РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 20, № 1 2014

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 20 № 1 2014

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 20, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. 336 с.

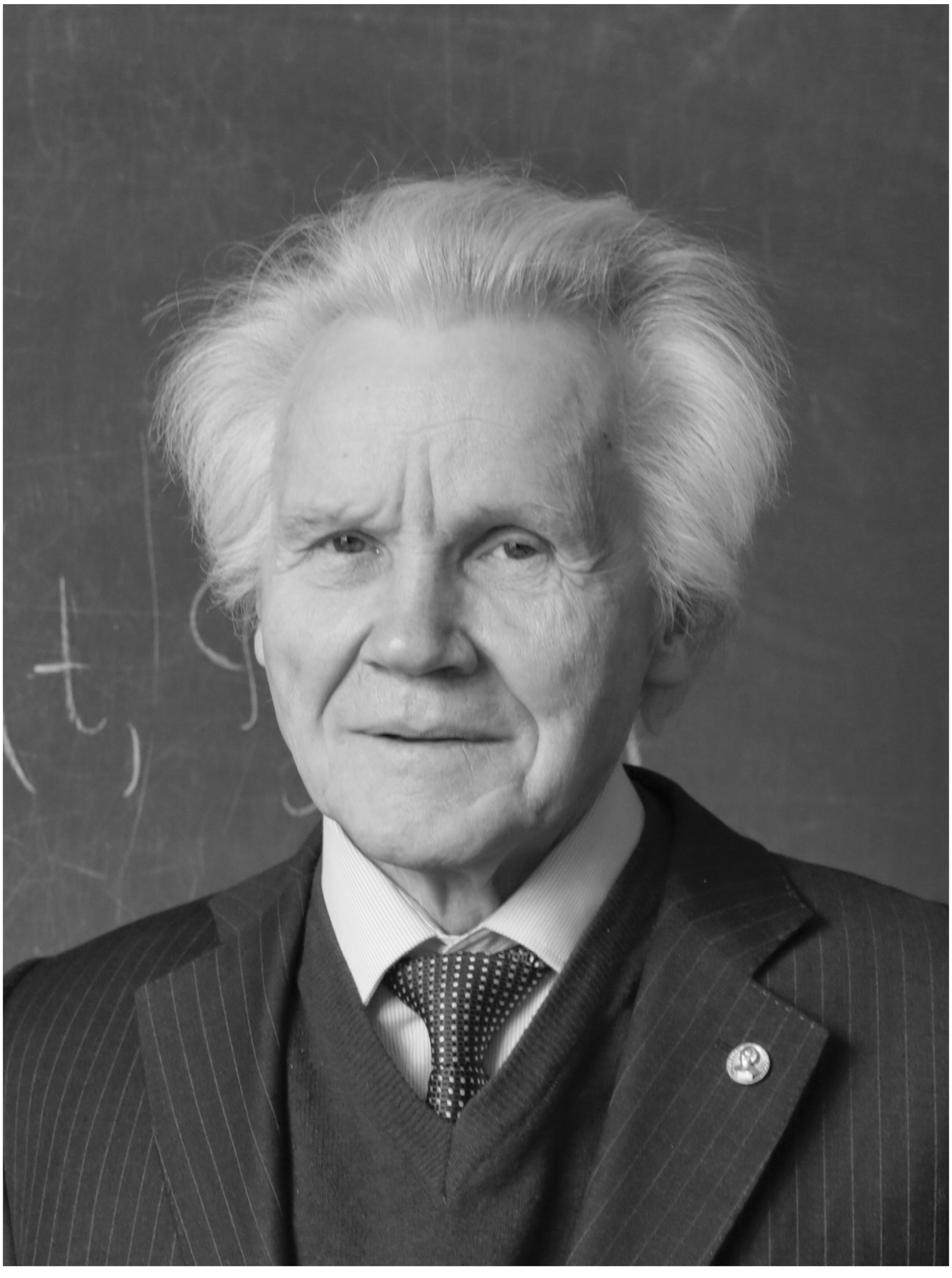
ISSN 0134–4889

Том 20 № 1 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Том 20 № 1 2014

(Продолжение)



Том 20 № 1 2014

ВИТАЛИЙ ИВАНОВИЧ БЕРДЫШЕВ

(*К семидесятипятилетнему юбилею*)

27 января 2014 г. отметил 75-летие известный российский ученый, директор Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН действительный член РАН Виталий Иванович Бердышев.

Интерес к математике проявился у Виталия Бердышева уже в школьные годы. В Свердловской железнодорожной школе № 2, где он учился с пятого класса, были сильные преподаватели математики — Николай Иванович Слободчиков и Иван Григорьевич Неволин, который был его учителем. Об этом энергичном, неординарном человеке, преданном математике, Виталий Иванович всегда вспоминает с любовью и благодарностью. После окончания школы он поступил в Уральский государственный университет и был одним из лучших студентов математико-механического факультета.

К научным исследованиям способного студента привлек Александр Александрович Меленцов, который вел математические кружки на младших курсах. От него Виталий Бердышев получил первые интересные задачи. На старших курсах он познакомился с блестящим математиком и преподавателем Сергеем Борисовичем Стечкиным, приехавшим из Москвы по поручению академика Ивана Матвеевича Виноградова для организации в Свердловске филиала Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и читавшим лекции на математико-механическом факультете УрГУ. Профессор Стечкин предложил Бердышеву заняться, как потом оказалось, невероятно трудной задачей о выпуклости чебышёвского множества в гильбертовом пространстве. Виталий Иванович решил эту задачу для случая конечномерных пространств, и его результат был отмечен золотой медалью на всесоюзном конкурсе студенческих работ.

Профессор С. Б. Стечкин пригласил молодого талантливого математика на работу в Свердловское отделение МИАН (ныне ИММ УрО РАН). В 1968 г. В. И. Бердышев защитил кандидатскую диссертацию, в 1988 — докторскую, в 1991 получил звание профессора. В 1994 г. он стал заместителем директора Института математики и механики УрО РАН, а в 1999 — директором института. В 2000 г. Виталий Иванович был избран членом-корреспондентом, в 2011 — действительным членом РАН.

Академик В.И. Бердышев — член президиума УрО РАН, член совета Российского фонда фундаментальных исследований, председатель Объединенного ученого совета УрО РАН по математике, механике и информатике, координатор работ по развитию вычислительных, информационных и телекоммуникационных ресурсов в Уральском отделении РАН, и это далеко не полный перечень его административных обязанностей.

Виталий Иванович — достойный представитель всемирно известной научной школы С. Б. Стечкина по теории функций и приближений. Несмотря на огромную административную нагрузку, он плодотворно работает в науке и вносит существенный вклад в теорию приближений и ее приложения.

Одним из его первых значительных результатов стал разработанный в 1967 г. оригинальный метод оценки снизу точной константы в неравенстве Джексона в пространствах L_p периодических функций. Он получил точное неравенство Колмогорова и нашел наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L на полуоси. На одном из своих семинаров С.Б.Стечкин поставил задачу о характеризации банаховых пространств, в которых оператор наилучшего приближения элементами выпуклого множества существования равномерно непрерывен по всей совокупности таких множеств. В цикле работ В.И. Бердышева получено решение как этой, так и других родственных задач.

С 1970-х гг. Виталий Иванович начал активно заниматься вопросами численного приближения больших массивов данных. Под его руководством построены компактные локальные и глобальные модели 30-километрового слоя земной атмосферы, отражающие температуру, плотность, направление и скорость движения воздуха; получены простые формулы, выражающие дальность полета движущегося тела как функцию от начальных географических координат, вектора скорости, атмосферных характеристик и аномалий гравитационного поля Земли.

С конца 1980-х гг. В. И. Бердышев в сотрудничестве со специалистами по прикладным проблемам управления занимался задачами навигации по геофизическим полям, разрабатывал методы определения местонахождения автономно движущегося объекта, его траектории и скорости. Им разработаны основные элементы теории аппроксимации геофизических полей для обеспечения наилучшей привязки летательного аппарата, развиты математические методы, которые лежат в основе построения алгоритмов поиска аппроксимации поля, оптимальной с точки зрения задачи навигации.

Большое внимание Виталий Иванович уделяет приложениям математики к медицине. В частности, по заказу немецких производителей имплантируемых кардиостимуляторов им был построен алгоритм оценки текущей физической нагрузки пациента по импедансу, измеряемому стимулятором, что позволяет регулировать частоту сердечных сокращений в соответствии с нагрузкой.

Научные заслуги Виталия Ивановича Бердышева отмечены премиями и наградами, в том числе орденом Дружбы.

Вместе с академиками Ю. С. Осиповым и А. Ф. Сидоровым В. И. Бердышев стал одним из инициаторов издания Трудов Института математики и механики УрО РАН. Сегодня Виталий Иванович — главный редактор этого журнала, отвечающего самым высоким требованиям к подобного рода научным изданиям.

В. И. Бердышев активно участвовал в организации летних школ-конференций, традицию проведения которых заложил С.Б.Стечкин по возвращении из Свердловска в Москву, чтобы иметь систематические научные контакты со своими учениками. С 1996 года Виталий Иванович стал главным организатором и вдохновителем этих школ.

Большое внимание В.И. Бердышев уделяет школьному математическому образованию, подготовке математической смены. Традиционно сотрудники института организуют математические олимпиады в Свердловской области, а также руководят работой очно-заочной математической школы. Благодаря этому математические таланты выявляются у ребят и развиваются со школьной скамьи.

Более полувека Виталий Иванович связан с математико-механическим факультетом Уральского университета. Он читал различные основные и специальные курсы: "Математический анализ", "Численные методы теории приближения функций", "Линейные топологические пространства", "Элементы выпуклого анализа", "Фракталы и всплески", "Сжатие и восстановление информации". При этом он, в частности, использует монографии, написанные им совместно с сотрудниками института, и привлекает способных студентов к научным исследованиям.

Около 10 лет Виталий Иванович работал на кафедре вычислительных методов и уравнений математической физики УГТУ-УПИ, читал курсы лекций для студентов различных специальностей радиотехнического факультета и вместе с В. А. Табуевой вел математический кружок.

Но главная забота и гордость академика В. И. Бердышева — конечно, вверенный ему Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН. Он внес большой вклад в его становление, в развитие вычислительных, информационных и телекоммуникационных ресурсов УрО РАН. Во многом благодаря его усилиям в непростые для науки годы институт не только не утратил своих позиций, но и укрепил их. По инициативе Виталия Ивановича в ИММ УрО РАН ежегодно проводится День математика и механика с участием всех математических институтов России в интерактивном режиме. Он отмечается в сентябре, в месяце, когда родились Иван Матвеевич Виноградов, Сергей Борисович Стечкин и Николай Николаевич Красовский. Виталий Иванович — очень динамичный человек, зачинатель многих дел. Он в частности инициатор и активный участник спортивной жизни института и межинститутских соревнований, в том числе ежегодной Спартакиады, в которой соревнуются представители институтов, входящих в Объединенный совет по математике, механике и информатике УрО РАН. Вызывают восхищение успехи Виталия Ивановича в спорте: в гимнастике, лыжах, настольном тенисе, водных лыжах. Многим помнятся совместные выходы на природу, особенно осенние походы за клюквой.

Коллеги и друзья Виталия Ивановича знают, что не менее чем в математике, он искусен в живописи. Постоянно пополняется созданная им портретная галерея, в которой особое место занимает великолепный портрет Сергея Борисовича Стечкина. А как хороши акварельные уральские пейзажи! Душа волнуется, когда глядишь на эти картины.

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, коллеги и друзья Виталия Ивановича глубоко уважают его за неуемную творческую энергию, преданность математике, активную жизненную позицию гражданина, ученого, педагога, руководителя, талант чувствовать и создавать прекрасное и желают ему крепкого здоровья, молодого задора, творческих удач, исполнения многочисленных замыслов, а также благополучия ему и его близким.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ В. И. БЕРДЫШЕВА[1]

157. Видимость объекта для наблюдателя с неточно заданными координатами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 21–28.
158. Видимость объекта для группы наблюдателей с неточно заданными координатами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 44–51.
159. Характеристика видимости движущейся точки // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 5. С. 588–590.
160. Движущийся объект и наблюдатель в банаховом пространстве // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 5. С. 595–597.
161. Задачи высокоточной навигации движущихся объектов по геофизическим полям // Ракетно-космическая техника: науч.-техн. сб. (14-е Макеевские чтения, посвящ. 90-летию акад. Н. А. Семихатова; Екатеринбург, 9 декабря 2008 г.). Екатеринбург: ФГУП “НПО автоматики им. Н. А. Семихатова”, 2009. Сер. 11, вып. 1. С. 92–97 (совм. с В. Б. Костоусовым).
162. Экстремальные задачи построения маршрутов // Актуальные проблемы математики, механики, информатики: сб. стат. конф. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. С. 3–7. (совм. с В. Б. Костоусовым).
163. Поиск траектории движения летательного аппарата по полю высот // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ’2009): тр. Междунар. науч. конф. (Нижний Новгород, 30 марта–3 апреля 2009 г.). Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. С. 389–392. (совм. с Я. В. Малыгиным).
164. Характеристика видимости объекта для группы наблюдателей с неточно заданной информацией // Актуальные проблемы математики, механики, информатики: материалы конф. (Ижевск, 1–3 марта 2010) / ИПМ УрО РАН. Ижевск, 2010. С. 13–17.

[1]Продолжение, начало см.: Список научных трудов В. И. Бердышева // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 8–14.

165. Относительная видимость объекта в задаче навигации. Relative visibility of an object in navigation problem // Математика в приложениях: тез. докл. Всерос. конф., приуроченной к 80-летию акад. С. К. Годунова (Новосибирск, 20–24 июля 2009 г.). Новосибирск, 2009. С. 43–44.
166. Navigation over geophysical fields // SSSS'2009: Proc. of Sun- Stechkin Summer School 2009 on Function Theory (China, Beijing, August 13–23). 2009. P. 1.
167. Движущийся объект и наблюдатель в задаче навигации по геофизическим полям // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: тез. докл. Всерос. шк.-конф. молод. исследователей и V Всеросс. конф., посвящ. памяти акад. А. Ф. Сидорова (13–18 сент. 2010 г., Абрау-Дюрсо) / ИММ УрО РАН . Екатеринбург, 2010. С. 21.
168. Объект и наблюдатель в банаховом пространстве // Теория приближений: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию С. Б. Стечкина (6.09.1920–22.11.1995). (Москва, 23–26 августа 2010). М.: МИАН – МГУ, 2010. С. 10–11.
169. Объект и группа наблюдателей в нормированном пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 87–92.
170. Объект и наблюдатель. Задача сопровождения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 7–19.
171. Задача сопровождения. Дифференцирование функции видимости // Докл. РАН. 2012. Т. 442, № 4. С. 459–461.
172. Характеристики скрытости движущегося объекта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 110–119.
173. Скрытость движущегося объекта от наблюдателя // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 1. С. 24–27.
174. Дифференцирование функции скрытости в случае выпуклого затеняющего множества // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 79–84.
175. Навигация по геофизическим полям и связанные с ней экстремальные задачи // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. памяти В. К. Иванова (31 окт. – 5 нояб. 2011 г.). Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011. С. 120–121.
176. Навигация по геофизическим полям и близкие задачи // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: тез. докл. VI-й Всерос. конф., посвящ. памяти А. Ф. Сидорова (10–16 сент. 2012 г., Абрау-Дюрсо) / ИММ УрО РАН . Екатеринбург, 2012. С. 15–16.
177. Навигация по геофизическим полям и связанные с ней задачи // Вопросы оптимизации вычислений (ISCOPL-XL): тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения академика В.М. Глушкова (30 сент.–4 окт. 2013 г., Кацивели) / Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины. Киев, 2013. С. 32.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ[1]

Р. Р. Акопян

На классе аналитических в полосе функций исследуются несколько взаимосвязанных экстремальных задач для оператора дифференцирования: наилучшего приближения оператора, вычисления его модуля непрерывности, оптимального восстановления оператора по заданным с ошибкой граничным значениям функции на прямой.

Ключевые слова: приближение операторов, оптимальное восстановление, аналитические функции.

R. R. Akopyan. Best approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in a strip.

On the class of functions analytic in a strip, we study a number of related extremal problems for the differentiation operator: the best approximation of the operator, computation of its modulus of continuity, and optimal recovery of the operator from boundary values of a function given with error on a straight line.

Keywords: approximation of operators, optimal recovery, analytic functions.

1. Постановка задач и основные результаты

Работа посвящена изучению нескольких взаимосвязанных экстремальных задач для оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций. Аналогичные задачи для оператора аналитического продолжения были решены ранее в работе [1]. В настоящей статье сохранены обозначения из [1] и используются некоторые вспомогательные утверждения.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть Y — положительное число, являющееся шириной полосы, которую, в свою очередь, будем обозначать Π_Y. Точнее, Π_Y — полоса, параллельная вещественной оси, точки которой имеют мнимую часть между нулем и Y, т. е.

$$\Pi_Y := \{z\colon 0 < \Im z < Y\}.$$

Через α и β обозначим произвольные положительные числа, сумма которых равна единице; через y — положительное число, определяемое равенством $y = \beta Y$. Ясно, что справедливо неравенство $0 < y < Y$. Введенные параметры α, β, y и Y связаны равенствами

$$\alpha = \frac{Y-y}{Y}, \quad \beta = 1-\alpha = \frac{y}{Y}.$$

Для произвольного вещественного числа η и функции f из $L^p(\mathbb{R}+i\eta)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим через $I^p_\eta(f)$ величину, определенную равенствами

$$I^p_\eta(f) := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x+i\eta)|^p\,dx\right)^{1/p}, & \text{в случае } 1 \le p < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f(x+i\eta)|\colon x\in\mathbb{R}\}, & \text{в случае } p = \infty. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 11-01-00462) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Пусть $H^p = H^p(\Pi_Y)$ — пространство Харди функций f, аналитических в полосе Π_Y, след которых на каждой прямой $\mathbb{R} + i\eta$, $0 < \eta < Y$, принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R} + i\eta)$ и для которых

$$\sup\{I_\eta^p(f)\colon 0 < \eta < Y\} < +\infty.$$

Для функции $f \in H^p$ будем полагать, что на границах полосы — прямых $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}+iY$ — заданы функции φ и ψ из L^p соответственно, являющиеся почти всюду некасательными пределами функции f, т. е. почти всюду справедливы равенства

$$\varphi(x) = \lim_{\eta\to+0} f(x+i\eta), \quad \psi(x) = \lim_{\eta\to Y-0} f(x+i\eta);$$

в дальнейшем для граничных значений будем использовать обозначения

$$f(x) := \varphi(x), \quad f(x+iY) := \psi(x).$$

В пространстве Харди H^p выделим класс $Q = Q_Y^p$ функций f, чьи граничные значения на прямой $\mathbb{R} + iY$ удовлетворяют неравенству $I_Y^p(f) \le 1$.

Задача о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства появилась в исследованиях С.Б. Стечкина в 1965 году [3]. В его работе [4] 1967 года была дана постановка задачи, приведены первые принципиальные результаты и дано решение задачи для операторов дифференцирования малого порядка. Подробную информацию об исследованиях задачи Стечкина и взаимосвязанных с ней экстремальных задач можно найти в обзорной работе В.В. Арестова [2]. В настоящей статье рассматривается задача наилучшего приближения оператора дифференцирования (первого порядка) функции на прямой $\mathbb{R}+iy$ линейными ограниченными операторами на классе Q функций, аналитических в полосе Π_Y. Точная постановка задачи такова.

Задача 1. Пусть $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}_y^p(N)$ — множество линейных ограниченных операторов из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R} + iy)$, нормы которых $\|T\| = \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\mapsto L^p(\mathbb{R}+iy)}$ не превосходит числа $N \ge 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{I_y^p(f' - Tf)\colon f \in Q\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора дифференцирования на классе Q. Соответственно величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T)\colon T \in \mathcal{L}(N)\right\} \tag{1.1}$$

есть наилучшее приближение оператора дифференцирования множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, на котором в (1.1) достигается нижняя грань.

Задача 1 тесно взаимосвязана с рядом экстремальных задач. Одной из них является следующая задача вычисления модуля непрерывности оператора дифференцирования на классе.

Задача 2. Функцию вещественного переменного $\delta \in [0, \infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{I_y^p(f')\colon f \in Q,\ I_0^p(f) \le \delta\right\}, \tag{1.2}$$

будем называть модулем непрерывности оператора дифференцирования на классе Q. Задача состоит в вычислении величины $\omega(\delta)$ и нахождении экстремальной функции (последовательности функций), на которой в (1.2) достигается верхняя грань.

Введем обозначения

$$\Delta(N) := \sup_{\delta\ge0}\left\{\omega(\delta) - N\delta\right\}, \quad N > 0;$$

$$l(\delta) := \inf_{N>0}\left\{E(N) + N\delta\right\}, \quad \delta \ge 0.$$

Следующее утверждение, связывающее величины (1.1) и (1.2), является частным случаем теоремы С.Б.Стечкина [4].

Теорема A. *Имеют место неравенства*

$$E(N) \geq \Delta(N), \quad N > 0; \tag{1.3}$$

$$\omega(\delta) \leq l(\delta), \quad \delta \geq 0. \tag{1.4}$$

Ниже будет показано, что в неравенствах (1.3) и (1.4) имеют место равенства.

Через $\Omega(\lambda, \mu)$ обозначим вещественнозначную функцию двух неотрицательных переменных λ, μ, определяемую равенством

$$\Omega(\lambda, \mu) = \sup \left\{ I_y^p(f') \colon I_0^p(f) \leq \lambda,\ I_Y^p(f) \leq \mu \right\}. \tag{1.5}$$

Задачи о вычислении величин (1.2) и (1.5) эквивалентны. Действительно, из их определений следуют равенства

$$\omega(\delta) = \Omega(\delta, 1), \quad \delta \geq 0; \quad \Omega(\lambda, \mu) = \mu\omega(\lambda/\mu), \quad \lambda \geq 0, \quad \mu > 0.$$

Также из определения (1.5) следует, что для функций пространства $H^p(\Pi_Y)$ справедливо точное неравенство

$$I_y^p(f') \leq \Omega(I_0^p(f), I_Y^p(f)).$$

Задачи восстановления значений оператора на элементах класса, принадлежащего области определения оператора, по информации об элементах класса, заданных с известной погрешностью, возникают в различных разделах математики и хорошо изучены. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}$ операторов. В качестве $\mathcal{R}$, как правило, берется одно из следующих множеств отображений: множество $\mathcal{O}$ всех однозначных отображений, множество $\mathcal{B}$ ограниченных операторов или множество $\mathcal{L}$ линейных операторов. Различным задачам оптимального восстановления, в том числе производных, на классах аналитических функций посвящена монография [5].

Задачи 1 и 2 тесно взаимосвязаны со следующей задачей оптимального восстановления производной аналитической в полосе функции по граничным значениям (на одной из граничных прямых), заданным с погрешностью.

З а д а ч а 3. Для числа $\delta \geq 0$ и оператора $T \in \mathcal{R}$ определим величину

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \sup \left\{ I_y^p(f' - Tq) \colon f \in Q,\ q \in L^p(\mathbb{R}),\ I_0^p(f - q) \leq \delta \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf \left\{ \mathcal{U}(T, \delta) \colon T \in \mathcal{R} \right\} \tag{1.6}$$

есть величина наилучшего (оптимального) восстановления оператора дифференцирования (производной аналитической функции) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданных с ошибкой δ. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — оператора, на котором в (1.6) достигается нижняя грань.

В следующей теореме приведено уточнение неравенства (1.4) и она является частным случаем общего утверждения, связывающего задачу о модуле непрерывности оператора и задачу Стечкина с задачами оптимального восстановления (см. [2]).

Теорема B. *Имеют место неравенства*

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \leq l(\delta), \quad \delta \geq 0. \tag{1.7}$$

Определим оператор (свертки) $D_\sigma = D_\sigma[y,Y]$, $\sigma \in \mathbb{R}$, из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$ формулой

$$(D_\sigma f)(x+iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{D}_\sigma(x-t)\, f(t)\, dt \tag{1.8}$$

с ядром

$$\mathrm{D}_\sigma(z) = \frac{1}{2Y i}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{\sigma(ix-y)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{x\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}\right]$$

$$= \frac{ie^{\sigma(ix-y)}}{2Y^2}\left[\frac{\sigma Y\sin\alpha\pi+\pi\cos\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{x\pi}{Y}+\cos\alpha\pi}+\frac{\pi\sin^2\alpha\pi}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{x\pi}{Y}+\cos\alpha\pi\right)^2}\right]. \tag{1.9}$$

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0<y<Y$ *и положительное число* N *представимо в виде*

$$N = e^{-\sigma y}\left|\alpha\sigma+\frac{1}{Y}\right|,\quad |\sigma|\geq\frac{\pi}{Y}\,\frac{1}{\sin\alpha\pi},\quad \sigma\in\mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Тогда для величины (1.1) *справедливо равенство*

$$E(N) = e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|.$$

При этом экстремальным в задаче (1.1) *оператором является оператор* D_σ, *определенный равенствами* (1.8), (1.9).

Теорема 2. *Пусть числа* y, Y *удовлетворяют неравенству* $0<y<Y$, *неотрицательное число* $\delta=\lambda/\mu$ — *условию*

$$|\ln\delta|\geq\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,. \tag{1.11}$$

Тогда для величин (1.2), (1.5) *и* (1.6) *справедливы равенства*

$$\omega(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta)=\frac{1}{Y}\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|\,,$$

$$\Omega(\lambda,\mu)=\frac{1}{Y}\,\lambda^\alpha\,\mu^\beta\left|\ln\frac{\lambda}{\mu}\right|.$$

При этом оптимальным методом восстановления в задаче (1.6) *является линейный ограниченный оператор* D_σ, *определенный равенствами* (1.8), (1.9), *в котором параметр* σ *задается соотношением*

$$\delta = e^{\sigma Y}.$$

2. Вспомогательные утверждения

Следующее утверждение о представлении функции, аналитической в полосе, через ее граничные значения применялось для построения экстремального оператора в работе автора [1, следствие 1]. Впрочем, оно является простым следствием известной формулы Пуассона.

Лемма 1. *Для произвольной функции f из класса Q, $\sigma \in \mathbb{R}$, справедливо равенство*

$$f(x+iy) = \frac{1}{2Y}\, e^{-\sigma y} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sigma(x-t)}\ \sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y} + \cos\alpha\pi}\, f(t)\, dt$$

$$+\ \frac{1}{2Y}\, e^{\sigma(Y-y)} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sigma(x-t)}\ \sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{(x-t)\pi}{Y} - \cos\alpha\pi}\, f(t+iY)\, dt. \tag{2.1}$$

Введя обозначения

$$g_{\pm}(x,y) := \frac{e^{-\sigma y}\ \sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\dfrac{x\pi}{Y} \pm \cos\alpha\pi}$$

и дифференцируя равенство (2.1) по переменной y, получим следующее утверждение.

Лемма 2. *Для произвольной функции f из класса Q, $\sigma \in \mathbb{R}$, справедливо равенство*

$$f'(x+iy) = \frac{1}{2Yi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(x-t)} \left[\frac{\partial}{\partial y} g_+(x-t,y) f(t) + e^{\sigma Y}\, \frac{\partial}{\partial y} g_-(x-t,y) f(t+iY)\right] dt. \tag{2.2}$$

Далее потребуются следующие свойства функций $g_{\pm}$.

Лемма 3. *Условие*

$$|\sigma| \ge \frac{\pi}{Y}\, \frac{1}{\sin\alpha\pi} \tag{2.3}$$

является необходимым и достаточным, при котором для произвольных $x \in \mathbb{R}$, $0 < y < Y$ функции $\dfrac{\partial g_{\pm}}{\partial y}$ не меняют знак и справедливы равенства

$$\Big\| \frac{\partial}{\partial y} g_+(\cdot,y) \Big\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2e^{-\sigma y}\, |\sigma(Y-y)+1|, \qquad \Big\| \frac{\partial}{\partial y} g_-(\cdot,y) \Big\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2e^{-\sigma y}\, |\sigma y+1|. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим ξ величину, определяемую равенством $\xi = \operatorname{ch}\dfrac{\pi x}{Y}$. Заметим, что $\xi \ge 1$ и, следовательно, $\xi \pm \cos\alpha\pi$ не обращается в нуль. Вычислив произведение $-\dfrac{Y}{\pi}\, e^{\sigma y}\, (\xi \pm \cos\alpha\pi)^2\, \dfrac{\partial}{\partial y} g_{\pm}(x,y)$, обращающееся в нуль одновременно с производными функций $g_{\pm}$, получим

$$\Big(\frac{\sigma Y}{\pi} \sin\alpha\pi + \cos\alpha\pi\Big)\xi \pm \Big(\frac{\sigma Y}{\pi} \sin\alpha\pi \cos\alpha\pi + 1\Big). \tag{2.5}$$

Если обозначить $v = \dfrac{\sigma Y}{\pi} \sin\alpha\pi$ и $v_0 = \cos\alpha\pi$, то выражения (2.5) примут вид

$$(v+v_0)\xi \pm (v\, v_0 + 1).$$

Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ или, что то же самое, для произвольного $\xi \ge 1$ выражения (2.5) не меняют знак тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$\Big|\frac{v+v_0}{1+v\, v_0}\Big| \ge 1.$$

Дробно-линейное выражение в последнем неравенстве задает автоморфизм единичного круга, поэтому это неравенство эквивалентно соотношению $|v| \ge 1$, т. е. условию (2.3).

Теперь, используя знакопостоянство функций $\dfrac{\partial}{\partial y} g_{\pm}(x,y)$ и меняя порядок интегрирования и дифференцирования, получаем

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial y} g_{\pm}(\cdot,y)\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial}{\partial y} g_{\pm}(t,y)\right| dt = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\mathbb{R}} g_{\pm}(t,y)\,dt\right|. \tag{2.6}$$

Вычислив в последнем выражении (2.6) интегралы (см., например, [1, лемма 1]) и производные, получим равенства (2.4). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для произвольного неотрицательного числа δ справедливо неравенство*

$$\omega(\delta) \ge Y^{-1}\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $p=\infty$ рассмотрим (целую) функцию, определяемую равенством $f_\sigma(z) = e^{i\sigma z}$, $\sigma\in\mathbb{R}$. На прямой $\mathbb{R}+i\eta$ справедливо тождество $|f_\sigma(x+i\eta)| \equiv e^{-\sigma\eta}$ и, следовательно, $I_\eta^\infty(f_\sigma) = e^{-\sigma\eta}$. Откуда вытекает, что при любом σ функция $e^{\sigma Y} f_\sigma$ принадлежит классу Q. Введя обозначение $\delta = e^{\sigma Y}$ и используя определение модуля непрерывности (1.2), выводим оценку $\omega(\delta) \ge I_y^\infty(e^{\sigma Y} f'_\sigma) = I_y^\infty(i\sigma\, e^{\sigma Y} f_\sigma) = |\sigma|\, e^{\sigma(Y-y)} = Y^{-1}\,\delta^\alpha |\ln\delta|$.

Для обоснования оценки снизу (2.7) при $1\le p<\infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{\sigma-h}^{\sigma+h} \varphi\Big(\frac{t-\sigma}{h}\Big) e^{izt} dt = e^{i\sigma z}\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)\, e^{ihzt}\,dt,$$

где $h>0$ и φ — неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция, с носителем в $[-1,1]$. Непосредственно из определения функции $f_{\sigma,h}$ следует равенство

$$I_\eta^p(f_{\sigma,h}) = h^{-1} e^{-\eta\sigma} I_{h\eta}^p(f_{0,1}).$$

Следовательно, функция $f_{\sigma,h} h e^{Y\sigma}/I_{hY}^p(f_{0,1})$ принадлежит классу Q. Для производной функции $f_{\sigma,h}$ имеют место соотношения

$$f'_{\sigma,h}(z) = \big(i\sigma f_{0,1}(hz) + ihf'_{0,1}(hz)\big)\ e^{i\sigma z}, \quad I_y^p(f'_{\sigma,h}(z)) \ge e^{-\sigma y}(h^{-1} I_{hy}^p(f_{0,1}) - I_{hy}^p(f'_{0,1})).$$

Используя обозначение $\delta = e^{\sigma Y}$ и определение модуля непрерывности (1.2), для произвольного положительного h выводим оценку

$$\omega(\delta) \ge I_y^p\Big(\frac{f'_{\sigma,h}\, h e^{Y\sigma}}{I_{hY}^p(f_{0,1})}\Big) \ge \delta^\alpha\, \frac{|\ln\delta|\, I_{hy}^p(f_{0,1}) - h I_{hy}^p(f'_{0,1})}{I_{hY}^p(f_{0,1})}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $h\to+0$, получим оценку (2.7). Лемма 4 доказана.

Теперь нетрудно получить и оценку снизу величины $\Delta(N)$.

Следствие 1. *Пусть положительное число N имеет представление* (1.10). *Тогда справедливо неравенство*

$$\Delta(N) \ge e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|. \tag{2.8}$$

Действительно, из определения величины $\Delta(N)$, леммы 4 и $\delta_\sigma = e^{\sigma Y}$ имеем

$$\Delta(N) = \sup_{\delta\ge0}\{\omega(\delta) - N\delta\} \ge \frac{1}{Y}\,\delta_\sigma^\alpha |\ln\delta_\sigma| - N\delta_\sigma = e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\right|.$$

Для оператора D_σ, определенного равенствами (1.8), (1.9), в терминах функций g_+ справедливо представление

$$D_\sigma f(x+iy) = \frac{1}{2Yi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(x-t)}\,\frac{\partial}{\partial y} g_+(x-t,y)\, f(t)\,dt. \tag{2.9}$$

Лемма 5. *Для оператора* D_σ, *определенного равенствами* (1.8), (1.9), *и числа* σ, *удовлетворяющего условию* (2.3), *имеют место неравенства*

$$U(D_\sigma) \le e^{\sigma(Y-y)}\Big|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\Big|, \quad \|D_\sigma\| \le e^{-\sigma y}\Big|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\Big|. \tag{2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (2.2) и формул (1.8), (1.9) следует, что

$$f'(x+iy) - (D_\sigma f)(x+iy) = \frac{e^{\sigma Y}}{2Yi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma(x-t)}\,\frac{\partial}{\partial y} g_-(x-t,y)\, f(t+iY)\, dt. \tag{2.11}$$

Соотношение (2.11) означает, что разность $f - A_\sigma f$ представима в виде свертки следа функции f на прямой $\mathbb{R} + iY$ с функцией U_σ, определенной формулой

$$\mathrm{U}_\sigma(x) = \frac{e^{\sigma Y}}{2Yi}\, e^{i\sigma x}\, \frac{\partial}{\partial y} g_-(x,y). \tag{2.12}$$

Для ядра оператора (1.9) и уклонения (2.12) по лемме 3 справедливы равенства

$$\|\mathrm{D}_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R})} = e^{-\sigma y}\Big|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\Big|, \quad \|\mathrm{U}_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R})} = e^{\sigma(Y-y)}\Big|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\Big|.$$

Отсюда, используя определение оператора (1.8) и представление уклонения (2.11), получим неравенства

$$I_y^p(D_\sigma f) \le e^{-\sigma y}\Big|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\Big|\, I_0^p(f), \quad I_y^p(f - D_\sigma f) \le e^{\sigma(Y-y)}\Big|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\Big|\, I_Y^p(f).$$

Откуда следует утверждение леммы 5.

Отметим, что неравенства (2.10) являются равенствами; экстремальны здесь функции f_σ (для $p=\infty$) и семейство функций $f_{\sigma,h}$ (для $1 \le p < \infty$), определенные в лемме 4. Этот факт следует из приведенных далее доказательств основных теорем.

Лемма 5 позволяет получить оценки сверху для величин $E(N)$ и $l(\delta)$.

Следствие 2. *Пусть положительное число* N *представимо в виде* (1.10). *Тогда для величины* (1.1) *справедливо неравенство*

$$E(N) \le e^{\sigma(Y-y)}\,\Big|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\Big|. \tag{2.13}$$

Следствие 3. *Пусть неотрицательное число* δ *удовлетворяет условию* (1.11). *Тогда для величины* $l(\delta)$ *справедливо неравенство*

$$l(\delta) \le \frac{1}{Y}\,\delta^\alpha\, |\ln\delta|\,. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствий 2 и 3. Согласно определению (1.1) величины $E(N)$ и неравенствам (2.10) имеем

$$E(N) = \inf\big\{U(T)\colon T \in \mathcal{L}_y^p(N)\big\} \le U(D_\sigma) \le e^{\sigma(Y-y)}\,\Big|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\Big|.$$

Соответственно из определения величины $l(\delta)$ и предыдущего неравенства следует, что

$$l(\delta) = \inf_{N>0}\{E(N) + N\delta\} \le e^{\sigma(Y-y)}\Big|\beta\sigma - \frac{1}{Y}\Big| + \delta e^{-\sigma y}\Big|\alpha\sigma + \frac{1}{Y}\Big|.$$

Выбрав в правой части последнего неравенства в качестве параметра σ величину $\dfrac{\ln\delta}{Y}$ и замечая, что при сделанных предположениях сумма модулей равна модулю суммы, получим неравенство (2.14).

3. Доказательства основных результатов

Объединяя вместе неравенства (1.3) теоремы A, (2.8) следствия 1 и (2.13) следствия 2, получим цепочку неравенств

$$e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|\le\Delta(N)\le E(N)\le e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|.$$

Откуда вытекает равенство

$$E(N)=e^{\sigma(Y-y)}\left|\beta\sigma-\frac{1}{Y}\right|.$$

Это означает, что и в (2.10) имеют место равенства, а оператор D_σ является экстремальным в задаче 1. Теорема 1 доказана.

Объединяя вместе неравенства (1.7) теоремы B, (2.7) леммы 4 и (2.14) следствия 3, получим цепочку неравенств

$$\frac{1}{Y}\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|\le\omega(\delta)\le\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta)\le\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta)\le l(\delta)\le\frac{1}{Y}\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|.$$

Откуда вытекает равенство

$$\omega(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta)=\frac{1}{Y}\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|.$$

В частности, для параметров σ и δ, связанных равенством $\delta=e^{\sigma Y}$, в цепочке

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)\le\mathcal{U}(D_\sigma,\delta)\le\sup\left\{I_y^p(f-D_\sigma f)+I_y^p(D_\sigma(f-q))\colon f\in Q,\,I_0^p(f-q)\le\delta\right\}$$
$$=U(D_\sigma)+\|D_\sigma\|\,\delta=\frac{1}{Y}\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|$$

все неравенства являются равенствами. Это означает экстремальность (линейного ограниченного) оператора D_σ в задаче 3. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 46–54.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.
3. **Стечкин С.Б.** Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. 1965. Vol. 26. no. 3-4. P. 225–230.
4. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып 2. С. 137–148.
5. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ. Inc., 2000. 229 p.

Акопян Роман Размикович
Поступила 14.10.2013
Озерский технологический ин-т НИЯУ МИФИ,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА — СЕГЕ ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина

Во множестве $\mathscr{F}_n$ тригонометрических полиномов порядка $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами рассматривается оператор Сеге D_θ^α, определенный при $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, соотношением $D_\theta^\alpha f_n(t) = \cos\theta\ D^\alpha f_n(t) - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n(t)$, в котором $D^\alpha f_n$ и $D^\alpha \widetilde{f}_n$ суть дробные производные Вейля (вещественного) порядка α полинома f_n и его сопряженного $\widetilde{f}_n$. В работе, в частности, доказано, что если $\alpha \geqslant n \ln 2n$, то для любого $\theta \in \mathbb{R}$ в пространствах L_p при всех $p \geqslant 0$ на множестве $\mathscr{F}_n$ имеет место точное неравенство $\|\cos\theta\ D^\alpha f_n - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n\|_{L_p} \leqslant n^\alpha \|f_n\|_{L_p}$. Для классических производных (натурального порядка $\alpha \geqslant 1$) это неравенство в равномерной норме ($p = \infty$) получил Г. Сеге (1928), а при $1 \leqslant p < \infty$ — А. Зигмунд (1931–1935). Для дробных производных (вещественного) порядка $\alpha \geqslant 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ его доказал А. И. Козко (1998).

Ключевые слова: тригонометрический полином, производная Вейля дробного порядка, неравенство Бернштейна, неравенство Сеге.

V. V. Arestov, P. Yu. Glazyrina. Bernstein—Szegö inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials.

On the set $\mathscr{F}_n$ of trigonometric polynomial of degree $n \geqslant 1$ with complex coefficients, we consider the Szegö operator D_θ^α defined by the relation $D_\theta^\alpha f_n(t) = \cos\theta\ D^\alpha f_n(t) - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n(t)$ for $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$; where $D^\alpha f_n$ and $D^\alpha \widetilde{f}_n$ are the Weyl fractional derivatives of (real) order α of the polynomial f_n and its conjugate polynomial $\widetilde{f}_n$. In particular, we prove that, if $\alpha \geqslant n \ln 2n$, then, for any $\theta \in \mathbb{R}$, the sharp inequality $\|\cos\theta\ D^\alpha f_n - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n\|_{L_p} \leqslant n^\alpha \|f_n\|_{L_p}$ holds in the spaces L_p for all $p \geqslant 0$ on the set $\mathscr{F}_n$. For classical derivatives (of integer order $\alpha \geqslant 1$), this inequality was obtained by Szegö (1928) in the uniform norm ($p = \infty$) and by Zygmund (1931–1935) for $1 \leqslant p < \infty$. A.I.Kozko (1998) proved this inequality for fractional derivatives of (real) order $\alpha \geqslant 1$ and $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Keywords: trigonometric polynomial, Weyl fractional derivative, Bernstein inequality, Szegö inequality.

1. Предыстория. Вспомогательные утверждения

1.1. Обозначения. Пусть $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n(\mathbb{P})$ есть множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.1}$$

порядка $n \geqslant 1$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ вещественных или поля $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ комплексных чисел. Полином $\widetilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kt - b_k \cos kt)$ называют сопряженным для полинома f_n.

На множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ рассмотрим функционал $\|f\|_p = \|f\|_{L_p}$ для $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, определенный соотношениями

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \max\{|f(t)| \colon t \in \mathbb{R}\} = \|f\|_{C_{2\pi}},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00462, 12-01-31495), Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

$$\|f\|_0 = \lim_{p \to +0} \|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(t)|dt\right).$$

1.2. Неравенства Бернштейна и Сеге для классических производных в равномерной норме. Во множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ выполняется известное неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_{C_{2\pi}} \leqslant n\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}), \tag{1.2}$$

все экстремальные полиномы которого имеют вид

$$a\cos nt + b\sin nt, \qquad a, b \in \mathbb{C}. \tag{1.3}$$

С. Н. Бернштейн получил неравенство (1.2) для полиномов с вещественными коэффициентами [1, п. 10]. Впрочем, в первоначальном варианте [2, п. 12] работы [1] он доказал это неравенство с константой n для нечетных и четных тригонометрических полиномов и как следствие с константой $2n$ на классе всех полиномов (1.1) из $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$. В авторских комментариях [3, п. 3.4] к работе [1] С. Н. Бернштейн пишет, что вскоре после появления работы [2] Э. Ландау сообщил ему, что неравенство (1.2) для общего вида (1.1) полиномов (с вещественными коэффициентами) является элементарным следствием неравенства для нечетных полиномов; это доказательство впервые было опубликовано в [4, § 10].

В 1914 году М. Рисс [5, п. 2; 6, § 2] получил неравенство (1.2) с наилучшей константой n (как на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$, так и на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$) с помощью известной интерполяционной формулы для производной тригонометрического полинома; в 1928 году Г. Сеге получил [7] более общий результат, который будет приведен в теореме B ниже.

Как следствие (1.2) при любых натуральных n и r имеет место точное неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_{C_{2\pi}} \leqslant n^r\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.4}$$

В дальнейшем неравенства (1.2) и (1.4) обобщались в разных направлениях. Г. Сеге в 1928 году доказал [7, формулы (1) и (1$'$)] (см. также [8, т. 2, гл. 10, § 3]) следующее утверждение.

Теорема A. *При любом $n \geqslant 1$ для любого вещественного θ на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ имеет место неравенство*

$$\left\|f_n'\cos\theta - \widetilde{f}_n'\sin\theta\right\|_\infty \leqslant n\|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.5}$$

а как следствие и неравенство

$$\left\|\sqrt{\left(f_n'\right)^2 + \left(\widetilde{f}_n'\right)^2}\,\right\|_\infty \leqslant n\|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.6}$$

Неравенства (1.5) *и* (1.6) *точные и обращаются в равенство лишь на полиномах* (1.3) *с коэффициентами $a, b \in \mathbb{R}$.*

Г. Сеге получил неравенство (1.5) с помощью интерполяционной формулы, обобщающей формулу М. Рисса [5; 6]. А именно, Г. Сеге доказал следующее утверждение [7, формула (10)] (см. также доказательство в [8, т. 2, гл. 10, § 3]).

Теорема B. *При $n \geqslant 1$ для любого вещественного θ на множестве тригонометрических полиномов $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ имеет место формула*

$$\widetilde{f}_n'(t)\cos\theta - f_n'(t)\sin\theta = \sum_{k=1}^{2n} \mu_k f_n(t + t_k), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{1.7}$$

в которой

$$t_k = t_k(\theta) = \frac{2k-1}{n}\pi + \frac{\theta}{n}, \qquad \mu_k = \mu_k(\theta) = \frac{(-1)^{k+1} + \sin\theta}{4n\sin^2(t_k/2)}.$$

Г. Сеге доказал [7] формулу (1.7) на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ вещественных полиномов. Из соображений линейности следует, что (1.7) имеет место и для полиномов $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ с комплексными коэффициентами. Для коэффициентов формулы (1.7) выполняется [7, формула (11)] равенство $\sum_{k=1}^{2n} |\beta_k| = n$, поэтому (1.7) влечет неравенство (1.5) как на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$, так и на $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$.

1.3. Неравенства Бернштейна и Сеге для дробных производных в равномерной норме. Производной Вейля (или дробной производной) вещественного порядка $\alpha \geqslant 0$ полинома f_n, записанного в виде (1.1), называют полином

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \Big(a_k \cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) + b_k \sin\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)\Big); \tag{1.8}$$

если число α натуральное, то дробная производная совпадает с классической: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. Обозначим через B_n^α наилучшую константу в неравенстве Бернштейна

$$\|D^\alpha f_n\|_\infty \leqslant B_n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.9}$$

для дробных производных на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$. П. И. Лизоркин [9, теорема 2] доказал, что если $\alpha \geqslant 1$, то $B_n^\alpha = n^\alpha$, т. е. для дробных производных порядка $\alpha \geqslant 1$ имеет место аналог неравенства (1.4). Неравенство (1.9) при $0 < \alpha < 1$ изучали Т. Банг [10], С. П. Гейсберг [11] (см. [12, теорема 19.10 и примечания к § 19, п. 8]) и Г. Вилмес [13, remark 4]. Наилучшими на данный момент являются оценки [13]

$$n^\alpha \leqslant B_n^\alpha \leqslant 2^{1-\alpha} n^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

А. И. Козко [14, corollary 1] распространил теорему A на дробные производные (1.8), а именно, получил для дробных производных следующее утверждение.

Теорема C. *При любом $n \geqslant 1$ для произвольного вещественного $\alpha \geqslant 1$ и любого вещественного θ на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ имеет место неравенство*

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \Big| D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta \Big| \leqslant n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.10}$$

а как следствие и неравенство

$$\bigg\| \sqrt{\big(D^\alpha f_n\big)^2 + \big(D^\alpha \widetilde{f}_n\big)^2}\, \bigg\|_\infty \leqslant n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.11}$$

Пусть $C_n^\alpha(\theta)$ и C_n^α суть наилучшие (т. е. наименьшие возможные) константы в неравенствах

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \Big| D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta \Big| \leqslant C_n^\alpha(\theta) \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.12}$$

$$\bigg\| \sqrt{\big(D^\alpha f_n\big)^2 + \big(D^\alpha \widetilde{f}_n\big)^2}\, \bigg\|_\infty \leqslant C_n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.13}$$

Неравенство (1.9) есть частный случай (1.12), а точнее, $B_n^\alpha = C_n^\alpha(0)$.

Утверждения теоремы C означают, что если $\alpha \geqslant 1$, то $C_n^\alpha = C_n^\alpha(\theta) = n^\alpha$ при любом $\theta \in \mathbb{R}$. Естественным является вопрос об условиях на параметры, при которых величины $C_n^\alpha(\theta)$ и C_n^α равны n^α. Полином $f_n(t) = \cos nt$ показывает, что $C_n^\alpha \geqslant C_n^\alpha(\theta) \geqslant n^\alpha$ для любых значений параметров. Следовательно, тот факт, что неравенство (1.10) или (1.11) не выполняется, означает, что константа в соответствующем неравенстве (1.12) или (1.13) будет больше n^α. Следующее утверждение для четных n доказал А. И. Козко [14, theorem 3]; в общем случае оно обосновано в [15, lemma 3] с помощью других соображений.

Теорема D. *Для* $n \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$ *при* $\theta = -\alpha\pi/2$ *для наилучшей константы в неравенстве* (1.12) *имеет место строгое неравенство* $C_n^\alpha(\theta) > n^\alpha$.

Из теоремы D следует, что при любом $n \geqslant 2$ для $0 < \alpha < 1$ неравенство (1.11) уже не имеет места, а точнее, наилучшая константа C_n^α в (1.13) обладает свойством $C_n^\alpha > n^\alpha$. О точных значениях величины $C_n^\alpha(\theta)$ при $0 \leqslant \alpha < 1$ известны лишь отдельные результаты (см. библиографию в [16; 15]).

А. И. Козко [14, lemma] для обоснования результатов теоремы C построил для оператора

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta \tag{1.14}$$

квадратурную формулу, обобщающую квадратурные формулы М. Рисса [5, 6] и Г. Сеге [7]. Эта формула имеет вид

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \mu_k(\alpha,\theta)(-1)^k f_n(t_k + t), \qquad t_k = \frac{\pi k}{n} + \frac{\alpha\pi}{2n} + \frac{\theta}{n}; \tag{1.15}$$

здесь

$$\mu_k(\alpha,\theta) = \biggl((-1)^{k+1}\sum_{\ell=1}^{n-1}((\ell+1)^\alpha - 2\ell^\alpha + (\ell-1)^\alpha)\cos\Bigl(\ell t_k - \frac{\alpha\pi}{2} - \theta\Bigr)$$
$$+ n^\alpha - (n-1)^\alpha + (-1)^{k+1}\cos\Bigl(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\Bigr)\biggr)\Bigl(4n\sin^2\frac{t_k}{2}\Bigr)^{-1}$$

в случае $2k + \alpha + 2\theta/\pi \neq 0\,(\mathrm{mod}\ 4n)$ и

$$\mu_k(\alpha,\theta) = \frac{1}{n}\biggl(\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^\alpha + \frac{n^\alpha}{2}\biggr)$$

в случае $2k + \alpha + 2\theta/\pi = 0\,(\mathrm{mod}\ 4n)$. При $\alpha \geqslant 1$ коэффициенты $\mu_k(\alpha,\theta)$ формулы (1.15) неотрицательные и $\sum_{k=0}^{2n-1}\mu_k(\alpha,\theta) = n^\alpha$.

Формула (1.14) справедлива для полиномов $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ с комплексными коэффициентами. Поэтому при любом $n \geqslant 1$ для произвольного вещественного $\alpha \geqslant 1$ и любого вещественного θ неравенство (1.10) на самом деле имеет место на множестве полиномов $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$; в этом случае оно обращается в равенство лишь на полиномах (1.3).

1.4. Неравенства Бернштейна и Сеге для дробных производных в классических интегральных нормах. В работе А. И. Козко [14, theorem 1] содержится такое утверждение.

Теорема E. *Предположим, что функция* φ *на полуоси* $[0,\infty)$ *не убывает и выпукла (вниз). Тогда при любом* $n \geqslant 1$ *для произвольного вещественного* $\alpha \geqslant 1$ *и любого вещественного* θ *на множестве* $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi}\varphi\left(\Bigl|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha\widetilde{f}_n(t)\sin\theta\Bigr|\right)dt \leqslant \int_0^{2\pi}\varphi(n^\alpha|f_n(t)|)\,dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}).$$

Последнее неравенство точное и на полиномах (1.3) *обращается в равенство. Если функция* φ *(строго) возрастает на* $[0,\infty)$, *то экстремальными являются только такие полиномы.*

Функция $\varphi(u) = u^p$ при $1 \leqslant p < \infty$ удовлетворяет условиям теоремы E, поэтому как частный случай теоремы выполняется такое утверждение.

Следствие 1. *Для всех* $n \geqslant 1,\ \alpha \geqslant 1,\ \theta \in \mathbb{R}$ *и* $p \in [1,\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| D^\alpha f_n \cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n \sin\theta \right\|_p \leqslant n^\alpha \left\| f_n \right\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}),$$

и, в частности, неравенства

$$\left\| D^\alpha f_n \right\|_p \leqslant n^\alpha \left\| f_n \right\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}),$$

$$\left\| D^\alpha \widetilde{f}_n \right\|_q \leqslant n^\alpha \left\| f_n \right\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.16}$$

Все три неравенства точные и обращаются в равенства лишь на полиномах (1.3).

Утверждения теоремы E и следствия 1 для классических производных целого порядка $\alpha \geqslant 1$ установил ранее А. Зигмунд [8, т. 2, гл. 10].

1.5. Неравенства Бернштейна и Сеге для классических производных в пространствах L_p, $0 \leqslant p < 1$. Пусть $\Phi^+ = \Phi^+(0,\infty)$ есть класс функций φ, определенных на $(0,\infty)$ и представимых в виде $\varphi(u) = \psi(\ln u)$, где функция $\psi(v) = \varphi(e^v)$ непрерывна, не убывает и выпукла на $(-\infty,\infty)$. Классу Φ^+ принадлежат, например, все неубывающие выпуклые функции, функции u^p при $p > 0$, $\ln u$, $\ln^+ u = \max\{0, \ln u\}$, $\ln(1+u^p)$ при $p > 0$. Исходя из свойств выпуклых функций, можно утверждать, что функция φ, определенная на $(0,\infty)$, принадлежит классу Φ^+ в том и только в том случае, если функция $u\varphi'(u)$ не убывает на $(0,\infty)$. Класс функций $\Phi^+ = \Phi^+(0,\infty)$ был введен в [17, 18] при изучении неравенства Бернштейна и его обобщений в пространствах L_p при $p \in [0,1)$ (и более общих пространствах). В [19] была показана естественность этого класса в данной тематике.

В [15, lemma 1] дано другое описание класса Φ^+. А именно, функция φ, определенная на полуоси $(0,\infty)$, принадлежит классу Φ^+ в том и только в том случае, если она имеет конечный или равный $-\infty$ предел $c = \lim\limits_{r\to+0} \varphi(r)$ в точке 0 справа и при доопределении $\varphi(0) = c$ функция $\phi(z) = \varphi(|z|)$ субгармонична в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В работе [18, следствие 6] содержится следующее утверждение, обоснованное без использования тех или иных квадратурных формул.

Теорема F. *Для функций* $\varphi \in \Phi^+$ *и любых целых* $n \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ *выполняется точное неравенство*

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|f_n^{(r)}(t)|)dt \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \varphi(n^r |f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.17}$$

На полиномах $f_n(t) = ae^{-int} + be^{int}$, $a, b \in \mathbb{C}$, *неравенство* (1.17) *обращается в равенство*; *если функция* $u\varphi'(u)$ *строго возрастает на* $(0,+\infty)$, *то других экстремальных полиномов нет.*

Следствие 2. *При* $0 \leqslant p \leqslant \infty$ *для целых* $n, r \geqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$\|f_n^{(r)}\|_p \leqslant n^r \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}); \tag{1.18}$$

неравенство точное и обращается в равенство лишь на полиномах (1.3).

Функция $\varphi(u) = \ln u$ и функции $\varphi(u) = u^p$ при $0 \leqslant p < \infty$ удовлетворяют условиям теоремы F. Поэтому при $0 \leqslant p < \infty$ утверждение следствия 2 содержится в теореме F. При $p = \infty$ неравенство (1.18) является неравенством Бернштейна (1.4). При $1 \leqslant p < \infty$ неравенство (1.18) доказал А. Зигмунд [8, т. 2, гл. 10]. Таким образом, при $1 \leqslant p < \infty$ имеется, по крайней мере, два доказательства (1.18).

В силу (1.16) для любых натуральных n, r и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливо не только неравенство (1.18), но также и (точное) неравенство

$$\|\widetilde{f}_n^{(r)}\|_{L_p} \leqslant n^r \|f_n\|_{L_p}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.19}$$

Как показано в [20, теоремы 3 и 5], неравенство (1.19), в отличие от (1.18), на случай $0 \leqslant p < 1$, вообще говоря, уже не переносится. А именно, если $r \geqslant n \ln 2n$, то неравенство (1.19) справедливо при всех $p \geqslant 0$. Для фиксированного же r при $n \to \infty$ наилучшая константа в аналоге неравенства (1.19) в пространстве L_0 ведет себя как 4^{ε_n}, $\varepsilon_n = n + o(n)$. Видно, что рост этой константы по n существенно больше, чем константы n^r в (1.19) при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1.6. Неравенство Бернштейна — Сеге для дробных производных в пространствах L_p, $0 \leqslant p < 1$. Для значений параметров $\theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим на $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ оператор Сеге

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \cos\theta\ D^\alpha f_n(t) - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n(t)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \Big(a_k \cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2} + \theta\Big) + b_k \sin\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2} + \theta\Big)\Big). \qquad (1.20)$$

В данной работе нас интересует в первую очередь неравенство

$$\|D_\theta^\alpha f_n\|_p \leqslant C_n^\alpha(\theta)_p\ \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}),$$

с наименьшей возможной константой $C_n^\alpha(\theta)_p$ при $0 \leqslant p \leqslant \infty$. Как уже было сказано выше, А. И. Козко [14] доказал, что для всех $n \geqslant 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ в случае $\alpha \geqslant 1$

$$C_n^\alpha(\theta)_p = n^\alpha. \qquad (1.21)$$

Приведем известные порядковые результаты роста величины $C_n^\alpha(\theta)_p$ при $n \to \infty$ и фиксированных остальных параметрах. В работах Э. С. Белинского, И. Р. Лифлянда [21] и К. Руновского, Г.-Ю. Шмайссера [22, theorem 5.3, theorem 5.4] доказано, что $C_n^\alpha(\theta)_p \asymp n^\alpha$ для $\theta \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $\alpha > (1/p-1)_+ = \max\{0, 1/p-1\}$. Э. С. Белинский и И. Р. Лифлянд [21] также установили, что $C_n^\alpha(0)_p \asymp n^{1/p-1}$ для $0 < p < 1$, $0 < \alpha < 1/p-1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, и $C_n^\alpha(0)_p \asymp n^{1/p-1} \log^{1/p} n$ для $0 < p < 1$, $\alpha = 1/p-1 \notin \mathbb{N}$. При $\alpha = 0$ А. И. Козко [14, theorem 5] доказал, что $C_n^0(0)_p \asymp n^{(1/p-1)_+}$ для всех $p > 0$, А. О. Леонтьева [23, теорема 1] доказала, что $C_n^0(0)_0 \asymp 4^n n^{-1/2}$. В монографии А. Зигмунда [8, Т. 1, гл. 2, § 12] показано, что $C_n^0(\pi/2)_\infty \asymp \log n$; точное значение $C_n^0(\pi/2)_\infty$ нашел Л. В. Тайков [24].

Определим величину $\alpha(n)$, $n \geqslant 1$, соотношениями

$$\alpha(1) = 0; \qquad \alpha(n) = \frac{\ln 2n}{\ln(n/(n-1))}, \qquad n \geqslant 2.$$

Важную роль в дальнейшем будет играть условие

$$\alpha \geqslant \alpha(n). \qquad (1.22)$$

Имеем $1/n < \ln(n/(n-1)) < 1/(n-1)$. Поэтому условие (1.22) будет выполняться, если выполняется более прозрачное (и весьма близкое) ограничение $\alpha \geqslant n \ln(2n)$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Если порядок дробной производной α удовлетворяет условию (1.22), то для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ при любом вещественном θ имеет место точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta\right|\right) dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(n^\alpha\ |f_n(t)|\right) dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \qquad (1.23)$$

На полиномах $a\cos nt + b\sin nt$, $a, b \in \mathbb{C}$, это неравенство обращается в равенство; если функция $u\varphi'(u)$ строго возрастает на $(0, +\infty)$, то других экстремальных полиномов нет.

Как частный случай теоремы 1 справедливо такое утверждение.

Теорема 2. *Если порядок α дробной производной удовлетворяет условию* (1.22), *то для* $0 \leqslant p < \infty$ *при произвольном вещественном θ имеет место точное неравенство*

$$\left\| D^\alpha f_n \cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n \sin\theta \right\|_p \leqslant n^\alpha \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.24}$$

На полиномах $a\cos nt + b\sin nt$, $a, b \in \mathbb{C}$, *неравенство* (1.24) *обращается в равенство*; *при* $0 < p < \infty$ *других экстремальных полиномов нет.*

Согласно теореме 2 при $n \geqslant 1$ для значений параметра α, удовлетворяющих условию (1.22), при любом вещественном θ равенство (1.21) справедливо и в случае $0 \leqslant p < 1$.

Интерес представляет неравенство (1.24) при $\theta = 0$, т. е. неравенство

$$\|D^\alpha f_n\|_p \leqslant n^\alpha \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.25}$$

В соответствии с (1.4) для классических производных оно выполняется при любом натуральном α, т. е. $\alpha \geqslant 1$. Можно было бы ожидать, что оно выполняется для всех вещественных $\alpha \geqslant 1$. Однако этот факт не имеет места. Согласно теореме 2 неравенство (1.25) заведомо выполняется при условии (1.22). Вычисления на компьютере позволяют высказать гипотезу, что неравенства (1.24) и (1.25) выполняются для вещественных α в том и только в том случае, если выполнено более слабое в сравнении с (1.22) ограничение $\alpha \geqslant 2(n-1)$. В последнем разделе работы эта гипотеза будет подтверждена при $n = 2$.

2. Редукция к задачам для алгебраических многочленов на единичной окружности комплексной плоскости

Формула

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}) \tag{2.1}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов порядка n и множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов степени $2n$ (см., к примеру, [8, т. 2, гл. 10]). Используя этот факт, можно переписать неравенство (1.23) для тригонометрических полиномов в виде соответствующего неравенства для алгебраических многочленов (на единичной окружности комплексной плоскости). Эти неравенства и будут изучаться ниже.

2.1. Операция композиции Сеге на множестве алгебраических многочленов. Пусть $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ есть множество алгебраических многочленов степени (не выше) $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами. На множестве $\mathscr{P}_n$ рассмотрим функционал $\|P_n\|_p = \|P_n\|_{H_p}$, определенный в зависимости от значений параметра p соотношениями

$$\|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| P_n\left(e^{it}\right) \right|^p dt \right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|P_n\|_p = \max\left\{ \left| P_n\left(e^{it}\right) \right| : t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\|P_n\|_0 = \lim_{p \to +0} \|P_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln\left| P_n\left(e^{it}\right) \right| dt \right).$$

Для многочленов

$$\Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \binom{n}{k} z^k, \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} z^k \tag{2.2}$$

многочлен

$$(\Lambda_n P_n)(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \binom{n}{k} z^k \tag{2.3}$$

называется композицией Сеге многочленов Λ_n и P_n. Свойства композиции Сеге можно найти в [26, отд. V; 27, гл. IV], см. также работы [28; 29] и приведенную в них библиографию. При фиксированном Λ_n композиция Сеге (2.3) является линейным оператором в $\mathscr{P}_n$. Для композиции Сеге многочленов справедливо следующее утверждение [25, теорема 1].

Теорема G. *При любом $n \geqslant 1$ для функций $\varphi \in \Phi^+$ и любых двух многочленов на множестве $\mathscr{P}_n$ справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|)dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(\|\Lambda_n\|_0 \ |P_n(e^{it})|)dt. \tag{2.4}$$

Для функции $\varphi(u) = \ln u$ неравенство (2.4) принимает вид

$$\|\Lambda_n P_n\|_0 \leqslant \|\Lambda_n\|_0 \ \|P_n\|_0.$$

Это неравенство в несколько иной форме было ранее доказано в [29, теорема 7]. Для любого Λ_n на многочленах $P_n(z) = c(1+z)^n,\ c \in \mathbb{C}$, оно обращается в равенство.

Пусть Ω_n^+, Ω_n^- и $\Omega_n^1 = \Omega_n^+ \bigcap \Omega_n^-$ суть множества многочленов $\Lambda_n \in \mathscr{P}_n$, все n нулей которых лежат в единичном круге $|z| \leqslant 1$, в области $|z| \geqslant 1$ или на единичной окружности соответственно. Положим $\Omega_n = \Omega_n^+ \bigcup \Omega_n^-$. В силу известной формулы Пуассона—Йенсена (см., например, [26, отд. III, задача 175; 31, гл. VI, § 4]) имеем

$$\|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_n|, \qquad \Lambda_n \in \Omega_n^+; \qquad \|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_0|, \qquad \Lambda_n \in \Omega_n^-;$$

$$\|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_n| = |\lambda_0|, \qquad \Lambda_n \in \Omega_n^1. \tag{2.5}$$

Обозначим символами Ω_n^+, Ω_n^-, Ω_n^1 и Ω_n также множество операторов (2.3), порожденных многочленами Λ_n из соответствующих классов.

Следующее утверждение является уточнением теоремы G, хотя и было получено ранее (см. [18, теорема 4]).

Теорема H. *При любом $n \geqslant 1$ для операторов $\Lambda_n \in \Omega_n^1$ и функций $\varphi \in \Phi^+$ на множестве $\mathscr{P}_n$ выполняется неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|)dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(c_n \ |P_n(e^{it})|)dt, \qquad P_n \in \mathscr{P}_n, \tag{2.6}$$

$$c_n = \|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_n| = |\lambda_0|.$$

Неравенство (2.6) *точное и на многочленах*

$$P_n(z) = az^n + b, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \tag{2.7}$$

обращается в равенство.

При определенных условиях на многочлен Λ_n и функцию φ других экстремальных многочленов в (2.6), кроме (2.7), нет. При фиксированных $A \in \mathbb{C},\ \phi \in \mathbb{R}$ многочлен

$$I_n(z) = A(ze^{-i\phi}+1)^n = Ae^{-in\phi}(z+e^{i\phi})^n = A\sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} e^{-ik\phi} \tag{2.8}$$

по формуле (2.3) порождает оператор

$$I_n P_n(z) = A \sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{k} e^{-ik\phi} z^k = A P_n(e^{-i\phi} z), \qquad P_n \in \mathscr{P}_n,$$

для которого, очевидно, в неравенстве (2.6) экстремальным будет любой многочлен. При $n \geqslant 2$ многочлену Λ_n, определенному в (2.2), сопоставим многочлен

$$\underline{\Lambda}_{n-2}(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_{k+1} \binom{n-2}{k} z^k \tag{2.9}$$

степени $n-2$; важную роль в исследовании множества экстремальных многочленов неравенства (2.6) играет свойство

$$\underline{\Lambda}_{n-2} \in \Omega_{n-2}. \tag{2.10}$$

Следующее утверждение содержится в [18, теорема 2].

Теорема I. *Если при* $n \geqslant 2$ *функция* $\varphi \in \Phi^+$ *и многочлен* $\Lambda_n \in \Omega_n^1$ *обладают следующими свойствами*: *функция* $u\varphi'(u)$ *строго возрастает на* $(0, +\infty)$, *многочлен* Λ_n *не имеет вид* (2.8) *и выполнено условие* (2.10), *то экстремальными в* (2.6) *являются лишь многочлены* (2.7).

2.2. Представление оператора (1.20) **в виде композиции Сеге.** Убедимся, что оператор (1.20) можно записать в виде композиции Сеге алгебраических многочленов (степени $2n$). Полином $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ наряду с формулой (1.1) можно записать в экспоненциальной форме

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{-ikt} + c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikt}; \tag{2.11}$$

коэффициенты представлений (1.1) и (2.11) будут связаны соотношениями

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \qquad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n; \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Отметим, что формулу (2.11) можно записать в виде

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}), \qquad P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} z^k; \tag{2.12}$$

это как раз и есть формула (2.1).

Найдем выражение для оператора дробного дифференцирования и оператора Сеге на тригонометрических полиномах $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$, записанных в экспоненциальной форме (2.11). При $k \geqslant 1$ для функций

$$e_k^+(t) = e^{ikt}, \qquad e_k^-(t) = e^{-ikt}$$

в соответствии с определением сопряженного полинома имеем

$$\widetilde{e_k^+}(t) = -ie^{ikt} = e^{-i\pi/2} e^{ikt}, \qquad \widetilde{e_k^-}(t) = ie^{-ikt} = e^{i\pi/2} e^{-ikt}.$$

Исходя же из формулы (1.8), находим

$$(D^\alpha e_k^+)(t) = k^\alpha e^{i\frac{\alpha\pi}{2}} e^{ikt}, \qquad D^\alpha e_k^-(t) = k^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} e^{-ikt}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{i\pi/2} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-i\pi/2} e^{ikt},$$

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} c_{-k} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{i\frac{\alpha\pi}{2}} c_k e^{ikt}.$$

Отсюда нетрудно получить выражение и для оператора Сеге (1.20):

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{-i\left(\theta+\frac{\alpha\pi}{2}\right)} c_{-k} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{i\left(\theta+\frac{\alpha\pi}{2}\right)} c_k e^{ikt}. \tag{2.13}$$

Полином (2.13) имеет вид $D_\theta^\alpha f_n(t) = e^{-int} G_{2n}(e^{it})$, где

$$G_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} c_{-k} k^\alpha e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} c_k k^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n+k}.$$

Многочлен G_{2n} является композицией Сеге (см. определение (2.3)) многочлена

$$\Lambda_{2n}^\alpha(z) = \Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(z) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \binom{2n}{n-k} e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \binom{2n}{n+k} e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n+k} \tag{2.14}$$

и многочлена P_{2n} из (2.12). Итак, для полинома (2.12) справедлива формула

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = e^{-int} \left(\Lambda_{2n}^\alpha P_{2n}\right)(e^{it}); \tag{2.15}$$

тем самым, оператор (1.20) представлен в виде композиции Сеге алгебраических многочленов.

Теорема 3. *При любом $n \geqslant 1$ для функций $\varphi \in \Phi^+$ и любых вещественных α и θ справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta\right|\right) dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(\|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0 \, |f_n(t)|\right) dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как частный случай теоремы G справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_{2n}^\alpha P_{2n})(e^{it})|) dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(\|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0 \, |P_{2n}(e^{it})|\right) dt, \qquad P_{2n} \in \mathscr{P}_{2n}. \tag{2.17}$$

В силу соотношений (2.15) и (2.1) неравенство (2.17) на множестве $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов порядка $2n$ совпадает с неравенством (2.16) на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов порядка n. $\square$

2.3. Исследование нулей многочлена (2.14)**.** Приведем достаточные условия, при которых все $2n$ нулей многочлена (2.14) лежат на единичной окружности $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ или, что то же самое, все $2n$ нулей полинома

$$e^{-int}\Lambda_{2n}^\alpha(e^{it}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k} k^\alpha e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k} k^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} e^{ikt}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k} k^\alpha \cos(kt + \pi\alpha/2 + \theta) \tag{2.18}$$

вещественные.

Лемма 1. *Для $n \geqslant 1$,*

$$\alpha \geqslant \alpha(n), \tag{2.19}$$

при любом вещественном θ все $2n$ нулей многочлена (2.14) *лежат на единичной окружности.*

Для обоснования леммы 1 воспользуемся следующим утверждением Пойа [30].

Теорема J. *Если* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$,

$$0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n,$$

то тригонометрические полиномы

$$\lambda\bigl(a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt\bigr) - \mu\bigl(a_1 \sin t + \cdots + a_n \sin nt\bigr), \tag{2.20}$$

$$\mu\bigl(a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt\bigr) + \lambda\bigl(a_1 \sin t + \cdots + a_n \sin nt\bigr)$$

имеют только вещественные нули, которые перемежаются.

Доказательство леммы 1. В случае $n = 1$ утверждение леммы очевидно.

Пусть $n \geqslant 2$. Утверждение леммы 1 эквивалентно тому, что все $2n$ нулей тригонометрического полинома (2.18) вещественные. Имеем

$$\cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\cos kt - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\sin kt.$$

Следовательно, полином (2.18) имеет вид (2.20) с коэффициентами

$$a_0 = 0, \qquad a_k = \binom{2n}{n+k} k^\alpha \tag{2.21}$$

и значениями параметров

$$\lambda = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right), \qquad \mu = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right).$$

Убедимся, что при выполнении условия (2.19) коэффициенты (2.21) возрастают. Очевидно, что при $\alpha \geqslant 0$, $n > 1$ отношение

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha \frac{(n+k)!(n-k)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha \frac{(n-k)}{(n+k+1)}$$

по $k \in [1, n-1]$ убывает. Поэтому если

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^\alpha \frac{1}{2n} > 1 \qquad \text{или, что то же самое,} \qquad \alpha > \alpha(n) = \frac{\ln 2n}{\ln(n/(n-1))}, \tag{2.22}$$

то коэффициенты (2.21) по k возрастают. Итак, при выполнении условия (2.22) полином (2.18) удовлетворяет условиям теоремы J, а потому все его $2n$ корней вещественные (к тому же, все различные). Для $\alpha = \alpha(n)$ утверждение леммы 1 легко обосновать, исходя из соображений непрерывности, например, с помощью теоремы Гурвица (см. [31, гл. IV, § 3]). □

2.4. Доказательство теоремы 1. Вначале воспользуемся утверждением теоремы 3. Согласно лемме 1 при выполнении условия (2.19) все $2n$ нулей многочлена (2.14) лежат на единичной окружности, т.е. $\Lambda_{2n}^\alpha \in \Omega_{2n}^1$. Старший коэффициент многочлена (2.14) есть $n^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}$. В силу формулы (2.5) для константы в неравенстве (2.16) справедлива формула $\|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0 = n^\alpha$. Так что в условиях теоремы 1 неравенство (2.16) совпадает с неравенством (1.23).

При выполнении условия (2.19) многочлен (2.14) удовлетворяет условиям теоремы H. Поэтому неравенство (2.17) на многочленах $c_n z^{2n} + c_{-n}$, $c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}$, обращается в равенство. А следовательно, неравенство (1.23) обращается в равенство на полиномах

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}, \qquad c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}, \tag{2.23}$$

или, что то же самое, на полиномах (1.3).

Для обоснования свойства единственности полиномов (2.23) воспользуемся теоремой I. При $n \geqslant 2$ многочлену (2.14) по формуле (2.9) соответствует многочлен

$$\Lambda^{\alpha}_{2(n-1)}(z) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha} \binom{2(n-1)}{n-k-1} e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n-k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha} \binom{2(n-1)}{n+k-1} e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n+k-1}; \quad (2.24)$$

это есть тот же многочлен (2.14), соответствующий порядку полиномов $n-1$. Нетрудно понять, что правая часть условия (2.19) по n растет. Поэтому если выполнено условие (2.19), то нули многочлена (2.24) лежат на единичной окружности комплексной плоскости, т. е. $\Lambda^{\alpha}_{2(n-1)} \in \Omega_{2(n-1)}$. Если $n = 1$, то $\Lambda^{\alpha}_{2(n-1)} \equiv 0$, а значит, также выполняется свойство (2.10). Поэтому если функция $u\varphi'(u)$ на $(0, +\infty)$ возрастает, то в силу теоремы I при всех $n \geqslant 1$ в неравенстве (1.23) других экстремальных полиномов, кроме (2.23), нет. Теорема 1 доказана. $\square$

3. Неравенство Бернштейна — Сеге для полиномов второго порядка

3.1. Формулировка результатов. В этом разделе исследуются неравенства (1.23) и (1.24) на множестве тригонометрических полиномов второго порядка. Точнее, будут даны необходимые и достаточные условия на параметры $\alpha \geqslant 0$ и θ для того, чтобы величина $C_2^{\alpha}(\theta)_0 = \|\Lambda_4^{\alpha}\|_0$ равнялась 2^{α}. Результаты раздела содержатся в следующих двух утверждениях.

Лемма 2. *Пусть*

$$d(\alpha,\theta) = 4^{-\alpha}(4^{\alpha}-4)^3 - 108\sin^2\Big(\frac{\pi(\alpha-1)}{2}+\theta\Big), \qquad \alpha \in [1,2], \qquad \theta \in [0,\pi).$$

Для каждого $\theta \in (0,\pi)$ уравнение

$$d(\alpha,\theta) = 0$$

имеет единственное решение $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1,2)$, при этом

$$d(\alpha,\theta) < 0 \text{ при } \alpha \in [1,\alpha_2(\theta)) \qquad \text{и} \qquad d(\alpha,\theta) > 0 \text{ при } \alpha \in (\alpha_2(\theta),2]. \quad (3.1)$$

Для $\theta = 0$

$$d(\alpha,0) < 0 \text{ при } \alpha \in (1,2) \qquad \text{и} \qquad d(1,0) = d(2,0) = 0.$$

Теорема 4. *Если $\theta = 0$, то*

$$C_2^{\alpha}(0)_0 = 2^{\alpha} \text{ при } \alpha = 1 \text{ и } \alpha \geqslant 2, \qquad C_2^{\alpha}(0)_0 > 2^{\alpha} \text{ при } \alpha \in [0,1)\cup(1,2).$$

Если $\theta \in (0,\pi)$, то

$$C_2^{\alpha}(\theta)_0 = 2^{\alpha} \text{ при } \alpha \geqslant \alpha_2(\theta), \qquad C_2^{\alpha}(\theta)_0 > 2^{\alpha} \text{ при } \alpha \in [0,\alpha_2(\theta)).$$

3.2. Доказательство леммы 2. Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

1. Сначала разберем случай $\theta = 0$. В этом случае

$$d(\alpha) = d(\alpha,0) = \frac{(4^{\alpha}-4)^3}{4^{\alpha}} - 108\sin^2\Big(\frac{\pi(\alpha-1)}{2}\Big).$$

Хорошо известное неравенство $\sin x > 2x/\pi$, $x \in (0,\pi/2)$, влечет оценку

$$d(\alpha) < q(\alpha) = \frac{(4^{\alpha}-4)^3}{4^{\alpha}} - 108(\alpha-1)^2, \qquad \alpha \in (1,2).$$

Имеем

$$q'(\alpha) = 2\ln 4\left(4^{2\alpha} - 6\cdot 4^{\alpha} + 32/4^{\alpha}\right) - 216(\alpha-1),$$

$$q''(\alpha) = 4\ln^2 4\,(4^\alpha(4^\alpha - 3) - 16/4^\alpha) - 216.$$

Из последнего выражения видно, что $q''(\alpha)$ возрастает по $\alpha \in [1,2]$. Следовательно, $q'(\alpha)$ (строго) выпукла вниз, при этом $q'(1) = 0$, $q'(2) > 0$. Отсюда вытекает, что функция $q(\alpha)$ строго возрастает в точке $\alpha = 2$ и меняет характер монотонности на промежутке $[1,2]$ не более одного раза. Но так как $q(1) = q(2) = 0$, то $d(\alpha) < q(\alpha) < 0$ для $\alpha \in (1,2)$. Итак, мы доказали утверждение леммы для $\theta = 0$.

2. Пусть $\theta \in (0, \pi/2)$. Введем обозначения

$$g(\alpha) = \frac{(4^\alpha - 4)^3}{4^\alpha}, \qquad h(\alpha,\theta) = 108\sin^2\Big(\frac{\pi(\alpha-1)}{2} + \theta\Big) = h\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi}, 0\Big).$$

На промежутке $\alpha \in [1, 2 - 2\theta/\pi]$ функция $h(\alpha,\theta)$ строго возрастает по θ, поэтому имеем

$$d(\alpha,\theta) < g(\alpha) - h(\alpha, 0) = d(\alpha, 0) \leqslant 0.$$

На промежутке $\alpha \in [2 - 2\theta/\pi, 2]$ функция $g(\alpha)$ возрастает, $h(\alpha,\theta)$ убывает по α и

$$d(2,\theta) = g(2) - h(2,\theta) = 108 - 108\sin^2\Big(\frac{\pi}{2} + \theta\Big) > 0.$$

Следовательно, существует единственное $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1,2)$ со свойством (3.1). Дополнительно в этом случае имеем $\alpha_2(\theta) \in (2 - 2\theta/\pi, 2)$.

3. Пусть $\theta \in [\pi/2, \pi)$. В этом случае на промежутке $\alpha \in [1, 3 - 2\theta/\pi]$ функция $g(\alpha)$ возрастает, $h(\alpha,\theta)$ убывает по α, причем $g(1) = 0$, $h(3 - 2\theta/\pi, \theta) = 0$, поэтому существует единственное $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1, 3 - 2\theta/\pi)$ такое, что $d(\alpha,\theta) < 0$, $\alpha \in [1, \alpha_2(\theta))$, $d(\alpha,\theta) > 0$, $\alpha \in (\alpha_2(\theta), 3 - 2\theta/\pi)$. Для $\alpha \in (3 - 2\theta/\pi, 2)$ имеем $\alpha + 2\theta/\pi - 2 \in (1,2)$, поэтому

$$d(\alpha,\theta) = g(\alpha) - h\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi} - 2, 0\Big) < g\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi} - 2\Big) - h\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi} - 2, 0\Big) \leqslant 0.$$

Таким образом, существует единственное $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1,2)$ со свойством (3.1). Дополнительно в этом случае имеем $\alpha_2(\theta) \in (1, 3 - 2\theta/\pi)$. Лемма доказана. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 4. Для $n = 2$ и $\alpha > 0$ рассмотрим многочлен (2.14):

$$\Lambda_4^\alpha(z) = 2^\alpha e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} + 4e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)}z + 4e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}z^3 + 2^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}z^4 = b_0 + b_1 z + b_3 z^3 + b_4 z^4.$$

Многочлен Λ_4^α обладает свойством $\Lambda_4^\alpha(z) = z^4\overline{\Lambda_4^\alpha(1/\overline{z})}$. Поэтому либо все нули Λ_4^α лежат на границе круга $B = \{z : |z| < 1\}$, либо Λ_4^α имеет нули как в круге B, так и в области $|z| > 1$. Если все нули Λ_4^α лежат на границе B, то $C_2^\alpha(\theta) = 2^\alpha$, в противном случае $C_2^\alpha(\theta) > 2^\alpha$.

Исследуем число нулей Λ_4^α в открытом круге B. Согласно теореме (45,2) из [27] многочлены Λ_4^α и

$$Q(z) = 4\overline{b_4} + 3\overline{b_3}z + \overline{b_1}z^3 = 4\cdot 2^\alpha e^{-(\pi\alpha/2+\theta)} + 3\cdot 4e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)}z + 4e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}z^3$$

имеют одинаковое число нулей в круге B. Поэтому далее мы будем исследовать многочлен Q. Для удобства вычислений умножим Q на $e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}/4$, получим многочлен

$$Q_1(z) = 2^\alpha + 3z + e^{i(\pi\alpha+2\theta)}z^3 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3.$$

Рассмотрим отдельно три случая.

1. Если $\alpha \in [0,1)$ или $\alpha \geqslant 2$, то, применяя теорему Руше, легко убедиться, что $Q_1(z)$ имеет один нуль в B при $\alpha \in [0,1)$ и не имеет нулей в B при $\alpha \geqslant 2$.

2. Если $\alpha = 1$, то $Q_1(z) = 2 + 3z + e^{i(\pi+2\theta)}z^3$. По лемме (42,1) из [27] число нулей в круге B многочлена Q_1 равно числу нулей в B многочлена

$$Q_2(z) = 3(1 + 2z - e^{i(\pi+2\theta)}z^2).$$

Но если z_1, z_2 — нули Q, то по формулам Виета $z_1 z_2 = -e^{-i(\pi+2\theta)}$, $z_1 + z_2 = 2e^{-i(\pi+2\theta)}$. Следовательно, если $\theta = 0$, то многочлен Q_2 не имеет нулей в B, а если $\theta \in (0,\pi)$, то Q_2 имеет в круге B один нуль.

3. Осталось рассмотреть случай $\alpha \in (1,2)$. Для определения числа нулей Q_1 в круге B применим теорему (43,1) из [27]. Если все определители

$$\Delta_k = \Delta_k(\alpha,\theta) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} \\ & & & \dots & & & & \dots & \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ \overline{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a_0} & \overline{a_1} & \dots & \overline{a_{k-1}} \\ \overline{a_{n-1}} & \overline{a_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \overline{a_0} & \dots & \overline{a_{k-2}} \\ & & & \dots & & & & \dots & \\ \overline{a_{n-k+1}} & \overline{a_{n-k+2}} & \overline{a_{n-k+3}} & \dots & \overline{a_n} & 0 & 0 & \dots & \overline{a_0} \end{vmatrix}, \qquad k = 1,2,3,$$

отличны от 0, то число нулей многочлена Q_1 в круге B равно числу перемен знака в последовательности 1, Δ_1, Δ_2, Δ_3. Элементарным подсчетом нетрудно найти, что

$$\Delta_1(\alpha,\theta) = 4^\alpha - 1, \qquad \Delta_2(\alpha,\theta) = (4^\alpha - 1)^2 - 9,$$

$$\Delta_3(\alpha,\theta) = 64^\alpha - 12\cdot 16^\alpha - 6\cdot 4^\alpha - 64 - 27\cdot 4^\alpha \cdot 2\cdot\cos(\pi\alpha + 2\theta)$$
$$= 4^\alpha\left(\frac{(4^\alpha - 4)^3}{4^\alpha} - 108\sin^2\left(\frac{\pi(\alpha-1)}{2} + \theta\right)\right).$$

Имеем $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, а поведение знака Δ_3 полностью описано в лемме 2, откуда и следует утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций. С. 11–104.
2. **Bernstein S.** Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné // Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. 1912. Vol. 2, no. 4. P. 1–103.
3. **Бернштейн С.Н.** Авторские комментарии // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций. С. 526–562.
4. **Bernstein S.** Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Collection Borel. Paris: Gauthier-Villar, 1926. 213 p.
5. **Riesz M.** Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci. 1914. Vol. 158. P. 1152–1154.
6. **Riesz M.** Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1914. B. 23. S. 354–368.
7. **Szegö G.** Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. 1928. Jahr 5, Heft 4. S. 59–70.
8. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
9. **Лизоркин П.И.** Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 29, вып. 1. С. 109–126.
10. **Bang T.** Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presquepériodiques // Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddenlelser. 1941. Bd. 19, no. 4. P. 1–28.
11. **Гейсберг С.П.** Аналоги неравенств С. Н. Бернштейна для дробной производной // Вопросы прикладной математики и математического моделирования: Краткие содержания докл. 25-й науч. конф., (24 янв.–4 февр. 1967 г.) Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 1967. С. 5–10.
12. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
13. **Wilmes G.** On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^N$ // N. Numer. Funct. Anal. Optim. 1979. Vol. 1, no. 1. P. 57–77.

14. **Kozko A.I.** The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 391–416.
15. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
16. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН. 2012. Т. 422, № 6. С. 727–731.
17. **Arestov V.V.** S.N. Bernstein inequalities for algebraic and trigonometric polynomials // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
18. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
19. **Glazyrina P.Yu.** Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 6. P. 1204–1210.
20. **Арестов В.В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 10–26.
21. **Belinsky E.S., Liflyand E.R.** Approximation properties in L_p, $0 < p < 1$ // Funct. Approx. Comment. Math. 1993. Vol. 22. P. 189–199.
22. **Runovski K., Schmeisser H.-J.** On some extensions of Bernstein's inequality for trigonometric polynomials // Funct. Approx. Comment. Math. 2001. Vol. 29. P. 125–142.
23. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов в L_0 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 216–223.
24. **Тайков Л.В.** О сопряженных тригонометрических полиномах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 110–114.
25. **Арестов В.В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 7–18.
26. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 392 с.; Т. 2. 432 с.
27. **Marden M.** Geometry of polynomials. Providence: AMS, 1966. 243 p. (Math. surveys, №3)
28. **De Bruijn N.G., Springer T.A.** On the zeros of composition-polynomials // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 1947. Vol. 50. P. 895–903 (= Indag. Math. 1947. Vol. 9. P. 406–414).
29. **De Bruijn N.G.** Inequalities concerning polynomials in the complex domain // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 1947. Vol. 50. P. 1265–1272 (= Indag. Math. 1947. Vol. 9. P. 591–598).
30. **Pólya G.** Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Zeitschrift. 1918. Vol. 2, no. 3–4. S. 352–383.
31. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Поступила 16.09.2013

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Vitalii.Arestov@urfu.ru

Глазырина Полина Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Polina.Glazyrina@urfu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.51

ОЦЕНКИ СНИЗУ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ СОСТАВНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СВОЙСТВОМ ГЛАДКОСТИ[1]

Н. В. Байдакова

Рассматривается естественный класс составных конечных элементов, обеспечивающих гладкость порядка m результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области и не требующих наличия информации о соседних элементах. Известно, что для обеспечения должной скорости сходимости в методе конечных элементов на триангуляцию исходной области часто приходится накладывать "условие наименьшего угла", т. е. ограничивать снизу наименьшие возможные значения наименьших углов треугольников. С другой стороны, отрицательную роль наименьшего угла можно ослабить (но не исключить полностью) за счет выбора подходящих условий интерполяции. Ранее было показано, что для большого множества способов выбора условий интерполяции при построении простых (не составных) конечных элементов, в том числе традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для ряда производных порядка 2 и выше. В данной работе подобный результат доказывается для некоторого класса составных конечных элементов.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, метод конечных элементов, условие наименьшего угла, сплайны на триангуляциях.

N. V. Baidakova. Lower estimates for the error of approximation of derivatives for composite finite elements with smoothness properties.

We consider a natural class of composite finite elements that provides the mth-order smoothness of the resulting piecewise polynomial function on the triangulated domain and does not require information on neighboring elements. It is known that, to provide the required convergence rate, the "smallest angle condition" must be often imposed on the triangulation in the finite element method; i.e., the smallest possible values of the smallest angles of the triangles must be lower bounded. On the other hand, the negative role of the smallest angle can be weakened (but not excluded completely) by choosing appropriate interpolation conditions. As shown earlier, for a large number of methods of choosing interpolation conditions in the construction of simple (noncomposite) finite elements, including traditional conditions, the influence of the smallest angle of the triangle on the error of approximation of derivatives of a function by derivatives of the interpolation polynomial is essential for a number of derivatives of order 2 and above for $m \geq 1$. In the present paper, a similar result is proved for some class of composite finite elements.

Keywords: multidimensional interpolation, finite element method, smallest angle condition, spline functions on triangulations.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область плоскости; $W^{n+1}M$ — множество функций, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, у которых все производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M. Пусть множество треугольников $\Delta = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ — триангуляция области Ω, т. е. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} T_i$, и любые два треугольника T_i и T_j либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину или общую сторону. Если два треугольника имеют общую сторону, их называют соседними.

[1]Работа выполнена в рамках программы Отделения математических наук РАН "Современные проблемы теоретической математики" при поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4), при финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1), программы интеграционных проектов, выполняемых совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проект 12-С-1-1018) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Рассмотрим произвольный треугольник $T = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \in \Delta$ из триангуляции. Пусть T является составным конечным элементом, т. е. триангулирован на k треугольников $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k$. Будем рассматривать только разбиения треугольника T со следующим свойством: для каждой стороны $[a_i, a_j]$ $(i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j)$ найдется треугольник $\mathcal{T}_s$ $(1 \le s \le k)$, у которого одна из сторон совпадает с $[a_i, a_j]$. Пусть на каждом из треугольников $\mathcal{T}_i$ задается свой многочлен $P_{n,i} = P_i$ степени не выше n (степень берется по совокупности переменных, т. е. суммы степеней у мономов не превосходят n). Таким образом, на T задана кусочно полиномиальная функция S_T.

На S_T будем налагать следующие требования.

C1. S_T интерполирует значения функции f и, возможно, ее производные по избранным направлениям в некоторых точках треугольника T, в том числе в вершинах и некоторых точках сторон, и полностью определяется интерполяционными условиями и условием принадлежности классу $C^r(T)$ $(r \ge 1)$, т. е. задается локально на T.

C2. Совокупность всех S_T образует функцию из класса $C^r(\Omega)$ $(r \ge 1)$, т. е. если $\widetilde{S} = \sum\limits_{T \in \Delta} \widetilde{S}_T$, где

$$\widetilde{S}_T(u) = \begin{cases} S_T(u), & \text{если} \ \ u \in T, \\ 0, & \text{если} \ \ u \in \Omega \setminus T, \end{cases}$$

то $\widetilde{S} \in C^r(\Omega)$.

Договоримся писать, что для любых величин ψ_1 и ψ_2 (будь то функции некоторых переменных или константы) имеет место отношение $\psi_1 \overset{(\gtrsim)}{\lesssim} \psi_2$, если существует число $C > 0$, не зависящее от функции f и геометрических характеристик треугольника (допускается зависимость от k и n) и такое, что $\psi_1 \overset{(\ge)}{\le} C\psi_2$.

Известно, что для простого (не составного) конечного элемента $T^* \subset \mathbb{R}^m$ (T^* — не обязательно треугольник или m-симплекс) при достаточно общих ограничениях на тело T^* и на условия интерполяции функции $f \in W^{n+1}M$ имеют место оценки сверху величины аппроксимации функции и ее производных [1], которые в случае треугольника принимают вид

$$||D^s f - D^s P_n||_{C(T^*)} \lesssim M H^{n+1-s} (\sin \alpha)^{-s}, \qquad (0.1)$$

$$0 \le s \le n,$$

где P_n — интерполяционный многочлен типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа степени не выше n по совокупности переменных, α — наименьший угол треугольника (см. также [2–4]). Оценки типа (0.1) являются причиной введения ограничения на триангуляцию, т. е. наложения “условия наименьшего угла” — требования отделенности от нуля величин наименьших углов треугольников. Вместе с тем имеются успешные попытки ослабить отрицательное влияние наименьшего угла за счет выбора подходящих условий интерполяции (см. [5–16]). Однако, анализируя данные работы, можно заметить, что в оценках производных второго и более высоких порядков (если брать совокупность всех возможных направлений, по которым берутся производные) синус наименьшего угла в знаменателе отсутствует только в случаях, когда обеспечивается лишь непрерывность глобальной кусочно-полиномиальной функции на Ω и не обеспечивается гладкость. Это наблюдение имеет обоснование: в [17] для простого (не составного) конечного элемента было показано, что для большого множества способов выбора локальных условий интерполяции, в том числе традиционных, при построении кусочно полиномиальной функции глобальной гладкости 1 или выше отрицательное влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для производных порядка 2 и выше. В данной работе аналогичный результат доказывается для некоторого естественного подкласса описанных выше составных конечных элементов, которые обеспечивают гладкость сплайна $\widetilde{S}$ на Ω без знания информации о соседних конечных элементах.

1. Формулировка теоремы и основные обозначения

Пусть $T = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ — треугольный составной конечный элемент с триангуляцией на треугольники $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_k$; S_T — сплайн, удовлетворяющий условиям С1, С2. Обозначим через α, β, θ величины углов треугольника T при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно. Будем считать, что $0 < \alpha \le \beta \le \theta$. Прочие обозначения: H — диаметр треугольника T; ς_{ij} — единичные векторы, направленные от a_i к a_j; n_{ij} $(i, j = 1, 2, 3;\ i \ne j)$ — единичные нормали к сторонам $[a_i, a_j]$; d_{ij} — длина стороны $[a_i, a_j]$; $D^s_{\xi_1 \dots \xi_s}$ — производные порядка s по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_s$. Под нормой везде будем понимать норму в L_∞.

Поместим T в прямоугольную систему координат Oxy (см. рисунок) так, чтобы вершины T имели следующие координаты: $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (b+a, 0)$, $a_3 = (b, h)$, где $a, b, h > 0$ и $a < b$, $h < b$ (последние два неравенства следуют из договоренности о соотношениях между величинами углов при вершинах a_1, a_2, a_3). Очевидно, $a + b = H$.

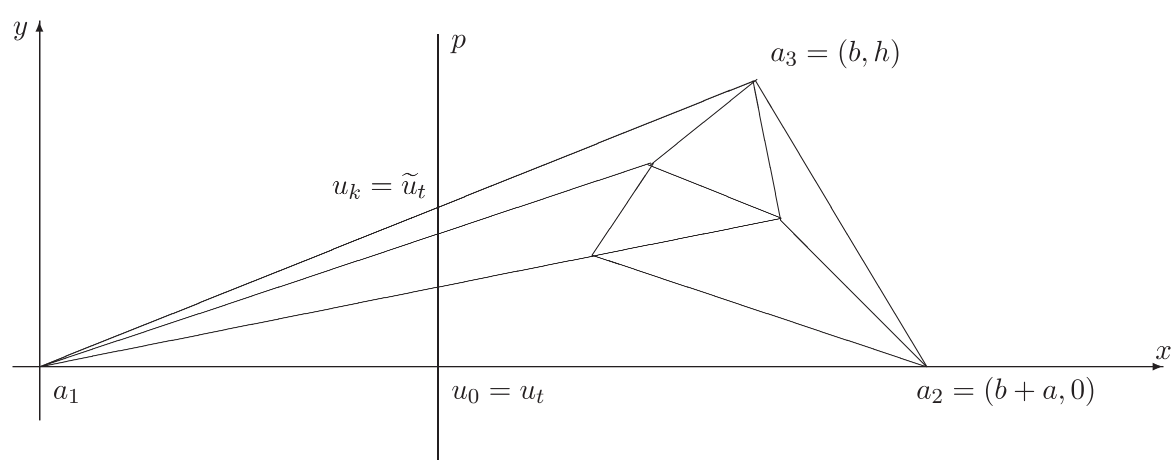
Пусть сужения сплайна $S_T(u)$ и его производной $\partial S_T(u)/\partial n_{ij}$ на любую сторону $[a_i, a_j]$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $[a_i, a_j]$. Отметим, что в силу условий С1 и С2 тем же условиям должен удовлетворять сплайн $S_{T^*}(u)$ на соседнем с T треугольнике T^*. Пусть, кроме того, интерполяционные условия в точках сторон треугольника T задаются таким образом, что для любой стороны $[a_i, a_j]$ треугольника T имеет место равенство

$$\left. \frac{\partial^s \left(f(u) - S_T(u) \right)}{\partial n_{ij}^s} \right|_{u \in [a_i, a_j]} = \frac{1}{(n+1-s)!} \, \frac{\partial^{n+1} f(\vartheta^s_{ij})}{\partial n^s_{ij} \partial \varsigma^{n+1-s}_{ij}} \, d^{n+1-s}_{ij} \omega_{ij,\ n+1-s}(t)\,, \tag{1.1}$$

$$s = 0, \dots, r, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \ne j,$$

где $\vartheta^s_{ij} \in [a_i, a_j]$; $\omega_{ij,\ n+1-s}(t)$ — многочлен степени $n + 1 - s$ со старшим коэффициентом, равным единице; $t = |u - a_i| / d_{ij} \in [0, 1]$ (через $|u - a_i|$ обозначено расстояние между точками u и a_i).

Равенство (1.1) — это формула остаточного члена интерполяционной формулы для функции $\partial^s f / \partial n^s_{ij}$ и ее интерполяционного многочлена, задаваемого на отрезке $[a_i, a_j]$ и являющегося сужением сплайна S_T на данный отрезок. Поскольку для доказательства теоремы нам достаточно принадлежности функции $\widetilde{S}$ классу $C^1(\Omega)$, можно без ограничений общности считать, что $r = 1$.



Составной элемент T.

