элементы $h_1, \ldots, h_d$ группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ (d — некоторое целое положительное число) порождают свободную абелеву подгруппу ранга d, то для произвольного простого p и произвольной реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического p-расширения графа Γ найдутся такие попарно перестановочные автоморфизмы $g_1, \ldots, g_d$ графа $\tilde{\Gamma}$, переводящие блоки σ в блоки σ, что для некоторых (ограниченных сверху функцией от p) целых положительных чисел $n_1, \ldots, n_d$ имеем $\varphi g_i^\sigma \varphi^{-1} = h_i^{n_i}$ для каждого $1 \leq i \leq d$. В частности, если Γ — d-мерная (кубическая) решетка, то, в терминологии из [2], $(\tilde{\Gamma}, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \ldots, n_d]$-периодичности для некоторых целых положительных чисел $n_1, \ldots, n_d$. Этот результат может быть положен в основу алгоритма проверки на изоморфизм (соответственно эквивалентность) симметрических p-расширений (соответственно реализаций симметрических p-расширений) решеток для простого p.

Обобщением теоремы 2 из [1] является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Γ — локально конечный граф и H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ. Предположим, что, во-первых, стабилизатор вершины графа Γ в группе H конечно порожден и, во-вторых, для каждого H-допустимого подграфа графа Γ группа, индуцируемая на множестве вершин его связной компоненты стабилизатором этого множества в H, конечно определена. Тогда для каждого простого числа p имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций H-симметрических p-расширений графа Γ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 может быть получено посредством модификации приводимого выше доказательства теоремы 1, аналогичной указанной в [1, разд. 4] модификации доказательства теоремы 1 из [1], приводящей к доказательству теоремы 2 из [1]. Отличие состоит лишь в следующем. Во-первых, теперь вместо реализаций H-симметрических расширений Γ посредством графа K_2 следует рассматривать реализации H-симметрических расширений Γ посредством произвольного фиксированного связного графа с p вершинами. (Единственный несвязный граф с p вершинами, посредством которого можно симметрически расширить граф Γ, есть согласно утверждению 1) предложения 2 граф $\bar{\mathrm{K}}_p$. Но согласно [1, предложение 5] конечность числа попарно неэквивалентных реализаций H-симметрических расширений графа Γ посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_p$ будет доказана, если будет доказана конечность числа попарно неэквивалентных реализаций H-симметрических расширений графа Γ посредством графа K_p.) Во-вторых, теперь следует воспользоваться тем, что согласно теореме М. Холла из [3] конечно порожденный стабилизатор вершины графа Γ в группе H имеет лишь конечное число подгрупп индекса p.

3. Эквивалентность и строгая эквивалентность реализаций симметрических расширений графов

Помимо рассматриваемого выше отношения эквивалентности на множестве реализаций симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ, представляет интерес следующее, более тонкое, отношение эквивалентности на том же множестве. Назовем реализации $(\tilde{\Gamma}_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\tilde{\Gamma}_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ *строго эквивалентными*, если найдется изоморфизм графа $\tilde{\Gamma}_1$ на граф $\tilde{\Gamma}_2$, переводящий σ_1 в σ_2 и индуцирующий изоморфизм $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ графа $\tilde{\Gamma}_1/\sigma_1$ на граф $\tilde{\Gamma}_2/\sigma_2$. Про любой изоморфизм графа $\tilde{\Gamma}_1$ на граф $\tilde{\Gamma}_2$ с этими свойствами будем говорить, что он *осуществляет строгую эквивалентность* реализаций $(\tilde{\Gamma}_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\tilde{\Gamma}_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений Γ посредством Δ.

Согласно определению реализации $(\tilde{\Gamma}, G_1, \sigma, \varphi_1)$ и $(\tilde{\Gamma}, G_2, \sigma, \varphi_2)$ симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ строго эквивалентны тогда и только тогда, когда $\varphi_2^{-1}\varphi_1 \in (\mathrm{Aut}_\sigma(\tilde{\Gamma}))^\sigma$, где $\mathrm{Aut}_\sigma(\tilde{\Gamma})$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}(\tilde{\Gamma})$, состоящая из всех ее элементов, отображающих блоки σ в блоки σ. Отсюда легко вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 3. *Пусть $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ — реализация симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ. Тогда число классов строгой эквивалентности, на которое разбивает-*

ся множество эквивалентных $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ *реализаций симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* Δ*, равно индексу* $|\mathrm{Aut}(\tilde{\Gamma}/\sigma) : (\mathrm{Aut}_\sigma(\tilde{\Gamma}))^\sigma|$.

Поскольку (в обозначениях предложения 3) $(\mathrm{Aut}_\sigma(\tilde{\Gamma}))^\sigma$ — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ/σ и, следовательно, индекс $|\mathrm{Aut}(\tilde{\Gamma}/\sigma) : (\mathrm{Aut}_\sigma(\tilde{\Gamma}))^\sigma|$ равен индексу $|\mathrm{Aut}(\tilde{\Gamma}/\sigma)_v : ((\mathrm{Aut}_\sigma(\tilde{\Gamma}))^\sigma)_v|$, где v — вершина графа Γ/σ, то справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Если число классов эквивалентности реализаций симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* Δ *конечно и стабилизатор вершины графа* Γ *в группе* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *конечен, то конечно и число классов строгой эквивалентности реализаций симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* Δ.

Из предложения 4 и [1, предложение 3] вытекает, что теорема 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 3. *Пусть* Γ *— локально конечный граф такой, что группа* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Тогда для каждого конечного графа* Δ *с простым числом вершин имеется лишь конечное число попарно не являющихся строго эквивалентными реализаций симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* Δ.

Легко убедиться, что справедливы также следующие уточнения предложений 7 и 8 из [1].

Предложение 5. *В обозначениях предложения* 7 *из* [1] *изоморфизм* $\psi_{G,L,u}$ *графа* $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ *на граф* $\tilde{\Gamma}$ *осуществляет строгую эквивалентность реализаций* $(\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}, \lambda_{G/L}(G), \sigma_{G,K,L}, \pi\varphi_{G,K,L})$ *и* $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ *симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* Δ.

Предложение 6. *Пусть выполнены условия предложения* 8 *из* [1]. *Тогда для некоторой подгруппы* L *индекса* $|V(\Delta)|$ *группы* K *и произвольной системы представителей* M *левых смежных классов* K *по* L *найдутся такое подмножество* P *множества* M*, не содержащее представителя* L*, и такие подмножества* $P_j, j \in J$*, множества* M*, что для*

$$\mathcal{P} := \{\{L, gL\} : g \in P\} \cup \{\{L, h_j gL\} : j \in J, g \in P_j\}$$

граф $\Gamma_{H,K,\mathcal{P}_{H/K}}$ *изоморфен графу* Γ*, граф* $\Gamma_{K,L,\mathcal{P}_K}$ *изоморфен графу* Δ *и реализация* $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ *симметрического расширения графа* Γ *посредством графа* Δ *строго эквивалентна* $(\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}$, $\lambda_{H/L}(H)$, $\sigma_{H,K,L}, \pi\varphi_{H,K,L})$*, где* π *— изоморфизм графа* $\Gamma_{H,K,\mathcal{P}_{H/K}}$ *на граф* Γ*, определяемый следующим образом:* $\pi(gK) = \varphi(g(v))$ *для всех* $gK \in V(\Gamma_{H,K,\mathcal{P}_{H/K}})$.

4. Кристаллографические реализации симметрических расширений решеток и сходных с ними графов

Содержание настоящего раздела в значительной мере обусловлено интересами кристаллографии. Для последней интерес представляет, в частности, следующая задача. Дан связный локально конечный граф Γ такой, что $V(\Gamma)$ — (заданная) орбита кристаллографической группы аффинного евклидова пространства A (обычно 3-мерного), индуцирующей на $V(\Gamma)$ группу автоморфизмов графа Γ. Дано, кроме того, целое число $q > 1$. Требуется найти все реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрических q-расширений графа Γ со следующими свойствами:

(1) $V(\tilde{\Gamma})$ — орбита кристаллографической группы аффинного евклидова пространства A, индуцирующей на $V(\tilde{\Gamma})$ группу G;

(2) отображение φ сопоставляет каждому блоку системы σ его барицентр в пространстве A;

(3) для любой точки из $V(\tilde{\Gamma})$ расстояние от нее до барицентра содержащего ее блока системы σ меньше расстояния от нее до любой другой точки из $V(\Gamma)$.

Ниже дается решение этой задачи, показывающее, что для нахождение всех таких $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ могут быть весьма эффективно использованы известные свойства и (протабулированные по меньшей мере в случае, когда размерность A не превосходит 3) характеристики кристаллографических групп пространства A (то, что приводимая далее последовательность шагов ведет к решению задачи, по существу, очевидно и не требует дополнительных пояснений).

Зафиксируем некоторую точку v из заданного нам множества $V(\Gamma) \subseteq A$. Положим, кроме того, $H = \{h \in \mathrm{Isom}(A) : h(V(\Gamma)) = V(\Gamma)$ и $h^{V(\Gamma)} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)\}$ (здесь Isom(A) — группа изометрий A). Тогда H — кристаллографическая группа пространства A, $V(\Gamma) = H(v)$ — H-орбита (таким образом, $H^{V(\Gamma)}$ — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ) и H действует точно на $V(\Gamma)$. Отсюда следует конечность числа кристаллографических групп пространства A, которые содержатся в H и действуют транзитивно на $V(\Gamma)$ (т. е. индуцируют вершинно-транзитивные группы автоморфизмов графа Γ). Пусть $\{H_1, \dots, H_k\}$ — все такие группы (их нахождение не вызывает принципиальных трудностей). Ясно, что для произвольной реализации $(\tilde\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического q-расширения графа Γ со свойствами (1), (2) и (3) найдется единственное $i \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $G = H_i^{V(\tilde\Gamma)}$. Сформулированная выше задача сводится, таким образом, к нахождению для каждой $H_i \in \{H_1, \dots, H_k\}$ всех таких реализаций $(\tilde\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрических q-расширений графа Γ, что имеют место свойства (2) и (3), а свойство (1) конкретизируется следующим образом:

(1^+) $V(\tilde\Gamma)$ — H_i-орбита и $G = H_i^{V(\tilde\Gamma)}$.

Пусть K — стабилизатор v в H_i. Тогда множество $\mathrm{Fix}(K)$ неподвижных точек группы K есть подпространство пространства A, содержащее v. Обозначим через U содержащее v ортогональное дополнение к $\mathrm{Fix}(K)$ в A. Ясно, что $U \cap \mathrm{Fix}(K) = \{v\}$ и U K-инвариантно. В частности, для произвольной точки $u \in U$ барицентр содержащей ее K-орбиты совпадает с v (поскольку принадлежит как U, так и $\mathrm{Fix}(K)$). Обозначим через $D(v)$ внутренность многогранника Вороного — Дирихле множества $V(\Gamma)$ для точки v (т. е. множество всех таких точек w пространства A, что расстояние от w до v меньше расстояния от w до любой другой точки множества $V(\Gamma)$) и выберем некоторую фундаментальную область $D(v, K)$ для группы, индуцируемой K на $D(v)$.

Пусть L — произвольная подгруппа индекса q группы K (если у группы K нет подгрупп индекса q, то реализаций $(\tilde\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрических q-расширений графа Γ со свойствами (1^+), (2) и (3) не существует). Обозначим через $D(v, K, L)$ множество всех точек из $D(v, K)$, у которых стабилизатор в H_i равен L. Легко видеть, что $D(v, K, L)$ совпадает с пересечением множества $D(v, K)$ и множества, состоящего из всех точек пространства A, у которых стабилизатор в H_i сопряжен с L в H_i. (Последнее множество называется Wyckoff position кристаллографической группы H_i, соответствующей ее подгруппе L. Если размерность A не превосходит 3, то для каждой кристаллографической группы пространства A все эти множества, соответствующие ее подгруппам, известны, см. [4].)

Пусть w — произвольная точка из $D(v, K, L)$ и $W = H_i(w)$ — содержащая ее H_i-орбита. Ясно, что множество $D(v)$ и, следовательно, множество $W \cap D(v)$ L-инвариантны. Кроме того, обозначая через V объединение многогранников Вороного — Дирихле множества $V(\Gamma)$ для точек, смежных с v в графе Γ, в силу $H_i^{V(\Gamma)} \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ получаем, что множество V K-инвариантно и, следовательно, L-инвариантно, причем для всякой L-орбиты Z на $W \cap V$ спаренная с ней относительно w в группе H_i^W L-орбита $Z^* = \{h(w) :\ h \in H_i^W, h^{-1}(w) \in Z\}$ также содержится в $W \cap V$.

Пусть $\mathcal{X}_w$ — множество всех подмножеств множества $(W \cap D(v)) \cup (W \cap V)$, которые могут быть представлены как объединение такого набора L-орбит на $(W \cap D(v)) \cup (W \cap V)$, что

(а) L-орбиты на $(W \cap D(v)) \cup (W \cap V)$ входят в этот набор лишь вместе со спаренными с ними относительно w в группе H_i^W L-орбитами;

(б) каждый многогранник Вороного — Дирихле множества $V(\Gamma)$ из V имеет непустое пересечение с некоторой K-орбитой на $W \cap V$, содержащей L-орбиту из набора.

Для каждого $X \in \mathcal{X}_w$ обозначим через $\tilde\Gamma_X$ граф с W в качестве множества вершин и $\{\{g(w), g(w')\} : w' \in X, g \in H_i\}$ в качестве множества ребер. Ясно, что тогда справедливы следующие утверждения:

(i) $H_i^{V(\tilde\Gamma_X)}$ — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа $\tilde\Gamma_X$;

(ii) разбиение σ_X множества $V(\tilde\Gamma_X) = W$ на q-элементные подмножества, состоящие из точек множества W, содержащихся в одном и том же многограннике Вороного — Дирихле множества $V(\Gamma)$, есть система импримитивности группы $H_i^{V(\tilde{\Gamma}_X)}$;

(iii) отображение φ_X, сопоставляющее каждому блоку системы σ_X ту точку множества $V(\Gamma)$, для которой многогранник Вороного — Дирихле множества $V(\Gamma)$ содержит этот блок, есть изоморфизм графа $\tilde{\Gamma}_X/\sigma_X$ на граф Γ.

Таким образом, если граф $\tilde{\Gamma}_X$ связен, то, полагая $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_X$, $G = H_i^{V(\tilde{\Gamma}_X)}$, $\sigma = \sigma_X$ и $\varphi = \varphi_X$, мы получаем реализацию $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического q-расширения графа Γ со свойствам (1^+), (2) и (3). Обратно, легко видеть, что для произвольной реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического q-расширения графа Γ со свойствами (1^+), (2) и (3) найдутся единственные подгруппа L индекса q группы K, точка $w \in D(v, K, L)$ и подмножество $X \in \mathcal{X}_w$ такие, что $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_X$, $G = H_i^{V(\tilde{\Gamma}_X)}$, $\sigma = \sigma_X$ и $\varphi = \varphi_X$. (Конечно, многие реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрических q-расширений графа Γ со свойствами (1^+), (2) и (3) оказываются (строго) эквивалентными.)

З а м е ч а н и е 2. Реализацию $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ естественно назвать *кристаллографической*, если существует такая биекция ρ множества $V(\tilde{\Gamma})$ на подмножество аффинного евклидова пространства A, что $\rho(V(\tilde{\Gamma}))$ есть орбита кристаллографической группы пространства A, индуцирующей на $\rho(V(\tilde{\Gamma}))$ группу $\rho G \rho^{-1}$. Отображение ρ при этом естественно называть *кристаллографическим представлением* реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ в аффинном евклидовом пространстве A. (Отметим, что кристаллографичность реализации влечет ее точность.)