Напомним, что в число условий построения сплайна S_T на треугольнике T входит требование обеспечения гладкости результирующего сплайна $\widetilde{S}$ на Ω при отсутствии информации о соседних с T конечных элементах. Обычно в этом случае на всех сторонах треугольника T задаются однотипные условия интерполяции, т. е.

$$\omega_{ij,n+1-s}(x) = \omega_{pq,n+1-s}(x)$$

для любых i, j, p, q и $s = 0, 1$ (или $s = 0, \ldots, r$, если $r > 1$). Это означает, что

$$\omega_{ij,n+1-s}(x) = (-1)^{n+1-s}\omega_{ij,n+1-s}(1-x).$$

Тогда

$$\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(x) = -\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(1-x). \tag{1.2}$$

Поскольку $\omega_{ij,\ n+1-s}$ — многочлен степени $n+1-s$ с старшим коэффициентом, равным единице, то $\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(x)$ является линейной функцией, и из (1.2) следует, что

$$\frac{\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(x)}{(n+1-s)!} = x - \frac{1}{2} \tag{1.3}$$

для любых $s = 0, 1$ и $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим функцию

$$f^*(x, y) = \delta_1 M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \delta_2 M \frac{x^n y}{n!}, \tag{1.4}$$

где δ_1 и δ_2 выбираются таким образом, чтобы $f^* \in W^{n+1}M$, $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$ (аналогичная функция была использована в [8] при $n = 5$ для доказательства неулучшаемости полученных там оценок погрешности аппроксимации производных). Положим

$$e(x, y) = f^*(x, y) - S_T(x, y),$$

$$e_i(x, y) = (f^*(x, y) - S_T(x, y))\big|_{\mathcal{T}_i} = f^*(x, y) - P_{n,i}(x, y).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если S_T удовлетворяет условиям $C1$, $C2$ и выполнены соотношения* (1.1) *и* (1.3)*, то для любого $s = 2, \ldots, n$ найдется $\alpha_0 > 0$ и единичные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_s$ такие, что для любого $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки*

$$\left\| D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}(f^* - S_T) \right\| \gtrsim \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\alpha}\ . \tag{1.5}$$

2. Доказательство теоремы

Вспомним, что число треугольников $\mathcal{T}_i$, на которые разбивается T, конечно и равно k. Пусть $\mathcal{T}_i = \langle a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)} \rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда существует непустое пересечение “вертикальной” полосы ширины $\widetilde{H} \gtrsim H$ и треугольника T такое, что любая прямая, лежащая в данной полосе (и, следовательно, параллельная оси y), пересекается только с такими сторонами $[a_r^{(i)}, a_s^{(i)}]$ $(1 \leq s, r \leq 3,\ s \neq r)$ треугольников $\mathcal{T}_i$ из множества $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_k\}$, для которых имеет место неравенство $\left|a_s^{(i)} - a_r^{(i)}\right| \gtrsim H$. Точнее, на сторонах $[a_1, a_2]$ и $[a_1, a_3]$ составного элемента T можно выделить отрезки $Q \subset [a_1, a_2]$ и $\widetilde{Q} \subset [a_1, a_3]$ со следующими свойствами:

1°. $|Q| = c(k)H$, где $|Q|$ — длина отрезка Q, $c(k)$ — положительное число, зависящее только от k (т. е. $|Q| \gtrsim H$).

2°. Пусть прямые p_1 и p_2 параллельны оси y и проходят через две различные точки $q_1, q_2 \in Q$. Пусть p_1 пересекает сторону $[a_r^{(i)}, a_s^{(i)}]$ некоторого треугольника $\mathcal{T}_i$ в некоторой точке u_1. Тогда p_2 также пересекает $[a_r^{(i)}, a_s^{(i)}]$ в некоторой точке u_2.

3°. Любая прямая p, параллельная оси y и проходящая через любую точку $u \in Q$, пересекает отрезок $\widetilde{Q}$ в некоторой точке $\widetilde{u}$ (очевидно, $\left|\widetilde{Q}\right| \gtrsim H$).

Отрезки Q и $\widetilde{Q}$ могут быть представлены следующим образом:

$$Q = \{u = a_1 + t\,(a_2 - a_1) : t \in \sigma \subseteq [0,1]\}\,,$$

$$\widetilde{Q} = \left\{\widetilde{u} = a_1 + \widetilde{t}\,(a_3 - a_1) : \widetilde{t} \in \widetilde{\sigma} \subseteq [0,1]\right\}\,,$$

где $|\sigma| \gtrsim 1$, $|\widetilde{\sigma}| \gtrsim 1$.

Нам будет достаточно рассмотреть одну прямую из указанной полосы. Возьмем некоторое значение $t \in \sigma$ и соответствующую точку $u_t = a_1 + t\,(a_2 - a_1)$. Проведем через точку u_t прямую p, параллельную оси y. Эта прямая пересекает отрезок $\widetilde{Q}$ в некоторой точке $\widetilde{u}_t = a_1 + \widetilde{t}\,(a_3 - a_1)$ при соответствующем $\widetilde{t}$. Таким образом, мы получаем функцию $\psi : \sigma \to \widetilde{\sigma}$ такую, что $\widetilde{t} = \psi(t)$, и точки u_t и $\widetilde{u}_t$.

Рассмотрим все треугольники составного конечного элемента T, имеющие общие точки с прямой p (без ограничений общности можем считать, что p имеет пустое пересечение с множеством всех вершин треугольников, составляющих триангуляцию элемента T; также можем считать, что число треугольников равно k), и занумеруем их следующим образом: $\mathcal{T}_1$ — треугольник, у которого одна из сторон, пересекаемая прямой p, совпадает с $[a_1, a_2]$; $\mathcal{T}_2$ — треугольник, соседний с $\mathcal{T}_1$; …, $\mathcal{T}_k$ — треугольник, соседний с $\mathcal{T}_{k-1}$.

Обозначим стороны этих треугольников: $[c_1^0, c_2^0]$ — сторона треугольника $\mathcal{T}_1$, совпадающая с $[a_1, a_2]$; $[c_1^1, c_2^1]$ — общая сторона треугольников $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$; …; $[c_1^{k-1}, c_2^{k-1}]$ — общая сторона треугольников $\mathcal{T}_{k-1}$ и $\mathcal{T}_k$; $[c_1^k, c_2^k]$ — сторона треугольника $\mathcal{T}_k$, совпадающая с $[a_1, a_3]$. В силу условий 1°–3° можем утверждать, что для любого $j = 1, \ldots, k$ имеет место неравенство

$$\left|c_2^j - c_1^j\right| \gtrsim H. \tag{2.1}$$

Пусть далее u_j — точки пересечения прямой p и отрезков $[c_1^j, c_2^j]$ $(j = 0, \ldots, k)$. В частности, $u_0 = u_t$, $u_k = \widetilde{u}_t$.

Пусть точки c_i^j имеют координаты (x_i^j, y_i^j), и для всех j выполняются неравенства $x_1^j < x_2^j$. Обозначим через τ_j единичные векторы, направленные от c_1^j к c_2^j. Очевидно, что $c_1^{j-1} = c_1^j$ или $c_2^{j-1} = c_2^j$ (в дальнейшем это не будет иметь значения), $\tau_0 = \varsigma_{12}$, $\tau_k = \varsigma_{13}$.

Через α_j $(j = 1, \ldots, k)$ обозначим углы между векторами τ_{j-1} и τ_j с учетом направления этих векторов: если в результате приведения к общему началу кратчайший поворот от вектора τ_{j-1} к вектору τ_j происходит против часовой стрелки, то $\alpha_j > 0$, иначе $\alpha_j < 0$. Отметим, что

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \alpha. \tag{2.2}$$

Рассмотрим функции $\omega_{ij,n+1-k}$ из (1.1).

Лемма 1. *Пусть $\widetilde{t} = \psi(t)$ и выполнено условие $a < b/(2n)$. Положим*

$$W_2(t) = \frac{(n+1)d_{13}\ \omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\,\widetilde{t}\,\right)\cos\alpha}{(n+1)!} - \frac{nd_{12}\ \omega_{12,n}^{(n-1)}(t)}{n!} - \frac{|u_k - u_0|}{\operatorname{tg}\alpha}\ .$$

Тогда имеет место неравенство

$$|W_2(t)| \gtrsim H. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как прямая p, проходящая через точки u_0 и u_k, параллельна оси y, $|u_k - a_1| = d_{13}\widetilde{t}$ и $|u_0 - a_1| = d_{12}t$, то

$$d_{13}\widetilde{t}\cos\alpha = d_{12}t,$$

откуда следует, что

$$\widetilde{t} = \frac{d_{12}}{d_{13}}\,\frac{t}{\cos\alpha} = \frac{b+a}{(b^2+h^2)^{1/2}}\,\frac{(b^2+h^2)^{1/2}}{b}\,t = \frac{b+a}{b}\,t.$$

Заметим, что

$$\frac{|u_k - u_0|}{\operatorname{tg}\alpha} = |u_0 - a_1| = (b+a)t.$$

Тогда с учетом формулы (1.3) и того, что $d_{12} = b + a$, $d_{13}\cos\alpha = \bigl(b^2+h^2\bigr)^{1/2}\cos\alpha = b$, получаем

$$\begin{aligned} W_2(t) &= (n+1)b\Bigl(\widetilde{t} - \frac{1}{2}\Bigr) - n(b+a)\Bigl(t - \frac{1}{2}\Bigr) - (b+a)t \\ &= (n+1)b\Bigl(\frac{b+a}{b}\,t - \frac{1}{2}\Bigr) - n(b+a)\Bigl(t - \frac{1}{2}\Bigr) - (b+a)t = -\frac{b}{2} + \frac{na}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|W_2(t)| \ge \frac{b}{2} - \frac{nb}{4n} \ge \frac{b}{4} \gtrsim H. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть* $\widetilde{t} = \psi(t)$ *и выполнено условие* $a \ge b/(2n)$. *Положим*

$$W_1(t) = \frac{d_{13}\ \omega^{(n)}_{13,n+1}\bigl(\ \widetilde{t}\ \bigr)\cos\alpha}{(n+1)!} - \frac{d_{12}\ \omega^{(n)}_{12,n+1}\bigl(\ t\ \bigr)}{(n+1)!}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|W_1(t)| \gtrsim H. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 1:

$$W_1(t) = b\Bigl(\widetilde{t} - \frac{1}{2}\Bigr) - (b+a)\Bigl(t - \frac{1}{2}\Bigr) = b\Bigl(\frac{b+a}{b}\,t - \frac{1}{2}\Bigr) - (b+a)\Bigl(t - \frac{1}{2}\Bigr) = \frac{a}{2}\,,$$

откуда следует оценка $|W_1(t)| \ge b/(4n) \gtrsim H$. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $\tau = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. *Тогда для любой функции* g *имеет место равенство*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \tau}\,\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\partial g}{\partial y}\operatorname{tg}\varphi. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что $\partial g/\partial\tau = (\partial g/\partial x)\cos\varphi + (\partial g/\partial x)\sin\varphi$. $\square$

Введем еще одно обозначение

$$\gamma_j = \sum_{s=1}^{j}\alpha_s, \tag{2.6}$$

где $j = 1, \dots, k$. Положим $\gamma_0 = 0$.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{s=0}^{k-1}\frac{\sin\alpha_{k-s}}{\cos\gamma_{k-s}\cos\gamma_{k-s-1}} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сумму последних двух слагаемых

$$\frac{\sin\alpha_2}{\cos\gamma_2\cos\gamma_1}+\frac{\sin\alpha_1}{\cos\gamma_1}=\frac{\sin\alpha_2+\sin\alpha_1\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_1}$$

$$=\frac{\sin\alpha_2+(-\sin\alpha_2+\sin(2\alpha_1+\alpha_2))/2}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_1}=\frac{\sin\alpha_2+\sin(2\alpha_1+\alpha_2)}{2\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_1}$$

$$=\frac{2\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_1}{2\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_1}=\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)}\,. \tag{2.8}$$

Тогда, полагая $\alpha^*=\alpha_1+\alpha_2$ и используя (2.8), можем сумму последних трех слагаемых представить в виде

$$\frac{\sin\alpha_3}{\cos\gamma_3\cos\gamma_2}+\frac{\sin\alpha_2}{\cos\gamma_2\cos\gamma_1}+\frac{\sin\alpha_1}{\cos\gamma_1}=\frac{\sin\alpha_3}{\cos\gamma_3\cos\gamma_2}+\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$=\frac{\sin\alpha_3}{\cos(\alpha^*+\alpha_3)\cos\alpha^*}+\frac{\sin\alpha^*}{\cos\alpha^*}=\frac{\sin(\alpha^*+\alpha_3)}{\cos(\alpha^*+\alpha_3)}=\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\,.$$

Действуя далее по индукции, получаем (2.7). □

Лемма 5. *Для любой функции g, определенной на треугольнике T, чисел $i=1,\dots,k$ и $s=n-1,n$ имеет место представление*

$$\frac{\partial^s g}{\partial\tau_i^s}=\frac{\partial^s g}{\partial\tau_{i-1}^s}\,\frac{\cos^s\gamma_i}{\cos^s\gamma_{i-1}}+\frac{\partial^s g}{\partial\tau_{i-1}^{s-1}\partial y}\,\frac{s\cos^{s-1}\gamma_i\sin\alpha_i}{\cos^s\gamma_{i-1}}+\sum_{j=2}^{s}C_{i,j}\frac{\partial^s g}{\partial\tau_{i-1}^{s-j}\partial y^j}\,\sin^j\alpha_i, \tag{2.9}$$

где $|C_{i,j}|\lesssim 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\tau_i=(\cos\gamma_i,\sin\gamma_i)$ (см. (2.6)), то, принимая во внимание (2.5), получаем

$$\frac{\partial^s g}{\partial\tau_i^s}=\Big(\frac{\partial}{\partial x}\cos\gamma_i+\frac{\partial}{\partial y}\sin\gamma_i\Big)^s g$$

$$=\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial\tau_{i-1}}\,\frac{1}{\cos\gamma_{i-1}}-\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\sin\gamma_{i-1}}{\cos\gamma_{i-1}}\Big)\cos\gamma_i+\frac{\partial}{\partial y}\sin\gamma_i\Big)^s g$$

$$=\Big(\frac{\partial}{\partial\tau_{i-1}}\,\frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sin\gamma_i-\frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}}\,\sin\gamma_{i-1}\Big)\Big)^s g.$$

Поскольку

$$\sin\gamma_i-\frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}}\,\sin\gamma_{i-1}=\sin(\gamma_{i-1}+\alpha_i)-\frac{\cos(\gamma_{i-1}+\alpha_i)}{\cos\gamma_{i-1}}\,\sin\gamma_{i-1}$$

$$=\sin\gamma_{i-1}\cos\alpha_i+\cos\gamma_{i-1}\sin\alpha_i-\frac{\cos\gamma_{i-1}\cos\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}}\,\sin\gamma_{i-1}+\frac{\sin\gamma_{i-1}\sin\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}}\,\sin\gamma_{i-1}$$

$$=\cos\gamma_{i-1}\sin\alpha_i+\operatorname{tg}\gamma_{i-1}\sin\gamma_{i-1}\sin\alpha_i=\sin\alpha_i\Big(\cos\gamma_{i-1}+\frac{\sin^2\gamma_{i-1}}{\cos\gamma_{i-1}}\Big)=\frac{\sin\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}}\,,$$

то

$$\frac{\partial^s g}{\partial\tau_i^s}=\Big(\frac{\partial}{\partial\tau_{i-1}}\frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sin\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}}\Big)^s g.$$

Раскрывая скобки, получим (2.9). □

Пусть h_i — высота треугольника $\mathcal{T}_i$, опущенная на сторону $[c_1^s,c_2^s]$ ($s=i-1$ или $s=i$). Так как $\mu(\mathcal{T}_i)<\mu(T)$ (где под μ подразумеваем площадь соответствующего треугольника) и $|c_2^s-c_1^s|\gtrsim H$, можем утверждать, что $h_i\lesssim h$. В частности, это означает, что

$$|\sin\alpha_i|\lesssim\sin\alpha,\quad i=1,\dots,k. \tag{2.10}$$

Лемма 6. *Имеет место разложение*

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n} = \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^n}\ \cos^n\alpha + \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}\ n\cos^n\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=2}^{n} D_{r,j}\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^{j-1}\alpha_r\sin\alpha + \delta_2 M\,|u_k-u_0|\cos^n\alpha, \tag{2.11}$$

где величины $D_{r,j}$ *удовлетворяют неравенству* $|D_{r,j}|\lesssim 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $g=e_k$, $i=k$, $s=n$ в (2.9), получим равенство

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n} = \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_{k-1}^n}\ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-1}} + n\ \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_{k-1}^{n-1}\partial y}\ \frac{\cos^{n-1}\gamma_k\sin\alpha_k}{\cos^n\gamma_{k-1}} + \sum_{j=2}^{n} D_{k,j}\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_{k-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^j\alpha_k.$$

Разложим $\partial^n e_k(u_k)/\partial\tau_{k-1}^n$ и $\partial^n e_k(u_k)/\left(\partial\tau_{k-1}^{n-1}\partial y\right)$ по формуле конечных приращений Лагранжа в точке u_{k-1} (напомним, что прямая p, проходящая через точки u_k и u_{k-1}, параллельна оси y). Тогда

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n} = \frac{\partial^n e_k(u_{k-1})}{\partial\tau_{k-1}^n}\ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-1}} + n\ \frac{\partial^n e_k(u_{k-1})}{\partial\tau_{k-1}^{n-1}\partial y}\ \frac{\cos^{n-1}\gamma_k\sin\alpha_k}{\cos^n\gamma_{k-1}}$$

$$+\sum_{j=2}^{n} D_{k,j}\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_{k-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^j\alpha_k + \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial\tau_{k-1}^n\partial y}\,|u_k-u_{k-1}|\ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-1}}$$

$$+\,n\frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial\tau_{k-1}^{n-1}\partial y^2}\,|u_k-u_{k-1}|\ \frac{\cos^{n-1}\gamma_k\sin\alpha_k}{\cos^n\gamma_{k-1}}\ .$$

Так как f^* имеет вид (1.4), последнее слагаемое равно нулю. Кроме того, поскольку $\tau_{k-1} = (\cos\gamma_{k-1},\sin\gamma_{k-1})$, из (1.4) следует равенство

$$\frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial\tau_{k-1}^n\partial y} = \delta_2 M\cos^n\gamma_{k-1}.$$

Учитывая гладкость функции $e(x,y)$ на треугольнике T, получаем

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n} = \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial\tau_{k-1}^n}\ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-1}} + n\ \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial\tau_{k-1}^{n-1}\partial y}\ \frac{\cos^{n-1}\gamma_k\sin\alpha_k}{\cos^n\gamma_{k-1}}$$

$$+\sum_{j=2}^{n} D_{k,j}\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_{k-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^j\alpha_k + \delta_2 M\,|u_k-u_{k-1}|\cos^n\gamma_k.$$

Применим (2.9) к случаям $g=e_{k-1}$, $i=k-1$, $s=n$ и $g=\partial e_k/\partial y$, $i=k-1$, $s=n-1$, принимая во внимание (2.10):

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n} = \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial\tau_{k-2}^n}\ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-2}}$$

$$+\ \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial\tau_{k-2}^{n-1}\partial y}\ \frac{n\cos^n\gamma_k}{\cos^{n-1}\gamma_{k-2}}\left(\frac{\sin\alpha_{k-1}}{\cos\gamma_{k-1}\cos\gamma_{k-2}} + \frac{\sin\alpha_k}{\cos\gamma_k\cos\gamma_{k-1}}\right)$$

$$+\ \sum_{r=k-1}^{k}\sum_{j=2}^{n} D_{r,j}\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^{j-1}\alpha_r\sin\alpha + \delta_2 M\,|u_k-u_{k-1}|\cos^n\gamma_k.$$

Как и ранее, разложим $\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})/\partial\tau_{k-2}^n$ и $\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})/\left(\partial\tau_{k-2}^{n-1}\partial y\right)$ по формуле конечных приращений Лагранжа в точке u_{k-2} и используем гладкость функции $e(x,y)$, а также то, что $\partial^{n+1}f^*/\left(\partial\tau_{k-2}^n\partial y\right)=\delta_2 M\cos^n\gamma_{k-2}$. Получаем

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n}=\frac{\partial^n e_{k-2}(u_{k-2})}{\partial\tau_{k-2}^n}\ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-2}}$$

$$+\frac{\partial^n e_{k-2}(u_{k-2})}{\partial\tau_{k-2}^{n-1}\partial y}\ \frac{n\cos^n\gamma_k}{\cos^{n-1}\gamma_{k-2}}\Big(\frac{\sin\alpha_{k-1}}{\cos\gamma_{k-1}\cos\gamma_{k-2}}+\frac{\sin\alpha_k}{\cos\gamma_k\cos\gamma_{k-1}}\Big)$$

$$+\sum_{r=k-1}^{k}\sum_{j=2}^{n}D_{r,j}\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^{j-1}\alpha_r\sin\alpha+\delta_2 M\left(|u_k-u_{k-1}|+|u_{k-1}-u_{k-2}|\right)\cos^n\gamma_k.$$

Продолжая этот процесс, приходим к равенству

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n}=\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial\tau_0^n}\ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_0}+\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial\tau_0^{n-1}\partial y}\ \frac{n\cos^n\gamma_k}{\cos^{n-1}\gamma_0}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{\sin\alpha_{k-s}}{\cos\gamma_{k-s}\cos\gamma_{k-s-1}}$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=2}^{n}D_{r,j}\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^{j-1}\alpha_r\sin\alpha+\delta_2 M\cos^n\gamma_k\sum_{i=1}^{k}|u_i-u_{i-1}|\,.$$

Учитывая (2.7) и то, что $\sum_{i=1}^k|u_i-u_{i-1}|=|u_k-u_0|$, $\partial/\partial\tau_0=\partial/\partial x$, $\gamma_k=\alpha$, $\gamma_0=0$, приходим к (2.11). □

Лемма 7. *Найдутся $r\in\{1,\dots,k\}$ и $j\in\{2,\dots,n\}$ такие, что*

$$\left|\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\right|\gtrsim\frac{MH}{\left|\sin^{j-1}\alpha_r\right|}\ . \tag{2.12}$$

Доказательство. Принимая во внимание (1.1), вид функции f^* и то, что $\tau_k=\varsigma_{13}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, получим равенства

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n}=\frac{1}{(n+1)!}\ \frac{\partial^{n+1}f^*}{\partial\tau_k^{n+1}}\ d_{13}\omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\widetilde{t}\,\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\delta_1 M\cos^{n+1}\alpha+\delta_2(n+1)M\cos^n\alpha\sin\alpha\right)d_{13}\omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\widetilde{t}\,\right);$$

$$\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^n}\ =\frac{1}{(n+1)!}\ \frac{\partial^{n+1}f^*}{\partial x^{n+1}}\ d_{12}\omega_{12,n+1}^{(n)}(t)=\frac{1}{(n+1)!}\ \delta_1 M d_{12}\omega_{12,n+1}(t);$$

$$\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}\ =\frac{1}{n!}\ \frac{\partial^{n+1}f^*}{\partial x^n\partial y}d_{12}\omega_{12,n}^{(n-1)}\ =\ \frac{1}{n!}\ \delta_2 M d_{12}\omega_{12,n}^{(n-1)}.$$

Тогда (2.11) можно преобразовать к виду

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=2}^{n}D_{r,j}\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\ \sin^{j-1}\alpha_r\sin\alpha$$

$$=\delta_1 M\cos^n\alpha\Big(\frac{d_{13}\ \omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\,\widetilde{t}\,\right)\cos\alpha}{(n+1)!}-\frac{d_{12}\ \omega_{12,n+1}^{(n)}\left(\,t\,\right)}{(n+1)!}\Big)$$

$$+\delta_2 M\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha\Big(\frac{(n+1)d_{13}\ \omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\,\widetilde{t}\,\right)\cos\alpha}{(n+1)!}-\frac{n d_{12}\ \omega_{12,n}^{(n-1)}(t)}{n!}-\frac{|u_k-u_0|}{\operatorname{tg}\alpha}\Big)$$

$$= \delta_1 M W_1(t) \cos^n \alpha + \delta_2 M W_2(t) \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha, \tag{2.13}$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ определены в леммах 1 и 2.

Выбирая величины δ_1 и δ_2 таким образом, чтобы оба слагаемых в правой части равенства (2.13) имели одинаковые знаки, и применяя (2.3) и (2.4) получим

$$\left| \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=2}^{n} D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \ \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha \right| \gtrsim H \sin \alpha,$$

откуда следует (2.12). Лемма 7 доказана. □

Завершим доказательство теоремы. Пусть r и j таковы, что выполняется (2.12). Рассмотрим треугольник $\mathcal{T}_r$. Пусть q_0 — центр масс треугольника $\mathcal{T}_r$. Так как $j \geq 2$, и f^* имеет вид (1.4), то величина в левой части (2.12) является постоянной на $\mathcal{T}_r$, и тогда

$$\left| \frac{\partial^n e_r(q_0)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \right| \gtrsim \frac{MH}{\left|\sin^{j-1} \alpha_r\right|} \ .$$

Отметим также, что функция $e_r = (f^* - S_T)\Big|_{\mathcal{T}_r}$, рассматриваемая на $\mathcal{T}_r$, является многочленом.

Пусть прямая p_1 параллельна вектору τ_{r-1} и проходит через точку q_0. Рассмотрим отрезок $Q_1 = p_1 \cap \mathcal{T}_r$. Так как p_1 параллельна стороне $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$ треугольника $\mathcal{T}_r$, проходит через центр масс этого треугольника и имеет место (2.1), выполняется неравенство $|Q_1| \gtrsim H$. Применяя $(n-j)$ раз неравенство Маркова [18, § 3.5], на отрезке Q_1, приходим к существованию точек $q_j, q_{j+1}, \ldots, q_{n-1} \in Q_1$ для которых имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial^{n-s} e_r(q_{n-s})}{\partial \tau_{r-1}^{n-j-s} \partial y^j} \right| \gtrsim \frac{MH^{s+1}}{\left|\sin^{j-1} \alpha_r\right|} \ . \tag{2.14}$$

$$s = 1, \ldots, n-j.$$

Рассмотрим (2.14) при $s = n-j$. Пусть прямая p_2 проходит через точку q_j параллельно оси y. Введем в рассмотрение отрезок $Q_2 = p_2 \cap \mathcal{T}_r$. Учитывая расположение точки q_j ($q_j \in Q_1$, где Q_1 — отрезок, проходящий через центр тяжести треугольника $\mathcal{T}_r$ параллельно стороне $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$, для которой имеет место (2.1)), можем утверждать, что

$$|Q_2| \gtrsim h_r,$$

где h_r — наименьшая из высот треугольника $\mathcal{T}_r$ (принимая во внимание определение знака "$\gtrsim$" и (2.1), можно считать, что h_r — высота, опущенная на $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$). Применяя $(j-2)$ раз неравенство Маркова на отрезке Q_2, приходим к существованию точек $q_2, q_3, \ldots, q_{j-1} \in Q_2$, для которых имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial^s e_r(q_s)}{\partial y^s} \right| \gtrsim \frac{MH^{n+1-s}}{\left|\sin^{s-1} \alpha_r\right|} \ , \tag{2.15}$$

$$s = 2, \ldots, j.$$

Объединяя (2.14), (2.15) и (2.10), получаем (1.5). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Условие (1.3) в формулировке теоремы можно заменить на более наглядное условие (1.2) или более общие условия (2.3) и (2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше было показано, что (1.3) является следствием (1.2). С другой стороны, условие (1.3) использовалось только для доказательства (2.3) и (2.4). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, № 3. P. 177–199.
2. **Ženišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. 1970. Vol 15. P. 283–296.
3. **Bramble J.H., Zlamal M.** Triangular elements in the finite element method // Math. Comp. 1970. Vol 24, № 112. P. 809–820.
4. **Zlamal M., Ženišek A.** Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method / eds. V. Kolar et al. Praha: Acad. VED, 1971. P. 15–39.
5. **Synge J.L.** The hypercircle in mathematical physics. A method for the approximate solution of boundary value problems. Cambridge: Cambridge University Press, 1957. 440 p.
6. **Babuška I., Aziz A.K.** On the angle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol. 13, № 2. P. 214–226.
7. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 117–137.
8. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
9. **Latypova N.V.** Error estimates for approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S190–S213.
10. **Baidakova N.V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol 14, no. 2. P. 87–107.
11. **Subbotin Yu.N.** A new cubic element in the FEM // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 2. P. S176–S187.
12. **Baidakova N.V.** A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 2. P. S49–S55.
13. **Ženišek A.** Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, no. 211. P. 929–941.
14. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. 2003. С. 3–10.
15. **Матвеева Ю.В.** Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. 2007. Т. 7, вып. 1. (Нов. сер. Математика. Механика. Информатика.) С. 23–27.
16. **Байдакова Н.В.** Оценки сверху величины погрешности аппроксимации производных в конечном элементе Сие — Клафа — Точера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 80–89.
17. **Байдакова Н.В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97.
18. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука. 1987. 422 с.

Байдакова Наталия Васильевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

Поступила 30.04.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 514.17; 532.5

ОПИСАНИЕ ВИНТОВОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Рассматривается задача, связанная с описанием движения жидкости, заполняющей в каждый момент времени $t \geq 0$ область $D \subset R^3$, в терминах переменных: скорость — $\mathbf{v}$, давление — p. Предполагается, что пара $(\mathbf{v}, p)$ подчиняется системе уравнений, включающей в себя уравнение Эйлера и уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости. Для случая аксиально симметричного цилиндрического слоя D найдено общее решение этой системы уравнений в классе векторных полей $\mathbf{v}$, линии которых при любом $t \geq 0$ совпадают всюду в D с их вихревыми линиями и лежат на аксиально симметричных цилиндрических поверхностях, вложенных в D. Общее решение охарактеризовано в теореме. В качестве примера выделено семейство решений, выражаемых при помощи цилиндрических функций, которое при $D = R^3$ включает в себя частное решение, полученное впервые И. С. Громекой в случае установившихся винтовых цилиндрических движений.

Ключевые слова: скалярные и векторные поля, ротор, винтовое движение, задача Громеки.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Description of a helical motion of an incompressible nonviscous fluid.

We consider a problem of describing the motion of a fluid filling at any specific instant $t \geq 0$ a domain $D \subset R^3$ in terms of velocity $\mathbf{v}$ and pressure p. We assume that the pair of variables $(\mathbf{v}, p)$ satisfies a system of equations that includes Euler's equation and the incompressible fluid continuity equation. For the case of an axially symmetric cylindrical layer D, we find a general solution of this system of equations in the class of vector fields $\mathbf{v}$ whose lines for any $t \geq 0$ coincide everywhere in D with their vortex lines and lie on axially symmetric cylindrical surfaces nested in D. The general solution is characterized in a theorem. As an example, we specify a family of solutions expressed in terms of cylindrical functions, which, for $D = R^3$, includes a particular solution obtained for the first time by I.S. Gromeka in the case of steady-state helical cylindrical motions.

Keywords: scalar and vector fields, curl, helical motion, Gromeka's problem.

Рассматривается решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{f}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ D^4 \tag{1}$$

относительно векторного — $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и скалярного — $p = p(\mathbf{x}, t)$ полей в

$$D^4 = \{(\mathbf{x}, t): \ \mathbf{x} \in D, \ t \in [0, +\infty)\},$$

где D — некоторая область пространства R^3. Через $\mathbf{x}$ здесь обозначается точка пространства R^3, задаваемая радиус-вектором $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, через ρ и $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — положительная постоянная и заданное в D^4 векторное поле, потенциальное в D при любом $t \in [0, +\infty)$, через $\boldsymbol{\nabla}$ — дифференциальный оператор Гамильтона в R^3. Отметим также, что символами $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в работе обозначаются скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; для вычисления дивергенции, ротора и градиента в R^3 от векторного $\mathbf{a}$ и скалярного u полей используются формулы $\operatorname{div}\mathbf{a} = (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{a})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{a}]$, $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{\nabla} u$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01–00462, 12-01-00004, 14-01-00496), Министерства образования и науки РФ (проект 1.1544.2011), Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1).

Решение системы (1) ищется в классе $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\text{sh}}(D^4)$ векторных полей $\mathbf{v}$ (пояснения ниже) в случае, когда D — аксиально симметричный цилиндрический слой, задаваемый в цилиндрической системе координат (r,γ,x_3) с базисом

$$\{\mathbf{e}_r(\gamma)=\mathbf{e}_1\cos\gamma+\mathbf{e}_2\sin\gamma,\ \mathbf{e}_\gamma(\gamma)=-\mathbf{e}_1\sin\gamma+\mathbf{e}_2\cos\gamma,\ \mathbf{e}_3\}$$

формулой

$$D=\{\mathbf{x}=r\mathbf{e}_r(\gamma)+x_3\mathbf{e}_3:\ r\in(r_i,r_0),\ \gamma\in[0,2\pi),\ x_3\in R\},\tag{2}$$

где $0<r_i<r_0<+\infty$.

Под классом $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\text{sh}}(D^4)$ здесь подразумевается сужение класса $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$ всех гладких в D^4 векторных полей $\mathbf{v}$, каждое из которых при любом $t\in[0,+\infty)$ обладает следующими свойствами:

1) поле $\mathbf{v}$ соленоидально в D;

2) линии поля $\mathbf{v}$ всюду в D совпадают с его вихревыми линиями[2] (линиями поля $\operatorname{rot}\mathbf{v}$);

3) линии поля $\mathbf{v}$ лежат на аксиально симметричных цилиндрических поверхностях, вложенных в D.

Необходимость в сужении класса $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$ объясняется существованием ограничений, накладываемых на поля $\mathbf{v}\in\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$ условиями разрешимости первого из уравнений системы (1) в классе $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$, дополнительными по отношению к условиям, непосредственно выделяющим сам класс $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$. Поэтому дадим описание класса $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$.

1. Класс $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$ исчерпывается полями $\mathbf{v}$, подчиняющимися ограничениям, которые выражаются системой уравнений

$$(\mathbf{n}(\mathbf{x}),\mathbf{v}(\mathbf{x},t))=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\lambda(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\tag{3}$$

в D^4 при условии

$$\oint\limits_{\mathcal{L}}(d\mathbf{x},\mathbf{v}(\mathbf{x},t))\not\equiv 0,\tag{4}$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x})=\mathbf{n}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3))=\mathbf{e}_r(\gamma)$, $\lambda(\mathbf{x},t)=\lambda(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)=\lambda(r,\gamma,x_3,t)$ — некоторое непрерывное в D^4 скалярное поле, $\mathcal{L}$ — произвольный, спрямляемый замкнутый контур в D.

Последнее из уравнений (3) выражает условие коллинеарности векторов поля и поля его ротора в каждой точке $\mathbf{x}\in D$ при любом $t\in[0,+\infty)$ в форме, предложенной И. С. Громекой [2]. Альтернативой служит условие в форме, предложенной в [1]. Отсюда вытекают различия в подходах к построению класса векторных полей, подобного классу $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$ (подробнее см. [3], а также п. 5 настоящей статьи).

Любое векторное поле, принадлежащее классу $\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$, выражается согласно [3] следующей формулой:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)=\mathbf{v}(r,\gamma,t)=v_\gamma(r,t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+v_3(r,t)\mathbf{e}_3.\tag{5}$$

Здесь $(v_\gamma(r,t),v_3(r,t))$ — пара скалярных полей таких, что

$$\frac{1}{r}(rv_\gamma(r,t))'=\lambda(r,t)v_3(r,t),\quad v_3'(r,t)=-\lambda(r,t)v_\gamma(r,t),\tag{6}$$

где штрих означает дифференцирование по r.

2. Рассмотрим систему (1). Второе ее уравнение при $\mathbf{v}\in\mathfrak{L}_{\text{sh}}(D^4)$ удовлетворяется тождественно, а первое можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}=-\boldsymbol{\nabla}\Big(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+u\Big)\ \text{ в }\ D^4,\tag{7}$$

[2] В [1] такие поля $\mathbf{v}$ называются для краткости продольно вихревыми.

где $v = |\mathbf{v}|$, используя выражение $\mathbf{f} = -\boldsymbol{\nabla} u$ и для векторного поля $\mathbf{f}$ через его скалярный потенциал $u = u(\mathbf{x}, t)$, а также формулу $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} v^2/2$, следующую из тождества $\boldsymbol{\nabla} v^2/2 \equiv [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}$ при $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D^4)$.

Будем полагать ниже, что потенциал u в (7) подчиняется ограничениям, которые оговариваются в следующем положении.

П о л о ж е н и е 1. Потенциал $u = u(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t) = u(r, \gamma, x_3, t)$ есть гладкое в D скалярное поле, непрерывное при любом $t \in [0, +\infty)$.

Правая часть в (7) есть поле, потенциальное в D при любом $t \in [0, +\infty)$, поэтому уравнение (7) разрешимо, если и только если

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (d\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), \partial \mathbf{v}(r, \gamma, t)/\partial t) = 0 \ \text{ в } \ D^4 \tag{8}$$

для любого спрямляемого замкнутого контура $\mathcal{L}$ в D.

Условие потенциальности (8) поля $\partial \mathbf{v}/\partial t$ и служит тем самым дополнением к условиям (3), (4), сужающим класс $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D^4)$.

Найдем циркуляцию (8) для каждого из контуров, задаваемых следующими формулами:

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_r = \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{31}\mathbf{e}_3 : \ \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_2) + x_3\mathbf{e}_3 : \ x_3 \in [x_{31}, x_{32}]\big\} \\
\cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{32}\mathbf{e}_3 : \ \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_1) + x_3\mathbf{e}_3 : \ x_3 \in [x_{31}, x_{32}]\big\}, \\
\mathcal{L}_\gamma = \big\{\mathbf{x} = r_1\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 : \ x_3 \in [x_{31}, x_{32}]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{32}\mathbf{e}_3 : \ r \in [r_1, r_2]\big\} \\
\cup \big\{\mathbf{x} = r_2\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 : \ x_3 \in [x_{31}, x_{32}]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{31}\mathbf{e}_3 : \ r \in [r_1, r_2]\big\}, \\
\mathcal{L}_3 = \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_1) + x_3\mathbf{e}_3 : \ r \in [r_1, r_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r_2\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 : \ \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]\big\} \\
\cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_2) + x_3\mathbf{e}_3 : \ r \in [r_1, r_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r_1\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 : \ \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]\big\}, \\
\mathcal{L}_3' = \{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 : \ \gamma \in [0, 2\pi]\}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Используя (5), придем к формулам

$$\int\limits_{\mathcal{L}_r} \Big(d\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma, t)\Big) = -r \int\limits_{x_{31}}^{x_{32}} \Big(\mathbf{e}_\gamma(\gamma), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma, t)\Big)\, d\gamma$$

$$+ \int\limits_{x_{31}}^{x_{32}} \Big(\mathbf{e}_3, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma_2, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma_1, t)\Big)\, dx_3 \equiv 0,$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}_\gamma} \Big(d\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma, t)\Big) = \int\limits_{\gamma_{31}}^{\gamma_{32}} \Big(\mathbf{e}_3, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r_1, \gamma, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r_2, \gamma, t)\Big)\, dx_3$$

$$+ \int\limits_{r_1}^{r_2} \Big(\mathbf{e}_r(\gamma), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma, t)\Big)\, dr \equiv \Big(\frac{\partial}{\partial t}v_3(r_1, t) - \frac{\partial}{\partial t}v_3(r_2, t)\Big)(x_{32} - x_{31}),$$

$$\oint\limits_{\mathcal{L}_3} \Big(d\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma, t)\Big) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \Big[\Big(\mathbf{e}_r(\gamma_1), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma_1, t)\Big) - \Big(\mathbf{e}_r(\gamma_2), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r, \gamma_2, t)\Big)\Big]\, dr$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big(\mathbf{e}_\gamma(\gamma), r_2\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r_2, \gamma, t) - r_1\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r_1, \gamma, t)\Big)\, d\gamma \equiv \Big[r_2\frac{\partial}{\partial t}v_\gamma(r_2, t) - r_1\frac{\partial}{\partial t}v_\gamma(r_1, t)\Big](\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$\oint\limits_{\mathcal{L}_3'} \Big(d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r,\gamma,t)\Big) = r\int\limits_0^{2\pi} \Big(\mathbf{e}_\gamma(\gamma), \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r,\gamma,t)\Big)\, d\gamma \equiv 2\pi r \frac{\partial}{\partial t} v_\gamma(r,t).$$

Согласно этим формулам циркуляция поля $\partial\mathbf{v}/\partial t$ по любому из выделенных контуров $\mathcal{L}_r$, $\mathcal{L}_\gamma,\ \mathcal{L}_3,\ \mathcal{L}_3'$ равна нулю, если и только если

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\gamma(r,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} v_3(r,t) = b_3(t) \ \text{ в } \ D^4, \tag{10}$$

где $b_3(t)$ — некоторая непрерывная функция $t \in [0,+\infty)$. Условия (10) можно заменить одним условием, а именно

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r,\gamma,t) = b_3(t)\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\nabla}(b_3(t)x_3 + b_{30}) \ \text{ в } \ D^4,$$

где b_{30} — постоянная, выражающая их в векторной форме. Из этого условия следует, что поле $\partial\mathbf{v}/\partial t$, удовлетворяющее условиям (10), удовлетворяет и условию (8). Вместе с тем условия (10) удовлетворяются тогда и только тогда, когда $v_\gamma(r,t) = w_\gamma(r),\ v_3(r,t) = w_3(r) + V_3(t)$, где

$$V_3(t) = \int\limits_0^t b_3(t')\, dt'. \tag{11}$$

Таким образом, векторное поле $\mathbf{v}$ (5) удовлетворяет дополнительному (сужающему) условию (8), если и только если

$$v_\gamma(r,t) = w_\gamma(r), \quad v_3(r,t) = w_3(r) + V_3(t), \tag{12}$$

и принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D^4)$, если и только если $w_\gamma(r),\ w_3(r),\ V_3(t)$ удовлетворяют (см. (6)) в D^4 условиям

$$\frac{1}{r}(rw_\gamma(r))' = \lambda(r,t)(w_3(r) + V_3(t)), \quad w_3'(r) = -\lambda(r,t)w_\gamma(r). \tag{13}$$

3. Установим, какие ограничения накладываются условиями (13). Так, второе из них выполнимо, как легко видеть, если и только если

$$\lambda(r,t) = \lambda(r) \ \text{ в } \ D^4. \tag{14}$$

Первое же при таком λ сводится к условию $(rw_\gamma(r))'/r = \lambda(r)w_3(r) + \lambda(r)V_3(t)$, которое должно выполняться при любом $t \in [0,+\infty)$, что имеет место, если и только если

$$\lambda(r)\frac{d}{dt}V_3(t) = \lambda(r)b_3(t) = 0. \tag{15}$$

Ограничения, накладываемые условием (15), зависят от свойств поля $\lambda(r)$. Учитывая это, выделим два случая

$$\lambda(r) \equiv 0 \ \text{ в } \ D^4; \tag{16}$$

$$\lambda(r) \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ D^4. \tag{17}$$

В случае (16) условие (15) удовлетворяется при любой непрерывной функции $b_3(t)$, а условия (13) принимают вид $1/r(rw_\gamma(r))' = 0,\ w_3'(r) = 0$ и удовлетворяются, если и только если $w_\gamma(r) = c_\gamma/r,\ w_3(r) = 0$, т. е. при

$$v_\gamma(r,t) = \frac{1}{r}c_\gamma, \quad v_3(r,t) = V_3(t),$$

где c_γ — произвольная постоянная, $V_3(t)$ — некоторая гладкая при $t \in [0, +\infty)$ функция. Векторное поле (5) тогда выражается формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma,t) = \frac{1}{r}c_\gamma \mathbf{e}_\gamma(\gamma) + V_3(t)\mathbf{e}_3 \ \text{ в } \ D^4. \tag{18}$$

Ротор поля (18) равен нулю в D^4 (см. последнее из уравнений (3) и формулы (14), (16)), но циркуляция его по любому спрямляемому замкнутому контуру $\mathcal{L}$ в D, не стягиваемому в D в точку, отлична от нуля при $c_\gamma \neq 0$:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3), \mathbf{v}(r,\gamma,t)) = \oint\limits_{\mathcal{L}_3'} (d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3), \mathbf{v}(r,\gamma,t)) = 2\pi c_\gamma,$$

где $\mathcal{L}_3'$ определяется формулой (9). Стало быть, поле (18) удовлетворяет в D^4 условию (4), а значит, принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D^4)$.

В случае (17) условие (15) удовлетворяется, если и только если $b_3(t) \equiv 0$. Условия (13) при $b_3(t) \equiv 0$ записываются в виде

$$\frac{1}{r}(rw_\gamma(r))' = \lambda(r)w_3(r), \quad w_3'(r) = -\lambda(r)w_\gamma(r) \ \text{ в } \ D^4,$$

поскольку $V_3(t) \equiv 0$ при $b_3(t) \equiv 0$ (см. (11)). Компоненты поля (5) выражаются формулами $v_\gamma(r,t) = w_\gamma(r)$, $v_3(r,t) = w_3(r)$ (см. (12)), а само поле (5) — формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma) = w_\gamma(r)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + w_3(r)\mathbf{e}_3 \ \text{ в } \ D^4.$$

Резюмируя сказанное, сформулируем следующее

Определение 1. Сужение $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{sh}}(D^4)$ есть объединение принадлежащих $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D^4)$ классов $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{sh}}(D^4)$, $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$, каждый из которых образован векторными полями $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D^4)$, удовлетворяющим условиям (8).

Описание классов $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{sh}}(D^4)$, $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$ дадим в двух следующих предложениях.

Предложение 1. *Соответствие* $(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) \to \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *определяет в* D^4 *векторное поле класса* $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{sh}}(D^4)$, *если и только если это соответствие устанавливается правилом*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma,t) = \frac{1}{r}c_\gamma \mathbf{e}_\gamma(\gamma) + V_3(t)\mathbf{e}_3 \ \text{ в } \ D^4,$$

где c_γ *— отличная от нуля постоянная,* $V_3(t)$ *— гладкая при* $t \in [0, +\infty)$ *функция.*

Предложение 2. *Соответствие* $(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) \to \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *определяет в* D^4 *векторное поле класса* $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$, *если и только если это соответствие устанавливается правилом*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma) = w_\gamma(r)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + w_3(r)\mathbf{e}_3 \ \text{ в } \ D^4, \tag{19}$$

где $w_\gamma(r)$, $w_3(r)$ *— гладкие скалярные поля, удовлетворяющие условиям*

$$\frac{1}{r}(rw_\gamma(r))' = \lambda(r)w_3(r), \quad w_3' = -\lambda(r)w_\gamma(r) \tag{20}$$

при любом наперед заданном скалярном поле $\lambda(r)$*, непрерывном и отличном от нуля п. в.* D^4*.*

4. Вернемся к уравнению (7). Пусть $\mathbf{v} \in \widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{sh}}(D^4)$. Тогда уравнение (7) можно выразить в виде $\dot{V}_3\mathbf{e}_3 = -\boldsymbol{\nabla}(p/\rho + 1/2v^2 + u)$, где $\dot{V}_3 = dV_3/dt$, а затем в виде

$$\boldsymbol{\nabla}\Big(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + u + \dot{V}_3 x_3 + c_3\Big) = 0 \ \text{ в } \ D^4,$$

где c_3 — произвольная постоянная. Это уравнение удовлетворяется в D^4, если и только если

$$\frac{1}{\rho}p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)+\frac{1}{2}v^2(r,t)+u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)+\dot V_3(t)x_3+c_3=\frac{1}{\rho}P(t), \tag{21}$$

где $v^2(r,t)=(c_\gamma/r)^2+V_3^2(t)$, $P(t)$ — некоторая непрерывная при $t\in[0,+\infty)$ функция. Разрешая (21) относительно p, получим

$$p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)=P(t)-\rho\Big[\frac{1}{2}v^2(r,t)+u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)+\dot V_3(t)x_3+c_3\Big]. \tag{22}$$

Формула (22) выражает искомое скалярное поле p в D^4 как непрерывную функцию $t\in[0,+\infty)$ и гладкую функцию переменных r, γ, x_3 (см. (2)) при условиях положения 1.

Принимая во внимание сказанное, сформулируем следующее

Предложение 3. *Пара* $(\mathbf{v},p)$ *полей есть решение системы уравнений* (1) *в* D^4, *где первое в* D^4 *является гладким, а второе — гладким в области* D *и непрерывным при* $t\in[0,+\infty)$, *если*:

1) $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{sh}}(D^4)$;

2) *потенциал* u *векторного поля* $\mathbf{f}$ *в* (1) *удовлетворяет условиям положения* 1;

3) $p=p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ — *скалярное поле, определяемое формулой* (22) *при условии, что* $P(t)$ — *непрерывная функция* $t\in[0,+\infty)$.

Пусть $\mathbf{v}\in\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$. Тогда уравнение (7) можно выразить в виде $\boldsymbol{\nabla}(p/\rho+v^2/2+u)=0$. Это уравнение удовлетворяется, если и только если

$$\frac{1}{\rho}p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)+\frac{1}{2}v^2(r)+u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)=\frac{1}{\rho}P(t)\ \text{ в }\ D^4, \tag{23}$$

где $v^2(r)=w_\gamma^2(r)+w_3^2(r)$, $P(t)$ — некоторая функция $t\in[0,+\infty)$. Разрешая (23) относительно p, придем к формуле

$$p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)=P(t)-\rho\Big[\frac{1}{2}v^2(r)+u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)\Big], \tag{24}$$

выражающей искомое поле p в D^4 как непрерывную функцию переменной $t\in[0,+\infty)$ и как гладкую функцию переменных r, γ, x_3 (см. (2)) при условиях положения 1.

Заметим далее, что векторное поле $\mathbf{v}$, принадлежащее классу $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$, выражается, согласно предложению 2, через пару скалярных полей $w_\gamma(r)$, $w_3(r)$. Последние не являются независимыми, так как подчиняются условиям (20), связывающим их в дифференциальной форме с некоторым скалярным полем $\lambda(r)$. Следовательно, пара полей $w_\gamma(r)$, $w_3(r)$ при заданном поле $\lambda(r)$ есть общее решение системы уравнений (20). Ниже в п. 5 в качестве иллюстрации будет рассмотрена разновидность такого подхода, предложенного впервые И. С. Громекой (см. [2]), на конкретном примере поля $\lambda(r)$, которое в отличие от [2] не обязательно равно константе всюду в D^4. Здесь же, принимая во внимание результаты работы [3], ограничимся конструктивным описанием класса $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$, которое дается в следующем предложении.

Предложение 4. *Соответствие* $(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)\to\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *определяет в* D^4 *векторное поле класса* $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$, *если и только если это соответствие устанавливается правилом*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)=\mathbf{v}(r,\gamma)=\sigma_\varepsilon\exp\left\{-\int\limits_{r_\varepsilon}^{r}\frac{1}{r'}\sin^2\psi(r')\,dr'\right\}[\sin\psi(r)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+\cos\psi(r)\mathbf{e}_3],$$

где σ_ε — *произвольная не равная нулю постоянная,* r_ε — *некоторое фиксированное значение переменной* r *из интервала* (r_i,r_0), $\psi(r)$ — *некоторое гладкое ограниченное в* D^4 *скалярное поле, причем такое, что* $d\psi(r)/dr+(1/(2r))\sin 2\psi(r)\neq 0$ *п. в. в* D^4.

Согласно этому предложению, векторное поле $\mathbf{v}$, принадлежащее классу $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\rm sh}(D^4)$, выражается только через скалярное поле $\psi(r)$. Что же касается поля $\lambda(r)$, то оно выражается через поле $\psi(r)$ формулой

$$\lambda(r) = \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{1}{2r}\sin 2\psi(r) \ \text{ в } \ D^4.$$

Сформулируем теперь следующее

Предложение 5. *Пара $(\mathbf{v}, p)$ полей есть решение системы уравнений (1) в D^4, где первое в D^4 является гладким, а второе — гладким в области D и непрерывным при $t \in [0, +\infty)$, если:*

1) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t)$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\rm sh}(D^4)$;

2) *потенциал* u *векторного поля* $\mathbf{f}$ *в (1) удовлетворяет условиям положения 1;*

3) $p = p(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t)$ — *скалярное поле, определяемое формулой (24) при условии, что* $P(t)$ — *непрерывная функция* $t \in [0, +\infty)$.

На основе предложений 3 и 5 сформулируем следующую теорему.

Теорема. *Пары $(\mathbf{v}, p)$ полей, охарактеризованные в предложениях 3 и 5, исчерпывают решения системы уравнений (1) в D^4 при условии, что $\mathbf{v}$ — векторное поле из класса $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\rm sh}(D^4) = \widetilde{\mathfrak{L}}'_{\rm sh}(D^4) \cup \widetilde{\mathfrak{L}}''_{\rm sh}(D^4)$, где классы $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\rm sh}(D^4)$ и $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\rm sh}(D^4)$ охарактеризованы в предложениях 1 и 4.*

5. Выделим в классе $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\rm sh}(D^4)$ семейство $\widetilde{\mathfrak{L}}^{(c)}_{\rm sh}(D^4)$, используя условия (20) из предложения 2 и полагая, что поле (19) принадлежит семейству $\widetilde{\mathfrak{L}}^{(c)}_{\rm sh}(D^4)$ тогда и только тогда, когда поля $w_\gamma(r)$, $w_3(r)$ удовлетворяют условиям (20) при

$$\lambda(r) = kr^{2a} \neq 0 \ \text{ в } \ D^4, \tag{25}$$

где k и a — вещественные постоянные, ограничения на выбор которых оговариваются ниже, множитель 2 в показателе степени вводится для удобства.

Систему уравнений, выражающую условия (20), можно преобразовать (см. систему уравнений [3, (53)]) к виду

$$\lambda w_3'' + \frac{1}{r}(\lambda - r\lambda')w_3' + \lambda^3 w_3 = 0, \quad w_3' = -\lambda w_\gamma, \tag{26}$$

где аргумент для сокращения записи опускается, если класс задаваемых полей λ сузить до класса C^1, а класс полей w_3 — до класса C^2.

Первое уравнение системы (26) при λ (25) принимает вид

$$w_3'' + \frac{1-2a}{r}w_3' + (kr^{2a})^2 w_3 = 0 \tag{27}$$

и сводится к одному из случаев дифференциального уравнения

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{dW(z)}{dz} + \left[(bcz^{c-1})^2 + \frac{a^2 - m^2c^2}{z^2}\right]W(z) = 0 \tag{28}$$

(где a, b, c, m — постоянные), допускающего (см. [4, гл. 21, § 8, п. 5]) решение при помощи цилиндрических функций $Z_m(bz^c)$. В этом нетрудно убедиться, полагая $z = r$, $a = mc$ в уравнении (28), затем отождествляя a в (28) с a в (27) и полагая $k = bc$ в (27) и $c = 1/(1-2m)$ в (28). В результате уравнение (27) можно записать в виде

$$w_3'' + \frac{1-2a}{r}w_3' + (bcr^{c-1})^2 w_3 = 0. \tag{29}$$

При этом постоянные a, k (те, что и в (25)) и постоянная c выражаются через независимо задаваемые вещественные постоянные b, m формулами

$$a = \frac{m}{1-2m}, \quad k = \frac{b}{1-2m}, \quad c = \frac{1}{1-2m}, \tag{30}$$

причем выбор постоянных b, m подчиняется ограничениям

$$b > 0, \qquad m \neq \frac{1}{2}, \tag{31}$$

а постоянная $a \neq -1/2$.

Общее решение уравнения (29) выражается согласно [4] формулой

$$w_3 = r^a Z_m(\zeta) \tag{32}$$

Здесь $\zeta = br^c$, а $Z_m(\zeta)$ — общее решение уравнения Бесселя

$$\frac{d^2W(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} + \Big(1 - \frac{m^2}{\zeta^2}\Big)W(\zeta) = 0.$$

Решение второго уравнения системы (26) при λ (25) имеет вид

$$w_\gamma = -\Big(\frac{\zeta}{b}\Big)^m \Big[\frac{d}{d\zeta}Z_m(\zeta) + \frac{m}{\zeta}Z_m(\zeta)\Big]. \tag{33}$$

Резюмируя сказанное, сформулируем следующее

Предложение 6. *Семейство* $\widetilde{\mathfrak{L}}^{(c)}_{\mathrm{sh}}(D^4)$ *векторных полей, выделенное из класса* $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$ *в случае, когда скалярное поле* $\lambda(r)$ *(см. предложение 2) задается формулой* (25) *при условиях* (30), (31), *исчерпывается полями* $\mathbf{v}$ (19) *при* w_γ (33), w_3 (32).

Принимая во внимание это предложение и предложение 5, сформулируем

Предложение 7. *Пара* $(\mathbf{v}, p)$ *полей, где первое принадлежит семейству* $\widetilde{\mathfrak{L}}^{(c)}_{\mathrm{sh}}(D^4)$, *а второе охарактеризовано в предложении* 5, *есть решение системы уравнений* (1) *в* D^4.

Отметим, наконец, что семейству $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D^4)$ принадлежит в частности и векторное поле

$$\mathbf{v} = C[J_1(\zeta)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + J_0(\zeta)\mathbf{e}_3]\Big|_{\zeta=kr}, \tag{34}$$

где C — отличная от нуля вещественная постоянная, $J_1(\zeta)$ и $J_0(\zeta)$ — функции Бесселя первого рода порядка один и ноль (см., например, [4, гл. 21, § 8, п. 1]). Компоненты его выражаются формулами, следующими из (33), (32) при $a = 0$, $C = 1$, $m = 0$, $k = b$ (что имеет место, когда $\lambda(r) \equiv k$ (см. (25)) и при $Z_0(\zeta) = CJ_0(\zeta)$. Функции Бесселя первого рода при вещественных значениях аргумента $\zeta = kr \in [0, +\infty)$ — гладкие ограниченные функции, принимающие вещественные значения. Учитывая это, пространственную область определения D (см. (2)) поля (34) в D^4 можно расширить до R^3. Тогда поле $\mathbf{v}$ (34) будет совпадать с полем $\mathbf{v}$, которое впервые было построено в [2], но иным способом (см. подробнее [3]).

6. В заключение отметим, что в прикладном плане найденные здесь решения могут использоваться для описания движения жидкости, заполняющей в каждый момент времени $t \geq 0$ область D (2) пространства R^3 при условии, что сжимаемостью, теплопроводностью и вязкостью жидкости можно пренебречь, поскольку законы движения такой модельной среды выражаются уравнением Эйлера и уравнением непрерывности для несжимаемой среды. Тогда в системе уравнений (1) под $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, ρ, $p(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ следует соответственно подразумевать скорость жидкости в точке $\mathbf{x} \in D$ в момент времени t, плотность жидкости, давление, плотность (на единицу массы) внешней потенциальной силы. При этом, однако, поля $\mathbf{v}$ и p должны подчиняться дополнительным условиям, а именно: 1) поле $\mathbf{v} \in \widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{sh}}(D^4)$ должно быть ограниченным в D^4; 2) поле p должно быть неотрицательным в D^4, поскольку давление в жидкости неотрицательно. Эти условия накладывают дополнительные ограничения на выбор скалярного потенциала $u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ в (22), (24), функций $V_3(t)$ (см. предложение 1), $P(t)$ и постоянной c_3 (см. (22)), а также функции $P(t)$ в (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121.
2. **Громека И.С.** Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. дис.... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1881. 107 с. (в кн.: И. С. Громека. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с.)
3. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 120–134.
4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.

Верещагин Владимир Пантелеевич Поступила 12.04.2013
д-р физ.-мат. наук, профессор
Российский государственный профессионально-педагогический университет,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

Том 20 № 1 2014

УДК 517.518

50 ЛЕТ ЗАДАЧЕ ШЁНБЕРГА О СХОДИМОСТИ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ[1]

Ю. С. Волков, Ю. Н. Субботин

Приводится обзор результатов о сходимости интерполяционного процесса для полиномиальных сплайнов и производных за 50 лет.

Ключевые слова: полиномиальные сплайны, интерполяция, сходимость.

Yu. S. Volkov, Yu. N.,Subbotin. 50 years to Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation.

A review of results on the convergence of interpolation process for polynomial splines and derivatives in the last 50 years is given.

Keywords: polynomial splines, interpolation, convergence.

Ровно 50 лет назад И. Шёнберг сформулировал задачу о сходимости сплайн-интерполяции.

З а д а ч а. На отрезке $[a,b]$ заданы разбиение $\Delta:\ a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ с диаметром $\|\Delta\| = \max\{x_0 - a, x_\nu - x_{\nu-1}, b - x_n\}$ и функция $f(x)$. Натуральный сплайн $S(x)$ степени $2m-1$ (порядка $2m$) с узлами в Δ интерполирует $f(x)$ в точках разбиения Δ. Можно ли установить, что

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(x) = f(x)$$

при единственном предположении $f(x) \in C[a,b]$? Интересен вопрос и о порядке приближения функции $f(x)$ сплайном $S(x)$ при различных предположениях гладкости $f(x)$, в том числе и по равномерному разбиению.

Эта задача приведена в разделе "Новые и нерешенные задачи" трудов конференции по теории приближения [1, p. 187], проходившей в Центре по проведению конференций Обервольфаха, которая была первой не только по указанной тематике, как пишет в воспоминаниях ее организатор П. Бутцер [2], был опубликован сборник трудов конференции по данной тематике, сделав результаты доступными широкому математическому сообществу.

Принято считать, что сплайны (как и сам термин "сплайн функции") появились в 1946 году в работе И. Шёнберга [3], где было проведено достаточно фундаментальное и обстоятельное исследование, однако сплайны без употребления самого термина изучались и раньше, например В. Кваде и Л. Коллатц изучали периодические сплайны в 1938 году (см. исторические замечания в монографии Л. Шумейкера [4, p. 10]). Но бурное изучение сплайнов началось лишь в начале 1960-х годов. Толчком послужила одна довольно простая работа Дж. Холледея [5], в которой он заметил, что кусочно кубические функции класса C^2 минимизируют функционал

$$\int \left[\sigma''(x)\right]^2 dx,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-07-00447, 14-01-00496), грантов совместных Интеграционных проектов СО РАН (проект 2012-Б-32) и УрО РАН (проект 12-С-1-1018), а также Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1).

близкий к интегралу энергии деформации, описывающему профиль упругой рейки, закрепленной в некотором наборе точек. Такие функции сразу стали основой аппарата описания и приближения кривых и поверхностей, в котором к тому времени возникла острая необходимость в связи с появлением первых компьютеров. А практический интерес к сплайнам вызвал потребность их всестороннего теоретического изучения. И в числе первых исследователей, изучающих сплайны, были именно специалисты исследовательских лабораторий связаные с прикладными исследованиями. Заметим, что один из авторов первой монографии по сплайнам [6] Дж. Алберг, работал в Объединенной Авиастроительной Корпорации (United Aircraft Corp.), а второй, Э. Нильсон, в Пратт энд Уитни Эйркрафт (Pratt & Whitney Aircraft). Один из ведущих специалистов в мире по сплайнам, автор книги [7] К. де Бор начинал свою карьеру в исследовательской лаборатории Дженерал Моторс (General Motors). А в нашей стране пионером практического применения сплайнов был Ю. С. Завьялов, начавший сотрудничество с авиастроительным заводом им. В. П. Чкалова.

На момент формулировки задачи И. Шёнбергу было известно, что

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S^{(\nu)}(x) = f^{(\nu)}(x), \qquad \nu = 0,\dots,m-1,$$

равномерно по x, если $f(x) \in C^m[a,b]$ (порядок сплайна $2m$). Эти результаты им были анонсированы в 1964 году [8], однако доказательство вышло лишь в 1969 [9]. В задаче Шёнберга речь идёт о *натуральных* сплайнах, т. е. о сплайнах, удовлетворяющих на краях отрезка $[a,b]$ *естественным* краевым условиям $S^{(\nu)}(a) = S^{(\nu)}(b) = 0$, $\nu = m,\dots,2m-2$. В дальнейшем в связи с большей практической востребованностью наибольшее распространение получили *полные* сплайны, т. е. сплайны с заданными на краях производными до порядка $m-1$: $S^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(a)$, $S^{(\nu)}(b) = f^{(\nu)}(b)$, $\nu = 1,\dots,m-1$, а также периодические сплайны. И вопросы сходимости в первую очередь исследовались для таких сплайнов.

Поставленная И. Шёнбергом задача оказалась не такой простой даже для случая кубических сплайнов ($m = 2$). Первые исследования о сходимости проводились именно для кубических сплайнов. По-видимому, первой работой в этом направлении была работа Дж. Уолша, Дж. Алберга и Э. Нильсона [10], где для функции $f(x) \in C^2[a,b]$ была показана сходимость $S(x)$ к $f(x)$ и $S'(x)$ к $f'(x)$. (Здесь и в дальнейшем, говоря про исследование сходимости сплайн-интерполяции, мы, естественно, будем считать, что диаметр разбиения стремится к нулю ($\|\Delta\| \to 0$), особо это не оговаривая). Для второй производной вопрос о сходимости в этой работе тоже изучался, но авторам удалось лишь установить не равномерную сходимость, а среднеквадратичную.

Мы будем говорить о *простых* сплайнах, т. е. о полиномиальных сплайнах наименьшего дефекта 1 или гладкости $2m-2$, если степень сплайна $2m-1$. Такие сплайны — даже кубические — имеют нелокальный характер, для их вычисления требуется решать систему линейных уравнений, а оценивание каких-либо неизвестных параметров вызывает необходимость оценки элементов или нормы обратной матрицы. Отметим, что именно в связи с изучением сходимости сплайн-интерполяции Дж. Албергом и Э. Нильсоном был предложен [11] метод оценки нормы обратной матрицы через величину диагонального преобладания для матриц с диагональным преобладанием, получивший широчайшее распространение во многих разделах вычислительной математики и линейной алгебры. Однако системы линейных уравнений с матрицами с диагональным преобладанием получаются только для кубических сплайнов, уже для сплайнов пятой степени ($m = 3$) диагональное преобладание, вообще говоря, отсутствует.

В работе [11] изучалась сходимость вторых производных кубических сплайнов для функций $f(x) \in C^2[a,b]$ уже в равномерной метрике, но сходимость была установлена только на последовательности асимптотически равномерных сеток. Г. Биркгоф и К. де Бор установили [12] сходимость $S'''(x)$ к $f'''(x)$ для кубических сплайнов при $f(x) \in C^3[a,b]$, но тоже при ограничениях на последовательность сеток, а именно, отношение максимального и минимального шагов сеток

$$R_\Delta = \frac{\|\Delta\|}{\min\limits_i (x_\nu - x_{\nu-1})}$$

должно быть ограничено, т. е.

$$R_\Delta \le R < \infty \tag{1}$$

для некоторого R. В этой же работе [12] получены оценки погрешности интерполяции

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K(R)\|\Delta\|^{4-k}\|f^{\mathrm{IV}}\|_\infty, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \tag{2}$$

где константа $K(R)$ зависит от величины R, ограничивающей характеристику сетки R_Δ. Эти оценки выполнены при условии (1). Мы используем стандартное обозначение для равномерной нормы для существенно ограниченных функций

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : \ x \in [a, b]\}.$$

В серии работ [13–15] Дж. Алберг, Э. Нильсон и Дж. Уолш изучали вопросы сходимости сплайнов произвольной нечетной степени $2m-1$ и обобщение на случай линейного дифференциального оператора (L-сплайны). Ими установлены следующие оценки погрешности: если $f(x) \in C^m[a, b]$, то

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K\|\Delta\|^{m-k-1/2}\|f^{(m)}\|_2, \qquad k = 0, \dots, m-1; \tag{3}$$

если $f(x) \in C^{2m}[a, b]$, то

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K\|\Delta\|^{2m-k-1}\|f^{(2m)}\|_1, \qquad k = 0, \dots, m-1; \tag{4}$$

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K(R)\|\Delta\|^{2m-k-1}, \qquad k = m, \dots, 2m-2, \tag{5}$$

причем константа K может зависеть от k или m, но не от расположения узлов последовательности сеток, а $K(R)$ зависит от границы R для сеточной характеристики R_Δ, которая должна быть ограниченной, и от интерполируемой функции (нормы). Мы используем стандартное обозначение нормы

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b [f(x)]^p\,dx\right]^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Кроме того, авторами была доказана сходимость $S^{(k)}(x)$ к $f^{(k)}(x)$ для всех $k = 0, \dots, 2m-1$ на последовательности вложенных сеток.

Заметим, что порядок приближения для кубического случая ($m = 2$), устанавливаемый оценками (3)–(5), ниже, чем полученный в работе [12]. Поэтому Дж. Алберг, Э. Нильсон и Дж. Уолш предположили, что порядок приближения k-й производной можно повысить, но не выше $2m-k$. Ими показано, что если порядок приближения производной порядка k функции $f(x) \in C^{2m}[a, b]$ равен $2m-k+\mu$ для некоторого $\mu > 0$, то $f^{(2m)}(x) \equiv 0$.

Первые окончательные результаты о сходимости были получены в 1966 году А. Шармой и А. Меиром [16] для кубических сплайнов, а именно, они установили оценки

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K\omega(f^{(k)}; \|\Delta\|), \qquad k = 1, 2,$$

при минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции $f(x) \in C^k[a, b]$ без всяких ограничений на последовательность сеток. Мы используем стандартное обозначение для модуля непрерывности

$$\omega(f; \delta) = \max\{|f(x') - f(x'')| : \ x', x'' \in [a, b]; \ |x' - x''| \le \delta\}.$$

А если функция $f(x)$ лишь из класса $C[a, b]$, то получена оценка

$$\|S - f\|_\infty \le (1 + R^2)\,\omega(f; \|\Delta\|), \tag{6}$$

т. е. сходимость имеет место при ограничениях на отношение R_Δ максимального и минимального шагов последовательности сеток Δ. Наряду с сеточной характеристикой R_Δ, которую мы будем назавать *глобальной*, А. Шарма и А. Меир предложили рассматривать и другую характеристику сетки, которую мы будем называть *локальной*,

$$\rho_\Delta = \max_{|i-j|=1} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_j - x_{j-1}}. \tag{7}$$

Для функций $f(x) \in C^3[a,b]$ и сеток Δ с $\rho_\Delta \le \rho$ ими при $\rho < 2$ установлена оценка

$$\|S''' - f'''\|_\infty \le \Big[1 + \frac{(1+\rho)^2}{2-\rho}\Big]\omega(f'''; \|\Delta\|).$$

В 1967 году С. Норд показал [17], что при сходимости процесса сплайн-интерполяции в $C[a,b]$ ограничение (1) просто убрать нельзя, он привел пример непрерывной функции $f(x)$ и последовательности сеток с нарушенным условием (1) таких, что процесс расходится, причем сходимости нет и в p-нормах для $p \ge 1$. Также в этой работе были несколько улучшены константы в оценках из [16].

В дальнейшем появился ряд работ по усилению примера С. Норда. Мы упомянем лишь исследования С. Б. Стечкина и его учеников Ю. Н. Субботина и Ал. А. Привалова [18–20]. Они попытались определить максимально широкий класс интерполируемых функций, для которых соответствующая последовательность интерполяционных сплайнов сходится без ограничений на последовательность сеток. Оказалось, для того, чтобы для непрерывной функции $f(x)$ имела место безусловная сходимость, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежала классу Липшица Lip 1. Заметим, что в примере Норда $f \in \mathrm{Lip}\, 1/3$.

Отметим, что исследования С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина [18; 19] проводились одновременно для параболических и кубических сплайнов. Здесь необходимо сделать отступление, задача интерполяции для параболических сплайнов, да и любых сплайнов четной степени требует другой постановки, отличной от постановки для сплайнов нечетной степени, так как в противном случае сплайн может и не существовать (см. [15]). Ю. Н. Субботин для сплайнов четной степени предложил [21] выбирать узлы сплайна между точками интерполяции. Такая конструкция возникла [22] как решение задачи Н. Н. Яненко о наилучшей оценке n-й производной функции, n-е конечные разности которой ограничены. Такое определение интерполяционных сплайнов четной степени оказалось весьма удачным, и параболические сплайны по свойствам похожи на кубические сплайны, для тех и других можно применять единые методы исследований, поэтому многие результаты для параболических сплайнов перенесены с кубических, в частности, получена безусловная сходимость $S'(x)$ к $f'(x)$ для $f(x) \in C^1[a,b]$ и $S''(x)$ к $f''(x)$ для $f(x) \in C^2[a,b]$, а для сходимости $S(x)$ к $f(x)$ в $C[a,b]$ также необходимы ограничения на последовательность сеток, например, ограниченность глобальной сеточной характеристики (1).

При интерполяции функций $f(x) \in C^4[a,b]$ кубическими сплайнами Ч. Холл в 1968 году предложил [23] новые оценки погрешности, улучшающие оценки (2) Г. Биркгоффа и К. де Бора,

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K_k \|\Delta\|^{4-k} \|f^{\mathrm{IV}}\|_\infty \tag{8}$$

с константами

$$K_0 = 5/384, \quad K_1 = (9+\sqrt{3})/216, \quad K_2 = (3R+1)/12, \quad K_3 = (R^2+1)/2,$$

причем константа K_0 оказалась точной.

Э. Ченьи и Ф. Шурер построили [24] пример кубической сплайн-интерполяции с нарушением условия (1), т. е. $R_\Delta \to \infty$, однако последовательность норм операторов интеполяции оказалась ограниченной, что эквивалентно сходимости соответствующей последовательности сплайнов $S(x)$ к интеполируемой функции $f(x)$ для любой непрерывной функции $f(x)$. Кроме того, они показали, что если в их примере увеличивать величину локальной характеристики сетки ρ_Δ, то последовательность норм интерполяционных операторов перестает быть ограниченной. Поэтому исследование сходимости в терминах локальной характеристики сетки более содержательно: от величины ρ ($\rho_\Delta \le \rho$) может зависеть сходимость, в то время как от величины R возможность сходимости или расходимости не зависит.

В 1969 году А. Меир и А. Шарма, которые ввели в рассмотрение локальную сеточную характеристику ρ_Δ для изучения сходимости третьих производных в C^3, для сеток с $\rho_\Delta \le \rho$ получили [25] условие в терминах этой локальной характеристики $\rho < \sqrt{2}$ для сходимости $S(x)$ к $f(x)$ в $C[a,b]$. Им последовали другие математики с целью улучшить условия сходимости процесса интерполяции в терминах локальной сеточной характеристики ρ_Δ [26–30].

Особо выделим работу Ю. С. Завьялова [27], в которой он установил сходимость $S(x)$ к $f(x)$ в $C[a,b]$ при ограничении $\rho < 1+\sqrt{2}$ и сходимость $S'''(x)$ к $f'''(x)$ для функций $f(x) \in C^3[a,b]$ при условии $\rho < 2.55$, а также усилил некоторые известные на тот момент оценки погрешности интерполяции. Подход Ю. С. Завьялова оказалось возможным усилить и получить окончательный результат в этом направлении. Имеется в виду найти такую величину ρ^*, что при $\rho < \rho^*$ процесс будет всегда сходиться, а при $\rho > \rho^*$ возможна расходимость.

Такую идею реализовал Н. Л. Зматраков [31] в 1975 году и получил $\rho^* = (3+\sqrt{5})/2$. При $\rho \ge \rho^*$ Н. Л. Зматраков построил достаточно тонкие и сложные примеры, показывающие, что существуют непрерывная функция $f(x)$ и последовательность сеток такие, что соответствующая последовательность интерполяционных кубических сплайнов $S(x)$ расходится хотя бы в одной точке. Независимо такой же результат получил [32] в 1976 году К. де Бор, использовавший при $\rho > \rho^*$ пример расходимости М. Марсдена [29], однако его аргументация расходимости при $\rho = \rho^*$ представляется нам недостаточной (см. [33]). Позже более простое доказательство сходимости и примеры расходимости получены в [34] и [35].

Аналогичные проблемы Н. Л. Зматраков и Ю. Н. Субботин рассматривали [36] для предэрмитовых сплайнов произвольной степени и нашли точные значения локальных характеристик ρ^*, таких, что при $\rho < \rho^*$ сходимость есть, а при $\rho > \rho^*$ имеются примеры расходимости. При этом задача рассматривалась не только в равномерной метрике, но и в метриках L_p ($1 \le p < \infty$). В последнем случае ρ^* зависит от степени сплайна и от p.

Как мы уже отмечали, введенные Ю. Н. Субботиным интерполяционные параболические сплайны похожи по свойствам на кубические, и к ним можно применять одинаковые методы исследования. В соответствии с этим Н. Л. Зматраков в работе [31] исследование провел не только для кубических сплайнов, но и для параболических, для них $\rho^* = 2+\sqrt{3}$.

В 1974 году М. Марсден тоже рассмотрел [37] задачу интерполяции сплайнами второй степени, но его конструкция интерполяционного сплайна отличается от конструкции сплайна Ю. Н. Субботина. Если в подходе по Субботину заданным считается множество точек интерполяции и узлы сплайна выбираются посередине между точками интеполяции, то в подходе по Марсдену, наоборот, считаются заданными узлы сплайна, а точки интерполяции выбираются посередине между узлами сплайна. В итоге получаются две принципиально различные конструкции, предназначенные для разных задач. Например, если задан набор дискретных значений, которые требуется интерполировать, то здесь подходит сплайн по Субботину, в то время как сплайн по Марсдену будет существовать не для любой неравномерной сетки данных. В других случаях, наоборот, подходят именно сплайны по Марсдену. Например, при приближении функции (значения которой можно вычислять в любой точке) требуется, чтобы узлы сплайна находились в определенных точках (это может диктоваться, например, положением возможных разрывов второй производной интерполянта). Такая задача легко решается сплайном по Марсдену, а сплайн по Субботину для каких-то сеток может не существовать.

Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в общем случае эти два разных сплайна, как оказалось, обладают различными аппроксимативными свойствами. М. Марсден установил, что имеют место безусловные сходимости $S(x)$ к $f(x)$ для любых непрерывных функций $f(x)$ и $S'(x)$ к $f'(x)$ для $f(x) \in C^1[a,b]$. Кроме того, он приводит оценки погрешности интерполяции для сплайна и производных, дополнение и уточнение которых приводится в [38; 39].

В 1977 году Н. Л. Зматраков нашел [40] условия на последовательность сеток, при которых третьи производные интерполяционных кубических сплайнов $S'''(x)$ будут сходиться к третьей производной $f'''(x)$ интерполируемой функции $f(x) \in C^3[a,b]$. Условия оказались идентичными условиям, необходимым для сходимости интерполяционного процесса в $C[a,b]$, т. е. $\rho < \rho^* = (3+\sqrt{5})/2$. Причем так же, как и в [31], им приведен пример функции $f(x)$ теперь уже из $C^3[a,b]$ и последовательности сеток, для которых $\rho \geq \rho^*$, таких, что $\|S'''\|_\infty \to \infty$.

Можно сказать, что данная работа завершила исследования сходимости процесса сплайн-интерполяции для кубических сплайнов. Потребовалось 14 лет, чтобы решить задачу Шёнберга [1, p. 187] лишь для кубических сплайнов. Итак, установлено, что $S^{(k)}(x)$ сходится к $f^{(k)}(x)$ при $f(x) \in C^k[a,b]$ без всяких ограничений на последовательность сеток только для $k = 1, 2$, а при $k = 0, 3$ найдены необходимые и достаточные условия для сходимости процесса интерполяции в терминах локальной сеточной характеристики ρ_Δ. Условия получены и в терминах глобальной сеточной характеристики R_Δ, но эти ограничения $R_\Delta \leq R < \infty$ мало содержательны.

Отметим еще ряд работ по сходимости процессов интерполяции для кубических сплайнов, в которых изучались и другие условия на сетки [41–44], а также в других метриках [45; 46].

Еще один важный вопрос возникает, когда мы говорим про сходимость процесса интерполяции, — это скорость сходимости, т. е. порядки приближения и константы в оценках. Что касается кубических и параболических сплайнов, то максимальные порядки к тому времени для всех классов были тоже установлены. Упомянем работу В. Л. Мирошниченко [47], в которой он показал, что для получения максимального для кубических сплайнов порядка приближения $\|\Delta\|^4$ достаточно глакости интерполируемой функции $C^4 C^2_\Delta[a,b]$, т. е. функция только между узлами сетки Δ должна быть гладкости C^4, а в узлах достаточно гладкости C^2.

Отметим еще одно удивительное свойство интерполяционных сплайнов, Дж. Алберг, Э. Нильсон и Дж. Уолш [6] заметили, что с помощью кубических интерполяционных сплайнов можно приближать четвертую производную интерполируемой функции на асимптотически равномерных сетках. Т. Лукас установил [48], что на равномерных сетках скачок β_i, т. е. разрыв старшей производной в узле, отнесенный к шагу сетки, приближает четвертую производную интерполируемой функции с четвертым порядком

$$\beta_i = \frac{S'''(x_i+0) - S'''(x_i-0)}{h} = f^{\mathrm{IV}}(x_i) + O(h^4), \qquad h = x_i - x_{i-1}.$$

А что касается точных констант в оценках погрешностей интерполяции, то до настоящего времени не везде пока они известны. В 1976 году Ч. Холл и В. Мейер предложили [49] новый метод получения оценок погрешностей. Ими установлены оценки вида (8) с константами

$$K_0 = 5/384, \qquad K_1 = 1/24, \qquad K_2 = 3/8, \qquad K_3 = (R + R^{-1})/2,$$

причем помимо точной константы K_0, полученной Ч. Холлом в [23], показано, что константа K_1 также является точной. В дальнейшем опубликовано огромное количество работ по улучшению (повторению) оценок погрешности интеполяции кубическими сплайнами для разных классов гладкости интерполируемой функции и разных краевых условий. Конечно, основной целью таких исследований является улучшение констант в оценках и получение точных неулучшаемых констант. Но для произвольных неравномерных сеток другие точные константы не известны, В. Л. Мирошниченко уменьшил [50] константу K_2 ($K_2 = 1/6$), но она, по-видимому, не является точной (это же значение константы на равномерной сетке ранее было получено Т. Жанлавом [51]). Известны точные константы лишь для равномерных сеток, В. Л. Мирошниченко установил [52] весь спектр оценок

$$\|S^{(r)} - f^{(r)}\|_\infty \leq K_{kr} h^{k-r} \|f^{(k)}\|_\infty, \qquad r = 0, \ldots, k-1, \quad 1 \leq k \leq 4, \tag{9}$$

с неулучшаемыми константами

$$\begin{aligned}
&K_{10}=(1+3\sqrt{3})/8, \qquad K_{20}=3\sqrt{3}/32, && K_{21}=\sqrt{3}/3,\\
&K_{30}=(3-\sqrt{3})(7/4+\sqrt{3}+\sqrt{2})/144, && K_{31}=(1+\sqrt{2})/18,\\
&K_{32}=(21+5\sqrt{3}+4\sqrt{2}(3-\sqrt{3}))/72, && K_{40}=5/384,\\
&K_{41}=1/24, \qquad K_{42}=\sqrt{3}/12, && K_{43}=(1+\sqrt{3})/4.
\end{aligned}$$

Отметим, что константа K_{43} была ранее найдена Т. Венгом [53].

Что касается сплайнов второй степени, то Ф. Дюбо и Ж. Савои установили [54] такие неравенства

$$\|S^{(k)}-f^{(k)}\|_\infty \le K_k\|\Delta\|^{3-k}\|f'''\|_\infty, \qquad k=0,1,2,$$

с константами

$$K_0=1/24, \qquad K_1=7/24, \qquad K_2=(R+R^{-1})/2,$$

и константа K_0 является неулучшаемой. Для равномерных сеток все оценки

$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_\infty \le K_{kr}h^{k-r}\|f^{(k)}\|_\infty, \qquad r=0,\dots,k-1, \quad k=1,2,3, \tag{10}$$

с точными константами

$$\begin{aligned}
&K_{10}=\sqrt{2}/2, && K_{20}=(1+\sqrt{2})/16, && K_{21}=3\sqrt{2}/8,\\
&K_{30}=1/24, && K_{31}=1/8, && K_{32}=(1+2\sqrt{2})/6
\end{aligned}$$

так же, как и в кубическом случае, получены В. Л. Мирошниченко [52].

Для сплайнов степеней выше кубических в плане решения задачи Шёнберга, т. е. сходимости процесса интерполяции, результатов известно существенно меньше, чем для кубических. В первую очередь это связано с тем, что для кубических (параболических) сплайнов в основе исследований лежит техника получения оценок из трехдиагональных систем линейных уравнений через диагональное преобладание, а системы уравнений для сплайнов более высоких степеней не имеют диагонального преобладания. Некоторой заменой в общем случае является свойство вполне положительности (неотрицательности) матриц. Матрица называется *вполне положительной* (*неотрицательной*), если все ее миноры (любого порядка) положительны (неотрицательны) (см., например, [55; 56]).

В 1968 году К. де Бор придумал способ оценки нормы обратной матрицы именно для невырожденных вполне неотрицательных матриц. Благодаря этому, он установил [57] для сплайнов пятой степени, что если $f(x)\in C^3[a,b]$, то $S'''(x)$ безусловно сходятся к $f'''(x)$, т. е. без каких-либо ограничений на последовательность сеток (небольшая погрешность доказательства была исправлена им в работе [58], и там же указано, что сходятся и четвертые производные сплайнов седьмой степени в $C^4[a,b]$, указан путь доказательства, но сами вычисления не приведены). В 2004 году техника де Бора оценки нормы обратной матрицы с успехом была применена Ю. С. Волковым [59; 60] для доказательства безусловной сходимости еще одной производной интерполяционного сплайна пятой степени: $S''(x)$ сходится к $f''(x)$ для $f(x)\in C^2[a,b]$.

Позднее в 1973 году К. де Бор предположил, что и в общем случае сплайнов $S(x)$ произвольной нечетной степени $2m-1$, интерполирующих функцию $f(x)\in C^m[a,b]$, имеет место безусловная равномерная сходимость $S^{(m)}(x)$ к $f^{(m)}(x)$. Эквивалентная формулировка этого предположения более известна [61] как знаменитая гипотеза К. де Бора (1973) об ограниченности нормы операторов наилучшего среднеквадратичного приближения сплайнами степени $m-1$ как операторов из $C[a,b]$ в $C[a,b]$ константой, зависящей только от m, но не от сетки.

В 1975 году К. де Бор показал [62], что сходимость $S^{(k)}(x)$ к $f^{(k)}(x)$, если интерполируемая функция $f(x)$ класса $C^k[a,b]$, без ограничений на сетки невозможна при $k=0,\dots,m-2$. Дополнительно он отметил, что и при $k=m+1,\dots,2m-1$ безусловная сходимость также невозможна, но доказательства этого факта не привел, а сообщил, что оно будет опубликовано где-либо еще (об этом доказательстве в более поздних работах К. де Бора нам ничего не известно). А относительно двух оставшихся средних производных ($k = m - 1$ и $k = m$) он высказал предположение о безусловной сходимости процессов интерполяции, т. е. в дополнение к гипотезе (1973) о сходимости $S^{(m)}(x)$ к $f^{(m)}(x)$ в классе $C^m[a, b]$ он предположил и сходимость $S^{(m-1)}(x)$ к $f^{(m-1)}(x)$ без каких-либо ограничений на последовательность сеток для $f(x) \in C^{m-1}[a, b]$. Ю. С. Волковым в 1984 году были найдены [63] некие числа $\rho_m^{(k)}$, $k = 0, \dots, m-2$ и $k = m+1, \dots, 2m-1$, и при любых $\rho > \rho_m^{(k)}$ приведены последовательности сеток, удовлетворяющие условию $\rho_\Delta \le \rho$, на которых интерполяционные процессы расходятся для соответствующих k, если $f(x) \in C^k[a, b]$.

В 1976 году сходимость процессов интерполяции в случае сплайнов произвольной нечетной степени $2m - 1$ была доказана [64] для m-й производной только при ограничениях (1) опять же К. де Бором. Им же при этих ограничениях установлена [65] и сходимость самих сплайнов. Некоторые неокончательные результаты о сходимости при ограничениях на соседние шаги сеток (локальные характеристики) получены [66] в 1978 году С. Фридлендом и Ч. Мичелли только для $k = 0$ с привлечением специально разработанных и достаточно сложных методов теории осцилляционных матриц. В 1984 году Ю. С. Волкову удалось эти условия перенести [67] на случай $k = 2m-1$. Небольшое улучшение условий С. Фридленда и Ч. Мичелли для сплайнов пятой степени, а также некоторые условия на сходимость первых и вторых производных были получены А. Ю. Шадриным [68–70].

И, наконец, в 2001 году А. Ю. Шадрин решил [71] знаменитую проблему К. де Бора (1973), в нашей терминологии установил безусловную сходимость $S^{(m)}(x)$ к $f^{(m)}(x)$ для функций $f(x)$ из $C^m[a, b]$. Упомянем еще ряд работ [72–75], в которых разбирались частные случаи гипотезы К. де Бора. Некоторые предельные случаи, не рассмотренные А. Ю. Шадриным, позднее исследовал [76] сам К. де Бор.

Ю. С. Волков получил [77–79] положительное решение оставшейся части гипотезы К. де Бора (1975) о безусловной сходимости другой средней производной $k = m - 1$ для случая периодических и полных сплайнов. Можно считать, что этим и завершено решение задачи Шёнберга. Конечно, как и в кубическом случае, еще интересно найти необходимые и достаточные условия сходимости в терминах локальной сеточной характеристики, т. е. точные значения $\rho^*_{m,k}$ такие, что на последовательности сеток $\{\Delta\}$ с $\rho_\Delta \le \rho$ при $\rho < \rho^*_{m,k}$ процесс для $S^{(k)}(x)$ (если $f(x)$ из класса C^k) будет всегда сходиться, а при $\rho > \rho^*_{m,k}$ возможна расходимость. Мы предполагаем, что эти величины совпадут с числами $\rho_m^{(k)}$, найденными в работе [63] для примеров расходимости.

Более того, Ю. С. Волковым доказана [80] эквивалентность условий сходимости в классах C^k и C^{2m-1-k}, а именно, если на какой-то последовательности сеток соответствующая последовательность производных сплайна $S^{(k)}(x)$ равномерно сходится к $f^{(k)}(x)$ для функций $f(x) \in C^k[a, b]$, то на этой же последовательности сеток сходится последовательность производных $S^{(2n-k-1)}(x)$ к $f^{(2n-k-1)}(x)$ для функций $f(x) \in C^{2n-k-1}[a, b]$ и наоборот.

Данное обстоятельство, в частности, объясняет, почему в случае кубических сплайнов ограничения на последовательность сеток, необходимые для сходимости сплайнов в C и третьих производных в C^3, получились одинаковыми (см. [31; 40]).

Для сплайнов по равномерным разбиениям нет никаких проблем ни со сходимостью процессов интерполяции, ни с установлением максимальных порядков сходимости; основные результаты уже можно найти в первой монографии по сплайнам [6]. Первые оценки сходимости через модуль гладкости порядка r, определяемый стандартным образом

$$\omega_r(f; h) = \sup_{|\delta| \le h} \| \sum\nolimits_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k f(\cdot + k\delta) \|_\infty,$$

установлены [81] Ю. Н. Субботиным в 1972 году при решении задачи П. Л. Ульянова о существовании для любого $r \in \mathbb{N}$ в пространстве непрерывных функций базиса такого, что для n-й частичной суммы $\sigma_n(f)$ разложения f по элементам базиса справедлива оценка

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \le K_r\omega_r(f; 1/n)$$

с константой K_r, зависящей только от r. Частичная сумма $\sigma_n(f)$ есть просто интерполяционный сплайн степени n (четной или нечетной).

Если говорить о скорости сходимости процессов интерполяции в общем случае, то, как уже было отмечено ранее, первые результаты для сплайнов произвольной нечетной степени получили Дж. Алберг, Э. Нильсон и Дж. Уолш [15]. Они установили неравенства (3)–(5). М. Шульцу и Р. Варге удалось улучшить [82] порядки сходимости в неравенствах (4), (5), ими установлены оценки

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K\|\Delta\|^{2m-k-1/2}\|f^{(2m)}\|_2, \qquad 0 \le k \le m-1, \tag{11}$$

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le K(R)\|\Delta\|^{2m-k-1/2}\|f^{(2m)}\|_2, \qquad m \le k \le 2m-1, \tag{12}$$

причем константа K в неравенстве (11) зависит только от k и m, но не от сетки Δ, а константа $K(R)$ в (12) зависит еще от величины R, ограничивающей отношение максимального и минимального шагов сетки.

Сейчас, как следует из результатов А. Ю. Шадрина и Ю. С. Волкова, максимальные порядки сходимости

$$\|S^{(r)} - f^{(r)}\|_\infty \le K\|\Delta\|^{k-r}\omega(f^{(k)}; \|\Delta\|), \qquad 0 \le r \le k, \tag{13}$$

для функций $f(x)$ любой гладкости $C^k[a,b]$, $0 \le k \le 2m-1$, имеют место при $k = m-1$ и $k = m$ с константой K, не зависящей от сетки Δ. Если $k = 0, \ldots, m-2$ или $k = m+1, \ldots, 2m-1$, то константа K в (13) должна зависеть от сетки, например, от величины R для сетки с $R_\Delta \le R$ (см. [65]) или от величины $\rho < \bar\rho_m$ для сетки с $\rho_\Delta \le \rho$ для $k = 0$ или $k = 2m-1$ (см. [66; 67]), где $\bar\rho_m$ — корень некоторого алгебраического уравнения из [66].

Как мы уже отмечали, сходимость самих сплайнов в классе непрерывных функций без ограничений невозможна. Однако можно добиться сходимости на произвольной последовательности сеток путем увеличения гладкости интерполируемой функции. В работе [15] было показано, что сходимость имеет место для функций гладкости $C^m[a,b]$, причем порядок сходимости относительно $\|\Delta\|$ равен $m - 1/2$. А. Ю. Шадрину удалось установить [69] максимально возможный порядок m для такой гладкости. И лишь недавно Ю. С. Волковым показано [78; 79], что для сходимости сплайнов без ограничений на сетки достаточно гладкости интерполируемой функции $C^{m-1}[a,b]$. Это, по-видимому, минимальные требования гладкости, понижение гладкости приведет к возможности расходимости процесса интерполяции.

Ранее мы отмечали удивительное свойство интерполяционных кубических сплайнов: ими можно приближать четвертую производную интерполируемой функции. Аналогичное свойство справедливо и в общем случае. В монографии [6] было показано, что на равномерных сетках скачок β_i, т. е. величина разрыва старшей производной сплайна в узле x_i, отнесенная к шагу сетки, приближает $f^{(2m)}(x_i)$. В 1982 году одновременно и независимо Б. С. Киндалевым [83] и Т. Лукасом [84] был установлен порядок такого приближения, который оказался удивительно высоким

$$\beta_i = \frac{S^{(2m-1)}(x_i+0) - S^{(2m-1)}(x_i-0)}{h} = f^{(2m)}(x_i) + O(h^{2m}).$$

Ю. Н. Субботин изучал [85] вопросы аппроксимации производных интерполируемой функции порядка более высокого по сравнению со степенью интерполяционного сплайна посредством разделенных разностей его старшей производной (в том числе и для сплайнов четной степени). Ю. С. Волковым и В. Л. Мирошниченко показано [86], что такое приближение скачком имеет место и на последовательности сеток асимптотически равномерных, а также на некоторых специальных неравномерных сетках.

Говоря о скорости сходимости интерполяции, необходимо сказать и про константы в оценках. Относительно точных констант в оценках погрешностей интерполяции сплайнами произвольной нечетной степени $2m-1$ известно совсем мало. Первая точная оценка

$$\|S-f\|_\infty \le \frac{F_{2m}}{\pi^{2m}} h^{2m} \|f^{(2m)}\|_\infty, \qquad F_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \tag{14}$$

— константы Фавара, для кардинальной интерполяции получена в работе В. М. Тихомирова [87], в которой он вычислял значения поперечников и показал, что поперечники достигаются при интерполяции по равномерному разбиению функций сплайнами минимального дефекта. Позднее на отрезке такая же оценка (14) была установлена Ч. Холлом и В. Мейером [49], в их записи константа выражена через числа Эйлера. А в 1982 году Н. П. Корнейчуком была анонсирована [88] оценка

$$\|S'-f'\|_\infty \le \frac{F_{2m-1}}{\pi^{2m-1}} h^{2m-1} \|f^{(2m)}\|_\infty \tag{15}$$

с неулучшаемой константой, также выражаемой через числа Фавара. Доказательство оценки (15), очень сложное технически, основано на специально разработанном методе Σ-перестановок. Для демонстрации метода Н. П. Корнейчук провел [89; 90] доказательство отдельно для сплайнов невысоких степеней, параболических и кубических, а для общего случая изложил в [91; 92]. Оценка, подобная (14), справедлива и на произвольной неравномерной сетке, но константа в этом случае зависит от сетки и выражается через эйлеров идеальный сплайн (см. [93]). В монографии Н. П. Корнейчука [93] приведены и некоторые точные оценки для других норм и классов функций. Ю. Н. Субботиным [94] и А. А. Сазановым [95] получены точные оценки аппроксимации функции $f(x)$ и ее производных в метрике L_2 интерполяционными сплайнами с равномерными узлами. Эти результаты используются Ю. Н. Субботиным [96] для аппроксимации кривизны плоских кривых.

Отметим еще работу [97], в которой приводятся точные оценки

$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_\infty \le C_{k,r} h^{k-r} \|f^{(k)}\|_\infty, \qquad 1\le k\le 2m, \qquad r=0,\dots,k-1;$$
$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_\infty \le \frac{1}{2} C_{2m-1,r} h^{2m-1-r} \tilde\omega(f^{(2m-1)}), \qquad r=0,\dots,2m-1,$$

где $C_{k,r}$ есть максимумы некоторых функций, выражаемых через корни некоторых многочленов и интегралы, и в общем случае трудно вычисляемые. Заметим, что в последней оценке стоит не модуль непрерывности, а максимальное колебание функции на отрезке

$$\tilde\omega(f) = \max_{0\le i\le n-1} \max\{|f(x')-f(x'')| :\ x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Точная константа в оценке погрешности интерполяции на равномерной сетке через модуль непрерывности

$$\|S-f\|_\infty \le K\omega(f;h) \tag{16}$$

найдена М. Реймером [98]. Эта константа $K=(1+\|L_{2m-1}\|)/2$ выражена в терминах норм операторов $L_{2m-1}: f\to S$ как операторов из C в C, сопоставляющих функции $f(x)$ сплайн $S(x)$ степени $2m-1$, интерполирующий $f(x)$ на сетке Δ, называемых константами Лебега. Правда точные значения констант Лебега известны лишь для сплайнов невысоких степеней [99; 100]. Различные представления для вычисления констант Лебега получены в 1973 году одновременно и независимо А. А. Женсыкбаевым [101] и Ф. Ричардсом [102]. А. А. Женсыкбаевым установлена и оценка (16), только выражение для константы в оценке, как и для констант Лебега, записано через ряд. Кроме того, им приведен порядок при $m\to\infty$

$$\|L_m\| = O(\ln m),$$

который позднее был уточнен в работах [103; 104]. А Ю. Н. Субботиным и С. А. Теляковским установлена [105] асимптотика констант Лебега и по числу узлов сетки.

Отметим еще работу [106], в которой установлена асимптотика погрешности приближения старшей производной интерполяционного сплайна.

И, наконец, несколько слов о сплайнах четной степени $2m$. Как уже говорилось, есть два основных подхода к решению задачи интерполяции сплайнами четной степени: по Субботину и по Марсдену. Как оказалось, хотя эти два типа интерполяционных сплайнов и обладают различными аппроксимативными свойствами, но они тесно связаны между собой. В [107] показано, что матрицы систем определяющих уравнений для интерполяционных сплайнов по Субботину являются транспонированными к матрицам некоторых систем уравнений для сплайнов по Марсдену. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что условия сходимости процессов интерполяции для k-й производной интерполяционных сплайнов четной степени $2m$ по Субботину, если $f(x) \in C^k[a,b]$, совпадают с условиями сходимости для $(2m-k)$-й производной сплайнов той же степени $2m$ по Марсдену, если $f(x) \in C^{2m-k}[a,b]$. В [108] установлено, что одна из систем уравнений для сплайнов четвертой степени по Субботину имеет диагональное преобладание, и как следствие $S'''(x)$ сходится к $f'''(x)$ для любой интерполируемой функции $f(x) \in C^3[a,b]$ и любой последовательности сеток. А для сплайнов четвертой степени по Марсдену это дает сходимость $S'(x)$ к $f'(x)$ для любой $f(x) \in C^1[a,b]$ и также для любой последовательности сеток.

С учетом оценок из работы [107] можно говорить о порядках сходимости интерполяции только при ограничениях на последовательности сеток. Других исследований для сплайнов произвольной четной степени нам не известно. Имеется лишь ряд работ по изучению интерполяции на равномерных сетках, сплайны по Субботину и по Марсдену здесь уже совпадают.

Оценка (14) является точной и для сплайнов четной степени [109; 110], также точна и оценка (15) (см. [93]). В работе [111] оценка (16) распространена и на сплайны четной степени, а формулы работ [101–105] для констант Лебега и асимптотики из [106] также справедливы и для слайнов четной степени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Butzer P. L., Korevaar J.** (Eds.) On approximation theory: Proc. conf. Oberwolfach, 1963. ISNM. Vol. 5. / Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1964. 261 p.
2. **Butzer P. L.** A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields // J. Approxim. Theory. 2009. Vol. 160, no. 1–2. P. 3–18.
3. **Schoenberg I. J.** Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A: On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. Part B: On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.
4. **Schumaker L. L.** Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981. 553 p.
5. **Holladay J. C.** A smoothest curve approximation. // Math. Tables Aids Comput. 1957. Vol. 11, no. 60. P. 233–243.
6. **Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.** The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967. 284 p. (Перевод: **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.)
7. **Boor C. de** A practical guide to splines. New York: Springer, 1978. 392 p. (Перевод: **Бор К. де** Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и Связь, 1985. 304 с.)
8. **Schoenberg I. J.** Spline interpolation and the higher derivatives // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1964. Vol. 51, no. 1. P. 24–28.
9. **Schoenberg I. J.** Spline interpolation and the higher derivatives // Number Theory and Analysis. New York: Plenum, 1969. P. 279–295.
10. **Walsh J. L., Ahlberg J. H., Nilson E. N.** Best approximation properties of the spline fit // J. Math. Mech. 1962. Vol. 11, no. 2. P. 225–234.
11. **Ahlberg J. H., Nilson E. N.** Convergence properties of the spline fit // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1963. Vol. 11, no. 1. P. 95–104.

12. **Birkhoff G., Boor C. de** Error bounds for spline interpolation // J. Math. Mech. 1964. Vol. 13, no. 5. P. 827–835.
13. **Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.** Fundamental properties of generalized splines // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1964. Vol. 52, no. 6. P. 1412–1419.
14. **Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.** Convergence properties of generalized splines // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1965. Vol. 54, no. 2. P. 344–350.
15. **Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.** Best approximation and convergence properties of higher-order spline approximations // J. Math. Mech. 1965. Vol. 14, no. 2. P. 231–243.
16. **Sharma A., Meir A.** Degree of approximation of spline interpolation // J. Math. Mech. 1966. Vol. 15, no. 5. P. 759–767.
17. **Nord S.** Approximation properties of the spline fit // BIT. 1967. Vol. 7, no. 2. P. 132–144.
18. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Добавления // Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. С. 270–309.
19. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
20. **Привалов Ал. А.** О сходимости кубических интерполяционных сплайнов к непрерывной функции // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 5. С. 681–700. (Перевод: **Privalov A. A.** Convergence of cubic interpolation splines to a continuous function // Math. Notes. 1979. Vol. 25, no. 5. P. 349–350.)
21. **Субботин Ю. Н.** О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 63–70. (Перевод: **Subbotin Yu. N.** Piecewise-polynomial (spline) interpolation // Math. Notes. 1967. Vol. 1, no. 1. P. 41–45.)
22. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42. (Перевод: **Subbotin Yu. N.** On the relations between finite differences and the corresponding derivatives // Proc. Steklov Inst. Math. 1967. Vol. 78. P. 23–42.)
23. **Hall C. A.** On error bounds for spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1968. Vol. 1, no. 2. P. 209–218.
24. **Cheney E. W., Schurer F.** A note on the operators arising in spline approximation // J. Approxim. Theory. 1968. Vol. 1, no. 1. P. 94–102.
25. **Meir A., Sharma A.** On uniform approximation by cubic splines // J. Approxim. Theory. 1969. Vol. 2, no. 3. P. 270–274.
26. **Cheney E. W., Schurer F.** Convergence of cubic spline interpolants // J. Approxim. Theory. 1970. Vol. 3, no. 1. P. 114–116.
27. **Завьялов Ю. С.** Интерполирование кубическими многозвенниками // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970. Вып. 38. С. 23–73.
28. **Hall C. A.** Uniform convergence of cubic spline interpolants // J. Approxim. Theory. 1973. Vol. 7, no. 1. P. 71–75.
29. **Marsden M. J.** Cubic spline interpolation of continuous functions // J. Approxim. Theory. 1974. Vol. 10, no. 2. P. 103–111.
30. **Lyche T., Schumaker L. L.** On the convergence of cubic interpolating splines // Spline functions and approximation theory: Proc. Sympos., Univ. Alberta, Edmonton, 1972. / (Eds. A. Meir, A. Sharma). ISNM. Vol. 21. Basel: Birkhäuser, 1973. P. 169–189.
31. **Зматраков Н. Л.** Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 71–93. (Перевод: **Zmatrakov N. L.** Convergence of an interpolation process for parabolic and cubic splines // Proc. Steklov Inst. Math. 1977. Vol. 138. P. 75–99.)
32. **Boor C. de** On cubic spline functions that vanish at all knots // Adv. Math. 1976. Vol. 20, no. 1. P. 1–17.
33. **Субботин Ю. Н.** Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика 1997. Т. 3, № 4. С. 1043–1058.
34. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
35. **Мирошниченко В. Л.** О расходимости интерполяционных кубических сплайнов в пространстве непрерывных функций // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. Вып. 81: Методы сплайн-функций. С. 3–11.

36. **Зматраков Н. Л., Субботин Ю. Н.** Кратные интерполяционные сплайны степени $2k+1$ дефекта k // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 75–99. (Перевод: **Zmatrakov N. L., Subbotin Yu. N.** Multiple interpolation splines of degree $2k+1$ and defect k // Proc. Steklov Inst. Math. 1985. Vol. 164. P. 83–111.)
37. **Marsden M. J.** Quadratic spline interpolation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 5. P. 903–906.
38. **Kammerer W. J., Reddien G. W., Varga R. S.** Quadratic interpolatory splines // Numer. Math. 1974. Vol. 22, no. 4. P. 241–259.
39. **Marsden M. J.** Operator norm bounds and error bounds for quadratic spline interpolation // Approximation theory: Papers 6th Semester, Banach Internat. Math. Center, 1975. / Ed. Z. Ciesielski. Vol 4. Warszawa: PWN, 1979. P. 159–175.
40. **Зматраков Н. Л.** Равномерная сходимость третьих производных интерполяционных кубических сплайнов // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1977. Вып. 72: Методы сплайн-функций. С. 10–29.
41. **Зматраков Н. Л.** Необходимое условие сходимости интерполяционных параболических и кубических сплайнов // Мат. заметки. 1976. Т. 19, № 2. С. 165–178. (Перевод: **Zmatrakov N. L.** A necessary condition for convergence of interpolating parabolic and cubic splines // Math. Notes. 1976. Vol. 19, no. 2. P. 100–107.)
42. **Gfrerer H.** Uniform convergence of interpolation by cubic splines // Computing. 1982. Vol. 29, no. 4. P. 361–364.
43. **Jia R.-Q.** On a conjecture of C. A. Micchelli concerning cubic spline interpolation at a biinfinite knot sequence // J. Approxim. Theory. 1983. Vol. 38, no. 3. P. 284–292.
44. **Зматраков Н. Л.** Сходимость интерполяционных кубических сплайнов при ограничениях на несколько соседних шагов сетки // Приближение функций полиномами и сплайнами. Свердловск: ИММ АН СССР, 1985. С. 83–94.
45. **Зматраков Н. Л.** Сходимость третьих производных интерполяционных кубических сплайнов в метриках L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ // Мат. заметки. 1981. Т. 30, № 1. С. 83–99. (Перевод: **Zmatrakov N. L.** Convergence of third derivatives of interpolational cubic splines in the metrics of L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ // Math. Notes. 1981. Vol. 30, no. 1. P. 528–537.)
46. **Зматраков Н. Л.** Расходимость третьих производных интерполяционных кубических сплайнов в метриках L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 707–722. (Перевод: **Zmatrakov N. L.** Divergence of the third derivatives of interpolational cubic splines in the metrics of L_p // Math. Notes. 1982. Vol. 31, no. 5. P. 359–367.)
47. **Мирошниченко В. Л.** Об интерполировании кубическими сплайнами // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1973. Вып. 56. С. 18–22.
48. **Lucas T. R.** Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions // SIAM J. Numer. Anal. 1974. Vol. 11, no. 3. P. 569–584.
49. **Hall C. A., Meyer W. W.** Optimal error bounds for cubic spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1976. Vol. 16, no. 2. P. 105–122.
50. **Мирошниченко В. Л.** О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. Вып. 93: Методы сплайн-функций. С. 3–29.
51. **Жанлав Т.** Некоторые оценки приближения вторых производных с помощью кубических интерполяционных сплайнов // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. Вып. 81: Методы сплайн-функций. С. 12–20.
52. **Miroshnichenko V. L.** Exact error bounds for the periodic cubic and parabolic spline interpolation on the uniform mesh // Math. Balkanica. 1988. Vol. 2, no. 2-3. P. 210–221.
53. **Weng T.** Optimal error bounds for derivatives of cubic interpolating splines with equidistant nodes // Math. Numer. Sinica. 1980. Vol. 2, no. 1. P. 24–34. (Chinese)
54. **Dubeau F., Savoie J.** Optimal error bounds for quadratic spline interpolation // J. Math. Anal. Appl. 1996. Vol. 198, no. 1. P. 49–63.
55. **Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.** Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 359 с. (Перевод: **Gantmacher F. R., Krein M. G.** Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems. Providence: Amer. Math. Soc., 2002. 310 p.)
56. **Karlin S.** Total positivity. Vol. 1. Stanford: Stanford University Press, 1968. 576 p.

57. **Boor C. de** On the convergence of odd-degree spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1968. Vol. 1, no. 4. P. 452–463.
58. **Boor C. de** On a max-norm bound for the least-squares spline approximant // Approximation and function spaces: Proc. intern. conf., Gdánsk 1979 / Ed. Z. Ciesielski. Amsterdam; New York: North-Holland, 1981. P. 163–175.
59. **Волков Ю. С.** Интерполяция сплайнами пятой степени // Тр. междунар. конф. по вычисл. матемактике МКВМ-2004 / Ред. Г. А. Михайлов, В. П. Ильин, Ю. М. Лаевский. Ч. I. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. С. 92–97.
60. **Волков Ю. С.** Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34. (Перевод: **Volkov Yu. S.** Totally positive matrices in the methods of constructing interpolation splines of odd degree // Siberian Adv. Math. 2005. Vol. 15, no. 4. P. 96–125.)
61. **Boor C. de** The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory // Approximation theory: Proc. Internat. Sympos., Austin, 1973 / Ed. G. G. Lorentz. New York: Academic Press, 1973. P. 269–276.
62. **Boor C. de** On bounding spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1975. Vol. 14, no. 3. P. 191–203.
63. **Волков Ю. С.** Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. Вып. 106: Приближение сплайнами. С. 41–56.
64. **Boor C. de** A bound on the L_∞-norm of L_2-approximation by splines in terms of a global mesh ratio // Math. Comput. 1976. Vol. 30, no. 136. P. 765–771.
65. **Boor C. de** Odd-degree spline interpolation at a biinfinite knot sequence // Approximation theory: Proc. intern. conf., Bonn, 1976 / Eds. R. Schaback, K. Scherer. Heidelberg: Springer, 1976. P. 30–53.
66. **Friedland S., Micchelli C. A.** Bounds on the solutions of difference equations and spline interpolation at knots // Linear Algebra Appl. 1978. Vol. 20, no. 3. P. 219–251.
67. **Волков Ю. С.** Равномерная сходимость производных интерполяционных сплайнов нечетной степени: препринт № 62. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. 10 с.
68. **Шадрин А. Ю.** О скорости сходимости интерполяционных сплайнов, заданных на неравномерных сетках // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 6. С. 1331–1334. (Перевод: **Shadrin A. Yu.** The rate of convergence of interpolation splines given on nonuniform grids // Soviet Math. Dokl. 1990. Vol. 40, no. 1. P. 266–268.)
69. **Шадрин А. Ю.** О приближении функций интерполяционными сплайнами, заданными на неравномерных сетках // Мат. сборник. 1990. Т. 181, № 9. С. 1236–1255. (Перевод: **Shadrin A. Yu.** On the approximation of functions by interpolating splines defined on nonuniform nets // Math. USSR-Sb. 1992. Vol. 71, no. 1. P. 81–99.)
70. **Shadrin A. Yu.** Convergence of quintic spline interpolants in terms of a local mesh ratio // Bull. Novosib. Comput. Cent. Ser. Numer. Anal. 1993. № 1. С. 87–96.
71. **Shadrin A. Yu.** The L_∞-norm of the L_2-spline projector is bounded independently of the knot sequence: A proof of de Boor's conjecture // Acta Math. 2001. Vol. 187, no. 1. P. 59–137.
72. **Feng Y. Y., Kozak J.** On generalized Euler-Frobenius polynomial // J. Approxim. Theory. 1981. Vol. 32, no. 4. P. 327–338.
73. **Höllig K.** L_∞-boundedness of L_2-projections on splines for a geometric mesh // J. Approxim. Theory. 1981. Vol. 33, no. 4. P. 318–333.
74. **Mityagin B.** Quadratic pencils and least-squares piecewise-polynomial approximation // Math. Comput. 1983. Vol. 40, no. 161. P. 283–300.
75. **Jia R.-Q.** L_∞-boundedness of L_2-projections on splines for a multiple geometric mesh // Math. Comput. 1987. Vol. 48, no. 178. P. 675–690.
76. **Boor C. de** On the (bi)infinite case of Shadrin's theorem concerning the L_∞-boundedness of the L_2-spline projector // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 24–29. (Перевод: Proc. Steklov Inst. Math. 2012. Vol. 277. Suppl. 1. P. S73–S78.)
77. **Волков Ю. С.** Безусловная сходимость еще одной средней производной для интерполяционных сплайнов нечетной степени // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 5. С. 592–594. (Перевод: **Volkov Yu. S.** Unconditional convergence of one more middle derivative for odd degree spline interpolation // Doklady Math. 2005. Vol. 71, no. 2. P. 250–252.)
78. **Волков Ю. С.** Обратные циклических ленточных матриц и сходимость процессов интерполяции для производных периодических интерполяционных сплайнов // Сиб. журн. вычисл. математики 2010. Т. 13, № 3. С. 243–253. (Перевод: **Volkov Yu. S.** Inverse of cyclic band matrices and the

convergence of interpolation processes for derivatives of periodic interpolation splines // Numer. Anal. Appl. 2010. Vol. 3, no. 3. P. 199–207.)

79. **Волков Ю. С.** О сходимости процесса интерполяции для производных полного сплайна // Український математичний вісник. 2012. Т. 9, № 2. С. 278–296. (Перевод: **Volkov Yu. S.** Convergence analysis of an interpolation process for the derivatives of a complete spline // J. Math. Sci. 2012. Vol. 187, no. 1. P. 101–114.)
80. **Волков Ю. С.** Условия ограниченности операторов сплайн-интерполяции: препринт № 167. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006. 18 с.
81. **Субботин Ю.Н.** Приближение сплайнами и гладкие базисы в $C(0, 2\pi)$ // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 1. С. 43–51. (Перевод: **Subbotin Yu. N.** Approximation by splines and smooth bases in $C(0, 2\pi)$ // Math. Notes. 1972. Vol. 12, no. 1. P. 459–463.)
82. **Schultz M. H., Varga R. S.** *L*-splines // Numer. Math. 1967. Vol. 10, no. 4. P. 345–369.
83. **Киндалев Б. С.** Асимптотические формулы для сплайнов нечетной степени и аппроксимация производных высокого порядка // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. Вып. 93: Методы сплайн-функций. С. 39–52.
84. **Lucas T. R.** Asymptotic expansions for interpolating periodic splines // SIAM J. Numer. Anal. 1982. Vol. 19, no. 5. P. 1051–1066.
85. **Субботин Ю. Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173. (Перевод: **Subbotin Yu. N.** Extremal problems of functional interpolation and interpolation-in-the-mean splines // Proc. Steklov Inst. Math. 1977. Vol. 138. P. 127–185.)
86. **Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.** О приближении производных скачком интерполяционного сплайна // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 127–130. (Перевод: **Volkov Yu. S., Miroshnichenko V. L.** Approximation of derivatives by jumps of interpolating splines // Math. Notes. 2011. Vol. 89, no. 1. P. 138–141.)
87. **Тихомиров В. М.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сборник. 1969. Т. 80 (122), № 2 (10). С. 290–304. (Перевод: **Tihomirov V. M.** Asymptotic behaviour of the Lebesgue constants of periodic interpolation splines with equidistant nodes // Math. USSR-Sb. 1969. Vol. 9, no. 2. P. 275–289.)
88. **Корнейчук Н. П.** О приближении интерполяционными сплайнами функций и их производных // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 5. С. 1063–1066. (Перевод: **Korneichuk N. P.** Approximation of functions and their derivatives by interpolation splines // Soviet Math. Dokl. 1982. Vol. 25, no. 3. P. 806–809.)
89. **Корнейчук Н. П.** О приближении параболическими сплайнами дифференцируемых функций и их производных // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35, № 6. С. 702–710. (Перевод: **Korneichuk N. P.** Approximation of differential functions and their derivatives by parabolic splines // Ukrainian Math. J. 1983. Vol. 35, no. 6. P. 603–611.)
90. **Корнейчук Н. П.** Некоторые точные неравенства для дифференцируемых функций и оценка приближения функций и их производных интерполяционными кубическими сплайнами // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 5. С. 94–108. (Перевод: **Korneichuk N. P.** Certain sharp inequalities for differentiable functions and estimation of approximation of functions and their derivatives by cubic interpolation splines // Sib. Math. J. 1983. Vol. 24, no. 5. P. 723–735.)
91. **Корнейчук Н. П.** О поведении производных погрешности сплайн-интерполирования // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 1. С. 67–72. (Перевод: **Korneichuk N. P.** Behavior of the derivatives of the error of a spline interpolation // Ukr. Math. J. 1991. Vol. 43, no. 1. P. 54–58.)
92. **Корнейчук Н. П.** О получении точных оценок для производной погрешности сплайн-интерполирования // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 2. С. 206–210. (Перевод: **Korneichuk N. P.** A derivation of exact estimates for the derivative of the spline-interpolation error // Ukr. Math. J. 1991. Vol. 43, no. 2. P. 178–183.)
93. **Корнейчук Н. П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
94. **Субботин Ю. Н.** Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 152–168. (Перевод: **Subbotin Yu. N.** Extremal problems in the theory of approximation of functions on the basis of incomplete information // Proc. Steklov Inst. Math. 1981. Vol. 145. P. 167–185.)
95. **Сазанов А. А.** Верхние грани уклонений некоторых классов функций // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. Вып. 81: Методы сплайн-функций. С. 31–41.

96. **Субботин Ю. Н.** Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.
97. **Калиев П. У.** Алгоритм получения точных констант в оценках погрешности приближения сплайнами нечетной степени на равномерной сетке // Вычисл. системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. Вып. 128: Аппроксимация сплайнами. С. 3–31.
98. **Reimer M.** Best constants occuring with the modulus of continuity in the error estimate for spline interpolants of odd degree on equidistant grids // Numer. Math. 1984. Vol. 44, no. 3. P. 407–415.
99. **Schurer F., Cheney E. W.** On interpolating cubic splines with equally-spaced nodes // Indag. Math. 1968. Vol. 30, no. 5. P. 517–524.
100. **Schurer F.** On interpolating periodic quintic spline functions with equally-spaced nodes. T.H.-Report 69-WSK-01. Eindhoven: Tech. Univ. Eindhoven, 1969.
101. **Женсыкбаев А. А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228. (Перевод: **Zhensykbaev A. A.** Exact bounds for the uniform approximation of continuous periodic functions by r-th order splines // Math. Notes. 1973. Vol. 13, no. 2. P. 130–136.)
102. **Richards F. B.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approxim. Theory. 1973. Vol. 7, no. 3. P. 302–317.
103. **Richards F. B.** The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1975. Vol. 14, no. 2. P. 83–92.
104. **Meinardus G.** Über die Norm des Operators der kardinalen Spline-Interpolation // J. Approxim. Theory. 1976. Vol. 16, no. 4. P. 289–298.
105. **Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140. (Перевод: **Subbotin Yu. N., Telyakovskij S. A.** Asymptotic behaviour of the Lebesgue constants of periodic interpolation splines with equidistant nodes // Sb. Math. 2000. Vol. 191, no. 8. P. 1233–1242.)
106. **Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.** Приближение производных производными интерполяционных сплайнов // Тр. МИАН. 2003. Т. 243: Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения. С. 320–333. (Перевод: **Subbotin Yu. N., Telyakovskii S. A.** Approximation of derivatives by the derivatives of interpolating splines // Proc. Steklov Inst. Math. 2003. Vol. 243, no. 4. P. 309–322.)
107. **Volkov Yu. S.** Interpolation by splines of even degree according to Subbotin and Marsden // Ukr. Math. J. 2014. Vol. 66, no. 7. P. 994–1012.
108. **Волков Ю. С.** Две конструкции интерполяционных сплайнов четной степени: препринт № 169. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006. 32 с.
109. **Wang J.** On optimal error bounds for interpolating splines // Scientia Sinica (Ser. A). 1982. Vol. 25, no. 10. P. 1056–1065.
110. **Dubeau F., Savoie J.** Optimal error bounds for quadratic spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1995. Vol. 82, no. 1. P. 1–14.
111. **Güntner R.** Exact bounds for the uniform approximation by cardinal spline interpolants // Numer. Math. 1994. Vol. 68, no. 2. P. 263–267.

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
гл. науч. сотрудник
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: volkov@math.nsc.ru

Поступила 30.08.2013

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НА МИНИМАКС ПОЗИЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА[1]

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов

Рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи движением линейной динамической системы на минимакс позиционного показателя качества в виде нормы совокупности отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целевых точек. Задача формализуется как позиционная дифференциальная игра. Исследуется процедура вычисления цены этой игры, основанная на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций, а также базирующийся на этой процедуре и принципе экстремального сдвига способ формирования минимаксного закона управления. Доказывается устойчивость данных разрешающих конструкций к вычислительным и информационным погрешностям.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные игры, устойчивость.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. On the stability of a procedure for solving a minimax control problem for a positional functional.

We consider a minimax feedback control problem for a linear dynamic system with a positional quality criterion, which is the norm of the family of deviations of the motion from given target points at given times. The problem is formalized as a positional differential game. A procedure for calculating the value of the game based on the backward construction of upper convex hulls of auxiliary program functions is studied. We also study a method of generating a minimax control law based on this procedure and on the extremal shift principle. The stability of the proposed resolving constructions with respect to computational and informational noises is proved.

Keywords: optimal control, differential games, stability.

Введение

Рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи движением линейной по фазовому вектору динамической системы в условиях помех или противодействия. Качество процесса управления оценивается позиционным функционалом в виде нормы совокупности отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целевых точек. В рамках теоретико-игрового подхода [1;2] задача вкладывается в позиционную дифференциальную игру на минимакс-максимин этого функционала.

В [3] для вычисления цены такой дифференциальной игры была предложена процедура, основанная на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций из метода стохастического программного синтеза [1]. В [4] рассмотрен вопрос численной реализации этой процедуры и описан базирующийся на ней и принципе экстремального сдвига на сопутствующие точки [1;2] способ формирования оптимальных (минимаксного и максиминного) законов управления. Ниже исследуется устойчивость указанных разрешающих конструкций по отношению к вычислительным и информационным погрешностям.

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”, при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (12-01-00290-а) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

1. Постановка задачи

Движение динамической системы описывается уравнением

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A(t)x + f(t,u,v), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^{n_v}. \tag{1.1}$$

Здесь t — время, x — фазовый вектор, u — вектор управления, v — вектор помехи; t_0 и ϑ — фиксированные моменты времени ($t_0 < \vartheta$); P и Q — компакты; $A(t)$ и $f(t,u,v)$ непрерывны на $[t_0,\vartheta]$ и $[t_0,\vartheta]\times P\times Q$ соответственно; выполняется условие седловой точки для маленькой игры [1, с. 79]

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle f(t,u,v),m\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle f(t,u,v),m\rangle, \quad t\in[t_0,\vartheta], \quad m\in\mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение векторов.

Позицией системы (1.1) назовем пару $(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$. Положим

$$\lambda_1 = \max_{t\in[t_0,\vartheta]}\|A(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_{(t,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times P\times Q}\|f(t,u,v)\|, \quad \lambda = \max\{\lambda_1,\lambda_2\}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее двойные скобки $\|\cdot\|$ обозначают евклидову норму вектора и согласованную с ней норму матрицы. Зафиксируем $R_0 > 0$ и рассмотрим множество возможных позиций

$$K = \bigl\{(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\colon\ \|x\| \leqslant (1+R_0)e^{(t-t_0)\lambda} - 1\bigr\}. \tag{1.4}$$

Пусть $(t_*,x_*)\in K$, $t_*<\vartheta$, и $t^*\in(t_*,\vartheta]$. Допустимыми считаем измеримые по Борелю реализации управления $u[t_*[\cdot]t^*) = \{u(t)\in P,\ t_*\leqslant t<t^*\}$ и помехи $v[t_*[\cdot]t^*) = \{v(t)\in Q,\ t_*\leqslant t<t^*\}$. Из позиции (t_*,x_*) такие реализации единственным образом порождают движение системы (1.1) — абсолютно непрерывную функцию $x[t_*[\cdot]t^*] = \{x(t)\in\mathbb{R}^n,\ t_*\leqslant t\leqslant t^*\}$, которая удовлетворяет равенству $x(t_*) = x_*$ и вместе с $u=u(t)$ и $v=v(t)$ почти всюду на $[t_*,t^*]$ удовлетворяет уравнению (1.1). При этом для любого $t\in[t_*,t^*]$ будет справедливо включение $(t,x(t))\in K$.

Заданы натуральное число N; моменты времени $\vartheta_i\in[t_0,\vartheta]:\vartheta_i<\vartheta_{i+1}$, $i=\overline{1,N-1}$, $\vartheta_N=\vartheta$; $(d_i\times n)$-матрицы D_i, $1\leqslant d_i\leqslant n$; векторы $c_i\in\mathbb{R}^n$; нормы $\mu_i(l_i,\ldots,l_N)$, $(l_i,\ldots,l_N)\in\mathbb{R}^{d_i}\times\ldots\times\mathbb{R}^{d_N}$, $i=\overline{1,N}$. Качество движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$, порожденного из позиции $(t_*,x_*)\in K$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, оценивается показателем

$$\gamma = \gamma\bigl(x[t_*[\cdot]\vartheta]\bigr) = \mu_{h(t_*)}\Bigl(D_{h(t_*)}\bigl(x(\vartheta_{h(t_*)})-c_{h(t_*)}\bigr),\ldots,D_N\bigl(x(\vartheta_N)-c_N\bigr)\Bigr), \tag{1.5}$$

где

$$h(t) = \min\bigl\{i=\overline{1,N}\colon \vartheta_i\geqslant t\bigr\}, \quad t\in[t_0,\vartheta]. \tag{1.6}$$

При этом по аналогии с [3], будем предполагать, что существуют четные по β функции $\sigma_i(l_i,\beta)$, $(l_i,\beta)\in\mathbb{R}^{d_i}\times\mathbb{R}$, для которых справедливы равенства

$$\mu_i(l_i,\ldots,l_N) = \sigma_i\bigl(l_i,\mu_{i+1}(l_{i+1},\ldots,l_N)\bigr), \quad (l_i,\ldots,l_N)\in\mathbb{R}^{d_i}\times\ldots\times\mathbb{R}^{d_N}, \quad i=\overline{1,N-1}. \tag{1.7}$$

Из этих равенств, в частности, следует [3], что функции $\sigma_i(\cdot)$ должны быть нормами, не убывающими по β при $\beta\geqslant 0$, а показатель качества γ является позиционным [2, с. 43]. Отметим также, что указанные свойства и соотношения для норм $\mu_i(\cdot)$ и $\sigma_i(\cdot)$ будут справедливы также и для соответствующих сопряженных норм $\mu_i^*(\cdot)$ и $\sigma_i^*(\cdot)$.

Задача управления состоит в том, чтобы доставить показателю γ как можно меньшее значение. Для ее решения удобно дополнительно рассмотреть задачу о формировании воздействий помехи, нацеленных на максимизацию γ. В рамках теоретико-игрового подхода [1; 2] эти две задачи могут быть объединены в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц (u — действие первого игрока, v — действие второго) в классах чистых позиционных стратегий

$$u(\cdot) = \bigl\{u(t,x,\varepsilon) \in P,\, t \in [t_0,\vartheta],\, x \in \mathbb{R}^n,\, \varepsilon > 0\bigr\},\ \ v(\cdot) = \bigl\{v(t,x,\varepsilon) \in Q,\, t \in [t_0,\vartheta],\, x \in \mathbb{R}^n,\, \varepsilon > 0\bigr\},$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр точности [1, с. 68]. При этом [2, с. 71] в силу условия (1.2) и позиционности показателя качества (1.5) эта дифференциальная игра имеет цену $\rho(t,x)$, $(t,x) \in K$, и седловую точку, складывающуюся из минимаксной $u^0(\cdot)$ и максиминной $v^0(\cdot)$ стратегий.

В частности, это означает, что для любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_* > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$, что будет справедливо следующее утверждение.

Пусть зафиксированы значение параметра точности $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$, позиция $(t_*,x_*) \in K$, $t_* < \vartheta$, и разбиение

$$\Delta_k\{\tau_j\} = \bigl\{\tau_j \colon \tau_1 = t_*,\, \tau_j < \tau_{j+1},\, j = \overline{1,k},\, \tau_{k+1} = \vartheta\bigr\} \tag{1.8}$$

отрезка времени $[t_*,\vartheta]$ с диаметром $\delta_k = \max_{j=\overline{1,k}}(\tau_{j+1} - \tau_j) \leqslant \delta_*(\varepsilon)$.

Тогда, с одной стороны, закон управления $\{u^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_k\{\tau_j\}\}$, формирующий воздействия

$$u(t) = u^0(\tau_j,x(\tau_j),\varepsilon), \quad \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1,k},$$

при любой допустимой реализации помехи $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ будет обеспечивать неравенство

$$\gamma \leqslant \rho(t_*,x_*) + \zeta, \tag{1.9}$$

а с другой — закон $\{v^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_k\{\tau_j\}\}$, формирующий воздействия помехи

$$v(t) = v^0(\tau_j,x(\tau_j),\varepsilon), \quad \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1,k},$$

для всякой допустимой реализации управления $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ будет обеспечивать неравенство

$$\gamma \geqslant \rho(t_*,x_*) - \zeta. \tag{1.10}$$

Для вычисления цены игры $\rho(\cdot)$ в [3] была дана процедура, основанная на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных программных функций. Базируясь на этой процедуре, методом экстремального сдвига на сопутствующие точки можно построить [4] минимаксный, гарантирующий неравенство (1.9), и максиминный, гарантирующий неравенство (1.10), законы управления. Настоящая статья посвящена вопросам устойчивости этой процедуры и определяемого по ней минимаксного закона управления по отношению к вычислительным и информационным погрешностям.

2. Аппроксимация цены игры

Пусть $t_* \in [t_0,\vartheta)$ и $\Delta_k\{\tau_j\}$ — разбиение отрезка времени $[t_*,\vartheta]$ вида (1.8), причем выполняются включения

$$\vartheta_i \in \Delta_k\{\tau_j\}, \quad i = \overline{h(t_*),N}. \tag{2.1}$$

Пусть $X(t,\tau)$ — матрица Коши для уравнения $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A(t)x$ и $0 < \eta_X \leqslant 1$. Предположим, что при $i = \overline{1,N-1}$ и $j = \overline{1,k}$ для матриц $X(\vartheta_i,\vartheta)$ и $X(\vartheta,\tau_j)$ известны приближенные значения $Y(\vartheta_i,\vartheta)$ и $Y(\vartheta,\tau_j)$, удовлетворяющие следующему условию.

(A1) Справедливы неравенства

$$\|Y(\vartheta_i,\vartheta) - X(\vartheta_i,\vartheta)\| \leqslant \eta_X, \quad i = \overline{1,N-1}, \quad \|Y(\vartheta,\tau_j) - X(\vartheta,\tau_j)\| \leqslant \eta_X, \quad j = \overline{1,k}.$$

В согласии с процедурой из [3] определим множества $G(\tau_j \pm 0) \subset \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, k+1}$, по следующему рекуррентному правилу. При $j = k+1$ полагаем

$$G(\tau_{k+1}+0) = \bigl\{m \in \mathbb{R}^n \colon m = 0\bigr\}, \quad G(\tau_{k+1}-0) = \bigl\{m \in \mathbb{R}^n \colon m = D_N^T l,\ l \in \mathbb{R}^{d_N},\ \mu_N^*(l) \leqslant 1\bigr\}.$$

Верхний символ T означает транспонирование, $\mu_N^*(\cdot)$ — норма, сопряженная к норме $\mu_N(\cdot)$. Для $j = \overline{1,k}$ имеем $G(\tau_j+0) = G(\tau_{j+1}-0)$. Далее, если $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, то есть момент времени τ_j не совпадает ни с одним из моментов ϑ_i из показателя качества (1.5), полагаем $G(\tau_j-0) = G(\tau_j+0)$. Если же $\tau_j = \vartheta_h$, то, рассматривая для каждого вектора $m \in \mathbb{R}^n$ множество

$$M_h(m) = \Bigl\{(\nu, m_*, l) \in \mathbb{R} \times G(\tau_j+0) \times \mathbb{R}^{d_h} \colon m = \nu m_* + Y^T(\vartheta_h, \vartheta) D_h^T l,\ \nu \geqslant 0,\ \sigma_h^*(l,\nu) \leqslant 1\Bigr\},$$

где $\sigma_h^*(\cdot)$ — норма, сопряженная к норме $\sigma_h(\cdot)$, определяем $G(\tau_j-0) = \{m \in \mathbb{R}^n \colon M_h(m) \neq \varnothing\}$.

Отметим, что для любого $j = \overline{1,k+1}$ множества $G(\tau_j \pm 0)$ являются выпуклыми компактами и $0 \in G(\tau_j \pm 0)$. Кроме того, можно указать такое число $\lambda_G > 0$, что

$$\|m\| \leqslant \lambda_G, \quad m \in G(\tau_j \pm 0), \quad j = \overline{1,k+1},$$

причем λ_G не зависит от выбора момента времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ (1.8), (2.1) и матриц $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Пусть $\eta_\psi > 0$ и скалярные функции $\Delta\psi(\tau_j, m)$, $m \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,k}$, удовлетворяют следующему условию.

(A2) Функции $\Delta\psi(\tau_j, m)$, $m \in \mathbb{R}^n$, непрерывны, $\Delta\psi(\tau_j, 0) \geqslant 0$ и имеют место неравенства

$$\Bigl|\Delta\psi(\tau_j, m) - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle m, X(\vartheta,\tau) f(\tau,u,v)\rangle \mathrm{d}\tau\Bigr| \leqslant \eta_\psi, \quad m \in \mathbb{R}^n, \quad \|m\| \leqslant \lambda_G, \quad j = \overline{1,k}.$$

Для каждого $j = \overline{1,k+1}$ определим [3] скалярные функции $\varphi(\tau_j \pm 0, m)$, $m \in G(\tau_j \pm 0)$, по следующим соотношениям. При $j = k+1$ полагаем

$$\varphi(\tau_{k+1}+0, m) = 0, \quad m \in G(\tau_{k+1}+0), \quad \varphi(\tau_{k+1}-0, m) = -\langle m, c_N\rangle, \quad m \in G(\tau_{k+1}-0).$$

Для $j = \overline{1,k}$ определяем

$$\psi(\tau_j, m) = \Delta\psi(\tau_j, m) + \varphi(\tau_{j+1}-0, m), \quad m \in G(\tau_j+0),$$
$$\varphi(\tau_j+0, m) = \bigl\{\psi(\tau_j, \cdot)\bigr\}^*_{G(\tau_j+0)}(m), \quad m \in G(\tau_j+0).$$

Символ $\{\psi(\cdot)\}^*_G$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(\cdot)$ на множестве G, то есть минимальную вогнутую функцию, мажорирующую функцию $\psi(m)$ при $m \in G$. Далее, если $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, то имеем $\varphi(\tau_j-0, m) = \varphi(\tau_j+0, m)$, $m \in G(\tau_j-0)$, а если $\tau_j = \vartheta_h$, то полагаем

$$\varphi(\tau_j-0, m) = \max_{(\nu, m_*, l) \in M_h(m)} \bigl[\nu\varphi(\tau_j+0, m_*) - \langle l, D_h c_h\rangle\bigr], \quad m \in G(\tau_j-0).$$

Можно показать, что для любого $j = \overline{1,k+1}$ функции $\varphi(\tau_j \pm 0, m)$, $m \in G(\tau_j \pm 0)$, вогнуты, полунепрерывны сверху и ограничены, причем $\varphi(\tau_j \pm 0, 0) \geqslant 0$.

Определим систему величин

$$\mathrm{e}(\tau_j \pm 0, x) = \max_{m \in G(\tau_j \pm 0)} \bigl[\langle m, Y(\vartheta, \tau_j)x\rangle + \varphi(\tau_j \pm 0, m)\bigr], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,k+1}, \tag{2.2}$$

считая при этом, что $Y(\vartheta, \tau_{k+1}) = E$, где E — единичная $(n \times n)$-матрица.

Зафиксируем $\alpha > 0$. Наряду с множеством (1.4), будем рассматривать расширенное множество возможных позиций системы (1.1)

$$K^\alpha = \bigl\{(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant (1 + R_0 + \alpha) e^{(t - t_0)\lambda} - 1\bigr\}.$$

Отметим, что всякая позиция, которая реализуется на движении системы (1.1), порождаемом из позиции, принадлежащей K^α, допустимыми реализациями управления и помехи, также принадлежит K^α. Сечение K^α гиперплоскостью $t = \tau_j$ будем обозначать K_j^α, $j = \overline{1, k+1}$.

Перечислим основные свойства системы величин $\mathrm{e}(\tau_j \pm 0, \cdot)$.

(E1) Имеют место соотношения

$$|\mathrm{e}(\tau_j \pm 0, x_1) - \mathrm{e}(\tau_j \pm 0, x_2)| \leqslant L_1 \|x_1 - x_2\|, \quad x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, k+1}, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{e}(\tau_{k+1} - 0, x) = \mu_N\bigl(D_N(x - c_N)\bigr), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

(E2) Каковы бы ни были $j = \overline{1, k}$ и $(\tau_j, x_j) \in K^\alpha$, для любого $v_j \in Q$ найдется такая допустимая реализация управления $u^*[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$, что при действии этой реализации в паре с реализацией помехи $v[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}) = \{v(t) = v_j,\ \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}\}$ система (1.1) перейдет из позиции $(\tau_j, x(\tau_j) = x_j)$ в позицию $(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1})) \in K^\alpha$, для которой будет выполняться неравенство

$$\mathrm{e}(\tau_j + 0, x(\tau_j)) \geqslant \mathrm{e}(\tau_{j+1} - 0, x(\tau_{j+1})) - L_2 \eta_X - \eta_\psi. \tag{2.5}$$

(E3) Каковы бы ни были $j = \overline{1, k}$ и $(\tau_j, x_j) \in K^\alpha$, для любого $u_j \in P$ найдется такая допустимая реализация помехи $v^*[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$, что при действии этой реализации в паре с реализацией управления $u[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}) = \{u(t) = u_j,\ \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}\}$ система (1.1) перейдет из позиции $(\tau_j, x(\tau_j) = x_j)$ в позицию $(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1})) \in K^\alpha$, для которой будет выполняться неравенство

$$\mathrm{e}(\tau_j + 0, x(\tau_j)) \leqslant \mathrm{e}(\tau_{j+1} - 0, x(\tau_{j+1})) + L_2 \eta_X + \eta_\psi.$$

(E4) Для любых $j = \overline{1, k}$ и $x \in K_j^\alpha$ в случае $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, имеет место равенство

$$\mathrm{e}(\tau_j - 0, x) = \mathrm{e}(\tau_j + 0, x), \tag{2.6}$$

а в случае $\tau_j = \vartheta_h$ справедливо неравенство

$$\bigl|\mathrm{e}(\tau_j - 0, x) - \sigma_h\bigl(D_h(x - c_h), \mathrm{e}(\tau_j + 0, x)\bigr)\bigr| \leqslant L_3 \eta_X. \tag{2.7}$$

В перечисленных свойствах постоянные $L_1 \geqslant 1$, $L_2 > 0$, $L_3 > 0$ не зависят от выбора момента времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ (1.8), (2.1), матриц $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N-1}$, и $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k}$, а также от функций $\Delta\psi(\tau_j, \cdot)$, $j = \overline{1, k}$.

Соотношения свойства (E1) проверяются непосредственно. В терминологии теории позиционных дифференциальных игр (см., например, [1, с. 288]), свойства (E2) и (E3) выражают u-стабильность и, соответственно, v-стабильность системы величин $\mathrm{e}(\tau_j \pm 0, \cdot)$. Их доказательство так же, как и доказательство свойства (E4), проводится по схеме из [3].

Свойства (E1)–(E4) позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого числа $\xi > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что, каковы бы ни были момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$* (1.8), (2.1) *с диаметром $\delta_k \leqslant \delta$, можно подобрать числа $0 < \eta_X \leqslant 1$ и $\eta_\psi > 0$ так, что при условиях* (A1) *и* (A2) *будет справедливо неравенство*

$$|\mathrm{e}(\tau_1 - 0, x_*) - \rho(t_*, x_*)| \leqslant \xi, \quad (t_*, x_*) \in K. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $\varepsilon_* > 0$ и функцию $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, так, чтобы для числа $\zeta = \xi/2$ обеспечить выполнение неравенств (1.9) и (1.10). Возьмем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и положим $\delta = \delta_*(\varepsilon) > 0$. Обозначим $\sigma = \max\{1, \sigma_1(0,1), \ldots, \sigma_{N-1}(0,1)\}$ и подберем числа $0 < \eta_X \leqslant 1$ и $\eta_\psi > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma^{N-1}\Big[k(L_2\eta_X + \eta_\psi) + (N-1)L_3\eta_X\Big] \leqslant \xi/2. \tag{2.9}$$

Пусть $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ — движение системы (1.1), порожденное из позиции $(t_*, x_*) \in K$ в случае, когда воздействия помехи формировались на базе максиминной стратегии $v^0(\cdot)$ по закону $\{v^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ и при этом на каждом промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = \overline{1,k}$, реализация управления $u^*[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ выбиралась по значению $v_j = v^0(\tau_j, x(\tau_j), \varepsilon)$ в соответствии со свойством (E2). Тогда для этого движения будут выполняться неравенства (1.10) (при $\zeta = \xi/2$) и (2.5). Покажем, что для каждого $j = \overline{1, k+1}$ также справедливо неравенство

$$\mathrm{e}(\tau_j - 0, x(\tau_j)) \geqslant \mu_{h(\tau_j)} - \omega_j, \tag{2.10}$$

где

$$\mu_i = \mu_i\Big(D_i\big(x(\vartheta_i) - c_i\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big), \quad i = \overline{h(t_*), N}, \tag{2.11}$$

$$\omega_j = \sigma^{N-h(\tau_j)}\Big[(k+1-j)(L_2\eta_X + \eta_\psi) + (N - h(\tau_j))L_3\eta_X\Big], \quad j = \overline{1, k+1}.$$

При $j = k+1$ неравенство (2.10) вытекает из равенства (2.4). Далее, по индукции предположим, что неравенство (2.10) верно для $j = q+1$, $1 \leqslant q \leqslant k$, и докажем его для $j = q$.

Пусть $\tau_q \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_q)$. Тогда $h(\tau_{q+1}) = h$, и, учитывая соотношения (2.6) и (2.5), по предположению индукции получаем

$$\mathrm{e}(\tau_q - 0, x(\tau_q)) = \mathrm{e}(\tau_q + 0, x(\tau_q)) \geqslant \mathrm{e}(\tau_{q+1} - 0, x(\tau_{q+1})) - L_2\eta_X - \eta_\psi \geqslant \mu_h - \omega_{q+1} - L_2\eta_X - \eta_\psi \geqslant \mu_h - \omega_q.$$

Пусть теперь $\tau_q = \vartheta_h$. Тогда $h(\tau_{q+1}) = h+1$, и аналогичным образом выводим неравенство

$$\mathrm{e}(\tau_q + 0, x(\tau_q)) \geqslant \mathrm{e}(\tau_{q+1} - 0, x(\tau_{q+1})) - L_2\eta_X - \eta_\psi \geqslant \mu_{h+1} - \omega_{q+1} - L_2\eta_X - \eta_\psi,$$

с учетом которого, пользуясь неравенством (2.7) и свойствами нормы $\sigma_h(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{e}(\tau_q - 0, x(\tau_q)) &\geqslant \sigma_h\big(D_h(x(\tau_q) - c_h), \mathrm{e}(\tau_q + 0, x(\tau_q))\big) - L_3\eta_X \\ &\geqslant \mu_h - (\omega_{q+1} + L_2\eta_X + \eta_\psi)\sigma - L_3\eta_X \geqslant \mu_h - \omega_q.\end{aligned}$$

В силу индукции неравенство (2.10) справедливо для всех $j = \overline{1, k+1}$. Таким образом, при $j = 1$, учитывая неравенство (2.9), получаем, что для движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ справедлива оценка $\mathrm{e}(\tau_1 - 0, x_*) \geqslant \gamma - \xi/2$. Отсюда и из (1.10) (при $\zeta = \xi/2$) заключаем

$$\mathrm{e}(\tau_1 - 0, x_*) - \rho(t_*, x_*) \geqslant -\xi. \tag{2.12}$$

Аналогично, рассматривая движение системы (1.1), порожденное из позиции (t_*, x_*) в случае, когда управление формировалось на базе минимаксной стратегии $u^0(\cdot)$ по закону $\{u^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ и при этом на каждом промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = \overline{1,k}$, реализация помехи $v^*[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ выбиралась по значению $u_j = u^0(\tau_j, x(\tau_j), \varepsilon)$ в соответствии со свойством (E3), можно показать, что будет справедливо неравенство

$$\mathrm{e}(\tau_1 - 0, x_*) - \rho(t_*, x_*) \leqslant \xi. \tag{2.13}$$

Неравенства (2.12) и (2.13) доказывают теорему.

3. Построение минимаксного закона управления

Пусть $\varepsilon > 0$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $\Delta_k\{\tau_j\}$ — разбиение (1.8), (2.1) и построена система величин $\mathrm{e}(\tau_j \pm 0, \cdot)$ (2.2). Взяв постоянную λ из (1.3), положим

$$r_j(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon + (\tau_j - t_0)\varepsilon e^{(\tau_j - t_0)\lambda}}, \quad j = \overline{1, k+1}. \tag{3.1}$$

Пусть $\eta_z > 0$ и для $j = \overline{1, k}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ определены $z_j(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ и $w_j(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующему условию.

(A3) Для любых $j = \overline{1, k}$ и $x \in K_j^\alpha$ выполняются неравенства

$$\|x - z_j(x, \varepsilon)\|^2 + w_j^2(x, \varepsilon) \leqslant r_j^2(\varepsilon), \tag{3.2}$$

$$\mathrm{e}(\tau_j + 0, z_j(x, \varepsilon)) + w_j(x, \varepsilon) \leqslant \min \big[\mathrm{e}(\tau_j + 0, z) + w\big] + \eta_z, \tag{3.3}$$

где минимум берется по всем парам $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, для которых $\|x - z\|^2 + w^2 \leqslant r_j^2(\varepsilon)$.

Пусть $\eta_u > 0$ и стратегия управления $u_{\Delta_k}(\cdot)$ удовлетворяет следующему условию экстремального сдвига (см., например, [1, с. 236]) на сопутствующие точки $z_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$.

(A4) Для любых $j = \overline{1, k}$ и $x \in K_j^\alpha$ справедливы неравенства

$$\max_{v \in Q} \langle x - z_j(x, \varepsilon), f(\tau_j, u_{\Delta_k}(\tau_j, x, \varepsilon), v)\rangle \leqslant \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle x - z_j(x, \varepsilon), f(\tau_j, u, v)\rangle + \eta_u. \tag{3.4}$$

Будем предполагать также, что для каждого $j = \overline{1, k}$ значение $x(\tau_j)$ фазового вектора системы (1.1), необходимое для формирования управления на промежуток $[\tau_j, \tau_{j+1})$ в согласии с законом $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, известно с погрешностью $\eta_x > 0$. А именно, для соответствующих приближенных значений $y_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, k}$, выполняется следующее условие.

(A5) Имеет место оценка

$$\|y_j - x(\tau_j)\| \leqslant \eta_x, \quad j = \overline{1, k}. \tag{3.5}$$

Таким образом, закон $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ формирует реализацию управления согласно правилу

$$u(t) = u_{\Delta_k}(\tau_j, y_j, \varepsilon), \quad \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{3.6}$$

Согласно [1, лемма 31.2] имеем

Лемма 1. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого момента времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ (1.8), (2.1) с диаметром $\delta_k \leqslant \delta$ справедливо следующее утверждение.*

1. *Пусть $j = \overline{1, k}$, $(\tau_j, y_j) \in K^\alpha$, $(\tau_j, z_j) \in K^\alpha$ и $\eta_u > 0$.*

2. *Пусть движение $y[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}]$ системы (1.1) порождено из позиции (τ_j, y_j) какой угодно допустимой реализацией помехи $v[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ и реализацией управления $u^e[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}) = \{u^e(t) = u_j^e \in P,\ \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}\}$, где вектор u_j^e удовлетворяет условию*

$$\max_{v \in Q} \langle y_j - z_j, f(\tau_j, u_j^e, v)\rangle \leqslant \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle y_j - z_j, f(\tau_j, u, v)\rangle + \eta_u.$$

3. *Пусть движение $z[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}]$ системы (1.1) порождено из позиции (τ_j, z_j) какой угодно допустимой реализацией управления $u[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ и реализацией помехи $v^e[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}) = \{v^e(t) = v_j^e \in Q,\ \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}\}$, где вектор v_j^e удовлетворяет условию*

$$v_j^e \in \arg \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle y_j - z_j, f(\tau_j, u, v)\rangle. \tag{3.7}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|y(\tau_{j+1}) - z(\tau_{j+1})\|^2 e^{-2(\tau_{j+1} - t_0)\lambda} \leqslant \|y_j - z_j\|^2 e^{-2(\tau_j - t_0)\lambda} + (\tau_{j+1} - \tau_j)\varepsilon + 2\delta_k \eta_u.$$

Данная лемма, теорема 1 и свойства (E1), (E2) и (E4) системы величин (2.2) позволяют, рассуждая по схеме из [1, теорема 30.1], получить следующий результат.

Теорема 2. *Для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся такие число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, *что, каковы бы ни были значение параметра точности* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, *момент времени* $t_* \in [t_0, \vartheta)$ *и разбиение* $\Delta_k\{\tau_j\}$ (1.8), (2.1) *с диаметром* $\delta_k \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *можно указать числа* $0 < \eta_X \leqslant 1$, $\eta_\psi > 0$, $\eta_z > 0$, $\eta_u > 0$ *и* $\eta_x > 0$ *так, что при условиях* (A1)–(A5) *для любой позиции* $(t_*, x_*) \in K$ *закон управления* $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, *действующий по правилу* (3.6), *будет обеспечивать неравенство* (1.9), *какова бы ни случилась допустимая реализация помехи* $v[t_*[\cdot]\vartheta)$.

Доказательство. Взяв постоянную $L_1 \geqslant 1$ из (2.3), выберем число $\varepsilon^* > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sqrt{\varepsilon^* + \varepsilon^*(\vartheta - t_0)} \leqslant \alpha/2, \quad \sigma^{N-1} N L_1 \sqrt{\varepsilon^* + \varepsilon^*(\vartheta - t_0)}\, e^{(\vartheta - t_0)\lambda} \leqslant \zeta/12, \tag{3.8}$$

где, как и выше, $\sigma = \max\{1, \sigma_1(0,1), \ldots, \sigma_{N-1}(0,1)\}$. По числу $\xi = \zeta/2$ выберем число $\delta^{(1)} > 0$ в согласии с теоремой 1. Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ укажем $\delta^{(2)}(\varepsilon) > 0$ так, чтобы выполнялось утверждение леммы 1, и положим $\delta^*(\varepsilon) = \min\{\delta^{(1)}, \delta^{(2)}(\varepsilon)\} > 0$. Числа $0 < \eta_X \leqslant 1$ и $\eta_\psi > 0$ выберем исходя из неравенства

$$\sigma^{N-1}\Big[(k+1)(L_2\eta_X + \eta_\psi) + N L_3 \eta_X\Big] \leqslant \zeta/6, \tag{3.9}$$

где постоянные $L_2 > 0$ и $L_3 > 0$ взяты из свойств (E2) и (E4), и так, чтобы по теореме 1 для $\xi = \zeta/2$ обеспечить неравенство (2.8). Наконец, полагая

$$s_j(\varepsilon, \eta_u) = r_j\big(\varepsilon + 2\delta_k\eta_u/(1 + \tau_j - t_0)\big), \quad \Delta s_j(\varepsilon, \eta_u) = 2L_1\big(s_j(\varepsilon, \eta_u) - s_j(\varepsilon, 0)\big), \quad j = \overline{1, k+1},$$

где $r_j(\cdot)$ определяются согласно (3.1), выберем числа $\eta_z > 0$, $\eta_u > 0$ и $\eta_x > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\eta_x \leqslant \alpha/2, \quad \sigma^{N-1}\Big[(k+1)\big(\eta_z + 2L_1(1 + e^{\delta_k\lambda})\eta_x\big) + \sum_{j=1}^{k} \Delta s_j(\varepsilon, \eta_u) + N\Delta s_{k+1}(\varepsilon, \eta_u)\Big] \leqslant \zeta/6. \tag{3.10}$$

Пусть $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ — движение системы (1.1), порожденное из позиции $(t_*, x_*) \in K$ законом управления $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ в паре с какой-либо допустимой реализацией помехи $v[t_*[\cdot]\vartheta)$. Пусть $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ — соответствующая реализация управления, а y_j, $j = \overline{1,k}$, — соответствующие приближения значений $x(\tau_j)$. Обозначим $z_j = z_j(y_j, \varepsilon)$ и $w_j = w_j(y_j, \varepsilon)$, $j = \overline{1,k}$. Отметим, что ε^* и η_x были выбраны так, чтобы, в частности, обеспечить включения $(\tau_j, y_j) \in K^\alpha$ и $(\tau_j, z_j) \in K^\alpha$, $j = \overline{1,k}$.

Для каждого $j = \overline{1,k}$ будем рассматривать два вспомогательных движения системы (1.1).

Первое движение $y^{(j)}[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}]$ порождается из позиции (τ_j, y_j) теми же реализациями $u[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ и $v[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$, которые определяли движение $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ на промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Тогда имеет место неравенство

$$\|y^{(j)}(\tau_{j+1}) - x(\tau_{j+1})\| \leqslant e^{(\tau_{j+1} - \tau_j)\lambda}\|y_j - x(\tau_j)\| \leqslant e^{\delta_k\lambda}\eta_x. \tag{3.11}$$

Второе движение $z^{(j)}[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}]$ порождается из позиции (τ_j, z_j) реализацией помехи $v^e[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}) = \{v^e(t) = v_j^e,\ \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}\}$, где вектор $v_j^e \in Q$ выбран из условия (3.7), в паре с реализацией управления $u^*[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$, подобранной по (τ_j, z_j) и v_j^e в согласии со свойством (E2). Тогда имеем

$$\mathrm{e}(\tau_j + 0, z_j) \geqslant \mathrm{e}(\tau_{j+1} - 0, z^{(j)}(\tau_{j+1})) - L_2\eta_X - \eta_\psi. \tag{3.12}$$

По лемме 1, если учесть неравенство (3.2), получаем

$$\|y^{(j)}(\tau_{j+1}) - z^{(j)}(\tau_{j+1})\|^2 + w_j^2 \leqslant s_{j+1}^2(\varepsilon, \eta_u). \tag{3.13}$$

Опираясь на оценки (3.11)–(3.13) и неравенство (2.3), покажем, что для любого $j = \overline{1,k}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{e}(\tau_j + 0, z_j) + w_j \geqslant \mu_{h(\tau_{j+1})} - \omega_j, \tag{3.14}$$

где значения μ_i, $i = \overline{h(t_*), N}$, определяются в согласии с (2.11), а

$$\begin{aligned} \omega_j = \sigma^{N-h(\tau_{j+1})} \Big[(k+1-j)\big(L_2\eta_X + \eta_\psi + \eta_z + 2L_1(1+e^{\delta_k\lambda})\eta_x\big) + \sum_{q=j+1}^{k} \Delta s_q(\varepsilon, \eta_u) \\ + (N+1-h(\tau_{j+1}))\big(2L_1 s_{k+1}(\varepsilon,\eta_u) + L_3\eta_X\big)\Big], \quad j = \overline{1,k}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь при $j = k$ сумма полагается равной нулю. Учитывая равенство (2.4), выводим

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(\tau_{k+1} - 0, z^{(k)}(\tau_{k+1})) &\geqslant \mathrm{e}(\tau_{k+1} - 0, x(\tau_{k+1})) - L_1\|x(\tau_{k+1}) - z^{(k)}(\tau_{k+1})\| \\ &\geqslant \mu_N - L_1 e^{\delta_k\lambda}\eta_x - L_1 s_{k+1}(\varepsilon, \eta_u). \end{aligned}$$

Таким образом, при $j = k$ имеем

$$\mathrm{e}(\tau_k + 0, z_k) + w_k \geqslant \mu_N - L_1 e^{\delta_k\lambda}\eta_x - L_1 s_{k+1}(\varepsilon,\eta_u) - L_2\eta_X - \eta_\psi - s_{k+1}(\varepsilon,\eta_u) \geqslant \mu_N - \omega_k.$$

Далее, по индукции предположим, что неравенство (3.14) верно для $j = q+1$, $1 \leqslant q < k$, и докажем его для $j = q$.

Пусть $\tau_{q+1} \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_{q+1})$. Тогда $h(\tau_{q+2}) = h$, и имеет место неравенство

$$\mathrm{e}(\tau_{q+1} + 0, z^{(q)}(\tau_{q+1})) + w_q \geqslant \min\big[\mathrm{e}(\tau_{q+1} + 0, z) + w\big], \tag{3.16}$$

где минимум берется по $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ при условии $\|y^{(q)}(\tau_{q+1}) - z\|^2 + w^2 \leqslant s_{q+1}^2(\varepsilon, \eta_u)$. Из неравенств (3.3) и (3.16), выводим

$$\mathrm{e}(\tau_{q+1} + 0, z^{(q)}(\tau_{q+1})) + w_q \geqslant \mathrm{e}(\tau_{q+1} + 0, z_{q+1}) + w_{q+1} - \eta_z - 2L_1(1+e^{\delta_k\lambda})\eta_x - \Delta s_{q+1}(\varepsilon, \eta_u).$$

Отсюда, если принять во внимание равенство (2.6) и предположение индукции, вытекает справедливость неравенства (3.14) для $j = q$.

Пусть теперь $\tau_{q+1} = \vartheta_h$. Тогда $h(\tau_{q+2}) = h+1$, и, опираясь на неравенство (3.3), по предположению индукции получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(\tau_{q+1} + 0, x(\tau_{q+1})) &\geqslant \mathrm{e}(\tau_{q+1} + 0, y_{q+1}) - L_1\|x(\tau_{q+1}) - y_{q+1}\| \\ &\geqslant \mathrm{e}(\tau_{q+1} + 0, z_{q+1}) + w_{q+1} - \eta_z - L_1\eta_x \geqslant \mu_{h+1} - \omega_{q+1} - \eta_z - L_1\eta_x, \end{aligned} \tag{3.17}$$

с учетом которой в силу неравенства (2.7) и свойств нормы $\sigma_h(\cdot)$ выводим

$$\mathrm{e}(\tau_{q+1} - 0, x(\tau_{q+1})) \geqslant \mu_h - (\omega_{q+1} + \eta_z + L_1\eta_x)\sigma - L_3\eta_X.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(\tau_q + 0, z_q) + w_q &\geqslant \mathrm{e}(\tau_{q+1} - 0, x(\tau_{q+1})) - L_1\|x(\tau_{q+1}) - z^{(q)}(\tau_{q+1})\| - L_2\eta_X - \eta_\psi + w_q \\ &\geqslant \mu_h - (\omega_{q+1} + \eta_z + L_1\eta_x)\sigma - L_3\eta_X - L_1 e^{\delta_k\lambda}\eta_x - 2L_1 s_{q+1}(\varepsilon,\eta_u) - L_2\eta_X - \eta_\psi \geqslant \mu_h - \omega_q. \end{aligned}$$

В силу индукции неравенство (3.14) справедливо для всех $j = \overline{1,k}$. Используя это неравенство при $j = 1$, подобно (3.17), выводим

$$\mathrm{e}(\tau_1 + 0, x(\tau_1)) \geqslant \mu_{h(\tau_2)} - \omega_1 - \eta_z - L_1\eta_x,$$

откуда, опираясь на свойство (E4) и соотношения (1.5), (2.11) и (3.15), в силу неравенств (3.8)–(3.10) получаем оценку $\mathrm{e}(\tau_1 - 0, x(\tau_1) = x_*) \geqslant \gamma - \zeta/2$, которая завершает доказательство, если вспомнить, что по выбору $\delta^*(\varepsilon)$, η_X и η_ψ для $\xi = \zeta/2$ должно выполняться неравенство (2.8).

4. Устойчивость

Пусть зафиксированы момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.8), (2.1), числа $0 < \eta_X \leqslant 1$ и $\eta_\psi > 0$, а также матрицы $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N}$, $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k}$, и функции $\Delta\psi(\tau_j, \cdot)$, $j = \overline{1, k}$, удовлетворяющие условиям (A1) и (A2). Пусть множества $G(\tau_j \pm 0)$ и функции $\varphi(\tau_j \pm 0, \cdot)$ построены по процедуре, описанной в разд. 2, и в согласии с (2.2) определена соответствующая система величин $\mathrm{e}(\tau_j \pm 0, \cdot)$.

Пусть $\eta_G > 0$ и множества $\widetilde{G}(\tau_j \pm 0) \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующему условию.

(A6) Множества $\widetilde{G}(\tau_j \pm 0)$ являются компактами, имеют место включения

$$\widetilde{G}(\tau_j \pm 0) \subset G(\tau_j \pm 0) \subset \big[\widetilde{G}(\tau_j \pm 0\big]^{\eta_G}, \quad j = \overline{1, k+1}, \tag{4.1}$$

где символ $[G]^\eta$ обозначает замкнутую η-окрестность множества G в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\eta_\varphi > 0$ и для скалярных функций $\widetilde{\varphi}(\tau_j \pm 0, m)$, $m \in \widetilde{G}(\tau_j \pm 0)$ выполнено условие

(A7) Функции $\widetilde{\varphi}(\tau_j \pm 0, m)$, $m \in \widetilde{G}(\tau_j \pm 0)$, непрерывны, имеют место неравенства

$$|\widetilde{\varphi}(\tau_j \pm 0, m) - \varphi(\tau_j \pm 0, m)| \leqslant \eta_\varphi, \quad m \in \widetilde{G}(\tau_j \pm 0), \quad j = \overline{1, k+1}. \tag{4.2}$$

Подобно (2.2), определим систему величин

$$\widetilde{\mathrm{e}}(\tau_j \pm 0, x) = \max_{m \in \widetilde{G}(\tau_j \pm 0)} \big[\langle m, Y(\vartheta, \tau_j)x\rangle + \widetilde{\varphi}(\tau_j \pm 0, m)\big], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, k+1}. \tag{4.3}$$

Следующий факт вытекает непосредственно из соотношений (2.2) и (4.1)–(4.3).

Лемма 2. *Пусть функции $\varphi(\tau_j \pm 0, m)$, $m \in G(\tau_j \pm 0)$, $j = \overline{1, k+1}$, непрерывны. Тогда для любого числа $\xi > 0$ найдутся числа $\eta_G > 0$ и $\eta_\varphi > 0$ такие, что при условиях* (A6) *и* (A7) *будут выполняться неравенства*

$$|\widetilde{\mathrm{e}}(\tau_j \pm 0, x) - \mathrm{e}(\tau_j \pm 0, x)| \leqslant \xi, \quad (\tau_j, x) \in K, \quad j = \overline{1, k+1}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, значения $r_j(\varepsilon)$ определены согласно (3.1) и число $0 < \eta_X \leqslant 1$ достаточно мало для того, чтобы в силу условия (A1) обеспечить невырожденность матриц $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k}$.

Для $j = \overline{1, k}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$g_j(x, m, \varepsilon) = \langle m, Y(\vartheta, \tau_j)x\rangle + \widetilde{\varphi}(\tau_j + 0, m) - r_j(\varepsilon)\sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j)m\|^2}, \quad m \in \widetilde{G}(\tau_j + 0), \tag{4.4}$$

$$m_j(x, \varepsilon) \in \arg \max_{m \in \widetilde{G}(\tau_j + 0)} g_j(x, m, \varepsilon), \tag{4.5}$$

$$z_j(x, \varepsilon) = x - \frac{r_j(\varepsilon) Y^T(\vartheta, \tau_j) m_j(x, \varepsilon)}{\sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j) m_j(x, \varepsilon)\|^2}}, \quad w_j(x, \varepsilon) = -\frac{r_j(\varepsilon)}{\sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j) m_j(x, \varepsilon)\|^2}}. \tag{4.6}$$

Лемма 3. *Пусть функции $\varphi(\tau_j + 0, m)$, $m \in G(\tau_j + 0)$, $j = \overline{1, k}$, непрерывны. Тогда для любого числа $\eta_z > 0$ найдутся числа $\eta_G > 0$ и $\eta_\varphi > 0$ такие, что при условиях* (A6) *и* (A7) *определенные согласно* (4.6) *функции $z_j(\cdot)$ и $w_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$, будут удовлетворять условию* (A3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (3.2) выполняется автоматически. Требуется показать, что при достаточно малых $\eta_G > 0$ и $\eta_\varphi > 0$ будет справедливо неравенство (3.3).

Через $g_j^0(x, m, \varepsilon)$ обозначим функцию, определяемую по формуле (4.4) с заменой $\widetilde{\varphi}(\tau_j + 0, \cdot)$ на $\varphi(\tau_j + 0, \cdot)$ и $\widetilde{G}(\tau_j + 0)$ на $G(\tau_j + 0)$. Так как функция $\varphi(\tau_j + 0, \cdot)$ вогнута и непрерывна, а матрица $Y(\vartheta, \tau_j)$ невырождена, то функция $g_j^0(x, m, \varepsilon)$ строго вогнута по $m \in G(\tau_j + 0)$ и непрерывна по $(x, m) \in K_j^\alpha \times G(\tau_j + 0)$. Это обеспечивает единственность и непрерывность по $x \in K_j^\alpha$ максимизирующего вектора $m_j^0(x, \varepsilon)$:

$$g_j^0(x, m_j^0(x, \varepsilon), \varepsilon) = \max_{m \in G(\tau_j + 0)} g_j^0(x, m, \varepsilon). \tag{4.7}$$

Меняя в (4.6) $m_j(x, \varepsilon)$ на $m_j^0(x, \varepsilon)$, определим функции $z_j^0(x, \varepsilon)$ и $w_j^0(x, \varepsilon)$. Можно проверить (см., например, [4]), что имеют место равенства

$$\mathrm{e}(\tau_j + 0, z_j^0(x, \varepsilon)) + w_j^0(x, \varepsilon) = \min \left[\mathrm{e}(\tau_j + 0, z) + w\right], \quad x \in K_j^\alpha, \quad j = \overline{1, k},$$

где минимум берется по $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ при условии $\|x - z\|^2 + w^2 \leqslant r_j^2(\varepsilon)$.

Теперь, с учетом неравенства (2.3) достаточно показать, что для любого числа $\eta_m > 0$ найдутся числа $\eta_G > 0$ и $\eta_\varphi > 0$, для которых при условиях (A6) и (A7) будет справедлива оценка

$$\|m_j(x, \varepsilon) - m_j^0(x, \varepsilon)\| \leqslant \eta_m, \quad x \in K_j^\alpha, \quad j = \overline{1, k}.$$

В силу указанных выше свойств функций $g_j^0(\cdot)$ и $m_j^0(\cdot)$ по числу $\eta_m > 0$ можно подобрать число $\xi > 0$ так, чтобы для $j = \overline{1, k}$, $m \in G(\tau_j + 0)$ и $x \in K_j^\alpha$ неравенство

$$|g_j^0(x, m, \varepsilon) - g_j^0(x, m_j^0(x, \varepsilon), \varepsilon)| \leqslant \xi \tag{4.8}$$

влекло оценку

$$\|m - m_j^0(x, \varepsilon)\| \leqslant \eta_m.$$

Осталось показать, что выбором чисел $\eta_G > 0$ и $\eta_\varphi > 0$ можно обеспечить выполнение неравенства (4.8) при $m = m_j(x, \varepsilon)$. Учитывая равенство (4.7) и первое из включений (4.1), получаем

$$g_j^0(x, m_j(x, \varepsilon), \varepsilon) - g_j^0(x, m_j^0(x, \varepsilon), \varepsilon) \leqslant 0.$$

Далее, число $\eta_G > 0$ подберем так, чтобы, во-первых, имело место неравенство

$$\max_{(t,x) \in K^\alpha} \|x\| \eta_G \leqslant \xi/6,$$

а во-вторых, чтобы для всякого $j = \overline{1, k}$ и любых $m \in G(\tau_j + 0)$ и $\widetilde{m} \in G(\tau_j + 0)$, удовлетворяющих условию $\|m - \widetilde{m}\| \leqslant \eta_G$, были справедливы неравенства

$$|\varphi(\tau_j + 0, m) - \varphi(\tau_j + 0, \widetilde{m})| \leqslant \xi/6, \quad r_j(\varepsilon) \left| \sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j) m\|^2} - \sqrt{1 + \|Y^T(\vartheta, \tau_j) \widetilde{m}\|^2} \right| \leqslant \xi/6.$$

Число $\eta_\varphi > 0$ выберем из условия

$$\eta_\varphi \leqslant \xi/4.$$

Опираясь на второе из включений (4.1), по вектору $m_j^0(x, \varepsilon) \in G(\tau_j + 0)$ подберем вектор $\widetilde{m} \in \widetilde{G}(\tau_j + 0) \subset G(\tau_j + 0)$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|m_j^0(x, \varepsilon) - \widetilde{m}\| \leqslant \eta_G$. Тогда, с учетом включения (4.5) в силу неравенства (4.2) выводим

$$\begin{gathered} g_j^0(x, m_j^0(x, \varepsilon), \varepsilon) - g_j^0(x, m_j(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \leqslant g_j^0(x, m_j^0(x, \varepsilon), \varepsilon) - g_j(x, \widetilde{m}, \varepsilon) + g_j(x, m_j(x, \varepsilon), \varepsilon) - g_j^0(x, m_j(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \leqslant \xi/3 + \varphi(\tau_j + 0, m_j^0(x, \varepsilon)) - \widetilde{\varphi}(\tau_j + 0, \widetilde{m}) + \widetilde{\varphi}(\tau_j + 0, m_j(x, \varepsilon)) - \varphi(\tau_j + 0, m_j(x, \varepsilon)) \leqslant \xi. \end{gathered}$$

Лемма доказана.

Итак, при условии непрерывности функций $\varphi(\tau_j \pm 0, \cdot)$ из теоремы 1 и леммы 2 следует, что величина $\widetilde{\mathrm{e}}(\tau_1 - 0, \cdot)$ из (4.3) аппроксимирует цену дифференциальной игры (1.1), (1.5), а по теореме 2 и лемме 3 получаем, что закон управления $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, построенный по соотношениям (3.4)–(3.6) и (4.4)–(4.6), является минимаксным.

В следующем разделе показано, что условие непрерывности функций $\varphi(\tau_j \pm 0, \cdot)$, вообще говоря, не является обременительным.

5. Непрерывность функций $\varphi(\tau_j \pm 0, \cdot)$

Следуя [5;6], будем говорить, что выпуклый компакт $B \subset \mathbb{R}^d$ обладает P-свойством (является P-множеством), если для любого вектора $q \in \mathbb{R}^d$, $\|q\| = 1$, является непрерывной функция

$$g(l) = \min\big\{\nu \in \mathbb{R}\colon l + \nu q \in B\big\}, \quad l \in P_q B,$$

где P_q — оператор проектирования на подпространство, ортогональное вектору q.

Перечислим свойства P-множеств, которые будут использоваться ниже:

(P1) Пусть выпуклый компакт $B \subset \mathbb{R}^d$ обладает P-свойством и функция $\Psi(l)$, $l \in B$, непрерывна. Тогда непрерывна и выпуклая сверху оболочка $\Phi(l) = \{\Psi(\cdot)\}^*_B(l)$, $l \in B$, функции $\Psi(\cdot)$ на множестве B.

(P2) Пусть выпуклый компакт $B \subset \mathbb{R}^d$ обладает P-свойством, задан линейный оператор $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ и $G = TB$. Тогда многозначное отображение $\Omega(m) = B \cap T^{-1}(m)$, $m \in G$, непрерывно по Хаусдорфу.

(P3) Пусть график многозначного отображения $W(l) \subset \mathbb{R}^{d^*}$, $l \in \mathbb{R}^{d_*}$, является выпуклым компактом, обладающим P-свойством. Тогда многозначное отображение $W(\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу.

Свойство (P1) доказано в [7], свойство (P3) — в [6]. Свойство (P2) доказывается по аналогии с [6, теорема 1].

Будем предполагать, что нормы $\mu_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, определяющие показатель качества (1.5), удовлетворяют следующему условию.

(B) Единичные шары

$$B^*_i = \big\{(l_i, \ldots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \ldots \times \mathbb{R}^N \colon \mu^*_i(l_i, \ldots, l_N) \leqslant 1\big\}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{5.1}$$

где $\mu^*_i(\cdot)$ — норма, сопряженная к норме $\mu_i(\cdot)$, являются P-множествами.

З а м е ч а н и е 1. В силу того что строго выпуклые компакты и выпуклые многогранники обладают P-свойством [5], этим свойством, например, будут обладать единичные шары в пространствах $\ell^{(d)}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

З а м е ч а н и е 2. В случае, когда условие (B) не выполнено, можно поступить следующим образом. Задавшись числом $\eta > 0$, определим нормы $\widetilde{\mu}_N(\cdot)$ и $\widetilde{\sigma}_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N-1}$, так, чтобы для сопряженных к ним норм выполнялись равенства

$$\widetilde{\mu}^*_N(l_N) = \mu^*_N(l_N) + \eta\|l_N\|, \quad l_N \in \mathbb{R}^{d_N},$$
$$\widetilde{\sigma}^*_i(l_i, \beta) = \sigma^*_i(l_i, \beta) + \eta\sqrt{\|l_i\|^2 + \beta^2}, \quad (l_i, \beta) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

По аналогии с (1.7) положим

$$\widetilde{\mu}_i(l_i, \ldots, l_N) = \widetilde{\sigma}_i\big(l_i, \widetilde{\mu}_{i+1}(l_{i+1}, \ldots, l_N)\big), \quad (l_i, \ldots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_N}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

и рассмотрим новый показатель качества

$$\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}\big(x[t_*[\cdot]\vartheta]\big) = \widetilde{\mu}_{h(t_*)}\Big(D_{h(t_*)}\big(x(\vartheta_{h(t_*)}) - c_{h(t_*)}\big), \ldots, D_N\big(x(\vartheta_N) - c_N\big)\Big). \tag{5.2}$$

Можно проверить, что, во-первых, новый показатель (5.2) будет по-прежнему позиционным, во-вторых, он будет удовлетворять условию (B), так как соответствующие единичные шары будут строго выпуклыми компактами, и, в-третьих, найдется такое число $M > 0$, что для любого числа $0 < \eta \leqslant 1$ будут выполняться неравенства

$$|\widetilde{\mu}_i(l_i, \ldots, l_N) - \mu_i(l_i, \ldots, l_N)| \leqslant M\eta \|(l_i, \ldots, l_N)\|, \quad (l_i, \ldots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_N}, \quad i = \overline{1, N},$$

а стало быть, для любого числа $\zeta > 0$ можно подобрать такое число $0 < \eta \leqslant 1$, что для любого движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденного из позиции $(t_*, x_*) \in K$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, будет иметь место оценка

$$\left|\widetilde{\gamma}\big(x[t_*[\cdot]\vartheta]\big) - \gamma\big(x[t_*[\cdot]\vartheta]\big)\right| \leqslant \zeta.$$

Таким образом, решение исходной задачи с показателем качества γ (1.5), не удовлетворяющим условию (B), всегда можно свести к решению вспомогательной задачи с показателем $\widetilde{\gamma}$ (5.2), этому условию удовлетворяющим.

Пусть зафиксированы момент времени $t_* \in [t_0, \vartheta)$, разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ вида (1.8), (2.1), числа $0 < \eta_X \leqslant 1$ и $\eta_\psi > 0$, а также матрицы $Y(\vartheta_i, \vartheta)$, $i = \overline{1, N}$, $Y(\vartheta, \tau_j)$, $j = \overline{1, k}$, и функции $\Delta\psi(\tau_j, \cdot)$, $j = \overline{1, k}$, удовлетворяющие условиям (A1) и (A2). Пусть множества $G(\tau_j \pm 0)$ и функции $\varphi(\tau_j \pm 0, \cdot)$ построены по процедуре, описанной в разделе 2. Обоснованию непрерывности функций $\varphi(\tau_j \pm 0, \cdot)$ предпошлем вспомогательные построения.

Обозначим через $h(t - 0)$ (соответственно, $h(t + 0)$) предел слева (соответственно, справа) функции $h(t)$ из (1.6) в точке $t \in [t_0, \vartheta]$, полагая при этом $h(t_0 - 0) = 1$ и $h(\vartheta + 0) = N$. Для сокращения записи формул будем использовать также следующие обозначения:

$$\boldsymbol{d}[i] = d_i + \ldots + d_N, \quad \boldsymbol{\ell}[i] = (l_i, \ldots, l_N) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_N} = \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[i]}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для каждого $j = \overline{1, k+1}$ определим множества $B(\tau_j \pm 0) \subset \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[h(\tau_j \pm 0)]}$ по следующему рекуррентному правилу. При $j = k + 1$ полагаем

$$B(\tau_{k+1} + 0) = \big\{\boldsymbol{\ell}[N] \in \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[N]} \colon \boldsymbol{\ell}[N] = 0\big\}, \quad B(\tau_{k+1} - 0) = \big\{\boldsymbol{\ell}[N] \in \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[N]} \colon \mu_N^*(\boldsymbol{\ell}[N]) \leqslant 1\big\}.$$

Для $j = \overline{1, k}$ имеем $B(\tau_j + 0) = B(\tau_{j+1} - 0)$. Далее, если $\tau_j \neq \vartheta_h$, $h = h(\tau_j)$, полагаем $B(\tau_j - 0) = B(\tau_j + 0)$. Если же $\tau_j = \vartheta_h$, то, обозначая $\boldsymbol{\ell}^*[h+1] = (l^*_{h+1}, \ldots, l^*_N) \in \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[h+1]}$ и рассматривая для каждого вектора $\boldsymbol{\ell}[h] = (l_h, \ldots, l_N) \in \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[h]}$ множество

$$L_h(\boldsymbol{\ell}[h]) = \Big\{(\nu, \boldsymbol{\ell}^*[h+1]) \in \mathbb{R} \times B(\tau_j + 0) \colon l_i = \nu l_i^*,\ i = \overline{h+1, N},\ \nu \geqslant 0,\ \sigma_h^*(l_h, \nu) \leqslant 1\Big\}, \tag{5.3}$$

определяем $B(\tau_j - 0) = \{\boldsymbol{\ell}[h] \in \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[h]} \colon L_h(\boldsymbol{\ell}[h]) \neq \varnothing\}$.

Рассмотрим линейные операторы T_i :

$$T_i \boldsymbol{\ell}[i] = \sum_{q=i}^{N} Y^T(\vartheta, \vartheta_q) D_q^T l_q, \quad \boldsymbol{\ell}[i] = (l_i, \ldots, l_N) \in \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[i]}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Можно непосредственно проверить, что имеют место равенства

$$G(\tau_j \pm 0) = T_{h(\tau_j \pm 0)} B(\tau_j \pm 0), \quad B(\tau_j \pm 0) = B^*_{h(\tau_j \pm 0)}, \quad j = \overline{1, k+1}, \tag{5.4}$$

где множества B_i^* определяются в согласии с (5.1).

Обозначим

$$\Delta\Psi\big(\tau_j, \boldsymbol{\ell}[h(\tau_j + 0)]\big) = \Delta\psi\big(\tau_j, T_{h(\tau_j + 0)} \boldsymbol{\ell}[h(\tau_j + 0)]\big), \quad \boldsymbol{\ell}[h(\tau_j + 0)] \in \mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[h(\tau_j + 0)]}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Определим скалярные функции $\Phi\big(\tau_j \pm 0, \boldsymbol{\ell}[h(\tau_j \pm 0)]\big)$, $\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j \pm 0)] \in B(\tau_j \pm 0)$, $j = \overline{1, k+1}$, по следующим соотношениям. При $j = k + 1$ полагаем

$$\Phi(\tau_{k+1} + 0, \boldsymbol{\ell}[N]) = 0, \quad \boldsymbol{\ell}[N] \in B(\tau_{k+1} + 0),$$
$$\Phi(\tau_{k+1} - 0, \boldsymbol{\ell}[N]) = -\langle D_N^T \boldsymbol{\ell}[N], c_N \rangle, \quad \boldsymbol{\ell}[N] \in B(\tau_{k+1} - 0).$$

Для $j=\overline{1,k}$ определяем

$$\Psi\big(\tau_j,\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j+0)]\big)=\Delta\Psi\big(\tau_j,\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j+0)]\big)+\Phi\big(\tau_{j+1}-0,\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j+0)]\big),\quad \boldsymbol{\ell}[h(\tau_j+0)]\in B(\tau_j+0),$$
$$\Phi\big(\tau_j+0,\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j+0)]\big)=\big\{\Psi(\tau_j,\cdot)\big\}^*_{B(\tau_j+0)}\big(\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j+0)]\big),\quad \boldsymbol{\ell}[h(\tau_j+0)]\in B(\tau_j+0).$$

Далее, если $\tau_j\neq\vartheta_h$, $h=h(\tau_j)$, то имеем $\Phi(\tau_j-0,\boldsymbol{\ell}[h])=\Phi(\tau_j+0,\boldsymbol{\ell}[h])$, $\boldsymbol{\ell}[h]\in B(\tau_j-0)$, а если $\tau_j=\vartheta_h$, то полагаем

$$\Phi(\tau_j-0,\boldsymbol{\ell}[h])=\max_{(\nu,\boldsymbol{\ell}^*[h+1])\in L_h(\boldsymbol{\ell}[h])}\nu\Phi(\tau_j+0,\boldsymbol{\ell}^*[h+1])-\langle l_h,D_hc_h\rangle,\quad \boldsymbol{\ell}[h]=(l_h,\dots,l_N)\in B(\tau_j-0). \tag{5.5}$$

Можно проверить, что функции $\Phi\big(\tau_j\pm0,\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j\pm0)]\big)$, $\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j\pm0)]\in B(\tau_j\pm0)$, $j=\overline{1,k+1}$, вогнуты, полунепрерывны сверху и ограничены.

Обозначим

$$F(i,m)=\big\{\boldsymbol{\ell}[i]\in B_i^*\colon T_i\boldsymbol{\ell}[i]=m\big\}=B_i^*\cap T_i^{-1}(m),\quad i=\overline{1,N},\quad m\in\mathbb{R}^n. \tag{5.6}$$

Опираясь на следствие из теоремы Каратеодори о выпуклых оболочках функций [8, с. 199], можно показать, что справедливы равенства

$$\varphi(\tau_j\pm0,m)=\max_{\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j\pm0)]\in\Omega(\tau_j\pm0,m)}\Phi\big(\tau_j\pm0,\boldsymbol{\ell}[h(\tau_j\pm0)]\big),\quad m\in G(\tau_j\pm0),\quad j=\overline{1,k+1}, \tag{5.7}$$

где

$$\Omega(\tau_j\pm0,m)=F(h(\tau_j\pm0),m). \tag{5.8}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (B). *Тогда функции* $\varphi(\tau_j\pm0,m)$, $m\in G(\tau_j\pm0)$, $j=\overline{1,k+1}$, *непрерывны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая соотношения (5.4), (5.6) и (5.8), по свойству (P2) многозначные отображения $\Omega(\tau_j\pm0,m)$, $m\in G(\tau_j\pm0)$, непрерывны. Поэтому и в силу (5.7) для доказательства теоремы достаточно показать непрерывность функций $\Phi(\tau_j\pm0,\cdot)$, $j=\overline{1,k+1}$.

Функции $\Phi(\tau_{k+1}\pm0,\cdot)$ непрерывны по построению. Далее, по индукции предположим, что функции $\Phi(\tau_{j+1}\pm0,\cdot)$ непрерывны, и проверим непрерывность функций $\Phi(\tau_j\pm0,\cdot)$. Функция $\Delta\Psi(\tau_j,\cdot)$ непрерывна, следовательно, непрерывна функция $\Psi(\tau_j,\cdot)$. Отсюда по свойству (P1) получаем непрерывность функции $\Phi(\tau_j+0,\cdot)$, а значит, и непрерывность функции $\Phi(\tau_j-0,\cdot)$ в случае $\tau_j\neq\vartheta_h$, $h=h(\tau_j)$. Докажем непрерывность функции $\Phi(\tau_j-0,\cdot)$ в случае $\tau_j=\vartheta_h$.

Каждому вектору $l_h\in\mathbb{R}^{d_h}$, $\sigma_h^*(l_h,0)\leqslant1$, поставим в соответствие множество

$$W(l_h)=\Big\{\boldsymbol{\ell}^*[h+1]=(l_{h+1}^*,\dots,l_N^*)\in\mathbf{R}^{\boldsymbol{d}[h+1]}\colon(l_h,l_{h+1}^*,\dots,l_N^*)\in B(\tau_j-0)=B_h^*\Big\}.$$

В силу соотношений (1.7) и (5.1) график полученного многозначного отображения $W(\cdot)$ совпадает с B_h^*, а стало быть, является P-множеством. Тогда по свойству (P3) многозначное отображение $W(\cdot)$ непрерывно. Обозначим

$$a(\boldsymbol{\ell}[h])=\mu_{h+1}^*(l_{h+1},\dots,l_N),\ b(\boldsymbol{\ell}[h])=\max_{\boldsymbol{\ell}^*[h+1]\in W(l_h)}\mu_{h+1}^*(\boldsymbol{\ell}^*[h+1]),\ \boldsymbol{\ell}[h]=(l_h,\dots,l_N)\in B(\tau_j-0).$$

Отметим, что $a(\boldsymbol{\ell}[h])\leqslant b(\boldsymbol{\ell}[h])$, $\boldsymbol{\ell}[h]\in B(\tau_j-0)$ и функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ непрерывны. Положим

$$H\big(\boldsymbol{\ell}[h]=(l_h,\dots,l_N),\nu\big)=\Big\{\boldsymbol{\ell}^*[h+1]=(l_{h+1}^*,\dots,l_N^*)\in B(\tau_j+0)\colon l_i=\nu l_i^*,\ i=\overline{h+1,N}\Big\},$$
$$\omega(\boldsymbol{\ell}[h],\nu)=\max_{\boldsymbol{\ell}^*[h+1]\in H(\boldsymbol{\ell}[h],\nu)}\nu\Phi(\tau_j+0,\boldsymbol{\ell}^*[h+1]),\quad \boldsymbol{\ell}[h]\in B(\tau_j-0),\quad a(\boldsymbol{\ell}[h])\leqslant\nu\leqslant b(\boldsymbol{\ell}[h]).$$

Функция $\omega(\cdot)$ непрерывна. При $\nu>0$ это следует из непрерывности функции $\Phi(\tau_j+0,\cdot)$ и равенства $H(\boldsymbol{\ell}[h],\nu)=\{(l_{h+1}/\nu,\dots,l_N/\nu)\}$, а при $\nu=0$ — из ограниченности функции $\Phi(\tau_j+0,\cdot)$. Таким образом, получаем, что будет непрерывна функция

$$\omega^0(\boldsymbol{\ell}[h])=\max_{a(\boldsymbol{\ell}[h])\leqslant\nu\leqslant b(\boldsymbol{\ell}[h])}\omega(\boldsymbol{\ell}[h],\nu),\quad \boldsymbol{\ell}[h]\in B(\tau_j-0).$$

Осталось заметить, что в силу соотношений (5.3) и (5.5) имеет место равенство

$$\Phi(\tau_j - 0, \boldsymbol{\ell}[h]) = \omega^0(\boldsymbol{\ell}[h]) - \langle l_h, D_h c_h \rangle, \quad \boldsymbol{\ell}[h] = (l_h, \ldots, l_N) \in B(\tau_j - 0).$$

Теорема доказана.

6. Заключение

Из теорем 1–3 и лемм 2, 3 вытекают следующие теоремы об устойчивости рассматриваемой процедуры решения задачи управления движением системы (1.1) на минимакс показателя (1.5) по отношению к вычислительным и информационным погрешностям.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (B). *Тогда для любого числа* $\xi > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что, каковы бы ни были момент времени* $t_* \in [t_0, \vartheta)$ *и разбиение* $\Delta_k\{\tau_j\}$ (1.8), (2.1) *с диаметром* $\delta_k \leqslant \delta$, *можно подобрать числа* $0 < \eta_X \leqslant 1$, $\eta_\psi > 0$ *и* $\eta_G > 0$, $\eta_\varphi > 0$ *так, что при условиях* (A1), (A2) *и* (A6), (A7) *будет справедливо неравенство*

$$|\widetilde{\mathrm{e}}(\tau_1 - 0, x_*) - \rho(t_*, x_*)| \leqslant \xi, \quad (t_*, x_*) \in K.$$

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (B). *Тогда для любого числа* $\zeta > 0$ *найдутся такие число* $\varepsilon^* > 0$ *и функция* $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, *что, каковы бы ни были значение параметра точности* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, *момент времени* $t_* \in [t_0, \vartheta)$ *и разбиение* $\Delta_k\{\tau_j\}$ (1.8), (2.1) *с диаметром* $\delta_k \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, *можно указать числа* $0 < \eta_X \leqslant 1$, $\eta_\psi > 0$, $\eta_u > 0$, $\eta_x > 0$ *и* $\eta_G > 0$, $\eta_\varphi > 0$ *так, что при условиях* (A1), (A2) *и* (A6), (A7) *закон управления* $\{u_{\Delta_k}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$, *удовлетворяющий условию* (A4), *в котором функции* $z_j(\cdot)$ *определяются согласно* (4.6), *и действующий по правилу* (3.6) *с выполнением условия* (A5), *для всякой позиции* $(t_*, x_*) \in K$ *и любой допустимой реализации помехи* $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ *будет обеспечивать неравенство* (1.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
2. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
3. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.
4. **Корнев Д.В.** О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 11. С. 60–75.
5. **Балашов М.В.** О P-свойстве выпуклых компактов // Мат. заметки. 2002. Т. 71, вып. 3. С. 323–333.
6. **Балашов М.В., Богданов И.И.** О некоторых свойствах P-множеств и свойстве зажатости в выпуклых компактах // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 496–505.
7. **Широков М.Е.** О сильном CE-свойстве выпуклых множеств // Мат. заметки. 2007. Т. 82, вып. 3. С. 441–458.
8. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

Гомоюнов Михаил Игоревич
мл. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Поступила 26.09.2013

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Том 20 № 1 2014

УДК 517.5

ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНОГО АРГУМЕНТА В ТОЧНОМ МНОГОМЕРНОМ L_2-НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА[1]

Д. В. Горбачев

Доказывается оценка оптимального аргумента в точном неравенстве Джексона — Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ для случая обобщенного модуля непрерывности, частным случаем которого является классический модуль непрерывности. Аналогичные утверждения справедливы для тора $\mathbb{T}^n$. Полученные результаты согласуются с классическими одномерными теоремами Черных и уточняют некоторые многомерные результаты С. Н. Васильева, А. И. Козко и Н. И. Рождественского.

Ключевые слова: наилучшее приближение, обобщенный модуль непрерывности, точное многомерное неравенство Джексона — Стечкина.

D. V. Gorbachev. An estimate of an optimal argument in the sharp multidimensional Jackson–Stechkin L_2-inequality.

An estimate of an optimal argument in the sharp Jackson–Stechkin inequality in the space $L_2(\mathbb{R}^n)$ is proved in the case of a generalized modulus of continuity; its special case is the classical modulus of continuity. Similar statements hold for the torus $\mathbb{T}^n$. The obtained results agree with Chernykh's classical one-dimensional theorems and refine some results by S. N. Vasil'ev, A. I. Kozko, and N. I. Rozhdestvenskii.

Keywords: best approximation, generalized modulus of continuity, sharp multidimensional Jackson–Stechkin inequality.

1. Введение

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, f — произвольная функция из $L_2(\mathbb{T})$, $E_\nu(f)_{L_2(\mathbb{T})}$ — величина наилучшего приближения f тригонометрическими многочленами порядка $< \nu$, $\omega_r(\delta, f)_{L_2(\mathbb{T})}$ — r-й модуль непрерывности f. Неравенство вида

$$E_\nu(f)_{L_2(\mathbb{T})} \le K\omega_r(\delta, f)_{L_2(\mathbb{T})}$$

с абсолютной константой K известно как неравенство Джексона при $r = 1$ и Джексона — Стечкина при $r \ge 2$. Они называются точными, если константа K является наилучшей для всех функций:

$$K = K_r(\delta, \nu)_{L_2(\mathbb{T})} = \sup\left\{\frac{E_\nu(f)_{L_2(\mathbb{T})}}{\omega_r(\delta, f)_{L_2(\mathbb{T})}} \colon f \in L_2(\mathbb{T}),\ f \not\equiv 0\right\}.$$

Аналогичные термины употребляются в общих случаях.

Приведем классические результаты Н.И. Черных [16; 17]. В работе [16] он рассмотрел случай $r = 1$ и доказал, что глобальный минимум величины $K_1(\delta, \nu)$ равен $2^{-1/2}$ и

$$K_1\left(\frac{\pi}{\nu}, \nu\right) = 2^{-1/2}.$$

Позднее им было установлено, что $K_1(\delta, \nu) > 2^{-1/2}$ при $\delta < \pi/\nu$ [22]. Поэтому точку $\delta_* = \pi/\nu$ принято называть оптимальным аргументом в точном неравенстве Джексона — Стечкина.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00045), Министерством образования и науки РФ (госзадание № 5414ГЗ) и фонда Дмитрия Зимина "Династия".

В работе [17] Черных изучил случай $r>1$. Он доказал, что

$$K_r\left(\frac{2\pi}{\nu},\nu\right)\le K_r=\binom{2r}{r}^{-1/2}$$

и при $\nu>r$ оценка точная. Впоследствии этому результату придали законченный вид, показав, что глобальный минимум $K_r(\delta,\nu)$ для любых $\delta>0$ и $\nu\ge 1$ равен K_r (см. [14]).

В случае многомерного тора $\mathbb{T}^n$ В.А. Юдин [18] доказал точное неравенство Джексона

$$E_\nu(f)_{L_2(\mathbb{T}^n)}\le 2^{-1/2}\omega\left(\frac{2q_{n/2-1}}{\nu},f\right)_{L_2(\mathbb{T}^n)},$$

где q_α — первый положительный нуль нормированной функции Бесселя

$$j_\alpha(u)=\Gamma(\alpha+1)(2/u)^\alpha J_\alpha(u),\quad j_\alpha(0)=1.$$

Здесь и далее используются стандартные средства гармонического анализа в $\mathbb{R}^n$, подробно изложенные в нужном нам виде в [1; 6; 15]. При $n=1$ имеем $j_{-1/2}(u)=\cos u$ и $q_{-1/2}=\pi/2$, что согласуется с результатом Черных [16].

Данные классические результаты обобщались в разных направлениях многими авторами. В основном это касалось переноса на случай приближения целыми функциями экспоненциального типа, а также переопределения модуля непрерывности. В этом направлении отметим только лежащие в контексте данной статьи работы [1–18; 22]. В них подробно изложены история и мотивация вопроса и содержатся библиографические списки. Интересно, что сейчас развивается тематика по оценке аналогов величины наилучшего приближения [20;21;23]. Важность этой тематике придает тот факт, что была обнаружена глубокая связь данного типа экстремальных задач с проблемами метрической геометрии, касающимися оценки характеристик экстремальных расположений точек в пространстве [6; 19].

В частности, неравенство Юдина было перенесено на случай приближения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа. При этом автором в работе [5] было доказано, что для $n\in\mathbb{N}$ аргумент $2q_{n/2-1}/\nu$ при $\nu>0$ является оптимальным. Это следует из связи между оптимальным аргументом и экстремальной задачей о наименьшей смене знака [2]

$$\lambda_n=\inf\{\lambda(f)\colon f\in F^n\},$$

где $\lambda(f)=\inf\{\lambda>0\colon f(x)\le 0,\ |x|\ge\lambda\}$, F^n — класс положительно определенных функций $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ экспоненциального сферического типа 2, для которых $f(0)=1$ и $\widehat{f}(0)=0$. В работе [18] Юдин сконструировал радиальную функцию

$$f_n(x)=Y_\alpha(|x|)\in F^n,\quad Y_\alpha(u)=\frac{j_\alpha^2(u)}{1-(u/q_\alpha)^2}, \tag{1.1}$$

для которой $\lambda(f_n)\le q_{n/2-1}$. Преобразование Фурье этой функции использовалось им в качестве веса при доказательстве точного неравенства Джексона в $L_2(\mathbb{T}^n)$. Экстремальная задача нахождения величины λ_n была решена автором [5]: $\lambda_n=q_{n/2-1}$, единственной экстремальной функцией является функция Юдина f_n.

Величина λ_n возникает также в метрической геометрии. Так Юдиным [19] было доказано геометрическое неравенство

$$\rho(L)R(L^*)\le\frac{\lambda_n}{2\pi},$$

где $\rho(L)$ — радиус упаковки невырожденной решетки $L\subset\mathbb{R}^n$, $R(L^*)$ — радиус покрытия двойственной решетки L^*. Отсюда он получил правильную по размерности верхнюю асимптотическую оценку

$$\rho(L)R(L^*)\le\frac{n}{4\pi}\left(1+o(1)\right).$$

Долгое время оставалась неясной ситуация с аналогами классического точного неравенства Джексона — Стечкина — Черных при $n > 1$. Эта задача исследовалась, но результатов, аналогичных неравенству Юдина для случая $r = 1$, не было известно. Здесь мы частично восполним этот пробел. В частности, покажем, что для r-го модуля непрерывности справедливо точное неравенство Джексона — Стечкина

$$E_\nu(f)_{L_2(\mathbb{T}^n)} \le \binom{2r}{r}^{-1/2} \omega_r\left(\frac{2q_{n/2}}{\nu}, f\right)_{L_2(\mathbb{T}^n)}. \tag{1.2}$$

При $n = 1$ имеем $j_{1/2}(u) = u^{-1}\sin u$ и $q_{1/2} = \pi$, что также согласуется с результатом Черных [17].

Далее будем опираться на результаты работ С.Н. Васильева [3; 4], где доказаны точные неравенства Джексона — Стечкина в пространстве L_2 на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{T}^n$ для случая обобщенного модуля непрерывности. В частном случае он включает классический модуль непрерывности. Однако, в отличие от результатов Черных, результаты [3;4] неконструктивны в том плане, что не указаны эффективные оценки аргумента в модуле непрерывности в зависимости от размерности пространства и других параметров. Отметим недавно опубликованную статью [13], где константа Джексона — Стечкина изучена для преобразования Фурье — Данкля.

В обозначениях будем стараться следовать [3; 4]. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $L_2(\mathbb{R}^n)$ — пространство функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

$M = \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям

$$0 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| < \infty, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k = 0, \tag{1.3}$$

для $x, t \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta_t^M f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k f(x + kt) = \mu(T^t) f(x),$$

где $\mu(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k z^k$, T^t — оператор сдвига: $T^t f(x) = f(x + t)$.

Оператор $\Delta_t^M\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ называется обобщенным разностным оператором. Если положить $M = M_r$, где

$$M_r = \left\{(-1)^{r-k}\binom{r}{k} : k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad r \in \mathbb{N},$$

то получим классическую r-ю разность функции f

$$(\Delta_t)^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} f(x + kt), \quad \Delta_t = T^t - I.$$

В этом случае $\mu(z) = (z - 1)^r$. В работе [14] были рассмотрены другие примеры последовательностей M. В частности, изучен разностный оператор Туэ — Морса, для которого

$$\mu(z) = (-1)^r \prod_{j=0}^{r-1} (1 - z^{a^j}), \quad a \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\|\Delta_t^M f(x)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t\xi) |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi,$$

где для $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi(u) = |\mu(e^{2\pi iu})|^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_l e^{2\pi ilu}, \quad \widehat{\varphi}_l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \overline{\mu_{k+l}}, \quad \widehat{\varphi}_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k|^2. \tag{1.4}$$

В силу свойств (1.3) последовательности M функция φ неотрицательна, непрерывна и $\varphi(0) = 0$. Отсюда следует, что $\|\Delta_t^M f(x)\|_2$ является непрерывной функцией от t, стремящейся к нулю при $t \to 0$.

При помощи обобщенного разностного оператора определяется обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\omega_M(f, \delta) = \sup_{t\in\delta T} \|\Delta_t^M f(x)\|_2, \quad \delta > 0,$$

где $T \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая окрестность нуля. Для случая единичного евклидова шара $T = B^n$ и последовательности $M = M_r$ получаем классический модуль непрерывности r-го порядка

$$\omega_r(\delta, f)_2 = \sup_{|t|\le\delta} \|\Delta_t^r f(x)\|_2.$$

Определим величину наилучшего приближения $E_\Lambda(f)$ функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Через

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi ix\xi}\, dx$$

обозначим преобразование Фурье функции f, Λ — подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее окрестность нуля, $\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \ne 0\}$ — носитель функции f. Тогда

$$E_\Lambda(f) = \inf\{\|f - g\|_2 \colon \operatorname{supp}\widehat{g} \subset \Lambda\}$$

и

$$E_\Lambda^2(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Lambda} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Если положить $\Lambda = \Lambda_\nu$, где $\Lambda_\nu = (2\pi)^{-1}\nu B^n$, то получим классическую величину наилучшего приближения $E_\nu(f)_2$ функции f целыми функциями экспоненциального сферического типа $\nu > 0$.