В общем случае, если для реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ имеется такая биекция ρ множества $V(\tilde{\Gamma})$ на подмножество какого-либо аффинного евклидова пространства A, что для некоторой кристаллографической группы H пространства A множество $\rho(V(\tilde{\Gamma}))$ является H-инвариантным и индекс $|\rho G \rho^{-1} : \rho G \rho^{-1} \cap H^{\rho(V(\tilde{\Gamma}))}|$ (где $H^{\rho(V(\tilde{\Gamma}))}$ — группа, индуцируемая H на $\rho(V(\tilde{\Gamma}))$) конечен, то минимум по всем ρ и H указанных индексов естественно назвать *индексом кристаллографичности* реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ; если же для $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ таких ρ и H нет, то естественно считать, что ее индекс кристаллографичности бесконечен. В этой терминологии реализация $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ является кристаллографической в точности тогда, когда ее индекс кристаллографичности равен 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимов В.И.** Конечность числа симметрических 2-расширений d-мерной решетки и сходных с ней графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 290–303.
2. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** Симметрические расширения графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 175–206.
3. **Hall M.** A topology for free groups and related topics // Ann. Math. 1950. Vol. 52. P. 127–139.
4. International tables for crystallography. Vol. A. Space group symmetry / ed. T. Hahn. Dordrecht: Springer, 2005. 911 p.

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

Поступила 10.02.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 519.853.5

ГЛУБОКИЕ ОТСЕЧЕНИЯ В ВОГНУТОМ И ЛИНЕЙНОМ 0-1 ПРОГРАММИРОВАНИИ[1]

О. В. Хамисов

Предлагается методика построения глубоких отсечений в задаче глобальной минимизации непрерывно дифференцируемой вогнутой функции на многограннике и в задаче булева программирования. Конструктивной основой вводимых отсечений является так называемое наилучшее вогнутое продолжение. Теоретический анализ базируется на свойствах образа градиентного отображения целевой функции. Приводятся иллюстративные примеры и результаты предварительного численного эксперимента.

Ключевые слова: отсекающая плоскость, вогнутое продолжение, рецессивное направление, глобальный минимум.

O. V. Khamisov. Deep cuts in concave and linear 0-1 programming.

A technique for the construction of deep cuts in the global minimization problem for a continuously differentiable concave function on a polytope and in a Boolean programming problem is proposed. The introduced cuts are based constructively on the so-called best concave extension. The theoretical analysis is based on the properties of the image of the target function under the gradient mapping. Illustrative examples and results of a preliminary numerical experiment are presented.

Keywords: cutting plane, concave extension, recessive direction, global minimum.

1. Введение

Основной задачей, исследуемой в статье, является задача вогнутого программирования

$$f(x) \to \min, \tag{1.1}$$

$$x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \le b,\ \underline{x} \le x \le \overline{x}\}, \tag{1.2}$$

где $f \in C^1$ — вогнутая функция, $\operatorname{int}(X) \ne \varnothing$, A — матрица размерности $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через x^* одно из решений задачи (1.1), (1.2) и $f^* = f(x^*)$.

Задача (1.1), (1.2) является одной из основных задач глобальной оптимизации [1]. Важность разработки эффективных методов ее решения трудно переоценить. Достаточно заметить, что многие многоэкстремальные задачи сводятся к решению последовательности задач вогнутого программирования [2], подобно тому, как задача выпуклого программирования может быть сведена к решению серии задач линейного программирования. Сама задача (1.1), (1.2) также является многоэкстремальной, причем число ее локальных минимумов может экспоненциально зависеть от размерности n [3]. Специальный и в то же время важный случай задач, сводимых к (1.1), (1.2), представляют собой задачи кусочно-линейного программирования, исследованные в [4;5]. В основе такой сводимости лежит представление кусочно-линейных функций в виде разности двух выпуклых кусочно-линейных функций с последующем введением вспомогательной переменной и переходом к задаче вогнутого программирования.

Центральным свойством задачи (1.1), (1.2) служит тот факт, что как локальные, так и глобальные экстремумы находятся в том числе и в вершинах X [6]. Политоп X имеет конечное

[1]Работа поддержана совместным интеграционным проектом СО и УрО РАН “Теория и методы решения задач дискретной оптимизации и их применение в информационно-телекоммуникационных системах”.

число вершин, и перебор всех вершин несомненно дал бы решение исследуемой задачи. Однако с вычислительной точки зрения такой подход наталкивается на непреодолимые (в настоящий момент) трудности. Известно, например, что задача нахождения всех вершин полиэдра NP-трудна [7]. Более того, нахождение числа всех вершин политопа является $\#P$-трудной задачей [8] (также как и задачи вычисления центра тяжести [9] и объема политопа [10]).

Тем не менее указанное выше свойство задачи (1.1), (1.2) лежит в основе многих алгоритмов локального поиска. Простейшим из них является алгоритм последовательной линеаризации, т. е. процесс вида

$$x^{k+1} = \arg\min\{\nabla f(x^k)^T x \colon x \in X\}, \qquad x^0 \in X,$$

который приводит к нахождению точки локального минимума ([11–14]). Суть различных эвристических методов, также основанных на многократном решении вспомогательных задач линейного программирования, заключается в каком-либо разумном способе генерации части вершин X, в определенной степени "всесторонне" представляющей все множество вершин, или генерации "пробных" точек с последующей итеративной линеаризацией (см., например, [15]). Как правило, такой подход позволяет найти хороший локальный минимум.

В данной статье для решения задачи (1.1), (1.2) используется метод отсечений в $\mathbb{R}^{n+1}$, предложенный ранее в [16]. В целом использование отсечений в задачах даже средней (несколько десятков переменных) размерности не является эффективным. Связано это с тем, что глубина отсечений с ростом размерности может оказаться очень малой, отсечения становятся мелкими и практически не происходит сокращение допустимой области. Однако различные модификации отсечений успешно борются с этим недостатком. Примером этому может служить цикл статей [17–19]. Для построения глубоких отсечений, используемых в статье, строится так называемое максимальное вогнутое продолжение. Как показывает предварительный численный эксперимент, предлагаемые глубокие отсечения могут существенно усилить эффективность метода. Главное достоинство любого метода отсечений состоит в том, что решение исходной задачи (глобальной) оптимизации сводится к решению задачи линейного программирования с большим числом ограничений. Практический эффект такой методики проявляется тогда, когда удается удачно подобрать правило построения отсечений.

Методика построения глубоких отсечений от задач вогнутого программирования распространяется на задачи булева программирования. Этому посвящен разд. 3 с иллюстративным примером.

2. Отсечения в $\mathbb{R}^{n+1}$

Введем в рассмотрение надграфик целевой

$$X_{n+1} = \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon f(x) \le x_{n+1},\ x \in X\right\}.$$

Задачу (1.1), (1.2) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$\min x_{n+1}, \tag{2.1}$$

$$(x, x_{n+1}) \in X_{n+1}. \tag{2.2}$$

Перейдем к описанию метода отсечений.

Процедура отсечений в $\mathbb{R}^{n+1}$: CUT^{n+1}.

Входная информация: целевая функция f, выпуклый многогранник X, определенный в (1.2).

Шаг 0. Предположим, что известны оценка $\underline{f} \le f^*$ и многогранное множество $X^0_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$: $X^0_{n+1} \supset X_{n+1}$ (например, $X^0_{n+1} = \{(x, x_{n+1}) \colon x \ge \underline{x},\ x_{n+1} \ge \underline{f}\}$). Задать $\varepsilon \ge 0$, установить $f^0 = +\infty$, $k = 1$. Определить $X^1_{n+1} = X^0_{n+1} \cap \{(x, x_{n+1}) \colon x \in X\}$, задать большую константу $\mathfrak{N} > 0$.

Ш а г 1. Решить вспомогательную задачу линейного программирования

$$\min x_{n+1}, \tag{2.3}$$

$$(x, x_{n+1}) \in X_{n+1}^k. \tag{2.4}$$

Пусть $y^k = (x^k, x_{n+1}^k)$ — решение задачи (2.3), (2.4).

Ш а г 2. Определить $f^k = \min\{f^{k-1}, f(x^k)\}$ и w^k: $f(w^k) = f^k$. Если

$$f(x^k) - x_{n+1}^k \le \varepsilon, \tag{2.5}$$

то Стоп: w^k есть ε-оптимальное решение задачи (2.1), (2.2) (см. замечание 2.1 ниже). В противном случае переходим к шагу 3.

Ш а г 3. Определим конус $\overline{X}_{n+1}^k = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \overline{A}^k y \le \overline{b}^k\}$, образованный активными в точке y^k ограничениями задачи (2.3), (2.4), т. е.

$$\overline{A}^k y^k = \overline{b}^k. \tag{2.6}$$

В предположении невырожденности задачи (2.3), (2.4) существует матрица $S^k = -(\overline{A}^k)^{-1}$, столбцы которой $S^{k,j} = (s^{k,j}, s_{n+1}^{k,j})$ являются направляющими векторами ребер конуса $\overline{X}_{n+1}^k$. Следовательно, лучи, задаваемые уравнениями $y^{k,j} = (x^{k,j}, x_{n+1}^{k,j}) = y^k + \lambda^{k,j} S^{k,j}$, $\lambda^{k,j} \ge 0$, $j = 1, \ldots, n+1$, определяют ребра конуса $\overline{X}_{n+1}^k$.

Ш а г 4. Для каждого $j = 1, \ldots, n+1$ найдем

$$\overline{\lambda}^{k,j} = \min\bigl\{\mathfrak{N}, \sup\{\lambda\colon f(x^k + \overline{\lambda}^{k,j} s^{k,j}) \ge x_{n+1}^k + \overline{\lambda}^{k,j} s_{n+1}^{k,j}\}\bigr\}. \tag{2.7}$$

Определим точки

$$Z^{k,j} = (z^{k,j}, z_{n+1}^{k,j}) = y^k + \overline{\lambda}^{k,j} S^{k,j}, \qquad j = 1, \ldots, n+1, \tag{2.8}$$

и проведем через эти точки плоскость

$$(H^k)^T y = (h^k)^T x + h_{n+1}^k x_{n+1} = g^k. \tag{2.9}$$

Ш а г 5. Определим множество

$$X_{n+1}^{k+1} = X_{n+1}^k \cap \bigl\{y \in \mathbb{R}^{n+1}\colon (H^k)^T y \le g^k\bigr\}. \tag{2.10}$$

Установим $k = k+1$ и перейдем к шагу 1.

Геометрическая интерпретация метода приведена на рис. 1.

Как показано в [16], отсечения, определяемые плоскостью (2.9), являются правильными, т. е.

$$(H^k)^T y \le g^k \quad \forall k, \qquad \forall y \in X_{n+1}.$$

З а м е ч а н и е 2.1. В силу (2.10) $X_{n+1}^k \supset X_{n+1}^{k+1} \supset X_{n+1}$, $\forall k$. Следовательно решения вспомогательной задачи (2.3), (2.4) удовлетворяют неравенствам $x_{n+1}^1 \le \ldots \le x_{n+1}^k \le x_{n+1}^{k+1} \le \ldots f^*$. С другой стороны, в силу построения имеем $f^k \ge f^{k+1} \ge \ldots \ge f^*$. Поэтому справедлива следующая двусторонняя оценка: $x_{n+1}^k \le f^* \le f^k$ $\forall k$. Поэтому, как только выполнено неравенство (2.5), алгоритм останавливается на шаге 2: найдено ε-оптимальное решение.

З а м е ч а н и е 2.2. Уравнение отсекающей плоскости (2.9) можно записать в следующем виде [11]: $p^T \overline{A}^k y = p^T \overline{b}^k - 1$, где $p^T = \bigl(1/\lambda^{k,1}, \ldots, 1/\lambda^{k,n+1}\bigr)$, числа $\lambda^{k,j}$, $j = 1, \ldots, n+1$, определены в (2.7), матрица $\overline{A}^k$ размерности $(n+1) \times (n+1)$ и вектор $\overline{b}^k$ определены в (2.6).

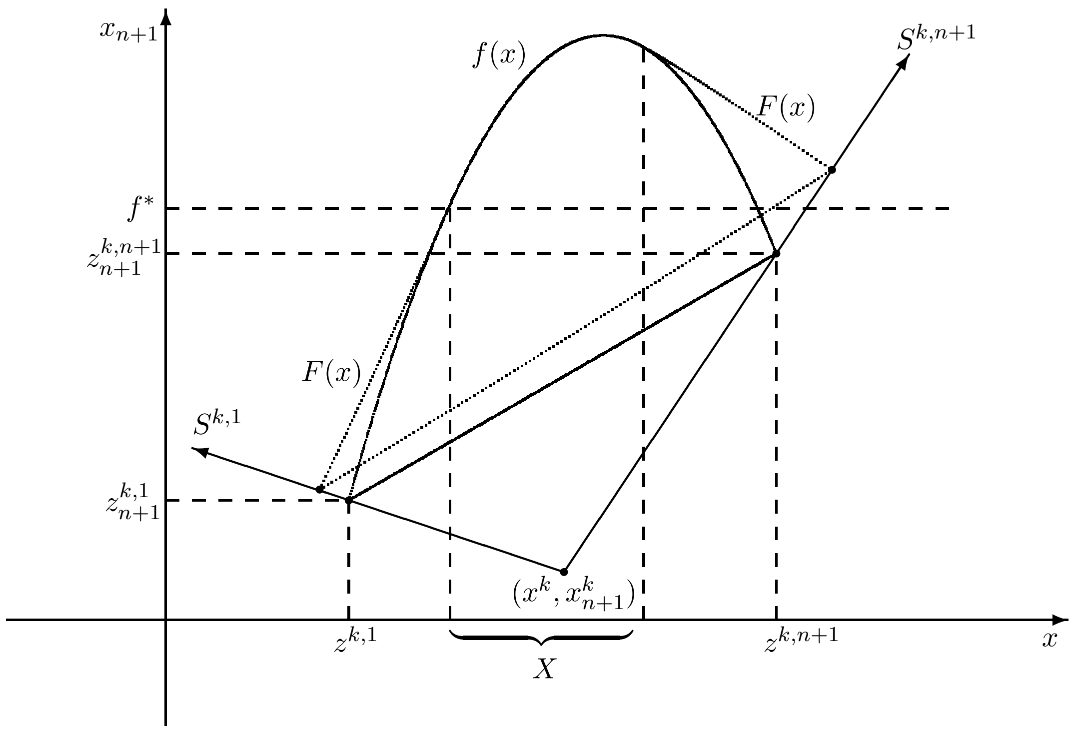


Рис. 1. Отсечения в $\mathbb{R}^{n+1}$. Отсечение, построенное при помощи максимального вогнутого продолжения, показано пунктирной линией.

Сходимость процедуры CUT^{n+1} к глобальному минимуму анализируется в предположении $\varepsilon = 0$. В этом случае под сходимостью понимается выполнение условия $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n+1}^k = f^*$. Очевидно, что в силу построения в этом случае справедливо также соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} f^k = f^*$. Подробный анализ условий сходимости представлен в статье [20], опираясь на которую [20, теорема 5, следствие 3], можно сформулировать следующее

Утверждение 2.1. *Пусть векторы* $Z^{k,j} = (z^{k,j}, z_{n+1}^{k,j})$, $j = 1, \ldots, n+1$, *определены в* (2.8) *и* $\max\limits_{1\le j\le n+1} z_{n+1}^{k,j} \ge f^*\ \forall k$. *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n+1}^k = f^*$.