Через $K_M(\delta T, \Lambda)$ обозначим точную константу Джексона — Стечкина в неравенстве

$$E_\Lambda(f) \le K\omega_M(f, \delta).$$

В статье [4] доказано следующее утверждение. Пусть $r(\Lambda) = \inf\{|\xi| \colon \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda\}$. Тогда существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$K_M\left(\frac{\gamma}{r(\Lambda)}\, T, \Lambda\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le K_M, \tag{1.5}$$

где

$$K_M = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k|^2\right)^{-1/2} = (\widehat{\varphi}_0)^{-1/2}.$$

В классическом случае $M = M_r$, $\Lambda = \Lambda_\nu$ имеем $K_M = K_r$, $r(\Lambda) = (2\pi)^{-1}\nu$. Поэтому

$$E_\nu(f)_2 \le \binom{2r}{r}^{-1/2} \omega_r\left(\frac{\gamma'}{\nu}, f\right)_2,$$

где $\gamma' = 2\pi\gamma$). Этот результат схож с результатами Черных и (1.2), однако в нем нет эффективных оценок числа γ'.

Далее мы изучим только случай евклидовых шаров

$$T = B^n, \quad \Lambda = (2\pi)^{-1}\nu B^n, \quad \nu > 0.$$

Из него можно получить эффективные, но заведомо далекие от точных оценки оптимальных аргументов и для произвольных множеств T и Λ, если вписывать в них и описывать вокруг них евклидовы шары.

2. Основные результаты

Для функции φ (1.4) имеем

$$\frac{\varphi(u)+\varphi(-u)}{2} = \widehat{\varphi}_0 - \sum_{l\in\mathbb{N}} \varphi_l \cos(2\pi l u),$$

где $\varphi_l = -2\operatorname{Re}\widehat{\varphi}_l$, $l \in \mathbb{N}$. Отметим, что для действительных последовательностей M функция φ очевидно будет четной. Положим

$$s_l = \sum_{k=1}^{l} \varphi_l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Теорема. *Если $s_l \geq 0$, $l \in \mathbb{N}$, то для $n \geq 1$ и любого $\nu > 0$*

$$K_M\left(\frac{2q_{n/2}}{\nu}\, B^n, (2\pi)^{-1}\nu B^n\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq K_M.$$

З а м е ч а н и е. Из результатов работы [13] следует, что для $n \geq 2$ и произвольных $\delta, \nu > 0$

$$K_M(\delta T, \Lambda_\nu)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geq K_M.$$

Без подробного доказательства это утверждение приведено в работе [4], причем для всех $n \geq 1$. Таким образом, в теореме на самом деле имеем равенство.

Аналогичные утверждения справедливы для случая тора $\mathbb{T}^n$ и приближения тригонометрическими многочленами со спектром $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$. Параметры δ и ν по-прежнему можно считать произвольными положительными числами. Только величина наилучшего приближения за счет дискретности Λ при увеличении ν будет изменяться скачкообразно. Кроме того, в силу периодичности функций их модуль непрерывности, начиная с некоторого $\delta = \delta_n$, будет постоянным.

Покажем, что условия теоремы выполняются для классической последовательности M_r. В этом случае, полагая $z = e^{2\pi i u}$, имеем

$$\varphi(u) = |(z-1)^r|^2 = (z-1)^r(z^{-1}-1)^r = (-z^{-1})^r(1-z)^{2r}.$$

Возводя в степень, находим

$$\varphi(u) = (-z^{-1})^r \sum_{k=0}^{2r} \binom{2r}{k}(-z)^k = (-z^{-1})^r\left(\binom{2r}{r}(-z)^r + \sum_{k\neq r}\right),$$

где

$$\sum_{k\neq r} = \sum_{k=0}^{r-1}\binom{2r}{k}(-z)^k + \sum_{k=r+1}^{2r}\binom{2r}{k}(-z)^k = \sum_{l=1}^{r}\binom{2r}{r-l}\left((-z)^{r-l}+(-z)^{r+l}\right).$$

Таким образом,

$$\varphi(u) = \binom{2r}{r} - 2\sum_{l=1}^{r}(-1)^{l-1}\binom{2r}{r-l}\cos(2\pi l u)$$

и $\varphi_l = 2(-1)^{l-1}\binom{2r}{r-l}$, $l = 1, \dots, r$. Это знакопеременная убывающая по модулю последовательность. Поэтому для нее частичные суммы s_l будут положительными, и условия теоремы выполнены. При этом $\widehat{\varphi}_0 = \binom{2r}{r}$ и $K_{M_r} = K_r$.

Было бы интересно проверить теорему в случае разностного оператора Туэ — Морса, для которого

$$\varphi_r(u) = 2^r \prod_{j=0}^{r-1}\bigl(1 - \cos(2\pi a^j u)\bigr), \quad \widehat{\varphi}_0 = 2^r.$$

В классическом случае $a = 2$ для $r = 1, 2, 3, 4$ имеем следующие последовательности s_l:

$$2; \quad 2, 6, 4; \quad 6, 10, 4, 12, 10, 6, 8; \quad 10, 22, 12, 20, 22, 10, 8, 24, 18, 14, 20, 12, 14, 18, 16.$$

Видно, что условия теоремы выполнены.

3. Доказательство теоремы

Пусть $v \in L_1(\mathbb{R}^n)$ — произвольная неотрицательная функция, для которой $\operatorname{supp} v \subset T$ и

$$\int_T v(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} v(t)\,dt = \widehat{v}(0) > 0.$$

Она называется весом. Справедливо равенство [4, формула (5)]

$$\int_T \|\Delta_{\delta t}^M f(x)\|_2^2\, v(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2\, V(\delta\xi)\,d\xi,$$

где

$$V(\delta\xi) = \int_T \varphi(\delta\xi t) v(t)\,dt.$$

Поскольку

$$\int_T \|\Delta_{\delta t}^M f(x)\|_2^2\, v(t)\,dt \le \sup_{t\in\delta T}\|\Delta_t^M f(x)\|_2^2 \int_T v(t)\,dt$$

и в силу неотрицательности V

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2\, V(\delta\xi)\,d\xi \ge \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Lambda} |\widehat{f}(\xi)|^2\, V(\delta\xi)\,d\xi \ge \inf_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\Lambda} V(\delta\xi) \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Lambda} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi,$$

то

$$E_\Lambda^2(f) I \le \widehat{v}(0)\omega_M^2(f,\delta),$$

где

$$I = \inf_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\Lambda} V(\delta\xi).$$

Если теперь показать, что I не меньше, чем $\widehat{\varphi}_0\widehat{v}(0)$, то неравенство (1.5) будет установлено. Именно этот факт с помощью оригинальных рассуждений доказывается в [4]. Однако при этом в определенный момент применяется лемма Фейера, что не позволяет конструктивно оценить аргумент в модуле непрерывности.

Покажем, как построить необходимый вес v в случае шара $T = B^n$. Применяя равенство Парсеваля, условие на носитель v и формулу (1.4), получаем

$$V(\delta\xi) = \int\limits_T \varphi(\delta\xi t)v(t)\,dt = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_l \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i l\delta\xi t} v(t)\,dt = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_l \widehat{v}(-l\delta\xi).$$

Будем искать радиальный вес $v(t) = v_0(|t|)$, где $\operatorname{supp} v_0 \subset [0,1]$. Для него

$$\widehat{v}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\widetilde{v}_0(2\pi|\xi|), \tag{3.6}$$

где через

$$\widetilde{v}_0(s) = \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^\infty v_0(u)j_\alpha(su)u^{2\alpha+1}\,du, \quad s\ge 0,$$

обозначено преобразование Фурье — Ганкеля порядка $\alpha = n/2-1$. Отметим, что в выражении для $\widetilde{v}_0(s)$ сознательно не используется обозначение размерности n. Это позволяет обобщить доказываемые теоремы на случай пространства L_2 на полуоси $\mathbb{R}_+$ со степенным весом $u^{2\alpha+1}$ и произвольным $\alpha \ge -1/2$, как это проделано в работе [1] и многих других.

Для радиального веса v в силу четности $\widehat{v}$

$$V(\delta\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_l\widehat{v}(l\delta\xi) = \widehat{\varphi}_0\widehat{v}(0) - \sum_{l\in\mathbb{N}} \varphi_l\widehat{v}(l\delta\xi).$$

Отсюда следует, что $I = \widehat{\varphi}_0\widehat{v}(0) - S$, где

$$S = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\Lambda}\sum_{l\in\mathbb{N}} \varphi_l\widehat{v}(l\delta\xi).$$

В случае шара $\Lambda = (2\pi)^{-1}\nu B^n$, учитывая (3.6), имеем

$$S = (2\pi)^{n/2}\sup_{s>\nu}\sum_{l\in\mathbb{N}} \varphi_l\widetilde{v}_0(l\delta s).$$

Приведем пример веса v, для которого величина S является неположительной при $\delta \ge 2q_{n/2}/\nu$. Тогда $I \ge \widehat{\varphi}_0\widehat{v}(0)$, и теорема будет доказана. Для этого рассмотрим функцию Юдина (1.1). Необходимые нам свойства этой функции для $\alpha = n/2-1$ были установлены самим Юдиным, а для произвольного $\alpha \ge -1/2$ имеются в [1; 6; 15]. В частности, функция Y_α имеет следующее представление в виде интеграла Фурье — Ганкеля:

$$Y_\alpha(u) = \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^2 \widetilde{Y}_\alpha(s)j_\alpha(us)s^{2\alpha+1}\,ds,$$

где преобразование $\widetilde{Y}_\alpha$ непрерывно, неотрицательно и $\widetilde{Y}_\alpha(0) = \widetilde{Y}_\alpha(2) = 0$. Его явное выражение через оператор обобщенного сдвига Бесселя нам не потребуется. Отметим только, что

$$\widetilde{Y}_{-1/2}(s) = 2^{-5/2}\pi^{3/2}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\chi_{[0,2]}(s)$$

является известной весовой функцией Черных, использованной им при доказательстве точного неравенства Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{T})$.

Рассмотрим функцию

$$G_\alpha(u) = \int\limits_u^\infty tY_{\alpha+1}(t)\,dt.$$

Справедлива оценка $|Y_\alpha(u)| = O(u^{-2\alpha-3})$ при $u \to \infty$. Поэтому аналогично $|G_\alpha(u)| = O(u^{-2\alpha-3})$ при $u \to \infty$. При этом, поскольку $Y_{\alpha+1}(u) \le 0$ при $u \ge q_{\alpha+1}$, функция $G_\alpha(u) < 0$ при $u \ge q_{\alpha+1}$ и возрастает на этом промежутке.

Используя тождество

$$\frac{d}{du}\left(u^{2\alpha+2} j_{\alpha+1}(su)\right) = (2\alpha+2)u^{2\alpha+1} j_\alpha(su),$$

получаем

$$2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\widetilde{G}_\alpha(s) = \frac{1}{2\alpha+2}\int\limits_0^\infty G(u)d\left(u^{2\alpha+2} j_{\alpha+1}(su)\right).$$

Отсюда интегрированием по частям находим

$$2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)\widetilde{G}_\alpha(s) = f(u)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty u^{2\alpha+2} j_{\alpha+1}(su)\,dG(u),$$

где $f(u) = G_\alpha(u)u^{2\alpha+2} j_{\alpha+1}(su)$. Для $\alpha \ge -1/2$ имеем $|f(u)| = O(u^{2\alpha+2})$ при $u \to 0$ и $|f(u)| = O(u^{-\alpha-5/2})$ при $u \to \infty$. Поэтому $f(u)\Big|_0^\infty = 0$. Дифференцируя $G(u)$, получаем

$$\widetilde{G}_\alpha(s) = \frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)}\int\limits_0^\infty Y_{\alpha+1}(u)u^{2\alpha+3} j_{\alpha+1}(su)\,du.$$

Здесь в правой части стоит преобразование Фурье — Ганкеля для параметра $\alpha+1$. Поэтому

$$\widetilde{G}_\alpha(s) = \widetilde{Y}_{\alpha+1}(s).$$

Отсюда сразу следует, что функция $\widetilde{G}_\alpha$ непрерывна, неотрицательна и $\operatorname{supp}\widetilde{G}_\alpha \subset [0,2]$.

Завершим доказательство. В качестве весовой функции возьмем $v(t) = v_0(|t|)$, $t \in \mathbb{R}^n$, где $v_0(u) = 2^{2\alpha+2}\widetilde{G}_\alpha(2u)$. Тогда v непрерывна, неотрицательна и $\operatorname{supp} v \subset B^n$. Необходимые свойства веса выполнены. При этом $\widetilde{v}_0(s) = G_\alpha(s/2)$ и

$$S = (2\pi)^{n/2}\sup_{s>\nu}\sum_{l\in\mathbb{N}} \varphi_l g_l, \quad g_l = G_\alpha(l\delta s/2).$$

Имеем $\varphi_l = s_l - s_{l-1}$, $s_0 = 0$. Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \varphi_l g_l = \sum_{l\in\mathbb{N}} s_l(g_l - g_{l+1}).$$

Как уже отмечалось, функция $G_\alpha(u) < 0$ при $u \ge q_{\alpha+1}$ и возрастает на этом промежутке. Поэтому g_1 и разности $g_l - g_{l+1}$ будут неположительными при $\delta s/2 \ge q_{\alpha+1}$, $s > \nu$. Отсюда следует, что если $s_l \ge 0$, то $S \le 0$ при $\delta \ge 2q_{\alpha+1}/\nu$. Осталось учесть, что $q_{\alpha+1} = q_{n/2}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 183—198.
2. **Бердышева Е.Е.** Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Мат. заметки. 1999. Т. 66, вып. 3. С. 336–350.
3. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{T}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 102–110.

4. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{R}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 93–99.
5. **Горбачев Д.В.** Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 2. С. 179–187.
6. **Горбачев Д.В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. 2-е изд., перераб. и доп. Тула: “Гриф и К”, 2005. 192 с.
7. **Горбачев Д.В., Странковский С.А.** Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 5. С. 712–717.
8. **Иванов А.В.** Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах // Изв. ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 29–58. (Естественные науки.)
9. **Иванов В.И.** Точные L_2-неравенства Джексона — Черных — Юдина в теории приближений // Изв. ТулГУ. 2012. Вып. 3. С. 19–28. (Естественные науки.)
10. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 1. С. 148–151.
11. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 180–192.
12. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 3. С. 338–348.
13. **Иванов А.В., Иванов В.И., Хуе Ха Тхи Минь.** Обобщенная константа Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля // Изв. ТулГУ. Сер. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 74–90.
14. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 3–46.
15. **Московский А.В.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. 1997. Т. 3, вып. 1. С. 44–70.
16. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
17. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 513–522.
18. **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 309–315.
19. **Юдин В.А.** Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 11. С. 1721–1736.
20. **Bray W.O.** Growth and integrability of Fourier transforms on Euclidean space: preprint. ArXiv: 1308.2268v1. 2013. 17 p. URL: http://arxiv.org/abs/1308.2268 .
21. **Bray W.O., Pinsky M.A.** Growth properties of Fourier transforms via moduli of continuity // J. Func. Anal. 2009. Vol. 255. P. 2265–2285.
22. **Chernykh N.I., Arestov V.V.** On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polinomials // Approximation and functions spaces: Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
23. **Gorbachev D., Tikhonov S.** Moduli of smoothness and growth properties of Fourier transforms: two-sided estimates // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164. P. 1283–1312.

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru

Поступила 09.01.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧЕ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Рассматривается задача оптимального управления точкой малой массы действием силы, ограниченной по величине, при отсутствии сопротивления среды. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления относительно двух независимых малых параметров: массы точки и возмущения начальных условий. Показано, что в данной задаче даже для ситуаций общего положения асимптотика времени быстродействия носит сложный характер.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time in a time-optimal problem with two small parameters.

A time-optimal problem of control of a small-mass point by a force of bounded magnitude in a nonresisting medium is considered. An asymptotic expansion of the optimal time and optimal control is constructed with respect to two independent small parameters: the mass of the point and the perturbation of the initial conditions. It is shown that the asymptotics of the optimal time in this problem is complicated even for cases of general position.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

Введение

Рассматривается задача о быстродействии [1–4] для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными [5–9] и гладкими геометрическими ограничениями на управление, описывающее управление материальной точкой малой массы в среде без сопротивления силой, ограниченной по величине. В задаче имеется еще один независимый малый параметр, связанный с возмущением начальных данных. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления относительно двух малых параметров. В настоящей работе используются методы, развитые в работах [10;11], и она является расширенным вариантом статьи [12]. В отличие от ранее исследованных систем с быстрыми и медленными переменными в данном случае система для быстрых переменных не является асимптотически устойчивой.

Особо отметим, что в данной задаче даже для ситуаций общего положения асимптотика времени быстродействия носит сложный характер, аналогичный асимптотике из работ [10;11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометри-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322) в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” (при финансовой поддержке УрО РАН, проект 12–П–1–1009) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

ческими ограничениями

$$\begin{cases} \quad \dot{\overline{x}} = \overline{y}, & \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2, \\ \varepsilon^2 \dot{\overline{y}} = \overline{u}, & \overline{u} \in \mathbb{R}^2, \ \|\overline{u}\| \leqslant 1, \\ \overline{x}(0) = x_0 + \mu x_1, \ \ \overline{y}(0) = y_0 + \mu y_1, & 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ \overline{x}(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \ \ \overline{y}(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \ \ T_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min . \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма, а $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в рассматриваемых конечномерных пространствах.

Задача (1.1) описывает движение материальной точки малой массы $\varepsilon^2 > 0$ на плоскости под действием ограниченной управляющей силы $\overline{u}(t)$, лежащей в этой плоскости. Отметим, что вторая степень малого параметра ε взята для технического удобства. В начальный момент времени известно состояние — положение $x_0 + \mu x_1$ и скорость $y_0 + \mu y_1$ материальной точки ($\mu > 0$ — малый параметр). Требуется за наименьшее время перевести материальную точку в начало координат и остановить ее. Считаем, что при $\mu = 0$ невозмущенные начальные векторы не параллельны (см.[12]):

$$x_0 \nparallel y_0. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) соответствует случаю общего положения (т. е. сохраняется при малых изменениях векторов x_0 и y_0).

В матричной форме задачу (1.1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{\overline{z}} = \mathcal{A}\overline{z} + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{B}\overline{u}, & \overline{z} \in \mathbb{R}^4, \\ \|\overline{u}\| \leqslant 1, & \overline{u} \in \mathbb{R}^2, \\ \overline{z}(0) = \overline{z}_0 = \ ((x_0 + \mu x_1)^*, (y_0 + \mu y_1)^*)^*, & 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ \overline{z}(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \ \ T_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min, \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица второго порядка; * — знак операции транспонирования матриц (на векторы $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$ смотрим, как на векторы-столбцы).

Утверждение 1. *Задача быстродействия для вполне управляемых систем вида*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ay, & x, y \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon^2 \dot{y} = Bu, & u \in \mathbb{R}^m, \ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \widetilde{x}_0 + \mu \widetilde{x}_1, \ \ y(0) = \widetilde{y}_0 + \mu \widetilde{y}_1, & 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ x(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \ \ y(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \ \ T_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min \end{cases} \tag{1.4}$$

эквивалентна задаче (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу критерия Калмана вполне управляемости [3] $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ и $B(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$. Тем самым оператор A биективен, а $m \geqslant n$. Раскладывая $\mathbb{R}^m$ в прямую сумму $\mathbb{R}^m = Ker\, B \oplus (Ker\, B)^{\perp}$, получим, что $dim\big((Ker\, B)^{\perp}\big) = n$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что и оператор B тоже биективен.

Сделав в (1.4) замену переменных $\widetilde{x} := B^{-1}A^{-1}x$, $\widetilde{y} := B^{-1}y$ и $\widetilde{u} := u/\varepsilon^2$, получим задачу

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = \widetilde{y}, & \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{\widetilde{y}} = \widetilde{u}, & \widetilde{u} \in \mathbb{R}^n, \ \ \|\widetilde{u}\| \leqslant \varepsilon^{-2}, \\ \widetilde{x}(0) = B^{-1}A^{-1}(\widetilde{x}_0 + \mu \widetilde{x}_1), \ \ \widetilde{y}(0) = B^{-1}(\widetilde{y}_0 + \mu \widetilde{y}_1), & 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ \widetilde{x}(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \ \ \widetilde{y}(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \ \ T_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min \end{cases}$$

о наискорейшем переводе материальной точки в пространстве $\mathbb{R}^n$ из $(\widetilde{x}^*(0), \widetilde{y}^*(0))^*$ в точку $(0^*, 0^*)^*$. В силу ограничений на управление оптимальное движение в этом случае происходит в плоскости, порожденной векторами $\widetilde{x}(0)$ и $\widetilde{y}(0)$, под действием управления, лежащего в той же плоскости. Взяв в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ такой, что $\widetilde{x}(0)$ и $\widetilde{y}(0)$ лежат в плоскости, определяемой векторами e_1 и e_2, получим задачу вида (1.1). □

2. Разрешимость задачи (1.1)

Утверждение 2. *Задача* (1.1) *разрешима при всех* $\mu > 0$ *и всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$, *и* $T_{\varepsilon,\mu} \to 0$ *при* $\varepsilon, \mu \to 0$.

Доказательство. Будем рассматривать задачу (1.1), записанную в виде (1.3). Для произвольного $T > 0$, следуя [2; 4], выпишем функцию управляемости $\varphi_{\varepsilon,\mu} \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ для системы (1.3), учитывая равенства

$$e^{s\mathcal{A}^*} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ sI & I \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}^* e^{s\mathcal{A}^*} = \begin{pmatrix} sI & I \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\varphi_{\varepsilon,\mu}(\psi) = \rho(e^{T\mathcal{A}^*}\psi | \{\overline{z}_0\}) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T \rho(\mathcal{B}^* e^{s\mathcal{A}^*}\psi | \mathcal{U}) ds = \langle e^{T\mathcal{A}^*}\psi, \overline{z}_0\rangle + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T \|\mathcal{B}^* e^{s\mathcal{A}^*(\varepsilon)}\psi\| ds$$

$$= \langle x_0 + \mu x_1, \psi_1\rangle + \langle y_0 + \mu y_1, T\psi_1 + \psi_2\rangle + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T \|s\psi_1 + \psi_2\| ds,$$

где $\rho(\psi|F)$ — опорная функция множества F, $\mathcal{U}$ — множество допустимых управлений. Считаем, что $0 < \mu \leqslant \mu_0$ для некоторого $\mu_0 > 0$. При всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало, для любого вектора $\psi = (\psi_1^*, \psi_2^*)^*$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^2$, $\|\psi\| = 1$, для любого $0 < \mu \leqslant \mu_0$ функция управляемости неотрицательна, следовательно, задача разрешима, и справедливо неравенство $T_{\varepsilon,\mu} \leqslant T$. В силу произвольности T получаем, что $T_{\varepsilon,\mu} \to 0$ при $\varepsilon, \mu \to 0$. □

Перейдем в задаче (1.1) к новому времени $\tau := t/\varepsilon$ и переобозначим $\overline{x}(\varepsilon\tau)$, $\varepsilon\overline{y}(\varepsilon\tau)$, $\overline{u}(\varepsilon\tau)$ и $T_{\varepsilon,\mu}/\varepsilon$ через $x(\tau)$, $y(\tau)$, $u(\tau)$ и $\theta_{\varepsilon,\mu}$ соответственно. Тогда задача (1.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, & z \in \mathbb{R}^4, \\ \|u\| \leqslant 1, & u \in \mathbb{R}^2, \\ z(0) = z_0 := ((x_0 + \mu x_1)^*, \varepsilon(y_0 + \mu y_1)^*)^*, & 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ z(\theta_{\varepsilon,\mu}) = 0, \quad \theta_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min. \end{cases} \tag{2.2}$$

Отметим, что новая задача разрешима при всех достаточно малых ε и μ. Естественно ожидать, что "предельной" для задачи (2.2) будет задача

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, & z \in \mathbb{R}^4, \\ \|u\| \leqslant 1, & u \in \mathbb{R}^2, \\ z(0) = z_0 := (x_0^*, 0^*)^*, & \\ z(\theta_0) = 0, \quad \theta_0 \longrightarrow \min, & \end{cases}$$

которая получается из задачи (2.2), если в ней положить $\varepsilon = \mu = 0$.

Теорема 1. *Задача* (2.2) *разрешима при всех малых* $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ *и при* $\varepsilon = \mu = 0$. *При этом* $\theta_{\varepsilon,\mu} \to \theta_0$ *при* $\varepsilon, \mu \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу принципа максимума Понтрягина [1; 3], который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, оптимальное управление в задаче (2.2) имеет вид

$$u_{opt}(\tau) = \frac{\mathcal{B}^* e^{-\tau\mathcal{A}^*} l}{\left\|\mathcal{B}^* e^{-\tau\mathcal{A}^*} l\right\|}, \quad l \in \mathbb{R}^4. \tag{2.3}$$

Тогда в силу формулы Коши получим уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\theta_{\varepsilon,\mu}\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x_0 + \mu x_1 \\ \varepsilon(y_0 + \mu y_1) \end{pmatrix} + e^{\theta_{\varepsilon,\mu}\mathcal{A}} \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} e^{-\tau\mathcal{A}} \mathcal{B}\mathcal{B}^* e^{-\tau\mathcal{A}^*} l \frac{d\tau}{\left\|\mathcal{B}^* e^{-\tau\mathcal{A}^*} l\right\|}$$

или

$$-\begin{pmatrix} x_0 + \mu x_1 \\ \varepsilon(y_0 + \mu y_1) \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} e^{-\tau\mathcal{A}} \mathcal{B}\mathcal{B}^* e^{-\tau\mathcal{A}^*} l \frac{d\tau}{\left\|\mathcal{B}^* e^{-\tau\mathcal{A}^*} l\right\|}, \tag{2.4}$$

которое с учетом (2.1) имеет вид

$$-\begin{pmatrix} x_0 + \mu x_1 \\ \varepsilon(y_0 + \mu y_1) \end{pmatrix} = \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} \begin{pmatrix} \tau^2 l_1 - \tau l_2 \\ -\tau l_1 + l_2 \end{pmatrix} \frac{d\tau}{\| -\tau l_1 + l_2\|}, \tag{2.5}$$

где $l = (l_1^*, l_2^*)^*$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^2$.

При $\varepsilon = \mu = 0$ возьмем $\overset{0}{l}_2 = \lambda_0 \overset{0}{l}_1$ и $\| \overset{0}{l}_1 \| = 1$. Тогда из (2.5) получим, что

$$-x_0 = \overset{0}{l}_1 \int\limits_0^{\theta_0} \frac{\tau^2 - \lambda_0\tau}{|\tau - \lambda_0|} d\tau \quad \text{и} \quad 0 = \overset{0}{l}_1 \int\limits_0^{\theta_0} \frac{-\tau + \lambda_0}{|\tau - \lambda_0|} d\tau.$$

Поэтому $\lambda_0 = \theta_0/2$. В данном случае

$$\int\limits_0^{\theta_0} \frac{\tau^2 - \lambda_0\tau}{|\tau - \lambda_0|} d\tau = \frac{\theta_0^2}{4}.$$

Таким образом, $-x_0 = \overset{0}{l}_1 \theta_0^2/4$, что с учетом равенства $\| \overset{0}{l}_1 \| = 1$ дает

$$\theta_0 = 2\sqrt{\|x_0\|}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\|x_0\|}, \quad \overset{0}{l}_1 = -\frac{x_0}{\|x_0\|}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь разрешимость задачи (2.2) при $\varepsilon > 0$.

Пусть $\Xi(\theta)$ — область достижимости к моменту времени θ управляемой системы $\dot{w} = -\mathcal{A}w + \mathcal{B}u$, $\|u\| \leqslant 1$ из точки $(0^*, 0^*)^*$. Тогда (2.4) показывает, что задача (2.2) разрешима тогда и только тогда, когда $\big((x_0 + \mu x_1)^*, \varepsilon(y_0 + \mu y_1)^*\big)^* \in \Xi(\theta)$ при некотором $\theta > 0$.

Поскольку $(x_0^*, 0^*)^* \in \Xi(\theta_0)$ и эта система вполне управляема, то в силу [13, лемма 1] (аналогично доказательству теоремы 1 из той же работы) получим, что $\forall \theta > \theta_0$ $(x_0^*, 0^*)^* \in int\Xi(\theta)$; здесь $int\Xi(\theta)$ — внутренность множества $\Xi(\theta)$. Поэтому при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ справедливо включение $((x_0 + \mu x_1)^*, \varepsilon(y_0 + \mu y_1)^*)^* \in \Xi(\theta)$. Тем самым задача (2.2) разрешима, и $\theta_{\varepsilon,\mu} \leqslant \theta$. Отсюда (аналогично доказательству соответствующей части теоремы 2 из [13]) получим, что $\theta_{\varepsilon,\mu} \to \theta_0$ при $\varepsilon, \mu \to 0$. □

Утверждение 3. *Для задачи* (2.2) *представление оптимального управления в виде* (2.3) *с нормированным вектором* l *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [13, лемма 5] это условие в рассматриваемом случае эквивалентно следующему:

$$\big(\forall\,\tau\in\mathbb{R}\quad (\tau l_1+l_2)\parallel(\tau\widetilde{l}_1+\widetilde{l}_2)\big)\Longrightarrow\big((l_1^*,l_2^*)^*\parallel(\widetilde{l}_1^*,\widetilde{l}_2^*)^*\big).\tag{2.7}$$

В силу свойств внешнего произведения (см., например, [14, § 33]) $l\parallel\widetilde{l}$ тогда и только тогда, когда $l\wedge\widetilde{l}=0$. В силу тождества

$$0\equiv(\tau l_1+l_2)\wedge(\tau\widetilde{l}_1+\widetilde{l}_2)\equiv\tau^2 l_1\wedge\widetilde{l}_1+\tau(l_1\wedge\widetilde{l}_2+l_2\wedge\widetilde{l}_1)+l_2\wedge\widetilde{l}_2$$

получим, что

$$l_1\wedge\widetilde{l}_1=0,\quad l_2\wedge\widetilde{l}_2=0\quad\text{и}\quad l_1\wedge\widetilde{l}_2+l_1\wedge\widetilde{l}_2=0.\tag{2.8}$$

Из двух первых равенств (2.8) следует, что $l_1\parallel\widetilde{l}_1$ и $l_2\parallel\widetilde{l}_2$. Если $l_1\parallel l_2$ или $\widetilde{l}_1\parallel\widetilde{l}_2$, то тогда и $(l_1^*,l_2^*)^*\parallel(\widetilde{l}_1^*,\widetilde{l}_2^*)^*$.

Если $l_1\not\parallel l_2$ и $\widetilde{l}_1\not\parallel\widetilde{l}_2$, то найдутся $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\sigma\in\mathbb{R}$ такие, что $\widetilde{l}_1=\lambda l_1$ и $\widetilde{l}_2=\sigma l_2$. Последнее равенство из (2.8) имеет вид

$$0=l_1\wedge\widetilde{l}_2+l_2\wedge\widetilde{l}_1=\sigma l_1\wedge l_2+\lambda l_2\wedge l_1=(\sigma-\lambda)\,l_1\wedge l_2.$$

Но в силу предположения $l_1\wedge l_2\neq 0$, поэтому $\sigma=\lambda$, т. е. опять $(l_1^*,l_2^*)^*\parallel(\widetilde{l}_1^*,\widetilde{l}_2^*)^*$. Тем самым свойство (2.7) справедливо. □

3. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

Будем искать решение уравнения (2.5) в следующем виде:

$$l_1=\overset{0}{l}_1+r,\quad \|l_1\|=1,\quad l_2=\lambda l_1+\widetilde{l}_2,\quad \widetilde{l}_2\perp l_1,\quad \beta=\|\widetilde{l}_2\|,\quad \lambda=\lambda_0+\nu,\quad \theta_{\varepsilon,\mu}=\theta_0+\vartheta,\tag{3.1}$$

где все вводимые величины малы. Тогда

$$\|-\tau l_1+l_2\|^2=(\tau-\lambda)^2+\beta^2,\ \tau^2 l_1-\tau l_2=\big((\tau-\lambda)^2+\lambda(\tau-\lambda)\big)l_1-(\tau-\lambda)\widetilde{l}_2-\lambda\widetilde{l}_2,$$

$$-\tau l_1+l_2=-(\tau-\lambda)l_1+\widetilde{l}_2.$$

Вычисляя интеграл из (2.5), получим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl}-x_0-\mu x_1&=&l_1\Big(\dfrac{1}{2}F_2(\vartheta,\nu,\beta)-\dfrac{1}{2}\beta^2F_0(\vartheta,\nu,\beta)+\lambda F_1(\vartheta,\nu,\beta)\Big)\\ &&-\,\widetilde{l}_2\big(F_1(\vartheta,\nu,\beta)+\lambda F_0(\vartheta,\nu,\beta)\big),\\ -\,\varepsilon y_0-\varepsilon\mu y_1&=&-l_1F_1(\vartheta,\nu,\beta)+\widetilde{l}_2F_0(\vartheta,\nu,\beta),\end{array}\right.\tag{3.2}$$

где

$$F_0(\vartheta,\nu,\beta)=\ln\left(\frac{\theta_0/2+\vartheta-\nu+\sqrt{(\theta_0/2+\vartheta-\nu)^2+\beta^2}}{-\theta_0/2-\nu+\sqrt{(\theta_0/2+\nu)^2+\beta^2}}\right);$$

$$F_1(\vartheta,\nu,\beta)=\frac{(\theta_0/2+\vartheta-\nu)^2-(\theta_0/2+\nu)^2}{\sqrt{(\theta_0/2+\vartheta-\nu)^2+\beta^2}+\sqrt{(\theta_0/2+\nu)^2+\beta^2}};$$

$$F_2(\vartheta,\nu,\beta)=(\theta_0/2+\vartheta-\nu)\sqrt{(\theta_0/2+\vartheta-\nu)^2+\beta^2}+(\theta_0/2+\nu)\sqrt{(\theta_0/2+\nu)^2+\beta^2}.$$

Отметим, что система (3.2) с учетом равенств (3.1) равносильна *основной системе*

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_0+\mu x_1+\varepsilon\lambda(y_0+\mu\,y_1)&=&-\dfrac{1}{2}\,l_1\big(F_2(\vartheta,\nu,\beta)-\beta^2F_0(\vartheta,\nu,\beta)\big)+\widetilde{l}_2F_1(\vartheta,\nu,\beta),\\ \varepsilon y_0+\varepsilon\mu y_1&=&l_1F_1(\vartheta,\nu,\beta)-\widetilde{l}_2F_0(\vartheta,\nu,\beta),\\ 0&=&2\langle\overset{0}{l}_1,r\rangle+\|r\|^2,\\ 0&=&\langle\overset{0}{l}_1+r,\widetilde{l}_2\rangle.\end{array}\right.\tag{3.3}$$

Если все величины r, ν, β и ϑ достаточно малы, то функции F_0, F_1 и F_2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} &F_0(\vartheta,\nu,\beta) = 2\ln\frac{\theta_0}{\beta} + \frac{2\vartheta}{\theta_0} + \frac{2\beta^2}{\theta_0^2} - \frac{2}{\theta_0^2}(\nu^2 + (\vartheta-\nu)^2) + \overset{0}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\nu,\beta),\\ &F_1(\vartheta,\nu,\beta) = \vartheta - 2\nu + \overset{1}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\nu,\beta),\\ &F_2(\vartheta,\nu,\beta) = \frac{\theta_0^2}{2} + \theta_0\vartheta + \beta^2 + (\vartheta-\nu)^2 + \nu^2 + \overset{2}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\nu,\beta), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\overset{0}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\nu,\beta)$, $\overset{1}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\nu,\beta)$ и $\overset{2}{\mathcal{F}_3}(\vartheta,\nu,\beta)$ — сходящиеся степенные ряды, начинающиеся с третьей степени от своих аргументов, с известными коэффициентами.

С учетом равенств (2.6) и разложений (3.4) система (3.3) имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu x_1 + \varepsilon(\lambda_0+\nu)(y_0+\mu\, y_1) &= -\frac{1}{2}\overset{0}{l_1}\left(\theta_0\vartheta + \beta^2 + (\vartheta-\nu)^2 + \nu^2 - 2\beta^2\ln\frac{\theta_0}{\beta}\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}r\left(\frac{\theta_0^2}{2} + \theta_0\vartheta - 2\beta^2\ln\frac{\theta_0}{\beta}\right) + \widetilde{l}_2(\vartheta-2\nu)\\ &\quad + \overset{1}{\mathcal{H}}_{3,0}(r,\widetilde{l}_2,\vartheta,\nu,\beta),\\ \varepsilon y_0 + \varepsilon\mu y_1 &= \overset{0}{l_1}(\vartheta-2\nu) + r(\vartheta-2\nu) - 2\widetilde{l}_2\left(\ln\frac{\theta_0}{\beta} + \frac{\vartheta}{\theta_0}\right)\\ &\quad + \overset{2}{\mathcal{H}}_{3,0}(r,\widetilde{l}_2,\vartheta,\nu,\beta),\\ 0 &= 2\langle\overset{0}{l_1}, r\rangle + \|r\|^2,\\ 0 &= \langle\overset{0}{l_1} + r, \widetilde{l}_2\rangle. \end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

Здесь вектор-функции $\overset{i}{\mathcal{H}}_{3,0}(r,\widetilde{l}_2,\vartheta,\nu,\beta)$ раскладываются в степенные асимптотические ряды от переменных ϑ, ν, β и координат векторов r, и $\widetilde{l}_2$ и, в частности,

$$\overset{i}{\mathcal{H}}_{3,0}(r,\widetilde{l}_2,\vartheta,\nu,\beta) = O\big(\|r\|^3 + \|\widetilde{l}_2\|^3 + \vartheta^3 + \nu^3 + \beta^3\big).$$

Система первого приближения для (3.5) имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \mu x_1 + \varepsilon\frac{\theta_0}{2}y_0 &= -\overset{0}{l_1}\frac{\theta_0}{2}\vartheta_1 - \frac{\theta_0^2}{4}r_1,\\ \varepsilon y_0 &= \overset{0}{l_1}(\vartheta_1 - 2\nu_1) - 2\widetilde{l}_{2,1}\ln\frac{\theta_0}{\beta_1},\\ 0 &= \langle\overset{0}{l_1}, r_1\rangle,\\ 0 &= \langle\overset{0}{l_1}, \widetilde{l}_{2,1}\rangle. \end{aligned} \right. \tag{3.6}$$

Решая систему (3.6), получим

$$\vartheta_1 = -\frac{2\mu}{\theta_0}\langle x_1, \overset{0}{l_1}\rangle - \varepsilon\langle y_0, \overset{0}{l_1}\rangle, \quad r_1 = \frac{4\mu}{\theta_0^2}(\overset{0}{l_1}\langle x_1, \overset{0}{l_1}\rangle - x_1) + \frac{2\varepsilon}{\theta_0}(\overset{0}{l_1}\langle y_0, \overset{0}{l_1}\rangle - y_0),$$

$$\nu_1 = -\frac{\mu}{\theta_0}\langle x_1, \overset{0}{l_1}\rangle - \varepsilon\langle y_0, \overset{0}{l_1}\rangle,$$

при этом $\widetilde{l}_{2,1}$ удовлетворяет уравнению

$$2\widetilde{l}_{2,1}\ln\frac{\theta_0}{\beta_1} = \varepsilon(\overset{0}{l_1}\langle y_0, \overset{0}{l_1}\rangle - y_0) = \varepsilon\left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\langle y_0, x_0\rangle - y_0\right) =: \varepsilon v_0 \overset{(1.2)}{\neq} 0.$$

Тем самым, $\beta_1 = \|\widetilde{l}_{2,1}\|$ удовлетворяет уравнению $2\beta_1 \ln(\theta_0/\beta_1) = \varepsilon\|v_0\|$. Обозначив $\delta := \beta_1/\theta_0$ и $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon\|v_0\|/(2\theta_0)$, получаем уравнение $\delta \ln \dfrac{1}{\delta} = \widetilde{\varepsilon}$. Пусть $W_0(\widetilde{\varepsilon})$ — функция, обратная к функции $\delta\ln(1/\delta)$ при малых δ . Тогда (см. [10; 11])

$$\beta_1 = \theta_0 W_0\Big(\frac{\varepsilon\|v_0\|}{2\theta_0}\Big) =: W(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Далее стандартным образом (см. [10; 11] или [15]) получаются асимптотические разложения для всех указанных величин. Отметим, что в силу (3.5) для времени быстродействия поправка ϑ_2 второго порядка малости по ε и μ будет иметь вид

$$\vartheta_2 = \frac{\theta_0}{4}\|r_1\|^2 - \frac{2\varepsilon\nu_1}{\theta_0}\langle y_0, \overset{0}{l}_1\rangle - \varepsilon\mu\langle y_1, \overset{0}{l}_1\rangle - \frac{(\vartheta_1-\nu_1)^2}{\theta_0} - \frac{\nu_1^2}{\theta_0} - \frac{\beta_1^2}{\theta_0} + \frac{2\beta_1^2}{\theta_0}\ln\frac{\theta_0}{\beta_1}.$$

При этом вид этих разложений подобен виду разложений в [10;11]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении условий* (1.2) *время быстродействия* $T_{\varepsilon,\mu}$ *и компоненты векторов* l_1 *и* l_2 *раскладываются в асимптотические ряды вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k\Big(\varepsilon, \mu, W(\varepsilon), \ln\frac{1}{W(\varepsilon)}\Big),$$

где $R_k(\cdot)$ *— рациональные функции своих аргументов и*

$$R_k\Big(\varepsilon, \mu, W(\varepsilon), \ln\frac{1}{W(\varepsilon)}\Big) = O\big(\varepsilon^k + \mu^k\big). \qquad \square$$

Отметим, что

$$T_{\varepsilon,\mu} = \varepsilon\theta_0 - \varepsilon^2\langle y_0, \overset{0}{l}_1\rangle - \varepsilon\mu\frac{2}{\theta_0}\langle x_1, \overset{0}{l}_1\rangle - \varepsilon\frac{W^2(\varepsilon)}{\theta_0} + \varepsilon^2 W(\varepsilon)\frac{\|v_0\|}{\theta_0}$$
$$+ \varepsilon^3 P_{3,3} + \varepsilon^2\mu P_{3,2} + \varepsilon\mu^2 P_{3,1} + O\big(\varepsilon^4+\mu^4\big),$$

$$l_1 = \overset{0}{l}_1 + \frac{2\varepsilon}{\theta_0}v_0 + \frac{4\mu}{\theta_0^2}g_0 + O\big(\varepsilon^2+\mu^2\big),$$

$$l_2 = \frac{\theta_0}{2}\overset{0}{l}_1 - \varepsilon y_0 + \frac{\mu}{\theta_0}(g_0 - x_1) + \frac{v_0}{\|v_0\|}W(\varepsilon) + O\big(\varepsilon^2+\mu^2\big),$$

где $\theta_0 = 2\sqrt{\|x_0\|}$, $\overset{0}{l}_1 = -\dfrac{x_0}{\|x_0\|}$, $v_0 = \overset{0}{l}_1\langle y_0, \overset{0}{l}_1\rangle - y_0$, $g_0 = \overset{0}{l}_1\langle x_1, \overset{0}{l}_1\rangle - x_1$, а $P_{3,1}$, $P_{3,2}$, $P_{3,3}$ — некоторые известные постоянные.

В случае $v_0 = 0$ (т.е. $x_0 \| y_0$ и $\widetilde{l}_{2,1} = 0$) получаем $\vartheta_2 = \overset{1}{G}_2(\varepsilon,\mu)$, $r_2 = \overset{2}{G}_2(\varepsilon,\mu)$, $\nu_2 = \overset{3}{G}_2(\varepsilon,\mu)$, $\beta_2 = \theta_0 W_0(\overset{4}{G}_2(\varepsilon,\mu))$, где $\overset{i}{G}_2(\varepsilon,\mu)$, $i = \overline{1,4}$ — однородные многочлены второй степени от ε, μ, найденные по известным ϑ_1, ν_1, r_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.

6. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
7. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
8. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
9. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
10. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий // Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.
11. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
12. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
13. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вестн. Челяб. гос. ун-та. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып. 14.)
14. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
15. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстродействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 67–79.

Данилин Алексей Руфимович Поступила 08.09.2013
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
доцент УрФУ
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: koo@imm.uran.ru

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

АДАПТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

Е. Е. Иванко

Рассматривается общий подход к построению необходимых, достаточных, а также необходимых и достаточных условий, позволяющих "легко" в вычислительном отношении "адаптировать" известное оптимальное решение абстрактной комбинаторной задачи, обладающей определенной структурой, к изменению множества начальных данных при фиксированной функции стоимости. Подобный подход, по-видимому впервые описываемый в строгой математической формализации для абстрактной задачи, назван в работе адаптивной устойчивостью.

Ключевые слова: структурная устойчивость, задача комбинаторной оптимизации, адаптация решений, возмущение множества начальных данных.

E. E. Ivanko. Adaptive stability in combinatorial optimization problems.

We consider a general approach to the construction of necessary, sufficient, and necessary and sufficient conditions that allow to "adapt" a known optimal solution of an abstract combinatorial problem with a certain structure to a change in the initial data set for a fixed cost function "easily" from the combinatorial point of view. We call this approach adaptive stability. Apparently, it is the first time that the approach is described for an abstract problem in a rigorous mathematical formalization.

Keywords: stability, combinatorial optimization problem, adaptation of solutions, disturbance of the initial data set.

Устойчивость — одно из наиболее общих междисциплинарных понятий в современной науке. Говоря об устойчивости, можно иметь в виду, например, устойчивость по Ляпунову [1] решений дифференциальных уравнений или устойчивость точки в геометрической теории инвариантов; продольную остойчивость судна в кораблестроении или устойчивость в авиации; можно также подразумевать химическую, экологическую или экономическую устойчивость; говорить об устойчивости сустава в медицине или устойчивости плазмы в физике. В наиболее общем смысле устойчивость — это способность системы сохранять свое состояние при изменении параметров этой системы.

В математике нередко говорится об устойчивости решения некоторой задачи при изменении начальных данных. При наличии такой устойчивости полученное решение будет верным для множества различных входных параметров задачи, что особенно важно при применении математических результатов в области физики и инженерных наук, где начальные данные априори допускают погрешность. Именно благодаря широкому спектру актуальных приложений математическая теория устойчивости стала важной и неотъемлемой частью непрерывной математики [2].

Задачи комбинаторной оптимизации (ЗКО) нередко оказываются трудными в вычислительном отношении, поэтому большой интерес представляют техники постоптимального анализа таких задач. Одним из классических направлений постоптимального анализа является исследование устойчивости оптимального решения, позволяющее "распространить" найденное решение на целую совокупность различных вариантов начальных данных. Устойчивость оптимальных решений ЗКО изучалась начиная с 1970-х гг., например, в работах [3–14], посвященных исследованию возмущений функции стоимости. В настоящей статье функция стоимости

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-08-00419, 13-04-00847-а, 13-08-00643-а, 13-01-96022-р_урал_а).

полагается неизменной, а возмущению (в виде добавления, удаления или замены одного из элементов) подвергается само множество начальных данных. Такого рода устойчивость (новая, насколько известно автору, в случае труднорешаемых ЗКО) названа *адаптивной*, поскольку связана с "небольшой" перестройкой, адаптацией найденного решения к изменившимся начальным данным. Работа обобщает результаты [15–21] и является строгой формализацией схемы исследования адаптивной устойчивости ЗКО, изложенной в первой главе [22]. Отметим, наконец, что последние результаты позволяют предположить, что описываемая ниже общая теория также применима к исследованию адаптивной устойчивости задачи оптимального размещения графа на своих вершинах. Существенным отличием работы от предыдущих результатов автора является изменение необходимых и достаточных условий адаптивной устойчивости в целях сокращения трудоемкости их проверки.

Пусть X — непустое конечное множество всевозможных начальных данных некоторой исследуемой задачи комбинаторной оптимизации Z, а $\mathcal{M}$ — непустое конечное множество всевозможных состояний этой задачи, реализующихся на произвольных начальных данных из множества X.

Так, например, в задаче коммивояжера (ЗК) на плоскости множество X доступных для посещения городов может совпадать с множеством $\overline{1,n} \times \overline{1,n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Множество состояний-маршрутов $\mathcal{M}$ при этом состоит из всевозможных маршрутов обхода вершин из всевозможных подмножеств $\overline{1,n} \times \overline{1,n}$. В задаче распределения заданий (РЗ) множество потенциально доступных для распределения заданий, также как и в задаче о рюкзаке (ЗР) — множество потенциально возможных для упаковки предметов, могут совпадать с множеством $X = \overline{1,n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем *исходное множество начальных данных* $A \subset X$, *возмущенное множество начальных данных* $A^* \subset X$ и соответствующие этим множествам множества состояний $M_A \subset \mathcal{M}$ и $M_{A^*} \subset \mathcal{M}$. Для ЗК состояниями из M_A являются маршруты обхода всех элементов из A, для РЗ — распределения элементов из A на заданное число групп, а для ЗР — упаковки элементов множества A.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что ранее в работах [15–22] рассматривались пары (A, A^*), где $A^* \in \bigl\{\widetilde{A} \in \mathcal{P}'(X) \mid \exists z \in X \setminus A, \exists x \in A \colon \widetilde{A} \in \{A \cup \{z\}, A \setminus \{x\}, (A \setminus \{x\}) \cup \{z\}\}\bigr\}$, а $\mathcal{P}'(X)$ — множество непустых подмножеств X. Так, в ЗК добавлению, удалению или замене подвергался один из посещаемых городов, в РЗ — одно из распределяемых заданий, а в ЗР — один из упаковываемых предметов.

На множестве состояний $\mathcal{M}$ зададим функцию *стоимости*

$$D \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

Для ЗК стоимостью маршрута является сумма весов его ребер, для РЗ стоимость распределения есть трудоемкость максимального среди исполнителей списка заданий, для ЗР стоимость состояния — это стоимость упаковки. Пусть далее для $B \in \{A, A^*\}$ N_B есть множество оптимальных состояний, реализующихся на множестве начальных данных B:

$$N_B \triangleq \operatorname*{argmin}_{\alpha \in M_B} D(\alpha).$$

Говоря о ЗКО Z с множеством потенциальных начальных данных X, функцией стоимости D и фактическими начальными данными $A \subset X$, будем писать $Z(A, D, X)$. Обыкновенно решением $Z(A, D, X)$ считается нахождение хотя бы одного оптимального состояния $\alpha_0 \in N_A$ и определение $D(\alpha_0)$.

Обычно при возмущении множества начальных данных состояния задачи "не сохраняются": $M_A \cap M_{A^*} = \varnothing$, а значит, "не сохраняются" и оптимальные состояния: $N_A \cap N_{A^*} = \varnothing$. Так, например, в ЗК при добавлении к множеству начальных данных нового города маршруты обхода исходного множества городов и расширенного множества городов будут содержать различное число ребер.

Фиксированное множество возмущенных начальных данных A^* далее будем называть просто *возмущением.* Для задачи $Z(A,D,X)$ и возмущения $A^* \subset X$ зафиксируем мультифункцию

$$\mathcal{A}\colon M_A \to \mathcal{P}'(M_{A^*}),$$

ставящую в соответствие всякому исходному состоянию некоторое множество возмущенных состояний. В ЗК, например, при возмущении в форме добавления вершины к множеству начальных данных результатом действия такой функции может быть множество маршрутов, получающихся из исходного вставкой новой вершины в одно из ребер данного исходного маршрута.

З а м е ч а н и е 2. При определении $\mathcal{A}$ в прикладных задачах следует избегать роста $|\mathcal{A}(\alpha)|$; на практике будем предполагать, что для всякого $\alpha \in M_A$ справедливо $|\mathcal{A}(\alpha)| \le |A|$.

Мультифункцию $\mathcal{A}$ далее будем называть *адаптирующей функцией.* Оптимальное состояние $\alpha_0 \in N_A$ будем считать *адаптивно устойчивым* или $\mathcal{A}$-*устойчивым* к возмущению A^*, если

$$\mathcal{A}(\alpha_0) \cap N_{A^*} \ne \varnothing.$$

Приведем несколько примеров. В ЗК оптимальный маршрут является адаптивно устойчивым к добавлению нового города, если при размещении добавленного города между некоторыми двумя последовательными городами данного оптимального маршрута получившийся маршрут также является оптимальным; в РЗ оптимальное распределение устойчиво к удалению одного из заданий, если после изъятия задания из списка работ соответствующего работника распределение остается оптимальным; в ЗР оптимальная упаковка устойчива к замене одного из доступных к упаковке предметов на новый, если после такой замены упаковка остается оптимальной (как в случае, если замену пришлось совершить внутри самой упаковки, так и в случае, когда упаковка осталась прежней).

Далее для ЗКО, обладающих определенной структурой, строится единая схема исследования адаптивной устойчивости. Рассмотрим требования к структуре задачи $Z(A,D,X)$. Пусть $\mathcal{G}$ — непустое конечное множество, элементы которого далее будем называть *структурными частями*; пусть

$$\mathbb{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}^i$$

есть множество кортежей всевозможной длины, которые можно составить из элементов множества $\mathcal{G}$ (такие кортежи мы далее будем называть *представлениями*), тогда пусть функция

$$\theta\colon \mathbb{G} \to \mathcal{M}$$

каждому представлению ставит в соответствие некоторое состояние.

Для ЗК примером структурных частей могут служить дуги маршрута (каждая структурная часть есть элемент множества X^2), тогда для маршрута $\alpha = (x_1,\ldots,x_n)$ представлением будет кортеж $((x_1,x_2),(x_2,x_3),\ldots,(x_{n-1},x_n))$. В РЗ структурными частями могут служить подмножества множества начальных данных, тогда представлением распределения $\{A_1,\ldots,A_n\}$ будет любой из кортежей $(A_{\varphi(1)},\ldots,A_{\varphi(n)})$, где $\varphi\colon \overline{1,n} \leftrightarrow \overline{1,n}$. Для ЗР намеренно приведем несодержательный с прикладной точки зрения пример структурных частей. А именно структурными частями могут служить подмножества упаковываемых предметов, допустимые по совокупному объему; в этом случае состояния ЗР обладают представлениями в виде одноэлементных кортежей, состоящих из единственной структурной части.

Итак, при $\alpha \in \mathcal{M}$ всякое представление $v \in \theta^{-1}(\{\alpha\}) \subset \mathbb{G}$ обладает следующей структурой: $v = (s_1,\ldots,s_n) \in \mathcal{G}^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что одному состоянию могут соответствовать несколько представлений, но по представлению состояние идентифицируется однозначно.

Возмущению $A^* \subset X$ поставим в соответствие непустое множество структурных частей

$$\mathcal{G}_{A^*} \subset \mathcal{G},$$

элементы которого далее будем называть *допустимыми по возмущению* A^* структурными частями.

Так, например, в ЗК, содержащей более 2 вершин с фиксированными вершинами старта и финиша, дуга, соединяющая вершину старта с вершиной финиша напрямую, не может существовать ни в одном из маршрутов и, соответственно, не принадлежит множеству допустимых по добавлению новой вершины дуг.

Введем функцию, ставящую в соответствие всякой структурной части $s \in \mathcal{G}$ некоторое вещественное число, количественно отражающее влияние возмущения $A \to A^*$ на s:

$$loc\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R};$$

далее эта функция будет отражать вес локальной (связанной с возмущаемой структурной частью) компоненты возмущенного состояния. В ЗК при вставке нового города z в дугу (x, y) (возмущение вида $A \to A \cup \{z\}$) значением функции $loc((x, y))$ будет $d(x, z) + d(z, y) - d(x, y)$, где d — весовая функция на дугах. В РЗ при удалении одного из распределяемых заданий x из содержащего этот элемент списка заданий A_x (возмущение вида $A \to A \setminus \{x\}$) значением функции $loc(A_x)$ будет $d(A_x \setminus \{x\})$, где d — функция трудоемкости, заданная на подмножествах распределяемых заданий. Наконец, в ЗР при замене упаковываемого предмета x на предмет z в упаковке A_i (возмущение вида $A \to (A \setminus \{x\}) \cup \{z\}$) функция аналогичного вида $loc(A_i)$ примет значение $d((A_i \setminus \{x\}) \cup \{z\})$, если $x \in A_i$ и $d(A_i)$ — иначе, где d — функция стоимости, заданная на подмножествах упаковываемых предметов. Отметим, что 1) функция *loc не зависит от состояния задачи*; 2) содержательный смысл величины $loc(s)$ проявляется, когда $s \in \mathcal{G}_{A^*}$.

Аналогичным образом введем функцию, ставящую в соответствие всякой структурной части $s \in \mathcal{G}$ и состоянию $\alpha \in \mathcal{M}$ вещественное число, количественно отражающее стоимость состояния α с учетом некоторых (специфичных для конкретной задачи $Z(A, D, X)$) действий над структурной частью s:

$$glob\colon \mathcal{G} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

Эта функция в дальнейшем используется для выражения веса глобальной (не зависящей от конкретного возмущения) компоненты возмущенного состояния. Для ЗК и ЗР $glob(s, \alpha) \equiv D(\alpha)$, для РЗ, где структурными частями являются подмножества распределения, значением функции $glob(s, \alpha)$ является стоимость распределения α', получающегося из α отбрасыванием подмножества, соответствующего s. Важным моментом при определении функции $glob$ является отсутствие зависимости от возмущения.

Наконец, определим объединяющую функцию

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

монотонную по первому аргументу (далее это условие будем называть *первым условием монотонности*). В последующих рассуждениях нас будет интересовать случай, когда аргументами F являются результаты действия функций $glob$ и loc. Для ЗК F — это сумма, для РЗ — максимум, для ЗР $F(x, y) \equiv y$.

Для дальнейших выкладок удобно определить специальное отношение между структурными частями и состояниями для обозначения случая, когда структурная часть "участвует в записи" какого-либо представления состояния. А именно для $s \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathcal{M}$ будем писать $s \vdash \alpha$, если $\exists v = (s_1, \ldots, s_k) \in \theta^{-1}(\{\alpha\})$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\exists i \in \overline{1, k}\colon s_i = s$. В ЗК отношению $s \vdash \alpha$ удовлетворяет, например, дуга s маршрута α, в РЗ — подмножество (список заданий одного из исполнителей) s распределения α, в ЗР — подмножество упаковываемых предметов s, совпадающее с самой упаковкой α.

Кроме того, для всякого $B \in \{A, A^*\}$ определим множества состояний, для которых найдется представление, содержащее заданную структурную часть s. Будем предполагать эти множества непустыми для любой $s \in \mathcal{G}$:

$$M_B^s \triangleq \{\alpha \in M_B\colon s \vdash \alpha\} \neq \varnothing.$$

Для ЗК это множество маршрутов, содержащих заданную дугу, для РЗ — множество распределений, содержащих фиксированный список заданий, для ЗР — единственное состояние, равное своей единственной структурной части.

Для формулировки критерия адаптивной устойчивости потребуется функция $Glob(s)\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, где для всяких $s \in \mathcal{G}$
$$Glob(s) \triangleq \min_{\alpha\in M_A^s} glob(s,\alpha).$$
В ЗК эта функция определяет стоимость оптимального маршрута на M_A среди всех маршрутов, содержащих фиксированную дугу s. В РЗ это стоимость оптимального распределения заданий из множества A за вычетом списка заданий $s = A' \subset A$ одного из исполнителей среди уменьшенного на единицу исходного числа исполнителей.

Пусть
$$G_A \triangleq \{s \in \mathcal{G} \mid \exists \alpha \in M_A\colon s \vdash \alpha\}$$
есть множество структурных частей, “реализующихся” на начальных данных A, т. е. “участвующих в записи” хотя бы одного представления хотя бы одного состояния из M_A. Будем предполагать $G_A \neq \varnothing$. Для ЗК это множество упорядоченных пар (ребер), которые можно построить из элементов множества A. Для РЗ и ЗР — множество подмножеств множества A. Введем множество
$$G_A^{A^*} \triangleq G_A \cap \mathcal{G}_{A^*}$$
и потребуем $G_A^{A^*} \neq \varnothing$. Данное множество содержательно представляет из себя совокупность структурных частей, допустимых по заданному возмущению и участвующих в записи представлений состояний исходной задачи; в дальнейших выкладках, говоря о структурных частях, мы практически всегда будем ограничиваться элементами этого множества.

Условие расщепления. Рассмотрим ключевое для доказательства следующих ниже теорем *условие расщепления*, состоящее из двух частей:

1) будем полагать определенной функцию $dis\colon G_A^{A^*} \times M_A \to M_{A^*}$ такую, что
$$\forall s \in G_A^{A^*}\ \forall \alpha \in M_A \quad D(dis(s,\alpha)) = \begin{cases} F(glob(s,\alpha), loc(s)), & \text{если } \alpha \in M_A^s;\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

2) будем предполагать, что функция dis сюръективна:
$$\forall \alpha^* \in M_{A^*}\ \ \exists s \in G_A^{A^*}\ \ \exists \alpha \in M_A^s\colon\ \alpha^* = dis(s,\alpha).$$

Содержательно первая часть условия расщепления означает, что всякое состояние может быть подвержено любому возмущению во всякой своей структурной части с результатом в виде возмущенного состояния, для стоимости которого имеет место указанное в условии расщепления представление. Для ЗК условие расщепления означает, что любой маршрут можно, например, подвергнуть добавлению, удалению или замене города, получая в результате возмущенный маршрут, стоимость которого складывается из стоимости исходного маршрута и стоимости возмущения. Для РЗ условие расщепления аналогично гарантирует, что всякое распределение может быть подвергнуто возмущению в форме добавления, удаления или замены одного из распределяемых заданий, причем получившееся возмущенное распределение обладает стоимостью, выражаемой в соответствии с условием расщепления для РЗ.

Вторая часть условия расщепления гарантирует, что стоимость всякого возмущенного состояния можно выразить через стоимость исходного состояния и влияния возмущения на одну из структурных частей представления этого исходного состояния. Для ЗК при возмущении в форме добавления нового города $A \to A \cup \{z\}$ это означает, что стоимость всякого маршрута из $M_{A\cup\{z\}}$ может быть выражена через сумму стоимости некоторого маршрута из M_A и стоимости вставки z в одно из ребер последнего маршрута. Для РЗ при удалении одного из распределяемых заданий x вторая часть условия расщепления обеспечивает выражение стоимости возмущенного распределения через максимум из двух величин: стоимости исходного распределения без подмножества A_x, содержащего удаляемое задание x, и стоимости подмножества $A_x \setminus \{x\}$.

С помощью функции dis будем задавать упоминавшуюся выше адаптирующую мультифункцию. А именно в задаче $Z(A, D, X)$ при возмущении $A^* \subset X$ для всякого $\alpha \in M_A$ справедливо

$$\mathcal{A}(\alpha) \triangleq \{\alpha^* \in M_{A^*} \mid \exists s \in G_A^{A^*} : (s \vdash \alpha)\&(\alpha^* = dis(s, \alpha))\}.$$

Введем, наконец, мультифункцию $P\colon G_A^{A^*} \times M_A \to \mathcal{P}(G_A^{A^*})$, определяемую как

$$P(\widetilde{s}, \alpha) \triangleq \begin{cases} \{s \in G_A^{A^*} \mid F(glob(\widetilde{s}, \alpha), loc(\widetilde{s})) \geq F(glob(s, \alpha), loc(s))\}, & \text{если } \alpha \in M_A^{\widetilde{s}}; \\ \varnothing, & \text{если } \alpha \in M_A \setminus M_A^{\widetilde{s}}. \end{cases}$$

В теореме 1 использование данного множества позволяет исключить из рассмотрения структурные части, при возмущении которых оптимальное на возмущенном множестве начальных данных состояние заведомо не достигается.

Введем *второе условие монотонности*, которое будем предполагать выполненным и использовать только в пределах теоремы 1: $\forall s \in G_A^{A^*} \ \ \forall \alpha, \beta \in M_A$ имеем

$$(D(\alpha) \leq D(\beta)) \Rightarrow (glob(s, \alpha) \leq glob(s, \beta)). \tag{M2}$$

Отметим, что, например, в ЗК $glob(s, \alpha) \equiv D(\alpha)$ и (M2) тривиально. В РЗ условие (M2) не выполняется, а значит, для этой задачи критерий следует формулировать, отказываясь от (M2) и заменяя ниже $P(s_0, \alpha_0)$ на $G_A^{A^*}$, как это делалось в [18; 22].

Теорема 1. *Пусть заданы* ЗКО $Z(A, D, X)$*, возмущение* $A^* \subset X$*, структурная часть* $s_0 \in G_A^{A^*}$ *и оптимальное на* M_A *состояние* $\alpha_0 \in M_A^{s_0}$*. Для того чтобы состояние* $dis(s_0, \alpha_0)$ *было оптимальным на* M_{A^*} *необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$D(dis(s_0, \alpha_0)) = \min_{s \in P(s_0, \alpha_0)} [F(Glob(s), loc(s))]. \tag{$*$}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что из ($*$) следует оптимальность $dis(s_0, \alpha_0)$. Обозначим правую часть ($*$) как ($**$). Для всякого $\beta^* \in M_{A^*}$ согласно условию расщепления $\exists s' \in G_A^{A^*}, \exists \beta \in M_A^{s'} : D(\beta^*) = F(glob(s', \beta), loc(s'))$. В случае, если $s' \in P(s_0, \alpha_0)$, в силу первого условия монотонности

$$D(\beta^*) = F(glob(s', \beta), loc(s')) \geq F(Glob(s'), loc(s')) \geq (**) = D(dis(s_0, \alpha_0)).$$

Иначе $s' \in G_A^{A^*} \setminus P(s_0, \alpha_0)$, а значит,

$$D(\beta^*) = F(glob(s', \beta), loc(s')) \overset{(M2)}{\geq} F(glob(s', \alpha_0), loc(s')) > F(glob(s_0, \alpha_0), loc(s_0)) = D(dis(s_0, \alpha_0)).$$

Покажем, что из оптимальности $dis(s_0, \alpha_0)$ следует ($*$). Поскольку $P(s_0, \alpha_0)$ — конечно и непусто ($s_0 \in P(s_0, \alpha_0)$), минимум в ($**$) достигается на некотором $\widetilde{s}$: $(**) = F(Glob(\widetilde{s}), loc(\widetilde{s}))$. Множество $M_A^{\widetilde{s}}$ также конечно и непусто, а значит, $\exists \widetilde{\alpha} \in M_A^{\widetilde{s}} : Glob(\widetilde{s}) = glob(\widetilde{s}, \widetilde{\alpha})$. Учитывая сказанное, оптимальность $dis(s_0, \alpha_0)$ и условие расщепления имеем

$$(**) = F(Glob(\widetilde{s}), loc(\widetilde{s})) = F(glob(\widetilde{s}, \widetilde{\alpha}), loc(\widetilde{s})) = D(dis(\widetilde{s}, \widetilde{\alpha})) \geq D(dis(s_0, \alpha_0)).$$

С другой стороны, учитывая, что $s_0 \in P(s_0, \alpha_0)$, имеем

$$(**) \leq F(Glob(s_0), loc(s_0)) \leq F(glob(s_0, \alpha_0), loc(s_0)) = D(dis(s_0, \alpha_0)). \qquad \square$$

Отметим, что если приведенный в теореме критерий адаптивной устойчивости применяется для проверки устойчивости целой серии непоследовательных возмущений (например, при численном построении областей устойчивости [22]), то может оказаться целесообразным отказаться от использования множества $P(s_0,\alpha_0)$, заменяя его, как это делалось в предыдущих работах, на $G_A^{A^*}$. При этом исчезнет необходимость рассчитывать $P(s_0,\alpha_0)$ для всякого из исследуемых возмущений A^*. Доказательство теоремы 1 в таком случае лишь упростится, поскольку по определению $P(s_0,\alpha_0) \subset G_A^{A^*}$, причем от второго условия монотонности в этом случае можно отказаться.

Для формулировки достаточного условия адаптивной устойчивости в дополнение первому условию монотонности и вместо второго условия монотонности введем *третье условие монотонности*: $\forall \alpha,\beta \in M_A, \forall s_1,s_2 \in G_A : s_1 \vdash \alpha, s_2 \vdash \beta$

$$(D(\alpha) \leq D(\beta)) \Rightarrow (glob(s_1,\alpha) \leq glob(s_2,\beta))$$

и *четвертое условие монотонности*: $\forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}$

$$((x_1 \leq x_2) \& (y_1 \leq y_2)) \Rightarrow F(x_1,y_1) \leq F(x_2,y_2).$$

Для ЗК комбинация этих условий, например, отражает очевидный факт: при “меньшем” возмущении более “короткого” маршрута стоимость результирующего маршрута будет меньше, чем стоимость “большего” возмущения более “длинного” маршрута. В РЗ третье условие монотонности, как и второе, может не выполняться.

Теорема 2. *Пусть задана* ЗКО $Z(A,D,X)$, *возмущение* $A^* \subset X$, *структурная часть* $s_0 \in G_A^{A^*}$ *и оптимальное на* M_A *состояние* $\alpha_0 \in M_A^{s_0}$. *Тогда состояние* $dis(s_0,\alpha_0)$ *оптимально на* M_{A^*}, *если*

$$loc(s_0) = \min_{s \in G_A^{A^*}} loc(s).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\forall \beta^* \in M_{A^*}$ согласно условию расщепления $\exists s' \in G_A^{A^*}, \exists \beta \in M_A^{s'} : D(\beta^*) = F(glob(s',\beta), loc(s'))$. По условию теоремы α_0 — оптимально, а значит, $D(\alpha_0) \leq D(\beta)$. По третьему условию монотонности это влечет $glob(s_0,\alpha_0) \leq glob(s',\beta)$. Учитывая также, что по условию теоремы $loc(s_0) \leq loc(s')$, и применяя четвертое условие монотонности, имеем

$$D(\beta^*) = F(glob(s',\beta), loc(s')) \geq F(glob(s_0,\alpha_0), loc(s_0)) = D(dis(s_0,\alpha_0)). \qquad \square$$

Прикладной интерес при применении условий теорем 1 и 2 представляет случай, когда число структурных частей $G_A^{A^*}$, с помощью которых “реализуются” состояния M_A, “мало”: $|G_A^{A^*}| << |M_A|$. В NP-трудных ЗКО множество состояний “не менее”, чем экспоненциально зависит от мощности множества входных данных $|A|$, а значит, предложенные в теоремах 1 и 2 условия адаптивной устойчивости для таких задач особенно эффективны в прикладном отношении, когда мощность множества структурных частей $|G_A^{A^*}|$ полиномиально зависит от $|A|$. Примером такой задачи служит ЗК, где $|A|!$ маршрутов реализуются за счет комбинирования $|A|^2$ ребер, при этом, например, проверка достаточного условия теоремы 2 обладает полиномиальной трудоемкостью [15; 17; 22].

В распределительной задаче каждое из $\overline{1,n}$ заданий ставится в соответствие одному из N исполнителей, следовательно, распределение можно представить как строку длины n, состоящую из номеров $\overline{1,N}$. Номер ячейки строки соответствует номеру задания от 1 до n, а номер, стоящий в ячейке — номеру исполнителя, которому данное задание выделено. Всего таких строк возможно N^n (для простоты рассматриваем случай, когда все исполнители уникальны). Структурной частью в этой задаче является множество заданий одного исполнителя. Количество всевозможных структурных частей равно количеству подмножеств множества $\overline{1,n}$. Соотношение $|G_A^{A^*}|/|M_A|$ в распределительной задаче не так мало, как в задаче коммивояжера, однако достаточно для целесообразного применения описанной теории [18; 22].

В завершение отметим, что необходимые условия адаптивной устойчивости в ЗКО, удовлетворяющих принципу Беллмана, строятся в весьма общем виде: если некоторый “участок” оптимального состояния не допускает адаптивной устойчивости к заданному возмущению, то адаптивной устойчивостью к тому же возмущению не будет обладать и все состояние.

“Размер” проверяемого “подсостояния” (количество участвующих в его представлении структурных частей) может быть любым: от минимально допустимого по возмущению (например, одной структурной части) до всего состояния. Соответственно при росте этого “размера” увеличивается точность получаемых необходимых условий (вплоть до необходимых и достаточных), но растет также и трудоемкость алгоритма проверки этих условий (вплоть до трудоемкости решения исходной задачи).

Отметим, что все три модельные задачи, ЗК, РЗ и ЗР, удовлетворяют принципу Беллмана и проиллюстрируем применение этого принципа для построения необходимых условий устойчивости в двух из них. Если в участок оптимального маршрута в задаче коммивояжера не удается вставить (между двумя последовательными в смысле этого маршрута городами) новый город с сохранением оптимальности этого участка (т.е. адаптивно устойчиво), то невозможно адаптивно устойчиво вставить этот новый город и в целый оптимальный маршрут. Если, добавляя задание z к списку заданий A_i одного из работников в распределительной задаче, мы получаем неоптимальное “подраспределение”, составленное списком заданий $A_i \cup \{z\}$ этого работника и всеми максимально трудоемкими списками заданий исходного распределения, то неоптимальным будет и все распределение, включающее списки работ всех исходных исполнителей с учетом добавленного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 473 с.
2. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959. 211 с.
3. **Леонтьев В.К.** Устойчивость в линейных дискретных задачах // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169–185.
4. **Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 66–72.
5. **Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А.М.** Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.
6. **Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.** Условия устойчивости многокритериальной булевой задачи минимизации проекции линейных функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 125–133.
7. **Emelichev V., Girlich E., Karelkina O.** Postoptimal analysis of multicriteria combinatorial center location problem // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2009. № 3. P. 13–29.
8. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А.** Об устойчивости некоторых алгоритмов целочисленного программирования // Изв. вузов. Математика. 2003. № 12. С. 41–48.
9. **Девятерикова М.В.** Исследование устойчивости задач и алгоритмов целочисленного программирования на основе регулярных разбиений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Омск, 2001. 97 с.
10. **Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
11. **Сергиенко И.В., Шило В.П.** Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 264 с.
12. **Сергиенко Т. И.** Об устойчивости по ограничениям многокритериальной задачи целочисленного программирования // Доклады АН УССР. 1989. № 3. С. 79–81.
13. **Libura M.** Optimality conditions and sensitivity analysis for combinatorial optimization problems // Control and Cybernetics. 1996. № 25. P. 1165–1180.
14. **Poort E.S.** Aspects of sensitivity analysis for the traveling salesman problem: PhD dissertation. Netherlands, Groningen, 1997. 196 p.
15. **Иванко Е.Е.** Достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины и при удалении существующей // Вестн. Удмурт. гос. ун-та. 2010. № 1. С. 46–56. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)

16. **Иванко Е.Е.** Критерий устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении вершины // Вестн. Удмурт. гос. ун-та. 2011. № 1. С. 58–66. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
17. **Иванко Е.Е.** Достаточные условия устойчивости в задаче коммивояжера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 155–168.
18. **Иванко Е.Е.** Критерий устойчивости оптимальных решений минимаксной задачи о разбиении на произвольное число подмножеств при изменении мощности исходного множества // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 180–194.
19. **Иванко Е.Е.** Устойчивость оптимальных маршуртов в задаче коммивояжера при добавлении и удалении вершин // Дискретная оптимизация и исследование операций: материалы Всеросс. конф. “DOOR-2010”. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2010. С. 105.
20. **Иванко Е.Е., Григорьев А.М.** Области неустойчивости оптимальных маршрутов в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 232–233.
21. **Иванко Е.Е.** Устойчивость в задаче комбинаторной оптимизации как полиномиальная “адаптируемость” оптимальных решений при возмущении множества начальных данных // Дискретная оптимизация и исследование операций: материалы Междунар. конф. “DOOR-2013”. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2013. С. 117.
22. **Иванко Е.Е.** Устойчивость и неустойчивость в дискретных задачах. Екатеринбург: Изд-во РИО УрО РАН, 2013. 207 с.

Иванко Евгений Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: viatore@ya.ru

Поступила 30.09.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.5

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R}^d)$ С ВЕСОМ ДАНКЛЯ[1]

В. И. Иванов, Ха Тхи Минь Хуэ

С помощью произвольной последовательности комплексных чисел с нулевой суммой в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля определяется обобщенный модуль непрерывности. Для наилучших приближений целыми функциями экспоненциального сферического типа и обобщенного модуля непрерывности доказывается точное обобщенное неравенство Джексона. В безвесовом случае оно было доказано С.Н. Васильевым.

Система корней, группа отражений, вес Данкля, преобразование Данкля, наилучшее приближение, модуль непрерывности, неравенство Джексона.

V. I. Ivanov, Ha Thi Min Hue. Generalized Jackson inequality in the space $L_2(\mathbb{R}^d)$ with Dunkl weight.

A generalized modulus of continuity is defined in the space $L_2(\mathbb{R}^d)$ with Dunkl weight by means of an arbitrary zero-sum sequence of complex numbers. A sharp generalized Jackson inequality is proved for this modulus and the best approximations by entire functions of exponential spherical type. This inequality was earlier proved by S.N. Vasil'ev in the weightless case.

Keywords: root system, reflection group, Dunkl weight, Dunkl transform, best approximation, modulus of continuity, Jackson inequality.

Введение

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $\sigma > 0$, $B_\sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \le \sigma\right\}$ — евклидов шар,

$$v_k\,(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)} \tag{0.1}$$

— обобщенный степенной вес или вес Данкля, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k\,(\alpha) : R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G\,(R)$, порожденной R,

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k\,(x)\,dx$$

— интеграл Макдональда — Мета — Сельберга, $d\mu_k\,(x) = c_k^{-1} v_k\,(x)\,dx$, $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ — гильбертово пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{2,k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f\,(x)|^2\ d\mu_k\,(x)\right)^{1/2}.$$

Гармонический анализ в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Данкля

$$\widehat{f}\,(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f\,(x)\,\overline{e_k\,(x,y)}\,d\mu_k\,(x)\,, \quad f\,(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\,(y)\,e_k\,(x,y)\,d\mu_k\,(y)\,,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00045) и Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1333.2014К).

где $e_k(x,y)$ — обобщенная экспонента, определяемая с помощью дифференциально-разностных операторов Данкля, многие свойства которой аналогичны свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$. Для преобразований Данкля выполнено равенство Парсеваля (см. [1]).

Пусть $C_b(X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на локально компактном множестве X, $\mathrm{supp} f$ — носитель функции f.

Для функции $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$

$$E_\sigma(f)_{2,k} = \inf\left\{\|f-g\|_{2,k} : g \in L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right),\, \mathrm{supp}\,\widehat{g} \subset B_\sigma\right\}$$

— величина наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального сферического типа $\sigma > 0$.

Пусть $M = \{\mu_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ — ненулевая последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} \mu_s = 0, \quad \sum_{s\in\mathbb{Z}} |\mu_s| < \infty. \tag{0.2}$$

Посредством свертки образуем новую последовательность

$$\nu_s = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu_{l+s}\overline{\mu}_l.$$

Для нее

$$\nu_0 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\mu_l|^2, \quad \sum_{s\in\mathbb{Z}} \nu_s = 0, \quad \sum_{s\in\mathbb{Z}} |\nu_s| < \infty. \tag{0.3}$$

Определим функцию

$$\varphi_M(t,y) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \nu_s e_k(st,y), \quad t,y \in \mathbb{R}^d.$$

Используя интегральное представление обобщенной экспоненты [2]

$$e_k(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\xi,y\rangle} d\mu_k^x(\xi),$$

где μ_k^x — вероятностная борелевская мера, носитель которой лежит в выпуклой оболочке $\mathrm{co}\{gx : g \in G(R)\}$ орбиты x относительно группы $G(R)$, получим

$$\varphi_M(t,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \nu_s e^{is\langle\xi,y\rangle} d\mu_k^t(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\sum_{s\in\mathbb{Z}} \mu_s e^{is\langle\xi,y\rangle}\Big|^2 d\mu_k^t(\xi) \geq 0.$$

Для $\varphi_M(t,y)$ выполнены также свойства

$$\varphi_M(t,y) \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d),\ \varphi_M(t,y) = \varphi_M(y,t),\ \varphi_M(0,y) = 0.$$

Перечисленные свойства $\varphi_M(t,y)$ позволяют для функции $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ определить обобщенный модуль непрерывности [3]

$$\omega_M(\tau,f)_{2,k} = \sup_{|t|\leq\tau}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t,y)\,|\widehat{f}(y)|^2 d\mu_k(y)\right)^{1/2}, \quad \tau > 0.$$

Если $v_k(x) = 1$ $(k(\alpha) \equiv 0)$ — единичный вес и

$$\Delta_t^M f(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mu_s f(x+st)$$

— бесконечно-разностный оператор, то обобщенный модуль непрерывности

$$\omega_M(\tau, f)_2 = \sup_{|t|\le\tau} \|\Delta_t^M f\,(x)\,\|_2 \tag{0.4}$$

совпадает с обычным модулем непрерывности, определяемым оператором Δ_t^M.

Обобщенная константа Джексона

$$D_M(\sigma,\tau)_{2,k} = \sup\left\{\frac{E_\sigma(f)_{2,k}}{\omega_M(\tau,f)_{2,k}} \colon f\in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)\right\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_\sigma(f)_{2,k} \le D\omega_M(\tau,f)_{2,k}.$$

Для обобщенной константы Джексона в [4] установлены следующие свойства:

1. $D_M(\sigma,\tau)_{2,k} = D_M(1,\sigma\tau)_{2,k}$, поэтому в дальнейшем можно считать, что $\sigma=1$.

2. Пусть

$$\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha), \quad r_M = \max\left\{r\ge 0:\ \beta_M\,|_{[-r,r]}=0\right\}, \tag{0.5}$$

где $\beta_M(t) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mu_s e^{ist}$, $t\in\mathbb{R}$. Если $\lambda_k > -1/2$, $0<\tau\le r_M$, то $D_M(1,\tau)_{2,k} = \infty$. Если $\lambda_k > -1/2$, $\tau > r_M$, то $D_M(1,\tau)_{2,k}$ как функция τ конечна и непрерывна.

3. Если ν_0 определено в (0.3), то для любого $\tau>0$ справедлива нижняя оценка

$$D_M(1,\tau)_{2,k} \ge \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}. \tag{0.6}$$

Наша цель — доказать, что константа $(\nu_0)^{-1/2}$ в (0.6) является минимальным значением обобщенной константы Джексона. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для произвольного веса Данкля* (0.1), *последовательности M* (0.3), *функции $f\in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, $\sigma>0$ и некоторого $\tau^*=\tau^*(d,k,M)$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_\sigma(f)_{2,k} \le \frac{1}{\sqrt{\nu_0}}\,\omega_M\left(\frac{\tau^*}{\sigma},\, f\right)_{2,k}. \tag{0.7}$$

В случае единичного веса неравенство Джексона (0.7) с обобщенным модулем непрерывности (0.4) доказано С.Н. Васильевым [5].

Для первого модуля непрерывности, определяемого последовательностью M_1, у которой $\mu_0=1$, $\mu_1=-1$, а остальные $\mu_s=0$, точные неравенства Джексона в безвесовом случае доказаны И.И. Ибрагимовым, Ф.Г. Насибовым [6] ($d=1$), В.Ю. Поповым [7;8] ($d=1,2,3$), А.Г. Бабенко [9] и А.В. Московским [10] (произвольное d). В весовом случае они доказаны в [11–15].

1. Редукция к одномерному неравенству Джексона

В [3] доказано, что обобщенная константа Джексона в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ совпадает с обобщенной константой Джексона в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}_+\right)$ со степенным весом.

Пусть $\lambda > -1/2$, $J_\lambda(x)$ — функция Бесселя порядка λ, $j_\lambda(x) = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)J_\lambda(x)/x^\lambda$ — нормированная функция Бесселя, $b_\lambda = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)$, $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\lambda} = \left(b_\lambda^{-1}\int\limits_0^\infty |f(r)|^2 r^{2\lambda+1}dr\right)^{1/2},$$

$$\widetilde{f}(s)=b_\lambda^{-1}\int\limits_0^\infty f(r)j_\lambda(rs)r^{2\lambda+1}dr$$

— преобразование Ганкеля (см. [16, гл. V]).

Рассмотрим непрерывную на $\mathbb{R}_+$ функцию

$$\alpha_M(r)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\nu_l j_\lambda(lr). \tag{1.1}$$

Для нее выполнены условия [4]

$$\alpha_M(r)\in C_b(\mathbb{R}_+),\quad \alpha_M(r)\geq 0,\quad \alpha_M(0)=0.$$

Пусть

$$E_\sigma(f)_{2,\lambda}=\inf\bigl\{\|f-g\|_{2,\lambda}\colon g\in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+),\,\operatorname{supp}\widetilde{g}\subset[0,\sigma]\bigr\}=\Biggl(b_\lambda^{-1}\int\limits_\sigma^\infty|\widetilde{f}(s)|^2s^{2\lambda+1}ds\Biggr)^{1/2} \tag{1.2}$$

— величина наилучшего приближения функции $f\in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$,

$$\omega_M(\delta,f)_{2,\lambda}=\sup_{0\leq r\leq\delta}\Biggl(b_\lambda^{-1}\int\limits_0^\infty\alpha(rs)|\widetilde{f}(s)|^2s^{2\lambda+1}ds\Biggr)^{1/2} \tag{1.3}$$

— ее обобщенный модуль непрерывности,

$$D_M(\sigma,\delta)_{2,\lambda}=\sup\Bigl\{\frac{E_\sigma(f)_{2,\lambda}}{\omega_M(\delta,f)_{2,\lambda}}\,:\,f\in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)\Bigr\}$$

— обобщенная константа Джексона в пространстве $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ (см. [10]).

Предложение 1 [3]. *Если λ_k определено в* (0.5), *то*

$$D_M(\sigma,\tau)_{2,k}=D_M(\sigma,\tau)_{2,\lambda_k}.$$

Таким образом, теорема 1 будет вытекать из следующего утверждения.

Теорема 2. *Для любого $\lambda>-1/2$, последовательности M* (0.2), *функции $f\in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$, $\sigma>0$ и некоторого $\tau^*=\tau^*(\lambda,M)$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_\sigma(f)_{2,\lambda}\leq\frac{1}{\sqrt{\nu_0}}\,\omega_M\Bigl(\frac{\tau^*}{\sigma},\,f\Bigr)_{2,\lambda}. \tag{1.4}$$

2. Вспомогательные утверждения

Нормированная функция Бесселя имеет интегральное представление [17, формула 8.411]

$$j_\lambda(\rho x)=\frac{c_\lambda}{|x|^{2\lambda}}\int\limits_0^{|x|}(x^2-t^2)^{\lambda-1/2}\cos\rho t\,dt,$$

где $c_\lambda^{-1}=B(1/2,\lambda+1/2)/2$, $B(\alpha,\beta)$ — бета-функция Эйлера.

Отсюда и из (1.1)

$$\alpha_M(\rho x)=\frac{c_\lambda}{|x|^{2\lambda}}\int\limits_0^{|x|}(x^2-t^2)^{\lambda-1/2}\psi\Bigl(\frac{\rho t}{2\pi}\Bigr)\,dt,$$

где
$$\psi(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \nu_s \cos 2\pi s x. \tag{2.1}$$

Согласно (0.3) $\psi(x)$ — четная, непрерывная, 1-периодическая функция и
$$\psi(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu_{s+l}\overline{\mu_l}\cos 2\pi s x$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\mu}_l \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mu_{s+l}\left\{\cos 2\pi(s+l)x\cos 2\pi l x + \sin 2\pi(s+l)x \sin 2\pi l x\right\}$$
$$= \Big|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu_l \cos 2\pi l x\Big|^2 + \Big|\sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu_l \sin 2\pi l x\Big|^2 \geq 0.$$

Пусть $I(\psi) = \int_0^1 \psi(x)dx = \nu_0$ — среднее значение функции $\psi(x)$, $\psi_0(x) = I(\psi) - \psi(x)$, $\psi_k(x) = \displaystyle\int_0^x (I(\psi_{k-1}) - \psi_{k-1}(t))\,dt$, $k \in \mathbb{N}$.

Функции $\psi_k(x)$ — 1-периодические, четные при четном k и нечетные при нечетном k. Для бесконечно многих m $I(\psi_{2m}) \neq 0$ (см. [5]).

Схема доказательства точных неравенств Джексона в L_2, предложенная Н.И. Черных [18], предусматривает построение специальной весовой функции. Способ построения весовых функций был предложен В.А. Юдиным [19]. Позже другой способ построения весовых функций предложил С.Н. Васильев [20]. Его рассуждения в [5] выделим в отдельную лемму.

Лемма 1 [5]. *Пусть $\psi(x)$ — четная, непрерывная, неотрицательная, 1-периодическая функция, при некотором $m \in \mathbb{N}$ $I(\psi_{2m}) \neq 0$ и для четной, неотрицательной функции $u(x)$ выполнены условия*

(a) $\operatorname{supp} u \subset [-1,1]$,

(b) $u \in C^{2m-2}(\mathbb{R})$, $u \in C^{2m}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$,

(c) $u^{(2m-1)}(0+0) = I(\psi_{2m})$.

Тогда найдется $\gamma > 0$ такое, что для всех $\xi \geq \gamma$
$$\int\limits_0^1 \psi(\xi t)u(t)\,dt \geq I(\psi)\int_0^1 u(t)\,dt.$$

В нашем случае весовая функция $v(x)$ будет прообразом функции $u(x)$ из леммы 1 для некоторого интегрального оператора.

Пусть $C_0^m[-1,1]$ — множество всех четных функций $f \in C^m[-1,1]$, для которых $f^{(k)}(\pm 1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$,
$$Tf(x) = \frac{f'(x)}{x}, \tag{2.2}$$
$C_T^m[-1,1]$ — множество всех четных функций f из $C^m[-1,1]$, для которых $T^m f \in C[-1,1]$.

Так как
$$\Big\|\frac{f'(x)}{x}\Big\|_C = \max_{-1\leq x\leq 1}\Big|\frac{f'(x)}{x}\Big| = \max_{-1\leq x\leq 1}\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x f''(t)\,dt\right| \leq \|f''\|_C,$$
то $\|Tf\|_C \leq \|f''\|_C$ и
$$C^{2m}[-1,1] \subset C_T^m[-1,1] \subset C^m[-1,1]. \tag{2.3}$$

Лемма 2. *Для линейного оператора T (2.2) справедливы следующие свойства:*

(a) $T|x|^{\alpha} = \alpha|x|^{\alpha-2}$, $\quad (-T)(a^2-x^2)^{\alpha} = 2\alpha(a^2-x^2)^{\alpha-1}$;

(b) $(-T)^k e^{-\frac{zx^2}{1-x^2}} = \sum\limits_{s=1}^{k} \dfrac{(-1)^{s+k} a_s^k z^s}{(1-x^2)^{k+s}} e^{-\frac{zx^2}{1-x^2}}$, *где* $a_k^k = 2^k$, $a_s^k > 0$, $s = 1, \dots, k-1$;

(c) $T^k f(x) = \sum\limits_{s=1}^{k} (-1)^{s+k} b_s^k \dfrac{f^{(s)}(x)}{x^{2k-s}}$, *где* $b_k^k = 1$, $b_s^k > 0$, $s = 1, \dots, k-1$;

(d) $T^k(fg) = \sum\limits_{s=0}^{k} C_k^s T^s f T^{k-s} g$ (*формула Лейбница*);

(e) $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{s=0}^{[k/2]} c_s^k x^{k-2s} T^{k-2s} f(x)$, *где* $c_s^k > 0$, $s = 0, 1, \dots, [k/2]$.

Доказательство. Равенства (a) проверяются непосредственными вычислениями. Равенства (b)–(e) доказываются методом математической индукции.

Пусть $\alpha > 0$, $]\alpha[$ — наименьшее натуральное $s \geq \alpha$. На множестве четных функций на отрезке $[-1,1]$ рассмотрим семейство интегральных операторов

$$A_\alpha f(x) = \int\limits_{|x|}^{1} t(t^2-x^2)^{\alpha-1} f(t)\, dt. \tag{2.4}$$

Лемма 3. *Пусть $\alpha, \beta > 0$, $s =]\alpha[$, $r = \alpha -]\alpha[$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для линейных интегральных операторов A_α (2.4) справедливы следующие свойства:*

(a) $A_\alpha A_\beta = \dfrac{1}{2} B(\alpha,\beta) A_{\alpha+\beta}$ *на* $C[-1,1]$;

(b) $TA_\alpha = A_\alpha T$ *на* $C_T^1[-1,1] \cap C_0[-1,1]$;

(c) *если* $f \in C_T^m[-1,1] \cap C_0^{m-1}[-1,1]$, *то* $T^k A_\alpha f(\pm 1) = (A_\alpha f)^{(k)}(\pm 1) = 0$, $\quad k = 0, 1, \dots, m$;

(d) *при* $m \geq s$ *существует обратный оператор*

$$A_\alpha^{-1} \colon C_T^m[-1,1] \cap C_0^m[-1,1] \to C_T^{m-s}[-1,1] \cap C_0^{m-s}[-1,1]$$

и

$$A_\alpha^{-1} = \frac{(-T)^s}{2^{s-1}(s-1)!} \ (r=0), \quad A_\alpha^{-1} = \frac{A_{|r|}(-T)^s}{2^{s-2}(s-1)!\, B(|r|,\alpha)} \ (r<0).$$

Доказательство. Так как

$$\|A_\alpha f\|_C \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} \int\limits_{|x|}^{1} (t^2-x^2)^{\alpha-1} t\, dt\, \|f\|_C \leq \frac{1}{2\alpha} \|f\|_C,$$

то $A_\alpha \colon C[-1,1] \to C[-1,1]$.

Если $f \in C[-1,1]$, то $A_\beta f \in C[-1,1]$ и

$$A_\alpha A_\beta f(x) = \int\limits_{|x|}^{1} t(t^2-x^2)^{\alpha-1} A_\beta f(t)\, dt = \int\limits_{|x|}^{1} t(t^2-x^2)^{\alpha-1} \int\limits_{t}^{1} \tau(\tau^2-t^2)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau\, dt$$

$$= \int\limits_{|x|}^{1} \tau f(\tau) \int\limits_{|x|}^{\tau} t(t^2-x^2)^{\alpha-1}(\tau^2-t^2)^{\beta-1}\, dt\, d\tau.$$

Так как [17, формула 3.191]

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1}\,dt = (b-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta),$$

то

$$A_\alpha A_\beta f(x) = \frac{1}{2}B(\alpha,\beta)\int_{|x|}^1 \tau(\tau^2-x^2)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}B(\alpha,\beta)A_{\alpha+\beta}.$$

Равенство (a) доказано.

Имеем

$$A_\alpha f(x) = \int_{|x|}^1 t(t^2-x^2)^{\alpha-1}(f(t)-f(x))\,dt + \frac{1}{2\alpha}(1-x^2)^\alpha f(x),$$

поэтому для $f \in C_T^1[-1,1]\cap C_0[-1,1]$

$$TA_\alpha f(x) = -2(\alpha-1)\int_{|x|}^1 t(t^2-x^2)^{\alpha-2}(f(t)-f(x))\,dt - (1-x^2)^{\alpha-1}f(x)$$

$$= -\int_{|x|}^1 (f(t)-f(x))\,d(t^2-x^2)^{\alpha-1} - (1-x^2)^{\alpha-1}f(x)$$

$$= -(f(1)-f(x))(1-x^2)^{\alpha-1} + \int_{|x|}^1 (t^2-x^2)^{\alpha-1}f'(t)\,dt - (1-x^2)^{\alpha-1}f(x)$$

$$= \int_{|x|}^1 t(t^2-x^2)^{\alpha-1}Tf(t)\,dt = A_\alpha Tf(x).$$

Равенство (b) доказано.

Пусть $f \in C_T^m[-1,1]\cap C_0^{m-1}[-1,1]$. Из свойства (c) леммы 2 получим $T^kf(\pm1)=0$, $k=1,\ldots,m-1$. Согласно доказанному свойству (b) леммы 3

$$T^kA_\alpha f(x) = A_\alpha T^kf(x), \quad T^kAf(\pm1)=0, \quad k=1,\ldots,m.$$

Применяя свойство (d) леммы 2, получим

$$(A_\alpha f)^{(k)}(\pm1) = 0, \quad k=0,1,\ldots,m.$$

Равенства (c) доказаны.

Если $r=0$, $m\ge s$, $f\in C_T^m[-1,1]\cap C_0^m[-1,1]$, то $\alpha=s$ и согласно свойству (a) леммы 2

$$A_s(-T)^sf(x) = (-T)^sA_sf(x) = 2(s-1)(-T)^{s-1}\left(\int_{|x|}^1 t(t^2-x^2)^{s-2}f(t)\,dt\right)$$

$$= \cdots = 2^{s-1}(s-1)!\,(-T)\left(\int_{|x|}^1 tf(t)\,dt\right) = 2^{s-1}(s-1)!\,f(x),$$

поэтому
$$A_\alpha^{-1}f(x)=\frac{(-T)^sf(x)}{2^{s-1}(s-1)!}.$$

Если $r<0$, то по свойству (a) леммы 3
$$A_\alpha A_{|r|}(-T)^sf(x)=A_{|r|}(-T)^sA_\alpha f(x)=(-T)^sA_{|r|}A_\alpha f(x)$$
$$=\frac{1}{2}B(|r|,\alpha)(-T)^sA_sf(x)=2^{s-2}(s-1)!\,B(|r|,\alpha)f(x),$$
поэтому
$$A_\alpha^{-1}f(x)=\frac{A_{|r|}(-T)^sf(x)}{2^{s-2}(s-1)!\,B(|r|,\alpha)}.$$
Лемма 3 доказана.

Следствие. *Единичный оператор* $\widetilde{A}_0$ *и операторы* $\widetilde{A}_\alpha=2A_\alpha/\Gamma(\alpha)$, $\alpha>0$, *на* $C[-1,1]$ *образуют полугруппу*
$$\widetilde{A}_\alpha\widetilde{A}_\beta=\widetilde{A}_{\alpha+\beta},\quad \alpha,\beta\ge 0.$$

3. Доказательство теоремы 2

Теорему 2 достаточно доказать для $\sigma=1$.

Пусть $\lambda>-1/2$, $s=]\lambda+1/2[$, $r=\lambda+1/2-]\lambda+1/2[$, для функции ψ (2.1) $\sigma_m=I(\psi_{2m})\neq 0$, $m\ge s+1$, $z\ge 1$.

Рассмотрим четную функцию
$$u_z(x)=\frac{|\sigma_m|}{(2m-1)!}\left(2+\operatorname{sign}\sigma_m\,|x|^{2m-1}\right)g_z(x),\tag{3.1}$$
где
$$g_z(x)=\begin{cases}e^{-\frac{zx^2}{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

Отметим ее свойства:

1) $u_z(x)\ge 0$;

2) $\operatorname{supp}u_z\subset[-1,1]$, $\quad u_z^{(k)}(\pm 1)=0$, $k\in\mathbb{Z}_+$;

3) $u_z\in C^{2m-2}(\mathbb{R})$, $\quad u_z\in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$;

4) $u_z^{(2m-1)}(0+0)=\sigma_m$.

Согласно (2.3)
$$u_z\in C_T^{m-1}[-1,1]\cap C_0^\infty[-1,1].$$

Подберем z так, чтобы $(-T)^su_z(x)\ge 0$. Тогда по свойству (d) леммы 3 четная функция
$$v_z(x)=A_{\lambda+1/2}^{-1}u_z(x)\tag{3.2}$$
будет весовой:
$$v_z(x)\ge 0,\quad \operatorname{supp}v_z\subset[-1,1],\quad v_z\in C_0[-1,1].$$

Пусть $u_z^1(x)=(2m-1)!u_z(x)/|\sigma_m|$, $|x|<1$, $z\ge 1$. В силу свойств (a), (b), (d) леммы 2
$$(-T)^su_z^1(x)=\left(2+\operatorname{sign}\sigma_m\,|x|^{2m-1}\right)(-T)^sg_z(x)+(-1)^s\operatorname{sign}\sigma_m\sum_{k=0}^{s-1}C_s^kT^{s-k}|x|^{2m-1}T^kg_z(x)$$
$$\ge\frac{(2^sz^s-c(s,m)z^{s-1})}{(1-x^2)^{2s}}e^{-\frac{zx^2}{1-x^2}}>0$$

для достаточно большого $z = z^* = z^*(s, m) \geq 1$.

Таким образом, для четной неотрицательной функции $u_{z^*}(x)$ выполнены условия (a) – (c) в лемме 1, а функция $v_{z^*}(x)$ является весовой.