В общем случае условия утверждения 2.1 могут не выполняться, тогда отсечения становятся малоэффективными и процедура может оказаться не сходящейся. Этот вывод подтверждается вычислительными экспериментами. Тем не менее описанный выше метод отсечений хорошо зарекомендовал себя в тех случаях, когда целевая функция имеет хотя бы одно рецессивное направление. Напомним, что вектор $d \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f(x + \lambda d) \ge f(x) \quad \forall x, \qquad \forall \lambda \ge 0, \tag{2.11}$$

определяет *рецессивное направление* f [21]. Предположим, что на шаге 3 процедуры CUT^{n+1} один из векторов $S^{k,j} = (s^{k,j}, s_{n+1}^{k,j})$ таков, что $s^{k,j}$ определяет рецессивное направление f. Не уменьшая общности, будем считать, что это вектор $S^{k,1} = (s^{k,1}, s_{n+1}^{k,1})$. Тогда в силу (2.7), (2.8), (2.11) имеем

$$z_{n+1}^{k,1} = f(x^k + \overline{\lambda}^{k,1} s^{k,1}) \ge f(x^k) \ge f^*,$$

т. е. выполняются условия утверждения 2.1 и метод оказывается сходящимся. В общем случае трудно ожидать, что на каждой итерации процедуры CUT^{n+1} проекция одного из ребер конуса $\overline{X}_{n+1}^k$ будет определять рецессивное направление. Можно лишь ожидать, что с большой вероятностью указанная выше проекция будет “почти” определять рецессивное направление. Чем больше рецессивных направлений имеет целевая функция, тем больше вероятность сходимости. При решении задачи минимизации функции f на X поведение этой функции вне X играет второстепенную роль. Если существует точка безусловного максимума $x^{\max}$ функции f такая, что $x^{\max} \notin X$, то удается определить вспомогательную вогнутую функцию F, совпадающую с f на множестве X и имеющую рецессивные направления даже в том случае, когда исходная функция f рецессивных направлений не имеет. Естественно затем рассматривать задачу минимизации функции F на X, так как отсечения, построенные при помощи функции F, будут более глубокими.

Определение 2.1. Функция W называется *вогнутым продолжением* функции f на множестве X, если выполняются следующие условия:

1) W – вогнутая функция;
2) $W(x) = f(x), \quad \forall x \in X$;
3) $W(x) \geq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Множество всех вогнутых продолжений W на X будем обозначать $EXT(f, X)$. Очевидно, что $f \in EXT(f, X)$.

Определение 2.2. Функция F называется *максимальным вогнутым продолжением* функции f на множестве X, если

1) $F \in EXT(f, X)$;
2) $F(x) \geq W(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall W \in EXT(f, X)$.

Хорошо известно, что максимальное вогнутое продолжение F вогнутой дифференцируемой функции f на выпуклом компактном множестве X определяется следующим образом:

$$F(x) = \min_{y \in X} \{f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)\}. \tag{2.12}$$

Геометрическая интерпретация глубокого отсечения, построенного при помощи максимального вогнутого продолжения, также дана на рис. 1.

Введем в рассмотрение множество

$$G = \{g \in \mathbb{R}^n \colon g = \nabla f(x),\ x \in X\},$$

которое назовем *образом градиентного отображения* множества X, и пусть $\mathrm{co}(G)$ — выпуклая оболочка G.

Теорема 2.1. *Предположим, что*

$$0 \notin \mathrm{int}(\mathrm{co}(G)). \tag{2.13}$$

Тогда F имеет рецессивное направление.

Доказательство. Пусть $\tilde{x} \in X$. В силу вогнутости f и условия $\lambda \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} F(\tilde{x} + \lambda u) &= \min_{y \in X} \{f(y) + \nabla f(y)^T (\tilde{x} + \lambda u - y)\} \\ &= \min_{y \in X} \{f(y) + \nabla f(y)^T (\tilde{x} - y) + \lambda \nabla f(y)^T u\} \geq F(\tilde{x}) + \lambda \min_{y \in X} \{\nabla f(y)^T u\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Из (2.13) следует существование вектора $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ такого, что

$$p^T g \geq 0 \quad \forall g \in \mathrm{co}(G),$$

следовательно, $p^T \nabla f(y) \geq 0\ \forall y \in X$. Полагая $u = p$ в (2.14), получаем

$$F(\tilde{x} + \lambda p) \geq F(\tilde{x}). \tag{2.15}$$

Известно [21], что если неравенство (2.15) справедливо в точке $\tilde{x}$, то в силу вогнутости F оно справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^n$, что и означает; это p определяет рецессивное направление F.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.3. В общем случае образ градиентного отображения выпуклого множества не является выпуклым. Примером этому служит функция $f(x_1, x_2) = x_1^2/4x_2$, приведенная в [21] и рассматриваемая на множестве $\{(x_1, x_2)\colon x_2 > 0\}$. Соответствующий образ градиентного отображения не является выпуклым и представляет собой параболу $G = \{(g_1, g_2)\colon g_2 = -g_1^2,\ g_1 = x_1/2x_2,\ g_2 = -x_1^2/4x_2^2\}$. Именно поэтому приходится в формулировке теоремы использовать $\mathrm{co}(G)$, а не само множество G.

В общем случае минимизация по y в (2.12) при фиксированном x может оказаться многоэкстремальной задачей, поэтому максимальное вогнутое продолжение имеет смысл в том случае, когда задача (2.12) практически разрешима. Опишем два примера такой разрешимости [22].

П р и м е р 2.1. Функция $f(x) = x^T Q x$ — вогнутая квадратичная функция, Q — отрицательно полуопределенная симметричная матрица. Тогда

$$F(x) = \min_{y \in X}\{y^T Q y + 2y^T Q(x-y)\} = \min_{y \in X}\{2y^T Q x - y^T Q y\}. \tag{2.16}$$

Следовательно, вычисление функции F в точке эквивалентно решению задаче выпуклого квадратичного программирования (2.16). Кроме того, в силу линейности градиентного отображения квадратичной функции теорему 2.1 можно уточнить следующим образом.

Теорема 2.2. *Если*

$$0 \notin \mathrm{int}(X), \tag{2.17}$$

то $F(x)$ имеет рецессивное направление.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий теоремы существует вектор $p \in \mathbb{R}^n,\ p \neq 0$ такой, что

$$p^T y \geq 0 \quad \forall y \in X.$$

Определим направление u так, чтобы $Qu = p$, тогда $\nabla f(y)^T u = 2y^T Q u \geq 0$. Далее по аналогии с доказательством теоремы 2.1 из (2.14) следует $F(x + \lambda u) \geq F(x)$.

Теорема доказана.

П р и м е р 2.2. Функция $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ — вогнутая дважды дифференцируемая сепарабельная функция, $X = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \underline{x} \leq x \leq \underline{x}\}$ — параллелепипед. В этом случае

$$F(x) = \min_{y \in X}\Big\{\sum_{i=1}^n f_i(y) + f_i'(y)(x_i - y_i)\Big\} = \sum_{i=1}^n \min_{\underline{x}_i \leq y_i \leq \overline{x}_i}\{f_i(y) + f_i'(y)(x_i - y_i)\}.$$

Пусть при фиксированном x_i $\omega_i(y_i) = f_i(y) + f_i'(y)(x_i - y_i)$. Тогда

$$\omega_i'(y_i) = f_i'(y_i) + f_i''(y_i)(x_i - y_i) - f'(y_i) = f_i''(y_i)(x_i - y_i).$$

В силу вогнутости $f''(y_i) \leq 0$. Поэтому если $x_i < \underline{x}_i$, то $\omega'(y_i) \geq 0$ — функция $\omega_i(y_i)$ монотонно не убывает и если $x_i > \overline{x}_i$, то $\omega'(y_i) \leq 0$ — функция $\omega_i(y_i)$ монотонно не возрастает. Следовательно,

$$F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i), \tag{2.18}$$

где

$$F_i(x_i) = \begin{cases} f_i(\underline{x}_i) + f'(\underline{x}_i)(x_i - \underline{x}_i), & x_i < \underline{x}_i, \\ f_i(x_i), & \underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i, \\ f_i(\overline{x}_i) + f'(\overline{x}_i)(x_i - \overline{x}_i), & x_i > \overline{x}_i. \end{cases} \tag{2.19}$$

В качестве тестовой задачи рассматривалась задача нахождения наиболее удаленной точки выпуклого многогранника $X \subset \mathbb{R}^n_+$. Формальная запись этой задачи в виде задачи вогнутого программирования имеет вид

$$
\begin{gathered}
f(x) = -\|x\|^2 \to \min, \\
x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \colon Ax \leq b\},
\end{gathered} \tag{2.20}
$$

где A — матрица размерности $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Очевидно, что целевая функция в (2.20) — частный случай вогнутой сепарабельной дважды дифференцируемой функции, поэтому максимальное вогнутое продолжение строилось для этой функции по аналогии с (2.18), (2.19). Нетрудно видеть, что в данном случае выполняется условие (2.17).

Данные генерировались случайным образом. Результаты вычислений приведены в таблице. Обозначения имеют следующий смысл: n — число переменных, m — число линейных ограничений, f_k — рекордное значение целевой функции, x^k_{n+1} — полученная оценка снизу, k — число итераций, ε_{ABS} — абсолютная погрешность, ε_{REL} — относительная погрешность, $\varepsilon_{REL} = \left|\dfrac{f_k - x^k_{n+1}}{f_k}\right|$. Если абсолютная погрешность была меньше 10^{-3}, то вычисления прекращались. Вторым критерием остановки было максимальное количество итераций — 80. Цель вычислительного эксперимента состояла в нахождении наилучшей оценки снизу глобального минимального значения максимум за 80 итераций.

В среднем для достижения указанной в таблице относительной погрешности достаточно было 20–30 итераций. В остальных итерациях улучшение оценки снизу происходило в 5–7 знаках после запятой. Как и ранее, необходимо отметить, что решение тестовых задач эквивалентно решению задач линейного программирования с $n+1$ переменными и $m+k$ ограничениями. Проведенный эксперимент показал существенное улучшение работы метода отсечений в $\mathbb{R}^{n+1}$ с использованием вогнутого продолжения. Достаточно сказать, что без использования вогнутого продолжения данный метод отсечений в лучшем случае решал задачи с 5–7 переменными в среднем за 200–300 итераций с относительной погрешностью 10^{-2}.

Результаты решения тестовых задач максимизации нормы на многограннике

n	m	f_k	x^k_{n+1}	k	ε_{ABS}	ε_{REL}
5	10	-72.21713	-72.21716	4	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$
10	12	-948.5131	-948.5132	4	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-6}$
15	15	-3085.668	-3086.068	80	0.4	0.00001
20	25	-7542.3142	-7542.3149	25	$7 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-7}$
25	20	$-1.43259 \cdot 10^4$	$-1.45793 \cdot 10^4$	80	253.43	0.018
30	22	$-2.47 \cdot 10^4$	$-2.513 \cdot 10^4$	80	430.78	0.017
35	23	$-3.892 \cdot 10^4$	$-3.953 \cdot 10^4$	80	608.48	0.016
40	25	$-5.699 \cdot 10^4$	$-5.869 \cdot 10^4$	80	1700.35	0.03
45	27	$-8.343 \cdot 10^4$	$-8.389 \cdot 10^4$	80	462.96	0.0055
50	29	$-1.18 \cdot 10^5$	$-1.198 \cdot 10^5$	80	1781.1	0.015
55	31	$-1.535 \cdot 10^5$	$-1.561 \cdot 10^5$	80	2667.7	0.017
60	33	$-2.066 \cdot 10^5$	$-2.076 \cdot 10^5$	80	915.9	0.004
65	35	$-2.627 \cdot 10^5$	$-2.642 \cdot 10^5$	80	1471.1	0.005
70	37	$-3.124 \cdot 10^5$	$-3.158 \cdot 10^5$	80	3367.2	0.01

3. Построение глубоких отсечений в булевом программировании

В данном разделе исследуется возможность построения глубоких отсечений в целочисленном программировании, основанных на использовании вогнутых продолжений.

Пусть заданы многогранное множество $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$X = \{x\colon Ax \le b,\ 0 \le x_j \le 1,\ j = \overline{1,n}\},$$

где A — матрица размерности $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, и невырожденная вершина $x^0 \in X$, не все компоненты которой — целые числа. Требуется построить правильное отсечение, т. е. построить плоскость $L = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \alpha^T x = \beta\}$ такую, что открытое полупространство $H^> = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \alpha^T x > \beta\}$ содержит точку x^0, полупространство $H^\le = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \alpha^T x \le \beta\}$ содержит все целочисленные точки множества X.

Различные правила построения правильных отсечений известны уже давно. По-видимому, впервые правильные отсечения были построены Д. Данцигом [23] и Р. Гомори [24]. Другие правильные отсечения были предложены Э. Балашем [25] и Ф. Гловером и др. [26]. Как указано в [11], многие правильные отсечения можно построить, используя точки пересечения ребер многогранного конуса с вершиной x^0, образованного активными в точке x^0 ограничениями, с границей выпуклого множества $D \supset X$ такого, что целочисленные точки множества X принадлежат границе D. В алгоритмах Гомори (см. [27]) в качестве D используется полоса $L = \{x\colon \lfloor x_k^0 \rfloor \le x_k \le \lceil x_k^0 \rceil\}$ для некоторого k. Здесь $\lfloor a \rfloor$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее a, а $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое, большее или равное a. В работах Э. Балаша и Ф. Гловера в качестве D предлагается использовать шар S и двойственный гиперкуб C:

$$S = \Big\{x\colon \sum_{i=1}^n x_i(1 - x_i) \ge 0\Big\}, \tag{3.1}$$

$$C = \Big\{x\colon \sum_{i=1}^n \Big|x_i - \frac{1}{2}\Big| \le \frac{n}{2}\Big\}.$$

Исследованию эффективности отсечений в целочисленном программировании посвящены работы [28] и [29]. Заметим, что при построении этих отсечений используется не вся информация о множестве X: на построение отсечений никак не влияют *неактивные* в точке x^0 ограничения. В данном разделе предлагается метод построения правильных отсечений, использующий информацию о всех ограничениях множества X.

Пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i(1 - x_i)$$

— функция, с помощью которой определяется множество S в (3.1). Нетрудно видеть, что f — вогнутая функция. Определим вогнутое продолжение $F(x) = \min\limits_{y \in X}\{f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)\}$, где

$$F(x) = f(x), \qquad x \in X, \tag{3.2}$$

$$F(x) \ge f(x), \qquad x \notin X, \tag{3.3}$$

и множество

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^n\colon F(x) \ge 0\}. \tag{3.4}$$

В силу (3.1), (3.2) и (3.4) целочисленные точки множества X являются граничными точками множества Z. Следовательно, отсечения, построенные с помощью множества Z, будут правильными. В данном случае

$$F(x) = \min_{y \in X}\Big\{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^2 + (1 - 2y_i)(x_i - y_i))\Big\} = \sum_{i=1}^n x_i + \min_{y \in X}\Big\{\sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2y_i x_i)\Big\}. \tag{3.5}$$

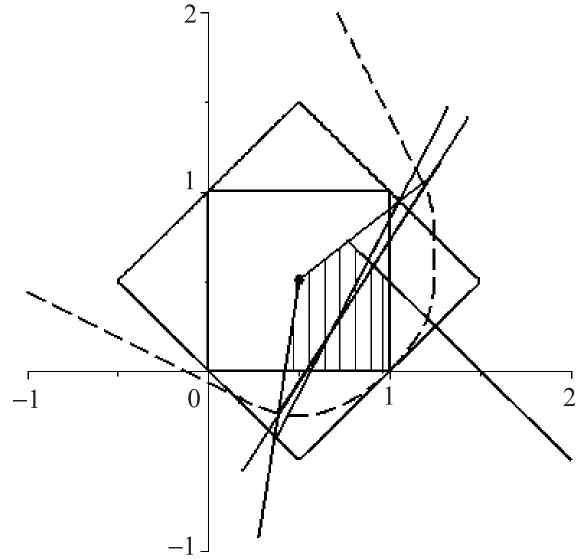


Рис. 2. Геометрическая интерпретация отсечений в примере 3.1. Допустимая область обозначена вертикальной штриховкой; линия уровня $F(x)$, соответствующая нулевому значению, — пунктирной линией; указаны также отсечение по двойственному кубу и отсечение по вогнутому продолжению.

Задача (3.5) есть задача минимизации выпуклой сепарабельной квадратичной функции на выпуклом многогранном множестве. В силу (3.3) отсечения, построенные с помощью множества Z (будем называть их отсечениями по вогнутому продолжению), будут не хуже (на практике, как правило, лучше) отсечений, построенных с помощью шара S. Плата за улучшение глубины отсечений состоит в решении задач (3.5). Что касается отсечений по полосе и двойственному гиперкубу, то сравнение с ними отсечений по вогнутому продолжению зависит от конкретной геометрической ситуации. Приведем сравнительный пример.

Пример 3.1 (см. рис. 2). Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ задано системой неравенств:

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 1, \tag{3.6}$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq -1, \tag{3.7}$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 3, \tag{3.8}$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \qquad 0 \leq x_2 \leq 1, \qquad x^0 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T.$$

Активными в точке x^0 являются ограничения (3.6) и (3.7), которые и образуют конус активных ограничений с вершиной в x^0. Направляющие векторы ребер этого конуса — $s^1 = (2,1)^T$, $s^2 = (-1,-2)^T$. В этом примере сравним отсечения по двойственному гиперкубу и по вогнутому продолжению. Сравнение будем производить по величине шагов вдоль векторов s^j, $j = 1, 2$, необходимых для нахождения точек пересечения ребер с двойственным гиперкубом и множеством Z в (3.4). Для достижения пересечения с двойственным гиперкубом шаг вдоль s^1 равен $\lambda_1^C = 1/3 = 0.3333$; для достижения пересечения с множеством Z шаг равен $\lambda_1^Z = 0.3708$. Для достижения пересечения с двойственным гиперкубом шаг вдоль s^2 снова равен $\lambda_2^C = 1/3 = 0.3333$; для достижения пересечения с множеством Z шаг равен $\lambda_2^Z = 0.3249$. Получаемые отсечения не сравнимы, ни одно из отсечений не является более глубоким ($\lambda_1^C < \lambda_1^Z$, $\lambda_2^C > \lambda_2^Z$), чем другое. (В качестве справки: для отсечения по шару $\lambda_1^S = \lambda_2^S = 1/\sqrt{10} = 0.3162$).

В данном примере важен тот факт, что отсечение по шару, всегда доминируемое отсечением по двойственному гиперкубу за счет вогнутого продолжения и учета неактивных ограничений, удается улучшить и сделать “конкурентоспособным” отсечению по двойственному гиперкубу. Необходимо заметить, что величина шага $\lambda_1^Z = 0.3708$ как раз получается за счет учета неактивного в x^0 ограничения (3.8).

Если в (3.5) вместо множества X взять множество $\Pi = \{x\colon 0 \le x_j \le 1,\ j = \overline{1,n}\}$, то получим

$$F(x) \ge \min_{y\in\Pi}\Big\{\sum_{j=1}^{n}(y_j^2 - 2y_jx_j + x_j)\Big\} = \sum_{j=1}^{n}\min_{0\le y_j\le 1}\{y_j^2 - 2y_jx_j + x_j\} = \Phi(x).$$

Поскольку $F(x) \ge \Phi(x) \ge f(x)$, то отсечения, построенные с помощью функции $F(x)$, будут глубже, чем отсечения по шару S и отсечения, построенные при помощи функции $\Phi(x)$. Преимущество отсечений, построенных с помощью функции $\Phi(x)$, состоит в том, что в этом случае не требуется решать вспомогательные задачи выпуклого программирования в отличие от (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Benson H.** Concave minimizition: theory, applications and algorithms // Handbook of global optimization / eds. R. Horst, P.M. Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 43–148.
2. **Horst R., Tuy H.** Global optimization: Deterministic approaches. Berlin: Springer-Verlag, 1996. Third revised and enlarged edition. 727 p.
3. **Pardalos P.M., Rosen J.B.** Constrained global optimization: Algorithms and applications. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 143 p.
4. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
5. **Еремин И.И.** Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 180 с.
6. **Хедли Дж.** Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. 506 с.
7. Generating all vertices of a polyhedron is hard / L. Khachiyan, E. Boros, K. Borys, K. Ellbassioni, V. Gurvich // Proc. of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms (SODA-2006). 2006. P. 758–765.
8. **Linial N.** Hard enumeration problems in geometry and combinatorics // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. Vol. 7, no. 2. P. 331–335.
9. **Rademacher L.** Approximating the centroid is hard // Symposium on computational geometry (SCG’07). South Korea, Gyeongju, 2007. P. 302–305.
10. **Dyer M.E., Frieze A.M.** On the complexity of the computing the volume of a polyhedron // SIAM J. Comput. 1988. Vol. 17, no. 5. P. 967–974.
11. **Булатов В.П.** Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977. 159 с.
12. **Стрекаловский А.С.** Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 336 с.
13. **Rosen J.B.** Iterative solution of nonlinear optimal control problems // SIAM J. Control. 1966. Vol. 4. P. 223–244.
14. **Булатов В.П., Касинская Л.И.** Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике и их приложения // Сб. “Методы оптимизации и их приложения” / ред. А.П. Меренков, В.П. Булатов. Новосибирск: Наука, 1982. С. 71–80.
15. **Chinchuluun A., Enkhbat R., Pardalos P.M.** A numerical method for concave programming problem // Continuous Optimization. Current Trends and Modern Applications / eds. V. Jeyakumar, A. Rubinov. N. Y.: Springer, 2005. P. 251–273. (Appl. Optim.; vol. 99.)
16. **Булатов В.П.** Методы решения многоэкстремальных задач (глобальный поиск) // Методы оптимизации и их приложения. Ч. 1. Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1989. P. 131–157.
17. **Porembski M.** How to extend the concept of convexity cuts to derive deeper cutting planes // J. Global Optim. 1999. Vol. 15, no. 4. P. 371–404.
18. **Porembski M.** Finitely convergent cutting planes for concave minimization // J. Global Optim. 2001. Vol. 20. P. 113–136.
19. **Porembski M.** Cone adaptation strategies for a finite and exact cutting plane algorithm for concave minimization // J. Global Optim. 2002. Vol. 24. P. 89–107.

20. **Булатов В.П., Хамисов О.В.** Методы отсечения в E^{n+1} для решения задач глобальной оптимизации на одном классе функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 11. С. 1830–1842.
21. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
22. **Bulatov V.P., Khamisov O.V.** The cutting method in E^{n+1} through concave extension for solving global extremum problem // Proc. 21th conf. “Mathematische Optimierung”. Berlin: Humboldt-Univ., 1989. P. 16–19.
23. **Dantzig G.B.** Note on solving linear programs in integers // Naval. Res. Log. Quart. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 75–76.
24. **Gomory R.E.** An algorithm for integer solution to linear programs // Princeton — IBM Mathematics Research Project. Technical Report. 1958. No. 1.
25. **Balas E.** Intersection cuts — a new type of cutting planes for integer programming // Math. Oper. Res. 1971. Vol. 19, no. 1. P. 19–39.
26. An intersection cut from the dual of the unit hypercube / E. Balas, J. V. Bowman, F. Glover, D. Sommer // Math. Oper. Res. 1971. Vol. 19, no. 1. P. 40–44.
27. **Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.** Дискретное программирование. М.: Наука, 1969. 368 с.
28. **Шевченко В.Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Наука, 1995. 192 с.
29. **Колоколов А.А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 2. С. 18–39.

Хамисов Олег Валерьевич
Поступила 10.02.2013
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
зав. отделом
Институт систем энергетики им Л. А. Мелентьева СО РАН
e-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

Том 20 № 2 2014

УДК 517.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ [1]

Л. Ю. Циовкина

Изучены простые делители порядков автоморфизмов и подграфы их неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$. Доказано, что реберно симметричные дистанционно регулярные графы с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ не существуют.

Ключевые слова: реберно симметричный граф, дистанционно регулярный граф, автоморфизм.

L. Yu. Tsiovkina. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$.

Prime divisors of orders of automorphisms and their fixed point subgraphs are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$. It is shown that there are no arc-transitive distance-regular graphs with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$.

Keywords: arc-transitive graph, distance-regular graph, automorphism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^{\perp} = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$ (при этом значения c_0 и b_d полагаются равными нулю).

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ.

[1]Работа выполнена при поддержке программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), гранта РФФИ (проект 14-01-31298) и гранта УрО РАН для молодых ученых за 2014 г. (проект 14-1-НП-278).

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$, $\mu > 1$ и числом вершин, не большим 1000.

Предложение [1, теорема 2]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на* $v \leq 1000$ *вершинах. Если* $\lambda = 2$ *и* $\mu > 1$, *то либо* Γ *имеет массив пересечений графа Хэмминга* $H(n,3)$, $n = 3,4,5,6$, *либо верно одно из утверждений*:

(1) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{19,16,8;1,2,8\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{35,32,8;1,2,28\}$, $\{51,48,8;1,4,36\}$;

(2) Γ — *антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r+1,2r-2,1;1,2,2r+1\}$, $r \in \{3,4,\ldots,21\} - \{10,16\}$ *и* $v = 2r(r+1)$;

(3) Γ — *антиподальный граф с* $\mu \geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15,12,1;1,4,15\}$, $\{18,15,1;1,5,18\}$, $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,4,35\}$, $\{45,42,1;1,6,45\}$, $\{42,39,1;1,3,42\}$, $\{75,72,1;1,12,75\}$.

Проводится исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. В [3–5] найдены возможные простые порядки автоморфизмов графов с массивами пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,2,35\}$ и $\{42,39,1;1,3,42\}$ из пп. (2), (3) заключения предложения. Также доказана единственность (с точностью до изоморфизма) реберно симметричного дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$ (отметим, что существование реберно симметричного графа с данным массивом пересечений уже было известно). Для других двух массивов доказано несуществование реберно симметричных дистанционно регулярных графов с такими массивами пересечений.

В настоящей работе изучаются автоморфизмы гипотетического антиподального дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35,32,1;1,4,35\}$.

Граф Γ с массивом пересечений $\{35,32,1;1,4,35\}$ имеет $v = 1+35+280+8 = 324$ вершины и спектр $35^1, 5^{168}, -1^{35}, -7^{120}$.

Теорема. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{35,32,1;1,4,35\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф и либо* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 27m$ *и* $\alpha_1(g) = 18(2r+m)$, *либо* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 12(2l+3)$, *где* r, m, l — *некоторые целые числа*;

(2) Ω *содержится в антиподальном классе графа* Γ *и либо*

(*i*) $p = 7$, $|\Omega| = 2, 9$, *либо*

(*ii*) $p = 5$, $|\Omega| = 4, 9$;

(3) $p = 3$ *и* Γ *содержит* 9 *антиподальных классов, пересекающих* Ω *по* 3 *вершинам*, $\alpha_3(g) = 54$, $\alpha_1(g) = 9(4l-15)$ *для некоторого целого числа* l *и окрестность вершины в* Ω *является либо объединением двух изолированных четырехугольников, либо восьмиугольником*;

(4) $p = 2$ *и* Γ *содержит* t *антиподальных классов, пересекающих* Ω *по* s *вершинам*, $\alpha_3(g) = t(9-s)$ *и либо*

(*i*) Ω — *объединение двух антиподальных классов*, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 6(4l-13)$ *для некоторого целого числа* l, *либо*

(*ii*) $t = 4$, $s \in \{5,7,9\}$ *и компонента связности подграфа* Ω *является* 4*-кликой или графом* $K_{4,4}$ *с удаленным максимальным паросочетанием, либо*

(*iii*) $t = 6$ *и* $s \in \{3,5\}$ *или* $s = 3$ *и* $t \in \{8,10\}$.

Следствие. *Граф с массивом пересечений* $\{35,32,1;1,4,35\}$ *не является реберно симметричным.*

1. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6].

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и ψ — соответствующее матричное представление группы G в $GL(324, \mathbf{C})$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 168 (отвечающее собственному значению 5), χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 35, то*

$$\chi_1(g) = (57\alpha_0(g) - 6\alpha_3(g) + 9\alpha_1(g))/108 - 3,$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/9 - 1 = 35 - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/9,$$

где $\alpha_j(g)$ — это число вершин x графа Γ таких, что $d_\Gamma(x, x^g) = j$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 168$ и $\chi_2(g) - 35$ делятся на p.

Доказательство. См. доказательство леммы 1 из [2].

Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и так как правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Далее в этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Граф Γ содержит 36 антиподальных классов, в каждом из которых 9 вершин, и если Ω пересекает антиподальные классы K, L, то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 27s$ и $\alpha_1(g) = 18(2r + s)$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 12(2l + 3)$;*

(2) *если $a \in \Omega$ и $p \neq 2, 5, 7$, то Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$;*

(3) *если $a \in \Omega$ и $p > 7$, то $\Gamma_3(a) \subset \Omega$;*

(4) *если Ω — непустой граф, то каждая вершина из Ω смежна с некоторой вершиной из $\Gamma - \Omega$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Тогда $3\alpha_1(g) = 2\alpha_3(g) + 36l + 108$. Так как $324 = 2^2 3^4$, то $p = 3$ или 2. Если $p = 3$, то $\alpha_3(g) = 27m, \alpha_1(g) = 36r + 18m$ для некоторых целых чисел r, m.

Если $p = 2$ и $\alpha_3(g) \neq 0$, то g фиксирует вершину в соответствующем антиподальном классе; противоречие. Поэтому при $p = 2$ имеем $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 324$, $\alpha_1(g) = 12(2l + 3)$ для некоторого целого числа l.

Пусть Ω содержит вершину a. Если $p \neq 2, 5, 7$, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g-допустимым, и в случае $p > 7$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Предположим, что $[a] \subset \Omega$. Пусть $p > 3$. Тогда вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для некоторых вершин a_i, a_j из $[a]$ таких, что $d_\Gamma(a_i, a_j) \leq 2$, поэтому $u \in \Omega$. Отсюда $\Gamma_2(a) \subset \Omega$ и получим, что $\Gamma \subset \Omega$; противоречие. Пусть $p = 3$. Тогда $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ содержит некоторую вершину b. Допустим, что $[b]$ содержит вершину x из $\Gamma - \Omega$. Тогда $[x] \cap [x^g]$ содержит вершину b и μ вершин из $[a] \cap [x]$; противоречие. Поэтому $[b] \subset \Omega$. Но тогда для некоторой вершины $y \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$ получим $|[y] \cap [y^g] \cap \Omega| \geq 8$; противоречие.

Пусть $p = 2$. Тогда $\Omega = a^\perp$ и для любых двух смежных вершин $b, c \in [a]$ подграф $[b] \cap [c]$ не содержит вершин из $\Gamma - \Omega$, поэтому $[a]$ — объединение изолированных треугольников; противоречие. Лемма доказана.

В леммах 3–5 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $a, b \in \Omega$ и $p > 3$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$ и $\lambda_\Omega = 2$, $\mu_\Omega = 4$.