Для $f \in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ согласно (1.2), (1.3)

$$E_1^2(f)_{2,\lambda} = b_\lambda^{-1} \int\limits_1^\infty |\widetilde{f}(x)|^2 x^{2\lambda+1}\, dx, \quad \omega_M^2(\delta, f)_{2,\lambda} = \sup_{0 \leq t \leq \delta} b_\lambda^{-1} \int\limits_0^\infty \alpha_M(tx) |\widetilde{f}(x)|^2 x^{2\lambda+1}\, dx,$$

поэтому

$$\omega_M^2(\delta, f)_{2,\lambda} \int\limits_0^1 v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt \geq b_\lambda^{-1} \int\limits_0^1 \int\limits_0^\infty \alpha_M(\delta tx) |\widetilde{f}(x)|^2 x^{2\lambda+1}\, dx\, v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt$$

$$\geq b_\lambda^{-1} \int\limits_0^1 \int\limits_1^\infty \alpha_M(\delta tx) |\widetilde{f}(x)|^2 x^{2\lambda+1}\, dx\, v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt \geq E_1^2(f)_{2,\lambda} \inf_{x \geq 1} \int\limits_0^1 \alpha_M(\delta tx) v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt. \quad (3.3)$$

Согласно (2.1), (3.1), (3.2)

$$\int\limits_0^1 \alpha_M(\delta tx) v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt = c_\lambda \int\limits_0^1 \frac{1}{t^{2\lambda}} \int\limits_0^t (t^2 - \tau^2)^{\lambda-1/2} \psi\Big(\frac{\delta x \tau}{2\pi}\Big)\, d\tau\, v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt$$

$$= c_\lambda \int\limits_0^1 \psi\Big(\frac{\delta x \tau}{2\pi}\Big) \int\limits_\tau^1 t(t^2 - \tau^2)^{\lambda-1/2} v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt\, d\tau = c_\lambda \int\limits_0^1 \psi\Big(\frac{\delta x \tau}{2\pi}\Big) u_{z^*}(\tau)\, d\tau. \quad (3.4)$$

По лемме 1 найдется $\gamma > 0$ такое, что при $x \geq 1$, $\delta \geq 2\pi\gamma$

$$c_\lambda \int\limits_0^1 \psi\Big(\frac{\delta x \tau}{2\pi}\Big) u_{z^*}(\tau)\, d\tau \geq I(\psi) c_\lambda \int\limits_0^1 u_{z^*}(\tau)\, d\tau = \nu_0 \int\limits_0^1 v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt, \quad (3.5)$$

так как

$$c_\lambda \int\limits_0^t (t^2 - \tau^2)^{\lambda-1/2}\, d\tau = t^{2\lambda} c_\lambda \int\limits_0^1 (1 - \tau^2)^{\lambda-1/2}\, d\tau = t^{2\lambda} j_\lambda(0) = t^{2\lambda}$$

и

$$c_\lambda \int\limits_0^1 u_{z^*}(\tau)\, d\tau = c_\lambda \int\limits_0^1 \int\limits_\tau^1 t(t^2 - \tau^2)^{\lambda-1/2} v_{z^*}(t)\, dt\, d\tau$$

$$= c_\lambda \int\limits_0^1 v_{z^*}(t) t \int\limits_0^t (t^2 - \tau^2)^{\lambda-1/2}\, d\tau\, dt = \int\limits_0^1 v_{z^*}(t) t^{2\lambda+1}\, dt.$$

Итак, согласно (3.3)–(3.5)

$$\omega_M^2(2\pi\gamma, f)_{2,\lambda} \geq \nu_0 E_1^2(f)_{2,\lambda}.$$

Неравенство (1.4) при $\sigma = 1$, $\tau* = 2\pi\gamma$ получено. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rösler M.** Dunkl Operators: Theory and applications. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135. (Lecture Notes in Math; vol. 1817.)
2. **Rösler M.** A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355, no. 6. P. 2413–2438.
3. **Хуэ Ха Тхи Минь.** О связи многомерных и одномерных констант Джексона в пространствах L_2 со степенными весами // Изв. ТулГУ. 2012. Вып. 2. С. 114–123. (Естеств. науки.)
4. **Иванов А.В., Иванов В.И., Хуэ Ха Тхи Минь.** Обобщенная константа Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля // Изв. ТулГУ. 2013. Вып. 3. С. 74–90. (Естеств. науки.)
5. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{R}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 93–99.
6. **Ибрагимов Н.И., Насибов В.Г.** Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194, № 5. С. 1013–1016.
7. **Попов В.Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. № 6. С. 65–73.
8. **Попов В.Ю.** О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. вузов. Математика. 1981. № 12. С. 67–78.
9. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 183–198.
10. **Московский А.В.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. ТулГУ. 1997. Т. 4, вып. 1. С. 44–70. (Математика. Механика. Информатика.)
11. **Иванов А.В.** Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах // Изв. ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 29–58. (Естеств. науки.)
12. **Иванов А.В.** Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах // Изв. ТулГУ. 2010. Вып. 1. С. 26–44. (Естеств. науки.)
13. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 1. С. 148–151.
14. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 180–192.
15. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 3. С. 338–348.
16. **Левитан Б.М., Саргсян И.С.** Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970. 672 с.
17. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
18. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
19. **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 309–315.
20. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона – Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 75–84.

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
декан
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступила 10.12.2013

Ха Тхи Минь Хуэ
аспирант
Тульский государственный университет
e-mail: hahue@mail.ru

Том 20 № 1 2014

УДК 517.95:518.517

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ[1]

А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак

В статье исследуется краевая задача с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в случае сферических координат. Данное исследование актуально в связи с рассмотрением задачи о распространении тепла в окрестности замкнутой сферической поверхности. Для рассмотренной краевой задачи доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций, предложен численный метод построения решения на основе граничноэлементного подхода. Выполнены иллюстрирующие расчеты как с помощью отрезков рядов, так и с помощью предложенного численного метода.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, краевая задача, аналитическое решение, метод граничных элементов.

A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov, L. F. Spevak. On a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in spherical coordinates.

We study a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in the case of spherical coordinates. The results of this study can be applied to the problem of heat propagation in a neighborhood of a closed spherical surface. For the boundary value problem, we prove the existence and uniqueness theorem for solutions in the class of analytical functions and propose a numerical method for constructing solutions based on the boundary element approach. We use both truncated series and the proposed numerical method to carry out sample computations.

Keywords: porous medium equation, boundary value problem, analytical solution, boundary element method.

Введение

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности, описывающее распространение тепла в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры [1]

$$T_t = \alpha div(T^\sigma \bigtriangledown T). \tag{0.1}$$

Функция $T(t, x, y, z)$ — это температура, зависящая от времени t и трех пространственных переменных x, y, z; div и $\bigtriangledown$ — операторы дивергенции и градиента по пространственным переменным; α и σ — положительные константы. Уравнение (0.1) также описывает нестационарную фильтрацию газа в пористом грунте. Тогда функция T — это плотность газа, а параметр σ — показатель политропы (адиабаты) этого газа [2]. В англоязычной литературе для наименования уравнения (0.1) используется термин “the porous medium equation” [3].

С помощью замены $u = T^\sigma$, $t' = \alpha t$ уравнение (0.1) можно привести к более удобному виду:

$$u_t = u\Delta u + (\bigtriangledown u)^2/\sigma. \tag{0.2}$$

Уравнение (0.2) имеет параболический тип, однако при равенстве нулю искомой функции происходит вырождение типа, поскольку обращается в нуль множитель перед старшими производными. Такая ситуация представляет наибольший интерес, ибо если вырождение не происходит, то свойства решения уравнения (0.1) качественно совпадают со свойствами решения соответствующего линейного уравнения, в частности скорость распространения теплового возмущения является бесконечно большой. В окрестности же линии вырождения возможно

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-31175) и программы Президиума РАН № 15 (проект 12-П-1-1025).

распространение тепловой волны [1] (фронта фильтрации [2]), имеющей конечную скорость движения.

Одной из естественных с точки зрения физики постановок краевой задачи для уравнения (0.2) является следующая:

$$u(t,x,y,z)|_{\Gamma} = f(t,x,y,z), \quad f(0,x,y,z) = 0, \quad f_t(0,x,y,z) > 0, \tag{0.3}$$

где Γ — достаточно гладкая поверхность, разделяющая пространство на две части. Иногда эту задачу называют "задачей А. Д. Сахарова об инициировании тепловой волны" [4, с. 10].

В случае, когда уравнение поверхности Γ может быть разрешено относительно одной из пространственных переменных, для задачи (0.2), (0.3) справедлива теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций, доказанная А. Ф. Сидоровым [4] и уточненная С. П. Баутиным [5]. Однако в случае, когда уравнение поверхности Γ не может быть разрешено относительно одной из переменных (например, если поверхность является замкнутой), данная теорема непосредственно не применима. А. Ф. Сидоров [6] также рассмотрел задачу (0.2), (0.3) в случае двух пространственных переменных, когда краевые условия заданы на круговой цилиндрической поверхности. При этом выполнен переход к полярным координатам, приведена схема построения решения в виде кратного степенного ряда и указано, что сходимость построенного ряда на момент публикации работы не была строго доказана. Работы, где подобное доказательство было бы выполнено, авторам не известны (как уже отмечалось, данный случай не подпадает под действие теоремы С. П. Баутина [5]). "Обратная" задача о движении замкнутого фронта тепловой волны рассматривалась в работе [7], однако С. С. Титов ограничился изучением случаев сферической и цилиндрической симметрии. Отметим, что наиболее полный обзор научных результатов, полученных для уравнения нелинейной теплопроводности (porous medium equation), по-видимому, содержится в монографии Х. Л. Васкеса [3]. Однако результаты А. Ф. Сидорова, С. П. Баутина, С. С. Титова там не упоминаются.

В данной работе рассматривается задача (0.2), (0.3) с краевыми условиями, заданными на сферической поверхности. При этом задача, представленная в завершающем разделе статьи [6], является частным случаем задачи, рассмотренной в настоящей работе. Доказана теорема существования и единственности решения рассмотренной задачи в классе аналитических функций, в том числе строго доказана сходимость ряда. Полученные аналитические результаты тесно связаны (помимо упомянутых выше работ) с ранее опубликованными статьями авторов [8; 9], в которых рассмотрены близкие задачи меньшей размерности. Кроме того, разработан алгоритм решения рассматриваемой задачи с помощью метода граничных элементов (МГЭ) [10], проведены иллюстрирующие численные расчеты как с помощью отрезков степенных рядов, так и на основе граничноэлементного подхода. Преимуществами последнего (по сравнению, например, с более известными методами конечных разностей и конечных элементов) являются то, что схема дискретизации МГЭ требует разбиения лишь поверхности, а не всей области, благодаря чему размерность задачи уменьшается на единицу, и то, что МГЭ позволяет получать решение в непрерывном виде. В этой связи применение метода граничных элементов для решения краевых задач математической физики представляется перспективным [9]. При этом, поскольку сходимость метода в нелинейном случае доказать проблематично, сравнение результатов расчетов с найденным точным решением в виде ряда может служить способом обоснования вычислительного метода.

1. Постановка задачи и формулировка основной теоремы

Перейдем в уравнении (0.2) к сферическим координатам с помощью замены

$$t = \tau, \quad x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{1.1}$$

Предполагается, что $\rho > 0$, а φ и θ удовлетворяют неравенствам $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 < \theta_1 \le \theta \le \pi - \theta_2$, где θ_1, θ_2 — малые константы. Якобиан замены (1.1) $J = 1/\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}$ отличен от нуля и в силу наложенных на θ ограничений конечен, т. е. замена невырождена.

В результате замены (1.1) уравнение (0.2) принимает вид

$$u_\tau = u\left[\frac{2u_\rho}{\rho} + \frac{u_\theta \cos\theta}{\rho^2 \sin\theta} + u_{\rho\rho} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{\rho^2 \sin^2\theta} + \frac{u_{\theta\theta}}{\rho^2}\right] + \frac{1}{\sigma}\left[{u_\rho}^2 + \frac{{u_\varphi}^2}{\rho^2 \sin^2\theta} + \frac{{u_\theta}^2}{\rho^2}\right]. \qquad (1.2)$$

Для уравнения (1.2) рассмотрим краевые условия

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=R} = f(\tau,\varphi,\theta), \quad f(\tau,\varphi,\theta) = f(\tau,\varphi+2\pi,\theta), \quad f(0,\varphi,\theta) = 0, \quad f_\tau(0,\varphi,\theta) > 0, \qquad (1.3)$$

где $R > 0$ — некоторая константа. Для задачи (1.2), (1.3) доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f = f(\tau,\varphi,\theta)$ — аналитическая в некоторой окрестности $\tau = 0$. Тогда задача (1.2), (1.3) имеет единственное аналитическое в некоторой окрестности $(\tau = 0, \rho = R)$ решение, если выбрано направление движения теплового фронта.*

При доказательстве теоремы используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть A — трехдиаганальная матрица, элементы наддиагонали которой отрицательны, а элементы поддиагонали и главной диагонали положительны. Тогда определитель матрицы A больше нуля.*

Лемма доказывается индукцией по порядку матрицы. Базис индукции очевиден. Предполагая, что определители матриц, удовлетворяющих условию леммы, больше нуля до порядка n включительно, несложно при помощи разложения по первой строке показать, что определитель соответствующей матрицы порядка $n+1$ также положителен.

2. Доказательство основной теоремы

Для удобства дальнейших преобразований выполним сдвиг по переменной ρ. Пусть $r = \rho - R$, тогда задача (1.2), (1.3) примет вид

$$u_\tau = u\left[\frac{2u_r}{r+R} + \frac{u_\theta \cos\theta}{(r+R)^2 \sin\theta} + u_{rr} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{(r+R)^2 \sin^2\theta} + \frac{u_{\theta\theta}}{(r+R)^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{\sigma}\left[{u_r}^2 + \frac{{u_\varphi}^2}{(r+R)^2 \sin^2\theta} + \frac{{u_\theta}^2}{(r+R)^2}\right], \qquad (2.1)$$

$$u(\tau,r,\varphi,\theta)|_{r=0} = f(\tau,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varphi,\theta)\tau^n/n!. \qquad (2.2)$$

Доказательство теоремы проводится в два этапа: на первом строится решение в виде кратного степенного ряда, на втором доказывается сходимость построенного формального ряда.

2.1. Построение решения в виде формального ряда

Решение строится в виде ряда по степеням τ и r с коэффициентами, зависящими от $\varphi, \theta:$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{u_{n,m}(\varphi,\theta)}{n!m!}\tau^n r^m, \quad u_{n,m}(\varphi,\theta) = \left.\frac{\partial^{n+m} u}{\partial\tau^n \partial r^m}\right|_{\substack{\tau=0\\ r=0}}. \qquad (2.3)$$

Коэффициенты $u_{n,0}$ можно определить из условия (2.2): $u_{n,0} = f_n,\ n = 0,1,2,\ldots$, в частности $u_{0,0} = f_0 = 0$.

Коэффициенты ряда (2.3) определяются “послойно”, т.е. индукцией по суммарному порядку дифференцирования: сначала определяются коэффициенты, сумма индексов которых равна 1, затем коэффициенты, сумма индексов которых равна 2, и т. д.

Известно, что $u_{1,0} = f_1$. Для того чтобы определить коэффициент $u_{0,1}$, положим в уравнении (2.1) $\tau = 0$ и $r = 0$. Получим уравнение $u_{1,0} = u_{0,1}^2/\sigma$. Поскольку $u_{1,0} = f_1$, то $u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1}$. Для определенности будем рассматривать случай $u_{0,1} = -\sqrt{\sigma f_1}$ (второй случай рассматривается аналогично). Выбор знака перед корнем эквивалентен выбору направления движения теплового фронта (фронта фильтрации): при выборе положительного значения фронт тепловой волны движется внутрь сферы, при выборе отрицательного — наружу.

Определим теперь коэффициенты, сумма индексов которых равна 2. Известно, что $u_{2,0} = f_2$. Продифференцировав уравнение (2.1) последовательно по τ и r и положив $\tau = 0$ и $r = 0$, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} u_{1,1} = u_{0,1}(2u_{0,1}/R + u_{0,2}) + 2u_{0,1}u_{0,2}/\sigma, \\ f_2 = f_1(2u_{0,1}/R + u_{0,2}) + 2u_{0,1}u_{1,1}/\sigma. \end{cases}$$

Разрешая эту систему и подставляя значение коэффициента $u_{0,1}$, получим равенства

$$u_{1,1} = [-4f_1^2/R - (1 + 2/\sigma)f_2\sqrt{\sigma f_1}]/[(3 + 4/\sigma)f_1], \quad u_{0,2} = [f_2 + 6f_1\sqrt{\sigma f_1}/R]/[(3 + 4/\sigma)f_1].$$

Далее коэффициенты определяются аналогично. Дифференцируя уравнение (2.1) n раз по τ и m раз по r и полагая $\tau = 0$ и $r = 0$, получим уравнение вида

$$u_{n+1,m} = nu_{1,0}u_{n-1,m+2} + (m + 2/\sigma)u_{0,1}u_{n,m+1} + L_{n,m}, \tag{2.4}$$

в котором функция $L_{n,m}$ зависит лишь от тех коэффициентов, сумма индексов которых не превышает $n + m$. Выражение для $L_{n,m}$ не приводится ввиду крайней громоздкости.

Далее доказательство опирается на принцип математической индукции.

Предположим, что все коэффициенты порядка до $n + m$ определены. Пользуясь формулой (2.4), варьируя значения n и m, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A_{n+m+1}\mathbf{U_{n+m+1}} = \mathbf{L_{n+m+1}},$$

где $\mathbf{U_{n+m+1}} = (u_{n+m,1}, \ldots, u_{0,n+m+1})$ — вектор искомых величин, компоненты вектора $\mathbf{L_{n+m+1}}$ известны в силу предположения индукции, A_{n+m+1} — трехдиагональная матрица вида

$$A_{n+m+1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n+m} & a_{n+m} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n+m+1} \end{pmatrix}$$

с элементами $b_i = (2/\sigma + i - 1)\sqrt{\sigma f_1} > 0$, $a_i = -if_1 < 0$; $i = 1, 2, \ldots, n + m + 1$. По лемме 1 матрица A_{n+m+1} обратима, что позволяет определить все коэффициенты порядка $n+m+1$. На основании принципа математической индукции заключаем, что все коэффициенты ряда (2.3) определяются однозначно. Решение СЛАУ можно найти с помощью метода прогонки. Авторами также получены явные формулы, которые здесь не приводятся из-за громоздкости.

2.2. Доказательство сходимости формального ряда

Доказательство сходимости формального ряда проводится методом мажорант. Перед построением мажорантной задачи мы проведем ряд замен. Пусть

$$t = \tau, \quad z = r - a(\tau, \varphi, \theta), \quad x = \varphi, \quad y = \theta,$$

где $a(\tau,\varphi,\theta)$ — периодическая по φ с периодом 2π функция такая, что $a(0,\varphi,\theta)=0$ и $a_\tau|_{\tau=0}>0$. Функция $a(\tau,\varphi,\theta)$ пока неизвестна и будет определять фронт тепловой волны. Выбор знака у $a_\tau|_{\tau=0}$ эквивалентен выбору направления движения тепловой волны (внутрь сферы или наружу) и зависит от выбора знака $u_{0,1}$ (противоположен ему). При этом выполняется условие

$$u(\tau,r,\varphi,\theta)|_{r=a(\tau,\varphi,\theta)}=0. \tag{2.5}$$

Якобиан преобразования равен единице, т. е. замена невырождена.

Пересчитав производные и подставив полученные значения в (2.1), получим уравнение

$$-a_t u_z+u_t=u\left[\frac{2u_z}{z+a+R}+\frac{(u_y-a_y u_z)\cos y}{(z+a+R)^2\sin y}+u_{zz}+\frac{-a_{xx}u_z+a_x^2u_{zz}-2a_xu_{xz}+u_{xx}}{(z+a+R)^2\sin^2 y}\right.$$
$$\left.+\frac{-a_{yy}u_z+a_y^2u_{zz}-2a_yu_{yz}+u_{yy}}{(z+a+R)^2}\right]+\frac{1}{\sigma}\left[u_z^2+\frac{(u_x-a_xu_z)^2}{(z+a+R)^2\sin^2 y}+\frac{(u_y-a_yu_z)^2}{(z+a+R)^2}\right]. \tag{2.6}$$

Условия (2.2), (2.5) трансформируются соответственно в условия

$$u|_{z=-a(t,x,y)}=f(t,x,y), \tag{2.7}$$

$$u|_{z=0}=0. \tag{2.8}$$

Таким образом, задача (2.1), (2.2) преобразована в задачу (2.6)–(2.8). Для того чтобы избавиться от функции a, в уравнении (2.6) поменяем ролями u и z, т. е. u будем считать независимой переменной, а z — искомой функцией. Подобного рода замены неоднократно использовал А. Ф. Сидоров [6], а позднее С. П. Баутин [5]. Пусть

$$z=z(t,u,x,y),\quad \tau=t,\quad \chi_1=x,\quad \chi_2=y. \tag{2.9}$$

Якобиан преобразования (2.9) $J=-z_u=-1/u_z$. Поскольку $u_z|_{\substack{t=0\\z=0}}=-\sigma a_t|_{t=0}<0$ (это следует из (2.6)), то замена является невырожденной. После проведения замены и домножения на $(-z_u^3)$ уравнение (2.6) принимает вид

$$z_u^2(z_\tau+a_\tau)=u\left[\frac{-2z_u^2}{z+a+R}+\frac{z_u^2(z_{\chi_2}+a_{\chi_2})\cos\chi_2}{(z+a+R)^2\sin\chi_2}+z_{uu}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{2}c_i\frac{a_{\chi_i\chi_i}z_u^2+a_{\chi_i}^2z_{uu}+2a_{\chi_i}(z_{\chi_i}z_{uu}-z_uz_{u\chi_i})-2z_uz_{\chi_i}z_{u\chi_i}+z_u^2z_{\chi_i\chi_i}+z_{\chi_i}^2z_{uu}}{(z+a+R)^2}\right]$$
$$-\frac{z_u}{\sigma}\left[1+\frac{c_1(z_{\chi_1}+a_{\chi_1})^2}{(z+a+R)^2}+\frac{(z_{\chi_2}+a_{\chi_2})^2}{(z+a+R)^2}\right], \tag{2.10}$$

где $c_1=1/\sin^2\chi_2$, $c_2=1$. Условия (2.7), (2.8) примут вид

$$z|_{u=f(\tau,\chi_1,\chi_2)}=-a(\tau,\chi_1,\chi_2), \tag{2.11}$$

$$z|_{u=0}=0. \tag{2.12}$$

Из условия (2.11) можно выразить функцию a: $a=-z|_{u=f}$. Уравнение (2.10) помимо функции a содержит также производные a_τ, a_{χ_i}, $a_{\chi_i\chi_i}$, $i=1,2$. Эти функции можно найти, дифференцируя условие (2.11) нужное количество раз по τ и χ_i, $i=1,2$.

Для того чтобы поверхность $u=f(\tau,\chi_1,\chi_2)$ стала новой координатной плоскостью $\zeta=0$, сделаем еще одну замену

$$v=u,\quad \zeta=u-f(\tau,\chi_1,\chi_2),\quad \chi_1=x_1,\quad \chi_2=x_2. \tag{2.13}$$

Такая замена невырождена, так как якобиан $J = -f_\tau$, а по условию теоремы $f_\tau|_{\tau=0} > 0$.

Чтобы выразить старые переменные через новые, представим второе равенство (2.13) в виде

$$\Phi(v-\zeta,\tau,x_1,x_2) \equiv v-\zeta-f(\tau,x_1,x_2)=0. \tag{2.14}$$

Так как $\Phi_\tau \equiv -f_\tau(\tau,x_1,x_2) \neq 0$ в некоторой окрестности $\tau = 0$, то по теореме о неявной функции формула (2.14) определяет аналитическую функцию $\tau = \psi(v-\zeta,x_1,x_2)$ такую, что

$$\psi(v-\zeta,x_1,x_2)|_{v-\zeta=0}=0.$$

Введем дополнительные обозначения для функций:

$$F(v-\zeta,x_1,x_2) = -f_\tau|_{\tau=\psi(v-\zeta,x_1,x_2)}, \quad H_i(v-\zeta,x_1,x_2) = -f_{x_i}|_{\tau=\psi(v-\zeta,x_1,x_2)}, \quad i=1,2.$$

Так как эти функции аналитические, то их можно представить в виде $F = F_0 + vF_1$, $H_i = H_{i0} + vH_{i1}$, $i = 1,2$. После замены (2.13) с учетом (2.11) уравнение (2.10) принимает вид

$$\begin{gathered}(z_v+z_\zeta)^2\big(Fz_\zeta - [Fz_\zeta|_{\zeta=0} - (z_v+z_\zeta)|_{\zeta=0}F]\big) = v\Big[-2(z_v+z_\zeta)^2/(z-z|_{\zeta=0}+R) + z_{vv} + 2z_{v\zeta} + z_{\zeta\zeta} \\ +(z_v+z_\zeta)^2\Big(z_{x_2} + H_2z_\zeta - \big[z_{x_2}|_{\zeta=0} + H_2z_\zeta|_{\zeta=0} - (z_v+z_\zeta)|_{\zeta=0}H_2\big]\Big)\cos x_2/\big((z-z|_{\zeta=0}+R)^2\sin x_2\big) \\ +\sum_{i=1}^{2} c_iP_{1i}/(z-z|_{\zeta=0}+R)^2\Big] - (z_v+z_\zeta)\Big[1+\sum_{i=1}^{2} c_iP_{2i}/(z-z|_{\zeta=0}+R)^2\Big]/\sigma,\end{gathered} \tag{2.15}$$

а условие (2.12) преобразуется как

$$z(v,\zeta,x_1,x_2)|_{v=0}=0. \tag{2.16}$$

Формулы для P_{1i} и P_{2i}, $i = 1,2$, здесь не приводятся в силу их громоздкости, отметим, однако, что P_{1i} и P_{2i} являются аналитическими функциями своих аргументов, и $P_{2i}|_{v=0} = (z_v|_{v=\zeta=0}H_{i0})^2$. После преобразования (2.13) получаем задачу (2.15), (2.16).

Для того чтобы сделать последнее преобразование задачи, определим $z_1 = z_v|_{v=0}$. Для этого положим в уравнении (2.15) $v = 0$. Учитывая условие (2.16), а также тот факт, что $P_{2i}|_{v=0} = (z_1|_{\zeta=0}H_{i0})^2$, при $i = 1,2$ получаем уравнение

$$z_1|_{\zeta=0}z_1F_0 = -\frac{1}{\sigma}\Big[1+\frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{2} c_i(z_1|_{\zeta=0}H_{i0})^2\Big]. \tag{2.17}$$

Положим в этом уравнении $\zeta = 0$ для того, чтобы найти $z_{10} = z_1|_{\zeta=0}$. Учитывая, что $F|_{v=\zeta=0} = F_0|_{\zeta=0} = -f_\tau(0,x_1,x_2) = -f_1 < 0$ и $H_i|_{v=\zeta=0} = H_{i0}|_{\zeta=0} = 0$, получаем равенство $z_{10} = z_1|_{\zeta=0} = -1/\sqrt{\sigma f_1}$. Подставляя это значение в уравнение (2.17), получим

$$z_1 = -\frac{1}{\sigma z_{10}F_0}\Big[1+\frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{2} c_i(z_{10}H_{i0})^2\Big].$$

Введем новую неизвестную функцию $Z(v,\zeta,x_1,x_2)$ по формуле

$$z(v,\zeta,x_1,x_2) = vz_1(\zeta,x_1,x_2) + v^2Z(v,\zeta,x_1,x_2). \tag{2.18}$$

Преобразование (2.18) представляет собой частичное разложение в ряд функции z по степеням v. Цель его состоит в том, что после такой замены для задачи (2.15), (2.16) можно будет построить мажорантную задачу, для которой доказаны существование и единственность решения. После подстановки разложения (2.18) в уравнение (2.15) получим

$$(z_1+2vZ+v^2Z_v+vz_{1\zeta}+v^2Z_\zeta)^2\Big(F(vz_{1\zeta}+v^2Z_\zeta)$$

$$
\begin{aligned}
&- \Big[F(vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta)|_{\zeta=0} - (z_1 + 2vZ + v^2 Z_v + vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta)|_{\zeta=0} F\Big]\Big) \\
&= v\Big[2Z + 4vZ_v + v^2 Z_{vv} - \big(2(z_1 + 2vZ + v^2 Z_v + vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta)^2\big)/\big((z_1 - z_{10})v + (Z - Z|_{\zeta=0})v^2 + R\big) \\
&+ vz_{1\zeta\zeta} + v^2 Z_{\zeta\zeta} + 2(z_{1\zeta} + 2vZ_\zeta + v^2 Z_{v\zeta}) + (z_1 + 2vZ + v^2 Z_v + vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta)^2 \cos x_2 \Big(vz_{1x_2} + v^2 Z_{x_2} \\
&+ H_2(vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta) - \Big[(vz_{1x_2} + v^2 Z_{x_2})|_{\zeta=0} + H_2(vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta)|_{\zeta=0} \\
&- (z_1 + 2vZ + v^2 Z_v + vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta)|_{\zeta=0} H_2\Big]\Big) / \sin x_2 \big((z_1 - z_{10})v + (Z - Z|_{\zeta=0})v^2 + R\big)^2 \\
&+ c_1 Q_{11}/((z_1 - z_{10})v + (Z - Z|_{\zeta=0})v^2 + R)^2 + Q_{12}/\big((z_1 - z_{10})v + (Z - Z|_{\zeta=0})v^2 + R\big)^2\Big] \\
&- \big(z_1 + 2vZ + v^2 Z_v + vz_{1\zeta} + v^2 Z_\zeta\big)\Big[1 + c_1 Q_{21}/\big((z_1 - z_{10})v + (Z - Z|_{\zeta=0})v^2 + R\big)^2 \\
&+ Q_{22}/\big((z_1 - z_{10})v + (Z - Z|_{\zeta=0})v^2 + R\big)^2\Big]/\sigma, \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

где через Q_{1i} и Q_{2i}, $i = 1, 2$ обозначены результаты подстановки выражения (2.18) в P_{1i} и P_{2i}.

После перемножения полиномиальных выражений, приведения подобных и деления на v уравнение (2.19) примет вид

$$
\begin{aligned}
&2(1 + 1/\sigma)Z + (4 + 1/\sigma)vZ_v + v^2 Z_{vv} = B_1(\zeta, x_1, x_2)(Z|_{\zeta=0}) + B_2(\zeta, x_1, x_2)v(Z_v|_{\zeta=0}) \\
&+ B_3(\zeta, x_1, x_2)v^2(Z_{vv}|_{\zeta=0}) + g_{03}(\zeta, v, x_1, x_2) + vg_{13} + v^2 g_{23} + v^3 g_{33}, \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

где B_1, B_2, B_3, g_{03}, g_{13}, g_{23}, g_{33} — аналитические функции своих аргументов, обладающие свойствами: g_{13} зависит от функции Z и не зависит от ее производных по v; g_{23} зависит от Z и Z_v и не зависит от производных функции Z по v второго и более порядков; g_{33} зависит от Z, Z_v и Z_{vv} и не зависит от производных функции Z по v третьего и более порядков.

Индукцией по k устанавливается возможность однозначного (при выборе направления движения фронта тепловой волны) построения решения уравнения (2.20) в виде степенного ряда

$$
Z(\zeta, v, x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\zeta, x_1, x_2) v^k / k!.
$$

Мажорантное уравнение для уравнения (2.20) строится в виде

$$
2(1 + 1/\sigma)W + (4 + 1/\sigma)vW_v + v^2 W_{vv} = [1 + \Psi(\zeta, x_1, x_2)]G, \qquad (2.21)
$$

где $\Psi(\zeta, x_1, x_2) \gg B_1(\zeta, x_1, x_2) + B_2(\zeta, x_1, x_2) + B_3(\zeta, x_1, x_2)$ и $G = G_{03} + vG_{13} + v^2 G_{23} + v^3 G_{33} \gg g_{03} + vg_{13} + v^2 g_{23} + v^3 g_{33}$. Существование аналитического мажорирующего нуль решения (2.21) обеспечивает теорема 3.2 из [5].

Теорема доказана.

3. Решение методом граничных элементов в симметричном случае

Построенное в предыдущем разделе аналитическое решение задачи дает возможность описать распространение тепла в соответствии с уравнением (0.2) и краевыми условиями (0.3) в окрестности начального момента времени. Размер этой окрестности определяется радиусом сходимости построенного ряда и существенно зависит от граничной функции $f(t, x, y, z)$. При этом проблема построения решения задачи на заданном конечном промежутке времени, часто возникающая на практике, в общем случае остается нерешенной. Справиться с этой проблемой позволяет представленный в данном разделе алгоритм решения, основанный на методе граничных элементов.

Рассмотрим уравнение (0.2) с краевыми условиями (1.3) в случае сферической симметрии, когда $f(\tau,\rho,\varphi,\theta) = f(\tau)$ (в дальнейшем для сохранения “физичности” обозначений будем вместо τ вновь писать t). Применим для решения этой задачи основанный на методе граничных элементов подход [9]. В произвольный момент времени $t > 0$ будем рассматривать задачу для области Ω: $\rho \in [R_1, R]$, где поверхность $\rho = R_1$, $R_1 < R$ является неизвестным фронтом тепловой волны,

$$u|_{\rho=R_1} = 0. \tag{3.1}$$

Можно показать, что в этом случае

$$q|_{\rho=R_1} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R_1} = \sigma a'(t), \tag{3.2}$$

где q — поток, равный производной по внешней нормали, R_1 — неизвестная, в момент t $R_1 = a(t) < R$, $a(t)$ — функция, определяющая движение фронта тепловой волны, который мы будем определять в процессе решения. С учетом сказанного, в момент времени t мы будем рассматривать уравнение Пуассона

$$\Delta u = \Big(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\Big)/u \tag{3.3}$$

с граничными условиями (3.1), (3.2), а также (см. (1.3))

$$u|_{\rho=R} = f(t). \tag{3.4}$$

В соответствии с МГЭ, для произвольной внутренней точки $\xi(\rho_\xi, \phi_\xi, \vartheta_\xi) \in \Omega$ справедливо

$$u(\xi) = \int\limits_S [q(\mathbf{x})\, u^*(\xi,\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\, q^*(\xi,\mathbf{x})]\, dS(\mathbf{x}) - \int\limits_\Omega \Big[\Big(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\Big)/u\Big]\, u^*(\xi,\mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}(\rho_x, \phi_x, \vartheta_x)$ — точка пространства, ξ — точка наблюдения, S — поверхность области Ω, $u^*(\xi,\mathbf{x}) = 1/(4\pi r)$ — фундаментальное решение для трехмерной задачи, r — расстояние между точками $\mathbf{x}$ и ξ, $q^*(\xi,\mathbf{x}) = \partial u^*(\xi,\mathbf{x})/\partial n$ [10]. Ввиду симметрии задачи все параметры определяются координатой ρ:

$$\begin{gathered} u(\rho_\xi) = q(R)\, \bar{u}^*(\rho_\xi, R) - u(R)\, \bar{q}^*(\rho_\xi, R) \\ + q(R_1)\, \bar{u}^*(\rho_\xi, R_1) - u(R_1)\, \bar{q}^*(\rho_\xi, R_1) - \int\limits_{R_1}^{R} \Big[\Big(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\Big)/u\Big]\, \bar{u}^*(\rho_\xi, \rho_x)\, d\rho_x. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь

$$\bar{u}^*(\rho_\xi, \rho_x) = \rho_x \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} u^*(\xi,\mathbf{x})\, d\phi_x d\vartheta_x, \qquad \bar{q}^*(\rho_\xi, \rho_x) = \rho_x \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} q^*(\xi,\mathbf{x})\, d\phi_x d\vartheta_x. \tag{3.6}$$

Входящие в соотношения (3.6) интегралы вычислены аналитически. При $R_1 < R$ имеем равенства

$$\bar{u}^*(R,R) = R, \quad \bar{u}^*(R_1,R) = R, \quad \bar{u}^*(R,R_1) = R_1^2/R, \quad \bar{u}^*(R_1,R_1) = R_1,$$

$$\bar{q}^*(R,R) = -1/2, \quad \bar{q}^*(R_1,R) = -1, \quad \bar{q}^*(R,R_1) = 0, \quad \bar{q}^*(R_1,R_1) = 1/2,$$

при $R_1 < \rho_\xi, \rho_x < R$ имеем

$$\bar{u}^*(R,\rho_x) = \rho_x^2/R, \quad \bar{u}^*(R_1,\rho_x) = \rho_x, \quad \bar{u}^*(\rho_\xi,\rho_x) = \begin{cases} \rho_x, & \rho_\xi \le \rho_x, \\ \rho_x^2/\rho_\xi, & \rho_\xi > \rho_x, \end{cases}$$

$$\bar{q}^*(\rho_\xi, R) = -1, \quad \bar{q}^*(\rho_\xi, R_1) = 0.$$

Для граничной точки $\mathbf{x}_0 \in S$ справедливо

$$u(\mathbf{x}_0)/2 = \int_S [q(\mathbf{x})\, u^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - u(v)\, q^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})]\, dS(\mathbf{x}) - \int_\Omega \left[\left(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\right)/u\right] u^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}),$$

следовательно,

$$u(R)/2 = q(R)\,\bar{u}^*(R,R) - u(R)\,\bar{q}^*(R,R)$$

$$+ q(R_1)\,\bar{u}^*(R,R_1) - u(R_1)\,\bar{q}^*(R,R_1) - \int_{R_1}^{R} \left[\left(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\right)/u\right] \bar{u}^*(R,\rho_x)\, d\rho_x. \tag{3.7}$$

$$u(R_1)/2 = q(R)\,\bar{u}^*(R_1,R) - u(R)\,\bar{q}^*(R_1,R)$$

$$+ q(R_1)\,\bar{u}^*(R_1,R_1) - u(R_1)\,\bar{q}^*(R_1,R_1) - \int_{R_1}^{R} \left[\left(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\right)/u\right] \bar{u}^*(R_1,\rho_x)\, d\rho_x. \tag{3.8}$$

Дополнив последние два уравнения следующим из (3.2) соотношением

$$q(R_1) = \sigma a'(t), \tag{3.9}$$

мы получим в момент t систему трех уравнений с тремя неизвестными: $q(R)$, $q(R_1)$, R_1.

Основываясь на полученных соотношениях, предложим следующий алгоритм решения задачи (3.1)–(3.4). Решение проводится по шагам по времени. На каждом шаге $t = t_k = kh$, где h — величина шага, решаем задачу для области $\rho \in [R_1, R]$, $R_1 = a(t_k)$, с граничными условиями $u(R) = f(t_k)$, $u(R_1) = 0$. Уравнения (3.7)–(3.9) в момент t_k представим в следующем виде:

$$u(R)\,(\bar{q}^*(R,R) + 1/2) - q(R)\,\bar{u}^*(R,R) - q(R_1)\,\bar{u}^*(R,R_1)$$

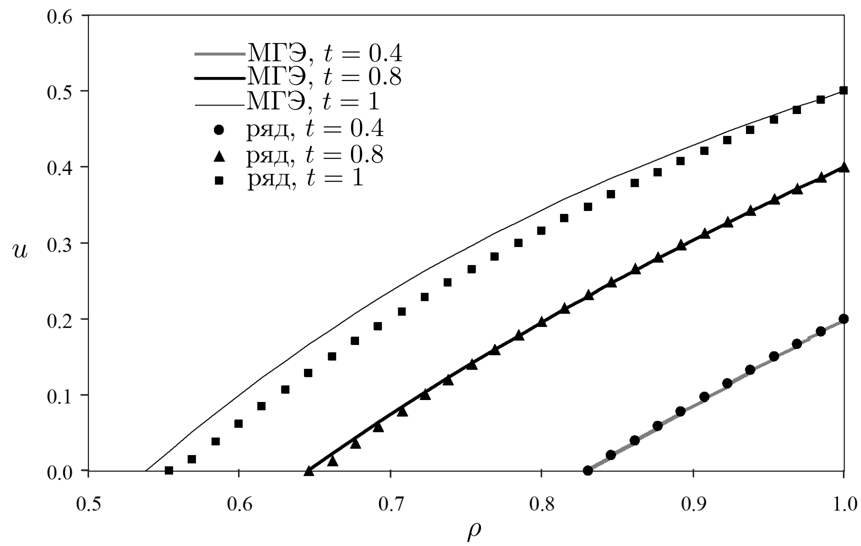
$$= \int_{R_1}^{R} \left[\left(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\right)/u\right] \bar{u}^*(R,\rho_x)\, d\rho_x, \tag{3.10}$$

$$u(R)\,\bar{q}^*(R_1,R) - q(R)\,\bar{u}^*(R_1,R) - q(R_1)\,\bar{u}^*(R_1,R_1)$$

$$= \int_{R_1}^{R} \left[\left(u_t - (\nabla u)^2/\sigma\right)/u\right] \bar{u}^*(R_1,\rho_x)\, d\rho_x, \tag{3.11}$$

$$q(R_1) - \sigma(R_1 - a(t_{k-1}))/h = 0. \tag{3.12}$$

Задача решается итерационно. На первой итерации решается однородная задача — система уравнений (3.10)–(3.12) с нулевыми правыми частями. Решение полученной системы дает первое приближение искомых параметров — $R_1^{(1)}$, $q^{(1)}(R)$ и $q^{(1)}(R_1)$. По этим параметрам определяется первое приближение функции $u^{(1)}(\rho_\xi)$ из уравнения (3.5) без учета последнего слагаемого в правой части. На n-й итерации в правые части уравнений (3.10), (3.11) и в последнее слагаемое уравнения (3.5) подставляются параметры, найденные на $(n-1)$-й итерации. В результате мы получаем на текущем шаге радиус фронта тепловой волны $R_1 = a(t_k)$ и решение исходной задачи $u^{[k]}(\rho_\xi)$, $\rho_\xi \in [R_1, R]$.



Таким образом, на основе МГЭ для уравнения (0.2) с граничными условиями вида (1.3) в случае сферической симметрии получен алгоритм построения решения на конечном промежутке времени. Полученное решение является непрерывным по пространственной переменной на каждом шаге по времени. Предложенный алгоритм развивает применение МГЭ для исследования областей, изменяющихся с течением времени [9].

Отметим, что решение "внешней" задачи — при противоположном направлении движения фронта тепловой волны ($R < R_1$) — может быть проведено абсолютно аналогично.

4. Пример

Описанный в разд. 3 алгоритм решения был применен к решению задачи (3.3), (3.4) при следующих параметрах: $\sigma = 3$, $R = 1$, $f(t) = t/2$. Полученное решение на интервале $t \in [0, 1]$ сравнивалось с решением той же задачи в виде степенного ряда. Учитывались члены ряда до третьей степени включительно. Результаты расчетов приведены на рисунке. Можно видеть, что до момента времени $t = 0.8$ результаты практически совпадают, в дальнейшем (при $t > 0.8$) наблюдается их расхождение. Это, по-видимому, объясняется тем, что погрешность рассмотренного отрезка ряда становится значительной.

Подводя итог проведенному исследованию, отметим, что совместное применение для изучения нелинейных задач математической физики аналитических и численных методов всегда было "визитной карточкой" научной школы А.Ф. Сидорова, к которой принадлежат два первых автора статьи. Подобный подход одновременно обеспечивает математическую строгость полученных результатов и дает надежные и эффективные способы решения прикладных задач, поскольку, во-первых, аналитическое исследование позволяет лучше понять суть происходящих процессов, во-вторых, сравнение результатов расчетов с точными решениями является одним из наиболее простых и удобных способов верификации численных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвящ. 70-летию А. Ф. Иоффе. 1950. С. 61–71.
2. **Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 220 с.

3. **Vazquez J.L.** The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. 648 p.
4. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
5. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 88 с.
6. **Сидоров А.Ф.** О некоторых аналитических представлениях решений нелинейного уравнения нестационарной фильтрации // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости: сб. науч. тр. / ИТПМ СО РАН АН СССР. Новосибирск, 1987. С. 247–257.
7. **Титов С.С.** О движении фронта нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1996. Т. 37, № 4. С. 113–118.
8. **Казаков А.Л.** Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 114–122.
9. **Kazakov A.L., Spevak L.F.** Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Appl. Math. Modelling. 2013. Vol. 37, no. 10-11. P. 6918–6928.
10. **Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
гл. научн. сотр.
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: kazakov@icc.ru

Поступила 18.04.2013

Кузнецов Павел Александрович
аспирант
Институт математики, экономики и информатики ИГУ
e-mail: pav_ku@mail.ru

Спевак Лев Фридрихович
канд. техн. наук
зав. лабораторией
Институт машиноведения УрО РАН
e-mail: lfs@imach.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.518.86 + 519.147

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ В ЗАДАЧЕ ДЕЛЬСАРТА ОЦЕНКИ СВЕРХУ КОНТАКТНОГО ЧИСЛА ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

Н. А. Куклин

Рассмотрена экстремальная задача для непрерывных неположительных на отрезке функций, представимых рядами по многочленам Лежандра с неотрицательными коэффициентами, возникающая из схемы Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного евклидова пространства. Доказано, что единственной экстремальной функцией является многочлен 27-й степени, который представим в виде линейной комбинации многочленов Лежандра степеней $0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 20, 27$ с положительными коэффициентами, имеет простой нуль в точке $1/2$ и пять двойных нулей в интервале $(-1,\ 1/2)$. Исследована двойственная экстремальная задача для неотрицательных мер на отрезке $[-1,\ 1/2]$, в частности доказано, что экстремальная мера единственная.

Ключевые слова: схема Дельсарта, бесконечномерное линейное программирование, многочлены Лежандра, контактные числа.

N. A. Kuklin. The extremal function in the Delsarte problem of finding an upper bound for the kissing number in the three-dimensional space.

We consider an extremal problem for continuous functions that are nonpositive on a closed interval and can be represented by series in Legendre polynomials with nonnegative coefficients. This problem arises from the Delsarte method of finding an upper bound for the kissing number in the three-dimensional Euclidean space. We prove that the prolem has a unique solution, which is a polynomial of degree 27. This polynomial is a linear combination of Legendre polynomials of degrees $0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 20, 27$ with positive coefficients; it has simple root $1/2$ and five roots of multiplicity 2 in $(-1,\ 1/2)$. Also we consider dual problem for nonnegative measures on $[-1,\ 1/2]$. We prove that extremal measure is unique.

Keywords: Delsarte method, infinite-dimensional linear programming, Legendre polynomials, kissing numbers.

1. Введение

В работе изучается задача бесконечномерного линейного программирования, возникающая из схемы Дельсарта оценки сверху контактного числа евклидова пространства. Схема Дельсарта появилась в исследованиях Ф. Дельсарта [17; 5] границ упаковок в некоторых метрических пространствах. В дальнейшем эта схема была развита и успешно применена в работах Г. А. Кабатянского и В. И. Левенштейна [6], Э. Одлыжко и Н. Слоэна [21], В. И. Левенштейна [10; 9], В. М. Сидельникова [13], В. В. Арестова и А. Г. Бабенко [2; 3], Д. В. Штрома [16], О. Р. Мусина [11; 19; 20], а также в работах автора [7; 8].

Обозначим через $P_k,\ k \geqslant 0$, многочлены Лежандра степени k, нормированные условием $P_k(1) = 1$ (см., например, [14, гл. IV]). Пусть Φ есть множество непрерывных на отрезке $[-1,\ 1]$ функций, представимых рядами

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(t), \quad t \in [-1,\ 1],$$

с суммируемой последовательностью $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных коэффициентов $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty$.

Рассмотрим подмножество $\mathcal{F} \subset \Phi$ функций f, обладающих следующими тремя свойствами:

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

(1) $f_0 = 1$;
(2) $f_k \geqslant 0$ для всех $k \geqslant 1$;
(3) $f(t) \leqslant 0$ для любых $t \in [-1,\, 1/2]$.

Элементы множества $\mathcal{F}$ будем в дальнейшем называть допустимыми функциями. Задача Дельсарта состоит в отыскании величины

$$u = \inf_{f \in \mathcal{F}} f(1) = 1 + \inf_{f \in \mathcal{F}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \tag{1.1}$$

и экстремальных функций, на которых достигается нижняя грань в (1.1). Значение u задачи (1.1) дает оценку сверху контактного числа трехмерного пространства — максимального числа шаров единичного радиуса, касающихся единичного шара пространства.

Более общая задача исследовалась в работе [2], где была, в частности, доказана достижимость величины u (см. теорему B ниже). Введем множество экстремальных функций $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$, состоящее из тех допустимых функций f, для которых $f(1) = u$.

Задача (1.1) изучалась в работах автора [7; 8]. В [7] было доказано, что экстремальная функция задачи (1.1) является многочленом, степень d которого удовлетворяет неравенствам

$$27 \leqslant d < 1450, \tag{1.2}$$

и для значения задачи были найдены оценки

$$13.158225715299274 \leqslant u \leqslant 13.158225715311796. \tag{1.3}$$

В работе [8], следуя идеям [2; 3; 16], автор предложил метод решения задач типа (1.1). Для исследования задачи было введено понятие типа экстремального многочлена, а именно, типом экстремального многочлена f^* называется четверка (d, N, p, r), где степень многочлена $d = \deg f^*$, N — множество номеров $k < d$ таких, что $f_k^* = 0$; $p = 1$, если $f^*(-1) = 0$ и $p = 0$ в противном случае; наконец, r — число двойных нулей многочлена f^* на интервале $(-1,\, 1/2)$. Говоря о типе экстремального многочлена f^*, мы подразумеваем, что $1/2$ является простым корнем f^*. Далее нами был предложен алгоритм, который по размерности $m \geqslant 2$ и по данному типу позволял проверить тот факт, что существует экстремальный многочлен задачи Дельсарта с таким типом, найти его коэффициенты, а также доказать единственность этого многочлена.

Численные эксперименты показывают, что экстремальный многочлен задачи (1.1) имеет тип

$$\bigl(27, \{6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}, 0, 5\bigr). \tag{1.4}$$

Чтобы доказать методами [2; 3; 16; 8], что экстремальный многочлен действительно имеет такой тип, требуется решить сложную систему нелинейных алгебраических уравнений. К сожалению, на данный момент решение такой системы не представляется возможным. В настоящей работе мы предлагаем иной метод исследования задачи (1.1) и доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Единственной экстремальной функцией задачи* (1.1) *является многочлен типа* (1.4).

Данный результат будет следовать из лемм 1–9 и следствий 1–3. Отметим, что в [8] показано, как по информации из теоремы 1 выписать систему нелинейных алгебраических уравнений, из решения которой экстремальный многочлен восстанавливается однозначно.

Леммы $1, 3, 4, 6, 7, 9$ были доказаны с использованием компьютера. Все возникающие вычисления над многочленами и матрицами были реализованы автором на языке программирования Haskell, причем все действия осуществлялись в рациональной арифметике (рациональные числа хранятся в памяти компьютера как отношения двух взаимно простых целых чисел).

В формулировках и доказательствах лемм мы приводим найденные рациональные значения соответствующих параметров.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема Стилтьеса — Бернштейна.

Теорема A [14, гл. IV, §3, теорема 4.3]. *Для всех $k \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$|P_k(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,(1-t^2)^{-1/4}, \quad t \in (-1,\,1).$$

2. Двойственная задача Дельсарта

Для решения задач типа (1.1) в [2] рассматривались двойственные им задачи. Для формулировки двойственной к (1.1) задачи рассмотрим банахово пространство $\mathrm{rca}(K)$ (см. [4, гл. IV, §2, определение 17]) вещественнозначных регулярных счетно-аддитивных функций множества, определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}(K)$ борелевских подмножеств замкнутого множества $K \subset [-1,\,1]$. Элементы этого пространства в дальнейшем будем называть мерами. Нормой в этом пространстве является вариация меры

$$\|\mu\| = \max_{B\in\mathcal{B}(K)} \mu B - \min_{B\in\mathcal{B}(K)} \mu B, \quad \mu \in \mathrm{rca}(K).$$

Обозначим через $\mathrm{rca}_+(K) \subset \mathrm{rca}(K)$ конус неотрицательных мер, т. е. таких мер $\mu \in \mathrm{rca}(K)$, что $\mu B \geqslant 0$ для любых множеств $B \in \mathcal{B}(K)$. Для меры $\mu \in \mathrm{rca}_+(K)$ введем числа

$$\mu_k = \int_K P_k(t)\,d\mu(t), \quad k \geqslant 0;$$

здесь и далее интегралы понимаются как интегралы Лебега по мере. Отметим, что для $f \in \Phi$ в силу теоремы Леви (см., например, [4, гл. III, § 6, следствие 17]) справедливо равенство

$$\int_K f(t)\,d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mu_k. \tag{2.1}$$

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathrm{rca}_+([-1,\,1/2])$ есть множество мер μ таких, что $\mu_k \geqslant -1$ для всех $k \geqslant 1$. Элементы множества $\mathcal{M}$ будем в дальнейшем называть допустимыми мерами. На множестве $\mathcal{M}$ рассмотрим задачу о вычислении величины

$$v = 1 + \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \|\mu\| = 1 + \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu_0. \tag{2.2}$$

Введем множество экстремальных мер $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$, на которых достигается верхняя грань в (2.2), т. е. выполняются равенства $1 + \|\mu\| = 1 + \mu_0 = v$.

Задача (2.2) является двойственной задачей для задачи (1.1). Следующее утверждение как раз и устанавливает двойственность. В этом утверждении и ниже через $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$ обозначен носитель меры $\mu \in \mathrm{rca}_+(K)$.

Теорема B [2, теорема 2.1]. *Справедливы следующие утверждения*:

(D1) $u = v$;

(D2) *множества $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{M}^*$ не пусты*;

(D3) *допустимые функция f^* и мера μ^* экстремальны тогда и только тогда, когда они обладают следующими свойствами*:

(D3.1) $f^*(\mathrm{supp}(\mu^*)) = 0$, *т. е.* $f^*(t) = 0$ *для любой точки* $t \in \mathrm{supp}(\mu^*)$;

(D3.2) *если номер $k \geqslant 1$ таков, что $\mu_k^* > -1$, то $f_k^* = 0$.*

Из равенства $u = v$ следует, что произвольные допустимые элементы задач (1.1) и (2.2) дают оценки сверху и снизу величины u соответственно. В дальнейшем нам потребуется более точная оценка снизу величины u в сравнении с той, которая приведена в (1.3).

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$u \geqslant 13.1582257153117809198501453649387272 5. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим дискретную меру

$$\begin{aligned} \mu &= 0.3586068553265902701864754052655182 6\,\delta(-0.9978561641737762975442470029337826 3) \\ &+ 0.9783482017233872270066592670244676 7\,\delta(-0.8968879968914473422507711773455122 7) \\ &+ 0.2871284177837537701974823305055300 7\,\delta(-0.8823722761715769210451555106018342 8) \\ &+ 3.0808912669665945609352239203141080 9\,\delta(-0.4771115384654441332886848964315691 8) \\ &+ 2.5583467179867002660230124391895427 8\,\delta(-0.1910852725848909266790589395286090 7) \\ &+ 4.8949042555247548255012920026395603 8\,\delta(1/2), \end{aligned}$$

где $\delta(\eta)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке η. Видно, что мера μ неотрицательная. Покажем, что $\mu \in \mathcal{M}$. Обозначим через t_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, точки, в которых сосредоточена мера μ. Тогда

$$|\mu_k| = \left|\int_{-1}^{1/2} P_k(t)\,d\mu(t)\right| \leqslant \int_{-1}^{1/2} |P_k(t)|\,d\mu(t) \leqslant \int_{-1}^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,(1-t^2)^{-1/4}\,d\mu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,\sum_{i=1}^{6}(1-t_i^2)^{-1/4}\mu\{t_i\},$$

где второе неравенство следует из теоремы A. Отсюда нетрудно получить, что неравенство $|\mu_k| < 1$ выполняется при $k \geqslant 133$. Для меньших k неравенство $\mu_k \geqslant -1$ проверяется непосредственными вычислениями.

3. Оценки значений экстремальной меры

Лемма 2. *Пусть*

(1) *число* $A \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* $A \leqslant u$;

(2) $E \subset [-1,\,1/2]$ — *замкнутое множество*;

(3) *функция* $h \in \Phi$ *удовлетворяет следующим условиям*:

(3.1) $h_k \geqslant 0$ *при* $k \geqslant 0$,

(3.2) $h(t) \leqslant -1$, $t \in E$ *и* $h(t) \leqslant 0$, $t \in [-1,\,1/2] \setminus E$.

Тогда для меры $\mu^* \in \mathcal{M}^*$ *справедливо неравенство* $\mu^* E \leqslant h(1) - Ah_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства $h(t) \leqslant -1$, $t \in E$, и $h(t) \leqslant 0$, $t \in [-1,\,1/2] \setminus E$, и равенство (2.1) дают следующие оценки:

$$\mu^* E = \int_E d\mu^* \leqslant -\int_E h\,d\mu^* \leqslant -\int_{-1}^{1/2} h\,d\mu^* = -\sum_{k=0}^{\infty} h_k \mu_k^*.$$

Далее, поскольку $h_k \geqslant 0$, $\mu_k^* \geqslant -1$ при $k \geqslant 0$ и $\mu_0^* = \|\mu^*\| = u - 1 \geqslant A - 1$, то имеем

$$\mu^* E \leqslant -h_0\mu_0^* - \sum_{k=1}^{\infty} h_k \mu_k^* \leqslant -(A-1)h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k = h(1) - Ah_0. \qquad \square$$

Разобьем отрезок $[-1,\,1/2]$ на семь попарно не пересекающихся множеств:

(1) $T_1 = [-4388617821430 \cdot 2^{-42},\ -4388617821427 \cdot 2^{-42}]$;

(2) $T_2 = [-3944555125581 \cdot 2^{-42},\ -3944555125578 \cdot 2^{-42}]$;

(3) $T_3 = [-3880714310712 \cdot 2^{-42},\ -3880714310710 \cdot 2^{-42}]$;

(4) $T_4 = [-2098358737157 \cdot 2^{-42},\ -2098358737154 \cdot 2^{-42}]$;

(5) $T_5 = [-840401916417 \cdot 2^{-42},\ -840401916414 \cdot 2^{-42}]$;

(6) $T_6 = [2199023255551 \cdot 2^{-42},\ 1/2]$;

(7) $T_0 = [-1,\ 1/2] \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6)$.

В следующем утверждении с помощью леммы 2 даны (близкие двусторонние) оценки значений (произвольной) экстремальной меры каждого их этих множеств. Чтобы получить многочлены h, дающие хорошие оценки значений экстремальной меры, мы решаем вспомогательную задачу бесконечномерного линейного программирования $\max\,(h(1) - Ah_0)$ с ограничениями из предположения (3) леммы 2. Данная задача сводится к задаче полуопределенного программирования, которую мы решаем при помощи открытого пакета SDPA-GMP [18].

Лемма 3. *Для экстремальной меры $\mu^* \in \mathcal{M}^*$ справедливы следующие оценки*:

(1) $\mu^* T_1 \in [0.357991,\ 0.358607]$;

(2) $\mu^* T_2 \in [0.977733,\ 0.978349]$;

(3) $\mu^* T_3 \in [0.286513,\ 0.287129]$;

(4) $\mu^* T_4 \in [3.080276,\ 3.080892]$;

(5) $\mu^* T_5 \in [2.557731,\ 2.558347]$;

(6) $\mu^* T_6 \in [4.894289,\ 4.894905]$;

(7) $\mu^* T_0 \in [0,\ 0.000612]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 2. Во всех утверждениях будем считать, что A есть нижняя оценка из леммы 1. Для обоснования (1) возьмем $E = T_1$ и

$$\begin{aligned} h(t) \;=\; & 49340813276349.74360158132449751 \\ &+ 133459013434750.4710892348107907 \cdot P_1(t) \;+\; 173697833609038.7386655320670629 \cdot P_2(t) \\ &+ 154341372031150.9387741049765128 \cdot P_3(t) \;+\; 92190141345594.95785134004034742 \cdot P_4(t) \\ &+ 29789173175804.77133302920066913 \cdot P_5(t) \;+\; 6811132027712.391896303391122875 \cdot P_8(t) \\ &+ 6984664786662.927076798198561507 \cdot P_9(t) \;+\; 2550058235224.864218668138950405 \cdot P_{10}(t) \\ &+ 26649301828.93477597892597332825 \cdot P_{20}(t) \;+\; 46706843143.74106572293850528568 \cdot P_{27}(t). \end{aligned}$$

Тогда получим оценку сверху в (1).

(2) Аналогично $E = T_2$ и

$$\begin{aligned} h(t) \;=\; & 1159547582342994699.983196978881 \\ &+ 3136390871861098246.255092216927 \cdot P_1(t) \;+\; 4082034519607693640.339182957776 \cdot P_2(t) \\ &+ 3627142580562302759.329592629731 \cdot P_3(t) \;+\; 2166540200997913903.021343611190 \cdot P_4(t) \\ &+ 700068795837164905.2731303838553 \cdot P_5(t) \;+\; 160066913196559253.1580070781810 \cdot P_8(t) \\ &+ 164145068332972910.0423944087217 \cdot P_9(t) \;+\; 59928356772873272.81332541368590 \cdot P_{10}(t) \\ &+ 626279371067526.1408024646021099 \cdot P_{20}(t) \;+\; 1097647230556507.882803676929310 \cdot P_{27}(t). \end{aligned}$$

(3) $E = T_3$ и

$$\begin{aligned} h(t) \;=\; & 1259980436962618276.744843766658 \\ &+ 3408045690740936156.398436907415 \cdot P_1(t) \;+\; 4435595154550896120.967111281628 \cdot P_2(t) \\ &+ 3941303283430729493.316965539243 \cdot P_3(t) \;+\; 2354192540882686114.844898071840 \cdot P_4(t) \\ &+ 760704433965942594.8943500637377 \cdot P_5(t) \;+\; 173930921252182643.4228712981439 \cdot P_8(t) \\ &+ 178362301015311542.0901583492204 \cdot P_9(t) \;+\; 65118981146563267.54114779179628 \cdot P_{10}(t) \\ &+ 680523824666047.0598418726850451 \cdot P_{20}(t) \;+\; 1192718658765905.428886442944803 \cdot P_{27}(t). \end{aligned}$$

(4) $E = T_4$ и

$$
\begin{aligned}
h(t) \ =\ & 5095736870280.107458928346505261 \\
+\ 13783153747826.92192180636273850 \cdot P_1(t) \ &+\ 17938870404347.32509535921992367 \cdot P_2(t) \\
+\ 15939806578864.98315770478378674 \cdot P_3(t) \ &+\ 9521057135804.170796322549627990 \cdot P_4(t) \\
+\ 3076515728205.214598293801431498 \cdot P_5(t) \ &+\ 703428547224.4519015717900258023 \cdot P_8(t) \\
+\ 721350369326.4983520078491473886 \cdot P_9(t) \ &+\ 263360591519.4859596144146977945 \cdot P_{10}(t) \\
+\ 2752241417.966790209665231627947 \cdot P_{20}(t) \ &+\ 4823710168.037607212691578490304 \cdot P_{27}(t).
\end{aligned}
$$

(5) $E = T_5$ и

$$
\begin{aligned}
h(t) \ =\ & 2702463008765.793165482777166774 \\
+\ 7309730485667.787707753439451491 \cdot P_1(t) \ &+\ 9513665034299.079139082058492108 \cdot P_2(t) \\
+\ 8453485480672.762874355637596993 \cdot P_3(t) \ &+\ 5049378601927.598831694758553109 \cdot P_4(t) \\
+\ 1631593263744.007646794488051834 \cdot P_5(t) \ &+\ 373054903852.5673415876922411934 \cdot P_8(t) \\
+\ 382559527526.6662961141063549863 \cdot P_9(t) \ &+\ 139670134993.5986981129606374658 \cdot P_{10}(t) \\
+\ 1459618267.751506535821852595979 \cdot P_{20}(t) \ &+\ 2558196905.851584364965656947247 \cdot P_{27}(t).
\end{aligned}
$$

(6) $E = T_6$ и

$$
\begin{aligned}
h(t) \ =\ & 114918854360.9266137691655939100 \\
+\ 310837132784.5165513297472780552 \cdot P_1(t) \ &+\ 404556688832.3886020871438382787 \cdot P_2(t) \\
+\ 359473881288.6493818933138038942 \cdot P_3(t) \ &+\ 214718500230.8274351320078270143 \cdot P_4(t) \\
+\ 69381459818.51114870217711700174 \cdot P_5(t) \ &+\ 15863692500.33849468195804945650 \cdot P_8(t) \\
+\ 16267864716.58195739732833608554 \cdot P_9(t) \ &+\ 5939297540.702531481128111068295 \cdot P_{10}(t) \\
+\ 62068438.52691367262420282808068 \cdot P_{20}(t) \ &+\ 108784119.0392407550129778258939 \cdot P_{27}(t).
\end{aligned}
$$

(7) Применим лемму 1, где возьмем замыкание множества T_0 в качестве E, и

$$
\begin{aligned}
h(t) \ =\ & 1786422793419528018515029508.13990 \\
+\,4831988120094467843124431357.76863 \cdot P_1(t) \ &+\,6288866123646032076159311198.70458 \cdot P_2(t) \\
+\,5588050270266833072529035600.65046 \cdot P_3(t) \ &+\,3337816280123592004263627781.19075 \cdot P_4(t) \\
+\,1078540348743825609313734465.98874 \cdot P_5(t) \ &+\,246602370235510663556290855.333455 \cdot P_8(t) \\
+\,252885259701822582451046659.208735 \cdot P_9(t) \ &+\,92326855871595182952081870.8373166 \cdot P_{10}(t) \\
+\,964858847157274101959506.619740600 \cdot P_{20}(t) \ &+\,1691057841574571194515239.35390855 \cdot P_{27}(t).
\end{aligned}
$$

Проверка условия (3.2) леммы 2, а точнее, того факта, что у многочленов h нет нулей на $[-1, 1/2]$ и у многочленов $h+1$ нет нулей на E, осуществляется с помощью теоремы Штурма (см. [12, гл. 1, §4, п. 2] и ее интервальный вариант в теореме 2 ниже). Тем самым обоснованы оценки сверху во всех семи утверждениях леммы 3.

Для получения оценок снизу будем исходить из соотношений

$$
\mu^*\left([-1,\, 1/2]\right) = \sum_{i=0}^{6} \mu^* T_i \geqslant u - 1 \geq A - 1.
$$

Отсюда при любом $k,\ 0 \leq k \leq 6$, имеем

$$
\mu^* T_k \geqslant A - 1 - \sum \left\{\mu^* T_i :\ 0 \leq i \leq 6,\ i \neq k\right\}.
$$

Теперь нужно воспользоваться уже полученными оценками сверху для $\mu^* T_i,\ 0 \leq i \leq 6$. □

Следствие 1. *С учетом утверждения* (D3.1) *теоремы* B *заключаем, что любой экстремальный многочлен задачи* (1.1) *имеет не менее* 11 *нулей с учетом кратности: по крайней мере по одному не менее чем двойному нулю на каждом из отрезков* T_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, *и корень* $1/2$.

Лемма 4. *Пусть* $\mu^* \in \mathcal{M}^*$. *Тогда* $\mu_k^* > -1$, $k \notin D = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 20, 27\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$
|\mu_k^*| = \left| \int_{-1}^{1/2} P_k(t)\, d\mu^*(t) \right| = \left| \sum_{i=0}^{6} \int_{T_i} P_k(t)\, d\mu^*(t) \right| \leqslant \mu^* T_0 + \sum_{i=1}^{6} \int_{T_i} |P_k(t)|\, d\mu^*(t).
$$

Используя теорему A, находим

$$|\mu_k^*| \leqslant \mu^* T_0 + \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{T_i} \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,(1-t^2)^{-1/4}\,d\mu^*(t) \leqslant \mu^* T_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,\sum_{i=1}^{6}(1-\tau_i^2)^{-1/4}\mu^* T_i,$$

где $\tau_i = \max\{|t| : t \in T_i\}$. Применяя оценки для $\mu^* T_i$, приведенные в лемме 3, получаем

$$|\mu_k^*| \leqslant 0.000612 + 11.505552607442654 \cdot k^{-1/2}.$$

Отсюда видим, что неравенство $|\mu_k^*| < 1$ заведомо выполняется при $k \geqslant 133$. Осталось проверить, что для меньших $k \notin D$ справедливо неравенство $\mu_k^* > -1$. Воспользуемся оценкой

$$\mu_k^* = \sum_{i=0}^{6} \int\limits_{T_i} P_k(t)\,d\mu^*(t) \geqslant -\mu^* T_0 + \sum_{i=1}^{6} \mu^* T_i \cdot \min_{t\in T_i} P_k(t).$$

Непосредственные вычисления показывают, что для указанных значений k последняя величина больше -1. К примеру, на этом пути получаем оценку $\mu_{132}^* \geqslant 0.1988$. $\square$

Следствие 2. *В силу утверждения* (D3.2) *теоремы* B *для любой экстремальной функции $f^* \in \mathcal{F}^*$ справедливо свойство $f_k^* = 0$, $k \notin \{0,1,2,3,4,5,8,9,10,20,27\}$.*

Это утверждение и приведенный выше результат (1.2) работы [7], в частности, означают, что экстремальная функция задачи (1.1) является многочленом, степень которого равна 27.

4. Оценки коэффициентов экстремальной функции

Лемма 5. *Пусть*

(1) *число $B \in \mathbb{R}$ такое, что $u \leqslant B$*;

(2) *$l \geqslant 1$ — целое число*;

(3) *мера $\nu \in \mathrm{rca}_+([-1,\,1/2]\cup\{1\})$ удовлетворяет условиям $\nu_k \geqslant 0$ при $k \geqslant 1$, $k \neq l$ и $\nu_l \geqslant 1$.*

Тогда для $f^* \in \mathcal{F}^*$ справедливо неравенство $f_l^* \leqslant B\nu\{1\} - \nu_0$.

Доказательство. Из неравенств $f_k^* \geqslant 0$, $\nu_k \geqslant 0$, $k \geqslant 1$ и $\nu_l \geqslant 1$ и равенств $f_0^* = 1$ и (2.1) имеем

$$f_l^* \leqslant f_l^*\nu_l \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f_k^*\nu_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*\nu_k - \nu_0 = \int\limits_{[-1,\,1/2]\cup\{1\}} f^*(t)\,d\nu(t) - \nu_0.$$

Воспользуемся аддитивностью интеграла по множеству и неравенствами $f^*(t) \leqslant 0$, $t \in [-1,\,1/2]$ и $f^*(1) = u \leqslant B$, получаем

$$f_l^* \leqslant \int\limits_{-1}^{1/2} f^*(t)\,d\nu(t) + f^*(1)\nu\{1\} - \nu_0 \leqslant B\nu\{1\} - \nu_0. \qquad \square.$$

Лемма 6. *Для коэффициентов экстремального многочлена $f^* \in \mathcal{F}^*$ справедливы следующие оценки:*

(1) $f_1^* \in \Big[\dfrac{276997056782692575843 01}{1024079206422078364 6692}, \dfrac{114552813201769662163 84}{423510471192900894 5627}\Big]$;

(2) $f_2^* \in \Big[\dfrac{1737268020841355103369}{493490420958515570998}, \dfrac{4138848594409053936493}{1175686256027043467477}\Big]$;

(3) $f_3^* \in \Big[\dfrac{452990514546894125762 56}{1448148354525755830 5595}, \dfrac{2825091737568253424054 7}{903142962107268057403 3}\Big];$

(4) $f_4^* \in \Big[\dfrac{5229996670746393740185 1}{2799131071942537838169 3}, \dfrac{2059065096718297054822 8}{1102026149197147914434 9}\Big];$

(5) $f_5^* \in \Big[\dfrac{733705662516057793817 21}{1215261460274751685064 59}, \dfrac{1931180139952728493978 81}{3198678866515069907158 59}\Big];$

(6) $f_8^* \in \Big[\dfrac{48569244164066784141 61}{3518425421093261308917 4}, \dfrac{441999964004911195865 0}{3201910872287643217836 7}\Big];$

(7) $f_9^* \in \Big[\dfrac{58005466912927963935 89}{4097600957777372510399 1}, \dfrac{126370811341146017751 6}{892704059022366238145 9}\Big];$

(8) $f_{10}^* \in \Big[\dfrac{12459401969884624827 1}{241075681190024929916 1}, \dfrac{18737336712193218719 7}{362546791771954621411 7}\Big];$

(9) $f_{20}^* \in \Big[\dfrac{6174709898296717579}{114323898646621553749 74}, \dfrac{1455328946738850975}{269452139039539663933 1}\Big];$

(10) $f_{27}^* \in \Big[\dfrac{8481100184355414721}{895938051917839287662 1}, \dfrac{21837237114581049255}{230687189803461315612 64}\Big].$

Отметим, что оценки в (1)–(10) очень точны — максимальная длина указанных в них отрезков не превосходит 10^{-41}; такая точность потребуется для доказательства леммы 7.

Доказательство этой леммы схоже с доказательством леммы 3, поэтому здесь будут приведены лишь некоторые соображения. Для установления оценок сверху мы пользовались леммой 5, где меры ν были сосредоточены в шести рациональных точках (близких, но не равных предполагаемым нулям экстремальной функции) и имели рациональные веса; они подбирались из решения соответствующих задач полуопределенного программирования. Веса и точки имеют весьма громоздкие выражения, поэтому мы не будем выписывать их здесь. Число B (оценку сверху величины u) нужно также взять более точным, чем в (1.3).

Оценки снизу получаются из оценок сверху и неравенств

$$\sum_{k\in D} f_k^* \geqslant A-1 \iff f_l^* \geqslant A-1-\sum_{k\in D\setminus\{l\}} f_k^*, \quad l\in D=\{1,2,3,4,5,8,9,10,20,27\},$$

где A — еще более точная оценка снизу величины u, чем в лемме 1.

5. Интервальная теорема Штурма. Количество нулей экстремального многочлена

Далее нам потребуются некоторые понятия и факты интервальной арифметики (см., например, [1]). Интервалом будем называть отрезок $[a,\,b]$, $a\leqslant b$. Над интервалами осуществляются следующие арифметические операции:

$$\begin{gathered}[a,\,b]+[c,\,d]=[a+c,\,b+d],\quad -[a,\,b]=[-b,\,-a],\quad \big|[a,\,b]\big|=[\min\{|a|,|b|\},\,\max\{|a|,|b|\}],\\ [a,\,b]\cdot[c,\,d]=[\min\{ac,ad,bc,bd\},\,\max\{ac,ad,bc,bd\}],\quad 1/[a,\,b]=[1/b,\,1/a].\end{gathered}\tag{5.1}$$

При делении на интервал и при вычислении модуля интервала предполагается, что он не содержит нуля. Отметим также, что при совпадении концов интервалов операции (5.1) сводятся к обычным операциям над вещественными числами.

Все алгоритмы с применением интервальной арифметики реализованы нами на языке программирования Haskell. Концы интервалов мы представляем рациональными числами, которые хранятся в памяти компьютера как отношения двух взаимно простых целых чисел произвольной длины. Отметим, что при совершении операций (5.1) над интервалами с неравными концами, будет накапливаться относительная погрешность, но при этом концы интервалов будут усложняться — рациональные числа, которые являются концами интервалов будут занимать больше памяти после каждой операции. Чтобы избавиться от такого несоответствия (уменьшение точности при увеличении трудоемкости), после выполнения нескольких операций мы заменяем интервал на больший (не более чем в 1.01 раз), но выбираем более простые рациональные концы при помощи подходящих дробей (см., например, [15]).

Интервальным многочленом будем называть многочлен с интервальными коэффициентами, т.е. такой многочлен $Q(t) = \sum_{j=0}^{d} Q_j t^j$, $d = \deg Q$, в котором Q_j являются интервалами. Для интервального многочлена Q такого, что Q_d не содержит нуля, введем обозначение $\mathrm{mon}(Q) = Q/|Q_d|$ (отметим, что сам старший коэффициент при этом не нужно делить на собственный модуль по правилам (5.1) — вместо этого нужно положить его равным соответственно 1 или -1).

Пусть Q — интервальный многочлен степени d. Рассмотрим последовательность многочленов $Q^0, Q^1, \ldots, Q^d$ с интервальными коэффициентами Q^i_j, определяемыми следующими соотношениями: $Q^0 = \mathrm{mon}(Q)$, $Q^1 = \mathrm{mon}(Q')$, где $Q'(t) = \sum_{j=1}^{d} jQ_j t^{j-1}$ есть производная многочлена Q; остальные многочлены определяются рекуррентным соотношением $Q^i = -\mathrm{mon}(\mathrm{rem}(Q^{i-1}, Q^{i-2}))$, $i \geqslant 2$, где rem — остаток от деления первого многочлена на второй. Ряд $Q^0, Q^1, \ldots, Q^d$ мы будем называть интервальным рядом Штурма. Назовем ряд корректным, если интервалы Q^i_{d-i}, $i \geqslant 0$, не содержат нуля (это, в частности, означает, что $\deg Q^i = d - i$). В корректном случае коэффициенты многочлена $-\mathrm{rem}(Q^{i-1}, Q^{i-2})$ выписываются явно:

$$Q^i_j = -Q^{i-2}_j + \frac{Q^{i-2}_{d-i+2} \cdot Q^{i-1}_{j-1}}{Q^{i-1}_{d-i+1}} + \frac{Q^{i-1}_j}{Q^{i-1}_{d-i+1}} \Big(Q^{i-2}_{d-i+1} - \frac{Q^{i-2}_{d-i+2} \cdot Q^{i-1}_{d-i}}{Q^{i-1}_{d-i+1}} \Big) \tag{5.2}$$

(здесь $Q^i_{-1} = 0$ для всех i). Отметим, что не нужно пользоваться операциями (5.1) для вычисления коэффициентов Q^i_{d-i+1} и Q^i_{d-i+2}, а сразу положить их равными нулю. Интервальный ряд Штурма строится последовательно: по формулам (5.2) вычисляются коэффициенты Q^i_j, $0 \leqslant j \leqslant d-i$, проверяется корректность (интервал Q^i_{d-i} не содержит нуля), вычисляется $\mathrm{mon}(Q^i)$; далее осуществляется переход к шагу $i+1$.

Пусть Q — интервальный многочлен степени d с корректным рядом Штурма $Q^0, \ldots, Q^d$. Для числа $t \in \mathbb{R}$ такого, что все интервалы $Q^0(t), \ldots, Q^d(t)$ не содержат нуля, обозначим через $\sigma_Q(t)$ число перемен знака последовательности интервальных чисел $Q^0(t), \ldots, Q^d(t)$. Через $\sigma_Q(\infty)$ обозначим число перемен знака в последовательности интервалов $Q^0_d, \ldots, Q^i_{d-i}, \ldots, Q^d_0$, а через $\sigma_Q(-\infty)$ — в последовательности $(-1)^d Q^0_d, \ldots, (-1)^{d-i} Q^i_{d-i}, \ldots, (-1)^0 Q^d_0$.

Интервальный многочлен Q и многочлены $Q^0, \ldots, Q^d$ из ряда Штурма могут рассматриваться как множества многочленов с вещественными коэффициентами: Q^i состоит из многочленов, коэффициенты которых лежат в соответствующих интервалах Q^i_j. В следующей теореме устанавливаются свойства корней многочленов из множества Q.

Теорема 2 (Интервальная теорема Штурма). *Пусть Q — интервальный многочлен степени d с корректным интервальным рядом Штурма $Q^0, \ldots, Q^d$. Тогда*

(1) *все (вещественные и комплексные) нули всех многочленов из Q простые*;

(2) *все многочлены из Q имеют равное количество (простых) нулей на вещественной оси, и это количество равно числу $\sigma_Q(-\infty) - \sigma_Q(\infty)$*;

(3) *если для чисел $t = a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ интервалы из последовательности $Q^0(t), \ldots, Q^d(t)$ не содержат нуля, то все многочлены из Q имеют равное количество (простых) нулей на отрезке $[a, b]$, и это количество равно числу $\sigma_Q(a) - \sigma_Q(b)$.*

Доказательство. Пусть $q \in Q$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Для данного многочлена можно построить (не интервальный) ряд Штурма $q^0, \ldots, q^d$ по формулам, аналогичным (5.2). Из свойств интервальной арифметики получаем соотношения

$q^i \in Q^i$, $0 \leqslant i \leqslant d$. В силу свойства корректности последний многочлен q^d равен константе 1 или -1. Поскольку ряд Штурма с точностью до множителя совпадает с алгоритмом Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов q и q', приходим к выводу, что многочлены q и q' не имеют общих множителей, поэтому все нули q простые.

Из тех же соображений можно заключить, что соседние многочлены q^i, q^{i+1}, $0 < i < d$, не имеют общих нулей. Пусть $0 < i < d$ и число $t \in \mathbb{R}$ является нулем многочлена q^i. Тогда $q^{i-1}(t) \neq 0$ и $q^{i+1}(t) \neq 0$. Более того, $q^{i+1} = -\mathrm{mon}(\mathrm{rem}(q^{i-1}, q^i)) = a(pq^i - q^{i-1})$, где $a > 0$ и p — некоторый многочлен. Таким образом, $\mathrm{sign}(q^{i-1}(t)) = -\mathrm{sign}(q^{i+1}(t))$, поэтому количество перемен знака не меняется при переходе через t, а следовательно, $\sigma_q(t-0) = \sigma_q(t+0)$.

Если теперь $t \in \mathbb{R}$ является нулем многочлена q, то из простоты нулей $\mathrm{sign}(q(t-0)) = -\mathrm{sign}(q(t+0))$. Поскольку $q^1(t) \neq 0$, то возможны два случая: $q(t-0) < 0$, $q'(t) > 0$ и $q(t-0) > 0$, $q'(t) < 0$. В первом случае при переходе через t знаки первых двух элементов ряда Штурма меняются с $-+$ на $++$, во втором — с $+-$ на $--$, поэтому $\sigma_q(t-0) = \sigma_q(t+0) + 1$.

В итоге получаем, что $\sigma_q(t)$ является непрерывной функцией во всех точках вещественной оси, кроме нулей многочлена q. В нулях q ее значение уменьшается на 1. Условия п. (3) гарантируют однозначное восстановление знаков величин $q(a)$ и $q(b)$ для всех $q \in Q$. Пункт (2) следует из (3) и предельных переходов $\sigma_Q(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} \sigma_Q(t)$. $\square$

Лемма 7. *Экстремальный многочлен $f^* \in \mathcal{F}^*$ имеет не более 11 нулей на оси с учетом кратности.*

Доказательство. Рассмотрим интервальный многочлен F, коэффициенты которого есть интервалы, определенные в лемме 6. В соответствии с утверждением этой леммы имеет место вложение $\mathcal{F}^* \subset F$. Пусть Q есть интервальная производная многочлена F. Тогда $(\mathcal{F}^*)' = \{(f^*)' : f^* \in \mathcal{F}^*\} \subset Q$. Отметим, что $\deg Q = 26$. Построим интервальный ряд Штурма $Q^0, \ldots, Q^{26}$ для Q. Данный ряд является корректным и, например, $Q^{24} = t^2 + [1.22608, 1.2261]\, t + [0.299503, 0.299506]$, $Q^{25} = t + [0.882, 0.885]$, $Q^{26} = 1$ (здесь рациональные числа округлены в сторону расширения интервала). Данный ряд имеет следующие старшие коэффициенты:

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1;$$

после умножения Q^i, $0 \leqslant i \leqslant 26$, на $(-1)^{26-i}$:

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1.$$

Таким образом, $\sigma_Q(\infty) = 8$, $\sigma_Q(-\infty) = 18$. Из утверждения (2) теоремы 2 следует, что любой многочлен из множества Q имеет 10 простых нулей на вещественной оси.

Пусть $f^* \in \mathcal{F}^*$. Тогда $(f^*)'$ имеет 10 нулей на вещественной оси. Так как между любыми двумя нулями многочлена f^* (в том числе кратными) лежит хотя бы один нуль его производной $(f^*)'$, получаем, что f^* имеет не более 11 нулей на оси с учетом их кратности. $\square$

Следствие 3. *Любой экстремальный многочлен задачи* (1.1) *имеет ровно* 11 *вещественных нулей с учетом кратности*: *по одному двойному нулю на каждом из отрезков T_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и простой нуль $1/2$.*

6. Единственность экстремальной функции и экстремальной меры

Покажем, что вещественные нули различных экстремальных многочленов совпадают.

Лемма 8. *Существует единственный набор точек $t_i^* \in T_i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, такой, что*

(1) *для любой меры $\mu^* \in \mathcal{M}^*$ справедливо свойство $\mathrm{supp}(\mu^*) = \{t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*, 1/2\}$;*

(2) *любой многочлен $f^* \in \mathcal{F}^*$ имеет ровно* 11 *нулей с учетом кратности*: *двойные нули t_i^*, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и простой нуль $1/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f^* — некоторая экстремальная функция задачи (1.1), а μ^* — некоторая экстремальная мера задачи (2.2). В соответствии со следствием 3, функция f^* имеет по одному двойному нулю $t_i^* \in T_i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и еще простой нуль $t_6^* = 1/2$. В силу утверждения (D3.1) теоремы B экстремальная мера μ^* может быть сосредоточена лишь в нулях $\{t_i^*\}_{i=1}^6$ функции f^*. Другими словами, мера μ^* дискретная и сосредоточена не более чем в шести точках $\{t_i^*\}_{i=1}^6$. Учитывая лемму 3, заключаем, что точки $\{t_i^*\}_{i=1}^6$ как раз и составляют носитель меры μ^*. Поскольку пара функция f^* и мера μ^* произвольная, то точки $\{t_i^*\}_{i=1}^6$ от них не зависят. □

Лемма 9. *Множество $\mathcal{F}^*$ содержит единственную функцию. Эта функция является многочленом типа* (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений с интервальными коэффициентами и неизвестными g_k, $k \in D = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 20, 27\}$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in D} P_k(T_i)\cdot g_k = -1, \quad 1 \leqslant i \leqslant 5; \\ \sum\limits_{k\in D} P_k(1/2)\cdot g_k = -1; \\ \sum\limits_{k\in D} P_k'(T_i)\cdot g_k = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4, \end{cases} \tag{6.1}$$

где через P_k' обозначена производная многочлена Лежандра P_k степени k. Пусть $f^* \in \mathcal{F}^*$. Из следствия 2 и леммы 8 получаем, что вектор $g_k = f_k^*$, $k \in D$, является решением системы (6.1). Таким образом, утверждение будет установлено, если мы покажем, что решение системы единственно для любых значений коэффициентов из соответствующих интервалов $P_k(T_i)$ и $P_k'(T_i)$. Обозначим через X матрицу системы (6.1) размера 10×10 с интервальными элементами. Используя интервальную арифметику в методе Гаусса поиска определителя квадратной матрицы, можно установить соотношение

$$\det X \in [-0.31664386200784,\ -0.12414427041161],$$

т. е. определитель ненулевой и решение системы (6.1) единственно при любом значении нулей из интервалов T_i, $1 \le i \le 5$. □

Утверждение теоремы 1 содержится в лемме 9. Двойственная задача (2.2) также обладает свойством единственности решения.

Теорема 3. *Экстремальная мера задачи* (2.2) *единственная. Эта мера дискретная и сосредоточена в шести нулях экстремального многочлена задачи* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему линейных уравнений с интервальными коэффициентами и неизвестными λ_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$:

$$P_k(1/2)\cdot\lambda_6 + \sum_{i=1}^{5} P_k(T_i)\cdot\lambda_i = -1, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}. \tag{6.2}$$

Из лемм 6 и 8 следует, что экстремальная мера μ^* дает решение этой интервальной системы в следующем смысле: для некоторых $t_i^* \in T_i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, $t_6^* = 1/2$ выполняется равенство $\operatorname{supp}(\mu^*) = \{t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*, t_6^*\}$, и тогда вектор $\lambda_i = \mu^*\{t_i^*\}$, $1 \leqslant i \leqslant 6$ будет решением системы (6.2). Интервальная матрица Y системы (6.2) имеет размеры 6×6. Используя интервальную арифметику, можно установить соотношение

$$\det Y \in [0.0211619,\ 0.0211621],$$

т. е. определитель ненулевой и решение единственно при любом значении нулей $t_i^* \in T_i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.
2. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
3. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** Оценки максимального значения углового кодового расстояния для 24 и 25 точек на единичной сфере в $\mathbb{R}^4$ // Мат. заметки, 2000. Т. 68, вып. 4. С. 483–503.
4. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
5. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976. 136 с.
6. **Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И.** О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14, вып. 1. С. 3–25.
7. **Куклин Н.А.** Вид экстремальной функции в задаче Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного пространства // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 225–232.
8. **Куклин Н.А.** Метод Дельсарта в задаче о контактных числах пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 224–239.
9. **Левенштейн В.И.** Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 44–110.
10. **Левенштейн В.И.** О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 6. С. 1299–1303.
11. **Мусин О.Р.** Проблема двадцати пяти сфер // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, вып. 4 (352). С. 153–154.
12. **Прасолов В.В.** Многочлены. 3-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.
13. **Сидельников В.М.** Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16, вып. 3. С. 17–30.
14. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены: 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2005. 480 с.
15. **Хинчин А.Я.** Цепные дроби. 2-е изд. М.; Л.: гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1949. 112 с.
16. **Штром Д.В.** Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 2. С. 162–189.
17. **Delsarte Ph.** Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. Vol. 27. P. 272–289.
18. **Nakata M.** A numerical evaluation of highly accurate multiple-precision arithmetic version of semidefinite programming solver: SDPA-GMP, -QD and -DD // Proc. of 2010 IEEE Multi-Conference on Systems and Control. 2010. P. 29–34.
19. **Musin O.R.** The kissing problem in three dimensions // Discrete Comput. Geom. 2006. Vol. 35, no. 3. P. 375–384.
20. **Musin O.R.** The kissing number in four dimensions // Ann. of Math. 2008. Vol. 168, no. 1. P. 1–32.
21. **Odlyzko A.M., Sloane N.J.A.** New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. Comb. Theory. Ser. A. 1979. Vol. 26, no. 2. P. 210–214.

Поступила 03.12.2013

Куклин Николай Алексеевич
аспирант
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: nickkuklin@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 512.567.5

ПОЛУАБЕЛЕВОСТЬ И СВОЙСТВА ВЕКТОРОВ n-АРНЫХ ГРУПП

Ю. И. Кулаженко

Устанавливаются новые критерии полуабелевости n-арной группы, выраженные через свойства векторов и симметричных точек.

Ключевые слова: n-арная группа, вектор n-арной группы, полуабелева n-арная группа, симметричные точки.

Yu. I. Kulazhenko. Semicommutativity and properties of vectors in n-ary groups.

We establish new criteria for the semicommutativity of an n-ary group expressed in terms of properties of vectors and symmetric points.

Keywords: n-ary group, vector of an n-ary group, semicommutative n-ary group, symmetric points.

Введение

Понятие полуабелевой n-арной группы было введено В. Дёрнте в [1] одновременно с понятием n-арной группы. Однако еще ранее Х. Прюфер в [2] изучал бесконечные абелевы группы с помощью введенных им тернарных (или 3-арных) операций. Впоследствии алгебры с такими операциями назвали грудами Прюфера. В. Дёрнте в [1] установил, что груды Прюфера — полуабелевые тернарные группы, все элементы которых являются идемпотентами.

Работа [1] вдохновила Э. Поста написать свой фундаментальный труд [3] по n-арным группам, где он сформулировал критерии полуабелевости n-арной группы, выраженные через ее трансляции, а также критерий, согласно которому n-арная группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда соответствующая ее группа абелева. Приведенные примеры критериев можно отнести к категории внешних.

Большинство же известных критериев полуабелевости n-арной группы являются внутренними по отношению к теории n-арных групп, поскольку выражены через объекты этой теории. Например, n-арная группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее n-арная операция перестановочна сама с собой.

Очевидно, что отсутствие внешних критериев полуабелевости тормозит процесс развития различных приложений теории n-арных групп. Это ощущается и в геометрических приложениях, где, как утверждает С. А. Русаков в [4], полуабелевым n-арным группам отведена одна из важнейших ролей.

Отметим, что многие авторы (см., например, [4–11]) изучали элементы аффинной геометрии методами теории n-арных групп и свойства n-арных групп, связанные со свойствами объектов аффинной геометрии. Интерес исследователей к полуабелевым n-арным группам обусловлен еще и тем, что класс полуабелевых n-арных групп является одним из самых широких в теории n-арных групп. Он включает в себя все циклические, полуциклические, абелевы, m-полуабелевы и многие другие классы n-арных групп. Кроме того, класс всех коммутативных и класс всех аффинных n-арных групп совпадают с классом всех полуабелевых n-арных групп [12].

В данной работе установлены критерии полуабелевости n-арной группы, которые являются внешними по отношению к самой n-арной группе.

Отметим, что в работе [16] установлены признаки полуабелевости n-арной группы для четырех произвольных точек. В данной работе получены новые критерии полуабелевости, где используются также четыре произвольные точки. Однако примененный нами метод доказательства свидетельствует, что можно построить иные, отличные от [16], тождества, которые определяют наличие свойства полуабелевости у n-арной группы.

1. Используемые определения и понятия

В этой статье G — n-арная группа. Пусть m и k — целые числа такие, что $m > 0$ и $k \geq 0$.

1) Если $k > 0$ и $m \leq k$, то мы используем символ x_m^k для обозначения последовательности $x_m x_{m+1} \ldots x_k$, где $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_k \in G$.

2) Если $k > 0$, то запись $\overset{k}{x}$ обозначает последовательность $xx \ldots x$ длины k ($x \in G$).

Напомним, что универсальную алгебру $\langle G, (\ )\rangle$ с n-арной операцией $(\ ) : G^n \to G$ ($n \geq 2$) называют n-арной группой [13], если выполняются следующие условия:

1) операция $(\ )$ ассоциативна на G, т. е.

$$\big((a_1 \ldots a_n)a_{n+1} \ldots a_{2n-1}\big) = \big(a_1 \ldots a_i(a_{i+1} \ldots a_{i+n})a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}\big)$$

для любого $i = 1, \ldots, n$ и для всех $a_1, \ldots, a_{2n-1} \in G$;

2) уравнение

$$(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n) = b$$

имеет единственное решение в G для любого $i = 1, \ldots, n$ и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in G$.

Говорят, что G — полуабелева n-арная группа, если для любой последовательности $x_1 \ldots x_n \in G^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

n-арная группа может быть также алгеброй с двумя и бóльшим числом операций (см., например, [14]). В частности, n-арная группа может быть алгеброй с одной ассоциативной n-арной операцией и одной унарной операцией.

Алгебру $G = \langle X, (\ ), {}^{[-2]}\rangle$ типа $\langle n, 1\rangle$, где $n \geq 2$, называют n-арной группой [15], если

1) n-арная операция $(\ )$ на множестве X ассоциативна;

2) для любых элементов x и y из X выполняются равенства

$$\big(x^{[-2]} \overset{n-2}{x} (\overset{n-1}{x} y)\big) = y = \big((y \overset{n-1}{x}) \overset{n-2}{x} x^{[-2]}\big).$$

Символ $x^{[-2]}$, который входит в приведенное равенство, есть решение уравнения $(y \overset{2(n-1)}{x}) = x$, т. е. $(x^{[-2]} \overset{2(n-1)}{x}) = x$, где $x, y \in G$.

В дальнейшем элементы n-арной группы G будем называть точками. Следующие понятия можно найти в [4].

Точку $S_a(b) = (ab^{-2} \overset{2n-4}{b} a)$ называют точкой, симметричной точке b относительно точки a ($a, b \in G$). Последовательность k элементов из G называют k-угольником G. Четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ называют параллелограммом G, если $(ab^{[-2]} \overset{2n-4}{b} c) = d$ ($a, b, c, d \in G$). Упорядоченную пару $\langle a, b\rangle$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком G и обозначают $\overline{ab}$. Говорят, что направленные отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равны (пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$), если четырехугольник $\langle a, c, d, b\rangle$ — параллелограмм G ($a, b, c, d \in G$).

Пусть $\overline{V}$ — множество всех направленных отрезков n-арной группы G. С. А. Русаков в [4] установил, что бинарное отношение $=$ на множестве $\overline{V}$ является отношением эквивалентности и разбивает множество $\overline{V}$ на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком $\overline{ab}$, имеет вид

$$K(\overline{ab}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V},\ \overline{uv} = \overline{ab}\}.$$

Под вектором $\overrightarrow{ab}$ n-арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т. е. $\overrightarrow{ab} = K(\overline{ab})$.

2. Основные результаты

Предложение. *n-арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек a, b, c, d из X выполняется равенство*

$$c = \Big(ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,d\Big). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть равенство (1) выполняется. Докажем, что G полуабелева.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in G^n$.

Поскольку для любого $x \in G$ последовательности $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ и $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ являются нейтральными $2(n-1)$-последовательностями, то справедливо равенство

$$c = \Big(cx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_n\Big). \tag{2}$$

Пусть $c = (x_1^n)$, $a = x_n$, $b = x_1$ и $d = x_1$. Тогда с учетом равенств (2) и (1) и ассоциативности операции “( )” имеем

$$(x_1^n) = \Big((x_1^n)x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_n\Big)$$

$$= \Big(x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1\Big)$$

$$= \Big((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1)x_2^{n-1}(x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1)\Big)$$

$$= \Big(x_nx_2^{n-1}(x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1)\Big) = \big(x_nx_2^{n-1}x_1\big). \tag{3}$$

Согласно определению полуабелевой n-арной группы и на основании равенства (3) делаем вывод, что G полуабелева.

Пусть G полуабелева. Установим справедливость равенства (1).

Рассмотрим правую часть равенства (1) с учетом полуабелевости G и нейтральности $2(n-1)$-последовательностей $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ и $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ для любого $x \in X$. Имеем

$$\Big(ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,d\Big) = \Big(ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,d\Big)$$

$$= \Big(dd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a\Big) = \Big((cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,d)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)\Big)$$

$$= \big(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,a\big) = c.$$

Предложение доказано.

Следующая теорема усиливает соответствующий результат Д. Вакарелова [5, теорема 9.2] (см. [16]).

Теорема 1. *n-арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек a, b, c, d из G справедливо равенство*

$$\overrightarrow{S_b(a)S_d(c)} = 2\overrightarrow{bd} - \overrightarrow{ac}. \tag{4}$$

Лемма. *n-арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек a, b, c, d, u из G справедливо равенство*

$$d = \left(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,u\right). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть равенство (5) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Очевидно, что равенство

$$d = \left(dx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_n\right) \tag{6}$$

выполняется, поскольку последовательности $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ и $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\,x$ являются нейтральными $2(n-1)$-последовательностями для любого $x \in G$.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in G^n$. Пусть $d = (x_1^n)$, $a = x_1$, $b = x_1$, $c = x_n$, $u = x_n$.

Тогда с учетом равенств (5), (6) и ассоциативности операции "( )" имеем

$$(x_1^n) = \left((x_1^n)x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_n\right)$$

$$= \left(x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_n\right)$$

$$= \left(\left((x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_n)x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}\,x_1\right)x_2^{n-1}\left((x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_1)x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}\,x_n\right)\right) = \left(x_nx_2^{n-1}x_1\right). \tag{7}$$

На основании определения полуабелевой n-арной группы и равенства (7) заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

Пусть G полуабелева. Докажем справедливость равенства (5). Рассмотрим правую часть равенства (5) с учетом полуабелевости n-арной группы G и нейтральности последовательностей $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$, $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\,x$ для любого $x \in X$. Имеем, что

$$\left(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,u\right) = \left(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}\,b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,u\right)$$

$$= \left(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}\,c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,u\right)$$

$$= \left((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,u)\right) = \left(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}\,u\right) = d.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *n-арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек $a, b, c, d, u, v \in G$ справедливо равенство*

$$\overrightarrow{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}\,v)} = \overrightarrow{ad} - \overrightarrow{bu} + \overrightarrow{cv}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Докажем, что выполняется равенство (8).

Рассмотрим правую часть равенства (8) с учетом определения 8 и предложения 1 из [4]. Имеем

$$\overrightarrow{ad} - \overrightarrow{bu} + \overrightarrow{cv} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{ub} + \overrightarrow{cv}$$

$$= \overrightarrow{a\big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}b\big)} + \overrightarrow{cv} = \overrightarrow{a\big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v\big)}. \tag{9}$$

Рассмотрим четырехугольник

$$\Big\langle \big(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c\big), a, \big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v\big), \big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v\big) \Big\rangle. \tag{10}$$

Поскольку группа G полуабелева, то

$$\Big((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v)\Big)$$

$$= \Big(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v\Big)$$

$$= \Big(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v\Big)$$

$$= \Big((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v)\Big)\Big(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v\Big) = \big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v\big).$$

Следовательно,

$$\Big((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v)\Big) = \big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v\big). \tag{11}$$

На основании определения параллелограмма G и равенства (11) заключаем, что четырехугольник (10) является параллелограммом G.

Поскольку четырехугольник (10) — параллелограмм G, то из [4, определение 1] следует, что справедливо равенство

$$\overrightarrow{\big(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c\big)\big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v\big)} = \overrightarrow{a\big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v\big)}. \tag{12}$$

Откуда с учетом равенства (9) следует справедливость равенства (8).

Пусть равенство (8) выполняется. Докажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Перепишем равенство (8) в виде

$$\overrightarrow{\big(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c\big)\big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v\big)} = \overrightarrow{a\big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v\big)}. \tag{13}$$

Это возможно сделать, поскольку

$$\overrightarrow{ad} - \overrightarrow{bu} + \overrightarrow{cv} = \overrightarrow{a\big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v\big)}.$$

Из равенства (13) и определения параллелограмма следует, что четырехугольник

$$\Big\langle (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c), a, (du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v), (du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v) \Big\rangle \tag{14}$$

— параллелограмм G, а значит, справедливо равенство

$$((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}v)) = (du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}v). \tag{15}$$

Умножим обе части равенства (15) справа на выражение $v^{[-2]}\overset{2n-4}{v}u$. Имеем

$$\Big((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}vv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}u\Big)$$

$$= \Big(du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}vv^{[-2]}\overset{2n-4}{v}u\Big).$$

Поэтому с учетом нейтральности последовательностей $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}x$ и $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ для любого $x \in X$ имеем

$$\Big(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}du^{[-2]}\overset{2n-4}{u}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}u\Big) = d. \tag{16}$$

Из равенства (16) и на основании леммы 2 заключаем, что G — полуабелева n-арная группа. Теорема доказана.

При $n = 3$ из теоремы 2 вытекает [5, теорема 9.1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dörnte W.** Untersuchungen einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z. 1928. Bd. 29. S. 1–19.
2. **Prüfer H.** Theorie der abelshen Gruppen I. Grundeigenschaften // Math. Z. 1924. Bd. 20. S. 165–187.
3. **Post E.L.** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, № 2. P. 208–350.
4. **Русаков С.А.** Некоторые приложения теории n-арных групп. Минск: Беларуская навука, 1998. 182 с.
5. **Вакарелов Д.** Тернарни групи // Годишник Софийск. ун-та. Мат. фак-т 1966–1967, 1968. Т. 61. С. 71–105.
6. **Dudek W.A.** Ternary quasigroups connected with the affine geometry // Algebras Groups Geom. 1999. Vol. 16, no. 3. P. 329–354.
7. **Dudek W.A., Stojakovic N.A.** On Rusakov's n-ary rs-groups // Czechoslovak Math. J. 2001. Vol. 51(126), no. 2. P. 275–283.
8. **Glazek K., Gleichgewicht B.** Abelian groups // Math. Soc. J. Bolyai. 1977. Vol. 29. (Proc. Congr. Math. Soc. Universal Algebra, Esztergom, Hungary). P. 321–329.
9. **Baer R.** Linear algebra and projective geometry. New York: Academic Press, 1952. 318 p.
10. **Branzei D.** Structures affines et operations ternaries // Sti. Univ. Iasi. Sect. I a Mat. 1977. Vol. 23. P. 33–38.
11. **Kulazhenko Yu. I.** Semi-cummutativity criteria and self-coincidence of elements expressed by vectors properties of n-ary groups // Algebra and Discrete Math. 2010. Vol. 9, вып. 2. P. 98–107.
12. **Гальмак А.Г., Кулаженко Ю.И.** О полуабелевых, коммутативных и аффинных n-арных группах // Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения: тез. докл. X Междунар. конф. Волгоград, 2012. С. 20–23.
13. **Курош А.Г.** Общая алгебра: Лекции 1969/70 учебного года. М.: Наука, 1974. 160 с.
14. **Dudek W.A.** Varieties of polyadic groups // Filomat. 1995. No. 9, part 3. P. 657–674.
15. **Русаков С.А.** Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп. Минск: Беларуская навука, 1992. 264 с.
16. **Кулаженко Ю.И.** Векторы и критерии полуабелевости n-арных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 1(6). С. 65–68.

Кулаженко Юрий Иванович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Kulazhenko@gsu.by

Поступила 21.02.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

ПРИНЦИП КОМПРОМИССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

С. В. Лутманов

Вводится понятие компромиссного набора стратегий для дифференциальной игры нескольких лиц. Обосновывается способ его построения в классе позиционных стратегий. Построенный набор стратегий является компромиссным для любой начальной позиции из некоторого множества фазового пространства и обладает свойством динамической устойчивости. Рассмотрен модельный пример.

Ключевые слова: компромиссный набор стратегий, равновесие по Нэшу, дифференциальная игра, стабильный мост, экстремальное прицеливание

S. V. Lutamanov. The compromise principle in many-person differential games.

The concept of compromise set of strategies for a many-person differential game is proposed. The method of its construction in the class of positional strategies is validated. The constructed set of strategies is a compromise set for any initial position from some set in the phase space and possesses the property of dynamic stability. A model example is presented.

Keywords: compromise set of strategies, Nash equilibrium, differential game, stable bridge, extremal aiming.

Введение

Одна из основных проблем в исследовании неантагонистической игры состоит в выборе адекватного содержанию задачи понятия решения. Наиболее распространены подходы, основанные на равновесном или ε -равновесном по Нэшу решении. Оно обладает свойством устойчивости по отношению к игроку-уклонисту: единоличное отклонение от этого решения каким-либо игроком приводит к ухудшению результата уклониста в игре. Анализ особенностей концепции равновесия в теории игр можно найти, например, в книге [1].

В случае, когда в ходе многостороннего конфликта приходится учитывать динамику изменения состояния управляемой системы, его математической моделью служит дифференциальная игра нескольких лиц. К проблеме выбора принципа оптимальности здесь добавляется задача проверки его динамической устойчивости. Динамическая устойчивость принципа оптимальности заключается в том [2, с. 361], что он должен генерировать то же решение в любой подыгре, возникающей вдоль оптимальной траектории, выбранной игроками в начальный момент времени. Исследованиям в области дифференциальных игр нескольких лиц посвящены работы отечественных авторов М. И. Гусева, В. И. Жуковского, А. Ф. Клейменова, А. Ф. Кононенко, О. А. Малафеева, Л. А. Петросяна, Н. Н. Петрова, Э. Р. Смольякова, С. В. Чистякова и др. В работах [3; 4] приводятся некоторые результаты, полученные в этой области, и подробная библиография. Обзор результатов зарубежных авторов представлен в статье [5].

Важным аспектом построения математической модели конфликтно управляемого динамического объекта является формализация понятий стратегии игрока и движения объекта, отвечающих выбранному набору стратегий игроков. В настоящей работе принят подход, развиваемый в монографиях Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [6; 7] для антагонистических дифференциальных игр и обобщенный на случай игр нескольких лиц А. Ф. Клейменовым в работе [8]. При этом предполагается, что при реализации ломаных Эйлера назначения управляющих векторов осуществляются игроками в единые моменты времени, а прицеливание игроков на стабильные мосты производится с использованием единой ближайшей точки на мосту, если таких точек несколько.

В статье рассматривается неантагонистическая игра нескольких лиц, в которой интерес каждого игрока помимо минимизации своей платы состоит еще и в том, чтобы любой из его оппонентов не мог получить результат лучший (меньший) некоторой заданной величины. При этом собственный результат игрока должен быть не хуже (не больше) другой заданной величины. Описанная конфликтная ситуация имеет место, например, при выборах в представительный орган власти. В качестве функции платы игрока (политической партии) принимается число набранных им голосов (со знаком "минус") избирателей. Верхней оценкой для платы игрока будет служить пятипроцентный барьер, преодоление которого позволяет игроку получить места в органе власти. Нижней оценкой является показатель, равный 51 проценту набранных голосов, позволяющий партии получить абсолютное большинство. В работе принимается, что рациональное поведение участников описанного конфликта состоит в выборе компромиссного набора стратегий, обеспечивающего каждому игроку значение платы не хуже (не больше) верхней оценки. При этом никакое единоличное уклонение игрока от стратегии, предписываемой компромиссным набором, не позволяет ему получить значение платы лучше (меньше) нижней оценки платы.

1. Игра в нормальной форме

Под игрой (необязательно дифференциальной), записанной в нормальной форме, будем понимать тройку

$$\left(K, \{\{U_i\} \,|\, i \in K\}, \{I_i |\, i \in K\}\right),$$

где $K = \{1, \ldots, k\}$ — множество номеров игроков, $\{U_i\}$ — множество всех стратегий, $I_i : \{U_1\} \times \ldots \times \{U_k\} \to \mathbb{R}^1$ — функция платы i-го игрока, $i \in K$. Игра состоит в том, что каждый игрок выбирает независимо от других какую-либо стратегию из своего множества стратегий. В результате складывается ситуация $W = (U_1, \cdots, U_k)$, на которой вычисляется плата $I_i (U_1, \cdots, U_k)\,, \; i \in K$, каждого из игроков. Игрок заинтересован в минимизации своей платы. В этом разделе для простоты будем предполагать, что все встречающиеся по ходу изложения min функций платы существуют. Дополнительно предположим, что для значений плат каждого игрока заданы некоторые оценочные границы $S_* = (S_{1*}, \cdots, S_{k*})^T, \; S^* = (S_1^*, \cdots, S_k^*)^T, \; S_{i*} \leqslant S_i^*, \; i \in K$. В дальнейшем векторы $S_*, \; S^* \in \mathbb{R}^k$ будем называть соответственно *нижними и верхними компромиссными оценками плат* игроков. Классическое решение игры в форме равновесия (в том числе и ε-равновесия при малом $\varepsilon > 0$) в общем случае не обязано удовлетворять включениям $I_i \in [S_{i*}, S_i^*]\,, \; i \in K$. В связи с этим в работе [10] автором было предложено следующее определение рационального поведения участников рассматриваемой конфликтной ситуации.

О п р е д е л е н и е 1. Ситуация $W^{komp} \in \{W\}$ называется компромиссной по отношению к оценкам S_*, S^*, если для всех $i \in K$ справедливы неравенства

$$S_{i*} \leqslant \min_{U_i \in \{U_i\}} I_i \left(U_1^{komp}, \cdots, U_{i-1}^{komp}, U_i, U_{i+1}^{komp}, \cdots, U_k^{komp}\right)$$

$$\leqslant I_i \left(U_1^{komp}, \cdots, U_{i-1}^{komp}, U_i^{komp}, U_{i+1}^{komp}, \cdots, U_k^{komp}\right) \leqslant S_i^*.$$

Компромисс игроков заключается в том, что i-й игрок предпочитает несущественному улучшению результата в игре (лучше S_{i*} ему все равно не получить) не допустить значительного выигрыша любого из оппонентов, т. е. не допустить неравенство $I_j < S_{j*}, \; j \in K\,(i) = K \setminus \{i\}$, сохраняя при этом значение своей платы в пределах приемлемого для него неравенства $I_i \leqslant S_i^*$.

Заметим, что если некоторая ситуация является компромиссной относительно оценок S_*, S^*, то она будет ε-равновесной при $\varepsilon = \max\limits_{i \in K} \{S_i^* - S_{i*}\}$ и просто равновесной, если $S_i^* = S_{i*}$,

$i \in K$. Необходимыми условиями существования компромиссных ситуаций служат неравенства

$$S_{i*} \leqslant \min_{U_i \in \{U_i\}} \max_{(U_1,\cdots,U_{i-1},,U_{i+1}\cdots,U_k) \in \prod\limits_{j\in K(i)} \{U_j\}} I_i\left(U_1,\cdots,U_i,\cdots,U_k\right), \quad i \in K.$$

Интерес представляют примеры игр нескольких лиц, для которых равновесные по Нэшу наборы стратегий не обеспечивают выполнение верхних компромиссных оценок, т. е. для которых хотя бы для одного $i \in K$ (или для всех $i \in K$ одновременно) имеет место неравенство

$$S_i^* \leqslant I_i\left(U_1^0,\cdots,U_i^0,\cdots,U_k^0\right),$$

где $U_1^0,\cdots,U_i^0,\cdots,U_k^0-$ равновесный набор стратегий. Приведем пример статической игры, иллюстрирующей это утверждение.

П р и м е р 1. В игре участвуют три игрока. Каждый игрок независимо от других назначает точке, расположенной в начале координат плоскости $\mathbb{R}^2$, перемещение $u_i \in \mathbb{R}^2$, стесненное геометрическим ограничением

$$u_i \in P = \left\{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| p_1^2 + p_2^2 \leqslant 4\right\}, \quad i = 1,2,3.$$

Результирующее перемещение управляемой точки представляет собой геометрическую сумму выбранных игроками перемещений. На плоскости заданы множества

$$M_1 = \left\{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{(m_1+6)^2}{3^2} + \frac{(m_2-8)^2}{1^2} \leqslant 1\right\},$$

$$M_2 = \left\{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| (m_1)^2 + (m_2-8)^2 \leqslant 2^2\right\},$$

$$M_3 = \left\{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{(m_1-6)^2}{2^2} + \frac{(m_2-8)^2}{3^2} \leqslant 1\right\},$$

называемые целевыми множествами соответствующих игроков. Платой i-го игрока $i \in \{1,2,3\}$ служит расстояние от финального положения управляемой точки до целевого множества этого игрока. Неформальная цель каждого из игроков состоит в минимизации своей платы.

Равновесная ситуация $\left(u^{(1)0},u^{(2)0},u^{(3)0}\right)$ определяется из условий [9, с. 7]:

$$\left\langle u^{(i)0}, l^{(i)0}\right\rangle = \min_{u\in P}\left\langle u, l^{(i)0}\right\rangle,\ i=1,2,3,$$

где вектор $l^{(i)0}$ удовлетворяет равенству

$$\left\langle \sum_{j\in K(i)} u^{(j)0}, l^{(i)0}\right\rangle + \min_{u\in P}\left\langle u, l^{(i)0}\right\rangle - \max_{m\in M_i}\left\langle m, l^{(i)0}\right\rangle$$

$$= \max_{\|l\|=1}\left[\left\langle \sum_{j\in K(i)} u^{j(0)}, l\right\rangle + \min_{u\in P}\langle u,l\rangle - \max_{m\in M_i}\langle l,m\rangle\right],\ i=1,2,3,$$

и имеет вид

$$u^{(1)0} = \begin{pmatrix} -1.41388 \\ 1.41455 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)0} = \begin{pmatrix} -0.13594 \\ 1.99537 \end{pmatrix}, \quad u^{(3)0} = \begin{pmatrix} 1.80365 \\ 0.86420 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$I_1\left(u^{(1)0},u^{(2)0},u^{(3)0}\right) = 4.82066, \quad I_2\left(u^{(1)0},u^{(2)0},u^{(3)0}\right) = 1.73452,$$

$$I_3\left(u^{(1)0},u^{(2)0},u^{(3)0}\right) = 4.57083.$$

Построим ситуацию $\left(u^{(1)komp}, u^{(2)komp}, u^{(3)komp}\right)$, компромиссную относительно оценок

$$S_* = \begin{pmatrix} S_{1*} \\ S_{2*} \\ S_{3*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 0.5 \\ 3.1 \end{pmatrix},$$

$$S^* = \begin{pmatrix} S_1^* \\ S_2^* \\ S_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.7 \\ 1.6 \\ 4.4 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 4.82066 \\ 1.73452 \\ 4.57083 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\left(u^{(1)0}, u^{(2)0}, u^{(3)0}\right) \\ I_2\left(u^{(1)0}, u^{(2)0}, u^{(3)0}\right) \\ I_4\left(u^{(1)0}, u^{(2)0}, u^{(3)0}\right) \end{pmatrix}.$$

Для этого решим систему неравенств

$$\rho\big(u^{(1)komp} + u^{(2)komp} + u^{(3)komp},\ M_i\big) \leqslant S_i^*,$$

$$\min_{u\in P}\rho\Bigg(u + \sum_{j\in K(i)} u^{(j)komp},\ M_i\Bigg) \geqslant S_{i*}, \quad \left\|u^{(i)}\right\| \leqslant 2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Одним из ее решений будет набор векторов

$$u^{(1)komp} = \begin{pmatrix} -0.04442 \\ 1.84265 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)komp} = \begin{pmatrix} 0.160303 \\ 1.21335 \end{pmatrix}, \quad u^{(3)komp} = \begin{pmatrix} 0.1876 \\ 1.65735 \end{pmatrix}.$$

Для этого набора справедливы следующие соотношения:

$$S_{1*} = 3.3 < 3.94259 = \min_{u\in P} I_1\big(u, u^{(2)komp}, u^{(3)komp}\big) < 4.61618$$

$$= I_1\big(u^{(1)komp}, u^{(2)komp}, u^{(3)komp}\big) < 4.7 = S_1^*,$$

$$S_{2*} = 0.5 < 0.502277 = \min_{u\in P} I_2\big(u^{(1)komp}, u, u^{(3)komp}\big) < 1.6$$

$$= I_2\big(u^{(1)komp}, u^{(2)komp}, u^{(3)komp}\big) = 1.6 = S_2^*,$$

$$S_{3*} = 3.1 < 3.28599 = \min_{u\in P} I_3\big(u^{(1)komp}, u^{(2)komp}, u\big) < 4.347$$

$$= I_3\big(u^{(1)komp}, u^{(2)komp}, u^{(3)komp}\big) < 4.4 = S_3^*.$$

2. Дифференциальная игра нескольких лиц

Динамика системы описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_k), \tag{2.1}$$

где $t \in [t_0, T] \subset \mathbb{R}^1$ — текущее время, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор объекта, $u_i \in P_i \subset \mathbb{R}^{r_i}$ — вектор управляющих параметров i-го игрока, $f\colon \mathbb{R}^{1+n+r_1+\ldots+r_k} \to \mathbb{R}^n$ вектор-функция, описывающая как внутреннее устройство объекта, так и воздействие различных внешних факторов. Будем предполагать, что множества $P_i, i \in K$ компактны. Функция f непрерывна по совокупности переменных $t, x, u_1, \ldots, u_k$. Относительно правых частей дифференциальных уравнений (2.1) принимаются стандартные в теории дифференциальных игр предположения [6, с. 32].

Локальные условия Липшица имеют вид

$$\forall R > 0\ \exists \kappa > 0\colon \left\|f(t, x^{(1)}, u_1, \ldots, u_k) - f(t, x^{(2)}, u_1, \ldots, u_k)\right\| \leqslant \kappa\left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\|$$

$$\forall\, \|x^{(1)}\| \leqslant R,\ \|x^{(2)}\| \leqslant R, \quad t \in [t_0, T], \quad u_i \in P_i, \quad i \in K.$$

Условия продолжимости решения запишем как

$$\|f(t,x,u_1,\dots,u_k)\| \leqslant \lambda(1+\|x\|) \quad \forall\, t\in[t_0,T]\,, \quad u_i\in P, \quad i\in K.$$

Для всех $i\in K$ существует седловая точки в “маленькой i-игре”, т. е. для всех $i\in K$ выполняется неравенство

$$\min_{(u,\cdots,u_{i-1},u_{i+1},\cdots,u_k)\in\prod\limits_{j\in K(i)}P_j}\ \max_{u_i\in P_i} s\cdot f\left(t,x,u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_k\right)$$

$$=\max_{u_i\in P_i}\ \min_{(u,\cdots,u_{i-1},u_{i+1},\cdots,u_k)\in\prod\limits_{j\in K(i)}P_j} s\cdot f\left(t,x,u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_k\right)$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^{n+1}, \quad t\in[t_0,T]\,, \quad s\in\mathbb{R}^n.$$

Плата i-го игрока определяется формулой

$$I_i=\sigma_i\left(x(T)\right),$$

где $\sigma_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1,\ i\in K,$ — некоторая заданная непрерывная функция, $x\left(\cdot\right)$ — реализация фазового вектора объекта, а T — момент окончания игры. Свои управляющие параметры игрок назначает, основываясь на информации о текущем времени и реализовавшемся фазовом векторе объекта. При этом допускается, что в случае неоднозначной трактовки каких-либо элементов управляющей конструкции, игроки осуществляют выбор этих элементов единым для всех образом. В частности принимается, что физическая реализация управляющих воздействий игроков происходит в согласованные (в одни и те же для всех игроков) моменты времени.

Определение 2. Позиционной стратегией $u_i\left[\cdot\right]$ игрока $i\in K$ называется произвольная функция $u_i\colon\ [t_*,T]\times\mathbb{R}^n\to P_i$, где $t_*\in[t_0,T]$.

Пусть $L\subset K,\ L\neq\varnothing$ и $\{\,u_i\left[\cdot\right]|\,i\in L\}$ — набор произвольных позиционных стратегий множества игроков L и Δ — конечное разбиение отрезка времени $[t_*,T]$ точками $\tau_s,\ s=0,1,\cdots,$ $\tau_0=t_*$.

Определение 3. Ломаной Эйлера $x_\Delta\left(\cdot,t_*,x_0,\{\,u_i\left[\cdot\right]|\,i\in L\}\right)$, выходящей из позиции $\{t_*,x_0\}$ и порожденной набором позиционных стратегий $\{\,u_i\left[\cdot\right]|\,i\in L\}$, назовем всякую абсолютно непрерывную функцию $x_\Delta\left(\cdot\right)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_\Delta\left(t\right)=f\left(t,x_\Delta\left(t\right),u_1\left(t\right)\cdots,u_i\left(t\right),\cdots,u_k\left(t\right)\right),$$

$$x_\Delta\left(t_*\right)=x_0, \quad x_\Delta\left(\tau_s\right)=\lim_{t\to\tau_s-0}x_\Delta\left(t\right),$$

$$u_i\left(t\right)=u_i\left[\tau_s,x_\Delta\left(\tau_s\right)\right], \quad t\in\left[\tau_s,\tau_{s+1}\right), \quad i\in L, \quad s=0,1,\dots,$$

где $u_j\left(\cdot\right)$ является произвольной интегрируемой по Лебегу функцией со значениями во множестве $P_j,\ j\in K\backslash L$.

Определение 4. Движением, выходящим из позиции $\{t_*,x_0\}$ и порожденным набором позиционных стратегий $\{\,u_i\left[\cdot\right]|\,i\in L\}$ множества игроков $L\subset K$, будем называть всякую функцию $x\left(\cdot\right)$, для которой найдется последовательность ломаных Эйлера $x_{\Delta^{(p)}}(\cdot,t_*,x_0,\{u_i[\cdot]|$ $i\in L\}),\ p=1,2,\cdots$, равномерно сходящаяся к ней на промежутке времени $[t_*,T]$ при условии, что $\lim\limits_{p\to\infty}\sup\limits_s\left(\tau_{s+1}^{(p)}-\tau_s^{(p)}\right)=0$.

Совокупность всех движений, выходящих из позиции $\{t_*,x_0\}$ и порожденных набором позиционных стратегий $\{\,u_i\left[\cdot\right]|\,i\in L\}$, будем обозначать символом $X\left[t_*,x_0,\{\,u_i\left[\cdot\right]|\,i\in L\}\right]$ и называть пучком конструктивных движений, выходящих из позиции $\{t_*,x_0\}$ и порожденных набором позиционных стратегий $\{\,u_i\left[\cdot\right]|\,i\in L\}$ множества игроков $L\subset K$. В частности, если $L=\{i\}$, то ломанные Эйлера и пучок движений будем обозначать символами $x_\Delta\left(\cdot,t_*,x_0,u_i\left[\cdot\right]\right)$ и $X\left[t_*,x_0,u_i\left[\cdot\right]\right]$ соответственно. Известно [6, с. 38], что $X\left[t_*,x_0,\{u_i\left[\cdot\right]|i\in L\}\right]\neq\varnothing$ для всех $L\subset K$.

3. Построение компромиссных наборов стратегий

Уточним определение компромиссного набора стратегий игроков применительно к дифференциальным играм. Пусть

$$S_* = (S_{1*}, \cdots, S_{k*})^T, \quad S^* = (S_1^*, \cdots, S_k^*)^T, \quad S_*, S^* \in \mathbb{R}^k, \quad S_{i*} \leqslant S_i^*, \quad i \in K.$$

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что набор позиционных стратегий $u_1^{komp}[\cdot], \cdots,$ $u_k^{komp}[\cdot]$ всех игроков является компромиссным относительно оценок S_*, S^* для начальной позиции $\{t_*, x_*\}, t_* \in [t_0, T]$, если

$$I_i[x(\cdot)] \leqslant S_i^* \; \forall x(\cdot) \in X\big[t_*, x_*, \{u_i^{komp}[\cdot] \big| i \in K\}\big] \tag{3.1}$$

и

$$I_i[x(\cdot)] \geqslant S_{i*} \; \forall x(\cdot) \in X\big[t_*, x_*, \{u_j^{komp}[\cdot] \big| j \in K(i)\}\big] \tag{3.2}$$

Рассмотрим множества $M_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_i(x) < S_{i*}\}, \; i \in K$. Будем предполагать, что $M_i \cap M_j = \varnothing, \; i, j \in K$. Пусть $W_{K(i)} \subset [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$-максимальный стабильный мост первого игрока [6, с. 67] во вспомогательной дифференциальной игре двух лиц, в которой множество игроков $K(i)$, объединенных в одного игрока (первого), решает задачу наведения на множество M_i^c против игрока с номером i (второго игрока) в момент времени T. Для всех $i \in K$ полагаем $W_i = \left(W_{K(i)}\right)^c$.

Лемма. *Множества $W_i, \; i \in K$, попарно не пересекаются.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда найдутся номера $i, j \in K$ такие, что $W_i \cap W_j \neq \varnothing$. Пусть $\{t_*, x_*\} \in W_i \cap W_j$ и, следовательно, $\{t_*, x_*\} \notin W_{K(i)}, \; \{t_*, x_*\} \notin W_{K(j)}$. По теореме об альтернативе [6, с. 69] для начальной позиции $\{t_*, x_*\}$ разрешимы задачи уклонения в момент T игроков i и j от множеств M_i^c и M_j^c соответственно. Пусть $u_i^*[\cdot], u_j^*[\cdot]$ стратегии игроков i и j, решающие указанные задачи. Тогда должны выполняться включение $x(T) \in M_i$ для всех $x(\cdot) \in X[t_*, x_*, u_i^*[\cdot]]$ и включение $x(T) \in M_j$ для всех $x(\cdot) \in X[t_*, x_*, u_j^*[\cdot]]$. Последнее невозможно, так как

$$X[t_*, x_*, u_i^*[\cdot]] \cap X\left[t_*, x_*, u_j^*[\cdot]\right] \supset X[t_*, x_*, \{u_s^*[\cdot] | \, s \in \{i, j\}\}] \neq \varnothing,$$

а $M_i \cap M_j = \varnothing$. Лемма доказана.

Для произвольного множества $Z \subset [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ полагаем $Z(t) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, (t, x) \in Z\}$. Пусть существует множество $W \subset [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$, для которого выполняются следующие предположения:

1) $W(t) \neq \varnothing, t \in [t_0, T]$, — замкнутое множество;

2) $W(t) \cap W_i(t) = \varnothing, \; t \in [t_0, T], \; i \in K$;

3) $W(T) \subset M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \sigma_i(x) \leqslant S_i^*, i \in K\}$;

4) для любой позиции $\{t_*, x_*\} \in W$ и момента времени $t^* \in [t_*, T]$ существует набор программных управлений $u_{1*}(\cdot), \cdots, u_{k*}(\cdot), u_{i*}(t) \in P_i, t \in [t_*, t^*], i \in K$, всех игроков такой, что для решения $x(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, u_{1*}(t), \cdots, u_{i*}(t), \cdots, u_{k*}(t)), \quad x(t_*) = x_*$$

выполняется включение $x(t^*) \in W(t^*)$.

Заметим, что из условий 2) и равенства $W_i(T) = M_i, \; i \in K$, следует $M_i \cap M = \varnothing, \; i \in K$.

Набор стратегий $u_1^{komp}[\cdot], \cdots, u_k^{komp}[\cdot]$ всех игроков определим соотношениями

$$u_i^{komp}[\cdot] = \begin{cases} u_i^{eK}(t, x), & x \notin \Big(\bigcup\limits_{j \in K} W_j(t)\Big) \cup W, \\ u_i^{eK(j)}(t, x), & x \in W_j(t), \; j \in K(i), \\ \forall u_i \in P_i, & x \in W_i(t) \cup W, \end{cases} \quad t \in [t_0, T], \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Здесь набор векторов $u_i^{eK}(t,x)$, $i \in K$, удовлетворяет условию

$$s(t,x)\cdot f\big(t,x,u_1^{eK}(t,x),\cdots,u_i^{eK}(t,x),\cdots,u_k^{eK}(t,x)\big)$$

$$=\min_{(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_k)\in\prod\limits_{j\in K}P_j} s(t,x)\cdot f(t,x,u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_k),\tag{3.4}$$

$$s(t,x)=x-x_*,\ \|x-x_*\|=\min_{\tilde{x}\in W(t)}\|x-\tilde{x}\|,\tag{3.5}$$

а набор векторов $u_i^{eK(j)}(t,x)$, $i\in K(j)$, $j\in K$, — условию

$$\max_{u_j\in P_j} s^{(j)}(t,x)\cdot f\big(t,x,u_1^{K(j)e}(t,x),\cdots,u_j,\cdots,u_{j+1}^{K(j)e}(t,x),\cdots,u_k^{K(j)e}(t,x)\big)$$

$$=\min_{(u_1,\cdots,u_{j-1},u_{j+1},\cdots,u_k)\in\prod\limits_{j\in K(j)}P_j}\ \max_{u_j\in P_j} s^{(j)}(t,x)\cdot f(t,x,u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_k),\tag{3.6}$$

$$s^{(j)}(t,x)=x-x_*^{(j)},\quad \|x-x_*^{(j)}\|=\min_{\tilde{x}\in(W_j(t))^c}\|x-\tilde{x}\|.\tag{3.7}$$

Заметим, что минимум в (3.5) (или (3.7)) может достигаться более чем в одной точке x_* (или $x_*^{(j)}$). В силу сделанного выше замечания игроки при построении вектора $s(t,x)=x-x_*$ (или $s^{(j)}(t,x)=x-x_*^{(j)}$) в условиях (3.4) (или (3.6)) выбирают эту точку одной и той же для всех.

Теорема 1. *Набор стратегий всех игроков* $u_1^{komp}[\cdot],\cdots,u_k^{komp}[\cdot]$, *определенный соотношениями* (3.3)–(3.7), *является компромиссным относительно оценок* S_*,S^* *для любой начальной позиции* $\{t_*,x_*\}\in W$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в силу определения множества W и доказанной леммы выполнены условия

$$W_i(t)\cap W_j(t)=\varnothing,\quad t\in[t_0,T],\quad W(t)\cap W_i(t)=\varnothing,\quad t\in[t_0,T],\quad i,j\in K.$$

Следовательно, набор стратегий $u_1^{komp}[\cdot],\cdots,u_k^{komp}[\cdot]$ определен корректно. Для всех начальных позиций $\{t_*,x_*\}\in W$ установим справедливость неравенств (3.1). Действительно, множество W будем трактовать как стабильный мост, обрывающийся в момент времени T на множестве M в некоторой вспомогательной игре. В этой игре объединение всех игроков решает задачу наведения на множество M в момент времени T. Компромиссный набор стратегий в малой окрестности множества W представляет собой стратегию экстремального прицеливания объединения всех игроков на множество W. Тогда для любого движения $x(\cdot)\in X\big[t_*,x_*,\{u_i^{komp}[\cdot]\big|i\in K\}\big]$ выполнено включение $x(t)\in W(t)$, $t\in[t_*,T]$. В частности, $x(T)\in W(T)\subset M$, что и означает выполнение неравенства (3.1).

Неравенство (3.2) докажем от противного. Пусть неравенство нарушается для некоторой начальной позиции $\{t_*,x_*\}\in W$ и номера $i\in K$. Тогда найдется движение $x(\cdot)\in X\big[t_*,x_*,\{u_j^{komp}[\cdot]\big|j\in K(i)\}\big]$, для которого $x(T)\in M_i$. Множество $W_{K(i)}$ является максимальным стабильным мостом первого игрока, обрывающимся в момент времени T на множестве M_i^c, во вспомогательной дифференциальной игре двух лиц, описанной выше. Для позиций $\{t,x\}\in W_i$ набор стратегий $\big(u_1^{komp}[\cdot],\cdots u_{i-1}^{komp}[\cdot],u_{i+1}^{komp}[\cdot],\cdots,u_k^{komp}[\cdot]\big)$ можно трактовать как стратегию экстремального прицеливания [3, с. 58] первого игрока на множество $W_{K(i)}$ в указанной вспомогательной дифференциальной игре. Тогда из включения $\{t_*,x_*\}\in W\subset\bigcap_{i\in K}W_{K(i)}$ следует, что $x(T)\in M_i^c$ для всех $i\in K$. Получили противоречие с включением $x(T)\in M_i$. Теорема доказана.

Доказанная теорема допускает эквивалентную формулировку.

Теорема 2. *Пусть* $\{t_*, x_*\} \in W$. *Тогда по любому* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для всех ломаных Эйлера* $x_{\Delta^{(p)}}\big(\cdot, t_*, x_0, \big\{u_s^{komp}[\cdot] \big| s \in K\big\}\big)$, $x_{\Delta^{(p)}}\big(\cdot, t_*, x_0, \big\{u_s^{komp}[\cdot] \big| s \in K(i)\big\}\big)$, $i \in K$, *будут выполнены неравенства*

$$\sigma_i\big(x_{\Delta^{(p)}}\big(T, t_*, x_0, \big\{u_i^{komp}[\cdot] \big| s \in K\big\}\big)\big) \leqslant S_i^* + \varepsilon,$$

$$\sigma_i\big(x_{\Delta^{(p)}}\big(T, t_*, x_0, \big\{u_i^{komp}[\cdot] \big| s \in K(i)\big\}\big)\big) \geqslant S_i - \varepsilon.$$

Пусть начальная позиция принадлежит множеству W. В случае отсутствия уклонистов траектория управляемой точки будет лежать в множестве W. Следовательно, набор стратегий $\big(u_1^{komp}[\cdot], \cdots u_i^{komp}[\cdot], \cdots, u_k^{komp}[\cdot]\big)$ по прежнему будет компромиссен относительно оценок S_*, S^* для любой начальной позиции, взятой на траектории движения точки. Таким образом, компромиссный набор стратегий является динамически устойчивым.

Иллюстрацией к развиваемой теории может служить модельный пример, приведенный в работе [11]. В нем рассматривается дифференциальная игра трех лиц с “простой” динамикой и функциями платы, являющимися расстояниями от фазового вектора игры в конечный момент времени до соответствующих целевых множеств. По заданным компромиссным оценкам в примере строится система попарно не пересекающихся множеств W, W_1, W_2, W_3, удовлетворяющая условиям данного раздела, и на их базе реализуется компромиссное управление игроков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Харшаньи Д., Зельтен Р.** Общая теория выбора равновесия в играх. СПб.: Экономическая школа, 2001. 405 с.
2. **Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.** Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
3. **Жуковский В.И., Ушаков В.Н.** Дифференциальные игры со многими участниками: указ. лит. за 1984–1989 гг. / ИММ УрО АН СССР. Свердловск, 1990. 139 с.
4. **Жуковский В.И., Ухоботов В.И.** Дифференциальные игры со многими участниками: указ. лит. за 1989–1994 гг. / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1995. 123 с.
5. **Buckdahn R., Cardaliaguet P., Quincampoix M.** Some recent aspects of differential game theory // Dyn. Games Appl. 2011. Vol. 1, no. 1. P. 74–114.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1973. 455 с.
7. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
8. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 180 с.
9. **Лутманов С. В.** Необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в игре в перемещениях // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 2002. Вып. 34. С. 4–10.
10. **Лутманов С.В.** Математическая модель компромиссного управления в дифференциальной игре нескольких лиц // Изв. Ин-та математики и информатики. Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та. 2012. Вып. 1 (39). С. 86–87.
11. **Лутманов С.В., Чернышев К.А.** Реализация принципа компромисса в линейных дифференциальных играх // Вест. Перм. ун-та. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 2012. Вып. 3. (11). С. 42–49. (Математика, Механика, Информатика.)

Лутманов Сергей Викторович
Поступила 20.02.2013
канд. физ.-мат. наук, доцент
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: mpu@psu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 512.542

О СОВПАДЕНИИ ГРАФОВ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ КОНЕЧНОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ И ЕЕ СОБСТВЕННОЙ ПОДГРУППЫ[1]

Н. В. Маслова

Пусть G — конечная группа. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в $\omega(G)$, будем обозначать через $\pi(G)$. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G со множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда число rs принадлежит множеству $\omega(G)$. В настоящей работе получено описание всех случаев совпадения графов простых чисел конечной простой группы и ее собственной подгруппы.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, простой спектр, граф простых чисел (граф Грюнберга — Кегеля), максимальная подгруппа.

N. V. Maslova. On the coincidence of Grünberg–Kegel graphs of a finite simple group and its proper subgroup.

Let G be a finite group. The *spectrum* of G is the set $\omega(G)$ of orders of its elements. The subset of prime elements of $\omega(G)$ is denoted by $\pi(G)$. The spectrum $\omega(G)$ of a group G defines its *prime graph* (or *Grünberg–Kegel graph*) $\Gamma(G)$ with vertex set $\pi(G)$, in which any two different vertices r and s are adjacent if and only if the number rs belongs to the set $\omega(G)$. We describe all the cases when the prime graphs of a finite simple group and of its proper subgroup coincide.

Keywords: finite group, simple group, prime spectrum, prime graph (Grünberg–Kegel graph), maximal subgroup.

Памяти моего дедушки Маслова Николая Яковлевича

1. Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин "группа" в значении "конечная группа" и термин "граф" в значении "конечный граф без петель и кратных ребер".

Пусть G — группа. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в спектр группы G, будем называть *простым спектром группы* G и обозначать через $\pi(G)$. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, вершинами которого являются простые числа из $\pi(G)$, и две вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда число rs принадлежит множеству $\omega(G)$.

Группу G будем называть *минимальной относительно простого спектра* (соответственно, *минимальной относительно графа простых чисел*), если $\pi(G) \neq \pi(H)$ (соответственно, $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$) для любой собственной (эквивалентно, для любой максимальной) подгруппы H из G.

Во время беседы, имевшей место на Международной конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.Д. Мазурова (г. Новосибирск, июль 2013 г.), К. Паркер обратил внимание автора на исследование вопроса о совпадении графов простых чисел группы и ее собственной подгруппы. В настоящей работе этот вопрос исследуется для конечных простых групп.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), Совета по грантам Президента РФ (проект МК-3395.2012.1), фонда Дмитрия Зимина "Династия", Уральского отделения РАН (проект 14-1-НП-27) и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Легко понять, что группа, минимальная относительно простого спектра, минимальна относительно графа простых чисел. Основной массив конечных простых групп входит в класс групп, минимальных относительно простого спектра, как это вытекает из результата М. Либека, Ч. Прэгер и Я. Саксла [15], однако существует пять бесконечных серий и несколько отдельных конечных простых групп, которые не минимальны относительно простого спектра (более подробно см. лемму 3). В настоящей работе получено описание всех случаев совпадения графов простых чисел конечной простой группы и ее собственной подгруппы.

Критерий совпадения графов простых чисел знакопеременной группы и ее собственной подгруппы получен по модулю *расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха*.

Хорошо известна *бинарная гипотеза Гольдбаха*: для любого четного натурального числа $n \geq 4$ найдется пара простых чисел p и q таких, что $n = p + q$. На апрель 2012 г. она была проверена для всех четных чисел, не превосходящих $4 \cdot 10^{18}$ (см. [16; 17]). Ранее в [11] было доказано, что доля четных чисел, не представимых в виде суммы двух простых чисел, если они существуют, мала. Нам понадобится более сильное

Предположение. Каждое четное число n, большее 6, можно представить в виде суммы двух различных простых чисел, причем при $n > 38$ это представление неоднозначно.

Предположение верно для всех четных чисел до $4{\cdot}10^4$ (см. [19], последовательность $A002375$ в $OEIS$). Для бо́льших чисел оно следует из *расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха* [13, с. 32, гипотеза A, с. 38]: для любого четного числа $n \geq 4$ найдется пара простых чисел p и q таких, что $n = p + q$, причем асимптотическая формула количества $N_2(n)$ различных таких представлений числа n имеет вид

$$N_2(n) \sim 2C_2 \cdot n/(\log^2 n - 2\log n) \cdot \prod_{p \in I_n} \frac{p-1}{p-2},$$

где I_n — множество всех нечетных простых делителей числа n и

$$C_2 = \prod_{p \in I} (1 - 1/(p-1)^2) = 0.6601618158...,$$

где I — множество всех нечетных простых чисел. Расширенная бинарная гипотеза Гольдбаха проверена для всех четных чисел, не превосходящих 2^{40}, и указанная асимптотическая оценка для числа $N_2(n)$ является довольно точной (см. [16]). Заметим, что оценивающая функция быстро растет с ростом n.

Пусть q — натуральная степень простого числа p и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетного n и $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Будем обозначать через V векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n параметр ε называется знаком этой группы и соответствующего ей векторного пространства V.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть G — конечная простая группа и H — ее собственная подгруппа. Тогда $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $G = A_n$, *где n и $n-4$ — нечетные непростые числа, и* $H \cong A_{n-1}$;

(2) $G = PSp_4(q)$ *и* $H \cong PSL_2(q^2).\langle t\rangle$, *где q четно и t — полевой автоморфизм порядка* 2 *группы* $PSL_2(q^2)$;

(3) $G = PSp_8(2^w)$ *и* $H \cong SO_8^-(2^w)$;

(4) $G = P\Omega_8^+(q)$ *и* $H \cong P\Omega_7(q)$;

(5) $G = PSL_6(2)$ *и H — стабилизатор подпространства размерности* 1 *или* 5 *пространства* V;

(6) $G = A_6$ *и* $H \cong A_5$;
(7) $G = A_{10}$ *и* $H \cong (S_7 \times S_3) \cap A_{10}$;
(8) $G = PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$ *и* $H \in \{2^4 : A_5, S_6, S_5\}$;
(9) $G = PSp_6(2) \cong P\Omega_7(2)$ *и* $H \cong S_8$;
(10) $G = PSU_4(3)$ *и* $H \cong A_7$;
(11) $G = G_2(3)$ *и* $H \cong PSL_2(13)$;
(12) $G = M_{11}$ *и* $H \cong PSL_2(11)$;
(13) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ *и* $H \in \{2^6 : A_8, A_9, S_8\}$.
Пункт (1) *теоремы получен по модулю предположения.*

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [4; 7; 10; 14].

На основе классификации конечных простых групп М. Ашбахер в [8] описал большое семейство естественных геометрически определенных подгрупп конечных простых классических групп, которое было разбито им на восемь классов C_i $(1 \leq i \leq 8)$, называемых теперь *классами Ашбахера*. Подгруппы из классов Ашбахера конечных простых классических групп подробно описаны в [14], мы используем эти результаты.

Через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга группы G (ее наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа), через $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G для простого числа p, а через $Soc(G)$ — цоколь группы G (подгруппа, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами).

Наибольшая целая неотрицательная степень простого числа p, делящая натуральное число j, называется *p-частью* числа j и далее будет обозначаться через j_p.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество всех его простых делителей. Заметим, что в этих обозначениях для конечной группы G множество $\pi(|G|)$ — это в точности простой спектр $\pi(G)$ группы G. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой*.

Важным теоретико-числовым инструментом при работе с графом простых чисел конечной группы является следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть n и q — натуральные числа, $q \geq 2$ и $n \geq 3$. Если пара (q, n) отлична от $(2, 6)$, то существует простое число r, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из теоремы Жигмонди [18].

В обозначениях леммы 1 любое такое простое число r называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Заметим, что примитивный простой делитель числа $q^n - 1$ может быть определен неоднозначно. Например, $11^3 - 1 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, $11^2 - 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ и $11 - 1 = 2 \cdot 5$. Таким образом, примитивными простыми делителями числа $11^3 - 1$ являются простые числа 7 и 19. Множество примитивных простых делителей числа $q^n - 1$ будем обозначать через $R_n(q)$.

Если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(q, r) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается *мультипликативный порядок числа q по модулю r*, т. е. минимальное натуральное число m, удовлетворяющее условию $r \in R_m(q)$. Для нечетного q положим

$$e(2, q) = \begin{cases} 1, \text{ если } q \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ 2 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 2. *Если K — нормальная подгруппа группы L, $r, s \in \pi(K) \setminus \pi(|L : K|)$ и числа r и s не смежны в графе $\Gamma(K)$, то они не смежны в графе $\Gamma(L)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что числа r и s не смежны в графе $\Gamma(K)$ и смежны в графе $\Gamma(L)$. Тогда существует элемент $t \in L \setminus K$ порядка rs. Заметим, что $t \notin K$, следовательно, K — собственная подгруппа в $K\langle t\rangle$. С использованием соответствующей теоремы о гомоморфизме получаем, что $K\langle t\rangle/K \cong \langle t\rangle/(\langle t\rangle \cap K)$, следовательно, $|K\langle t\rangle : K| = |\langle t\rangle : \langle t\rangle \cap K|$. Теперь заметим, что $\pi(|K\langle t\rangle : K|) \subseteq \pi(|L : K|)$ и $\pi(|\langle t\rangle : \langle t\rangle \cap K|) \subseteq \{r, s\}$. Таким образом, $|\langle t\rangle : \langle t\rangle \cap K| = 1$, следовательно, $t \in K$. Получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — конечная простая группа и существует собственная подгруппа H группы G такая, что $\pi(H) = \pi(G)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$G = A_n$, где n — непростое число, и $A_k \leq H \leq S_k \times S_{n-k}$, где $1 \leq k < n$ и интервал (k, n) не содержит простых чисел;*

(2) *$G = PSp_4(q)$ и H содержит нормальную подгруппу, изоморфную $PSp_2(q^2)$;*

(3) *$G = PSp_{2m}(q)$, где m и q четны, и H содержит нормальную подгруппу, изоморфную $\Omega^-_{2m}(q)$;*

(4) *$G = P\Omega_{2m+1}(q)$, где m четно и q нечетно, и H содержит нормальную подгруппу, изоморфную $\Omega^-_{2m}(q)$;*

(5) *$G = P\Omega^+_{2m}(q)$, где m четно, и H содержит нормальную подгруппу, изоморфную $\Omega_{2m-1}(q)$;*

(6) *$G = PSL_6(2)$ и либо H — стабилизатор подпространства размерности 1 или 5 пространства V, либо $H \cong PSL_5(2)$;*

(7) *$G = PSU_4(2)$ и либо $H \leq 2^4.A_5$, либо $H \leq S_6$;*

(8) *$G = PSp_6(2)$ и H изоморфна группе из множества $\{S_8, A_8, S_7, A_7\}$;*

(9) *$G = P\Omega^+_8(2)$ и либо H — подгруппа стабилизатора вполне сингулярного подпространства размерности 1, 3 или 4 пространства V, либо $H \leq A_9$;*

(10) *$G = PSU_4(3)$ и либо $H \cong PSL_3(4)$, либо $H \cong A_7$;*

(11) *$G = G_2(3)$ и $H \cong PSL_2(13)$;*

(12) *$G = M_{11}$ и $H \cong PSL_2(11)$;*

(13) *$G = PSU_3(3)$ и $H \cong PSL_2(7)$;*

(14) *$G = PSU_3(5)$ и $H \cong A_7$;*

(15) *$G = PSU_5(2)$ и $H \cong PSL_2(11)$;*

(16) *$G = PSU_6(2)$ и $H \cong M_{22}$;*

(17) *$G = PSp_4(7)$ и $H \cong A_7$;*

(18) *$G = {}^2F_4(2)'$ и $H \cong PSL_2(25)$;*

(19) *$G = M_{12}$ и либо $H \cong PSL_2(11)$, либо $H \cong M_{11}$;*

(20) *$G = M_{24}$ и $H \cong M_{23}$;*

(21) *$G = HS$ и $H \cong M_{22}$;*

(22) *$G = McL$ и $H \cong M_{22}$;*

(23) *$G = Co_2$ и $H \cong M_{23}$;*

(24) *$G = Co_3$ и $H \cong M_{23}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из [15, следствие 5, табл. 10.7].

Заметим, что виду [10] имеем $\Omega_{2m-1}(q) \cong P\Omega_{2m-1}(q)$ и $\Omega^-_{2m}(q) \cong P\Omega^-_{2m}(q)$ при четном m или четном q.

Лемма 4. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$, где q — степень простого числа p и $n \geq 2$, и $r, s \in \pi(G)$. Тогда числа r и s не смежны в графе $\Gamma(G)$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$r, s \notin \{2, p\}$, $1 < e(r, q) \leq e(s, q)$, $e(r, q) + e(s, q) > n$ и $e(r, q)$ не делит $e(s, q)$;*

(2) *$s = p$, $r \neq p$ нечетно и $e(r, q) > n - 2$;*

(3) *$s = p$, $n = 2$ и $2 = r \neq p$;*

(4) *$s = p$, $n = 3$, $3 = r \neq p$ и $(q - 1)_3 = 3$;*

(5) r *делит* $q-1$, $s \notin \{2,p\}$, $e(s,q) = n$ *и* $n_r < (q-1)_r$;
(6) r *делит* $q-1$, $s \notin \{2,p\}$, $e(s,q) = n$, $n_r = (q-1)_r > 2$;
(7) r *делит* $q-1$, $s \notin \{2,p\}$, $e(s,q) = n-1$ *и* $(q-1)_r \leq n_r$.

Доказательство. Следует из [1, предложения 2.1, 3.1, 4.1].

Положим

$$\eta(m) = \begin{cases} m, & \text{если } m \text{ нечетно,} \\ m/2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 5. *Пусть* $G = B_n(q) \cong P\Omega_{2n+1}(q)$ *или* $C_n(q) \cong PSp_{2n}(q)$, *где* $n \geq 2$ *и* q *— степень простого числа* p, *и* $r, s \in \pi(G)$. *Тогда числа* r *и* s *не смежны в графе* $\Gamma(G)$ *в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий*:

(1) $r, s \notin \{2,p\}$, $1 \leq \eta(e(r,q)) \leq \eta(e(s,q))$, $\eta(e(r,q)) + \eta(e(s,q)) > n$ *и* $e(s,q)/e(r,q)$ *не является нечетным натуральным числом*;
(2) $s = p$, $r \neq p$ *и* $\eta(e(r,q)) > n-1$;
(3) $r \notin \{2,p\}$, $s = 2 \neq p$, $\eta(e(r,q)) = n$ *нечетно и* $e(r,q) = (3-e(2,q))n$;
(4) $r \notin \{2,p\}$, $s = 2 \neq p$, $\eta(e(r,q)) = n$ *четно и* $e(r,q) = 2n$.

Доказательство. Следует из [1, предложения 3.1, 4.3] и [2, предложение 2.4].

Лемма 6. *Пусть* $G = D_n^{\varepsilon}(q) \cong P\Omega_{2n}^{\varepsilon}(q)$, *где* $n \geq 4$, q *— степень простого числа* p *и* $\varepsilon \in \{+,-\}$, *и* $r, s \in \pi(G)$. *Тогда числа* r *и* s *не смежны в графе* $\Gamma(G)$ *в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий*:

(1) $r, s \notin \{2,p\}$, $1 \leq \eta(e(r,q)) \leq \eta(e(s,q))$, $2\eta(e(r,q)) + 2\eta(e(s,q)) > 2n - (1 - \epsilon(-1)^{e(r,q)+e(s,q)})$, $e(s,q)/e(r,q)$ *не является нечетным натуральным числом и при* $\epsilon = +$ *не выполняется цепочка равенств* $n = 2e(r,q) = e(s,q) = 2\eta(e(r,q)) = 2\eta(e(s,q))$;
(2) $s = p$, $r \neq p$ *и* $\eta(e(r,q)) > n-2$;
(3) $r \notin \{2,p\}$, $s = 2 \neq p$, $\eta(e(r,q)) = n$ *и* $(4, q^n - \epsilon 1) = (q^n - \epsilon 1)_2$;
(4) $r \notin \{2,p\}$, $s = 2 \neq p$, $\eta(e(r,q)) = e(r,q) = n-1$ *нечетно,* $\varepsilon = +$ *и* $e(2,q) = 2$;
(5) $r \notin \{2,p\}$, $s = 2 \neq p$, $\eta(e(r,q)) = e(r,q)/2 = n-1$, $\varepsilon = +$ *и* $e(2,q) = 1$;
(6) $r \notin \{2,p\}$, $s = 2 \neq p$, $\eta(e(r,q)) = e(r,q)/2 = n-1$ *четно,* $\varepsilon = -$ *и* $e(2,q) = 2$.

Доказательство. Следует из [1, предложения 3.1, 4.4] и [2, предложение 2.5].

Лемма 7. *Пусть* G *— конечная группа такая, что* $\pi(G) = \{2,3,5,7\}$, *граф* $\Gamma(G)$ *имеет две компоненты связности* $\{2,3,5\}$ *и* $\{7\}$ *и* $G/F(G) \cong A_8$ *или* S_8. *Тогда* $F(G) = O_2(G)$, *и каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $G/F(G)$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(2)G/F(G)$*-модулю.*

Доказательство. Следует из [5, теорема 6].

Лемма 8. *Пусть* G *— конечная группа с нетривиальной нормальной* 2*-подгруппой* Q *такой, что* $G/Q \cong A_7$. *Предположим, что элемент порядка* 5 *из* G *действует без неподвижных точек на* Q. *Тогда расширение* G *над* Q *расщепляемо,* Q *элементарная абелева и* Q *есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы* G, *каждая из которых как* $GF(2)G/Q$*-модуль изоморфна одному из двух* 4*-мерных неприводимых* $GF(2)A_7$*-модулей, сопряженных относительно внешнего автоморфизма группы* A_7.

Доказательство. Следует из [6, теорема].

3. Графы Грюнберга — Кегеля некоторых максимальных подгрупп конечных простых групп

Предложение 1. *Пусть $G \cong PSp_4(q)$, где $q > 2$ — степень простого числа p, и H — максимальная подгруппа в G, содержащая нормальную подгруппу, изоморфную $PSL_2(q^2)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *q нечетно, $q \neq 3$ и $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$;*

(2) *q четно или $q = 3$, H — расщепляемое расширение группы $PSL_2(q^2)$ посредством группы ее полевых автоморфизмов порядка 2, $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ и $\Gamma(G) \neq \Gamma(Soc(H))$.*

Доказательство. Максимальные подгруппы группы $G = PSp_4(q)$ известны, ввиду [9, табл. 8.14, 8.22] подгруппа H — расщепляемое расширение группы $PSL_2(q^2)$ посредством ее группы автоморфизмов порядка 2 и $Soc(H) \cong PSL_2(q^2)$.

Пусть q нечетно и $q \neq 2^w + 1$. Тогда существует нечетное простое число r такое, что r делит $q-1$, т.е. $e(r,q) = \eta(e(r,q)) = e(r,q^2) = 1$.

Пусть $q = 2^w + 1 \neq 3$. Тогда $4 < q+1 = 2^w + 2 \equiv 2 \pmod 4$, следовательно, $q+1$ не является степенью числа 2. Значит, существует нечетное простое число r такое, что r делит $q+1$. Поскольку $(q+1, q-1) = 2$, то r не делит $q-1$, следовательно, $e(r,q) = 2$ и $\eta(e(r,q)) = e(r,q^2) = 1$.

Итак, если $q \neq 3$ нечетно, то существует нечетное простое число $r \in \pi(G)$ такое, что $\eta(e(r,q)) = e(r,q^2) = 1$. Ввиду леммы 4 числа r и p не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$, и поскольку r и p нечетны, то ввиду леммы 2 они не смежны в графе $\Gamma(H)$. В то же время ввиду леммы 5 числа r и p смежны в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$.

Пусть теперь $q > 2$ четно и $r, s \in \pi(G)$.

Если числа r и s нечетны, то ввиду леммы 2 они смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Заметим, что $e(r,q), e(s,q) \in \{1,2,4\}$, следовательно, $\eta(e(r,q)), \eta(e(s,q)) \in \{1,2\}$. Пусть числа r и s смежны в графе $\Gamma(G)$, без ограничения общности предположим, что $1 \leq \eta(e(r,q)) \leq \eta(e(s,q))$. Тогда из леммы 5 получаем, что $e(s,q)/e(r,q)$ — нечетное натуральное число или $\eta(e(r,q)) + \eta(e(s,q)) \leq 2$. В первом случае $e(r,q^2) = e(s,q^2)$, следовательно, ввиду леммы 4 получаем, что числа r и s смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Если $\eta(e(r,q)) + \eta(e(s,q)) \leq 2$, то $\eta(e(r,q)) = \eta(e(s,q)) = 1$, снова $e(r,q^2) = e(s,q^2)$, поэтому числа r и s смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$.

Пусть r — нечетное простое число, смежное в графе $\Gamma(G)$ с 2. Тогда ввиду леммы 5 имеем $\eta(e(r,q)) \leq 1$, поэтому $e(r,q) \in \{1,2\}$. При четном q группа $PSL_2(q^2) \cong Soc(H)$ не имеет нетривиальных диагональных и графовых автоморфизмов. Поэтому ввиду [12, определение 2.5.13, предложение 4.9.1] имеем $C_{PSL_2(q^2)}(t) \cong PSL_2(q)$, следовательно, r делит $|C_{PSL_2(q^2)}(t)|$, таким образом, числа r и 2 смежны в графе $\Gamma(H)$. Отсюда $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Заметим теперь, что при четном q в графе $\Gamma(Soc(H))$ число 2 является изолированной вершиной ввиду леммы 4. Однако ввиду леммы 5 в графе $\Gamma(G)$ число 2 смежно с любым простым делителем числа $q-1$. Таким образом, $\Gamma(G) \neq \Gamma(Soc(H))$.

Пусть $q = 3$. Ввиду [10] имеем $H \cong S_6$, $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ и $\Gamma(G) \neq \Gamma(Soc(H))$.

Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть m четно, q — степень простого числа p, $G \cong P\Omega_{2m+1}(q) \cong B_m(q)$ и H — максимальная подгруппа в G, содержащая нормальную подгруппу ${}^2D_m(q) \cong P\Omega^-_{2m}(q)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *q четно, $m = 4$, $H \cong SO^-_8(q)$, $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ и $\Gamma(G) \neq \Gamma(Soc(H))$;*

(2) *q нечетно или $m > 4$ и $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$.*

Доказательство. Заметим, что при четном m

$$|P\Omega_{2m+1}(q)| = \frac{q^{m^2}}{(q-1,2)} \prod_{i=1}^{m} (q^{2i} - 1) \text{ и } |P\Omega^-_{2m}(q)| = \frac{q^{m(m-1)}(q^m + 1)}{(q-1,2)} \prod_{i=1}^{m-1} (q^{2i} - 1).$$

Рассмотрим случай $m = 4$.

Пусть q четно. Максимальные подгруппы группы $G = PSp_8(q) \cong P\Omega_9(q)$ известны, ввиду [9, табл. 8.48] имеем, что $H \cong SO_8^-(q)$ — подгруппа из класса Ашбахера C_8 группы $PSp_8(q)$, и $Soc(H) \cong P\Omega_8^-(q)$.

Пусть r и s — два нечетных простых числа, смежных в графе $\Gamma(G)$. Тогда $e(r,q), e(s,q) \in \{1,2,3,4,6,8\}$, следовательно, $\eta(e(r,q)), \eta(e(s,q)) \in \{1,2,3,4\}$. Без ограничения общности предположим, что $1 \leq \eta(e(r,q)) \leq \eta(e(s,q))$. Тогда из леммы 5 получаем, что $e(s,q)/e(r,q)$ — нечетное натуральное число или $\eta(e(r,q)) + \eta(e(s,q)) \leq 4$. В первом случае ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Во втором случае имеем $(\eta(s,q), \eta(r,q)) \in \{(3,1),(2,2),(2,1),(1,1)\}$. Рассмотрим подробно этот случай.

Предположим, что числа $e(r,q)$ и $e(s,q)$ имеют разную четность. Тогда

$$8 - (1 - (-1)(-1)^{e(r,q)+e(s,q)}) = 8,$$

поэтому ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$.

Предположим, что числа $e(r,q)$ и $e(s,q)$ оба нечетны. Тогда $(e(s,q), e(r,q)) \in \{(1,1),(3,1)\}$, поэтому $e(s,q)/e(r,q)$ — нечетное натуральное число, следовательно, ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$.

Пусть числа $e(r,q)$ и $e(s,q)$ оба четны. Тогда $(e(s,q), e(r,q)) \in \{(6,2),(4,4),(4,2),(2,2)\}$. В первых двух случаях $e(s,q)/e(r,q)$ — нечетное натуральное число, следовательно, ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. В последних двух случаях

$$2\eta(e(s,q)) + 2\eta(e(r,q)) \leq 6 = 8 - (1 - (-1)(-1)^{e(r,q)+e(s,q)}).$$

Поэтому снова ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$.

Пусть r — нечетное простое число, смежное с 2 в графе $\Gamma(G)$. Тогда ввиду леммы 5 имеем $\eta(e(r,q)) \leq 3$. Если $\eta(e(r,q)) \in \{1,2\}$, то ввиду леммы 6 числа r и 2 смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Если $\eta(e(r,q)) = 3$, то $e(r,q) \in \{3,6\}$. Ввиду [10] имеем, что $H \cong SO_8^-(q) \cong Soc(H).\langle t\rangle$, где t — автоморфизм порядка 2 группы $Soc(H) \cong P\Omega_8^-(q)$. Ввиду [12, определение 2.5.13, предложение 4.9.2] $C_{P\Omega_8^-(q)}(t) \cong P\Omega_7(q)$. Поскольку $|P\Omega_7(q)| = q^9(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$ при четном q, число r делит $|C_{P\Omega_8^-(q)}(t)|$, поэтому числа r и 2 смежны в графе $\Gamma(H)$. Таким образом, $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Заметим также, что ввиду леммы 1 существует нечетное простое число $r \in \pi(Soc(H))$ такое, что $e(r,q) = \eta(e(r,q)) = 3$. Ввиду леммы 6 числа r и 2 не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$, а ввиду леммы 5 они смежны в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $\Gamma(G) \neq \Gamma(Soc(H))$.

Пусть q нечетно. Максимальные подгруппы группы $G = P\Omega_9(q)$ известны, ввиду [9, табл. 8.58] имеем, что $H \cong P\Omega_8^-(q).2$ — подгруппа из класса Ашбахера C_1 группы $P\Omega_9(q)$ и $Soc(H) \cong P\Omega_8^-(q)$. Ввиду леммы 1 имеем $R_3(q) \neq \varnothing$. Пусть $r \in R_3(q)$. Легко понять, что число r нечетно и $e(r,q) = \eta(e(r,q)) = 3$. Поэтому ввиду леммы 6 числа r и p не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Отсюда ввиду леммы 2 числа r и p не смежны в графе $\Gamma(H)$. Однако ввиду леммы 5 числа r и p смежны в $\Gamma(G)$. Таким образом, $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$.

Пусть $m > 4$ и $q = p^f$. По теореме Ашбахера [8] для подгруппы H имеются только две возможности: $H \in \cup_{i=1}^{8}(C_i(G))$ или H — почти простая группа. В первом случае ввиду [14, табл. 3.5.C, 3.5.D, предложения 4.8.6, 4.1.6] имеем, что $H \cong SO_{2m}^-(q)$ при четном q, $H \cong P\Omega_{2m}^-(q).2$ при нечетном q и $Soc(H) \cong P\Omega_{2m}^-(q)$; во втором случае $Soc(H) \cong P\Omega_{2m}^-(q)$, и индекс $|G:H|$ делит

$$|Out(Soc(H))| = \begin{cases} 2f, & \text{если } q \text{ четно,} \\ 4f, & \text{если } q \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пусть $m = 6$. Поскольку $3 < 4f \neq 6$ и $3 < 8f \neq 6$, ввиду леммы 1 имеем $R_{4f}(p) \neq \varnothing$ и $R_{8f}(p) \neq \varnothing$. Пусть $r \in R_{4f}(p)$ и $s \in R_{8f}(p)$. Легко понять, что числа r и s нечетны и ввиду малой теоремы Ферма не делят f. Поэтому ввиду леммы 2 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$

тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Заметим, что $e(r,q)=4$ и $e(s,q)=8$, поэтому $e(s,q)/e(r,q)$ не является нечетным натуральным числом, $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))=2+4=6$ и $2m-(1+(-1)^{e(s,q)+e(r,q)})=10$, т. е. ввиду леммы 5 числа r и s смежны в графе $\Gamma(G)$ и ввиду леммы 6 не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Таким образом, $\Gamma(G)\neq\Gamma(H)$.

Положим $f'=f/f_2$ и $q'=p^{f_2}$.

Пусть $m\geq 10$ и $m/2$ нечетно. Поскольку $(m/2-2)f'$ и $(m/2+2)f'$ — нечетные числа, не меньшие 3, ввиду леммы 1 имеем $R_{(m/2-2)f'}(q')\neq\varnothing$ и $R_{(m/2+2)f'}(q')\neq\varnothing$. Пусть $r\in R_{(m/2-2)f'}(q')$ и $s\in R_{(m/2+2)f'}(q')$. Легко понять, что числа r и s нечетны и ввиду малой теоремы Ферма не делят f. Поэтому ввиду леммы 2 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Заметим, что $e(r,q)=m/2-2$ и $e(s,q)=m/2+2$, поэтому $e(s,q)/e(r,q)=1+4/(m/2-2)$ не является нечетным натуральным числом при $m\geq 10$, $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))=m$ и $2m-(1+(-1)^{e(s,q)+e(r,q)})=2m-2$, значит, ввиду леммы 5 числа r и s смежны в графе $\Gamma(G)$ и ввиду леммы 6 не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Таким образом, $\Gamma(G)\neq\Gamma(H)$.

Пусть $m\geq 8$ и $m/2$ четно. Поскольку $(m/2-1)f'$ и $(m/2+1)f'$ — нечетные числа, не меньшие 3, ввиду леммы 1 имеем $R_{(m/2-1)f'}(q')\neq\varnothing$ и $R_{(m/2+1)f'}(q')\neq\varnothing$. Пусть $r\in R_{(m/2-1)f'}(q')$ и $s\in R_{(m/2+1)f'}(q')$. Легко понять, что числа r и s нечетны и ввиду малой теоремы Ферма не делят f. Поэтому ввиду леммы 2 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Заметим, что $e(r,q)=m/2-1$ и $e(s,q)=m/2+1$, поэтому $e(s,q)/e(r,q)=1+2/(m/2-1)$ не является нечетным натуральным числом при $m\geq 8$, $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))=m$ и $2m-(1+(-1)^{e(s,q)+e(r,q)})=2m-2$, откуда ввиду леммы 5 числа r и s смежны в графе $\Gamma(G)$ и ввиду леммы 6 не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Таким образом, $\Gamma(G)\neq\Gamma(H)$.

Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть $m\geq 4$ четно, q — степень простого числа p, $G\cong P\Omega^+_{2m}(q)\cong D_m(q)$ и H — максимальная подгруппа в G, содержащая нормальную подгруппу, изоморфную $B_{m-1}(q)\cong P\Omega_{2m-1}(q)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$m=4$, $H\cong P\Omega_7(q)$ и $\Gamma(G)=\Gamma(H)$;*

(2) *$m>4$ и $\Gamma(G)\neq\Gamma(H)$.*

Доказательство. Заметим, что при четном m

$$|P\Omega^+_{2m}(q)|=\frac{q^{m(m-1)}(q^m-1)}{(2,q-1)^2}\prod_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1) \text{ и } |P\Omega_{2m-1}(q)|=\frac{q^{(m-1)^2}}{(2,q-1)}\prod_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1).$$

Пусть $m=4$. Максимальные подгруппы группы $G=P\Omega^+_8(q)$ известны, ввиду [9, табл. 8.50] имеем, что $H\cong P\Omega_7(q)$ — подгруппа из класса Ашбахера C_1 группы $P\Omega^+_8(q)$.

Пусть r и s — нечетные простые числа, отличные от p и смежные в графе $\Gamma(G)$, и $1\leq\eta(e(r,q))\leq\eta(e(s,q))$. Заметим, что $e(r,q),e(s,q)\in\{1,2,3,4,6\}$, следовательно, $\eta(e(r,q))$, $\eta(e(s,q))\in\{1,2,3\}$. Тогда ввиду леммы 6 выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $2\eta(e(r,q))+2\eta(e(s,q))\leq 8-(1-(-1)^{e(r,q)+e(s,q)})$;

(2) $e(s,q)/e(r,q)$ является нечетным натуральным числом;

(3) выполняется цепочка равенств $4=2e(r,q)=e(s,q)=2\eta(e(r,q))=2\eta(e(s,q))$.

Заметим, что цепочка равенств в (3) нарушается при любом q. Если выполняется условие (2), то ввиду леммы 5 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$.

Пусть выполняется условие (1). Если при этом числа $e(r,q)$ и $e(s,q)$ имеют разную четность, то $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))\leq 3$, откуда и из леммы 5 следует, что числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$.

Если числа $e(r,q)$ и $e(s,q)$ имеют одинаковую четность, то $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))\leq 4$, откуда либо $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))\leq 3$ и числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$ ввиду леммы 5, либо $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))=4$, поэтому $(\eta(e(r,q)),\eta(e(s,q)))\in\{(1,3),(2,2)\}$. Значит, $(e(r,q),e(s,q))\in$

$\{(1,3),(2,6),(4,4)\}$, следовательно, $e(s,q)/e(r,q)$ является нечетным натуральным числом, откуда ввиду леммы 5 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$.

Если $r \neq p$ — нечетное простое число, то ввиду лемм 5 и 6 числа r и p смежны в графе $\Gamma(G)$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(H)$.

Пусть p нечетно и $r \neq p$ — нечетное простое число, не смежное с числом 2 в графе $\Gamma(H)$. Тогда ввиду леммы 5 имеем $\eta(e(r,q)) = 3$ и $e(r,q) = 3\cdot(3-e(2,q))$. Если $q \equiv 1 \pmod 4$, то $e(2,q)=1$, $e(r,q)=3\cdot(3-1)=6$ и $\eta(e(r,q))=3$, откуда ввиду леммы 6 числа r и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$, то $e(2,q)=2$, $e(r,q)=3\cdot(3-2)=3$ и $\eta(e(r,q))=3$, откуда ввиду леммы 6 числа r и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$. Таким образом, при $m=4$ выполняется равенство $\Gamma(G)=\Gamma(H)$.

Пусть $m>4$ и $q=p^f$. По теореме Ашбахера [8] для подгруппы H имеются только две возможности: $H \in \cup_{i=1}^{8}(C_i(G))$ или H — почти простая группа. В первом случае ввиду [14, табл. 3.5.E, предложения 4.1.6, 4.1.7] имеем $H \cong P\Omega_{2m-1}(q)$; во втором случае $Soc(H) \cong P\Omega_{2m-1}(q)$, и индекс $|G:H|$ делит

$$|Out(Soc(H))| = \begin{cases} f, & \text{если } q \text{ четно} \\ 2f, & \text{если } q \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пусть $m=6$. Поскольку $3<4f\neq 6$ и $3<8f\neq 6$, ввиду леммы 1 имеем $R_{4f}(p)\neq\varnothing$ и $R_{8f}(p)\neq\varnothing$. Пусть $r\in R_{4f}(p)$ и $s\in R_{8f}(p)$. Легко понять, что числа r и s нечетны и ввиду малой теоремы Ферма не делят f. Поэтому ввиду леммы 2 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Заметим, что $e(r,q)=4=2\eta(e(r,q))$ и $e(s,q)=8=2\eta(e(s,q))$, поэтому $e(s,q)/e(r,q)$ не является нечетным натуральным числом, $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))=2+4=6$ и $2m-(1-(-1)^{e(s,q)+e(r,q)})=12$. Значит, ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(G)$ и ввиду леммы 5 не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Таким образом, $\Gamma(G)\neq\Gamma(H)$.

Положим $f'=f/f_2$ и $q'=p^{f_2}$.

Пусть $m\geq 10$ и $m/2$ нечетно. Поскольку $(m/2-2)f'$ и $(m/2+2)f'$ — нечетные числа, не меньшие 3, ввиду леммы 1 имеем $R_{(m/2-2)f'}(q')\neq\varnothing$ и $R_{(m/2+2)f'}(q')\neq\varnothing$. Пусть $r\in R_{(m/2-2)f'}(q')$ и $s\in R_{(m/2+2)f'}(q')$. Легко понять, что числа r и s нечетны и ввиду малой теоремы Ферма не делят f. Поэтому ввиду леммы 2 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Заметим, что $e(r,q)=m/2-2$ и $e(s,q)=m/2+2$, поэтому $e(s,q)/e(r,q)=1+4/(m/2-2)$ не является нечетным натуральным числом при $m\geq 10$, $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))=m$ и $2m-(1-(-1)^{e(s,q)+e(r,q)})=2m$. Значит, ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(G)$ и ввиду леммы 5 не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Таким образом, $\Gamma(G)\neq\Gamma(H)$.

Пусть $m\geq 8$ и $m/2$ четно. Поскольку $(m/2-1)f'$ и $(m/2+1)f'$ — нечетные числа, не меньшие 3, ввиду леммы 1 имеем $R_{(m/2-1)f'}(q')\neq\varnothing$ и $R_{(m/2+1)f'}(q')\neq\varnothing$. Пусть $r\in R_{(m/2-1)f'}(q')$ и $s\in R_{(m/2+1)f'}(q')$. Легко понять, что числа r и s нечетны и ввиду малой теоремы Ферма не делят f. Поэтому ввиду леммы 2 числа r и s смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Заметим, что $e(r,q)=m/2-1$ и $e(s,q)=m/2+1$, поэтому $e(s,q)/e(r,q)=1+2/(m/2-1)$ не является нечетным натуральным числом при $m\geq 8$, $\eta(e(r,q))+\eta(e(s,q))=m$ и $2m-(1-(-1)^{e(s,q)+e(r,q)})=2m$, следовательно, ввиду леммы 6 числа r и s смежны в графе $\Gamma(G)$ и ввиду леммы 5 не смежны в графе $\Gamma(Soc(H))$. Таким образом, при $m>4$ имеем $\Gamma(G)\neq\Gamma(H)$.

Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть $G=A_n$, где $n\geq 5$, и H — подгруппа из G вида $(S_k\times S_{n-k})\cap A_n$, где $n/2\leq k<n$. Тогда $\Gamma(G)=\Gamma(H)$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *n и $n-4$ — непростые нечетные числа и $k=n-1$;*

(2) *$n=6$ и $H\cong A_5$;*

(3) $n = 10$ и $H \cong (S_7 \times S_3) \cap A_{10}$.

Доказательство. Если $\pi(G) = \pi(H)$ и p — простое число такое, что $p \leq n$, то число n непростое и интервал (k, n) не содержит простых чисел.

Пусть n нечетно и $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Ввиду предположения существуют нечетные простые числа p и q такие, что $q < p$ и $n-1 = p+q$. Среди всех пар таких чисел выберем пару (p_1, q_1) с наибольшим значением бóльшего простого числа в паре. Числа p_1 и q_1 смежны в $\Gamma(G)$. Заметим, что $p_1 \leq k$, поэтому $q_1 = n - 1 - p_1 \geq n - k - 1$.

Ввиду леммы 2 числа p_1 и q_1 смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда $p_1 + q_1 \leq k$ или $p_1 \leq k$ и $q_1 \leq (n-k)$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

В первом случае получаем, что $k = n-1$, поэтому $H \cong A_{n-1}$ и ввиду основного результата [3] имеем, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда n и $n-4$ — непростые нечетные числа.

Во втором случае получаем, что либо $q_1 = n-k-1$ и $k = p_1 \leq n-4$, либо $q_1 = n-k$ и $k = p_1 + 1 \leq n-3$. Поэтому $H = (S_{p_1} \times S_{n-p_1}) \cap A_n = (S_{p_1} \times S_{q_1+1}) \cap A_n$ или $H = (S_{p_1+1} \times S_{n-p_1-1}) \cap A_n = (S_{p_1+1} \times S_{q_1}) \cap A_n$. Заметим, что при $n \in \{9, 15, 21, 25, 33, 39\}$ существует простое число p_2 такое, что $p_1 < p_2 \leq n$, значит, $\pi(G) \neq \pi(H)$, следовательно, $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$. Противоречие.

Если $n > 39$, то ввиду предположения существуют простые нечетные числа p_2 и q_2 такие, что $q_2 < p_2$, $(p_2, q_2) \neq (p_1, q_1)$ и $n - 1 = p_2 + q_2$. Заметим также, что соответствующее утверждение верно при $n \in \{27, 35\}$. Легко понять, что $p_2 < p_1$, поэтому $q_2 > q_1 + 1$, следовательно, числа p_2 и q_2 смежны в графе $\Gamma(G)$ и не смежны в графе $\Gamma(H)$, значит, $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$. Противоречие.

Пусть n четно и $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Заметим, что ввиду [10] $\Gamma(A_6) = \Gamma(A_5)$ и если H — максимальная подгруппа в A_6 такая, что $\pi(H) = \pi(A_6)$, то $H \cong A_5$.

Пусть $n > 6$. Ввиду предположения существуют нечетные простые числа p и q такие, что $q < p$ и $n = p + q$. Среди всех пар таких чисел выберем пару (p_1, q_1) с наибольшим значением бóльшего простого числа в паре. Числа p_1 и q_1 смежны в $\Gamma(G)$. Заметим, что $p_1 \leq k$, поэтому $q_1 = n - p_1 \geq n - k$.

Ввиду леммы 2 числа p_1 и q_1 смежны в графе $\Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда $p \leq k$ и $q \leq (n-k)$. Значит, $q_1 = n-k$ и $k = p_1 \leq n-3$. Поэтому $H = (S_{p_1} \times S_{n-p_1}) \cap A_n = (S_{p_1} \times S_{q_1}) \cap A_n$.

Легко понять, что если $n = 10$, то пара $(p_1, q_1) = (7, 3)$ определена однозначно и $\Gamma(A_{10}) = \Gamma((S_7 \times S_3) \cap A_{10})$.

Заметим также, что при $n \in \{8, 12, 14, 18, 20, 24, 30, 38\}$ существует простое число p_2 такое, что $p_1 < p_2 \leq n$, откуда $\pi(G) \neq \pi(H)$, следовательно, $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$. Противоречие.

Если $n > 39$, то ввиду предположения существуют простые нечетные числа p_2 и q_2 такие, что $q_2 < p_2$, $(p_2, q_2) \neq (p_1, q_1)$ и $n = p_2 + q_2$. Заметим также, что соответствующее утверждение верно при $n \in \{16, 22, 26, 28, 32, 34, 36\}$. Легко понять, что $p_2 < p_1$, поэтому $q_2 > q_1 + 1$, следовательно, числа p_2 и q_2 не смежны в графе $\Gamma(H)$ и смежны в графе $\Gamma(G)$, значит, $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$. Противоречие.

Предложение доказано.

4. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная простая группа, H — ее собственная подгруппа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ и H_1 — максимальная подгруппа в G, содержащая H. Тогда $\pi(G) = \pi(H) = \pi(H_1)$, следовательно, для G и H выполняется одно из условий (1) – (24) заключения леммы 3. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Пусть выполнено условие (1) заключения леммы 3, т. е. $G = A_n$ и $A_k \leq H \leq S_k \times S_{n-k}$, где n — непростое число и интервал (k, n) не содержит простых чисел. Тогда $H_1 \cong (S_k \times S_{n-k}) \cap A_n$ удовлетворяет условиям предложения 4. Поэтому либо n и $n-4$ — нечетные непростые числа,

$H = H_1 = A_{n-1}$ и выполняется п. (1) заключения теоремы, либо $G = A_6$, $H = H_1 = A_5$ и выполняется п. (6) заключения теоремы, либо $G = A_{10}$ и $A_7 \trianglelefteq H \leq H_1 = (G_1 \times G_2) \cap A_{10}$, где $G_1 \cong S_7$ и $G_2 \cong S_3$, и $A_7 \trianglelefteq G_1$.

Рассмотрим последний случай подробно. Ввиду [10] число 5 смежно в графе $\Gamma(A_{10})$ с 3 и 2, но не смежно с ними в графе $\Gamma(A_7)$. Поэтому в $H \setminus G_1$ есть элемент g порядка 15. Поскольку $g \in H_1$, имеем $g = g_1 g_2$, где $g_1 \in G_1$ и $g_2 \in G_2$. Так как порядок g нечетен, порядки g_1 и g_2 также нечетны, в частности, элемент g_1 является четной подстановкой, откуда $g_1 \in G_1 \leq H$. Следовательно, $g_2 = g_1^{-1} g \in H$, откуда $K = G_1\langle g_2\rangle = A_7 \times \langle g_2\rangle \leq H$. Легко понять, что $|H_1 : K| = 2$ и числа 5 и 2 не смежны в графе $\Gamma(K)$. Поэтому существует элемент $g_3 \in H \setminus K$ порядка 10, откуда $H = H_1$, следовательно, выполняется п. (7) заключения теоремы.

Пусть выполнено условие (2) заключения леммы 3, т. е. $G \cong PSp_4(q)$ и $PSL_2(q^2) \cong PSp_2(q^2) \trianglelefteq H$. Тогда ввиду предложения 1 имеем $H_1 \cong PSL_2(q^2).\langle t\rangle$, где t — полевой автоморфизм порядка 2 группы $PSL_2(q^2)$, и либо q четно, либо $q = 3$. Поскольку $\Gamma(G) \neq \Gamma(PSL_2(q^2))$, имеем, что $H = H_1$. Следовательно, выполняется п. (2) заключения теоремы.

Пусть выполнено условие (3) заключения леммы 3, т. е. $G \cong PSp_{2m}(q)$, где m и q четны, и $P\Omega^-_{2m}(q) \trianglelefteq H$. Заметим, что $P\Omega^-_4(q) \cong PSL_2(q^2)$, поэтому можно считать, что $m \geq 4$. Ввиду предложения 2 имеем $m = 4$ и $H_1 \cong SO^-_8(q)$. Поскольку $\Gamma(G) \neq \Gamma(P\Omega^-_8(q))$, имеем $H = H_1 \cong SO^-_8(q)$. Следовательно, выполняется п. (3) заключения теоремы.

Пусть выполнено условие (4) заключения леммы 3, т. е. $G \cong P\Omega_{2m+1}(q)$, где m четно и q нечетно, и $P\Omega^-_{2m}(q) \trianglelefteq H$. Тогда ввиду предложения 2 имеем $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$.

Пусть выполнено условие (5) заключения леммы 3, т. е. $G \cong P\Omega^+_{2m}(q)$, где m четно, и $P\Omega_{2m-1}(q) \trianglelefteq H$. Тогда ввиду предложения 3 имеем $m = 4$ и $H = H_1 \cong P\Omega_7(q)$. Следовательно, выполняется п. (4) заключения теоремы.

Пусть выполнено условие (6) заключения леммы 3, т. е. $G \cong PSL_6(2)$ и либо H — стабилизатор подпространства размерности 1 или 5 пространства V, либо $H \cong PSL_5(2)$. Заметим, что $\pi(PSL_6(2)) = \pi(PSL_5(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$ и ввиду леммы 4 числа 2 и 5 смежны в графе $\Gamma(PSL_6(2))$ и не смежны в графе $\Gamma(PSL_5(2))$, для остальных пар чисел отношение смежности в графах $\Gamma(PSL_6(2))$ и $\Gamma(PSL_5(2))$ одинаково, поэтому H — стабилизатор подпространства размерности 1 или 5 пространства V. Заметим, что $PSL_6(2) \cong GL_6(2)$, ввиду [14, предложение 4.1.17] подгруппа H изоморфна $2^5.PSL_5(2)$, и все такие подгруппы сопряжены в $Aut(PSL_6(2))$. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ — некоторый базис пространства V и g — элемент из $GL_6(2)$ такой, что $g(e_1) = e_1$, $g(e_2) = e_1 + e_2$, $g(\langle e_3, e_4, e_5, e_6\rangle) \subseteq \langle e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ и $g|_{\langle e_3,e_4,e_5,e_6\rangle}$ — элемент порядка 5 из $GL_4(2)$. Легко понять, что g оставляет на месте одномерное подпространство $\langle e_1\rangle$ пространства V и имеет порядок 10. Значит, $\Gamma(G) = \Gamma(H)$, следовательно, выполняется п. (5) заключения теоремы.

Пусть выполнено условие (7) заключения леммы 3, т. е. $G \cong PSU_4(2)$ и либо $H \leq H_1 \cong 2^4.A_5$, либо $H \leq H_1 \cong S_6$. Рассмотрим подробно эти случаи.

Заметим, что $\pi(PSU_4(2)) = \{2, 3, 5\}$, при этом числа 2 и 3 смежны в графе $\Gamma(PSU_4(2))$, а число 5 изолировано в этом графе.

Пусть $H \leq H_1 = L : Z \cong 2^4.A_5$ и $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Подгруппа $L \cap H$ является H-инвариантной 2-группой, $\bar{H} = H/(L \cap H) \leq A_5$ и $3, 5 \in \pi(\bar{H})$. Ввиду [10] имеем $\bar{H} \cong A_5$. Так как $5 \in R_4(2)$, A_5 действует на L неприводимо, поэтому либо $L \cap H = 1$, либо $L \leq H$. Заметим, что в графе $\Gamma(A_5)$ число 3 не смежно с 2, но числа 2 и 3 смежны в графе $\Gamma(PSU_4(2))$, поэтому $\Gamma(PSU_4(2)) \neq \Gamma(A_5)$. Если $H = H_1 \cong 2^4.A_5$, то ввиду [10] имеем $|H_1| = 960$, все подгруппы порядка 960 сопряжены в $PSU_4(2)$ и содержат элементы порядка 6. Поэтому $\Gamma(H_1) = \Gamma(G)$.

Пусть $H \leq H_1 \cong S_6$. Ввиду [10] имеем $\Gamma(H_1) = \Gamma(G)$, и если $H < H_1$ и $\pi(H_1) = \pi(H)$, то $H \in \{S_5, A_6\}$. Поскольку $\Gamma(A_6) \neq \Gamma(G)$, имеем $H = S_5$. Ввиду [10] $\Gamma(S_5) = \Gamma(G)$, и если $K < S_5$ и $\pi(K) = \pi(S_5)$, то $K \cong A_5$. Ввиду [10] $\Gamma(A_5) \neq \Gamma(G)$. Поэтому $H \in \{S_6, S_5\}$. Таким образом, выполняется п. (8) заключения теоремы.

Пусть выполнено условие (8) заключения леммы 3, т. е. $G = PSp_6(2)$ и H изоморфна группе из множества $\{S_8, A_8, S_7, A_7\}$. Тогда ввиду [10] выполняется п. (9) заключения теоремы.

Пусть $G \cong P\Omega_8^+(2)$. Заметим, что $\pi(P\Omega_8^+(2)) = \{2, 3, 5, 7\}$, при этом числа 2, 3 и 5 попарно смежны в графе $\Gamma(P\Omega_8^+(2))$, а число 7 изолировано в этом графе. Максимальные подгруппы группы $G = P\Omega_8^+(2)$ известны (см. [10]): если H_1 — максимальная подгруппа в G такая, что $\pi(G) = \pi(H_1)$, то H_1 изоморфна одной из групп $2^6 : A_8$, A_9 или $P\Omega_7(2) \cong PSp_6(2)$.

Пусть $H \leq H_1 = L : Z \cong 2^6 : A_8$ и $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Подгруппа $L \cap H$ является H-инвариантной 2-группой, $\bar{H} = H/(L \cap H) \leq A_8$ и $3, 5, 7 \in \pi(\bar{H})$. Ввиду [10] имеем $\bar{H} \in \{A_7, A_8\}$. В графе $\Gamma(A_7)$ вершины 3 и 5 не смежны, поэтому если $\bar{H} \cong A_7$, то $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$. Если $\bar{H} \cong A_8$, то ввиду леммы 7 имеем либо $L \cap H = 1$, либо $L \leq H$. Заметим, что в графе $\Gamma(A_8)$ число 3 смежно с 2 и 5, но числа 2 и 5 не смежны, поэтому $\Gamma(G) \neq \Gamma(A_8)$. Если $H = H_1 \cong 2^6 : A_8$, то поскольку каждый элемент порядка 5 из A_8 лежит в A_7, ввиду леммы 8 подгруппа H содержит элемент порядка 10. Поэтому $\Gamma(H) = \Gamma(G)$.

Пусть $H \leq H_1 \cong A_9$. Ввиду [10] имеем, что $\Gamma(H_1) = \Gamma(G)$ и $\Gamma(A_9) \neq \Gamma(T)$ для любой собственной подгруппы T из A_9.

Пусть $H \leq H_1 \cong PSp_6(2)$. Ввиду [10] имеем, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$, и если $\Gamma(PSp_6(2)) = \Gamma(T)$ для некоторой собственной подгруппы T из $PSp_6(2)$, то из п. (9) теоремы следует, что $T \cong S_8$. Таким образом, выполняется один из п. (4) или п. (13) заключения теоремы.

Пусть выполнено одно из условий (10)–(12) заключения леммы 3. Тогда ввиду [10] выполняется один из пп. (10)–(12) заключения теоремы.

Пусть выполнено одно из условий (13)–(24) заключения леммы 3. Тогда ввиду [5, таблица 1] и [10] имеем, что $\Gamma(G) \neq \Gamma(H)$.

Теорема доказана.

Автор благодарит профессора К. Паркера за беседу, послужившую постановке задачи, и профессора А. С. Кондратьева за полезные консультации и за ценные замечания, позволившие улучшить первоначальный текст статьи.

Результат настоящей работы был, в основном, получен автором во время визита в университет г. Марибора (Словения). Автор благодарит этот университет и особенно профессора Д. Пагона за гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В., Вдовин Е. П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы// Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
2. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы// Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы //Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, №1. С. 65–76.
4. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
5. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
6. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** Вполне приводимость некоторых $GF(2)A_7$-модулей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 139–146.
7. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
8. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
9. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
10. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
11. **Estermann T.** On Goldbach's problem: proof that almost all even positive integers are sums of two primes // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. Vol. 44. P. 307–314.
12. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3 // Math. Surveys and Monographs. 1994. Vol. 40, № 3.

13. **Hardy G.H., Littlewood J. E.** Some problems of 'partitio numerorum'; III: on the expression of a number as a sum of primes // Acta Mathematica. 1922. Vol. 44. P. 1–70.
14. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.
15. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** Transitive subgroups of primitive permutation groups // J. Algebra. 2000. Vol. 234. P. 291–361.
16. **Oliveira e Silva T.** Goldbach conjecture verification. URL: http://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html .
17. **Weisstein E.W.** Goldbach conjecture. From Mathworld-AWolfram web resourse. URL: http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html .
18. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, № 1. P. 265–284.
19. The on-line encyclopedia of integer sequences. URL: https://oeis.org/A002375.

Поступила 06.11.2013

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 519.17

О РАСШИРЕНИЯХ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 3 [1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

А.А. Махневым начато изучение дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением 3. В частности, им получена редукция к графам, в которых окрестности вершин — исключительные графы или псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s,t)$. А.А. Махнев и Д.В. Падучих нашли параметры исключительных графов (см. предложение). В данной работе исследуются вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин — исключительные сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 3, параметры которых принадлежат пп. (3)–(6) предложения.

Ключевые слова: расширения графов, сильно регулярные графы, вполне регулярные графы, дистанционно регулярные графы.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On extensions of exceptional strongly regular graphs with eigenvalue 3.

The study of distance regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with eigenvalue 3 was initiated in Makhnev's previous works. In particular, he reduced these graphs to graphs in which neighborhoods of vertices are exceptional graphs or pseudogeometric graphs for $pG_{s-3}(s,t)$. Makhnev and Paduchikh found parameters of exceptional graphs (see the Proposition). In the present paper, we study amply regular graphs in which neighborhoods of vertices are exceptional strongly regular graphs with eigenvalue 3 and parameters from conditions 3–6 of the Proposition.

Keywords: graph extensions, strongly regular graphs, amply regular graphs, distance regular graphs.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $\Gamma(a)$ или $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a]\cap[b]$ содержит точно μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a,l)\in(P,\mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$ или pG_α). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. *Точечный граф* геометрии определяется на множестве точек P, где две точки смежны, если они лежат на общей прямой. Точечный граф

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), программы отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-C-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-C-1-1009). Работа выполнена также в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, параметры которого можно представить в таком виде для некоторых натуральных чисел α,s,t, называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

В работе [1] начато изучение дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением 3. В частности, получена редукция к графам, в которых окрестности вершин — исключительные графы или псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s,t)$. В [2] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов диаметра, большего 3, в которых окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s,t)$. В [3] найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с собственным значением 3.

Предложение [3, теорема]. *Пусть* Γ *— исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением* 3. *Тогда его параметры лежат в одном из следующих списков*:

(1) *графы без треугольников*: $(162,21,0,3)$, $(176,25,0,4)$, $(210,33,0,6)$, $(266,45,0,9)$; *графы с* $\lambda=1$: $(99,14,1,2)$, $(115,18,1,3)$; *графы с* $\lambda=2$: $(96,19,2,4)$, $(196,39,2,9)$; *графы с* $\lambda=3$: $(45,12,3,3)$, $(85,20,3,5)$, $(125,28,3,7)$, $(165,36,3,9)$, $(225,48,3,12)$, $(245,52,3,13)$, $(325,68,3,17)$; *графы с* $3<\lambda\le 6$: $(196,45,4,12)$, $(21,10,5,4)$, $(111,30,5,9)$, $(169,42,5,12)$, $(88,27,6,9)$, $(144,39,6,12)$;

(2) $(35,18,9,9)$, $(36,21,12,12)$, $(40,27,18,18)$, $(50,28,15,16)$, $(56,45,36,36)$, $(64,27,10,12)$, $(81,30,9,12)$, $(85,54,33,36)$, $(96,75,58,60)$, $(96,35,10,14)$, $(99,84,71,72)$, $(100,33,8,12)$, $(119,54,21,27)$, $(120,63,30,36)$, $(120,51,18,24)$, $(121,36,7,12)$, $(126,45,12,18)$, $(133,108,87,90)$, $(136,105,80,84)$, $(147,66,25,33)$, $(148,77,36,44)$, $(148,63,22,30)$;

(3) $(162,138,117,120)$, $(171,60,15,24)$, $(175,108,63,72)$, $(176,135,102,108)$, $(205,108,51,63)$, $(205,68,15,26)$, $(208,81,24,36)$, $(216,129,72,84)$, $(216,75,18,30)$, $(220,135,78,90)$, $(236,180,135,144)$, $(243,66,9,21)$, $(245,108,39,54)$, $(246,126,57,72)$, $(246,105,36,51)$, $(246,85,20,34)$, $(250,153,88,102)$, $(276,165,92,108)$, $(276,75,10,24)$, $(280,243,210,216)$;

(4) $(287,126,45,63)$, $(288,147,66,84)$, $(288,123,42,60)$, $(297,168,87,105)$, $(300,273,248,252)$, $(301,150,65,84)$, $(301,108,27,45)$, $(320,99,18,36)$, $(343,150,53,75)$, $(344,175,78,100)$, $(344,147,50,72)$, $(351,300,255,264)$, $(352,243,162,180)$, $(364,297,240,252)$, $(375,198,93,117)$, $(392,255,158,180)$, $(392,115,18,40)$, $(396,135,30,54)$, $(400,378,357,360)$, $(400,243,138,162)$;

(5) $(416,315,234,252)$, $(430,390,353,360)$, $(441,264,147,174)$, $(441,220,95,124)$, $(456,315,210,234)$, $(460,243,114,144)$, $(460,153,32,60)$, $(490,297,168,198)$, $(495,234,93,126)$, $(495,190,53,85)$, $(507,276,135,168)$, $(507,198,57,90)$, $(536,405,300,324)$, $(539,234,81,117)$, $(540,462,393,408)$, $(540,363,234,264)$, $(540,273,120,156)$, $(540,231,78,114)$, $(616,410,261,296)$, $(621,300,123,165)$;

(6) $(625,378,213,252)$, $(640,243,66,108)$, $(651,468,327,360)$, $(672,451,290,328)$, $(676,315,122,168)$, $(689,432,255,297)$, $(690,318,121,168)$, $(690,273,80,126)$, $(726,300,95,144)$, $(729,408,207,255)$, $(735,318,109,159)$, $(736,675,618,630)$, $(736,555,410,444)$, $(736,371,162,212)$, $(736,315,106,156)$, $(768,531,354,396)$, $(784,435,218,270)$, $(800,423,198,252)$, $(845,588,395,441)$, $(850,513,288,342)$;

(7) $(891,570,345,399)$, $(896,675,498,540)$, $(936,561,312,372)$, $(976,675,450,504)$, $(980,801,648,684)$, $(1058,693,432,495)$, $(1065,798,585,636)$, $(1081,486,177,252)$, $(1128,567,246,324)$, $(1136,855,630,684)$, $(1156,819,562,624)$, $(1156,615,290,369)$, $(1176,675,354,432)$, $(1197,780,483,555)$, $(1275,938,673,737)$, $(1275,728,379,464)$, $(1288,1053,852,900)$, $(1296,1110,945,984)$, $(1300,783,438,522)$, $(1331,1026,777,837)$;

(8) $(1331,850,513,595)$, $(1344,948,647,720)$, $(1408,1323,1242,1260)$, $(1470,1053,732,810)$, $(1519,1242,1005,1062)$, $(1536,1155,850,924)$, $(1596,1485,1380,1404)$, $(1625,1368,1143,1197)$, $(1666,1620,1575,1584)$, $(1701,1380,1107,1173)$, $(1711,1134,717,819)$, $(1716,1323,1002,1080)$, $(1716,1225,848,940)$, $(1818,1518,1257,1320)$, $(1825,1368,1003,1092)$, $(1863,1596,1359,1416)$, $(1944,1407,990,1092)$, $(1961,1890,1821,1836)$, $(2080,1683,1346,1428)$, $(2160,1683,1290,1386)$;

(9) (2300, 2178, 2061, 2088), (2336, 1755, 1290, 1404), (2527, 1998, 1557, 1665), (3060, 2415, 1878, 2010), (3136, 2565, 2076, 2196), (3186, 2730, 2325, 2424), (3250, 3078, 2913, 2952), (3304, 2835, 2418, 2520), (3381, 2740, 2195, 2329), (3520, 2907, 2378, 2508), (3741, 2970, 2325, 2484), (3872, 3171, 2570, 2718), (4000, 3483, 3018, 3132), (4131, 3540, 3015, 3144), (4992, 4163, 3442, 3620), (5240, 4563, 3954, 4104), (5376, 4875, 4410, 4524), (5500, 4953, 4448, 4572), (5618, 4932, 4311, 4464), (5832, 4998, 4257, 4440);

(10) (6480, 5673, 4944, 5124), (6776, 6075, 5430, 5589), (7514, 6633, 5832, 6030), (8576, 7875, 7218, 7380), (8625, 7728, 6903, 7107), (9472, 8883, 8322, 8460), (9504, 8385, 7368, 7620), (10051, 9180, 8367, 8568), (10580, 9387, 8298, 8568), (11616, 10695, 9830, 10044), (12750, 12078, 11433, 11592), (14848, 13923, 13042, 13260), (14848, 13635, 12498, 12780), (15456, 14355, 13314, 13572), (16225, 14688, 13263, 13617), (17500, 16578, 15693, 15912), (19965, 18538, 17189, 17524), (23276, 21945, 20672, 20988), (24696, 22935, 21270, 21684), (25025, 23598, 22233, 22572), (27455, 25758, 24141, 24543), (33664, 31563, 29562, 30060), (38875, 36828, 34863, 35352).

Там же получено

Следствие. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением* 3*. Тогда его параметры не лежат в пп.* (7)–(10) *из заключения предложения.*

В данной работе исследуются вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы, параметры которых лежат в пп. (3)–(6) из заключения предложения.

Теорема. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы, параметры которых лежат в пп.* (3)–(6) *из заключения предложения. Тогда* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (490, 297, 168, 198), (616, 287, 126, 140), (640, 243, 66, 108), (961, 320, 99, 110), (1331, 850, 513, 595).

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1 [4, теорема 20]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \geq 3$ *и степени* $k > 2$*. Если* $k_2 \leq 3k/2$ *(равносильно* $c_2 \geq 2b_1/3$*), то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $d = 3$ *и* Γ *— двудольный граф или граф Тэйлора*;

(2) Γ *— граф Джонсона* $J(7,3)$ *или* 4*-куб.*

До конца работы предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями $3, \theta_2$. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $\Gamma_i = \Gamma_i(u)$, $k_i = |\Gamma_i|$.

Лемма 2 [3, лемма 3]. *Пусть* u, w *— вершины из* Γ *с* $d(u,w) = 2$*. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu' - 3)v'/(k' - 3) \leq \mu \leq (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$;

(2) *если* X_i *— множество вершин из* $[w] - [u]$*, смежных точно с* i *вершинами из* $[u] \cap [w]$*,* $x_i = |X_i|$*, то* $x_0 \cdot \mu \leq (v' - x_0)(v' - \mu)(3 - \theta_2)^2/(2k' - 3 - \theta_2)^2$;

(3) *если* $x_0 = \mu$*, то* $\mu \leq v'(3 - \theta_2)/(2k' - 2\theta_2)$.

Лемма 3. *Если параметры* (v', k', λ', μ') *принадлежат п.* (6) *заключения предложения, то либо* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (1331, 850, 513, 595)*, либо* $d(\Gamma) = 3$ *и верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* (690, 273, 80, 126) *и* $\mu = 320, 345, 368$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* (726, 300, 95, 144) *и* $\mu = 374, 363$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* (735, 318, 109, 159) *и* $\mu = 374$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* (736, 315, 106, 156) *и* $\mu = 368, 384$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $d(\Gamma) = 2$ и Γ имеет неглавные собственные значения $n - m, -m$, то по [3, лемма 1] число $m-1$ делит $v'-k'-1$. Далее, $n-m \geq 3$, поэтому $m-1 \leq (v'-k'-1)/4$. А если $d(\Gamma) \geq 3$, то $\mu \leq b_1 = v'-k'-1$.

Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (6) заключения предложения, и $\mu' \leq v'-k'-1$, то эти параметры равны $(640, 243, 66, 108)$, $(676, 315, 122, 168)$, $(690, 318, 121, 168)$, $(690, 273, 80, 126)$, $(726, 300, 95, 144)$, $(729, 408, 207, 255)$, $(735, 318, 109, 159)$, $(736, 371, 162, 212)$, $(736, 315, 106, 156)$, $(784, 435, 218, 270)$, $(800, 423, 198, 252)$. Допустим, что $d(\Gamma) \geq 3$.

В случае параметров $(640, 243, 66, 108)$ имеем $\theta_2 = -45$, $v'-k'-1 = 396$ и по лемме 2 имеем $105 \cdot 640/240 \leq \mu \leq 153 \cdot 640/288$, поэтому $280 \leq \mu \leq 302$. Так как μ делит $640 \cdot 396$, то $\mu = 288$ и $k_2 = 880$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 диаметр Γ равен 3. По утверждению (2) леммы 2 имеем $288x_0 \leq (640 - x_0) \cdot 352 \cdot 48^2/528^2$, поэтому $x_0 \leq 6$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $880 \cdot 6$, но не меньше $288k_3$. Отсюда $k_3 \leq 18$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 17 и указанное число ребер не меньше $623k_3$. Поэтому $k_3 \leq 8$. Если y, z — различные вершины из Γ_3, то $|([y] \cup [z]) \cap \Gamma_2| \geq 282 + 2 \cdot 352$; противоречие. Значит, $k_3 = 1$ и антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами (761,640,531,576); противоречие с тем, что $(\bar{\lambda} - \bar{\mu})^2 - 4(\bar{k} - \bar{\mu})$ не является квадратом целого числа.

В случае параметров $(676, 315, 122, 168)$ имеем $\theta_2 = -49$, $\mu \leq v'-k'-1 = 360$ и по лемме 1 имеем $165 \cdot 676/312 \leq \mu$, поэтому $357 \leq \mu \leq 360$. Так как μ делит $676 \cdot 360$, то $\mu = 360$ и Γ — граф Тэйлора; противоречие с тем, что $k' \neq 2\mu'$.

В случае параметров $(690, 318, 121, 168)$ имеем $\theta_2 = -50$, $\mu \leq v'-k'-1 = 371$ и по лемме 1 имеем $165 \cdot 690/315 \leq \mu$, поэтому $361 \leq \mu \leq 371$. Так как μ делит $690 \cdot 371$, то $\mu = 371$ и Γ — граф Тэйлора; противоречие с тем, что $k' \neq 2\mu'$.

В случае параметров $(690, 273, 80, 126)$ имеем $\theta_2 = -49$, $\mu \leq v'-k'-1 = 416$ и по лемме 1 имеем $123 \cdot 690/270 \leq \mu \leq 175 \cdot 690/322$, поэтому $315 \leq \mu \leq 375$. Так как μ делит $690 \cdot 416$, то $\mu = 320, 345, 368$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(726, 300, 95, 144)$ имеем $\theta_2 = -52$, $\mu \leq v'-k'-1 = 425$ и по лемме 1 имеем $141 \cdot 726/297 \leq \mu \leq 196 \cdot 726/352$, поэтому $345 \leq \mu \leq 404$. Так как μ делит $726 \cdot 425$, то $\mu = 374, 363$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(729, 408, 207, 255)$ имеем $\theta_2 = -51$, $\mu \leq v'-k'-1 = 320$ и по лемме 1 имеем $252 \cdot 729/405 \leq \mu$, поэтому $454 \leq \mu \leq 320$; противоречие.

В случае параметров $(735, 318, 109, 159)$ имеем $\theta_2 = -53$, $\mu \leq v'-k'-1 = 416$ и по лемме 1 имеем $156 \cdot 735/315 \leq \mu$, поэтому $364 \leq \mu \leq 416$. Так как μ делит $735 \cdot 416$, то $\mu = 374, 363$. В последнем случае получим противоречие с тем, что μ-подграф из Γ — регулярный граф степени 159 на 363 вершинах. Ввиду утверждения (3) леммы 2 диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(736, 371, 162, 212)$ имеем $\theta_2 = -53$, $\mu \leq v'-k'-1 = 364$ и по лемме 1 имеем $209 \cdot 736/368 \leq \mu$, поэтому $418 \leq \mu \leq 364$; противоречие.

В случае параметров $(736, 315, 106, 156)$ имеем $\theta_2 = -53$, $\mu \leq v'-k'-1 = 420$ и по лемме 1 имеем $153 \cdot 736/312 \leq \mu \leq 209 \cdot 736/368$, поэтому $357 \leq \mu \leq 418$. Так как μ делит $736 \cdot 420$, то $\mu = 368, 384$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(784, 435, 218, 270)$ имеем $\theta_2 = -55$, $\mu \leq v'-k'-1 = 348$ и по лемме 1 имеем $267 \cdot 784/432 \leq \mu$, поэтому $485 \leq \mu \leq 348$; противоречие.

В случае параметров $(800, 423, 198, 252)$ имеем $\theta_2 = -57$, $\mu \leq v'-k'-1 = 376$ и по лемме 1 имеем $249 \cdot 800/420 \leq \mu$, поэтому $475 \leq \mu \leq 376$; противоречие.

Пусть $d(\Gamma) = 2$, Γ имеет собственные значения $n-m, -m$ и $m-1 \leq (v'-k'-1)/4$.

В случае параметров $(625, 378, 213, 252)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 42$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 246$ и $m-1 \leq 61$; противоречие с тем, что тогда $m-1 \leq 41$.

В случае параметров $(640, 243, 66, 108)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 45$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 396$ и $m-1 \leq 99$, поэтому $m-1 = 66, 99$, соответственно $n-m = 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 640, 243, 305)$ или $(v, 640, 243, 340)$; противоречие с тем, что μ не делит $640 \cdot 396$.

В случае параметров $(651, 468, 327, 360)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 36$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 182$ и $m-1 \leq 45$; противоречие.

В случае параметров $(672, 451, 290, 328)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 41$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 220$ и $m-1 \leq 55$, поэтому $m-1 = 44, 55$, соответственно $n-m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 672, 451, 452)$ или $(v, 672, 451, 504)$; противоречие с тем, что μ не делит $672 \cdot 220$.

В случае параметров $(676, 315, 122, 168)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 49$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 360$ и $m-1 \leq 90$, поэтому $m-1 = 60, 72, 90$, соответственно $n-m = 5, 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 676, 315, 371)$, $(v, 676, 315, 384)$ или $(v, 676, 315, 403)$; противоречие с тем, что μ не делит $676 \cdot 360$.

В случае параметров $(689, 432, 255, 297)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 45$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 256$ и $m-1 \leq 64$. Поэтому $m-1 = 64$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 689, 432, 594)$; противоречие с тем, что μ не делит $689 \cdot 256$.

В случае параметров $(690, 318, 121, 168)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 50$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 371$ и $m-1 \leq 92$, поэтому $m-1 = 53$, $n-m = 6$ и Γ имеет параметры $(v, 690, 318, 366)$; противоречие с тем, что μ не делит $690 \cdot 371$.

В случае параметров $(690, 273, 80, 126)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 49$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 416$ и $m-1 \leq 104$, поэтому $m-1 = 52, 104$, соответственно $n-m = 7, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 690, 273, 371)$ или $(v, 690, 273, 375)$; противоречие с тем, что μ не делит $690 \cdot 416$.

В случае параметров $(726, 300, 95, 144)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 52$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 425$ и $m-1 \leq 106$, поэтому $m-1 = 85$, $n-m = 4$ и Γ имеет параметры $(v, 726, 300, 382)$; противоречие с тем, что μ не делит $726 \cdot 425$.

В случае параметров $(729, 408, 207, 255)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 51$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 320$ и $m-1 \leq 80$, поэтому $m-1 = 64, 80$, соответственно $n-m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 729, 408, 469)$ или $(v, 729, 408, 486)$. Так как μ делит $729 \cdot 320$, то $\mu = 486$; противоречие с тем, что кратность 3 равна $80 \cdot 729 \cdot 810/(486 \cdot 84)$.

В случае параметров $(735, 318, 109, 159)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 53$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 416$ и $m-1 \leq 104$. Поэтому $m-1 = 52, 104$, соответственно $n-m = 7, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 735, 318, 371)$ или $(v, 735, 318, 375)$; противоречие с тем, что μ не делит $735 \cdot 416$.

В случае параметров $(736, 675, 618, 630)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 15$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 60$ и $m-1 \leq 15$, поэтому $m-1 = 15$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 736, 675, 688)$; противоречие с тем, что μ не делит $736 \cdot 60$.

В случае параметров $(736, 555, 410, 444)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 37$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 180$ и $m-1 \leq 45$, поэтому $m-1 = 36, 45$, соответственно $n-m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 736, 555, 588)$ или $(v, 736, 555, 598)$; противоречие с тем, что μ не делит $736 \cdot 180$.

В случае параметров $(736, 371, 162, 212)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 53$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 364$ и $m-1 \leq 91$, поэтому $m-1 = 52, 91$, соответственно $n-m = 6, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 736, 371, 418)$ или $(v, 736, 371, 460)$; противоречие с тем, что μ не делит $736 \cdot 364$.

В случае параметров $(736, 315, 106, 156)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 53$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 420$ и $m-1 \leq 105$, поэтому $m-1 = 60, 70, 84, 105$, соответственно $n-m = 6, 5, 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 736, 315, 370)$, $(v, 736, 315, 381)$, $(v, 736, 315, 400)$ или $(v, 736, 315, 418)$; противоречие с тем, что μ не делит $736 \cdot 420$.

В случае параметров $(768, 531, 354, 396)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 45$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 236$ и $m-1 \leq 59$. Поэтому $m-1 = 59$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 768, 531, 588)$; противоречие с тем, что μ не делит $768 \cdot 236$.

В случае параметров $(784, 435, 218, 270)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 55$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 348$ и $m-1 \leq 87$, поэтому $m-1 = 58, 87$, соответственно $n-m = 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 784, 435, 489)$ или $(v, 784, 435, 520)$; противоречие с тем, что μ не делит $784 \cdot 348$.

В случае параметров $(800, 423, 198, 252)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 57$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 376$ и $m-1 \leq 94$, поэтому $m-1 = 94$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 800, 423, 515)$; противоречие с тем, что μ не делит $800 \cdot 376$.

В случае параметров $(845, 588, 395, 441)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 49$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 256$ и $m-1 \leq 64$, поэтому $m-1 = 64$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 845, 588, 650)$; противоречие с тем, что μ не делит $845 \cdot 256$.

В случае параметров $(850, 513, 288, 342)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 57$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 336$ и $m-1 \leq 84$, поэтому $m-1 = 56, 84$, соответственно $n-m = 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 850, 513, 565)$ или $(1331, 850, 513, 595)$. Так как μ делит $850 \cdot 336$, то $\mu = 595$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если параметры* (v', k', λ', μ') *принадлежат п.* (5) *заключения предложения, то* $d(\Gamma) = 3$ *и верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(460, 153, 32, 60)$ *и* $\mu = 180, 204, 207$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(495, 190, 53, 85)$ *и* $\mu = 220, 240, 228, 264$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(507, 198, 57, 90)$ *и* $\mu = 231, 273$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(539, 234, 81, 117)$ *и* $\mu = 266, 304$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(540, 231, 78, 114)$ *и* $\mu = 264, 270, 280, 297$.

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 2$ и Γ имеет неглавные собственные значения $n-m, -m$, то $m \geq \theta_2$, $m-1$ делит $v'-k'-1$ и $m-1 \leq (v'-k'-1)/4$. А если $d(\Gamma) \geq 3$, то $\mu \leq b_1 = v'-k'-1$.

Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (5) заключения предложения, и $\mu' \leq v'-k'-1$, то эти параметры равны $(441, 264, 147, 174)$, $(441, 220, 95, 124)$, $(460, 243, 114, 144)$, $(460, 153, 32, 60)$, $(495, 234, 93, 126)$, $(495, 190, 53, 85)$, $(507, 276, 135, 168)$, $(507, 198, 57, 90)$, $(539, 234, 81, 117)$, $(540, 273, 120, 156)$, $(540, 231, 78, 114)$, $(621, 300, 123, 165)$. Допустим, что $d(\Gamma) \geq 3$.

В случае параметров $(441, 264, 147, 174)$ имеем $\theta_2 = -30$, $\mu \leq v'-k'-1 = 176$ и по лемме 2 имеем $171 \cdot 441/261 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(441, 220, 95, 124)$ имеем $\theta_2 = -32$, $\mu \leq v'-k'-1 = 220$ и по лемме 1 имеем $121 \cdot 441/217 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(460, 243, 114, 144)$ имеем $\theta_2 = -33$, $\mu \leq v'-k'-1 = 216$ и по лемме 1 имеем $141 \cdot 460/240 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(460, 153, 32, 60)$ имеем $\theta_2 = -31$, $\mu \leq v'-k'-1 = 306$ и по лемме 1 имеем $57 \cdot 460/150 \leq \mu \leq 91 \cdot 460/184$, поэтому $175 \leq \mu \leq 227$. Так как μ делит $460 \cdot 306$, то $\mu = 180, 204, 207$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(495, 234, 93, 126)$ имеем $\theta_2 = -36$, $\mu \leq v'-k'-1 = 260$ и по лемме 1 имеем $263 < 123 \cdot 495/231 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(495, 190, 53, 85)$ имеем $\theta_2 = -35$, $\mu \leq v'-k'-1 = 304$ и по лемме 1 имеем $82 \cdot 495/187 \leq \mu \leq 120 \cdot 495/225$, поэтому $218 \leq \mu \leq 264$. Так как μ делит $495 \cdot 304$, то $\mu = 220, 240, 228, 264$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(507, 276, 135, 168)$ имеем $\theta_2 = -36$, $\mu \leq v'-k'-1 = 230$ и по лемме 1 имеем $306 < 165 \cdot 507/273 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(507, 198, 57, 90)$ имеем $\theta_2 = -36$, $\mu \leq v'-k'-1 = 308$ и по лемме 1 имеем $87 \cdot 507/195 \leq \mu \leq 126 \cdot 507/234$, поэтому $227 \leq \mu \leq 273$. Так как μ делит $507 \cdot 308$, то $\mu = 231, 273$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(539, 234, 81, 117)$ имеем $\theta_2 = -39$, $\mu \leq v'-k'-1 = 304$ и по лемме 1 имеем $114 \cdot 539/231 \leq \mu \leq 156 \cdot 539/273$, поэтому $266 \leq \mu \leq 304$. Так как μ делит $539 \cdot 304$, то $\mu = 266, 304$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(540, 273, 120, 156)$ имеем $\theta_2 = -39$, $\mu \leq v'-k'-1 = 266$ и по лемме 1 имеем $153 \cdot 540/270 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(540, 231, 78, 114)$ имеем $\theta_2 = -39$, $\mu \leq v'-k'-1 = 308$ и по лемме 1 имеем $111 \cdot 540/228 \leq \mu \leq 153 \cdot 540/270$, поэтому $263 \leq \mu \leq 306$. Так как μ делит $540 \cdot 308$, то $\mu = 264, 270, 280, 297$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(621, 300, 123, 165)$ имеем $\theta_2 = -45$, $\mu \leq v'-k'-1 = 320$ и по лемме 1 имеем $162 \cdot 621/297 \leq \mu$; противоречие.

Пусть $d(\Gamma) = 2$, Γ имеет собственные значения $n-m, -m$ и $m-1 \leq (v'-k'-1)/4$.

В случае параметров $(416, 315, 234, 252)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 21$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 100$ и $m-1 \leq 25$, поэтому $m-1 = 20, 25$, соответственно $n-m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 416, 315, 332)$ или $(v, 416, 315, 338)$; противоречие с тем, что μ не делит $416 \cdot 100$.

В случае параметров $(430, 390, 353, 360)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 10$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 39$ и $m-1 \leq 9$; противоречие.

В случае параметров $(441, 264, 147, 174)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 30$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 176$ и $m-1 \leq 44$, поэтому $m-1 = 44$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 441, 264, 306)$; противоречие с тем, что μ не делит $441 \cdot 176$.

В случае параметров $(441, 220, 95, 124)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 32$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 220$ и $m-1 \leq 55$, поэтому $m-1 = 44, 55$, соответственно $n-m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 441, 220, 261)$ или $(v, 441, 220, 273)$; противоречие с тем, что μ не делит $441 \cdot 220$.

В случае параметров $(456, 315, 210, 234)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 27$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 140$ и $m-1 \leq 35$, поэтому $m-1 = 28, 35$, соответственно $n-m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 456, 315, 340)$ или $(v, 456, 315, 348)$; противоречие с тем, что μ не делит $456 \cdot 140$.

В случае параметров $(460, 243, 114, 144)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 33$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 216$ и $m-1 \leq 54$. Поэтому $m-1 = 36, 54$, соответственно $n-m = 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 460, 243, 275)$ или $(v, 460, 243, 295)$; противоречие с тем, что μ не делит $460 \cdot 216$.

В случае параметров $(460, 153, 32, 60)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 31$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 306$ и $m-1 \leq 76$, поэтому $m-1 = 34, 51$, соответственно $n-m = 8, 5$ и Γ имеет параметры $(v, 460, 153, 180)$ или $(v, 460, 153, 200)$. Так как μ делит $460 \cdot 306$, то $\mu = 180$; противоречие с тем, что кратность 8 равна $34 \cdot 460 \cdot 495/(43 \cdot 180)$.

В случае параметров $(490, 297, 168, 198)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 33$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 192$ и $m-1 \leq 48$, поэтому $m-1 = 32, 48$, соответственно $n-m = 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 490, 297, 325)$ или $(v, 490, 297, 343)$; противоречие с тем, что μ не делит $490 \cdot 192$.

В случае параметров $(495, 234, 93, 126)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 36$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 260$ и $m-1 \leq 65$, поэтому $m-1 = 52, 65$, соответственно $n-m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 495, 234, 283)$ или $(v, 495, 234, 297)$; противоречие с тем, что μ не делит $495 \cdot 260$.

В случае параметров $(495, 190, 53, 85)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 35$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 304$ и $m-1 \leq 76$, поэтому $m-1 = 38, 76$, соответственно $n-m = 7, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 495, 190, 222)$ или $(v, 495, 190, 254)$; противоречие с тем, что μ не делит $495 \cdot 304$.

В случае параметров $(507, 276, 135, 168)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 36$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 230$ и $m-1 \leq 57$. Поэтому $m-1 = 46$, $n-m = 4$ и Γ имеет параметры $(v, 507, 276, 319)$; противоречие с тем, что μ не делит $507 \cdot 230$.

В случае параметров $(507, 198, 57, 90)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 36$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 308$ и $m-1 \leq 77$, поэтому $m-1 = 44, 77$, соответственно $n-m = 6, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 507, 198, 237)$ или $(v, 507, 198, 273)$; противоречие с тем, что μ не делит $507 \cdot 308$.

В случае параметров $(536, 405, 300, 324)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 27$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 130$ и $m-1 \leq 32$, поэтому $m-1 = 26$, $n-m = 4$ и Γ имеет параметры $(v, 536, 405, 428)$; противоречие с тем, что μ не делит $536 \cdot 130$.

В случае параметров $(539, 234, 81, 117)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 39$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 304$ и $m-1 \leq 76$, поэтому $m-1 = 38, 76$, соответственно $n-m = 7, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 539, 234, 266)$ или $(v, 539, 234, 308)$. Так как μ делит $539 \cdot 304$, то $\mu = 308$; противоречие с тем, что кратность 8 равна $76 \cdot 539 \cdot 616/(80 \cdot 308)$.

В случае параметров $(540, 462, 393, 408)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 18$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 77$ и $m-1 \leq 19$; противоречие.

В случае параметров $(540, 363, 234, 264)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 33$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 176$ и $m-1 \leq 44$. Поэтому $m-1 = 44$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 540, 363, 405)$; противоречие с тем, что μ не делит $540 \cdot 176$.

В случае параметров $(540, 273, 120, 156)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 39$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 266$ и $m-1 \leq 66$, поэтому $m-1 = 38$, $n-m = 6$ и Γ имеет параметры $(v, 540, 273, 306)$; противоречие с тем, что μ не делит $540 \cdot 266$.

В случае параметров $(540, 231, 78, 114)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 39$, $m-1$ делит $v' - k' - 1 = 308$ и $m - 1 \leq 77$, поэтому $m - 1 = 44, 77$, соответственно $n - m = 6, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 540, 231, 270)$ или $(v, 540, 231, 306)$. Так как μ делит $540 \cdot 308$, то $\mu = 270$; противоречие с тем, что кратность 6 равна $44 \cdot 540 \cdot 585/(51 \cdot 270)$.

В случае параметров $(616, 410, 261, 296)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 38$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 205$ и $m-1 \leq 51$, поэтому $m-1 = 41$, $n-m = 4$ и Γ имеет параметры $(v, 616, 410, 448)$; противоречие с тем, что μ не делит $616 \cdot 205$.

В случае параметров $(621, 300, 123, 165)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 45$, $m-1$ делит $v' - k' - 1 = 320$ и $m - 1 \leq 80$, поэтому $m - 1 = 64, 80$, соответственно $n - m = 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 621, 300, 361)$ или $(1331, 621, 300, 378)$; противоречие с тем, что μ не делит $621 \cdot 320$.

Лемма 5. *Если параметры* (v', k', λ', μ') *принадлежат п.* (4) *заключения предложения, то либо* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(616, 287, 126, 140)$, $(490, 297, 168, 198)$, $(961, 320, 99, 110)$, *либо* $d(\Gamma) = 3$ *и верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(287, 126, 45, 63)$ *и* $\mu = 140, 160$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(288, 123, 42, 60)$ *и* $\mu = 144, 162$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(320, 99, 18, 36)$ *и* $\mu = 110, 128$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(343, 150, 53, 75)$ *и* $\mu = 168, 192$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(392, 115, 18, 40)$ *и* $\mu = 161, 168$;

(6) $[u]$ *имеет параметры* $(396, 135, 30, 54)$ *и* $\mu = 156, 165, 176, 180, 195, 198$.

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 2$ и Γ имеет неглавные собственные значения $n - m, -m$, то $m \geq \theta_2$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1$ и $m - 1 \leq (v' - k' - 1)/4$. А если $d(\Gamma) \geq 3$, то $\mu \leq b_1 = v' - k' - 1$.

Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (4) заключения предложения, и $\mu' \leq v' - k' - 1$, то эти параметры равны $(287, 126, 45, 63)$, $(288, 147, 66, 84)$, $(288, 123, 42, 60)$, $(297, 168, 87, 105)$, $(301, 150, 65, 84)$, $(301, 108, 27, 45)$, $(320, 99, 18, 36)$, $(343, 150, 53, 75)$, $(344, 175, 78, 100)$, $(344, 147, 50, 72)$, $(375, 198, 93, 117)$, $(392, 115, 18, 40)$, $(396, 135, 30, 54)$ Допустим, что $d(\Gamma) \geq 3$.

В случае параметров $(287, 126, 45, 63)$ имеем $\theta_2 = -21$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 160$ и по лемме 2 имеем $60 \cdot 287/123 \leq \mu \leq 84 \cdot 287/147$, поэтому $140 \leq \mu \leq 160$. Так как μ делит $287 \cdot 160$, то $\mu = 140, 160$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(288, 147, 66, 84)$ имеем $\theta_2 = -21$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 140$ и по лемме 1 имеем $81 \cdot 288/144 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(288, 123, 42, 60)$ имеем $\theta_2 = -21$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 164$ и по лемме 1 имеем $57 \cdot 288/120 \leq \mu \leq 81 \cdot 288/144$, поэтому $137 \leq \mu \leq 162$. Так как μ делит $288 \cdot 164$, то $\mu = 144, 162$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(297, 168, 87, 105)$ имеем $\theta_2 = -21$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 128$ и по лемме 1 имеем $102 \cdot 297/165 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(301, 150, 65, 84)$ имеем $\theta_2 = -22$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 150$ и по лемме 1 имеем $81 \cdot 301/147 \leq \mu$; противоречие.

В случае параметров $(301, 108, 27, 45)$ имеем $\theta_2 = -21$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 192$ и по лемме 1 имеем $42 \cdot 301/105 \leq \mu \leq 66 \cdot 301/129$, поэтому $121 \leq \mu \leq 154$. Так как μ делит $301 \cdot 192$, то $\mu = 129$; противоречие с тем, что μ-подграф из Γ — регулярный граф степени 45 на 129 вершинах.

В случае параметров $(320, 99, 18, 36)$ имеем $\theta_2 = -21$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 220$ и по лемме 1 имеем $33 \cdot 320/96 \leq \mu \leq 57 \cdot 320/120$, поэтому $110 \leq \mu \leq 152$. Так как μ делит $320 \cdot 220$, то $\mu = 110, 128$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(343, 150, 53, 75)$ имеем $\theta_2 = -25$, $\mu \leq v' - k' - 1 = 192$ и по лемме 1 имеем $72 \cdot 343/147 \leq \mu \leq 100 \cdot 343/175$, поэтому $168 \leq \mu \leq 192$. Так как μ делит $343 \cdot 192$, то $\mu = 168, 192$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(344, 175, 78, 100)$ имеем $\theta_2 = -25$, $\mu \le v' - k' - 1 = 168$ и по лемме 1 имеем $97 \cdot 344/172 \le \mu 3$; противоречие. Так как μ делит $539 \cdot 304$, то $\mu = 266, 304$.

В случае параметров $(344, 147, 50, 72)$ имеем $\theta_2 = -25$, $\mu \le v' - k' - 1 = 196$ и по лемме 1 имеем $69 \cdot 344/144 \le \mu \le 97 \cdot 344/172$, поэтому $175 \le \mu \le 194$; противоречие.

В случае параметров $(375, 198, 93, 117)$ имеем $\theta_2 = -27$, $\mu \le v' - k' - 1 = 176$ и по лемме 1 имеем $114 \cdot 375/195 \le \mu$; противоречие.

В случае параметров $(392, 115, 18, 40)$ имеем $\theta_2 = -25$, $\mu \le v' - k' - 1 = 276$ и по лемме 1 имеем $37 \cdot 392/112 \le \mu \le 65 \cdot 392/140$, поэтому $130 \le \mu \le 182$. Так как μ делит $392 \cdot 276$, то $\mu = 161, 168$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(396, 135, 30, 54)$ имеем $\theta_2 = -27$, $\mu \le v' - k' - 1 = 260$ и по лемме 1 имеем $51 \cdot 396/132 \le \mu \le 81 \cdot 396/162$, поэтому $153 \le \mu \le 198$. Так как μ делит $396 \cdot 260$, то $\mu = 156, 165, 176, 180, 195, 198$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

Пусть $d(\Gamma) = 2$, Γ имеет собственные значения $n - m, -m$ и $m - 1 \le (v' - k' - 1)/4$.

В случае параметров $(287, 126, 45, 63)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 21$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 160$ и $m - 1 \le 40$, поэтому $m - 1 = 20, 32, 40$, соответственно $n - m = 7, 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 287, 126, 140)$, $(v, 287, 126, 155)$ или $(v, 287, 126, 164)$. Так как μ делит $460 \cdot 306$, то $\mu = 140$ и Γ имеет параметры $(616, 287, 126, 140)$.

В случае параметров $(288, 147, 66, 84)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 21$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 140$ и $m - 1 \le 35$, поэтому $m - 1 = 20, 28, 35$, соответственно $n - m = 6, 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 288, 147, 162)$, $(v, 288, 147, 172)$ или $(v, 288, 147, 180)$. Так как μ делит $288 \cdot 140$, то $\mu = 180$; противоречие с тем, что кратность 6 равна $35 \cdot 288 \cdot 324/(39 \cdot 180)$.

В случае параметров $(288, 123, 42, 60)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 21$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 164$ и $m - 1 \le 41$, поэтому $m - 1 = 41$, $n - m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 288, 123, 162)$; противоречие с тем, что μ не делит $288 \cdot 164$.

В случае параметров $(297, 168, 87, 105)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 21$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 128$ и $m - 1 \le 32$, поэтому $m - 1 = 32$, $n - m = 3$ и Γ имеет параметры $(490, 297, 168, 198)$.

В случае параметров $(300, 273, 248, 252)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 7$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 26$ и $m - 1 \le 6$; противоречие.

В случае параметров $(301, 150, 65, 84)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 22$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 150$ и $m - 1 \le 37$. Поэтому $m - 1 = 25, 30$, соответственно $n - m = 5, 4$ и Γ имеет параметры $(v, 301, 150, 171)$ или $(v, 301, 150, 177)$; противоречие с тем, что μ не делит $301 \cdot 150$.

В случае параметров $(301, 108, 27, 45)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 21$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 192$ и $m - 1 \le 48$, поэтому $m - 1 = 24, 32, 48$, соответственно $n - m = 7, 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 301, 108, 126)$, $(v, 301, 108, 136)$ или $(v, 301, 108, 154)$. Противоречие с тем, что μ не делит $301 \cdot 192$.

В случае параметров $(320, 99, 18, 36)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 21$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 220$ и $m - 1 \le 55$, поэтому $m - 1 = 20, 22, 55$, соответственно $n - m = 10, 9, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 320, 99, 110)$, $(v, 320, 99, 113)$ или $(v, 320, 99, 152)$. Так как μ делит $320 \cdot 220$, то $\mu = 110$ и Γ имеет параметры $(961, 320, 99, 110)$.

В случае параметров $(343, 150, 53, 75)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 25$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 192$ и $m - 1 \le 48$, поэтому $m - 1 = 24, 32, 48$, соответственно $n - m = 7, 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 343, 150, 168)$, $(v, 343, 150, 178)$ или $(v, 343, 150, 196)$. Так как μ делит $343 \cdot 192$, то $\mu = 168, 196$. Противоречие с тем, что в первом случае кратность 7 равна $24 \cdot 343 \cdot 368/(32 \cdot 168)$, а во втором случае что кратность 3 равна $48 \cdot 343 \cdot 392/(52 \cdot 196)$.

В случае параметров $(344, 175, 78, 100)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 25$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 168$ и $m - 1 \le 42$, поэтому $m - 1 = 24, 28, 42$, соответственно $n - m = 6, 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 344, 175, 194)$, $(v, 344, 175, 199)$ или $(v, 344, 175, 215)$; противоречие с тем, что μ не делит $344 \cdot 168$.

В случае параметров $(344, 147, 50, 72)$ имеем $m \ge -\theta_2 = 25$, $m - 1$ делит $v' - k' - 1 = 197$ и $m - 1 \le 49$; противоречие.

В случае параметров $(351, 300, 255, 264)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 12$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 50$ и $m-1 \leq 12$; противоречие.

В случае параметров $(352, 243, 162, 180)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 21$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 108$ и $m-1 \leq 27$, поэтому $m-1 = 27$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 352, 243, 268)$; противоречие с тем, что μ не делит $352 \cdot 108$.

В случае параметров $(364, 297, 240, 252)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 15$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 66$ и $m-1 \leq 16$; противоречие.

В случае параметров $(375, 198, 93, 117)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 27$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 176$ и $m-1 \leq 44$, поэтому $m-1 = 44$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 375, 198, 240)$; противоречие с тем, что кратность 3 равна $44 \cdot 375 \cdot 430/(48 \cdot 240)$.

В случае параметров $(392, 255, 158, 180)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 25$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 136$ и $m-1 \leq 34$. Поэтому $m-1 = 34$, $n-m = 3$ и Γ имеет параметры $(v, 392, 255, 287)$; противоречие с тем, что μ не делит $392 \cdot 136$.

В случае параметров $(392, 115, 18, 40)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 25$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 276$ и $m-1 \leq 69$, поэтому $m-1 = 46, 69$, соответственно $n-m = 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 392, 115, 157)$ или $(v, 392, 115, 182)$; противоречие с тем, что μ не делит $392 \cdot 276$.

В случае параметров $(396, 135, 30, 54)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 27$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 260$ и $m-1 \leq 65$, поэтому $m-1 = 26, 52, 65$, соответственно $n-m = 9, 4, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 396, 135, 153)$, $(v, 396, 135, 184)$ или $(v, 396, 135, 198)$. Так как μ делит $396 \cdot 260$, то $\mu = 198$; противоречие с тем, что кратность 3 равна $65 \cdot 396 \cdot 462/(36 \cdot 198)$.

В случае параметров $(400, 378, 357, 360)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 6$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 21$ и $m-1 \leq 5$; противоречие.

В случае параметров $(400, 243, 138, 162)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 27$, $m-1$ делит $v'-k'-1 = 156$ и $m-1 \leq 39$, поэтому $m-1 = 26, 39$, соответственно $n-m = 5, 3$ и Γ имеет параметры $(v, 400, 243, 265)$ или $(v, 400, 243, 280)$; противоречие с тем, что μ не делит $400 \cdot 156$.

Лемма 6. *Если параметры* (v', k', λ', μ') *принадлежат п.* (3) *заключения предложения, то либо* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(640, 243, 66, 108)$, *либо* $d(\Gamma) = 3$ *и верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(171, 60, 15, 24)$ *и* $\mu = 66$;

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(205, 68, 15, 26)$ *и* $\mu = 82, 85$;

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(208, 81, 24, 36)$ *и* $\mu = 91, 96, 104$;

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(216, 75, 18, 30)$ *и* $\mu = 90, 96, 105$;

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(243, 66, 9, 21)$ *и* $\mu = 72, 81, 99, 108$;

(6) $[u]$ *имеет параметры* $(245, 108, 39, 54)$ *и* $\mu = 119, 136$;

(7) $[u]$ *имеет параметры* $(246, 105, 36, 51)$ *и* $\mu = 120, 123$;

(8) $[u]$ *имеет параметры* $(246, 85, 20, 34)$ *и* $\mu = 96, 120, 123$;

(9) $[u]$ *имеет параметры* $(276, 75, 10, 24)$ *и* $\mu = 92, 96, 100, 120$.

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 2$ и Γ имеет неглавные собственные значения $n-m, -m$, то $m \geq \theta_2$, $m-1$ делит $v'-k'-1$ и $m-1 \leq (v'-k'-1)/4$. А если $d(\Gamma) \geq 3$, то $\mu \leq b_1 = v'-k'-1$.

Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (3) заключения предложения и $\mu' \leq v'-k'-1$, то эти параметры равны $(171, 60, 15, 24)$, $(205, 108, 51, 63)$, $(205, 68, 15, 26)$, $(208, 81, 24, 36)$, $(216, 129, 72, 84)$, $(216, 75, 18, 30)$, $(220, 135, 78, 90)$, $(243, 66, 9, 21)$, $(245, 108, 39, 54)$, $(246, 126, 57, 72)$, $(246, 105, 36, 51)$, $(246, 85, 20, 34)$, $(276, 165, 92, 108)$, $(276, 75, 10, 24)$. Допустим, что $d(\Gamma) \geq 3$.

В случае параметров $(171, 60, 15, 24)$ имеем $\theta_2 = -12$, $\mu \leq v'-k'-1 = 110$ и по лемме 2 имеем $21 \cdot 171/57 \leq \mu \leq 36 \cdot 171/72$, поэтому $63 \leq \mu \leq 85$. Так как μ делит $171 \cdot 110$, то $\mu = 66$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(205,108,51,63)$ имеем $\theta_2=-15$, $\mu\le v'-k'-1=96$ и по лемме 1 имеем $60\cdot 205/105\le\mu$; противоречие.

В случае параметров $(205,68,15,26)$ имеем $\theta_2=-14$, $\mu\le v'-k'-1=136$ и по лемме 1 имеем $23\cdot 205/65\le\mu\le 40\cdot 205/82$, поэтому $73\le\mu\le 100$. Так как μ делит $205\cdot 136$, то $\mu=82,85$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(208,81,24,36)$ имеем $\theta_2=-15$, $\mu\le v'-k'-1=126$ и по лемме 1 имеем $33\cdot 208/78\le\mu\le 51\cdot 208/96$, поэтому $88\le\mu\le 110$. Так как μ делит $208\cdot 126$, то $\mu=91,96,104$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(216,129,72,84)$ имеем $\theta_2=-15$, $\mu\le v'-k'-1=86$ и по лемме 1 имеем $81\cdot 216/126\le\mu$; противоречие.

В случае параметров $(216,75,18,30)$ имеем $\theta_2=-15$, $\mu\le v'-k'-1=140$ и по лемме 1 имеем $27\cdot 216/72\le\mu\le 45\cdot 216/90$, поэтому $81\le\mu\le 108$. Так как μ делит $216\cdot 140$, то $\mu=90,96,105$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(220,135,78,90)$ имеем $\theta_2=-15$, $\mu\le v'-k'-1=84$ и по лемме 1 имеем $87\cdot 220/132\le\mu$; противоречие.

В случае параметров $(243,66,9,21)$ имеем $\theta_2=-15$, $\mu\le v'-k'-1=176$ и по лемме 1 имеем $18\cdot 243/63\le\mu\le 36\cdot 243/81$, поэтому $70\le\mu\le 108$. Так как μ делит $243\cdot 176$, то $\mu=72,81,99,108$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(245,108,39,54)$ имеем $\theta_2=-18$, $\mu\le v'-k'-1=136$ и по лемме 1 имеем $51\cdot 245/105\le\mu\le 72\cdot 245/126$, поэтому $119\le\mu\le 136$. Так как μ делит $245\cdot 136$, то $\mu=119,136$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(246,126,57,72)$ имеем $\theta_2=-18$, $\mu\le v'-k'-1=119$ и по лемме 1 имеем $69\cdot 246/123\le\mu$; противоречие.

В случае параметров $(246,85,20,34)$ имеем $\theta_2=-17$, $\mu\le v'-k'-1=160$ и по лемме 1 имеем $31\cdot 246/82\le\mu\le 51\cdot 246/102$, поэтому $93\le\mu\le 123$. Так как μ делит $246\cdot 160$, то $\mu=96,120,123$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(276,165,92,108)$ имеем $\theta_2=-19$, $\mu\le v'-k'-1=110$ и по лемме 1 имеем $105\cdot 276/162\le\mu$; противоречие.

В случае параметров $(276,75,10,24)$ имеем $\theta_2=-17$, $\mu\le v'-k'-1=200$ и по лемме 1 имеем $21\cdot 276/72\le\mu\le 41\cdot 276/92$, поэтому $81\le\mu\le 123$. Так как μ делит $276\cdot 200$, то $\mu=92,96,100,120$. Ввиду утверждения (3) леммы 2 в любом случае диаметр Γ равен 3.

Пусть $d(\Gamma)=2$, Γ имеет собственные значения $n-m,-m$ и $m-1\le(v'-k'-1)/4$.

В случае параметров $(162,138,117,120)$ имеем $m\ge-\theta_2=6$, $m-1$ делит $v'-k'-1=23$ и $m-1\le 5$; противоречие.

В случае параметров $(171,60,15,24)$ имеем $m\ge-\theta_2=12$, $m-1$ делит $v'-k'-1=110$ и $m-1\le 27$, поэтому $m-1=22$, $n-m=4$ и Γ имеет параметры $(v,171,60,79)$; противоречие с тем, что 79 не делит $171\cdot 110$.

В случае параметров $(175,108,63,72)$ имеем $m\ge-\theta_2=12$, $m-1$ делит $v'-k'-1=66$ и $m-1\le 16$, поэтому $m-1=11$, $n-m=5$ и Γ имеет параметры $(v,175,108,115)$; противоречие с тем, что μ не делит $175\cdot 66$.

В случае параметров $(176,135,102,108)$ имеем $m\ge-\theta_2=9$, $m-1$ делит $v'-k'-1=40$ и $m-1\le 10$, поэтому $m-1=8,10$, соответственно $n-m=4,3$ и Γ имеет параметры $(v,176,135,140)$ или $(v,176,135,143)$; противоречие с тем, что μ не делит $176\cdot 40$.

В случае параметров $(205,108,51,63)$ имеем $m\ge-\theta_2=15$, $m-1$ делит $v'-k'-1=96$ и $m-1\le 24$, поэтому $m-1=16,24$, соответственно $n-m=5,3$ и Γ имеет параметры $(v,205,108,120)$ или $(v,205,108,130)$. Так как μ делит $205\cdot 96$, то $\mu=120$ и кратность 5 равна $16\cdot 205\cdot 222/(22\cdot 120)$; противоречие.

В случае параметров $(205,68,15,26)$ имеем $m\ge-\theta_2=14$, $m-1$ делит $v'-k'-1=136$ и $m-1\le 34$. Поэтому $m-1=17,34$, соответственно $n-m=7,3$ и Γ имеет параметры $(v,205,68,79)$ или $(v,205,68,100)$; противоречие с тем, что μ не делит $205\cdot 136$.

В случае параметров $(208,81,24,36)$ имеем $m\ge-\theta_2=15$, $m-1$ делит $v'-k'-1=126$

и $m-1 \leq 31$, поэтому $m-1=18,21$, соответственно $n-m=6,5$ и Γ имеет параметры $(v,208,81,94)$ или $(v,208,81,98)$. Противоречие с тем, что μ не делит $208\cdot 126$.

В случае параметров $(216,129,72,84)$ имеем $m \geq -\theta_2=15$, $m-1$ делит $v'-k'-1=86$ и $m-1\leq 21$; противоречие.

В случае параметров $(216,75,18,30)$ имеем $m\geq -\theta_2=15$, $m-1$ делит $v'-k'-1=140$ и $m-1\leq 35$, поэтому $m-1=14,20,28,35$, соответственно $n-m=9,6,4,3$ и Γ имеет параметры $(v,216,75,81)$, $(v,216,75,90)$, $(v,216,75,100)$ или $(v,216,75,108)$. Так как μ делит $216\cdot 140$, то $\mu=90,108$. Противоречие с тем, что в первом случае кратность 6 равна $20\cdot 216\cdot 237/(27\cdot 90)$, а во втором случае что кратность 3 равна $35\cdot 216\cdot 252/(39\cdot 108)$.

В случае параметров $(220,135,78,90)$ имеем $m\geq -\theta_2=15$, $m-1$ делит $v'-k'-1=84$ и $m-1\leq 21$, поэтому $m-1=14,21$, соответственно $n-m=5,3$ и Γ имеет параметры $(v,220,135,145)$ или $(v,220,135,154)$. Так как μ делит $220\cdot 84$, то $\mu=154$ и кратность 3 равна $21\cdot 220\cdot 242/(25\cdot 154)$; противоречие.

В случае параметров $(236,180,135,144)$ имеем $m\geq -\theta_2=12$, $m-1$ делит $v'-k'-1=55$ и $m-1\leq 13$. Поэтому $m-1=11$, $n-m=4$ и Γ имеет параметры $(v,236,180,188)$. Противоречие с тем, что μ не делит $236\cdot 55$.

В случае параметров $(243,66,9,21)$ имеем $m\geq -\theta_2=15$, $m-1$ делит $v'-k'-1=176$ и $m-1\leq 44$, поэтому $m-1=16,22,44$, соответственно $n-m=10,7,3$ и Γ имеет параметры $(v,243,66,73)$, $(v,243,66,82)$ или $(v,243,66,108)$. Так как μ делит $243\cdot 176$, то $\mu=108$ и Γ имеет параметры $(640,243,66,108)$.

В случае параметров $(245,108,39,54)$ имеем $m\geq -\theta_2=18$, $m-1$ делит $v'-k'-1=136$ и $m-1\leq 34$, поэтому $m-1=17,34$, соответственно $n-m=7,3$ и Γ имеет параметры $(v,245,108,129)$ или $(v,245,108,140)$. Так как μ делит $245\cdot 136$, то $\mu=140$; противоречие с тем, что кратность 3 равна $34\cdot 245\cdot 280/(38\cdot 140)$.

В случае параметров $(246,126,57,72)$ имеем $m\geq -\theta_2=18$, $m-1$ делит $v'-k'-1=119$ и $m-1\leq 37$, поэтому $m-1=17$, $n-m=6$ и Γ имеет параметры $(v,246,126,138)$; противоречие с тем, что μ не делит $246\cdot 119$.

В случае параметров $(246,105,36,51)$ имеем $m\geq -\theta_2=18$, $m-1$ делит $v'-k'-1=140$ и $m-1\leq 35$. Поэтому $m-1=20,28,35$, соответственно $n-m=6,4,3$ и Γ имеет параметры $(v,246,105,120)$, $(v,246,105,130)$ или $(v,246,105,138)$. Так как μ делит $246\cdot 140$, то $\mu=120$; противоречие с тем, что кратность 6 равна $20\cdot 246\cdot 267/(27\cdot 120)$.

В случае параметров $(246,85,20,34)$ имеем $m\geq -\theta_2=17$, $m-1$ делит $v'-k'-1=160$ и $m-1\leq 40$. Поэтому $m-1=16,20,32,40$, соответственно $n-m=9,7,4,3$ и Γ имеет параметры $(v,246,85,93)$, $(v,246,85,99)$, $(v,246,85,114)$ или $(v,246,85,123)$. Так как μ делит $246\cdot 160$, то $\mu=123$; противоречие с тем, что кратность 3 равна $40\cdot 246\cdot 287/(44\cdot 123)$.

В случае параметров $(250,153,88,102)$ имеем $m\geq -\theta_2=17$, $m-1$ делит $v'-k'-1=96$ и $m-1\leq 24$, поэтому $m-1=16,24$, соответственно $n-m=5,3$ и Γ имеет параметры $(v,250,153,165)$ или $(v,250,153,175)$. Противоречие с тем, что μ не делит $250\cdot 96$.

В случае параметров $(276,165,92,108)$ имеем $m\geq -\theta_2=19$, $m-1$ делит $v'-k'-1=110$ и $m-1\leq 27$, поэтому $m-1=22$, $n-m=4$ и Γ имеет параметры $(v,276,165,184)$; противоречие с тем, что кратность 4 равна $22\cdot 276\cdot 299/(27\cdot 184)$.

В случае параметров $(276,75,10,24)$ имеем $m\geq -\theta_2=17$, $m-1$ делит $v'-k'-1=200$ и $m-1\leq 50$, поэтому $m-1=20,25,40,50$, соответственно $n-m=9,7,4,3$ и Γ имеет параметры $(v,276,75,87)$, $(v,276,75,94)$, $(v,276,75,112)$ или $(v,276,75,125)$; противоречие с тем, что μ не делит $276\cdot 200$.

В случае параметров $(280,243,210,216)$ имеем $m\geq -\theta_2=9$, $m-1$ делит $v'-k'-1=36$ и $m-1\leq 9$. Поэтому $m-1=9$, $n-m=3$ и Γ имеет параметры $(v,280,243,250)$; противоречие с тем, что μ не делит $280\cdot 36$. Лемма доказана.

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы, параметры которых лежат в пп. (3)–(6) из заключения предложения. Ввиду лемм 3–6 либо $d=2$ и заключение теоремы выполняется, либо

$d = 3$. Если $c_2 \geq 2b_1/3$, то ввиду леммы 1 окрестности вершин в Γ являются исключительными графами из п. (2) заключения предложения и имеют параметры $(35, 18, 9, 9)$, $(119, 54, 21, 27)$, $(147, 66, 25, 33)$. Значит, $c_2 < 2b_1/3$.

Лемма 7. *Параметры окрестностей вершин не лежат в пп.* (5), (6) *из заключения предложения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $c_2 < 2b_1/3$, то параметры окрестностей вершин не лежат в п. (6) из заключения предложения.

Если параметры окрестностей вершин лежат в п. (5) из заключения предложения, то ввиду леммы 4 подграф $[u]$ имеет параметры $(460, 153, 32, 60)$ и $\mu = 180$. В этом случае $k_2 = 460 \times 306/180 = 782$.

По утверждению (2) леммы 2 имеем $180x_0 \leq (460 - x_0) \cdot 280 \cdot 34^2/334^2$, поэтому $x_0 \leq 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $782 \cdot 7$, но не меньше $180k_3$. Отсюда $k_3 \leq 30$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 29 и указанное число ребер не меньше $431k_3$. Поэтому $k_3 \leq 12$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{460, 306, b_2; 1, 180, c_3\}$, причем $b_2 \leq 7, c_3 \geq 449$ и c_3 делит $23 \cdot 34 \cdot b_2$; противоречие.

Лемма 8. *Параметры окрестностей вершин не лежат в п.* (4) *из заключения предложения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если параметры окрестностей вершин лежат в п. (4) из заключения предложения, то ввиду леммы 5 верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры $(320, 99, 18, 36)$ и $\mu = 110, 128$;

(2) $[u]$ имеет параметры $(392, 115, 18, 40)$ и $\mu = 161, 168$;

(3) $[u]$ имеет параметры $(396, 135, 30, 54)$ и $\mu = 156, 165$.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(320, 99, 18, 36)$ и $\mu = 110$. Тогда $k_2 = 320 \cdot 220/110 = 640$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $110x_0 \leq (320 - x_0) \cdot 210 \cdot 24^2/216^2$, поэтому $x_0 \leq 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $640 \cdot 7$, но не меньше $110k_3$. Отсюда $k_3 \leq 40$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 39 и указанное число ребер не меньше $281k_3$. Поэтому $k_3 \leq 15$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \leq 14$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{320, 220, b_2; 1, 110, c_3\}$, поэтому $b_2 = 1, c_3 = 320$. Противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(320, 99, 18, 36)$ и $\mu = 128$. Тогда $k_2 = 320 \cdot 220/128 = 550$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $128x_0 \leq (320 - x_0) \cdot 192 \cdot 24^2/216^2$, поэтому $x_0 \leq 5$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $550 \cdot 5$, но не меньше $128k_3$. Отсюда $k_3 \leq 21$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 20 и указанное число ребер не меньше $300k_3$. Поэтому $k_3 \leq 9$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \leq 8$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{320, 220, b_2; 1, 128, c_3\}$, причем $b_2 \leq 5, c_3 \geq 313$. Отсюда c_3 делится на 11 и $c_3 = 319 = 11 \cdot 29$; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(392, 115, 18, 40)$ и $\mu = 161$. Тогда $k_2 = 392 \cdot 276/161 = 672$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $161x_0 \leq (392 - x_0) \cdot 231 \cdot 28^2/252^2$, поэтому $x_0 \leq 6$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $672 \cdot 6$, но не меньше $161k_3$. Отсюда $k_3 \leq 25$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 24 и указанное число ребер не меньше $368k_3$. Поэтому $k_3 \leq 10$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{392, 276, b_2; 1, 161, c_3\}$, причем $b_2 \leq 6, c_3 \geq 383$. Отсюда c_3 делится на 7 и $c_3 = 385 = 7 \cdot 55$; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(392, 115, 18, 40)$ и $\mu = 168$. Тогда $k_2 = 392 \cdot 276/168 = 644$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $168x_0 \leq (392 - x_0) \cdot 224 \cdot 28^2/252^2$, поэтому $x_0 \leq 6$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $644 \cdot 6$, но не меньше $168k_3$. Отсюда $k_3 \leq 23$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 22 и указанное число ребер не меньше $370k_3$. Поэтому $k_3 \leq 10$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{392, 276, b_2; 1, 161, c_3\}$, причем $b_2 \leq 6, c_3 \geq 383$. Отсюда c_3 не делится на 23 и делит $28b_2$; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(396, 135, 30, 54)$ и $\mu = 156$. Тогда $k_2 = 396 \cdot 260/156 = 660$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $156x_0 \leq (396 - x_0) \cdot 240 \cdot 30^2/294^2$, поэтому $x_0 \leq 6$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $660 \cdot 6$, но не меньше $156k_3$. Отсюда $k_3 \le 25$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 24 и указанное число ребер не меньше $372k_3$. Поэтому $k_3 \le 10$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{396, 260, b_2; 1, 156, c_3\}$, причем $b_2 \le 6, c_3 \ge 387$. Если c_3 не делится на 11, то c_3 делит $60b_2$; противоречие. Значит, c_3 делится на 11, $c_3 = k$, поэтому $b_2 = 3, 6$ и допустимых массивов пересечений нет; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(396, 135, 30, 54)$ и $\mu = 165$. Тогда $k_2 = 396 \cdot 260/165 = 624$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $165x_0 \le (396 - x_0) \cdot 231 \cdot 28^2/252^2$, поэтому $x_0 \le 6$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $624 \cdot 6$, но не меньше $165k_3$. Отсюда $k_3 \le 22$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 21 и указанное число ребер не меньше $375k_3$. Поэтому $k_3 \le 9$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{396, 260, b_2; 1, 165, c_3\}$, причем $b_2 \le 6, c_3 \ge 388$. Отсюда c_3 делится на 13, поэтому $b_2 = 5, c_3 = 390$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Лемма 9. *Параметры окрестностей вершин не лежат в п.* (3) *из заключения предложения.*

Доказательство. Если параметры окрестностей вершин лежат в п. (3) из заключения предложения, то ввиду леммы 5 верно одно из утверждений:

(1) $[u]$ имеет параметры $(171, 60, 15, 24)$ и $\mu = 66$;
(2) $[u]$ имеет параметры $(205, 68, 15, 26)$ и $\mu = 82, 85$;
(3) $[u]$ имеет параметры $(216, 75, 18, 30)$ и $\mu = 90$;
(4) $[u]$ имеет параметры $(243, 66, 9, 21)$ и $\mu = 72, 81, 99, 108$;
(5) $[u]$ имеет параметры $(246, 85, 20, 34)$ и $\mu = 96$;
(6) $[u]$ имеет параметры $(276, 75, 10, 24)$ и $\mu = 92, 96, 100, 120$.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(171, 60, 15, 24)$ и $\mu = 66$. Тогда $k_2 = 171 \cdot 110/66 = 285$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $66x_0 \le (171 - x_0) \cdot 105 \cdot 15^2/129^2$, поэтому $x_0 \le 3$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $285 \cdot 3$, но не меньше $66k_3$. Отсюда $k_3 \le 12$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 11 и указанное число ребер не меньше $160k_3$. Поэтому $k_3 \le 5$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{171, 110, b_2; 1, 66, c_3\}$, причем $b_2 \le 3, c_3 \ge 167$. Отсюда $c_3 = k$, $b_2 = 3$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(205, 68, 15, 26)$ и $\mu = 82$. Тогда $k_2 = 205 \cdot 136/82 = 340$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $82x_0 \le (205 - x_0) \cdot 123 \cdot 17^2/147^2$, поэтому $x_0 \le 4$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $340 \cdot 4$, но не меньше $82k_3$. Отсюда $k_3 \le 16$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 15 и указанное число ребер не меньше $190k_3$. Поэтому $k_3 \le 7$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \le 6$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{205, 136, b_2; 1, 82, c_3\}$, причем $b_2 \le 4, c_3 \ge 200$. Отсюда c_3 делится на 5 и $c_3 = 200$; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(205, 68, 15, 26)$ и $\mu = 85$. Тогда $k_2 = 205 \cdot 136/85 = 328$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $85x_0 \le (205 - x_0) \cdot 120 \cdot 17^2/147^2$, поэтому $x_0 \le 3$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $328 \cdot 3$, но не меньше $85k_3$. Отсюда $k_3 \le 11$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 10 и указанное число ребер не меньше $195k_3$. Поэтому $k_3 \le 5$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \le 4$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{205, 136, b_2; 1, 85, c_3\}$, причем $b_2 \le 3, c_3 \ge 202$. Отсюда c_3 делится на 41; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(216, 75, 18, 30)$ и $\mu = 90$. Тогда $k_2 = 216 \cdot 140/90 = 336$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $90x_0 \le (216 - x_0) \cdot 126 \cdot 18^2/162^2$, поэтому $x_0 \le 3$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $336 \cdot 3$, но не меньше $90k_3$. Отсюда $k_3 \le 11$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 10 и указанное число ребер не меньше $206k_3$. Поэтому $k_3 \le 4$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{216, 140, b_2; 1, 90, c_3\}$, причем $b_2 \le 3, c_3 \ge 213$. Отсюда c_3 не делится на 7 и делит 144; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(243, 66, 9, 21)$ и $\mu = 72$. Тогда $k_2 = 243 \cdot 176/72 = 594$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $72x_0 \le (243 - x_0) \cdot 171 \cdot 18^2/144^2$, поэтому $x_0 \le 8$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $594 \cdot 8$, но не меньше $72k_3$. Отсюда $k_3 \le 67$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 66 и указанное число ребер не меньше $179k_3$. Поэтому $k_3 \le 26$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \le 21$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{243, 176, b_2; 1, 72, c_3\}$, причем $b_2 \le 8, c_3 \ge 223$. Если c_3 делится на 11, то $c_3 = 231, b_2 = 7$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(243, 66, 9, 21)$ и $\mu = 81$. Тогда $k_2 = 243 \cdot 176/81 = 528$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $81x_0 \le (243 - x_0) \cdot 162 \cdot 18^2/144^2$, поэтому $x_0 \le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $528 \cdot 7$, но не меньше $81k_3$. Отсюда $k_3 \le 45$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 44 и указанное число ребер не меньше $199k_3$. Поэтому $k_3 \le 18$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \le 16$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{243, 176, b_2; 1, 81, c_3\}$, причем $b_2 \le 7, c_3 \ge 228$. Снова $c_3 = 231, b_2 = 7$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(243, 66, 9, 21)$ и $\mu = 99$. Тогда $k_2 = 243 \cdot 176/99 = 432$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $99x_0 \le (243 - x_0) \cdot 144 \cdot 18^2/144^2$, поэтому $x_0 \le 5$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $432 \cdot 5$, но не меньше $99k_3$. Отсюда $k_3 \le 21$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 20 и указанное число ребер не меньше $223k_3$. Поэтому $k_3 \le 9$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{243, 176, b_2; 1, 88, c_3\}$, причем $b_2 \le 5, c_3 \ge 235$. Отсюда $c_3 = 240, b_2 = 5$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(243, 66, 9, 21)$ и $\mu = 108$. Тогда $k_2 = 243 \cdot 176/108 = 396$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $108x_0 \le (243 - x_0) \cdot 135 \cdot 18^2/144^2$, поэтому $x_0 \le 4$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $396 \cdot 4$, но не меньше $108k_3$. Отсюда $k_3 \le 14$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 13 и указанное число ребер не меньше $230k_3$. Поэтому $k_3 \le 6$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{243, 176, b_2; 1, 108, c_3\}$, причем $b_2 \le 4, c_3 \ge 238$. Отсюда $c_3 = 242$ или делит 144; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(246, 85, 20, 34)$ и $\mu = 96$. Тогда $k_2 = 246 \cdot 160/96 = 410$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $96x_0 \le (246 - x_0) \cdot 150 \cdot 20^2/184^2$, поэтому $x_0 \le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $410 \cdot 7$, но не меньше $96k_3$. Отсюда $k_3 \le 29$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 28 и указанное число ребер не меньше $218k_3$. Поэтому $k_3 \le 13$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \le 12$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{246, 160, b_2; 1, 96, c_3\}$, причем $b_2 \le 7, c_3 \ge 235$. Отсюда $c_3 = 240, b_2 = 3, 6$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(276, 75, 10, 24)$ и $\mu = 92$. Тогда $k_2 = 276 \cdot 200/92 = 600$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $92x_0 \le (276 - x_0) \cdot 184 \cdot 20^2/164^2$, поэтому $x_0 \le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $600 \cdot 7$, но не меньше $92k_3$. Отсюда $k_3 \le 45$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 44 и указанное число ребер не меньше $232k_3$. Поэтому $k_3 \le 18$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \le 16$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{276, 200, b_2; 1, 92, c_3\}$, причем $b_2 \le 7, c_3 \ge 261$. Отсюда c_3 делится на 5, поэтому $c_3 = 265, 270, 275$; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(276, 75, 10, 24)$ и $\mu = 96$. Тогда $k_2 = 276 \cdot 200/96 = 575$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $96x_0 \le (276 - x_0) \cdot 180 \cdot 20^2/164^2$, поэтому $x_0 \le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $575 \cdot 7$, но не меньше $96k_3$. Отсюда $k_3 \le 41$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 40 и указанное число ребер не меньше $236k_3$. Поэтому $k_3 \le 17$. Повторив это рассуждение, убедимся, что $k_3 \le 15$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{276, 200, b_2; 1, 96, c_3\}$, причем $b_2 \le 7, c_3 \ge 262$. Отсюда c_3 делится на 23; противоречие.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(276, 75, 10, 24)$ и $\mu = 100$. Тогда $k_2 = 276 \cdot 200/100 = 552$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $100x_0 \le (276 - x_0) \cdot 176 \cdot 20^2/164^2$, поэтому $x_0 \le 7$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $552 \cdot 7$, но не меньше $100k_3$. Отсюда $k_3 \le 38$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 37 и указанное число ребер не меньше $239k_3$. Поэтому $k_3 \le 16$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{276, 200, b_2; 1, 100, c_3\}$, причем $b_2 \le 7, c_3 \ge 261$. Отсюда c_3 делится на 23, поэтому $c_3 = 276$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые.

Пусть $[u]$ имеет параметры $(276, 75, 10, 24)$ и $\mu = 120$. Тогда $k_2 = 276 \cdot 200/120 = 460$. По утверждению (2) леммы 2 имеем $120x_0 \le (276 - x_0) \cdot 156 \cdot 20^2/164^2$, поэтому $x_0 \le 5$ и число ребер между Γ_2 и Γ_3 не больше $460 \cdot 5$, но не меньше $120k_3$. Отсюда $k_3 \le 19$, степень вершины в графе Γ_3 не больше 18 и указанное число ребер не меньше $258k_3$. Поэтому $k_3 \le 8$. Теперь Γ

имеет массив пересечений $\{276, 200, b_2; 1, 120, c_3\}$, причем $b_2 \leq 5, c_3 \geq 269$. Отсюда c_3 делится на 23, поэтому $c_3 = 276, b_2 = 3$; противоречие с тем, что кратности собственных значений не целые. Лемма и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 475–478.
2. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s,t)$ // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 2. С. 145–148.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Исключительные сильно регулярные графы с собственным значением 3 // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 1. С. 27–30.
4. **Koolen J.H., Park J.** Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory. Ser. A. 2012. Vol. 119. P. 546–555.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-кор. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 510.8

КЛАССЫ СВОЙСТВ, СОХРАНЯЮЩИХСЯ ПРИ МОРФИЗМАХ ОБОБЩЕНИЙ МНОГООСНОВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ[1]

Н. В. Нагул

В работе развивается метод логико-алгебраических уравнений (ЛАУ) — метод построения условий сохранения свойств некоторых обобщений многоосновных алгебраических систем при отображениях их друг в друга, причем критерии сохранения формулируются в терминах понятия канонических распространений этих отображений на ступени Н. Бурбаки. На основе алгоритмов упрощения получаемых решений ЛАУ выделяются классы формул, сохраняющихся при морфизмах одного типа.

N. V. Nagul. Classes of properties preserved under morphisms of generalizations of many-sorted algebraic systems in studying dynamics.

We develop the method of logical algebraic equations, which is a method for constructing preservation conditions for properties of some generalizations of many-sorted algebraic systems under their mappings to each other. Preservation criteria are formulated in terms of the notion of canonical generalization of these mappings to Bourbaki grades. Algorithms that simplify solutions of logical algebraic equations are used to describe classes of formulas preserved under single-type morphisms.

Keywords: preservation of properties, morphism, many-sorted algebraic system, logical algebraic equation.

1. Введение

Настоящая статья посвящена развитию представленного в [10] метода математической теории систем, который позволяет алгоритмически синтезировать критерии сохранения свойств систем при некоторых связывающих их отображениях типа морфизмов, — метода логико-алгебраических уравнений. Разработка метода была обусловлена прежде всего исследованиями динамических систем. Под динамическими системами понимают любые системы, функционирующие и развивающиеся во времени. Современная теория динамических систем является собирательным названием для исследований, сочетающих методы из различных разделов математики: теории дифференциальных уравнений, топологии и алгебры, алгебраической геометрии, теории меры и других. При этом математические концепции динамических систем различаются степенью аксиоматизации свойств систем и общности структур, участвующих в их описании: от систем, определяемых автономными дифференциальными уравнениями, общих динамических систем в топологическом пространстве, локальных динамических и полудинамических систем (Т. Ура, О. Гаек) до общих систем (В. И. Зубов), полупотоков (О. Гаек, Дж. Наги), абстрактных процессов (А. А. Мовчан) и др.

Сохранение свойств динамических систем давно представляет значительный интерес для исследователей. Еще с XIX века известна проблема сохранения свойства устойчивости при координатных преобразованиях систем дифференциальных уравнений: устойчивость решения в одних переменных не означает его устойчивости в других переменных (А. М. Ляпунов, 1892). В 1974 году для обеспечения алгоритмического формирования критериев сохранения свойств динамических систем на основе логических методов В. М. Матросов [8] предложил *метод сравнения*, получивший в дальнейшем широкое развитие в его научной школе (Л. Ю. Анапольский,

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 11-07-00655-а, 12-08-90018-Бел-а, 14-07-31192-мол-а).

С. Н. Васильев, Р. И. Козлов и др.). Одним из основных применений критериев сохранения является сведение на их основе задачи изучения сложной модели к изучению более простой.

С другой стороны, сохранение свойств является важной проблемой при изучении алгебраических систем. Целый ряд утверждений классической теории моделей, так называемые теоремы устойчивости [5], или характеристические теоремы [20], устанавливают связь между семантическими и синтаксическими свойствами формул языка логики первого порядка. В качестве таких логико-алгебраических критериев прежде всего можно назвать три классические теоремы о сохранении свойств: теорему Лося — Тарского о сохранении свойств экзистенциальных формул при расширениях моделей, теорему Линдона, связывающую монотонность формулы с ее позитивностью, и теорему Лося — Тарского — Линдона о сохранении свойств экзистенциальных позитивных формул при гомоморфизмах [20]. Сохранение свойств существенно при изучении вопросов формульной определимости и вычислимости [4].

Большинство теорем устойчивости являются непосредственными следствиями интерполяционных теорем Крэйга и Линдона [14]. Другим выдающимся следствием интерполяционных теорем является теорема Бета об определимости, утверждающая эквивалентность явной и неявной определимости предиката. Она легко выводима из интерполяционной теоремы Крэйга. Интерполяция для многосортных структур была рассмотрена С. Феферманом [15]. Для них оказалась существенной не только полярность вхождений предикатов в рассматриваемые формулы, как у Линдона [17], но и экзистенциальное или универсальное квантифицирование сортов. Следствием интерполяционной теоремы Фефермана является характеристическая теорема, связывающая сохранение свойств при расширениях моделей с экзистенциальностью описывающих их формул [13]. Из нее вытекает аналогичная характеристическая теорема для односортного случая, полученная в 1955 году независимо Е. Лосем и А. Тарским. М. Отто получил еще более общий интерполяционный результат для многосортных структур [19]: его интерполяционная теорема обобщает как классические характеристические теоремы о расширениях (подструктурах) и теоремы, касающиеся монотонности, так и многосортную интерполяционную теорему Фефермана.

В развитие теоремы Линдона о сохранении позитивных формул при гомоморфизмах [18] и критериев переносимости термов и соотношений в теории структур Н. Бурбаки [1] С. Н. Васильевым был предложен *метод представимости* [2], лежащий на пересечении динамики систем, алгебры и логики. Продуктивность подобных междисциплинарных исследований хорошо известна. В частности, в контексте данной статьи можно отметить исследования на стыке алгебры и логики (А. И. Мальцев, А. Тарский, Ю.Л. Ершов, Ю.И. Журавлев, С. С. Гончаров и др.), динамики систем и алгебры (С. Ли, Л. В. Овсянников, М. А. Арбиб и др.). Для применения метода представимости изучаемую модель динамической системы следует перевести в форму многоосновной алгебраической системы (МАС), а определение изучаемого свойства представить в некотором классе свойств, для которого имеется критерий сохранения. Следует отметить, что алгебраизация динамических систем приводит, как правило, именно к МАС (основными множествами в этом случае выступают пространство состояний, шкала времени и др.), причем их функции и отношения определены не просто на базисных множествах или их декартовых произведениях, а на произвольных ступенях в смысле Н. Бурбаки, что отличает этот подход от уже известных.

К сожалению, задача представимости (эквивалентными преобразованиями) формулы изучаемого свойства в требуемом классе является, вообще говоря, алгоритмически неразрешимой. Для решения этой проблемы и получения критериев сохранения свойств динамических систем, состоящих из условий типа сохранения операций или отношений, и был предложен метод логико-алгебраических уравнений (ЛАУ), который обеспечивает гибкое формирование критериев сохранения по конкретному виду изучаемого свойства [10]. Динамическая система представляется в виде МАС с дополнительными расширениями (см. разд. 2), введение которых было мотивировано стремлением охватить интересный класс динамических систем — дискретно-событийные системы [12]. Исследуемое свойство записывается в виде формульного предиката для этой МАС, и затем решается ЛАУ вида $\mathcal{X}\&\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ или $\mathcal{X}\&\mathcal{P}' \to \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$ — известные члены уравнения, $\mathcal{P}$ — свойство, рассматриваемое в одной системе, $\mathcal{P}'$ — свойство второй системы, а формула $\mathcal{X}$ подлежит отысканию. Второе ЛАУ соответствует случаю сохранения свойства в направлении, обратном направлению отображений между системами. Получаемое решение $\mathcal{X}$ представляет собой достаточное условие сохранения рассматриваемого свойства динамической системы, например, свойства устойчивости расписания движения в транспортной сети [9].

В [10] представлены алгоритмы, позволяющие существенно упростить получаемые решения в плане приведения их к стандартным условиям типа морфизмов. Именно этому этапу посвящена настоящая работа, основным результатом которой является выделение некоторых классов свойств, сохраняющихся при одних и тех же отображениях. При этом утверждения о виде отображений, отвечающих за переносимость свойства, формируются по виду записи самого свойства, с учетом полярностей входящих в формулу предикатных символов, как в теоремах Линдона, Фефермана и Отто.

2. Основные понятия и определения

Пусть $A = \{A_\lambda |\, \lambda = \overline{1,k}\}$ — конечное семейство множеств A_λ. Теоретико-множественные операции образования декартова произведения и булеана, примененные к множествам из A, порождают множества, называемые *ступенями* над семейством A [1]. В [10] понятие ступени расширено введением новой операции образования последовательностей. Рассмотрим множество из k символов $\sigma_a = \{a_\lambda | \lambda = \overline{1,k}\}$ $(k > 0)$ и сигнатуру $\sigma_0 = \{\sqcup \times \sqcup, \mathcal{P}, \mathcal{N}\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Выражение называется схемой ступеней над σ_a (или просто схемой) в том и только том случае, если оно удовлетворяет одному из следующих условий:

1) для всех $\lambda = \overline{1,k}$ a_λ есть схема;

2) если S_1, S_2 — схемы, то $(S_1 \times S_2)$ — схема;

3) если S — схема, то $\mathcal{P}(S)$ и $\mathcal{N}(S)$ — схемы.

Множество всех схем S ступеней над σ_a обозначим $St[\sigma_a]$.

О п р е д е л е н и е 2. Для любой схемы ступеней $S \in St[\sigma_a]$ ступенью над семейством A (по схеме S) называется множество $S[A]$, очевидным образом и однозначно определяемое индукцией по построению схемы S. При этом:

1) символы $a_\lambda \in \sigma_a$ интерпретируются как множества $A_\lambda \in A$ $(\lambda = \overline{1,k})$;

2) бинарный символ $\sqcup \times \sqcup \in \sigma_0$ — как операция образования декартова произведения, т. е. для схем S_1, $S_2 \in St[\sigma_a]$ полагаем $(S_1 \times S_2)[A] = S_1[A] \times S_2[A]$;

3) функциональный символ $\mathcal{P} \in \sigma_0$ — как операция образования булеана, т. е. для схемы $\mathcal{P}(S) \in St[\sigma_a]$ полагаем $\mathcal{P}(S)[A] = 2^{S[A]}$;

4) символ $\mathcal{N} \in \sigma_0$ — как операция образования множества последовательностей, т. е. для схемы $\mathcal{N}(S) \in St[\sigma_a]$ полагаем $\mathcal{N}(S)[A] = (S[A])^{I\!N}$.

Множество всех порождаемых таким образом ступеней будем называть *обобщенной шкалой ступеней* над A и обозначать $St[A]$.

Пусть даны отображения $\psi_1 : B_1 \to {B_1}'$ и $\psi_2 : B_2 \to {B_2}'$, где B_1, B_2 — произвольные множества. *Каноническим распространением* отображений ψ_1, ψ_2 *на декартово произведение* называется [1] отображение $\psi_1 * \psi_2 : B_1 \times B_2 \to {B_1}' \times {B_2}'$, определяемое условием $(\psi_1 * \psi_2)(b_1, b_2) = \langle \psi_1(b_1), \psi_2(b_2)\rangle$ $\forall b_1 \in B_1$, $\forall b_2 \in B_2$. *Каноническим распространением на булеан* отображения ψ_1 называется [1] отображение $\hat{\psi}_1 : 2^{B_1} \to 2^{{B_1}'}$ такое, что

$$\hat{\psi}_1(B) = \{b' \in {B_1}' |\, \exists b \in B : \psi_1(b) = b'\} \quad \forall B \subseteq B_1.$$

Каноническим распространением отображения ψ_1 *на множество последовательностей* назовем отображение $\psi_1|^N : B_1^{I\!N} \to (B_1')^{I\!N}$, определяемое условием

$$\forall \boldsymbol{b} \in B_1^{I\!N} \quad \psi_1|^N(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}', \text{ где } b_i' = \psi_1(b_i) \quad \forall i \in I\!N,$$

$\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, $b_i \in B_1$, $i \in I\!N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, и $B_1^{I\!N} = \{\boldsymbol{b} | \boldsymbol{b} : I\!N \to B_1\}$.

Пусть $A' = \{A'_\lambda |\ \lambda = \overline{1, k}\}$. Для всякой ступени $S[A]$ через $S[A']$ обозначается ступень над A', образованная из множеств $A_\lambda{}'$ по той же схеме S, что и $S[A]$ над A.

О п р е д е л е н и е 3. Для любого семейства отображений

$$\varphi = \{\varphi_\lambda | \varphi_\lambda : A_\lambda \to A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\} \tag{1}$$

и любой ступени $S[A] \in St[A]$ каноническим распространением отображений (КРО) (1) на $S[A]$ называется отображение $\langle\varphi\rangle^{S[A]} : S[A] \to S[A']$ такое, что

1) если $S[A] = A_\lambda$, то $\langle\varphi\rangle^{S[A]} = \varphi_\lambda$;

2) если $S[A] = S_1[A] \times S_2[A]$, то $\langle\varphi\rangle^{S[A]} = \langle\varphi\rangle^{S_1[A]} * \langle\varphi\rangle^{S_2[A]}$;

3) если $S[A] = 2^{S_1[A]}$, то $\langle\varphi\rangle^{S[A]} = \widehat{\langle\varphi\rangle^{S_1[A]}}$;

4) если $S[A] = S_1[A]^{I\!N}$, то $\langle\varphi\rangle^{S[A]} = \langle\varphi\rangle^{S_1[A]}|^N$.

Для исследования свойств многоосновных алгебраических систем традиционно используются языки исчисления предикатов первого порядка. Построим подходящий язык $\mathcal{L}$. Рассмотрим сигнатуру $\sigma = \sigma_P \cup \sigma_F \cup \sigma_E$, где

$\sigma_F = \{F_\beta^{n_\beta},\ \beta = \overline{1, k_F},\ n_\beta \in \{1, 2, \ldots\}\}$ — множество функциональных символов, причем с каждым символом $F_\beta^{n_\beta}$ связываются схемы в количестве $n_\beta + 1$, обозначаемые $S_{1\beta}$, $S_{2\beta}, \ldots$, $S_{n_\beta\beta}$, $S_{n_\beta+1,\beta} \in St[\sigma_a]$, при этом последняя схема при интерпретации символа $F_\beta^{n_\beta}$ n_β-местной функцией позволяет фиксировать область значений этой функции, а остальные схемы — области значений ее аргументов;

$\sigma_P = \{P_\gamma^{n_\gamma}, \gamma = \overline{1, k_P}, n_\gamma \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}$ — множество предикатных символов со связанными с ними схемами $T_{1\gamma}$, …, $T_{n_\gamma\gamma} \in St[\sigma_a]$, $\gamma = \overline{1, k_P}$;

$\sigma_E = \{E_\delta, \delta = \overline{1, k_E}\}$ — множество символов выделенных элементов со связанными с ними схемами $U_\delta \in St[\sigma_a]$, $\delta = \overline{1, k_E}$.

Для каждой схемы ступеней, связанной с символами сигнатуры σ, введем (бесконечно много) индивидных переменных, причем позднее буквы z_α будем использовать для переменных, связанных кванторами, а буквы x_μ — для обозначения свободных переменных. Будем также использовать логические связки ($\neg$, $\to$, & и др.), которым придается обычный смысл, и вспомогательные символы (скобки, запятые). Кроме того, будут применяться знаки = (равенства) и $\langle \sqcup, \sqcup \rangle$ (упорядоченной пары). Хотя эти символы могут связывать элементы различных пар ступеней, используем одни и те же символы для любой такой пары (т. е. все символы, предполагающие подстановки, будем рассматривать “либерально” [14]).

Всякий терм языка $\mathcal{L}$ характеризуются своим *сортом*:

1) всякая индивидная переменная s есть терм; сортом этого терма называется соответствующая схема ступеней S, что будем обозначать записью $|s| = S$; областью возможных значений переменной s при интерпретации (выборе основных множеств) становится ступень (множество) $S[A]$;

2) всякий символ E_δ выделенного элемента (константы) есть терм, $|E_\delta| = U_\delta$;

3) если t_1, t_2 — термы сортов $|t_1|$, $|t_2|$ соответственно, то $\langle t_1, t_2\rangle$ является термом сорта $|t_1| \times |t_2|$;

4) если t_i — термы, $|t_i| = S_{i\beta}$, $i = \overline{1, n_\beta}$, и $t = \langle \ldots \langle\langle t_1, t_2\rangle, t_3\rangle, \ldots t_{n_\beta}\rangle$, то $F_\beta^{n_\beta}(t)$ является термом сорта $S_{n_\beta+1,\beta}$, $\beta = \overline{1, k_F}$ (скобки $\langle\ \rangle$ будем в этом случае опускать);

5) выражение является термом только в том случае, когда это следует из правил 1)–4).

Определим *формулы* языка $\mathcal{L}$:

1) если t_1, t_2 — термы и $|t_1| = |t_2|$, то выражение “$t_1 = t_2$” является формулой;

2) если t_i — термы, $|t_i| = T_{i\gamma}$, $i = \overline{1, n_\gamma}$, $t = \langle \ldots \langle\langle t_1, t_2\rangle, t_3\rangle, \ldots t_{n_\gamma}\rangle$ и $P_\gamma^{n_\gamma}$ — предикатный символ, с которым связаны схемы $T_{1\gamma}$, …, $T_{n_\gamma\gamma}$, то $P_\gamma^{n_\gamma}(t)$ — формула;

3) если $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — формулы, то выражения $\neg(\mathcal{F}_1)$, $(\mathcal{F}_1 \,\&\, \mathcal{F}_2)$, $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$, $(\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2)$ являются формулами;

4) если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Z}_\alpha$ — формулы, z_α — индивидная переменная, то выражения $\hat{\omega}_\alpha\mathcal{F} = \forall z_\alpha(\mathcal{Z}_\alpha \to \mathcal{F})$, $\check{\omega}_\alpha\mathcal{F} = \exists z_\alpha(\mathcal{Z}_\alpha \,\&\, \mathcal{F})$ — формулы; здесь $\hat{\omega}_\alpha \overset{df}{=} \forall z_\alpha : Z_\alpha \overset{df}{=} \forall z_\alpha(Z_\alpha \to \sqcup)$ есть типовый квантор всеобщности, $\check{\omega}_\alpha \overset{df}{=} \exists z_\alpha : Z_\alpha \overset{df}{=} \exists z_\alpha(Z_\alpha \& \sqcup)$ — типовый квантор существования, Z_α — так называемые *типовые условия*;

5) выражение является формулой только в том случае, когда это следует из правил 1)–4).

Формулы, построенные по правилам 1) и 2), называются *атомарными*.

Определение 4. Общей многоосновной алгебраической системой конечного типа (ОМАСК) сигнатуры σ называется объект $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F,\, \Omega_P, \Omega_E\rangle$, состоящий из семейства основных множеств $A = \{A_\lambda |\, \lambda = \overline{1,k}\}$ и отвечающих множествам σ_F, σ_P и σ_E следующих множеств: множества функций $\Omega_F = \{\boldsymbol{F}_\beta^{n_\beta} |\, \boldsymbol{F}_\beta^{n_\beta} : S_{1\beta}[A] \times S_{2\beta}[A] \times \ldots \times S_{n_\beta\beta}[A] \to S_{n_\beta+1,\beta}[A]$, $\beta = \overline{1,k_F}\}$, множества отношений $\Omega_P = \{\boldsymbol{P}_\gamma^{n_\gamma} |\, \boldsymbol{P}_\gamma^{n_\gamma} \subseteq T_{1\gamma}[A] \times \ldots \times T_{n_\gamma\gamma}[A]$, $\gamma = \overline{1,k_P}\}$ и множества выделенных элементов $\Omega_E = \{\boldsymbol{E}_\delta |\, \boldsymbol{E}_\delta \in U_\delta[A]$, $\delta = \overline{1,k_E}\}$. Заметим, что в отличие от [3; 7; 16] здесь элементы множества $\Omega_F \cup \Omega_P \cup \Omega_E$ могут быть определены на расширенных ступенях над A. Благодаря обобщению понятия схемы и ступени Н. Бурбаки в форме ОМАСК легко представить разные модели динамических систем и, в частности, дискретно-событийные системы.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ОМАСК сигнатуры σ с семейством основных множеств $A = \{A_\lambda |\, \lambda = \overline{1,k}\}$. И пусть A' из (1) — семейство основных множеств некоторой однотипной ОМАСК $\mathfrak{A}'$. Однотипность понимается в том смысле, что мощности множеств A и A', Ω_F и Ω'_F и т. д. соответственно совпадают, а ступень $S'_{1\beta}[A']$(соответственно $S'_{2\beta}[A']$, $T'_\gamma[A']$, $U'_\delta[A']$) образована из множеств A'_λ по той же схеме, что и $S_{1\beta}[A]$ (соответственно $S_{2\beta}[A]$, $T_\gamma[A]$, $U_\delta[A]$) из множеств A_λ. Суть метода логико-алгебраических уравнений заключается в следующем.

Рассматривается формула $\mathcal{F}(\overline{x}) \overset{df}{=} \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_p)$ языка $\mathcal{L}$ сигнатуры σ ОМАСК $\mathfrak{A}$ со свободными переменными x_μ, $\mu = \overline{1,p}$, $p \geq 0$, образованная из литер (заключительных формул, или з-формул) $\mathcal{F}^\nu$, т. е. из атомарных формул $\mathcal{F}_+^\nu$ или их отрицаний $\mathcal{F}_-^\nu$, $\nu = \overline{1,M}$, $M \geq 0$, с помощью связок &, $\vee$ и типовых кванторов (ТК). Построенные таким образом формулы мы называем *обобщенными позитивными формулами*. На переменные и кванторы накладываются обычные в этих случаях ограничения (попарная различность, существенность и т. п.). Приведение формулы к обобщенно-позитивному виду не является обременительным, если учесть, что для построения отрицания типово-кванторной формулы достаточно заменить & на $\vee$ и наоборот, $\hat{\omega}_\alpha$ на $\check{\omega}_\alpha$ и наоборот, а знаки литер сменить на противоположные. Будем рассматривать только такие формулы $\mathcal{F}(\overline{x})$, ТК которых не содержат функциональных символов (но могут содержать символы выделенных элементов).

Рассмотрим p-арный формульный предикат $\mathcal{F}_\mathfrak{A}$, определенный на системе $\mathfrak{A}$ формулой $\mathcal{F}(\overline{x})$. Дополним сигнатуру σ множеством новых символов $\sigma' = \sigma'_a \cup \sigma'_P \cup \sigma'_F \cup \sigma'_E$, дублирующим в новых обозначениях сигнатуру σ, $\sigma' \cap \sigma = \varnothing$. Введем формулу $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(P'/P,\, F'/F,\, E'/E,\, x'_\mu/x_\mu,\, z'_\alpha/z_\alpha)$ сигнатуры σ', где выражение X'/X означает замену всех вхождений символа X на символ X', т. е. для каждого символа $P \in \sigma_P$, $F \in \sigma_F$, $E \in \sigma_E$, $\ldots$, выполняется замена на соответствующий новый символ $P' \in \sigma'_P$, $F' \in \sigma'_F$, $E' \in \sigma'_E$, $\ldots$, $\mu = \overline{1,p}$, $\alpha = \overline{1,n}$. Предполагается, что новые переменные x'_μ, z'_α попарно различны и не совпадают с переменными из $\mathcal{F}(\overline{x})$.

Введем дополнительные функциональные символы f_λ, для каждого $\lambda = \overline{1,k}$ интерпретируемые на множестве однозначных и всюду определенных на основном множестве A_λ функций $\varphi_\lambda : A_\lambda \to A'_\lambda$. Обозначим $\sigma^* = \sigma \cup \sigma' \cup \{f_\lambda\}$. Пусть язык $\mathcal{L}^*$ построен естественным образом на базе σ^*, как $\mathcal{L}$ — на базе σ, с ранее указанными внесигнатурными расширениями, список которых дополним тремя внесигнатурными функциональными символами $\sqcup\bullet\sqcup$, $B(\sqcup)$, $\sqcup||^N$, которые будут интерпретироваться как операции $\sqcup*\sqcup$, $\widehat{\sqcup}$, $\sqcup|^N$ образования КРО (1) на декартово произведение, булеан и множество последовательностей соответственно. Терм f^S, образованный из символов f_λ с помощью символов этих трех операций по схеме S построения КРО, определяется естественным образом.

Метод логико-алгебраических уравнений есть способ синтеза условий сохранения истинностных значений предиката $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ относительно отображений (1). Он заключает в себе алгоритм построения нетривиальных условий $\mathcal{X}$, при которых из выполнимости на системе $\mathfrak{A}$ формулы $\mathcal{F}$ при каких-либо фиксированных значениях $c_1, \ldots, c_p$ переменных $x_1, \ldots, x_p$ вытекает выполнимость $\mathcal{F}$ на $\mathfrak{A}'$ и соответствующих значениях $\langle\varphi\rangle^{S_1[A]}(c_1), \ldots, \langle\varphi\rangle^{S_p[A]}(c_p)$ КРО (1), где S_μ — сорт переменной x_μ, $\mu = \overline{1,p}$. Формула $\mathcal{X}$ сигнатуры σ^* формируется как нетривиальное решение логико-алгебраического уравнения (ЛАУ) $\mathcal{X}\&\mathcal{F}(\overline{x}) \to \mathcal{F}'(\overline{f(x)})$, где $\mathcal{F}'(\overline{f(x)}) = \mathcal{F}'(f^{|x_1|}(x_1)/x_1', \ldots, f^{|x_p|}(x_p)/x_p')$.

Если $\sigma_F \cup \sigma_E \neq \varnothing$, то сначала путем введения вспомогательных переменных y_ε формула $\mathcal{F}(\overline{x})$ преобразовывается в новую формулу $\Psi(\overline{x}) = \Psi(x_1, \ldots, x_p)$ так, чтобы заключительные формулы последней не содержали вхождений символов из $\sigma_F \cup \sigma_E$ [10]. Пусть ε^* — общее число введенных переменных. Если изначально все $\mathcal{F}^\nu$ не содержат элементов из $\sigma_F \cup \sigma_E$, то $\Psi(\overline{x}) = \mathcal{F}(\overline{x})$. Пусть $\Psi'(\overline{x}') = \Psi'(x_1', \ldots, x_p') = \Psi(P'/P, F'/F, E'/E, z_\alpha'/z_\alpha, x_\mu'/x_\mu, y_\varepsilon'/y_\varepsilon)$, $t_\varepsilon' = t_\varepsilon(U_\varepsilon'/U_\varepsilon, z_\alpha'/z_\alpha, y_\tau'/y_\tau, f^{|x_\mu|}(x_\mu)/x_\mu)$, т. е. осуществляются подстановки по всем $P \in \sigma_P$, $F \in \sigma_F$, $E \in \sigma_E$, $\alpha = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{1,p}$, $\tau = \overline{1,\varepsilon^*}$, $\tau \neq \varepsilon$, а $U_\varepsilon = E_\varepsilon$ или $U_\varepsilon = F_\varepsilon$,

$$\Psi'(\overline{f(x)}) = \Psi'(f^{|x_1|}(x_1)/x_1', \ldots, f^{|x_p|}(x_p)/x_p').$$

Обозначим

$$(\check{v}_j : V_j) \overset{df}{=} \begin{cases} \exists v_j(Z_\alpha \& V_j \& \sqcup), & \text{если } v_j \text{ — переменная } z_\alpha; \\ \exists y_\varepsilon(y_\varepsilon = t_\varepsilon \& V_j \& \sqcup), & \text{если } v_j \text{ — переменная } y_\varepsilon, \end{cases}$$

где $V_j \overset{df}{=} (f^{|v_j|}(v_j) = v_j')$. Аналогично понимаются выражения $(\check{v}_j' : V_j)$.

Теперь Ψ преобразовывается по следующим правилам:

1) рассматриваются максимальные цепочки $\hat{v}_1 \ldots \hat{v}_m$ или $\check{v}_1 \ldots \check{v}_m$ кванторов, не разделенных в структуре формулы Ψ кванторами $\exists$ и $\forall$ соответственно, а также логическими связками $\&, \vee$; все эти цепочки заменяются на цепочки $\hat{v}_1' \ldots \hat{v}_m'(\check{v}_1 : V_1) \ldots (\check{v}_m : V_m)$ и $\hat{v}_1 \ldots \hat{v}_m(\check{v}_1' : V_1) \ldots (\check{v}_m' : V_m)$ соответственно;

2) все связки $\vee$ заменяются на $\&$;

3) все литеры Ψ_+^ν, $\nu = \overline{1,M}$, заменяются на формулы Ξ_+^ν, а все литеры Ψ_-^ν — на формулы Ξ_-^ν, где через Ξ_+^ν (соответственно Ξ_-^ν) обозначается импликация $\Psi_+^\nu \to (\Psi')_+^\nu$ (соответственно $(\Psi')_+^\nu \to \Psi_+^\nu$), $(\Psi')_+^\nu$ — литера из Ψ', отвечающая литере Ψ_+^ν из Ψ;

4) после выполнения преобразований 1)–3) все переменные x_μ' заменяются на $f^{|x_\mu|}(x_\mu)$, и результирующая формула обозначается $\mathcal{R}_1$.

Общий вид формулы $\mathcal{R}_1$ можно записать следующим образом:

$$\mathcal{R}_1 = \hat{v}_{11}^* \ldots \hat{v}_{1\beta_1}^*(\check{v}_{11}^{**} : V_{11}) \ldots (\check{v}_{1\beta_1}^{**} : V_{1\beta_1})\hat{v}_{21}^{**} \ldots \hat{v}_{2\beta_2}^{**}(\check{v}_{21}^{*} : V_{21}) \ldots (\check{v}_{2\beta_2}^{*} : V_{2\beta_2}) \ldots$$
$$\ldots \hat{v}_{\alpha-1,1}^{\diamond} \ldots \hat{v}_{\alpha-1,\beta_{\alpha-1}}^{\diamond}(\check{v}_{\alpha-1,1}^{\diamond\diamond} : V_{\alpha-1,1}) \ldots (\check{v}_{\alpha-1,\beta_{\alpha-1}}^{\diamond\diamond} : V_{\alpha-1,\beta_{\alpha-1}})\hat{v}_{\alpha1}^{\diamond\diamond} \ldots$$
$$\ldots \hat{v}_{\alpha\beta_\alpha}^{\diamond\diamond}(\check{v}_{\alpha1}^{\diamond} : V_{\alpha1}) \ldots (\check{v}_{\alpha\beta_\alpha}^{\diamond} : V_{\alpha\beta_\alpha})\Big(\bigwedge_{\nu=1}^{M} \mathcal{R}^\nu\Big),$$

где $\beta_i \geq 1$, $\alpha \geq 0$, а случай $\alpha = 0$ означает отсутствие кванторного префикса.

Каждая из $\mathcal{R}^\nu$ в свою очередь имеет вид

$$\mathcal{R}^\nu = \hat{v}_{\nu1,1}^* \ldots \hat{v}_{\nu1,\beta_{\nu1}}^*(\check{v}_{\nu1,1}^{**} : V_{\nu1,1}) \ldots (\check{v}_{\nu1,\beta_{\nu1}}^{**} : V_{\nu1,\beta_{\nu1}})\hat{v}_{\nu2,1}^{**} \ldots \hat{v}_{\nu2,\beta_{\nu2}}^{**}(\check{v}_{\nu2,1}^{*} : V_{\nu2,1}) \ldots$$
$$\ldots (\check{v}_{\nu2,\beta_{\nu2}}^{*} : V_{\nu2,\beta_{\nu2}}) \ldots \hat{v}_{\nu(\alpha_\nu-1),1}^{\diamond} \ldots \hat{v}_{\nu(\alpha_\nu-1),\beta_{\nu(\alpha_\nu-1)}}^{\diamond}(\check{v}_{\nu(\alpha_\nu-1),1}^{\diamond\diamond} : V_{\nu(\alpha_\nu-1),1}) \ldots$$
$$\ldots (\check{v}_{\nu(\alpha_\nu-1),\beta_{\nu(\alpha_\nu-1)}}^{\diamond\diamond} : V_{\nu(\alpha_\nu-1),\beta_{\nu(\alpha_\nu-1)}})\hat{v}_{\nu\alpha_\nu,1}^{\diamond\diamond} \ldots \hat{v}_{\nu\alpha_\nu,\beta_{\nu\alpha_\nu}}^{\diamond\diamond}(\check{v}_{\nu\alpha_\nu,1}^{\diamond} : V_{\nu\alpha_\nu,1}) \ldots (\check{v}_{\nu\alpha_\nu,\beta_{\alpha_\nu}}^{\diamond} : V_{\nu\alpha_\nu,\beta_{\nu\alpha_\nu}})\Xi^\nu,$$

$\alpha_\nu \geq 0$, $\beta_{\nu\alpha_\nu} \geq 0$. Здесь знаки "$*$", "$**$" и "$\diamond$", "$\diamond\diamond$" означают либо " $'$ ", либо пустой символ, причем если "$*$" есть " $'$ ", то "$**$" — пустой символ, и наоборот. Аналогично для "$\diamond$" и "$\diamond\diamond$". Таким образом, становится очевидным чередование переменных формул Ψ и Ψ', возникающее при построении формулы $\mathcal{R}_1$.

3. Стандартное разбиение

Очевидно, что $\mathcal{R}_1$, хотя и обеспечивает требуемые условия сохранения свойства $\mathcal{F}(\overline{x})$, является слишком громоздкой. Для трансформации полученных критериев в более эффективные используются два известных преобразования [3]. Первым преобразованием является расщепление формулы $\mathcal{R}_1$ на части относительно ее заключительных формул. Для этого формируется множество J всех з-формул из $\mathcal{R}_1$, и задается набор попарно не пересекающихся множеств Σ_1, Σ_2, …, Σ_ρ, $\varnothing \neq \Sigma_\delta \subseteq J$, $\delta = \overline{1,\rho}$, где $\rho \geq 0$ [10]. Для каждого δ задается некоторое условие Δ_δ^A, определяющее, какие ТК существования будут инвертироваться в подформуле, определяемой множеством Σ_δ. Получающиеся таким образом формулы, все множество которых обозначим буквой Φ, в общем случае допускают расщепление на конъюнкции более простых условий. Для этого в формуле $\mathcal{U} \in \Phi$ выделяются некоторые кванторы существования $\check{v}^\tau = \exists v^\tau : Z^\tau$, и для каждого из них задается условие Δ_τ, $\tau = \overline{1,\eta}$, $\eta > 0$. Выбор множеств Σ_δ, кванторов $\check{v}^\tau$, а также условий Δ_δ^A и Δ_τ влияет на характер получаемых в итоге условий сохранения и остается достаточно свободным. Зафиксируем один из способов расщепления формулы $\mathcal{R}_1$. Ниже P_t и P_f обозначают тождественно истинный и тождественно ложный предикаты.

Определение 5. Расщепление формулы $\mathcal{R}_1$ назовем стандартным, если

1) $\Sigma_\delta = \{\Xi_\delta\}$ и $\Delta_\delta^A = P_f$, $\delta = \overline{1,M}$, где M — число з-формул в $\mathcal{R}_1$;

2) для каждой формулы $\mathcal{U} \in \Phi$ ко всем входящим в нее ТК существования $\check{v}^\tau$ последовательно применяется второе преобразование в том порядке, в котором они встречаются в $\mathcal{U}$, и при этом $\Delta_\tau = P_t$.

Иными словами, сначала $\mathcal{R}_1$ "дробится" на куски согласно числу ее з-формул, а затем каждый полученный кусок разбивается на подформулы, отвечающие всем входящим в него кванторам существования. Такое разбиение позволяет получить наиболее простую структуру финальных формул. Действительно, на первом этапе получаем формулы

$$\mathcal{U}_1 = H|\mathcal{R}_1,\Xi^1|\Xi^1 = H\hat{v}^*_{11,1}\ldots\hat{v}^*_{11,\beta_{11}}(\check{v}^{**}_{11,1}:V_{11,1})\ldots(\check{v}^{**}_{11,\beta_{11}}:V_{11,\beta_{11}})\ldots$$
$$\ldots\hat{v}^*_{1\alpha_1,1}\ldots\hat{v}^*_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}}(\check{v}^{**}_{1\alpha_1,1}:V_{1\alpha_1,1})\ldots(\check{v}^{**}_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}}:V_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}})\Xi^1,$$

$$\mathcal{U}_\delta = H||\mathcal{R}_1,\Xi^{\delta-1}||\mathcal{R}^\delta = H||\mathcal{R}_1,\Xi^{\delta-1}||\hat{v}^*_{\delta1,1}\ldots\hat{v}^*_{\delta1,\beta_{\delta1}}(\check{v}^{**}_{\delta1,1}:V_{\delta1,1})\ldots(\check{v}^{**}_{\delta1,\beta_{\delta1}}:V_{\delta1,\beta_{\delta1}})\ldots$$
$$\ldots\hat{v}^*_{\delta\alpha_\delta,1}\ldots\hat{v}^*_{\delta\alpha_\delta,\beta_{\delta\alpha_\delta}}(\check{v}^{**}_{\delta\alpha_\delta,1}:V_{\delta\alpha_\delta,1})\ldots(\check{v}^{**}_{\delta\alpha_\delta,\beta_{\delta\alpha_\delta}}:V_{\delta\alpha_\delta,\beta_{\delta\alpha_\delta}})\Xi^\delta,$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_{M-1} = H||\mathcal{R}_1,\Xi^{M-1}||\mathcal{R}^M = H||\mathcal{R}_1,\Xi^{M-1}||\hat{v}^*_{M1,1}\ldots\hat{v}^*_{M1,\beta_{M1}}(\check{v}^{**}_{M1,1}:V_{M1,1})\ldots$$
$$\ldots(\check{v}^{**}_{M1,\beta_{M1}}:V_{M1,\beta_{M1}})\ldots\hat{v}^*_{M\alpha_M,1}\ldots\hat{v}^*_{M\alpha_M,\beta_{M\alpha_M}}(\check{v}^{**}_{M\alpha_M,1}:V_{M\alpha_M,1})\ldots$$
$$\ldots(\check{v}^{**}_{M\alpha_M,\beta_{M\alpha_M}}:V_{M\alpha_M,\beta_{M\alpha_M}})\Xi^M,$$

$\delta = \overline{1,M}$, причем справедлива импликация

$$\tilde{\mathcal{U}}_{M-1}\&\bigwedge_{\delta=1}^{M-1}\mathcal{U}_\delta \rightarrow \mathcal{R}_1.$$

Здесь использованы следующие обозначения: для любой формулы Θ через $|\Theta,e|$ обозначается слово, составленное из всех кванторов, управляющих в формуле Θ элементом e, а через $||\Theta,e||$ — это же слово, в котором все кванторы существования заменены на соответствующие кванторы всеобщности. Через $H\Theta$ обозначается результат вычеркивания из Θ всех несущественных кванторов.