Лемма 3. *Если $p > 3$, то Ω лежит в антиподальном классе графа Γ, $\alpha_3(g) = 9 - |\Omega|$ и либо $p = 5$, $|\Omega| \in \{4, 9\}$ и $\alpha_1(g) = 60l + 18 - 7|\Omega|$, либо $p = 7$, $|\Omega| \in \{2, 9\}$ и $\alpha_1(g) = 84l + 42 - 7|\Omega|$.*

Доказательство. Пусть $p > 3$. Тогда в окрестности каждой вершины из $\Gamma - \Omega$ имеется не более одной вершины из Ω.

Пусть $p > 7$. Тогда $|\Omega| = 9r$, где r — число антиподальных классов, попадающих в Ω, Ω — регулярный граф степени $r - 1$ и p делит $36 - r$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $9r(36 - r)$, но не больше $(324 - 9r)$, поэтому $r = 1$. Отсюда $|\Omega| = 9$ и p делит 35; противоречие.

Пусть теперь $p \leq 7$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Рассмотрим множество вершин U, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω. Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(36 - t)/(324 - 9t) = st/9$ вершинами из Ω. Поэтому $st = |\Omega| \leq 9$.

Пусть Ω содержит изолированную вершину. Тогда Ω лежит в антиподальном классе графа Γ и либо $p = 5$ и $|\Omega| = 4$ или 9, либо $p = 7$ и $|\Omega| = 2$ или 9. В любом случае $\alpha_3(g) = 9 - |\Omega|$.

Далее, $\chi_1(g) = (7|\Omega| - 6 + \alpha_1(g))/12 - 3$ и $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 315$.

Если $p = 7$, то ввиду леммы 1 число $\chi_1(g)$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 84l + 42 - 7|\Omega|$ для некоторого целого числа l.

Если $p = 5$, то ввиду леммы 1 число $\chi_1(g) - 168$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g) = 60l + 18 - 7|\Omega|$ для некоторого целого числа l.

Если $t > 1$, то Ω — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 4)$ и $1 + k' + (k' - 3)k'/4 \leq 9$. Поэтому $k' \in \{3, 4, 5\}$. В случае $k' \in \{3, 4\}$ число p не делит $36 - t$; противоречие. В случае $k' = 5$ имеем $|\Omega| = 9$ и $\Gamma_3(a)$ не содержит вершин из Ω; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $p = 3$, то Γ содержит 9 антиподальных классов, пересекающих Ω по 3 вершинам, $\alpha_3(g) = 54$, $\alpha_1(g) = 9(4l - 15)$ и окрестность вершины в Ω — либо объединение двух изолированных четырехугольников, либо восьмиугольник.*

Доказательство. Пусть $p = 3$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, $|\Omega| \equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$, $|\Omega(a)| \equiv 2 (\mathrm{mod} 3)$, $\lambda_\Omega = 2$, в окрестности каждой вершины из $\Gamma - \Omega$ имеется не более четырех вершин из Ω и $s = 3j$, $j \leq 3$.

Как и выше, доказывается, что $|\Omega| = st \leq 36$. Отсюда $jt \leq 12$ и $t \in \{3, 6, 9, 12\}$.

Так как $\lambda_\Omega = 2$, то $t > 3$. Кроме того, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (s - 1)(t - 1)$ и для любых двух вершин $x, y \in \Omega$ на расстоянии 2 в Γ имеем $|[x] \cap [y] \cap \Omega| \in \{1, 4\}$. Если Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(st, t - 1, 2, \mu')$, то $|\Omega_2(a)| = (t - 4)(t - 1)/\mu' = (s - 1)(t - 1)$ и либо $s + 3 = t$, либо $s = t/4 = 3$.

Пусть $t = 6$. Тогда Ω — локально пятиугольный граф, поэтому Ω является графом икосаэдра и $|\Omega| = 12$; противоречие.

Пусть $t = 9$. Тогда $s = 3$, $\alpha_3(g) = t(9 - s) = 54$, $\alpha_1(g) = 9(4l - 15)$ для некоторого целого числа l и окрестность вершины в Ω — либо объединение двух изолированных четырехугольников, либо восьмиугольник, либо объединение пятиугольника и треугольника. Допустим, что $\Omega(a)$ — объединение пятиугольника $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ и треугольника $\{b_1, b_2, b_3\}$. Тогда $|([b_1] \cup [b_2] \cup [b_3]) \cap \Omega_2(a)| = 15$, для всех $1 \leq i \leq 3$ подграф $\Omega_2(a) \cap [b_i]$ является пятиугольником и положим $\Omega_2(a) - ([b_1] \cup [b_2] \cup [b_3]) = \{e\}$. Можно считать, что вершина c_1 смежна с вершиной e. Далее, положим $[c_1] \cap ([b_1] \cup [b_2] \cup [b_3]) \cap \Omega_2(a) = \{x, y, z, u\}$ и, не ограничивая общности, $x, y \in [b_1]$. Тогда $a, x, y \in [b_1] \cap \Omega(c_1)$, поэтому $z \in [b_1]$ и $u \in [b_2]$. Но тогда $\{a, u\} = \Omega(b_2) \cap [c_1]$; противоречие.

Пусть $t = 12$. Тогда $s = 3$ и каждая вершина из множества U вершин, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω, смежна ровно с 4 вершинами из Ω, Ω — регулярный граф степени 11 и $\Omega(a)$ — объединение изолированных многоугольников. Пусть $u \in U$ и $[u] \cap [u^g] \cap [u^{g^2}] \cap \Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Тогда вершины x_1, x_2, x_3, x_4 находятся попарно на расстоянии 2 в Γ. Аналогично вершины u, u^g, u^{g^2} находятся попарно на расстоянии 2 в Γ.

Так как каждая вершина c из Ω смежна с некоторой вершиной x из U, то c попадает в единственную четверку вершин $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ из Ω, смежных с вершинами x, x^g, x^{g^2}, и для вершины x имеем $[x] \cap \Omega = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$.

Следовательно, множество $[a] - \Omega = [a] \cap U$ разбивается на множество $\langle g\rangle$-орбит так, что каждой $\langle g\rangle$-орбите O из $[a] - \Omega$ соответствует единственная четверка вершин $Q(O)$ из Ω, смежных с вершинами из O, причем $a \in Q(O)$ и $Q(O) - \{a\} \subset \Omega_2(a)$. Кроме того, если O и O' — это две различные $\langle g\rangle$-орбиты из $[a] - \Omega$, то $Q(O) - \{a\}$ и $Q(O')$ не имеют общих вершин. Поэтому $|\Omega_2(a)| \geq (36 - t) = 24$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $p = 2$, то Γ содержит t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам, $\alpha_3(g) = t(9 - s)$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *объединение двух антиподальных классов, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 6(4l - 13)$*;

(2) *$t = 4$, $s \in \{5, 7, 9\}$ и компонента связности подграфа Ω является 4-кликой или графом $K_{4,4}$ с удаленным максимальным паросочетанием*;

(3) *$t = 6$, $s \in \{3, 5\}$ или $s = 3$, $t \in \{8, 10\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, числа $|\Omega|$ и t четные, $s = 2j + 1$, $j \leq 4$ и в окрестности каждой вершины из $\Gamma - \Omega$ имеется не более четырех вершин из Ω. Как и выше, доказывается, что $|\Omega| = st \leq 36$. Кроме того, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (s - 1)(t - 1)$.

Если $d_\Gamma(u, u^g) = 2$ для некоторой вершины $u \in \Gamma - \Omega$, то $[u]$ содержит 0,2 или 4 вершины из Ω. Если $d_\Gamma(u, u^g) = 1$ для некоторой вершины $u \in \Gamma - \Omega$, то $[u]$ содержит 0 или 2 вершины из Ω.

В случае $s = 1$ граф Ω является t-кликой, поэтому $t \leq 4$. Противоречие с тем, что $[a] - \Omega$ содержит по крайней мере 16 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Допустим, что $s > 1$. Пусть $t = 2$. Тогда $s \leq 9$ и Ω — объединение s изолированных ребер. Далее, $\Gamma_2(a)$ содержит 8 вершин из Ω, смежных с парами вершин из $[a] - b^\perp$, переставляемых элементом g. Поэтому $|\Omega| = 1+1+8+(s-1)$, $s = 9$, $\alpha_3(g) = 0$ и ввиду леммы 1 $\alpha_1(g) = 6(4l-13)$ для некоторого целого числа l.

Пусть $t = 4$. Тогда $s \leq 9$, Ω — регулярный граф степени 3 и компонента связности подграфа Ω является 4-кликой или графом $K_{4,4}$ с удаленным максимальным паросочетанием. Если $\Omega(a)$ является 3-кликой, то $[a]-\Omega$ содержит 16 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$, поэтому $s \geq 5$.

Если $t = 12$, то $s = 3$, каждая вершина из множества U вершин, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω, смежна ровно с 4 вершинами из Ω, Ω — регулярный граф степени 11 и окрестность вершины в Ω является объединением изолированных многоугольников и j изолированных вершин. Отсюда $|\Omega| \geq 1+11+(8(t-1-j)+11j)/4+s-1 \geq 36$. Поэтому $j = 0$ и $\lambda_\Omega = 2$. Кроме того, получим, что $\mu_\Omega = 4$. Значит, Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{11, 8, 1; 1, 4, 11\}$; противоречие с тем, что для собственных значений $n, -m$ этого графа верны равенства $k = mn = 11$ и $-2 = n - m$.

Так как окрестность вершины в Ω является объединением изолированных многоугольников и j изолированных вершин, то $|\{a\} \cup \Omega(a) \cup \Omega_2(a)| \geq t + ((t - 4)(t - 1 - j) + (t - 1)j)/4 = t + 1 + t(t - 5)/4 + 3j/4$. Если $j = 0$, то $[a] - \Omega$ содержит $(36 - t)/2$ пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Если $t = 10$, то $s = 3$, Ω — регулярный граф степени 9 и $|\{a\} \cup \Omega(a) \cup \Omega_2(a)| \geq 23,5 + 3j/4$, поэтому граф Ω связен. Если $t = 8$, то $s = 3$ и Ω — регулярный граф степени 7 и $|\{a\} \cup \Omega(a) \cup \Omega_2(a)| \geq 15 + 3j/4$, поэтому снова граф Ω связен.

Пусть $t = 6$. Тогда Ω — регулярный граф степени 5, а $s = 3$ или 5, причем в первом случае граф Ω связен, а во втором случае Ω имеет не более двух компонент связности. Лемма доказана.

Из лемм 2–5 следует утверждение теоремы.

2. Граф с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ не является реберно симметричным

Допустим, что группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$. Пусть $\{a, b\}$ — ребро графа Γ. Тогда $[a]$ — объединение изолированных n-угольников, $n \in \{5, 7, 35\}$, $|G : G_a| = 2^2 3^4$ и $|G_a : G_{a,b}| = 35$.

Лемма 6. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ *не является реберно симметричным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы следует, что $\pi(G_{a,b}) \subseteq \{2\}$. Пусть T — цоколь группы G и ϕ — действие, индуцируемое группой G на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Пусть K — ядро этого действия и $\bar{T}$ — цоколь группы $\phi(G) \simeq G/K$. Тогда $|K|$ делит 9 и $\phi(G)$ — 2-транзитивная группа подстановок на Σ. Так как 36 — не степень простого числа, то аффинный случай невозможен. В почти простом случае из [6, табл. 7.4] следует, что либо $\bar{T} = A_{36}$, либо $\bar{T} = Sp_6(2)$, либо $\bar{T} = L_m(q)$ и $36 = (q^m - 1)/(q - 1)$. В первом случае имеем противоречие с тем, что $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7\}$. Простой перебор показывает, что последний случай невозможен. В случае $\bar{T} = Sp_6(2)$ имеем $|\bar{T}| = 2^9 3^4 5 \cdot 7$. Поэтому $K = 1$ и группа T транзитивна на дугах графа Γ. Противоречие с тем, что глобальный стабилизатор $T_{\{F\}}$ антиподального класса в T не содержит подгрупп индекса 9. Лемма и следствие доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бураченко В.П., Махнев А.А.** О вполне регулярных локально циклических графах // Современные проблемы математики: сб. тез. 42-й Всеросс. мол. конф. ИММ УрО РАН: Екатеринбург, 2011. С. 181–183.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю.** Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик: аффинный случай // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1352–1367.
3. **Циовкина Л. Ю.** Об автоморфизмах графа с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 689–698.
4. **Циовкина Л. Ю.** Об автоморфизмах графа с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 285–293.
5. **Махнев А.А., Циовкина Л. Ю.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$ // Докл. акад. наук. 2011. Т. 441, № 3. С. 305–309.
6. **Cameron P.J.** Permutation Groups. Cambridge: Cambr. Univ. Press. 1999. 220 p. (London Math. Soc. Stud. Texts; vol. 45.)

Циовкина Людмила Юрьевна
канд. физ.-мат. наук
научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com

Поступила 27.12.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 519.6

БЕСКВАНТОРНЫЕ ОПИСАНИЯ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНО-КВАНТОРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ[1]

И. А. Шарая

Рассматривается система отношений вида $Ax\,\sigma\,b$, где σ — вектор отношений с компонентами $=$, $\geq$ и $\leq$, а параметры (элементы матрицы A и правой части b) могут принимать значения из заданных интервалов. Что считать множеством ее решений, зависит от того, какой квантор связан с каждым интервально-значным параметром и каков порядок кванторных приставок по отдельным параметрам. Для множеств решений с кванторной приставкой достаточно общего вида получены эквивалентные бескванторные описания в классической интервальной арифметике, в интервальной арифметике Каухера и в обычной вещественной арифметике.

Ключевые слова: интервальные системы линейных уравнений и неравенств, исключение кванторов, арифметика Каухера.

I. A. Sharaya. Quantifier-free descriptions for interval–quantifier linear systems.

A system of relations of the form $Ax\,\sigma\,b$ is considered, where σ is a relation vector with components $=$, $\geq$, and $\leq$ and the parameters (the elements of the matrix A and of the right-hand side b) take values from given intervals. What is considered to be the set of solutions of this system depends on which quantifier is related to each interval-valued parameter and on the order of quantifier prefixes for individual parameters. For sets of solutions with a quantifier prefix of a rather general form, we obtain equivalent quantifier-free descriptions in the classical interval arithmetic, in the Kaucher interval arithmetic, and in the usual real arithmetic.

Keywords: interval systems of linear equations and inequalities, elimination of quantifiers, Kaucher arithmetic.

1. Введение в задачу

1.1. Интервально-кванторные линейные системы

Интервалом в классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ называют непустое ограниченное связное замкнутое подмножество числовой оси. Согласно стандарту на обозначения [1] интервальные объекты, в отличие от точечных (неинтервальных), будем выделять жирным шрифтом.

Рассмотрим систему линейных уравнений и неравенств вида

$$Ax\,\sigma\,b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ \sigma \in \{=,\geq,\leq\}^m,\quad m,n \in \mathbb{N},$$

где x — вектор неизвестных, σ — вектор отношений с компонентами $=$, $\geq$ и $\leq$, а всякий параметр $u \in \mathbb{R}$ (элемент матрицы A или правой части b) может принимать значение в пределах заданного одноименного интервала $\boldsymbol{u}$ из $\mathbb{IR}$. С каждым параметром u свяжем квантор всеобщности либо существования и соответствующую элементарную кванторную приставку $(\forall u \in \boldsymbol{u})$ либо $(\exists u \in \boldsymbol{u})$. Такую интервальную неопределенность параметров можно задать интервальной матрицей $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, матрицей кванторов $\mathcal{A}$ тех же размеров, что и $\boldsymbol{A}$, интервальным вектором $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ и вектором кванторов β длины m. Запишем все элементарные кванторные приставки в произвольном порядке и обозначим полученную приставку длины $m(n+1)$ как $Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$.

[1]Работа частично финансировалась Программой государственной поддержки ведущих научных школ России (НШ-6293.2012.9).

О п р е д е л е н и е. *Интервально-кванторной системой линейных отношений,* или, в кратком варианте, *интервально-кванторной линейной системой*, будем называть предикат $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax\,\sigma\,b)$, а ее решением — всякий вектор $x \in \mathbb{R}^n$, для которого предикат принимает значение “истина”.

Введенные интервально-кванторные линейные системы тесно связаны с интервальными линейными системами. *Интервальная линейная система* вида $\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}$ — это условная запись, для которой в каждом конкретном случае особо оговаривают, что считают решением. Обычно рассматривают интервальные линейные системы, в которых присутствуют только уравнения или только неравенства одного знака, а в качестве решений — формальные, AE, сильные, слабые, допусковые, управляемые… (см. [2; 3; 4, гл. 2] и библиографию к ним). Чтобы согласовать с существующей в этой области терминологией, решение интервально-кванторной линейной системы $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax\,\sigma\,b)$ будем называть также *кванторным* решением интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}$. Отметим, что все перечисленные выше решения системы $\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}$, кроме формальных, относятся к кванторным.

Запись $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax\,\sigma\,b)$ задает все возможные интервально-кванторные линейные системы в параметрической форме. Параметрами описания служат $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathcal{A}$, β, σ и (поскольку элементарные приставки с разными кванторами не всегда перестановочны) порядок элементарных кванторных приставок в Q. При дополнительных ограничениях на параметры мы получаем различные классы (подмножества) интервально-кванторных линейных систем. Например, если потребовать, чтобы значением всех компонент вектора отношений σ служило равенство, то получим класс интервально-кванторных систем линейных уравнений.

1.2. Переход к бескванторным описаниям

Множество интервально-кванторных линейных систем было введено в предыдущем разделе через предикат первого порядка. Предикативная запись близка к постановкам практических задач, но допускает весьма ограниченные средства теоретического исследования и совсем не годится для вычислений. Так возникает

З а д а ч а. Для возможно более широкого подмножества интервально-кванторных линейных систем найти удобное бескванторное описание в арифметике с достаточно развитым аппаратом исследований и вычислений.

Обычно стараются перейти к описанию в вещественной арифметике [4, гл. 2; 5, с. 93–95; 6–11], поскольку она привычна, обладает хорошими свойствами и развитыми численными методами. Ряд бескванторных описаний получен в интервальных арифметиках для различных подклассов интервально-кванторных систем линейных уравнений [2; 3; 12; 13], и несмотря на плохие свойства этих арифметик (отсутствие дистрибутивности и т.п.), найденные описания оказались полезны. Так, описание множеств AE-решений интервальных систем линейных уравнений позволило построить теорию этих множеств и интервальные методы их оценивания (например, интервальный метод Гаусса — Зейделя и формальный алгебраический подход) [2;3].

Особенность бескванторных описаний, предлагаемых в данной работе, в том, что:

1. Они расширяют класс описанных интервально-кванторных линейных систем по сравнению с теми известными описаниями, где не требуется неотрицательность x. (Требование неотрицательности вектора неизвестных можно сформулировать как дополнительное ограничение на параметры $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ и σ. За счет такого требования в [8] получены бескванторные описания для интервально-кванторных линейных систем без ограничений на порядок элементарных кванторных приставок. Класс Q^σ, о котором пойдет речь в данной работе, не имеет ограничений на $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ и σ, но имеет ограничение на порядок элементарных кванторных приставок.)

2. Бескванторные описания получены в обычной вещественной арифметике $\mathbb{R}$, классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ и в интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$, что дает возможность проводить исследования и вычисления как вещественными, так и интервальными методами.

2. Необходимые сведения

Приведем необходимые сведения из интервальных арифметик. Желание улучшить свойства классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ привело к появлению различных ее расширений. Одно из них — интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$. К ее созданию причастны Э. Каухер [14], Е. Гарденес и А. Трепат [15], а также С. Марков [16]. Они строили расширения классической интервальной арифметики на основе разных принципов, которые нашли отражение в названиях соответствующих конструкций: расширенная интервальная арифметика, модальный интервальный анализ, арифметика направленных интервалов. Но, несмотря на различие в построении, все три алгебраические системы совпадают с точностью до обозначений.

Интервал в $\mathbb{KR}$ — это запись вида $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$. В $\mathbb{IR}$ значения a и b должны дополнительно удовлетворять условию $a \leq b$. Интервалы записывают также малыми буквами жирного шрифта, например $\boldsymbol{u} \in \mathbb{KR}$. Если $\boldsymbol{u}$ и $[a, b]$ обозначают один интервал, a называют левым концом интервала и, для указания связи, записывают как $\underline{u}$, а b — правым концом и записывают как $\overline{u}$. Таким образом, $\boldsymbol{u} \equiv [\underline{u}, \overline{u}]$. Интервалы из $\mathbb{IR}$, как уже отмечалось во введении, можно рассматривать как подмножества числовой оси: $[\underline{u}, \overline{u}] = \{u \in \mathbb{R} \mid \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$.

В данной работе мы будем использовать в основном термины и свойства из арифметики Каухера, их и приведем ниже. Из классической интервальной арифметики нам понадобятся только те термины и свойства, которые не отличаются от приводимых.

Два интервала считаются равными, если их одноименные концы совпадают:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \underline{u} = \underline{v}, \\ \overline{u} = \overline{v}. \end{cases}$$

Отношение включения $\subseteq$ в $\mathbb{KR}$ продолжает отношение включения в $\mathbb{IR}$ интервалов как множеств:

$$\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{v} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \underline{u} \geq \underline{v}, \\ \overline{u} \leq \overline{v}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Операции взятия точной верхней и точной нижней грани по включению вводятся для ограниченных соответственно сверху и снизу по включению семейств интервалов через операции взятия точных граней в $\mathbb{R}$:

$$\bigvee_{i \in I} \boldsymbol{u}_i := \sup_{i \in I}{}_{\subseteq} \boldsymbol{u}_i := [\inf_{i \in I} \underline{u}_i, \sup_{i \in I} \overline{u}_i],$$

$$\bigwedge_{i \in I} \boldsymbol{u}_i := \inf_{i \in I}{}_{\subseteq} \boldsymbol{u}_i := [\sup_{i \in I} \underline{u}_i, \inf_{i \in I} \overline{u}_i].$$

Нам понадобятся следующие одноместные операции над интервалами:

$$\begin{aligned} \operatorname{mid} \boldsymbol{u} &:= \check{u} := (\underline{u} + \overline{u})/2 \ \text{— середина}, \\ \operatorname{rad} \boldsymbol{u} &:= \hat{u} := (\overline{u} - \underline{u})/2 \ \text{— радиус}, \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{u} &:= [\overline{u}, \underline{u}] \ \text{— дуализация}, \\ \operatorname{pro} \boldsymbol{u} &:= \begin{cases} \boldsymbol{u}, & \text{если } \underline{u} \leq \overline{u}, \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{u}, & \text{если } \underline{u} > \overline{u}, \end{cases} \ \text{— правильная проекция.} \end{aligned}$$

(Дуализация имеет смысл только в $\mathbb{KR}$.)

Арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления определяются через соответствующие вещественные операции и операции взятия точных граней по включению так, что

$$\forall * \in \{+, -, \cdot, /\} \qquad \boldsymbol{u} * \boldsymbol{v} = \bigvee\!\!\bigwedge^{\boldsymbol{u}} \bigvee\!\!\bigwedge^{\boldsymbol{v}} (u * v), \quad \text{где} \ \bigvee\!\!\bigwedge^{\boldsymbol{u}} := \begin{cases} \bigvee\limits_{u \in \boldsymbol{u}}, & \text{если } \underline{u} \leq \overline{u}, \\ \bigwedge\limits_{u \in \operatorname{pro} \boldsymbol{u}}, & \text{если } \underline{u} \geq \overline{u}. \end{cases}$$

(Деление определено только для таких интервалов $\boldsymbol{v}$, что $0 \notin \operatorname{pro}\boldsymbol{v}$.) Сложение и умножение интервалов коммутативны. Сложение осуществляется по концам:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = [\underline{u} + \underline{v}, \overline{u} + \overline{v}]. \tag{2.2}$$

Вещественные числа $\lambda \in \mathbb{R}$ отождествляются с интервалами нулевого радиуса $[\lambda, \lambda]$. Умножение интервала на число $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет свойства:

$$\lambda \boldsymbol{u} = \begin{cases} [\lambda \underline{u}, \lambda \overline{u}], & \text{при } \lambda \geq 0, \\ [\lambda \overline{u}, \lambda \underline{u}], & \text{при } \lambda \leq 0; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$(\operatorname{dual} \boldsymbol{u})\lambda \overset{(2.3)}{=} \operatorname{dual}(\boldsymbol{u}\lambda) = [\overline{\boldsymbol{u}\lambda}, \underline{\boldsymbol{u}\lambda}]. \tag{2.4}$$

Запись $-\boldsymbol{u}$ означает результат умножения $(-1) \cdot \boldsymbol{u}$ (а не взятие интервала, противоположного по сложению к $\boldsymbol{u}$).

Матрицы и векторы, элементами которых служат интервалы, называются интервальными. Через $\boldsymbol{A}_{i:}$ будем обозначать i-ю строку матрицы $\boldsymbol{A}$. Для интервальных векторов и матриц концы, отношения $=$, $\subseteq$, операции mid, rad, dual, pro, а также сложение, вычитание и умножение на число вводятся покомпонентно, например $(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})_{ij} := \operatorname{dual}(\boldsymbol{A}_{ij})$, $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})_{ij} := \boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{B}_{ij}$, $(-\boldsymbol{A})_{ij} = -\boldsymbol{A}_{ij}$. Правила умножения интервальных векторов и матриц такие же, как и неинтервальных: $(\boldsymbol{AB})_{ij} := \sum\limits_k \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$.

Нам понадобится свойство

$$(\operatorname{dual} \boldsymbol{A})x = \operatorname{dual}(\boldsymbol{A}x) \quad \text{для } \boldsymbol{A} \in \mathbb{KR}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

которое легко получить из правила умножения интервальных векторов и матриц с привлечением (2.2) и (2.4).

3. Результаты

3.1. Бескванторные описания в интервальных арифметиках

Сначала обратимся к бескванторным описаниям для интервально-кванторных линейных систем в интервальных арифметиках. Нам понадобятся следующие обозначения:

$Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — кванторная приставка, полученная из $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ удалением всех тех элементарных приставок, которые не имеют отношения к i-й строке системы;

$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — кванторная приставка вида $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ с дополнительным условием: для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ в $Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ кванторы всеобщности (если они есть) предшествуют кванторам существования (если такие есть);

$Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — кванторная приставка вида $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ с дополнительным условием: все кванторы всеобщности (если есть) предшествуют всем кванторам существования (если такие есть);

$\boldsymbol{A}^{\forall}, \boldsymbol{A}^{\exists} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b}^{\forall}, \boldsymbol{b}^{\exists} \in \mathbb{IR}^m$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{KR}^{m \times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{KR}^m$ — интервальные матрицы и векторы, задаваемые правилами

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\forall}_{ij} &:= \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \end{cases} & \qquad \boldsymbol{A}^{\exists}_{ij} &:= \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \end{cases} \\ \boldsymbol{b}^{\forall}_{i} &:= \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \exists, \end{cases} & \qquad \boldsymbol{b}^{\exists}_{i} &:= \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \forall, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{C}_{ij} := \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{A}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \end{cases} \qquad \boldsymbol{d}_i := \begin{cases} \operatorname{dual} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists. \end{cases} \tag{3.2}$$

Прежде всего приведем свойство интервально-кванторных линейных систем, к которому будем неоднократно обращаться: каждую элементарную кванторную приставку из $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ можно пронести к той строке системы, в которой присутствует параметр этой приставки, т. е.

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \mathop{\&}_{i\in\{1,\ldots,m\}} Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (A_{i:}x\,\sigma_i\, b_i). \tag{3.3}$$

Обоснование этого свойства заключается в том, что система отношений $Ax\,\sigma\, b$ есть, с позиций логики, конъюнкция этих отношений $\mathop{\&}_{i} A_{i:}x\,\sigma_i\, b_i$, а для конъюнкции справедливы эквивалентности:

$$\forall t \in \mathcal{S}\ \big(P_1(t)\ \&\ P_2\big) \iff \big(\forall t \in \mathcal{S}\ P_1(t)\big)\ \&\ P_2,$$
$$\exists t \in \mathcal{S}\ \big(P_1(t)\ \&\ P_2\big) \iff \big(\exists t \in \mathcal{S}\ P_1(t)\big)\ \&\ P_2,$$

где $\mathcal{S}$ — множество значений переменной t, P_1, P_2 — формулы, причем P_2 не зависит от t.

Из (3.3) очевидно, что

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b), \tag{3.4}$$

т. е. вектор x служит решением системы $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$ тогда и только тогда, когда он является решением системы $Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$. Таким образом, хотя класс систем вида $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$ шире, чем класс систем вида $Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$, но утверждения, доказанные для решений системы $Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$, тривиально обобщаются в утверждения для решений системы $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$.

Теперь обратимся к интервально-кванторным системам линейных уравнений. Бескванторные описания для наиболее широкого подмножества таких систем получены С. П. Шарым. В [17; 18] он впервые доказал, что

$$Q^{AE}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax = b) \iff \boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x \iff \boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}. \tag{3.5}$$

Эквивалентность (3.4) позволяет сделать следующее обобщение.

Теорема 1.

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax = b) \iff \boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x \iff \boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}. \tag{3.6}$$

Теорема 1 для интервально-кванторной системы уравнений $Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax = b)$ дает эквивалентные бескванторные системы включений в $\mathbb{IR}$ ($\boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x$) и в $\mathbb{KR}$ ($\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$).

Далее договоримся системы, в которых вектор отношений σ состоит из одинаковых компонент, называть *σ-однородными*. Результаты теоремы 1 предназначены для систем уравнений, получим аналогичные результаты для σ-однородных систем неравенств.

Теорема 2.

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \ge b) \iff \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \ge \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists} \iff \underline{\boldsymbol{C}x} \ge \underline{d}, \tag{3.7}$$

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \le b) \iff \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \le \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists} \iff \overline{\boldsymbol{C}x} \le \overline{d}. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем только для цепочки эквивалентностей (3.7). Для (3.8) оно аналогично.

1) Из (3.3) очевидно

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \ge b) \iff \mathop{\&}_{i\in\{1,\ldots,m\}} Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (A_{i:}x \ge b_i). \tag{3.9}$$

2) Использование того, что

$$A_{i:}x \ge b_i \iff \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j + (-b_i) \ge 0$$

и что для всяких непрерывных функций $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и интервала $\boldsymbol{u} \in \mathbb{IR}$

$$(\forall u \in \boldsymbol{u})\ (h(u,x) + g(x) \geq 0) \iff \min_{u\in\boldsymbol{u}} h(u,x) + g(x) \geq 0,$$
$$(\exists u \in \boldsymbol{u})\ (h(u,x) + g(x) \geq 0) \iff \max_{u\in\boldsymbol{u}} h(u,x) + g(x) \geq 0,$$

позволяет получить бескванторную запись для $Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (A_{i:}x \geq b_i)$:

$$Q_{i:}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (A_{i:}x \geq b_i) \iff \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{ext}^{\mathcal{A}_{ij}}_{A_{ij}\in\boldsymbol{A}_{ij}} (A_{ij}x_j) + \operatorname*{ext}^{\beta_i}_{b_i\in\boldsymbol{b}_i}(-b_i) \geq 0, \tag{3.10}$$

где $\mathrm{ext}^{\forall} = \min$, $\mathrm{ext}^{\exists} = \max$.

3) Благодаря соотношениям

$$\min_{u\in\boldsymbol{u}}(ux) = \underline{\boldsymbol{u}x}, \qquad \max_{u\in\boldsymbol{u}}(ux) = \overline{\boldsymbol{u}x}, \qquad \min_{u\in\boldsymbol{u}}(u) = \underline{u}, \qquad \max_{u\in\boldsymbol{u}}(u) = \overline{u},$$

которые справедливы для всякого интервала $\boldsymbol{u} \in \mathbb{IR}$, и с учетом (2.2), сумму экстремумов в (3.10) можно выразить через матрицы $\boldsymbol{A}^{\forall}$, $\boldsymbol{A}^{\exists}$ и векторы $\boldsymbol{b}^{\forall}$, $\boldsymbol{b}^{\exists}$ из (3.1):

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{ext}^{\mathcal{A}_{ij}}_{A_{ij}\in\boldsymbol{A}_{ij}} (A_{ij}x_j) + \operatorname*{ext}^{\beta_i}_{b_i\in\boldsymbol{b}_i}(-b_i) \geq 0 \iff \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}_{i:}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}_{i:}x} \geq \overline{b}^{\forall}_i + \underline{b}^{\exists}_i. \tag{3.11}$$

4) Из (3.9)–(3.11) следует, что

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \geq b) \iff \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \geq \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists}.$$

5) Докажем вторую эквивалентность в цепочке (3.7). Для матрицы $\boldsymbol{C}$ имеем

$$[\underline{\boldsymbol{C}x}, \overline{\boldsymbol{C}x}] = \boldsymbol{C}x \overset{\substack{\text{определения}\\ \boldsymbol{C},\, \boldsymbol{A}^{\forall},\, \boldsymbol{A}^{\exists}}}{=} \boldsymbol{A}^{\forall}x + (\operatorname{dual}\boldsymbol{A}^{\exists})x \overset{\substack{\text{свойства}\\ (2.5)\text{ и }(2.2)}}{=} [\underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x},\ \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}], \tag{3.12}$$

и потому $\underline{\boldsymbol{C}x} = \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}$. Определения векторов $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}^{\forall}$ и $\boldsymbol{b}^{\exists}$ дают

$$[\underline{d}, \overline{d}] = \boldsymbol{d} = \operatorname{dual}(\boldsymbol{b}^{\forall}) + \boldsymbol{b}^{\exists} = [\overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists}, \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists}], \tag{3.13}$$

откуда $\underline{d} = \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists}$. В целом, получаем

$$\underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \geq \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists} \iff \underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d}.$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

В интервальных арифметиках $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ отношения $\geq$ и $\leq$ имеют место и являются продолжением одноименных отношений из $\mathbb{R}$, а для векторов вводятся покомпонентно. Это позволяет формально называть записи с $\boldsymbol{A}^{\forall}, \boldsymbol{A}^{\exists}, \boldsymbol{b}^{\forall}, \boldsymbol{b}^{\exists}$ в (3.7) и (3.8) неравенствами в классической интервальной арифметике, а записи с $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{d}$ — неравенствами в арифметике Каухера. Хотя на практике удобнее понимать все неравенства из (3.7) и (3.8) как покомпонентные неравенства в $\mathbb{R}^m$.

Из (3.3) и теоремы 2 очевидно, что множество решений интервально-кванторных систем линейных неравенств с произвольным $\sigma \in \{\geq, \leq\}^m$ не зависит от порядка элементарных кванторных приставок, т. е. все интервально-кванторные системы линейных неравенств с одинаковыми $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta$ и σ имеют одно и то же множество решений. Этим системы неравенств существенно отличаются от систем уравнений.

Приведем следствие теорем 1 и 2, которое устанавливает соотношение между множествами AE-решений интервальных систем линейных уравнений и множествами кванторных решений интервальных σ-однородных систем линейных неравенств.

Следствие 1.

$$Q^{AE}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\,(Ax=b) \iff Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\,(Ax=b) \iff \begin{cases} Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)(Ax\geq b),\\ Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)(Ax\leq b).\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о дается следующей цепочкой эквивалентностей:

$$\begin{cases} Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\geq b)\\ Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\leq b)\end{cases} \overset{\text{Теорема 2}}{\iff} \begin{cases} \underline{\boldsymbol{C}x}\geq \underline{d}\\ \overline{\boldsymbol{C}x}\leq \overline{d}\end{cases} \overset{\text{определение}\ \subseteq}{\iff} \boldsymbol{C}x\subseteq \boldsymbol{d}$$
$$\overset{\text{Теорема 1}}{\iff} Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax=b) \overset{(3.4)}{\iff} Q^{AE}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax=b).$$

В теоремах 1, 2 приведены бескванторные описания для σ-однородных систем. Перейдем к рассмотрению систем с произвольным вектором отношений σ.

Через $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$ будем обозначать кванторную приставку вида $Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$, удовлетворяющую условию: если σ_i есть $=$, то в $Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)$ кванторы всеобщности (если они имеются) предшествуют кванторам существования (если такие есть). Классом Q^{σ} в множестве всех интервально-кванторных систем линейных отношений будем называть подмножество, состоящее из всех систем вида $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\,b)$. Следующая теорема дает бескванторное описание класса Q^{σ} в интервальных арифметиках $\mathbb{KR}$ и $\mathbb{IR}$, с привлечением покомпонентных неравенств из $\overline{\mathbb{R}}^m$, где $\overline{\mathbb{R}}$ обозначает расширенную числовую ось ($\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$).

Теорема 3.

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\,b) \iff \begin{cases} \underline{\boldsymbol{C}x}\geq \underline{d}+u,\\ \overline{\boldsymbol{C}x}\leq \overline{d}+v,\end{cases} \iff \begin{cases} \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\geq \overline{b}^{\forall}+\underline{b}^{\exists}+u,\\ \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x}+\underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x}\leq \underline{b}^{\forall}+\overline{b}^{\exists}+v,\end{cases} \tag{3.14}$$

где $\boldsymbol{C}$ *и* $\boldsymbol{d}$ *из* (3.2), $\boldsymbol{A}^{\forall},\boldsymbol{A}^{\exists},\boldsymbol{b}^{\forall},\boldsymbol{b}^{\exists}$ *из* (3.1), *а векторы* $u,v\in\overline{\mathbb{R}}^m$ *определяются правилом*

$$u_i:=\begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } = \text{ или } \geq,\\ -\infty, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \leq,\end{cases} \qquad v_i:=\begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } = \text{ или } \leq,\\ \infty, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \geq.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) За счет того, что каждый интервально-значный параметр (элемент матрицы A или вектора b) входит только в одну строку системы $Ax\,\sigma\,b$, имеем (3.3) и, в частности,

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\,b) \iff \mathop{\&}_{i\in\{1,\dots,m\}} Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\,\sigma_i\,b_i). \tag{3.15}$$

2) Исключим кванторные приставки в предикате $Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\,\sigma_i\,b_i)$ в зависимости от значений σ_i по теоремам 1 и 2:

$$\begin{aligned} Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x=b_i) &\overset{(3.6)}{\iff} (\boldsymbol{C}x)_i\subseteq \boldsymbol{d}_i \iff \big(\underline{\boldsymbol{C}x}_i\geq \underline{d}_i\big)\ \&\ \big(\overline{\boldsymbol{C}x}_i\leq \overline{d}_i\big),\\ Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\geq b_i) &\overset{(3.7)}{\iff} \underline{\boldsymbol{C}x}_i\geq \underline{d}_i \iff \big(\underline{\boldsymbol{C}x}_i\geq \underline{d}_i\big)\ \&\ \big(\overline{\boldsymbol{C}x}_i\leq \infty\big),\\ Q^{\sigma}_{i:}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (A_{i:}x\leq b_i) &\overset{(3.8)}{\iff} \overline{\boldsymbol{C}x}_i\leq \overline{d}_i \iff \big(\underline{\boldsymbol{C}x}_i\geq -\infty\big)\ \&\ \big(\overline{\boldsymbol{C}x}_i\leq \overline{d}_i\big).\end{aligned}$$

3) Вводя векторы u и v, перейдем к матрично-векторной записи

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\,b) \iff \begin{cases} \underline{\boldsymbol{C}x}\geq \underline{d}+u,\\ \overline{\boldsymbol{C}x}\leq \overline{d}+v.\end{cases}$$

4) Эквивалентность

$$\begin{cases}\underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d} + u,\\ \overline{\boldsymbol{C}x} \leq \overline{d} + v,\end{cases} \iff \begin{cases}\underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \geq \overline{b}^{\forall} + \underline{b}^{\exists} + u,\\ \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} + \underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} \leq \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists} + v,\end{cases}$$

очевидна в силу (3.12) и (3.13). Доказательство теоремы 3 завершено.

Удобные бескванторные записи для класса Q^{σ} получаются из теоремы 3, если ввести множества интервалов $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}} = \{[\underline{z}, \overline{z}] \mid \underline{z}, \overline{z} \in \overline{\mathbb{R}}\}$ и $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}} = \{[\underline{z}, \overline{z}] \mid \underline{z}, \overline{z} \in \overline{\mathbb{R}},\ \underline{z} \leq \overline{z}\}$ и продолжить на них отношение $\subseteq$ по правилу (2.1). Тогда

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w} \iff \boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x + \boldsymbol{w}, \tag{3.16}$$

где $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{d}$ из (3.2), $\boldsymbol{A}^{\forall}, \boldsymbol{A}^{\exists}, \boldsymbol{b}^{\forall}, \boldsymbol{b}^{\exists}$ из (3.1), а интервальный вектор $\boldsymbol{w} \in \mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}^{m}$ таков, что

$$\boldsymbol{w}_i := \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \text{ есть } =,\\ [0, \infty], & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \geq,\\ [-\infty, 0], & \text{если } \sigma_i \text{ есть } \leq . \end{cases}$$

Запись $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w}$ будет бескванторным описанием интервально-кванторной линейной системы $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$ во всякой интервальной арифметике, продолжающей арифметику Каухера на множество $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$. Пример такого продолжения есть в [19]. Договоримся обозначать арифметику-продолжение, как и ее основное множество, через $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$. Аналогично запись $\boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x + \boldsymbol{w}$ — это бескванторное описание системы $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$ в интервальной арифметике, продолжающей $\mathbb{IR}$ на множество $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$. Примеры продолжений классической интервальной арифметики на множество интервалов с бесконечными концами описаны в [20]. Договоримся арифметикой $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ называть какое-нибудь из таких продолжений. Итак, соотношение (3.16) дает бескванторные описания интервально-кванторных линейных систем класса Q^{σ} в интервальных арифметиках $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$.

Сравнивая бескванторные записи, полученные для интервально-кванторных линейных систем, видим, что бескванторная запись в $\mathbb{KR}$ ($\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$), с одной стороны, за счет многоуровневых обозначений более удалена от начальных данных $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}$ и β, а с другой стороны, более лаконична и удобна для анализа, чем аналогичная запись в $\mathbb{IR}$ ($\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$).

3.2. Бескванторные описания в вещественной арифметике

Получим бескванторные описания интервально-кванторных линейных систем в вещественной арифметике $\mathbb{R}$. Для этого нам понадобится символ $\circ$, который означает поэлементное произведение матриц (произведение Адамара): $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$. Отметим также, что операцию взятия модуля вектора мы понимаем покомпонентно, например, $|x|$ для $x \in \mathbb{R}^n$ — это неотрицательный вектор с компонентами $|x|_i = |x_i|$.

Теорема 4.

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax = b) \iff |\check{A}x - \check{b}| \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.17}$$

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \geq b) \iff \check{b} - \check{A}x \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.18}$$

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \leq b) \iff \check{A}x - \check{b} \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.19}$$

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax\,\sigma\, b) \iff \operatorname{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \leq (\mathcal{A}^s \circ \hat{A})|x| + \beta^s \circ \hat{b}, \tag{3.20}$$

где

$$\mathcal{A}^s_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists,\\ -1, & \textit{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \end{cases} \qquad \beta^s_i = \begin{cases} 1, & \textit{если } \beta_i = \exists,\\ -1, & \textit{если } \beta_i = \forall, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\operatorname{abs}_i{}^{\sigma}(y) = \begin{cases} |y_i|, & \textit{если } \sigma_i \textit{ есть } =,\\ -y_i, & \textit{если } \sigma_i \textit{ есть } \geq,\\ y_i, & \textit{если } \sigma_i \textit{ есть } \leq. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Эквивалентность (3.17) была доказана И. Роном в 1996 г. в личной беседе с С. П. Шарым и А. В. Лакеевым в Вюцбурге на конференции INTERVAL'96. Ее запись с помощью произведения Адамара предложил А. В. Лакеев в [11]. Приведем свое доказательство.

По теореме 1

$$Q^{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax = b) \iff \boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}.$$

Используя свойства арифметики Каухера:

$$(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{KR}^m) \ \ \big(\boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{v} \iff |\check{u} - \check{v}| \leq \hat{v} - \hat{u}\big),$$

$$\operatorname{mid}(\boldsymbol{C}x) = \check{C}x, \qquad \operatorname{rad}(\boldsymbol{C}x) = \hat{C}|x|, \tag{3.22}$$

получаем

$$\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} \iff |\check{C}x - \check{d}| \leq \hat{d} - \hat{C}|x|.$$

Из определений (3.2) и (3.21) для $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{d}$, $\mathcal{A}^s$ и β^s имеем

$$\check{C} = \check{A}, \qquad \hat{C} = -\mathcal{A}^s \circ \hat{A}, \qquad \check{d} = \check{b}, \qquad \hat{d} = \beta^s \circ \hat{b}. \tag{3.23}$$

2) Докажем эквивалентность (3.18). По теореме 2

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax \geq b) \iff \underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d}.$$

Привлекая очевидное свойство арифметики Каухера

$$(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{KR}^m) \ \ \big(\underline{u} \geq \underline{v} \iff \check{v} - \check{u} \leq \hat{v} - \hat{u}\big),$$

которое позволяет заменить неравенство концов неравенством центров и радиусов, и (3.22), получаем $\underline{\boldsymbol{C}x} \geq \underline{d} \iff \check{d} - \check{C}x \leq \hat{d} - \hat{C}|x|$. Далее используем (3.23).

3) Эквивалентность (3.19) доказывается аналогично (3.18).

4) Осталось обосновать эквивалентность (3.20). Также, как в п. 1 доказательства теоремы 3, имеем (3.15), т. е. задача распадается по строкам. Применим к каждой строке соответствующую эквивалентность (3.17), (3.18) или (3.19) и свернем полученную систему неравенств с помощью операции $\operatorname{abs}^{\sigma}$.

Доказательство теоремы 4 завершено.

Из эквивалентностей (3.17)–(3.19) очевидно еще одно доказательство следствия 1. Кроме того, нетрудно установить следующую связь между σ-однородными системами неравенств противоположного знака.

Следствие 2.

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \geq b) \iff Q(-\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \leq b), \tag{3.24}$$

$$Q(-\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \geq b) \iff Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)\ (Ax \leq b). \tag{3.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опираясь на свойства интервалов

$$\operatorname{mid}(-\boldsymbol{u}) = -\check{u} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{rad}(-\boldsymbol{u}) = \hat{u}, \tag{3.26}$$

покажем справедливость соотношения (3.25):

$$
\begin{aligned}
Q(-\boldsymbol{A},-\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\ge b) &\overset{(3.18)}{\iff} \ \mathrm{mid}(-\boldsymbol{b})-\mathrm{mid}(-\boldsymbol{A})x\ \le \big(\mathcal{A}^s\circ\ \mathrm{rad}(-\boldsymbol{A})\big)|x|+\beta^s\circ\ \mathrm{rad}(-\boldsymbol{b}),\\
&\overset{(3.26)}{\iff} \ -\check{b}+\check{A}x\ \le (\mathcal{A}^s\circ\hat{A})|x|+\beta^s\circ\ \hat{b},\\
&\overset{(3.19)}{\iff} \ Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\le b).
\end{aligned}
$$

Соотношение (3.24) доказывается аналогично.

Следствие 2 означает, что при одновременном изменении знака неравенства и знаков всех интервалов значений параметров на противоположные множество кванторных решений интервальной системы линейных неравенств не изменится. Например, множества решений систем $(\forall A\in\boldsymbol{A})\,(\exists b\in\boldsymbol{b})\,(Ax\ge b)$ и $(\forall A\in-\boldsymbol{A})\,(\exists b\in-\boldsymbol{b})\,(Ax\le b)$ совпадают.

3.3. Бескванторные описания в $\mathbb{KR}$, $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{R}$ для решений основных типов

До сих пор, рассматривая интервально-кванторные линейные системы $Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta)\ (Ax\,\sigma\, b)$, мы старались получать такие утверждения, в которых нет ограничений на параметры $\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathcal{A},\beta$ и σ, а ограничения на порядок элементарных кванторных приставок в Q минимальны. В этом смысле самые общие утверждения были найдены для класса Q^σ. В данном разделе мы рассмотрим подмножества интервально-кванторных линейных систем класса Q^σ, выделяемые в нем требованием однородности $\mathcal{A}$ и однородности β. Элементы всех этих подмножеств будем называть системами *основных типов*, а про их решения (для согласования с терминологией из [2;4]) говорить как про решения основных типов для интервальных линейных систем. В зависимости от того, какие кванторы заполняют матрицу $\mathcal{A}$ и вектор β, все интервально-кванторные линейные системы основных типов делятся на 4 подмножества. Это разделение представлено в табл. 1. Для решений систем каждого подмножества дадим название, продолжающее на все подмножество то название, которое используется в [2; 4] для решений σ-однородных систем этого подмножества. В первом столбце табл. 1 перечислены названия решений, во втором и третьем указаны значения компонент матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β, а в четвертом — общий вид элементов для соответствующего подмножества систем основных типов.

Бескванторные описания в $\mathbb{KR}$, $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{R}$ для основных типов решений интервальных линейных систем можно получить как следствия соответствующих описаний кванторных решений класса Q^σ. Поясним это с помощью табл. 2 для σ-однородных интервально-кванторных линейных систем. В ней столбцы 4–7 для основных типов решений получаются построчно из столбца 3 для кванторных решений. При этом надо в строках, соответствующих арифметике Каухера, воспользоваться определением (3.2) матрицы $\boldsymbol{C}$ и вектора $\boldsymbol{d}$; в строках, соответствующих классической интервальной арифметике, — определением (3.1) матриц $\boldsymbol{A}^\forall$, $\boldsymbol{A}^\exists$ и векторов $\boldsymbol{b}^\forall$, $\boldsymbol{b}^\exists$, а в строках, соответствующих вещественной арифметике, — определением (3.21) матрицы $\mathcal{A}^s$, вектора β^s и определением произведения $\circ$.

Таблица 1

Основные типы решений интервальных линейных систем в классе Q^σ

Название решения	Значения компонент		Интервально-кванторная линейная система
	матрицы $\mathcal{A}$	вектора β	
Слабое	$\exists$	$\exists$	$(\exists A\in\boldsymbol{A})(\exists b\in\boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b)$
Допускóвое	$\forall$	$\exists$	$(\forall A\in\boldsymbol{A})(\exists b\in\boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b)$
Управляемое	$\exists$	$\forall$	$(\forall b\in\boldsymbol{b})(\exists A\in\boldsymbol{A})\ (Ax\,\sigma\, b)$
Сильное	$\forall$	$\forall$	$(\forall A\in\boldsymbol{A})(\forall b\in\boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b)$

Т а б л и ц а 2

Характеризация σ-однородных интервально-кванторных линейных систем и основных типов их решений

$Ax\,\sigma\,b$	Пространство описания	Тип решения и соответствующая ему кванторная приставка $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$				
			Основные типы решений			
		Кванторное $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$	Слабое $(\exists A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})$	Допусковое $(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\exists b \in \boldsymbol{b})$	Управляемое $(\forall b \in \boldsymbol{b})\ (\exists A \in \boldsymbol{A})$	Сильное $(\forall A \in \boldsymbol{A})\ (\forall b \in \boldsymbol{b})$
$Ax = b$	$\mathbb{KR}$	$\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$	$(\operatorname{dual}\boldsymbol{A})x \subseteq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}$	$(\operatorname{dual}\boldsymbol{A})x \subseteq \operatorname{dual}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}x \subseteq \operatorname{dual}\boldsymbol{b}$
	$\mathbb{IR}$	$\boldsymbol{A}^{\forall}x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists}x$	$0 \in \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}x$	$\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{A}x$	$\boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b} \subseteq 0$
	$\mathbb{R}$	$\lvert\check{A}x - \check{b}\rvert \le (\mathcal{A}^{s}\circ\hat{A})\lvert x\rvert + \beta^{s}\circ\hat{b}$	$\lvert\check{A}x - \check{b}\rvert \le \hat{A}\lvert x\rvert + \hat{b}$	$\lvert\check{A}x - \check{b}\rvert \le -\hat{A}\lvert x\rvert + \hat{b}$	$\lvert\check{A}x - \check{b}\rvert \le \hat{A}\lvert x\rvert - \hat{b}$	$\lvert\check{A}x - \check{b}\rvert \le -\hat{A}\lvert x\rvert - \hat{b}$
$Ax \ge b$	$\mathbb{KR}$	$\underline{\boldsymbol{C}x} \ge \underline{d}$	$\underline{(\operatorname{dual}\boldsymbol{A})x} \ge \underline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \ge \underline{b}$	$\underline{(\operatorname{dual}\boldsymbol{A})x} \ge \overline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \ge \overline{b}$
	$\mathbb{IR}$	$\overline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} + \underline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} \ge \underline{b}^{\exists} + \overline{b}^{\forall}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \ge \underline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \ge \underline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \ge \overline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \ge \overline{b}$
	$\mathbb{R}$	$\check{b} - \check{A}x \le (\mathcal{A}^{s}\circ\hat{A})\lvert x\rvert + \beta^{s}\circ\hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \le \hat{A}\lvert x\rvert + \hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \le -\hat{A}\lvert x\rvert + \hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \le \hat{A}\lvert x\rvert - \hat{b}$	$\check{b} - \check{A}x \le -\hat{A}\lvert x\rvert - \hat{b}$
$Ax \le b$	$\mathbb{KR}$	$\overline{\boldsymbol{C}x} \le \overline{d}$	$\overline{(\operatorname{dual}\boldsymbol{A})x} \le \overline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \le \overline{b}$	$\overline{(\operatorname{dual}\boldsymbol{A})x} \le \underline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \le \underline{b}$
	$\mathbb{IR}$	$\underline{\boldsymbol{A}^{\exists}x} + \overline{\boldsymbol{A}^{\forall}x} \le \overline{b}^{\exists} + \underline{b}^{\forall}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \le \overline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \le \overline{b}$	$\underline{\boldsymbol{A}x} \le \underline{b}$	$\overline{\boldsymbol{A}x} \le \underline{b}$
	$\mathbb{R}$	$\check{A}x - \check{b} \le (\mathcal{A}^{s}\circ\hat{A})\lvert x\rvert + \beta^{s}\circ\hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \le \hat{A}\lvert x\rvert + \hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \le -\hat{A}\lvert x\rvert + \hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \le \hat{A}\lvert x\rvert - \hat{b}$	$\check{A}x - \check{b} \le -\hat{A}\lvert x\rvert - \hat{b}$

Примерно половина описаний основных типов решений, которые приведены в 4–7 столбцах табл. 2, получена ранее. Те, что были найдены первыми, стали именными: описание Оеттли — Прагера [6] в $\mathbb{R}$ и Бека [12] в $\mathbb{IR}$ для слабых решений уравнений, а также описание Герлаха [7] в $\mathbb{R}$ для слабых решений неравенств знака $\le$. Бескванторные описания допускового множества решений уравнений получены в $\mathbb{R}$ И. Роном [9], а в $\mathbb{IR}$ — А. Ноймайером [13]. У А. В. Лакеева и С. И. Носкова в [10] обосновано описание в $\mathbb{R}$ и имеется, уже как очевидное, описание в $\mathbb{IR}$ для управляемого множества решений уравнений. Оставшиеся описания в интервальных арифметиках $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ для основных типов решений систем уравнений тоже известны, например, как очевидные следствия утверждения (3.5), доказанного С. П. Шарым в [17;18]. В [4, теорема 2.25] получено бескванторное описание в $\mathbb{R}$ для сильных решений интервальной системы неравенств знака $\le$.

Для интервально-кванторных систем основных типов, в которых вектор отношений σ не однороден, бескванторные описания в $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ получаются из (3.16) и (3.2), в $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ — из (3.16) и (3.1), в $\mathbb{R}$ — из (3.20) и (3.21). Приведем эти записи только в $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{R}$ (в $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ они менее выразительны и отличаются от записей в $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$ лишь очевидными арифметическими преобразованиями, подобно тому как отличаются записи в $\mathbb{KR}$ и $\mathbb{IR}$ из табл. 2):

$$\begin{aligned}
&(\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b) &&\Longleftrightarrow && 0 \in \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{w} &&\Longleftrightarrow && \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \le \hat{A}|x| + \hat{b};\\
&(\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b) &&\Longleftrightarrow && \boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{w} &&\Longleftrightarrow && \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \le -\hat{A}|x| + \hat{b};\\
&(\forall b \in \boldsymbol{b})(\exists A \in \boldsymbol{A})\ (Ax\,\sigma\, b) &&\Longleftrightarrow && \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{w} &&\Longleftrightarrow && \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \le \hat{A}|x| - \hat{b};\\
&(\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall b \in \boldsymbol{b})\ (Ax\,\sigma\, b) &&\Longleftrightarrow && \boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{w} &&\Longleftrightarrow && \mathrm{abs}^{\sigma}(\check{A}x - \check{b}) \le -\hat{A}|x| - \hat{b}.
\end{aligned}$$

4. Заключение

Основные результаты работы представлены в теоремах 2–4 (за исключением известной ранее эквивалентности (3.17)) и в следствии 1.

Среди утверждений, не имеющих ограничений на параметры $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta$ и σ, наибольшую общность имеют те, которые дают бескванторные описания интервально-кванторных линейных систем класса Q^{σ}. Это соотношение (3.14), которое обеспечивает переход в $\mathbb{KR}$ и $\mathbb{IR}$, соотношение (3.16) для перехода в $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{I}\overline{\mathbb{R}}$, а также эквивалентность (3.20), позволяющая перейти в $\mathbb{R}$. Полезность бескванторных описаний из (3.14), (3.16) и (3.20) заключается в том, что они дают возможность:

• изучать все интервально-кванторные линейные системы класса Q^{σ} совместно, а результаты для подклассов (в частности для интервально-кванторных систем основных типов) получать как следствие общего результата;

• для задач, связанных с интервально-кванторными линейными системами, создавать такие методы решения, которые пригодны для всех систем класса Q^{σ} (пример — программы серии IntLinInc, предназначенные для визуализации множеств кванторных решений интервальных линейных систем, доступные с веб-страницы [21]).

Бескванторные описания различных классов интервально-кванторных линейных систем в интервальных арифметиках, как известные ранее (например, соотношение (3.5)), так и полученные в данной работе в соотношениях (3.6)–(3.8), (3.14), (3.16), позволяют:

• исследовать интервально-кванторные линейные системы интервальными методами — выявлять свойства их множеств решений, соотношения между системами с различными ограничениями на параметры $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta, \sigma$ и порядок кванторных приставок (пример — доказательство следствия 1);

• создавать интервальные (т. е. существенно использующие интервальную арифметику) методы решения для задач, в условии которых задействованы интервально-кванторные линейные системы (примеры методов для систем уравнений можно найти в [2], а для неравенств и систем класса Q^{σ} такие методы — пока дело будущего).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Standardized notation in interval analysis / A. Kearfott [et al.] // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 7–13. (URL: http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345)
2. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ [Электрон. ресурс]. URL: http://interval.ict.nsc.ru/Library/InteBooks/SharyBook.pdf (дата обращения 18.02.2013).
3. **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. 2002. Vol. 8, no. 5. P. 321–418. (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/ANewTech.pdf)
4. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исследований, 2008. 288 с.
5. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
6. **Oettli W., Prager W.** Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numerische Mathematik. 1964. Vol. 6. P. 405–409.
7. **Gerlach W.** Zur Lösung linearer Ungleichungssysteme bei Störung der rechten Seite und der Koeffizientenmatrix // Mathematische Operationsforschung und Statistik. Series Optimization. 1981. Bd. 12. S. 41–43.
8. **Ватолин А.А.** О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 11. С. 1629–1637.
9. **Rohn J.** Inner solutions of linear interval systems // Interval Mathematics 1985. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. P. 157–158. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 212.)
10. **Лакеев А.В., Носков С.И.** О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1074–1084.
11. **Lakeyev A.V.** Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 1. С. 12–23.
12. **Beeck H.** Charakterisierung der Lösungsmenge von Intervallgleichungssystemen // ZAMM. 1973. Bd. 53, no. 12. S. T181–T182.
13. **Neumaier A.** Tolerance analysis with interval arithmetic // Freiburger Intervall-Berichte. 1986. No. 86/9. S. 5–19.
14. **Kaucher E.** Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$ // Computing. 1980. Suppl. 2. P. 33–49.
15. **Gardenes E., Trepat A.** Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // Computing. 1980. Vol. 24. P. 161–179.
16. **Markov S.M.** On directed interval arithmetic and its applications // J. Universal Computer Science. 1995. Vol. 1, no. 7. P. 514–526.
17. **Shary S.P.** Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // Numerical Methods and Error Bounds. Berlin: Akademie Verlag, 1996. P. 224–233. (Mathematical Research; vol. 89). (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/Herz.pdf)
18. **Shary S.P.** Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // Reliable Computing. 1999. Vol. 5, no. 3. P. 323–335. (URL: http://interval.ict.nsc.ru/shary/Papers/GOuter.pdf)
19. **Kaucher E.** Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume: Dr. Naturwissen Dissertation. Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1973. 271 s.
20. **Markov S.M.** Extended interval arithmetic involving infinite intervals // Mathematica Balkanica. New Series. 1992. Vol. 6, no. 3. P. 269–304.
21. Шарая Ирина Александровна [Персональная страница]. URL: http://interval.ict.nsc.ru/sharaya/irash.html (дата обращения: 18.02.2013).

Шарая Ирина Александровна
науч. сотрудник
Институт вычислительных технологий СО РАН
e-mail: sharaya@ict.nsc.ru

Поступила 18.02.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Н. М. Юркова
TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск Л. Ю. Циовкина

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 22.05.14. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37, 8. Уч.-изд. л. 31,5. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226