Каждая из полученных формул $\mathcal{U}_\delta$ содержит единственную заключительную формулу и некоторое количество ТК существования. В рамках стандартного разбиения к каждому из них применим второе преобразование. Тогда, например, для формулы $\mathcal{U}_1$ получим

$$\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1) = H\hat{v}^*_{11,1}\ldots\hat{v}^*_{11,\beta_{11}}(\check{v}^{**}_{11,1}:V_{11,1}),$$

$$\dots$$
$$\mathcal{V}_{\beta_{11}}(\mathcal{U}_1)=H\hat{v}^*_{11,1}\dots\hat{v}^*_{11,\beta_{11}}(\hat{v}^{**}_{11,1}:V_{11,1})\dots(\hat{v}^{**}_{11,\beta_{11}-1}:V_{11,\beta_{11}-1})(\check{v}^{**}_{11,\beta_{11}}:V_{11,\beta_{11}}),$$
$$\dots$$
$$\mathcal{V}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\alpha_1-1}+1}(\mathcal{U}_1)=H\hat{v}^*_{11,1}\dots\hat{v}^*_{11,\beta_{11}}(\hat{v}^{**}_{11,1}:V_{11,1})\dots(\hat{v}^{**}_{11,\beta_{11}}:V_{11,\beta_{11}})\dots$$
$$\dots(\hat{v}^{\diamond}_{1(\alpha_1-1),\beta_{1(\alpha_1-1)}}:V_{1(\alpha_1-1),\beta_{1(\alpha_1-1)}})\hat{v}^{\diamond}_{1\alpha_1,1}\dots\hat{v}^{\diamond}_{1\alpha_1\beta_{1\alpha_1}}(\check{v}^{\diamond\diamond}_{1\alpha_1,1}:V_{1\alpha_1,1}),$$
$$\dots$$
$$\mathcal{V}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\alpha_1-1}+\beta_{\alpha_1}}(\mathcal{U}_1)=H\hat{v}^*_{11,1}\dots\hat{v}^*_{11,\beta_{11}}(\hat{v}^{**}_{11,1}:V_{11,1})\dots(\hat{v}^{**}_{11,\beta_{11}}:V_{11,\beta_{11}})\dots$$
$$\dots\hat{v}^{\diamond}_{1\alpha_1,1}\dots\hat{v}^{\diamond}_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}}(\hat{v}^{\diamond\diamond}_{1\alpha_1,1}:V_{1\alpha_1,1})\dots(\hat{v}^{\diamond\diamond}_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}-1}:V_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}-1})(\check{v}^{\diamond\diamond}_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}}:V_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}}),$$
$$\tilde{\mathcal{V}}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\alpha_1-1}+\beta_{\alpha_1}}(\mathcal{U}_1)=H\hat{v}^*_{11,1}\dots\hat{v}^*_{11,\beta_{11}}(\hat{v}^{**}_{11,1}:V_{11,1})\dots(\hat{v}^{**}_{11,\beta_{11}}:V_{11,\beta_{11}})\dots$$
$$\dots\hat{v}^{\diamond}_{1\alpha_1,1}\dots\hat{v}^{\diamond}_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}}(\hat{v}^{\diamond\diamond}_{1\alpha_1,1}:V_{1\alpha_1,1})\dots(\hat{v}^{\diamond\diamond}_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}}:V_{1\alpha_1,\beta_{1\alpha_1}})\Xi^1.$$

Аналогичные формулы получаются для остальных $\mathcal{U}_\delta$ и $\tilde{\mathcal{U}}_{M-1}$, $\delta=\overline{1,M-1}$. Очевидно, что каждая из формул $\mathcal{V}_\tau(\mathcal{U}_\delta)$ при стандартном разбиении содержит один ТК существования, расположенный в конце формулы. Как правило, вид его типового условия определяет связь отношений двух исследуемых ОМАСК. Например, рассмотрим подробнее первую из полученных формул, $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$, причем для удобства избавимся от громоздкой индексации, осуществив переименование переменных: $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)=H\hat{v}^*_1\dots\hat{v}^*_{\beta_1}(\check{v}^{**}_1:V_1)$, $\beta_1\geq 1$.

По построению $\mathcal{R}_1$ типовое условие Z'_1 квантора $\tilde{v}'_1$ содержит только такие переменные w', которые соответствуют переменным w типового условия Z_1 ТК $\tilde{v}_1$. Выражение V_1, очевидно, также не содержит переменных, не входящих в Z_1 и Z'_1. Таким образом, ни одна из переменных $v^*_2,\dots,v^*_{\beta_1}$ не является существенной для ТК $\check{v}^{**}_1:V_1$, поэтому операция H приводит к простейшей формуле $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)=\hat{v}^*_1(\check{v}^{**}_1:V_1)$. В зависимости от типа переменной v_1, а также от значений символов “$*$” и “$**$” она имеет вид

$$\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)=\begin{cases}\forall z_1:Z_1\ \exists z'_1(Z'_1\&(f^{|z_1|}(z_1)=z'_1)),\\ \forall z'_1:Z'_1\ \exists z_1(Z_1\&(f^{|z_1|}(z_1)=z'_1)),\\ \forall y_1:y_1=E_1\ \exists y'_1(y'_1=E'_1\&(f^{|y_1|}(y_1)=y'_1)).\end{cases}$$

Предположим простейший случай, когда Z_1 есть некоторый предикатный символ P_γ, соответствующий отношению $\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma\subseteq T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]$ ОМАСК $\mathfrak{A}$, $\gamma\in\{1,\dots,k_P\}$, а z_1 является переменной одного из сортов $T_{1\gamma}[A],\dots,T_{n_\gamma\gamma}[A]$. Не ограничивая общности, предположим, что $|z_1|=T_{1\gamma}[A]$. Тогда Z'_1 — предикатный символ, соответствующий отношению $(\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma)'\subseteq T_{1\gamma}[A']\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A']$ ОМАСК $\mathfrak{A}'$, $|z'_1|=T_{1\gamma}[A']$. В этом случае первый вариант $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ можно переписать в виде

$$\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)=\forall z_1\Big(P_\gamma(z_1,\overline{x},\overline{E})\to\exists z'_1\big(P'_\gamma(z'_1,\overline{f(x)},\overline{E}')\&z'_1=f^{|z_1|}(z_1)\big)\Big),\tag{2}$$

а второй — в виде

$$\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)=\forall z'_1\Big(P'_\gamma(z'_1,\overline{f(x)},\overline{E}')\to\exists z_1\big(P_\gamma(z_1,\overline{x},\overline{E})\&z'_1=f^{|z_1|}(z_1)\big)\Big).\tag{3}$$

Здесь $\overline{x}=(x_{\gamma_1},\dots,x_{\gamma_{p_\gamma}})$ — вектор всех свободных переменных, входящих в предикат P_γ, $\overline{f(x)}=(f^{|x_{\gamma_1}|}(x_{\gamma_1}),\dots,f^{|x_{\gamma_{p_\gamma}}|}(x_{\gamma_{p_\gamma}}))$, $\overline{E}=(E_{\delta_1},\dots,E_{\delta_{p_\delta}})$ — вектор констант, входящих в предикат P_γ, причем ни одна из них не входит в з-формулы $\mathcal{F}$, $\overline{E}'=(E'_{\delta_1},\dots,E'_{\delta_{p_\delta}})$ — соответствующий вектор констант предиката P'_γ, $p_\delta\geq 0$, $p_\gamma\geq 0$.

Рассмотрим формулу (2). Как было оговорено, функциональные символы f_λ для каждого $\lambda=\overline{1,k}$ интерпретируются как однозначные и всюду определенные на основных множествах A_λ функции $\varphi_\lambda:A_\lambda\to A'_\lambda$ семейства (1). Несложно показать, что тогда $\langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]}$ является всюду определенной функцией, поэтому можно записать $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)=\forall z_1\Big(P_\gamma(z_1,\overline{x},\overline{E})\to$

$P'_\gamma\big(f^{T_{1\gamma}}(z_1), \overline{f(x)}, \overline{E}'\big)\Big)$. Свяжем символы констант E и E' дополнительным условием $\overline{f(E)} = \overline{E}'$. Тогда формула $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ является формальной записью условия сохранения отношения $\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma}$ ОМАСК $\mathfrak{A}$ при ее отображении семейством функций (1) в ОМАСК $\mathfrak{A}'$ при условии

$$\langle\varphi\rangle^{U_\delta[A]}(\mathbf{E}_\delta) = \mathbf{E}'_\delta, \tag{4}$$

$\delta = \overline{\delta_1, \ldots, \delta_{p_\gamma}}$. Переходя от предикатов к отвечающим им отношениям, это условие можно записать в виде

$$\langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma}) \subseteq (\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma})'. \tag{5}$$

Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что в случае выполнения равенства (4) формула (3) выполнена, если

$$(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma})' \subseteq \langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma}). \tag{6}$$

Отметим, что $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ вида (2) возникает, если формула $\mathcal{F}$ начинается с ТК $\check{z}_1 = \exists z_1 : P_\gamma(z_1, \overline{x}, \overline{E})$, а $\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1)$ вида (3) — если первым в формуле $\mathcal{F}$ был ТК $\hat{z}_1 = \forall z_1 : P_\gamma(z_1, \overline{x}, \overline{E})$.

Рассмотрим третий возможный вариант

$$\mathcal{V}_1(\mathcal{U}_1) = \forall y_1 : y_1 = E_1 \;\; \exists y'_1(y'_1 = E'_1 \& (f^{|y_1|}(y_1) = y'_1)). \tag{7}$$

Формулы такого типа порождаются в процессе исключения выделенных элементов E_ε из з-формул $\mathcal{F}$, поскольку при этом $\mathcal{F}$ преобразовывается к виду $\Phi_\varepsilon \overset{df}{=} \exists y_\varepsilon(y_\varepsilon = E_\varepsilon \& \mathcal{F}(y_\varepsilon/E_\varepsilon))$, где $y_\varepsilon/E_\varepsilon$ означает замену всех вхождений E_ε, в том числе и в типовых условиях кванторов, на y_ε. Равенство (4) при $\delta = 1$ обеспечивает истинность формулы (7).

В общем случае

$$\mathcal{V}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu}(\mathcal{U}_1) = H\hat{v}^*_{11,1}\ldots\hat{v}^*_{11,\beta_{11}}(\hat{v}^{**}_{11,1} : V_{11,1})\ldots(\hat{v}^{**}_{11,\beta_{11}} : V_{11,\beta_{11}})\ldots$$

$$\ldots\hat{v}^\diamond_{1\mu,1}\ldots\hat{v}^\diamond_{1\mu,\nu-1}\hat{v}^\diamond_{1\mu,\nu}(\hat{v}^{\diamond\diamond}_{1\mu,1} : V_{1\mu,1})\ldots(\hat{v}^{\diamond\diamond}_{1\mu,\nu-1} : V_{1\mu,\nu-1})(\check{v}^{\diamond\diamond}_{1\mu,\nu} : V_{1\mu,\nu}),$$

где $\mu \le \alpha_1$, $\nu \le \beta_{1\mu}$. Не ограничивая общности, будем считать, что операция H уже выполнена, т. е. из формулы исключены все несущественные кванторы. По свойству стандартного разбиения $\mathcal{V}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu}(\mathcal{U}_1) = ||\mathcal{U}_1, \check{v}^{\diamond\diamond}_{1\mu,\nu}||(\check{v}^{\diamond\diamond}_{1\mu,\nu} : V_{1\mu,\nu})$. Рассмотрим все возможные значения переменной $v^{\diamond\diamond}_{1\mu,\nu}$, причем для облегчения восприятия не будем писать “1” в начале каждого индекса, поскольку всегда явно указывается, что рассматривается формула $\mathcal{U}_1$. Для краткости будем также писать $\mathcal{V}$ вместо $\mathcal{V}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu}$.

1(z'_α). Пусть $v^{\diamond\diamond}_{\mu\nu}$ — переменная z'_α. Тогда

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_1) = \hat{v}^*_{11}\ldots\hat{v}^*_{1\beta_1}(\hat{v}^{**}_{11} : V_{11})\ldots(\hat{v}^{**}_{1\beta_1} : V_{1\beta_1})\ldots\hat{v}_{\mu1}\ldots\hat{v}_{\mu,\nu-1} \;\forall z_\alpha : Z_\alpha(\hat{v}'_{\mu1} : V_{\mu1})\ldots$$

$$\ldots(\hat{v}'_{\mu,\nu-1} : V_{\mu,\nu-1}) \;\exists z'_\alpha(Z'_\alpha \& (f^{|z_\alpha|}(z_\alpha) = z'_\alpha)).$$

Предположим опять, что Z_α есть некоторый предикат P_γ, соответствующий отношению $\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma} \subseteq T_{1\gamma}[A] \times \ldots \times T_{n_\gamma\gamma}[A]$ ОМАСК $\mathfrak{A}$, $\gamma \in \{1, \ldots, k_P\}$. Тогда Z'_α — предикат, соответствующий отношению $(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma})' \subseteq T_{1\gamma}[A'] \times \ldots \times T_{n_\gamma\gamma}[A']$ ОМАСК $\mathfrak{A}'$. Не ограничивая общности, предположим, что $|z_\alpha| = T_{1\gamma}[A]$. Тогда $|z'_\alpha| = T_{1\gamma}[A']$.

Среди оставшихся кванторных переменных формулы $\mathcal{V}(\mathcal{U}_1)$

$$v_{11}, \ldots, v_{1\beta_1}, \ldots, v_{\mu1}, \ldots, v_{\mu,\nu-1} \tag{8}$$

есть пары переменных z_i и z'_i такие, что $|z_i| = T_{i\gamma}[A] \in \{T_{2\gamma}[A], \ldots, T_{n_\gamma,\gamma}[A]\}$, а $|z'_i| = T_{i\gamma}[A']$, причем они связаны условиями $V_i \overset{df}{=} (f^{|z_i|}(z_i) = z'_i)$. При этом типовые условия Z_i и Z'_i соответствующих кванторов ограничивают области, которые пробегают эти переменные. Поскольку на предшествующих $\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu-1$ этапах выделения ТК существования каждая такая пара была рассмотрена, можно, формируя более грубое, но проще интерпретируемое условие, заменить типовые условия Z_i на $T_{i\gamma}$, где $T_{i\gamma}$ — символы, обозначающие сорта $T_{i\gamma}[A]$ (т. е. теперь переменная z_i пробегает всю область изменения), вхождения z_i' заменить на $f^{|z_i|}(z_i)$, а кванторы по z_i' исключить. После такой замены становятся несущественными кванторы по некоторым переменным из (8), входившим в типовые условия Z_i и Z_i'.

Помимо переменных z_i, z_i' в списке (8) в общем случае содержатся пары соответствующих друг другу переменных y_ε и y_ε', которые возникают при исключении из з-формул $\mathcal{F}$ термов вида E_i (выделенных элементов) и функциональных символов. Связывающие их кванторы имеют вид $(\forall y_\varepsilon^*: y_\varepsilon^* = t_\varepsilon^*)$, $(\forall y_\varepsilon^{**}: y_\varepsilon^{**} = t_\varepsilon^{**} \& f^{|y_\varepsilon|}(y_\varepsilon) = y_\varepsilon')$. Здесь t_ε есть терм вида

$$F_\beta(\overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E}), \tag{9}$$

где $F_\beta \in \sigma_F$ — функциональный символ, соответствующий отображению $\mathbf{F}_\beta^{n_\beta}: S_{1\beta}[A]\times S_{2\beta}[A]\times \ldots \times S_{n_\beta\beta}[A] \to S_{n_\beta+1,\beta}[A]$ ОМАСК $\mathfrak{A}$, $\beta \in \{1,\ldots,k_F\}$, $\overline{z} = (z_{\varepsilon 1}, z_{\varepsilon 2}, \ldots, z_{\varepsilon n_\varepsilon})$, $\overline{y} = (y_{\varepsilon 1}, y_{\varepsilon 2}, \ldots, y_{\varepsilon m_\varepsilon})$, $m_\varepsilon < \varepsilon$. Очевидно, что $|y_\varepsilon| = S_{n_\beta+1,\beta}[A]$. Поскольку пара y_ε и y_ε' была рассмотрена на предшествующих этапах (см. случаи $\mathbf{3}(y_\varepsilon')$ и $\mathbf{4}(y_\varepsilon)$ ниже), можно, не ограничивая общности, заменить типовые условия кванторов $(\forall y_\varepsilon^*: y_\varepsilon^* = t_\varepsilon^*)$ на $S_{n_\beta+1,\beta}$, где $S_{n_\beta+1,\beta}$ — символ, обозначающий сорт $S_{n_\beta+1,\beta}[A]$. Заменим также y_ε' на $f^{|y_\varepsilon|}(y_\varepsilon)$ и элиминируем кванторы, ставшие при этом несущественными.

Число рассмотренных таким образом пар z_i, z_i' и y_ε, y_ε' может не быть равно $n_\gamma-1$ (арность предиката n_γ без учета переменной z_α), поскольку в качестве аргументов предиката P_γ могут выступать также константы, не входящие в з-формулы исходной формулы $\mathcal{F}$ и, следовательно, не подвергшиеся преобразованию в y_ε, и свободные переменные.

После проведенных преобразований получаем формулу

$$\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) = \forall \overline{z}\colon T\ \ \forall \overline{y}\colon Y\ \ \forall z_\alpha \Big(P_\gamma(z_\alpha, \overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E}) \to \exists z_\alpha' \big(P_\gamma'(z_\alpha', \overline{f(z)}, \overline{f(y)}, \overline{f(x)}, \overline{E}') \\ \& (f^{|z_\alpha|}(z_\alpha) = z_\alpha')\big)\Big).$$

Здесь $\forall \overline{z} : T$ есть сокращение записи $\forall z_{\iota_1} : T_{\nu\iota_1} \ldots \forall z_{\iota_{n_\nu}} : T_{\nu\iota_{n_\nu}}$, $\forall \overline{y} : Y$ — сокращение записи $\forall y_{\varepsilon_1} : Y_{\varepsilon_1} \ldots \forall y_{\varepsilon_{m_\nu}} : Y_{\varepsilon_{m_\nu}}$, где $T_{\nu\iota_1}, \ldots, T_{\nu\iota_{n_\nu}}$, $Y_{\varepsilon_1}, \ldots, Y_{\varepsilon_{m_\nu}}$ — некоторые из сортов $T_{2\gamma}, \ldots, T_{n_\gamma\gamma}$, $\overline{x} = (x_{\gamma_1}, \ldots, x_{\gamma_{p_\gamma}})$ — вектор всех свободных переменных, входящих в предикат P_γ, $\overline{f(z)} = \big(f^{|z_{\iota_1}|}(z_{\iota_1}), \ldots, f^{|z_{\iota_{n_\nu}}|}(z_{\iota_{n_\nu}})\big)$ и т. д., $\overline{E}$ — вектор констант, не входящих в з-формулы $\mathcal{F}$, а $\overline{E}'$ — соответствующий вектор констант, не входящих в з-формулы $\mathcal{F}'$. Так как по предположению $|z_\alpha| = T_{1\gamma}[A]$, а символ $f^{|z_\alpha|}$ отвечает всюду определенной функции, то можно записать

$$\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) = \forall \overline{z} : T\ \ \forall \overline{y} : Y\ \ \forall z_\alpha \Big(P_\gamma(z_\alpha, \overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E}) \to P_\gamma'\big(f^{|z_\alpha|}(z_\alpha), \overline{f(z)}, \overline{f(y)}, \overline{f(x)}, \overline{E}'\big)\Big),$$

причем $\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) \to \mathcal{V}(\mathcal{U}_1)$. Наложим на константы $\overline{E}$ требование $\overline{f(E)} = \overline{E}'$. Тогда формула $\mathcal{W}(\mathcal{U}_1)$ приобретает смысл сохранения истинностного значения предиката P_γ при отображениях (1). Таким образом, $\mathcal{W}(\mathcal{U}_1)$ выполнена, если имеют место отношения (4) и (5).

Условимся обозначать записью $t_1 \equiv t_2$ равенства вида $t_1 = t_2$ или $t_2 = t_1$. Пусть теперь Z_α — условие $z_\alpha \equiv t_\alpha$, где t_α есть некоторый терм, $|z_\alpha| = |t_\alpha|$. Если t_α — переменная x_μ или z_β, то $\mathcal{V}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu}(\mathcal{U}_1)$ выводима. В случае, когда t_α есть E_δ, для истинности $\mathcal{V}(\mathcal{U}_1)$ достаточно выполнения условия (4). В качестве t_α может также выступать как вновь введенная переменная y_ε (отвечающая некоторому терму $t_\varepsilon = F_\gamma(\overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E})$, входящему в одну из з-формул $\mathcal{F}$), так и терм вида $F_\gamma(\overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E})$ (такая ситуация означает, что $F_\gamma(\overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E})$ не входит ни в одну з-формулу $\mathcal{F}$). Тогда условие сохранения операции ОМАСК $\mathfrak{A}$

$$\langle\varphi\rangle^{S_{n_\beta+1,\beta}[A]}\big(\mathbf{F}_\beta^{n_\beta}(z_1,\ldots,z_{n_\beta})\big) = \big(\mathbf{F}_\beta^{n_\beta}\big)'\Big(\langle\varphi\rangle^{S_{1\beta}[A]}(z_1), \ldots \langle\varphi\rangle^{S_{n_\beta\beta}[A]}(z_{n_\beta})\Big), \tag{10}$$

$z_1 \in S_{1\beta}[A]$, …, $z_{n_\beta} \in S_{n_\beta\beta}[A]$, $\beta = \overline{1, k_F}$, является достаточным для истинности $\mathcal{V}(\mathcal{U}_1)$.

2(z_α). Пусть $v^{\diamond\diamond}_{\mu\nu}$ — переменная z_α. Тогда

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_1) = \hat{v}^*_{11} \ldots \hat{v}^*_{1\beta_1}(\hat{v}^{**}_{11} : V_{11}) \ldots (\hat{v}^{**}_{1\beta_1} : V_{1\beta_1}) \ldots \hat{v}'_{\mu 1} \ldots \hat{v}'_{\mu,\nu-1}\ \forall z'_\alpha : Z'_\alpha\ (\hat{v}_{\mu 1} : V_{\mu 1}) \ldots$$

$$\ldots (\hat{v}_{\mu,\nu-1} : V_{\mu,\nu-1})\ \exists z_\alpha \big(Z_\alpha \& (f^{|z_\alpha|}(z_\alpha) = z'_\alpha)\big).$$

Рассуждениями, аналогичными предыдущим, приходим к формуле

$$\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) = \forall \overline{z} : T\ \forall \overline{y} : Y\ \forall z'_\alpha \Big(P'_\gamma(z'_\alpha, \overline{f(z)}, \overline{f(y)}, \overline{f(x)}, \overline{E}')$$

$$\to \exists z_\alpha \big(P_\gamma(z_\alpha, \overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E}) \& (f^{|z_\alpha|}(z_\alpha) = z'_\alpha)\big)\Big),$$

причем $\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) \to \mathcal{V}(\mathcal{U}_1)$. При условии $\overline{f(E)} = \overline{E}'$ для констант, не входящих в з-формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{W}(\mathcal{U}_1)$ выполнима, если имеет место (6) для соответствующих отношений ОМАСК $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$.

Если в качестве Z_α выступает равенство $z_\alpha \equiv t_\alpha$, то в зависимости от вида терма t_α возможно возникновение условия инъективности отображений φ_λ, отвечающих множествам A_λ, участвующим в построении ступени $S[A] = |t_\alpha|$ (можно показать, что $\langle\varphi\rangle^{S[A]}$ инъективно тогда и только тогда, когда все такие φ_λ инъективны). Условия инъективности обусловлены наличием в формуле $\mathcal{F}$ ТК всеобщности $\hat{z}_\alpha = (\forall z_\alpha : z_\alpha \equiv x_\mu)$ или $\hat{z}_\alpha = (\forall z_\alpha : z_\alpha \equiv z_\beta)$. В остальных случаях достаточно выполнения условий (4) и (10).

3(y'_ε). Пусть $v^{**}_{\mu\nu}$ — переменная y'_ε. В этом случае

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_1) = \hat{v}^*_{11} \ldots \hat{v}^*_{1\beta_1}(\hat{v}^{**}_{11} : V_{11}) \ldots (\hat{v}^{**}_{1\beta_1} : V_{1\beta_1}) \ldots \hat{v}_{\mu 1} \ldots \hat{v}_{\mu,\nu-1}(\forall y_\varepsilon : y_\varepsilon = t_\varepsilon)\ (\hat{v}'_{\mu 1} : V_{\mu 1}) \ldots$$

$$\ldots (\hat{v}'_{\mu,\nu-1} : V_{\mu,\nu-1})\ \exists y'_\varepsilon ((y'_\varepsilon = t'_\varepsilon) \& (f^{|y_\varepsilon|}(y_\varepsilon) = y'_\varepsilon)),$$

где t_ε есть терм вида (9). По определению терм t'_ε получается из t_ε подстановками P'/P, F'/F, E'/E по всем $P \in \sigma_P$, $F \in \sigma_F$, $E \in \sigma_E$, а также заменами $z'_{\varepsilon\alpha}/z_{\varepsilon\alpha}$, $y'_{\varepsilon\tau}/y_{\varepsilon\tau}$, $f^{|x_\mu|}(x_\mu)/x_\mu$, $\alpha = \overline{1, n_\varepsilon}$, $\mu = \overline{1, p}$, $\tau = \overline{1, m_\varepsilon}$.

Очевидно, что среди переменных (8) есть пары переменных z_{ij} и z'_{ij} такие, что $|z_{ij}| = S_{ij}[A] \in \{S_{1\beta}[A], \ldots, S_{n_\beta\beta}[A]\}$, а $|z'_{ij}| = S_{ij}[A']$, причем они связаны условиями $V_{ij} \overset{df}{=} (f^{|z_{ij}|}(z_{ij}) = z'_{ij})$. С помощью рассуждений, приведенных ранее, заменим все типовые условия Z_{ij} на S_{ij}, где S_{ij} — символ, обозначающий сорт $S_{ij}[A]$ (т. е. теперь переменные z_{ij} и z'_{ij} пробегают полные области их изменений), z'_{ij} заменим на $f^{|z_{ij}|}(z_{ij})$ и исключим ставшие при этом несущественными кванторы. После такой замены типовых условий получим формулу

$$\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) = \forall \overline{z} : S\ \forall \overline{y} : Y\ \forall y_\varepsilon (y_\varepsilon = F_\beta(\overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E}))\ \exists y'_\varepsilon \Big(y'_\varepsilon = F'_\beta\big(\overline{f(z)}, \overline{f(y)}, \overline{f(x)}, \overline{E}'\big)$$

$$\& \, (f^{|y_\varepsilon|}(y_\varepsilon) = y'_\varepsilon)\Big),$$

$\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) \to \mathcal{V}(\mathcal{U}_1)$. Условие (10) сохранения операции ОМАСК $\mathfrak{A}$ является достаточным для истинности $\mathcal{W}(\mathcal{U}_1)$.

4(y_ε)**.** Пусть $v^{**}_{\mu\nu}$ — переменная y_ε. Тогда

$$\mathcal{V}(\mathcal{U}_1) = \hat{v}^*_{11} \ldots \hat{v}^*_{1\beta_1}(\hat{v}^{**}_{11} : V_{11}) \ldots (\hat{v}^{**}_{1\beta_1} : V_{1\beta_1}) \ldots \hat{v}'_{\mu 1} \ldots \hat{v}'_{\mu,\nu-1}(\forall y'_\varepsilon : y'_\varepsilon = t'_\varepsilon)\ (\hat{v}_{\mu 1} : V_{\mu 1}) \ldots$$

$$\ldots (\hat{v}_{\mu,\nu-1} : V_{\mu,\nu-1})\ \exists y_\varepsilon ((y_\varepsilon = t_\varepsilon) \& (f^{|y_\varepsilon|}(y_\varepsilon) = y'_\varepsilon)).$$

С помощью рассуждений, приведенных ранее, заменим все типовые условия соответствующими им сортами и элиминируем кванторы, ставшие при этом несущественными. Тогда получаем формулу

$$\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) = \forall \overline{z} : S\ \forall \overline{y} : Y\ \forall y'_\varepsilon \Big(y'_\varepsilon = F'_\beta\big(\overline{f(z)}, \overline{f(y)}, \overline{f(x)}, \overline{E}'\big)\Big)\ \exists y_\varepsilon \Big(\big(y_\varepsilon = F_\beta(\overline{z}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{E})\big)$$

$$\& \, (f^{|y_\varepsilon|}(y_\varepsilon) = y'_\varepsilon)\Big).$$

Равенство (10) обеспечивает ее истинность, $\mathcal{W}(\mathcal{U}_1) \to \mathcal{V}(\mathcal{U}_1)$.

Рассмотрим формулы вида

$$\tilde{\mathcal{V}}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\alpha_1-1}+\beta_{\alpha_1}}(\mathcal{U}_1) = H\hat{v}^*_{11}\ldots\hat{v}^*_{1\beta_1}(\hat{v}^{**}_{11} : V_{11})\ldots(\hat{v}^{**}_{1\beta_1} : V_{1\beta_1})\ldots\hat{v}^*_{\alpha_1 1}\ldots$$

$$\ldots\hat{v}^*_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}}(\hat{v}^{**}_{\alpha_1 1} : V_{\alpha_1 1})\ldots(\hat{v}^{**}_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}} : V_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}})\Xi^1.$$

По определению Ψ^ν — атомарная формула, причем после исключения функциональных символов и констант из з-формул это может быть формула либо *a*) вида $v_1 = v_2$, где v_1, v_2 — переменные x_μ, z_α или y_ε, $|v_1| = |v_2|$, либо *b*) вида $P^{n_\gamma}_\gamma(v_1, \ldots, v_{n_\gamma})$, где $P^{n_\gamma}_\gamma$ — предикатный символ, с которым связаны схемы $T_{1\gamma}[\sigma_a]$, …, $T_{n_\gamma\gamma}[\sigma_a]$, v_1, …, v_{n_γ} — переменные такие, что $|v_1| = T_{1\gamma}[\sigma_a]$, …, $|v_{n_\gamma}| = T_{n_\gamma\gamma}[\sigma_a]$.

a) Пусть Ψ^ν есть $v_1 = v_2$ и $\Xi^1 = \Xi^\nu_+$. Тогда $\tilde{\mathcal{V}}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\alpha_1-1}+\beta_{\alpha_1}}(\mathcal{U}_1)$ выводима или в случае, когда один или оба v_i есть y_ε, выполнима при условиях (4), (10). Если же $\Xi^1 = \Xi^\nu_-$, то возникает условие инъективности в отдельных точках $x_{\mu 1}$ и $x_{\mu 2}$, если равенство $v_1 = v_2$ имеет вид $x_{\mu 1} = x_{\mu 2}$, или на всем множестве $|z_\alpha| = S[A]$, если один из v_i есть z_α.

b) В этом случае, если Ξ^1 есть Ξ^ν_+, то

$$\tilde{\mathcal{V}}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\alpha_1-1}+\beta_{\alpha_1}}(\mathcal{U}_1) = H\hat{v}^*_{11}\ldots\hat{v}^*_{1\beta_1}(\hat{v}^{**}_{11} : V_{11})\ldots(\hat{v}^{**}_{1\beta_1} : V_{1\beta_1})\ldots\hat{v}^*_{\alpha_1 1}\ldots$$

$$\ldots\hat{v}^*_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}}(\hat{v}^{**}_{\alpha_1 1} : V_{\alpha_1 1})\ldots(\hat{v}^{**}_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}} : V_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}})(P^{n_\gamma}_\gamma(v_1, \ldots, v_{n_\gamma}) \to (P^{n_\gamma}_\gamma)'(v_1, \ldots, v_{n_\gamma}),$$

и рассуждениями, аналогичными случаю $\mathbf{1}(z'_\alpha)$, получим формулу

$$\mathcal{W}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu}(\mathcal{U}_1) = \forall z_{\alpha_1} : T_{1\nu}\ldots\forall z_{\alpha_{n_\nu}} : T_{n_\nu,\nu}\ \forall y_{\alpha_1} : Y_{1\nu}\ldots$$

$$\ldots\forall y_{\alpha_{n_\nu}} : Y_{n_\nu,\nu}\Big(P_\gamma(z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_{n_\nu}}, y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_{n_\nu}}, \overline{x}) \to \Big(P'_\gamma\big(f^{|z_{\alpha_1}|}(z_{\alpha_1}), \ldots, f^{|z_{\alpha_{n_\nu}}|}(z_{\alpha_{n_\nu}}),$$

$$f(y_{\alpha_1}), \ldots, f(y_{\alpha_{n_\nu}}), f(\overline{x})\big)\Big)\Big),$$

$$\mathcal{W}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu}(\mathcal{U}_1) \to \mathcal{V}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\mu-1}+\nu}(\mathcal{U}_1).$$

Если Ξ^1 есть Ξ^ν_-, то аналогично случаю $\mathbf{2}(z_\alpha)$

$$\tilde{\mathcal{V}}_{\beta_1+\ldots+\beta_{\alpha_1-1}+\beta_{\alpha_1}}(\mathcal{U}_1) = H\hat{v}^*_{11}\ldots\hat{v}^*_{1\beta_1}(\hat{v}^{**}_{11} : V_{11})\ldots(\hat{v}^{**}_{1\beta_1} : V_{1\beta_1})\ldots\hat{v}^*_{\alpha_1 1}\ldots$$

$$\ldots\hat{v}^*_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}}(\hat{v}^{**}_{\alpha_1 1} : V_{\alpha_1 1})\ldots(\hat{v}^{**}_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}} : V_{\alpha_1\beta_{\alpha_1}})((P^{n_\gamma}_\gamma)'(v_1, \ldots, v_{n_\gamma}) \to P^{n_\gamma}_\gamma(v_1, \ldots, v_{n_\gamma}).$$

Аналогично рассматриваются остальные $\mathcal{U}_\delta$ и $\tilde{\mathcal{U}}_{M-1}$, $\delta = \overline{1, M-1}$.

4. Классы сохраняющихся свойств

Через $ex(\mathcal{F})$ (соответственно $all(\mathcal{F})$) обозначим множество переменных, связанных в формуле $\mathcal{F}$ типовыми кванторами существования $\breve{w}_\alpha$ (соответственно всеобщности $\hat{w}_\alpha$). Множество предикатов, образующих типовые условия кванторов по переменным из $ex(\mathcal{F})$ (соответственно $all(\mathcal{F})$), обозначим Q_{ex} (соответственно Q_{all}). Множество предикатных символов, образующих з-формулы $\mathcal{F}^\nu_+$, обозначим через $pos(\mathcal{F})$, а множество предикатных символов, входящих в з-формулы $\mathcal{F}^\nu_-$, обозначим через $neg(\mathcal{F})$. Введем также множества

$$\Omega_{P+} = Q_{ex} \cup pos(\mathcal{F}), \quad \Omega_{P-} = Q_{all} \cup neg(\mathcal{F}), \quad \Omega_{P^+_-} = \Omega_{P+} \cap \Omega_{P-}.$$

Таким образом, как и в [19], вхождение предикатного символа в ТК существования (всеобщности) считается позитивным (негативным).

Пусть $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ — некоторое подмножество индексов отображений (1). Следующее определение обобщает на случай ОМАСК понятие гомоморфизма одноосновных алгебраических систем и понятие Q-морфизма моделей Р. Линдона [18].

Определение 6. Пусть Q — некоторое множество символов отношений, $Q \subseteq \Omega_P$. Семейство отображений (1) назовем $\mathcal{I}$-инъективным Q-морфизмом ОМАСК $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E\rangle$ в ОМАСК $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega'_F, \Omega'_P, \Omega'_E\rangle$, если

1) $\langle\varphi\rangle^{S_{n_\beta+1,\beta}[A]}(\mathbf{F}^{n_\beta}_\beta(z_1, \ldots, z_{n_\beta})) = (\mathbf{F}^{n_\beta}_\beta)'(\langle\varphi\rangle^{S_{1\beta}[A]}(z_1), \ldots, \langle\varphi\rangle^{S_{n_\beta\beta}[A]}(z_{n_\beta}))$, $z_1 \in S_{1\beta}[A]$, $\ldots$, $z_{n_\beta} \in S_{n_\beta\beta}[A]$, $\beta = \overline{1, k_F}$;

2) $\langle\varphi\rangle^{U_\delta[A]}(\mathbf{E}_\delta) = \mathbf{E}'_\delta$, $\delta = \overline{1, k_E}$;

3) выполнены условия

$$\langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma) \subseteq (\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma)', \text{ если } \mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma \in Q,$$

$$\langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma) = (\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma)', \text{ если } \mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma \in \Omega_P \setminus Q$$

для $\gamma = \overline{1, k_P}$, и для всех $\lambda \in \mathcal{I}$ отображения φ_λ являются инъекциями.

Если $\mathcal{I} = \varnothing$, то Ω_P-морфизм ОМАСК $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ называется *гомоморфизмом* ОМАСК.

Определение 7. Если для всех $\lambda = \overline{1, k}$ φ_λ — взаимно-однозначные отображения, то Q-морфизм назовем Q-изоморфизмом.

$\varnothing$-изоморфизм ОМАСК $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$ является *изоморфизмом* ОМАСК.

Определение 8. Семейство отображений (1) назовем мощным $\mathcal{I}$-инъективным Q-морфизмом ОМАСК $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E\rangle$ в $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega'_F, \Omega'_P, \Omega'_E\rangle$, если выполнены условия 1) и 2) определения 6 и для $\gamma = \overline{1, k_P}$ имеет место

$$(\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma)' \subseteq \langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma), \text{ если } \mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma \in Q,$$

$$\langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma) = (\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma)', \text{ если } \mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma \in \Omega_P \setminus Q,$$

а для всех $\lambda \in \mathcal{I}$ отображения φ_λ являются инъекциями.

Как и в [3], в равенстве вида $z_\alpha \equiv z_\beta$ переменную z_α будем называть *определяющей*, если в формуле $\mathcal{F}$ ТК $\tilde{z}_\alpha$ имеет меньшую область действия, чем ТК $\tilde{z}_\beta$. В равенстве вида $z_\alpha \equiv x_\mu$ определяющей будем считать переменную z_α.

Обозначим $\mathcal{I}_{S[A]}$ множество индексов основных множеств A_λ, которые участвуют в построении ступени $S[A]$ по схеме S.

Определение 9. Для множества $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ классом $\mathcal{MI}^+_\rightarrow$ (соответственно $\mathcal{MI}^-_\rightarrow$) формул назовем множество тех и только тех обобщенных позитивных формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_q)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) предикаты, входящие в типовые условия кванторов, не содержат функциональных символов;

2) $\mathcal{I} = \bigcup_{S[A]} \mathcal{I}_{S[A]}$, где $S[A] = |v|$, v — все переменные z_β или x_μ, входящие в те равенства вида $z_\alpha \equiv v$ с определяющей переменной z_α, которые содержатся в з-формулах $=_-$ и типовых условиях кванторов всеобщности $\hat{z}_\alpha$;

3) $\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P^+_-} = \varnothing$ (соответственно $\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P^+_-} = \varnothing$).

Здесь символ $=_-$ (соответственно $=_+$) означает вхождение символа равенства в положительную (соответственно отрицательную) литеру (заключительную формулу) исходной формулы $\mathcal{F}(\overline{x})$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Формулы класса* $\mathcal{MI}^+_\rightarrow$ *(соответственно* $\mathcal{MI}^-_\rightarrow$*) задают предикаты, устойчивые относительно* $\mathcal{I}$*-инъективного* $\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P^+_-}$*-морфизма (соответственно мощного* $\mathcal{I}$*-инъективного* $\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P^+_-}$*-морфизма)* ОМАСК $\mathfrak{A}$ *в* ОМАСК $\mathfrak{A}'$.

Доказательство этой теоремы вытекает непосредственно из рассуждений предыдущего раздела. Действительно, рассмотрим формулу $\mathcal{F}(\overline{x})$ класса $\mathcal{MI}^{+}_{\rightarrow}$. Несложно заметить, что в процессе построения конструкций метода ЛАУ случаи типа $\mathbf{1}(z'_\alpha)$ возникают для всех ТК существования $\check{w}_\alpha$ в составе исходной формулы $\mathcal{F}$, в то время как случаи $\mathbf{2}(z_\alpha)$ соответствуют всем вхождениям в $\mathcal{F}$ ТК всеобщности $\hat{w}_\alpha$. При этом для выполнимости условий сохранения, как уже было установлено, оказываются достаточными условие (5) в случае $\mathbf{1}(z'_\alpha)$, т. е. при $\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma \in Q_{ex}$, и условие (6) в случае $\mathbf{2}(z_\alpha)$, т. е. для всех $\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma \in Q_{all}$. Аналогично формула $\Xi^\nu_+ = \Psi^\nu_+ \rightarrow (\Psi')^\nu_+$ возникает для всех предикатных символов, входящих в з-формулы $\mathcal{F}$ позитивно, а формула $\Xi^\nu_- = (\Psi')^\nu_+ \rightarrow \Psi^\nu_+$ — для предикатных символов, входящих в з-формулы $\mathcal{F}$ негативно. При этом, если $\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P^+_-} = \varnothing$, то не существует предикатных символов, входящих исключительно в отрицательные литеры и кванторы всеобщности, т. е. входящих негативно, и если какой-то предикат входит негативно, то существует его вхождение либо в какую-то положительную литеру, либо в ТК существования, т. е. некоторое позитивное вхождение, и, следовательно, такие предикаты обеих ОМАСК необходимо связать знаком равенства.

Равенства $z_\alpha \equiv v$ с определяющей переменной z_α, входящие в з-формулы $=_-$ и ТК всеобщности $\hat{z}_\alpha$, требуют инъективности тех φ_λ, которые входят в ступени, являющиеся сортами соответствующих переменных. Полагая инъективными отображения с индексами из множества $\mathcal{I}$, мы обеспечиваем выполнимость всех формул $\mathcal{V}$.

Аналогичным образом рассматриваются формулы класса $\mathcal{MI}^{-}_{\rightarrow}$. Заметим, что, в отличие от предыдущего, если $\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P^+_-} = \varnothing$, то не существует предикатных символов, входящих в формулу только позитивно.

Определение 10. Классом $\mathcal{MI}^{+}_{\leftarrow}$ (соответственно $\mathcal{MI}^{-}_{\leftarrow}$) формул назовем множество тех и только тех обобщенных позитивных формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_q)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) предикаты, входящие в типовые условия кванторов, не содержат функциональных символов;

2) $\mathcal{I} = \bigcup_{S[A]} \mathcal{I}_{S[A]}$, где $S[A] = |v|$, v — все переменные z_β или x_μ, входящие в равенства вида $z_\alpha \equiv v$, где z_α — определяющая переменная, содержащиеся в з-формулах $=_+$ и типовых условиях кванторов существования $\check{z}_\alpha$;

3) $\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P^+_-} = \varnothing$ (соответственно $\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P^+_-} = \varnothing$).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_q)$ — формула класса $\mathcal{MI}^{+}_{\leftarrow}$ (соответственно $\mathcal{MI}^{-}_{\leftarrow}$) со свободными переменными $x_1, \ldots, x_q$, $q \geqslant 0$. Тогда из истинности формулы $\mathcal{F}'(f^{|x_1|}(x_1), \ldots, f^{|x_p|}(x_p))$ следует истинность $\mathcal{F}$ при мощном $\mathcal{I}$-инъективном $\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P^+_-}$-морфизме (соответственно $\mathcal{I}$-инъективном $\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P^+_-}$-морфизме) ОМАСК $\mathfrak{A}$ в ОМАСК $\mathfrak{A}'$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы необходимо рассмотреть алгоритм формирования условий сохранения в направлении, обратном направлению действия отображений (1). В этом случае условия типа $\mathbf{1}(z'_\alpha)$ возникают для кванторов $\hat{w}_\alpha$, а условия $\mathbf{2}(z_\alpha)$ возникают для кванторов $\check{w}_\alpha$. Противоположным образом формируются и условия для предикатных символов, входящих в заключительные формулы. Таким образом, мы получаем противоположную ситуацию: для предикатных символов, входящих позитивно, достаточными становятся условия (5), а для негативных вхождений — условия (6). Согласно модифицированному алгоритму, инъективность в этом случае требуется для тех φ_λ, которые входят в ступени, являющиеся сортами переменных из равенств, указанных в условии 2) определения 10.

Определение 11. Пусть P, Q — некоторые множества символов отношений, $P, Q \subseteq \Omega_P$, $P \cap Q = \varnothing$. Семейство отображений (1) назовем $\mathcal{I}$-инъективным PQ-морфизмом ОМАСК $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$ в $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega'_F, \Omega'_P, \Omega'_E \rangle$, если выполнены условия 1) и 2) определения 6 и для всех $\gamma = \overline{1, k_P}$ имеет место

$$\langle \varphi \rangle^{T_{1\gamma}[A] \times \ldots \times T_{n_\gamma \gamma}[A]}(\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma) \subseteq (\mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma)', \text{ если } \mathbf{P}^{n_\gamma}_\gamma \in P,$$

$$(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma})' \subseteq \langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma}),\ \text{если}\ \mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma} \in Q,$$
$$\langle\varphi\rangle^{T_{1\gamma}[A]\times\ldots\times T_{n_\gamma\gamma}[A]}(\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma}) = (\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma})',\ \text{если}\ \mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma} \in \Omega_P \setminus (P \cup Q),$$

а отображения φ_λ инъективны для всех $\lambda \in \mathcal{I}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_q)$ — обобщенная позитивная формула со свободными переменными x_1, …, x_q, $q \geqslant 0$, и выполнено условие* 2) *определения* 9. *Пусть $\mathcal{I}$ — множество из определения 9. Тогда из истинности формулы $\mathcal{F}$ следует истинность $\mathcal{F}'$ при $\mathcal{I}$-инъективном $(\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P^+_-})(\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P^+_-})$-морфизме* ОМАСК $\mathfrak{A}$ *в* ОМАСК $\mathfrak{A}'$.

Несложно заметить, что эта теорема объединяет две предыдущие теоремы и ее справедливость легко установить.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_q)$ — обобщенная позитивная формула со свободными переменными x_1, …, x_q, $q \geqslant 0$, и выполнено условие* 2) *определения* 10. *Тогда из истинности формулы $\mathcal{F}'$ следует истинность $\mathcal{F}$ при мощном $\mathcal{I}$-инъективном $(\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P^+_-})(\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P^+_-})$-морфизме* ОМАСК $\mathfrak{A}$ *в* ОМАСК $\mathfrak{A}'$.

Справедливость этой теоремы следует из проведенных ранее рассуждений. В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим одно свойство общей динамической системы (ОДС) в смысле В. В. Немыцкого. ОДС $\boldsymbol{D}$ определяется на топологическом пространстве X и группе T и в самом общем виде может рассматриваться как двухосновная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E\rangle$, у которой $A = \{X, T\}$, $\Omega_F = \{F, +\}$, $\Omega_P = \{\tau\}$, $\Omega_E = \varnothing$, где $F : X \times T \to X$, “+” — групповая операция на множестве моментов времени T, τ — топология пространства состояний X; $\boldsymbol{D}$ удовлетворяет известным аксиомам общей динамической системы [11]. В зависимости от вида объектов, входящих в формулировки изучаемых свойств, множества Ω_F, Ω_P, Ω_E могут меняться. Например, в качестве X будем рассматривать равномерное пространство с топологией τ, порождаемой равномерной структурой пространства X.

Пусть $\boldsymbol{D}'$ — другая общая динамическая система, представляющая собой однотипную $\mathfrak{A}$ ОМАСК $\mathfrak{A}'$ сигнатуры σ' с основными множествами X' и T'. Известно следующее

О п р е д е л е н и е 12 [2]. Вектор-функция $\varphi = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle$, где $\varphi_1 : X \to X'$, $\varphi_2 : T \to T'$, называется гомоморфизмом ОДС $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{D}'$, если для любых $p \in X$ и $t \in T$ выполнено равенство

$$\varphi_1(F(p,t)) = F'(\varphi_1(p), \varphi_2(t)).$$

Рассмотрим свойство $P_0\check{P}$-*ограниченности движений* ОДС $\boldsymbol{D}$, которое может быть записано следующим образом:

$$\forall p \in P_0\ \ \exists P \in \mathcal{R}\ \ \forall t \in T\ \ F(p,t) \in P, \tag{11}$$

где $\mathcal{R}$ — некоторое семейство оценочных множеств $P \subseteq X$. Заметим, что если интерпретировать букву P как предикат, то формула (11) представляет собой формулу логики второго порядка. Представим $\boldsymbol{D}$ как ОМАСК $\mathfrak{D} = \langle D, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E\rangle$, где $D = \{X, T\}$, $\Omega_F = \{F\}$, $\Omega_P = \{P_0, \mathcal{R}, T, \in\}$, $\Omega_E = \varnothing$, т. е. $\mathcal{F} = \forall p : P_0(p)\ \exists P : \mathcal{R}(P)\ \forall t : T(t)\ \ \in (F(p,t), P)$. Здесь $\Omega_{P+} = \{\mathcal{R}, \in\}$, $\Omega_{P-} = Q_{all} = \{T, P_0\}$. Метод ЛАУ позволяет сгенерировать следующее утверждение: если φ_2 — сюръекция, $P_0' \subseteq \varphi_1(P_0)$, $\widehat{\varphi}_1(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}'$ и $\in' \subseteq \varphi_1 * \varphi_1(\in)$, то $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$. Поскольку последнее условие можно заменить на эквивалентное $\varphi_1(P) \subseteq P'$, то получаем следующее утверждение.

Утверждение. *Если $\varphi = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle$ — гомоморфизм* ОДС $\boldsymbol{D}$ *и* $\boldsymbol{D}'$, *сюръективный по компоненте φ_2, причем $P_0' \subseteq \varphi_1(P_0)$, $\widehat{\varphi}_1(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}'$, то из $P_0\check{P}$-ограниченности движений* ОДС $\boldsymbol{D}$ *следует $P_0'\check{P}'$-ограниченность движений* ОДС $\boldsymbol{D}'$.

В полученном утверждении условия, накладываемые на отображения, связывающие две системы, слабее условий, полученных для того же свойства методом представимости [2], а следовательно, это утверждение сильнее, чем утверждение из [2].

Заключение

В последующих работах будет показано, как представленные здесь результаты применяются в анализе свойств динамических систем, в том числе дискретно-событийных. Будет рассмотрена связь метода логико-алгебраических уравнений и упомянутого выше метода представимости (МП), суть которого заключается в записи рассматриваемого свойства динамической системы в виде позитивной формулы специального языка многоосновных алгебраических систем, функции и отношения которых определены на традиционных ступенях в смысле Н. Бурбаки. В частности, будет показано, что МП является частным случаем метода ЛАУ. На примере свойств ОДС в смысле В. В. Немыцкого будут рассмотрены еще несколько примеров того, что метод ЛАУ позволяет получать результаты более сильные, чем результаты, полученные МП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Теория множеств. М.: Мир, 1965. 455 с.
2. **Васильев С.Н.** Метод представимости в логико-алгебраическом подходе к качественному анализу динамических систем // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 3 (11). С. 248–254.
3. **Васильев С.Н.** Синтез теорем с ВФЛ в математической теории систем: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / СО РАН СССР. Иркутск, 1988. 326 с.
4. **Ершов Ю.Л.** Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996. 300 с.
5. **Кейслер Г., Чэн Ч.Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с.
6. **Мальцев А.И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 329 с.
7. **Мальцев А.И.** Модельные соответствия // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1959. Т. 23, № 3. С. 313–336.
8. **Матросов В.М.** Метод сравнения в динамике систем. I, II // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 9. С. 1547–1559; 1975. Т. 11, № 3. С. 403-417.
9. **Нагул Н.В.** Сохранение свойств расписания движения в одной модели сети общественного транспорта // Современные технологии, системный анализ, моделирование. 2010. № 4 (28). С. 150–159.
10. **Нагул Н.В.** Метод логико-алгебраических уравнений в динамике систем // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 156–181.
11. **Сибирский К.С.** Введение в топологическую динамику. Кишинев: РИО АН МССР, 1970. 221 с.
12. **Cassandras C.G., Lafortune S.** Introduction to discrete event systems. New York: Springer, 2008. 776 p.
13. **Feferman S.** Applications of many-sorted interpolation theorems // Proc. of the Tarski Symposium. Providence: Amer. Math. Soc., 1974. Vol. 25. P. 205–224.
14. **Feferman S.** Harmonious logic: Craig's interpolation theorem and its descendants // Synthese. 2008. Vol. 164, no. 3. P. 341–357.
15. **Feferman S.** Lectures on proof theory // Proc. of the Summer School in Logic / ed. M. Löb (Leeds, 1967). Berlin: Springer-Verlag, 1968. P. 1–107. (Lecture Notes in Math.; vol. 70).
16. **Higgins P.J.** Algebras with a sheme of operators // Math. Nachr. 1963. Vol. 27, no.1–2. P. 115–132.
17. **Lyndon R.C.** An interpolation theorem in the predicate calculus // Pacific J. Math. 1959. Vol. 9. P. 129–142.
18. **Lyndon R.C.** Properties preserved under homomorphism // Pacific J. Math. 1959. Vol. 9. P. 143–154.
19. **Otto M.** An interpolation theorem // Bull. Symbolic Logic. 2000. Vol. 6, no. 4. P. 447–462.
20. **Rossman B.** Existential positive types and preservation under homomorphisms // Proc. of the 20th Annual IEEE Symp. on Logic in Comput. Sci. 2005. P. 467–476.

Нагул Надежда Владимировна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: sapling@icc.ru

Поступила 25.06.2013

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ

В. В. Напалков, А. У. Муллабаева

В данной статье с помощью обобщенного оператора дифференцирования строится оператор обобщенного сдвига, который позволяет определить обобщенный оператор свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$. Далее рассматривается характеристическая функция этого оператора и вводится обобщенное преобразование Лапласа. Изучается однородное уравнение оператора обобщенной свертки, решается задача разрешимости и рассматривается многоточечная задача Валле Пуссена.

Ключевые слова: Обобщенное пространство Баргмана — Фока, обобщенный оператор дифференцирования, собственная функция, обобщенное преобразование Лапласа, характеристическая функция, обобщенный оператор сдвига, обобщенный оператор свертки, секвенциально достаточное множество, множество единственности, задача Валле Пуссена.

V. V. Napalkov, A. U. Mullabaeva. On one class of differential operators and their application.

We use a generalized differentiation operator to construct a generalized shift operator, which makes it possible to define a generalized convolution operator in the space $H(\mathbb{C})$. Next, we consider the characteristic function of this operator and introduce a generalized Laplace transform. We study the homogeneous equation of the generalized convolution operator, investigate its solvability, and consider the multi-point Vallée Poussin problem.

Keywords: generalized Bargmann–Fock space, generalized differentiation operator, eigenfunction, generalized Laplace transform, characteristic function, generalized shift operator, generalized convolution operator, sequentially sufficient set, uniqueness set, Vallée Poussin problem.

Введение

В данной работе исследуется оператор обобщенного дифференцирования, с помощью которого определяется оператор обобщенного сдвига, который в свою очередь позволяет ввести оператор обобщенной свертки.

Основным результатом данной статьи является решение задачи Валле Пуссена [1] для оператора обобщенной свертки, которая состоит в следующем.

Пусть последовательность $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительна, $\mu_i > 0$, пронумерована в порядке возрастания, $\mu_i < \mu_{i+1}$, и $\mu_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел $a_j, j = 1, 2, \dots$. Пусть M_φ — некоторый оператор обобщенной свертки. Задача ставится следующим образом: найти условия на характеристическую функцию φ оператора M_φ, при выполнении которых существует решение $f\colon f(\mu_k) = a_k, k = 1, 2, \dots$, однородного уравнения оператора обобщенной свертки $M_\varphi[f](z) = 0$.

В данной статье, в отличие от предыдущих результатов [2–4], рассматривается обобщенный оператор сдвига, порожденный обобщенным оператором дифференцирования, который существенно отличается от классического оператора дифференцирования [2;3] вследствие различия собственных функций (см. лемма 1). Существенным отличием является введение оператора свертки в пространстве целых функций произвольного положительного порядка β и конечного типа, играющего главную роль при доказательстве основного результата.

Обобщенные операторы дифференцирования и свертки ранее уже изучались [5, с. 60, с. 290; 6, с. 424], однако задача Валле Пуссена для оператора обобщенной свертки не рассматривалась.

1. Предварительные результаты

В работе [7, с. 54] были введены обобщенные пространства Баргмана — Фока, которые имеют вид

$$F_\beta = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \colon \|f\|^2 = \frac{1}{\pi \frac{2}{\beta}\Gamma\Big(\frac{2}{\beta}\Big)} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости, $\beta > 0$.

Мы будем исследовать более общий случай, а именно, пространства Баргмана — Фока

$$F_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \colon \|f\|^2 = \frac{\alpha^{\frac{2}{\beta}}}{\pi \frac{2}{\beta}\Gamma\Big(\frac{2}{\beta}\Big)} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha|z|^\beta} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости, а $\alpha > 0$ характеризует тип функций этого пространства.

Функции этого пространства имеют порядок не выше β и конечный тип [8, с. 10].

Аналогично пространству F_β [7, теорема 3] в пространстве $F_{\alpha,\beta}$ сопряженным оператором к оператору умножения на переменную z является оператор обобщенного дифференцирования

$$Df = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n m_n z^n, \text{ где числа } m_n = \frac{1}{\alpha^{\frac{2}{\beta}}} \frac{\Gamma\Big(\frac{2}{\beta}(n+1)\Big)}{\Gamma\Big(\frac{2}{\beta}n\Big)}.$$

Так же, как в работе [7, с. 56], используя асимптотическое представление Г-функции [10, с. 323], получим асимптотическое поведение чисел m_n:

$$|m_n| = \frac{\Gamma\Big(\frac{2}{\beta}(n+1)\Big)}{\alpha^{\frac{2}{\beta}}\Gamma\Big(\frac{2n}{\beta}\Big)} \sim \Big(\frac{2}{\alpha\beta}\Big)^{\frac{2}{\beta}} n^{\frac{2}{\beta}}, \quad n \to \infty, \quad \text{т. е. } \lim_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{\Big(\frac{2}{\beta}\Big)^{\frac{2}{\beta}} n^{\frac{2}{\beta}}} = 1.$$

Оператор обобщенного дифференцирования n-го порядка определяется по индукции $D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z))$.

Используя оценки А. Ф. Леонтьева [5, теорема 1.4.3.], имеем

$$|D^n f| \le \frac{|m_1 \dots m_n|}{R^n} 2^{\frac{2n}{\beta}} M(R) \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{2^{\frac{2}{\beta}} r}{R}\right]^{k-n}, \tag{1.1}$$

где $M(R) = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$. Из оценки вытекает аналитичность оператора $D^n f$ в $\mathbb{C}$.

Оказалось, что этот оператор связан с оператором Гельфонда — Леонтьева [5, с. 60] и с произведением Адамара [9, п. 1.4].

Как и в работе [7, с. 53], собственные функции оператора обобщенного дифференцирования, соответствующие собственным числам λ, с точностью до const и с учетом параметра α имеют вид

$$y(\lambda z) = c\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 \dots m_n}\right)$$

и являются функциями порядка $\beta/2$ и типа α.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, *тогда на вещественной оси* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y(\lambda_1 x)}{y(\lambda_2 x)} = 0$.

Доказательство основано на связи между максимумом функции и максимальным членом разложения в ряд.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Собственная функция обобщенного оператора дифференцирования имеет вид

$$y(\lambda x) = c\biggl(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n x^n}{m_1\dots m_n}\biggr).$$

Согласно асимптотическому поведению чисел m_n и $n!$ получаем представление функции $y(\lambda x)$

$$y(\lambda x) = c\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n x^n}{\left(\frac{2}{\alpha\beta}\right)^{\frac{2n}{\beta}}(n!)^{\frac{2}{\beta}}}\right) \sim c\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n x^n}{\left(\frac{2}{\alpha\beta}\right)^{\frac{2n}{\beta}}\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{2n}{\beta}}}\right)$$

$$\sim c\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\beta e}{2n}\right)^{\frac{2n}{\beta}}\lambda^n x^n\right) \sim c\biggl(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\biggr),$$

где $a_n = \left(\frac{\alpha\beta e}{2n}\right)^{\frac{2n}{\beta}}\lambda^n$.

Найдем максимальный член разложения собственной функции в ряд

$$f(n) = a_n r^n = \left(\frac{(\lambda r)^{\frac{\beta}{2}}\alpha\beta e}{2n}\right)^{\frac{2n}{\beta}} = e^{\frac{2n}{\beta}\ln\frac{(\lambda r)^{\frac{\beta}{2}}\alpha\beta e}{2n}}.$$

Производная данной функции

$$f'(n) = e^{\frac{2n}{\beta}\ln\frac{(\lambda r)^{\frac{\beta}{2}}\alpha\beta e}{2n}}\frac{2}{\beta}\biggl(\ln\frac{(\lambda r)^{\frac{\beta}{2}}\alpha\beta e}{2n}-1\biggr).$$

При $n = \dfrac{\alpha\beta(\lambda r)^{\frac{\beta}{2}}}{2}$ достигается максимум функции $\max\limits_{n\geq 0} f(n) = e^{\alpha(\lambda r)^{\frac{\beta}{2}}}$.

Используя связь между максимумом целой функции и максимальным членом степенного ряда этой функции $\ln\max\limits_{n\geq 0}|a_n|\,r^n \sim \ln\max\limits_{|z|=r}|y(\lambda z)|$, $r\to\infty$, (см. [11, с. 185]) имеем

$$\ln\frac{y(\lambda_1 r)}{y(\lambda_2 r)} = \ln y(\lambda_1 r) - \ln y(\lambda_2 r) = \frac{\ln y(\lambda_1 r)}{\alpha(\lambda_1 r)^{\frac{\beta}{2}}}\alpha(\lambda_1 r)^{\frac{\beta}{2}} - \frac{\ln y(\lambda_2 r)}{\alpha(\lambda_2 r)^{\frac{\beta}{2}}}\alpha(\lambda_2 r)^{\frac{\beta}{2}} \sim \alpha\Bigl(\lambda_1^{\frac{\beta}{2}} - \lambda_2^{\frac{\beta}{2}}\Bigr)r^{\frac{\beta}{2}}.$$

Так как $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, правая часть последнего равенства отрицательна и при $r\to\infty$ стремится к $-\infty$, а значит, аргумент логарифма $\dfrac{y(\lambda_1 r)}{y(\lambda_2 r)} \to 0$. Лемма доказана.

Введем пространство $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций с топологией компактной сходимости, через $H^*(\mathbb{C})$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $H(\mathbb{C})$ и через $H_0(\{\infty\})$ — пространство аналитических в бесконечно удаленной точке и обращающихся на ней в нуль функций.

Лемма 2. *Между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и $H_0(\{\infty\})$ существует изоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функционал $F \in H^*(\mathbb{C})$, его действием на степени z будут числа $(F, z^n) = c_n$, удовлетворяющие условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} < \infty$.

Предположим противное: пусть существует подпоследовательность c_{n_k} такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} = \infty$$

и c_{n_k} выбираются отличными от нуля, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{\dfrac{1}{|c_{n_k}|}} = 0$. По последовательности $1/c_{n_k}$ можно построить целую функцию

$$l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_{n_k}} z^{n_k}.$$

Действуя функционалом на эту функцию, получаем

$$(F, l) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_n}(F, z^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_n} c_n.$$

Ряд расходится — противоречие с предположением, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} = \infty$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$.

По этой последовательности строим функцию

$$g_F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}.$$

Отметим, что действие функционала F на любую функцию $f(z)$ можно представить в виде интеграла

$$(F, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z) g_F(z) dz, \tag{1.2}$$

где C — спрямляемый замкнутый контур, охватывающий все особенности функции $g_F(z)$. Лемма 2 доказана.

О п р е д е л е н и е 1. *Обобщенным преобразованием Лапласа* функционала $F \in H^*(\mathbb{C})$ будем называть функцию

$$\widehat{F}(\lambda) = (F_z, y(\lambda z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C y(\lambda z) g_F(z) dz,$$

где $y(\lambda z)$ — собственная функция оператора D, $g_F(z) \in H_0(\{\infty\})$.

Введем множество

$$P_\beta = \Big\{ \varphi(\lambda) \in H(\mathbb{C}) \colon\ |\varphi(\lambda)| \le B_1(\varphi) e^{B_2(\varphi)|\lambda|^{\frac{\beta}{2}}} \Big\},$$

$B_1(\varphi), B_2(\varphi) = \mathrm{const} < \infty$ зависят от φ — для каждого φ свои константы.

Рассмотрим нормированные весовые пространства

$$B_n = \Big\{ f(z) \in P_\beta \colon\ \|f\|_n = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\, e^{-n|z|^{\frac{\beta}{2}}} < \infty \Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $P_\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Введем в пространстве P_β топологию индуктивного предела $P_\beta = \lim\limits_{n\to\infty} ind\, B_n$ [12, с. 402; 6, с. 424].

Отметим важное свойство этой топологии: счетная последовательность функций из P_β $f_m(z) \to 0$ при $m \to \infty$ в топологии пространства P_β тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что $|f_m(z)| \le M e^{\sigma|z|^{\frac{\beta}{2}}}$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, и для любого компакта $K_{\mathbb{C}}$ $|f_m(z)| \rightrightarrows 0$, $m \to \infty$ на $K_{\mathbb{C}}$.

Введем понятие секвенциальной достаточности множества $L \subset \mathbb{C}$ в некотором подпространстве Q пространства P_β с индуцированной из P_β топологией.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что L — секвенциально достаточное множество в Q, если из выполнения условий

(1) для любой последовательности функций $q_k(z) \in Q$ найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что $|q_k(z)| \leq Me^{\sigma|z|^{\frac{\beta}{2}}} \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in L$;

(2) для любого компакта $K_L \subset L$: $q_k(z) \rightrightarrows 0, k \to \infty,$ на K_L

вытекает сходимость этой последовательности на пространстве Q.

Лемма 3. *Обобщенное преобразование Лапласа устанавливает взаимооднозначное соответствие между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и P_β.*

В доказательстве используется та же схема, что и в классическом случае [13, лемма 12.1].

2. Основные результаты

В данном разделе будут введены операторы обобщенной свертки и рассмотрены их свойства: описание ядра, разрешимость операторов и, наконец, разрешимость задачи Валле Пуссена.

2.1. Обобщенный оператор свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$

О п р е д е л е н и е 3. Возьмем функцию $f(z) \in H(\mathbb{C})$. *Оператором обобщенного сдвига по t* будем называть оператор

$$S_t f(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n f(z)}{m_1 m_2 \dots m_n} t^n.$$

Используя оценку (1.1), оператор обобщенного сдвига $S_t f(z)$ в круге радиуса $r < R/2^{\frac{2}{\beta}}$ сходится как по переменной z, так и по t. Выбирая R произвольным образом, получаем сходимость во всей плоскости.

Таким образом, оператор обобщенного сдвига линейно и непрерывно действует из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C}^2)$ — пространство аналитических функций от двух переменных.

Отметим следующее свойство оператора обобщенного сдвига. Подействуем этим оператором на функцию $y(\lambda z)$:

$$S_t y(\lambda z) = y(\lambda z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n y(\lambda z)}{m_1 m_2 \dots m_n} t^n,$$

учитывая, что $D^n y(\lambda z) = \lambda^n y(\lambda z)$, получаем

$$S_t y(\lambda z) = y(\lambda z)\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{m_1 m_2 \dots m_n}\Big) = y(\lambda z) y(\lambda t).$$

Итак, в результате действия оператора обобщенного сдвига на собственную функцию $y(\lambda z)$ оператора D^n получаем произведение двух собственных функций оператора D^n:

$$S_t y(\lambda z) = y(\lambda z) y(\lambda t).$$

О п р е д е л е н и е 4. Пусть F^1 и F^2 — линейные непрерывные функционалы. *Сверткой функционалов* назовем

$$F^3 = F^1 * F^2 \text{ такое, что } (F^3, f(z)) = \big(F^1_z, (F^2_t, S_t f(z))\big).$$

Как и в классическом случае, обобщенное преобразование Лапласа оператора свертки функционалов равно произведению обобщенных преобразований Лапласа каждого функционала $\widehat{F^1 * F^2} = \widehat{F^1}\widehat{F^2}$.

О п р е д е л е н и е 5. *Обобщенным оператором свертки*, порожденным функционалом F, с характеристической функцией $\widehat{F}(z)=\varphi(z)\in P_\beta$ назовем оператор вида

$$M_\varphi[f](z)=(F_t,S_tf(z))\,.$$

Обобщенный оператор свертки обладает следующими свойствами:

1. M_φ — линейный: $M_\varphi[f_1+f_2]=M_\varphi[f_1]+M_\varphi[f_2]$;

2. M_φ непрерывно действует из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$ как композиция линейных и непрерывных функционала и оператора обобщенного сдвига.

Обобщенный оператор свертки $M_\varphi[f]$ можно представить в виде оператора обобщенного дифференцирования бесконечного порядка:

$$M_\varphi[f](z)=(F_t,S_tf(z))=\Big(F_t,f(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D^nf(z)}{m_1m_2\dots m_n}t^n\Big)$$
$$=(F_t,1)\,f(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(F_t,t^n)}{m_1m_2\dots m_n}D^nf(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kD^kf(z),$$

где a_k — коэффициенты разложения в ряд функции, ассоциированной с функционалом F: $g_F=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{a_km_1m_2\dots m_k}{z^{k+1}}$.

Пространство элементарных решений однородного уравнения обобщеннного оператора свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$ имеет вид

$$E_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{n_k-1}z^iy^{(i)}(\lambda_kz)\subset\ker M_\varphi.$$

Как и в работе [5, теорема 3.3.3.], линейная оболочка E_1 плотна в пространстве $\ker M_\varphi[f]$ и оператор обобщенной свертки разрешим для любой правой части в $H(\mathbb{C})$.

В дальнейшем нам понадобится описание сопряженного оператора к оператору обобщенной свертки. Пусть $M_\varphi[f]\colon H(\mathbb{C})\to H(\mathbb{C})$.

Теорема 1. *Сопряженным оператором к оператору M_φ в $H(\mathbb{C})$ является оператор умножения на характеристическую функцию в P_β.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению сопряженного оператора имеем равенство

$$(M_\varphi[f],G_z)=\big(M_\varphi^*[G],f\big)\,,$$

где $G\in H^*(\mathbb{C})$. Возьмем в качестве $f(z)=y(\lambda z)$, тогда $(M_\varphi[y(\lambda z)],G_z)=\big(M_\varphi^*[G_z],y(\lambda z)\big)$. Согласно определению оператора обобщенной свертки и свойству оператора обобщенного сдвига, получаем

$$M_\varphi[y(\lambda z)]=(F_t,S_ty(\lambda z))=(F_t,y(\lambda z)y(\lambda t))=y(\lambda z)\,(F_t,y(\lambda t))=y(\lambda z)\widehat{F}(\lambda)=y(\lambda z)\varphi(\lambda).$$

С учетом таких выкладок предыдущее равенство представим в виде

$$(\varphi(\lambda)y(\lambda z),G_z)=\widehat{M_\varphi^*[G]}(\lambda).$$

Тогда получаем, что с помощью M_φ^* функционал G перейдет в $\widehat{M_\varphi^*[G]}(\lambda)=\varphi(\lambda)\widehat{G}(\lambda)$.

Поскольку между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и P_β существует изоморфизм (см. лемму 3), то сопряженный оператор M_φ^* в $H(\mathbb{C})$ порождает в силу последнего равенства оператор умножения в пространстве P_β на характеристическую функцию. Теорема 1 доказана.

2.2. Обобщенный оператор свертки в пространстве P_β

В предыдущем разделе мы рассмотрели сопряженный оператор к оператору обобщенной свертки в $H(\mathbb{C})$. Рассмотрим оператор обобщенной свертки в пространстве P_β, для этого рассмотрим сопряженный оператор к оператору умножения в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Пусть $f \in H(\mathbb{C}), F \in H^*(\mathbb{C})$. По определению сопряженного оператора имеем равенство

$$(F, zf) = ((z\cdot)^*[F], f)\,, \tag{2.3}$$

где $(z\cdot)^*$ — сопряженный оператор к оператору умножения на переменную z. Подставив в равенство (2.3) $f(z) = y(\lambda z)$, получим

$$(F_z, y(\lambda z)z) = (F_z, D_\lambda y(\lambda z)) = D_\lambda(F_z, y(\lambda z)) = D_\lambda(\widehat{F}(\lambda)).$$

Используя изоморфизм между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и P_β (см. лемму 3), в качестве сопряженного оператора к умножению на переменную z в $H(\mathbb{C})$ можно считать оператор обобщенного дифференцирования D_λ в пространстве P_β.

Подставляя в последнем выражении вместо $\widehat{F}(\lambda)$ интегральное представление (см. определение 1) и внося оператор дифференцирования под знак интеграла, получаем интегральное представление

$$D_\lambda(F_z, y(\lambda z)) = D_\lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\lambda z)g_F(z)dz\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C zy(\lambda z)g_F(z)dz.$$

Обозначим полученное выражение через $K_z[\widehat{F}]$ и назовем обобщенным оператором свертки в пространстве P_β с характеристической функцией z.

Аналогично можно описать сопряженный оператор к оператору умножения на произвольный многочлен $P(z)$:

$$K_{P(z)}[\widehat{F}] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C P(z)y(\lambda z)g_F(z)dz.$$

Возьмем произвольную целую функцию $q(z) = \lim\limits_{m\to\infty} q_m$, где $q_m(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n$ — многочлены степени m.

Рассмотрим теперь сопряженный оператор к умножению на функцию $q(z)$ из $H(\mathbb{C})$:

$$(F_z, q(z)f(z)) = ((q(z)\cdot)^*[F], f(z))\,,$$

где $(q(z)\cdot)^*[F]$ принадлежит пространству $H^*(\mathbb{C})$ и является сопряженным оператором к оператору умножения на функцию $q(z)$ в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Возьмем в качестве $f(z) = y(\lambda z)$, тогда имеем

$$(F_z, y(\lambda z)q(z)) = \left(F_z, y(\lambda z)\lim_{m\to\infty} q_m\right) = \lim_{m\to\infty}(F_z, y(\lambda z)q_m)\,.$$

Учитывая полученное выше описание сопряженного оператора к оператору умножения на многочлен, имеем

$$\lim_{m\to\infty}(F_z, y(\lambda z)q_m) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C q_m(z)y(\lambda z)g_F(z)dz.$$

Переходя к пределу, получим

$$(F_z, y(\lambda z)q(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C q(z)y(\lambda z)g_F(z)dz =^{def} K_q[\widehat{F}].$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Сопряженным оператором к оператору умножения на целую функцию в пространстве $H(\mathbb{C})$ является оператор обобщенной свертки $K_q[\varphi](z)$ в пространстве P_β с характеристической функцией $q(z)$ вида*

$$K_q[\varphi](\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\lambda z)q(z)g_F(z)dz, \quad \text{где} \quad \widehat{F}(z) = \varphi(z).$$

Отметим, что сопряженным оператором к оператору $K_q[\varphi]$ в P_β является оператор умножения в $H(\mathbb{C})$ на характеристическую функцию $q(z)$.

2.3. Решение однородного уравнения обобщенного оператора свертки в пространстве P_β

Рассмотрим однородное уравнение обобщенного оператора свертки в пространстве P_β. Пусть $\varphi(z)$ является его решением:

$$K_f[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\lambda z)f(\lambda)g_F(\lambda)d\lambda = 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим произведение $Q(\lambda) = f(\lambda)g_F(\lambda)$. Функция $Q(\lambda)$ аналитична вне контура C и имеет особенности в бесконечно удаленной точке, следовательно, раскладывается в ряд Лорана $Q(\lambda) = Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda)$, где $Q_1(\lambda)$ — целая функция, а $Q_2(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{\lambda^{n+1}}$ — главная часть разложения в ряде Лорана.

Подставляя $Q(\lambda)$ в (2.4) и учитывая, что $Q_1(\lambda)$ — целая функция, получаем

$$K_f[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\lambda z)Q_2(\lambda)d\lambda = c\Big(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k z^k}{m_1 m_2 \dots m_k}\Big) \equiv 0.$$

Так как последнее выражение тождественно равно 0, то и все коэффициенты $a_k = 0$ и $Q_2(z) \equiv 0$. Следовательно, $Q(z) = f(z)g_F(z) = Q_1(z)$ — аналитическая функция, и функция $g_F(z) = Q(z)/f(z)$ представляет собой отношение двух аналитических функций, а значит, является мероморфной в области C [14, с. 274]. Рассмотрим нули $f(z)$, лежащие внутри контура C, среди них находятся полюса $g_F(z)$: λ_k с кратностью n_k. Тогда $g_F(z)$ представляется в виде ряда $g_F(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{n=1}^{n_k}\dfrac{a_{nk}}{(\lambda-\lambda_k)^n}$.

Используя это представление, можно найти функцию

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\lambda z)g_F(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\lambda z)\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{n_k}\frac{a_{nk}}{(\lambda-\lambda_k)^n} \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{n_k}a_{nk}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{y(\lambda z)}{(\lambda-\lambda_k)^n}d\lambda = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{n_k}a_{nk}\frac{z^{n-1}y^{(n-1)}(\lambda_k z)}{(n-1)!}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, решением однородного уравнения обобщенного оператора свертки K_f в пространстве P_β является конечная линейная комбинация собственной функции оператора обобщенного дифференцирования и его производных в случае кратных нулей характеристической функции. Обозначим это множество через $E = \ker K_f[\varphi]$.

2.4. Неоднородное уравнение свертки в пространстве P_β

Рассмотрим задачу разрешимости неоднородного уравнения оператора обобщенной свертки в пространстве P_β. Покажем, что образ этого оператора совпадает с P_β.

По теореме Дьедонне — Шварца [16, теорема 7; 3, теорема 4] замкнутость образа оператора K_f эквивалентна замкнутости образа сопряженного оператора K_f^*, которая в свою очередь эквивалентна замкнутости образа оператора $\widehat{K_f^*}$.

Как было показано ранее (см. теорему 2), сопряженным оператором K_f^* к обобщенному оператору свертки K_f в пространстве P_β является оператор умножения в $H(\mathbb{C})$ на характеристическую функцию оператора K_f.

Очевидно, что $Im\widehat{K_f^*} = \{\psi(\lambda)f(\lambda)\}_{\psi\in H(\mathbb{C})}$ замкнут как образ оператора умножения на характеристическую функцию. Любая функция замыкания образа $\widehat{K_f^*}$ обращается в нуль в нулях характеристической функции K_f. Поэтому она представляется в виде произведения характеристической функции на некоторую функцию из $H(\mathbb{C})$.

Заметим, что $\ker\widehat{K_f^*} \equiv 0$, поскольку характеристическая функция оператора K_f не равна нулю. Следовательно, оператор $\widehat{K_f^*}$ инъективен. По теореме Дьедонне — Шварца образ обобщенного оператора свертки K_f всюду плотен. Образ оператора K_f совпадает с P_β.

Таким образом, мы получили, что неоднородное уравнение обобщенного оператора свертки разрешимо для любой правой части в P_β.

2.5. Решение многоточечной задачи Валле Пуссена

Рассмотрим в пространстве $H(\mathbb{C})$ оператор свертки

$$M_\varphi[f](z) = (F_t, S_t f(z)), \quad f \in H(\mathbb{C}).$$

Возьмем произвольную функцию $\psi(\lambda) \in H(\mathbb{C})$ и построим в $H(\mathbb{C})$ идеал $\psi \cdot H(\mathbb{C}) \equiv \{\psi(\lambda)\cdot R(\lambda)\colon R(\lambda)\in H(\mathbb{C})\}$.

О п р е д е л е н и е 6 [3, с. 78; 15] Пара функций $(\varphi(z), \psi(z))$ называется парой Фишера, если пространство $H(\mathbb{C})$ можно представить в виде

$$H(\mathbb{C}) = \ker M_\varphi \oplus \psi \cdot H(\mathbb{C}). \tag{2.6}$$

В этом случае равенство (2.6) называется разложением Фишера. Если $H(\mathbb{C})$ представимо в виде

$$H(\mathbb{C}) = \ker M_\varphi + \psi \cdot H(\mathbb{C}), \tag{2.7}$$

то равенство (2.7) называется представлением Фишера.

В этом случае любая целая функция представима в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad f_1(z) \in \ker M_\varphi, \quad f_2(z) \in \psi \cdot H(\mathbb{C}),$$

вообще говоря, не единственным образом.

Рассмотрим операторы $M_\varphi[f]\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ и $K_\psi[l]\colon P_\beta \to P_\beta$. $K_\psi[l]$ — оператор обобщенной свертки с характеристической функцией $\psi(z)$.

Введем следующие обозначения:

2.5.1. Пусть $E = \ker K_\psi[l]$ — конечная линейная комбинация собственных функций с топологией, индуцированной из пространства P_β.

2.5.2. Пусть последовательность $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ нулей функции $\varphi(z) \in P_\beta$ положительна, $\lambda_k > 0$, и пронумерована в порядке возрастания $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

2.5.3. Пусть последовательность $N_\psi = \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ нулей функции $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ положительна $\mu_i > 0$ и пронумерована в порядке возрастания $\mu_i < \mu_{i+1}$. Предполагаем, что все нули простые и $\mu_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Отметим, что равенство (2.7) позволяет решать многоточечную задачу Валле Пуссена в классе $\ker M_\varphi$.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны*:
1. *Многоточечная задача Валле Пуссена для M_φ с данными на N_ψ разрешима.*
2. *Имеет место представление Фишера.*

Доказательство аналогичное [2, с. 166].

Отметим, что функция $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ порождает в пространстве P_β линейный и непрерывный оператор $K_\psi : P_\beta \to P_\beta$, действующий по правилу

$$K_\psi[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \psi(\xi) y(z\xi) g_F(\xi) d\xi, \tag{2.8}$$

где $g_F(\xi)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $\varphi(z), C$ — замкнутый контур, охватывающий все особые точки $g_F(\xi)$. Наряду с оператором $M_\varphi[f](z)$ введем линейный и непрерывный оператор

$$M_\varphi[\psi(z)y(z)]\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}). \tag{2.9}$$

Лемма 4 [2, лемма 5]. *Равенство* (2.7) *эквивалентно сюръективности оператора* (2.9).

Как отмечалось выше, оператор $M_\varphi[\psi\cdot]$ линейно и непрерывно отображает пространство $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$. Тогда сопряженный оператор $M_\varphi^*[\psi\cdot]$ линейно и непрерывно отображает $H^*(\mathbb{C})$ в $H^*(\mathbb{C})$. Поскольку пространства $H^*(\mathbb{C})$ и P_β топологически изоморфны, то оператор $M_\varphi^*[\psi\cdot]$ порождает линейный и непрерывный оператор $\widehat{M_\varphi^*[\psi\cdot]} : P_\beta \to P_\beta$. Нетрудно видеть (см. п.2.2), что оператор $\widehat{M_\varphi^*[\psi\cdot]}$ действует по правилу: если $G(z) \in P_\beta$, то

$$\widehat{M_\varphi^*[\psi \cdot G]}(\lambda) = K_\psi[\varphi(z)G(z)](\lambda),$$

где K_ψ — оператор вида (2.8). Об операторе $M_\varphi[\psi\cdot]$ можно почитать в работах [2, с. 166; 17]. Так как $H(\mathbb{C})$ — пространство Фреше, то в силу теоремы Дьедонне — Шварца [16, теорема 7; 3, теорема 4] получаем следующий результат.

Теорема 4. *Справедливы утверждения*:
1. *Замкнутость $im M_\varphi[\psi\cdot]$ в $H(\mathbb{C})$ эквивалентна замкнутости $im K_\psi[\varphi\cdot]$ в P_β.*
2. *Инъективность $K_\psi[\varphi\cdot]$ эквивалентна всюду плотности образа оператора $M_\varphi[\psi\cdot]$ в $H(\mathbb{C})$.*

Учитывая лемму 4, для того, чтобы доказать, что имеет место представление Фишера, необходимо доказать сюръективность оператора $M_\varphi[\psi\cdot]$. Для этого надо доказать, что оператор $K_\psi[\varphi\cdot]$ инъективен и $im K_\psi[\varphi\cdot]$ замкнут в P_β.

2.6. N_φ — множество единственности и секвенциальной достаточности

Теорема 5. *N_φ — секвенциально достаточное множество в E.*

Доказательство. Покажем, что если последовательность $f_m(z) \in E$ стремится к нулю на множестве N_φ, то эта последовательность стремится к нулю для всех точек $z \in \mathbb{C}$. Учитывая дискретность множества N_φ, условие сходимости к нулю на множестве N_φ можно записать следующим образом: последовательность функций из E $f_m(z) \to 0$ при $m \to \infty$ на множестве N_φ тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|f_m(\lambda_k)| \le Me^{\sigma|\lambda_k|^{\frac{\beta}{2}}} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z};$$

$$|f_m(\lambda_k)| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Ранее было показано $\big($см. (2.5)$\big)$, что любой элемент $r(z) \in E$ запишется в виде

$$r(z) = \sum_{i=1}^{Q} c_i y(\mu_i z),$$

где μ_i — нули характеристической функции $\psi(z)$ оператора $K_\psi[l]$, и лишь конечное число коэффициентов c_i отличны от нуля. Итак, пусть последовательность

$$r_n(z) = \sum_{i=1}^{Q_n} c_i^n y(\mu_i z) \tag{2.10}$$

стремится к нулю на множестве N_φ. Это означает, что для некоторых постоянных $\sigma, M > 0$ выполняются соотношения

$$|r_n(\lambda_k)| \le Me^{\sigma|\lambda_k|^{\frac{\beta}{2}}} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}; \tag{2.11}$$

$$|r_n(\lambda_k)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.12}$$

Нам нужно показать, что $r_n \to 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$.

1. Докажем, что при выполнении условия (2.11) коэффициент c_i^n отличен от нуля, только если $\alpha\,|\mu_i|^{\frac{\beta}{2}} \le (1+\alpha_1)\sigma$.

Доказательство от противного. Пусть для фиксированного n

$$\mu = \max\{\mu_i, i : c_i^n \ne 0\} : \alpha\,|\mu|^{\frac{\beta}{2}} > ((1+\alpha_1)\sigma)$$

и c^n — коэффициент при $y(\mu z)$ в квазиполиноме $r_n(z)$. Тогда по соотношению (2.11)

$$|r_n(\lambda_k)|\,\frac{1}{y(\mu\lambda_k)} \le Me^{\sigma|\lambda_k|^{\frac{\beta}{2}} - \alpha(\mu\lambda_k)^{\frac{\beta}{2}}} \le Me^{((1+\alpha_1)\sigma - \alpha\mu^{\frac{\beta}{2}})\lambda_k^{\frac{\beta}{2}}} \to 0$$

при $\lambda_k \to \infty$. С другой стороны,

$$|r_n(\lambda_k)|\,\frac{1}{y(\mu\lambda_k)} = \Big|\sum_i c_i^n \frac{y(\mu_i\lambda_k)}{y(\mu\lambda_k)}\Big| \to c^n$$

при $\lambda_k \to \infty$, т. е. $c^n = 0$, что противоречит определению μ. Таким образом, $\alpha\mu_i^{\frac{\beta}{2}} \le (1+\alpha_1)\sigma$.

2. Докажем дальше, что если последовательность $r_n(z)$ стремится к нулю на множестве N_φ, то коэффициенты c_i^n стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Мы показали, что в представлении (2.10) участвуют лишь $y(\mu_i z)$ с показателями μ_i, удовлетворяющими оценке $\alpha\,|\mu_i|^{\frac{\beta}{2}} \le (1+\alpha_1)\sigma$. Поскольку μ_i — нули целой функции, то показателей, участвующих в представлении (2.10), конечное число. После перенумерования можно считать, что для некоторого P

$$r_n(z) = \sum_{i=1}^{P_n} c_i^n y(\mu_i z), \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.13}$$

Если набор из p нулей λ_{k_j} выбрать так, что определитель матрицы $A = \big(y(\mu_i\lambda_{k_j})\big)_{i,j}$, $i,j = 1,2,\dots,p$, отличен от нуля, тогда коэффициенты c_i^n являются решениями системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{p} c_i^n y(\mu_i\lambda_{k_j}) = r_n(\lambda_{k_j}), j = 1,2,\dots,p.$$

Согласно утверждению леммы 1 λ_{k_j} можно выбрать таким образом, чтобы главные миноры $\Delta_t = \big(y(\mu_i\lambda_{k_j})\big)_{i,j}$, $i,j = 1,2,\dots,t$, были отличны от нуля. Поскольку $\mu_i \geq 0$, то в качестве λ_{k_1} можно взять любой нуль. Допустим, что нули $\lambda_{k_j}, j = 1,2,\dots,t-1$, выбраны таким образом, что λ_{k_j} возрастают по j. В главном миноре второго порядка

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y(\mu_1\lambda_{k_1}) & y(\mu_2\lambda_{k_1}) \\ y(\mu_1\lambda_{k_2}) & y(\mu_2\lambda_{k_2}) \end{vmatrix}$$

величина λ_{k_2} может быть выбрана настолько большой, что

$$\Delta_2 = y(\mu_1\lambda_{k_1})y(\mu_2\lambda_{k_2}) - y(\mu_2\lambda_{k_1})y(\mu_1\lambda_{k_2}) > 0,$$

так как $\lim\limits_{\lambda_{k_2}\to\infty} \dfrac{y(\mu_2\lambda_{k_2})}{y(\mu_1\lambda_{k_2})} = \infty$ согласно лемме 1.

Аналогичным образом доказывается, что $\Delta_3 > 0, \dots, \Delta_{p-1} > 0$. Разложим последний определитель по последнеу столбцу

$$\Delta = \quad (-1)^{p+1} y(\mu_p\lambda_{k_1}) \begin{vmatrix} y(\mu_1\lambda_{k_2}) & \dots & y(\mu_{p-1}\lambda_{k_2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(\mu_1\lambda_{k_p}) & \dots & y(\mu_{p-1}\lambda_{k_p}) \end{vmatrix} + \dots$$

$$+\, y(\mu_p\lambda_{k_p}) \begin{vmatrix} y(\mu_1\lambda_{k_1}) & \dots & y(\mu_{p-1}\lambda_{k_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(\mu_1\lambda_{k_{p-1}}) & \dots & y(\mu_{p-1}\lambda_{k_{p-1}}) \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{p-1} > 0$, то последнее слагаемое в разложении определителя Δ отличено от нуля, при этом λ_{k_p} можно взять настолько большим, что $\Delta > 0$.

По правилу Крамера $c_i^n = \Delta_i/\Delta$, где Δ_i — определитель матрицы, полученной из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов. Согласно условию (2.12) при $n \to \infty$ столбец свободных членов стремится к нулю, а следовательно, и все $\Delta_i \to 0$ при $n \to \infty$. Тем самым получаем, что $c_i^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы доказали, что $c_i^n \to 0$ при любом i. Поэтому для любого компакта $K_{\mathbb{C}}$ функция $y(\mu_i z)$ ограничена на этом компакте, коэффициенты стремятся к нулю, и вся линейная комбинация (2.13) стремится к нулю при $n \to \infty$. Из этого следует, что $r_n(z) \to 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$.

Таким образом, N_φ является секвенциально достаточным множеством в E.

Из этой теоремы вытекает

Следствие. *Множество N_φ — множество единственности в E.*

2.7. Инъективность и замкнутость образа оператора $K_\psi[\varphi\cdot]$ в пространстве P_β

Теорема 6. *Если N_φ — секвенциально достаточное множество в пространстве E, то оператор $M_\varphi[\psi\cdot]$ является сюръективным.*

Как уже было сказано, сюръективность $M_\varphi[\psi\cdot]$ вытекает из инъективности $K_\psi[\varphi\cdot]$ и замкнутости $imK_\psi[\varphi\cdot]$ в P_β.

Для линейного оператора инъективность эквивалентна тому, что его ядро тривиально (состоит из единственного элемента 0). Действительно, если $G(z) \in P_\beta$ и удовлетворяет уравнению $K_\psi[\varphi(z)G(z)] = 0$ и N_φ — множество единственности в E, то функция $\varphi(z)G(z) \equiv 0$ в E, значит, $G(z) \equiv 0$.

Докажем замкнутость образа оператора $K_\psi[\varphi\cdot]$ в пространстве P_β. Пусть $g_n(z) \overset{P_\beta}{\to} g(z)$, $n \to \infty$ и $g_n(z) \in imK_\psi[\varphi\cdot]$. Покажем, что $g(z) \in imK_\psi[\varphi\cdot]$. Так как $g_n(z) \in imK_\psi[\varphi\cdot]$, то существуют функции $G_n(z) \in P_\beta$, удовлетворяющие условию

$$K_\psi[\varphi(z)G_n(z)] = g_n(z), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2.14}$$

Рассмотрим оператор $K_\psi[y], y \in P_\beta$. В разд. 2.4 данной работы мы показали, что этот оператор является сюръективным в пространстве P_β и, следовательно [18], имеет непрерывный правый обратный оператор K_ψ^{-1}, вообще говоря, нелинейный, поэтому существуют функции $y_n(z) \in P_\beta$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $K_\psi[y_n] = g_n(z)$.

2. Последовательность $y_n(z)$ в пространстве P_β сходится к некоторой функции $y(z) \in P_\beta$, причем $K_\psi[y(z)] = g(z)$.

Из условия 1 и равенства (2.14) в силу линейности оператора K_ψ получаем

$$K_\psi\left[y_n(z) - \varphi(z)G_n(z)\right] = 0.$$

Функция $h_n = y_n(z) - \varphi(z)G_n(z)$ удовлетворяет условиям $h_n(\lambda_k) = y_n(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$, и из того, что множество N_φ секвенциально достаточное в E, следует, что последовательность $h_n(z)$ сходится в P_β к некоторой функции $h(z) \in E$. Так как $\varphi(z)G_n(z)$ сходится к некоторой функции $l(z)$ в P_β, то $|\varphi(z)G_n(z)| \le B_1 e^{B_2|z|^{\frac{\beta}{2}}}$. По теореме об оценке снизу [8, теорема 1.1.9] получаем оценку $|\varphi(z)| \ge e^{-h|z|^{\frac{\beta}{2}}}$ и $|G_n(z)| \le \tilde{B_1} e^{\tilde{B_2}|z|^{\frac{\beta}{2}}}$.

Покажем, что $G_n(z)$ сходится к $G(z) = l(z)/\varphi(z)$ равномерно на компактах.

Из сходимости последовательности $\varphi(z)G_n(z)$ в P_β следует, что $\varphi(z)G_n(z)$ равномерно сходится к $l(z)$ на любом компакте. Пусть K — замкнутый круг с центром в нуле такой, что на его границе ∂K

$$|\varphi(z)| > \delta \text{ для некоторого } \delta > 0. \tag{2.15}$$

Так как $\varphi(z)G_n(z)$ равномерно сходится на K к $l(z)$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения

$$|\varphi(z)G_n(z) - l(z)| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \quad z \in K.$$

Учитывая (2.15), получим оценку

$$|G_n(z) - l(z)/\varphi(z)| < \varepsilon/\delta, \quad z \in \partial K, \quad n > N(\varepsilon),$$

которая по принципу максимума модуля может быть продолжена на весь компакт K. Таким образом мы доказали, что $G_n(z)$ равномерно сходится к функции $G(z) = l(z)/\varphi(z)$ на K.

В силу непрерывности оператора свертки имеем

$$K_\psi\left[y(z) - \varphi(z)G(z)\right] = 0, \quad G(z) \in P_\beta,$$

поэтому

$$K_\psi\left[\varphi(z)G(z)\right] = K_\psi\left[y(z)\right] = g(z),$$

значит, $g(z) \in imK_\psi[\varphi\cdot]$.

Следовательно, оператор $K_\psi[\varphi\cdot]$ является сюръективным, и из леммы 4 следует справедливость представления Фишера

$$H(\mathbb{C}) = \ker M_\varphi + \psi \cdot H(\mathbb{C}).$$

Таким образом, доказана основная

Теорема 7. *Пусть $\varphi \in P_\beta$ — характеристическая функция оператора M_φ, $\psi \in H(\mathbb{C})$, и N_φ (см. п. 2.5.2) является секвенциально достаточным множеством в E (см. п. 2.5.1), тогда разрешима многоточечная задача Валле Пуссена для M_φ с данными на N_ψ (см. п. 2.5.3).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **De La Vallee Poussin Ch.J.** Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre //J. Math. Pures Appl. 1929. Vol. 8. P. 125–144.
2. **Напалков В.В.** Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки //Тр. МИАН. Т. 235. 2001. С. 165–168.
3. **Напалков В.В., Нуятов А.А.** Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки //Мат. сб. 2012. Т. 203, № 2. С. 77–86.
4. **Напалков В.В., Попенов С.В.** Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера //Докл. АН. 2001. Т. 381, № 2. С. 164–166.
5. **Леонтьев А.Ф.** Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981. 320 с.
6. **Ткаченко В.А.** Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную //Мат. сб. 1980. Vol. 112(154), № 3(7). С. 421–466.
7. **Напалков В.В., Муллабаева А.У., Дильмухаметова А.М.** Обобщение пространства Фока // Уфим. мат. журн. 2010. Т. 2, № 1. С. 52–58.
8. **Леонтьев А.Ф.** Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с.
9. **Бибербах Л.** Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967. 240 с.
10. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.
11. **Евграфов М.А.** Асимптотические оценки и целые функции. 3-е изд. М., 1978. 320 с.
12. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ в нормированых пространствах. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
13. **Напалков В.В.** Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982. 241 с.
14. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. Т. 1. М.: Наука, 1985. 336 с.
15. **Shapiro H.S.** An algebraic theorem of E. Fischer, and the holomorphic Goursat problem // Bull. London Math. Soc. Vol. 21. 1989. P. 513–537.
16. **Дьедонне Ж., Шварц Л.** Двойственность в пространствах (F) и (LF) // Сб. математика. 1958. Т. 2, вып. 2. С. 77–107.
17. **Meril A., Struppa D.C.** Equivalence of Cauchy problems for entire and exponential type functions // Bull. London Math. Soc. Vol. 17. 1985. P. 469-–473.
18. **Епифанов О.В.** О существовании непрерывного правого обратного оператора в одном классе локально выпуклых пространств // Изв. Северо-Кавказского Научного центра высшей школы. № 3. 1991. С. 3–4. (Сер. “Естественные науки”.)

Напалков Валентин Васильевич
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
директор
Институт математики с ВЦ Уфимского НЦ РАН
e-mail: napalkov@matem.anrb.ru

Поступила 18.04.2013

Муллабаева Айгуль Ураловна
аспирант
Башкирский гос. ун-т
e-mail: mullabaeva.87@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

О ПСЕВДОМНОГООБРАЗИИ, ПОРОЖДЕННОМ ВСЕМИ КОНЕЧНЫМИ МОНОИДАМИ СО СВОЙСТВОМ $\mathscr{R}=\mathscr{H}$ [1]

Т. В. Первухина

В работе рассматривается псевдомногообразие, порожденное всеми конечными моноидами, на которых совпадают отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$. Найден новый алгоритм, позволяющий проверить, принадлежит ли данный конечный моноид этому псевдомногообразию.

Ключевые слова: конечные моноиды, отношения Грина, псевдомногообразие моноидов, категория, реляционный морфизм.

T. V. Pervukhina. On the pseudovariety generated by all finite monoids satisfying $\mathscr{R}=\mathscr{H}$.

We consider the pseudovariety generated by all finite monoids on which Green's relations $\mathscr{R}$ and $\mathscr{H}$ coincide. We find a new algorithm that determines if a given finite monoid belongs to this pseudovariety.

Keywords: finite monoids, Green's relations, monoid pseudovariety, category, relational morphism.

Введение

Псевдомногообразием моноидов называется класс моноидов, замкнутый относительно взятия подмоноидов, гомоморфных образов и формирования конечных декартовых произведений. Изучение псевдомногообразий конечных моноидов является активно развивающимся направлением в теории полугрупп. Подробную информацию об этом направлении можно найти в монографиях [1; 5]. Псевдомногообразия моноидов также представляют большой интерес ввиду их приложения к изучению формальных языков, а именно, как показано С. Эйленбергом, существует взаимно однозначное соответствие между псевдомногообразиями моноидов и определенными классами формальных языков, называемыми многообразиями языков [4]. Это соответствие позволяет классифицировать распознаваемые языки исходя из свойств их синтаксических моноидов. Особую роль здесь играют псевдомногообразия моноидов, удовлетворяющих некоторым ограничениям на отношения Грина: псевдомногообразия всех $\mathscr{H}$-тривиальных моноидов, всех $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов и всех $\mathscr{J}$-тривиальных моноидов. В частности, $\mathscr{H}$-тривиальные моноиды являются аналогом беззвездных языков [4; 6], а $\mathscr{J}$-тривиальные моноиды соответствуют кусочно-тестируемым языкам [4; 7].

В данной работе изучается псевдомногообразие **RH**, порожденное всеми конечными моноидами, на которых совпадают отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$, что естественным образом развивает указанную тематику. Рассматривается вопрос о разрешимости этого псевдомногообразия. Ранее автором было получено [11] представление псевдомногообразия **RH** в виде полупрямого произведения псевдомногообразия всех конечных групп **G** и псевдомногообразия всех конечных $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов **R**. Полученное представление позволяет воспользоваться более общими результатами Дж. Карнофского и Дж. Роуза [2] о псевдомногообразиях вида $\mathbf{G} * \mathbf{V}$, согласно которым **RH** разрешимо, поскольку разрешимо псевдомногообразие **R**. Алгоритм Карнофского–Роудза основан на построении максимальной конгруэнции со следующим свойством: два регулярных элемента лежат в одном классе по этой конгруэнции тогда и только

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013), Министерства образования и науки РФ (госзадание № 2248) и программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ Российской федерации (проект НШ-5161.2014.1).

тогда, когда они содержатся в одном $\mathscr{L}$-классе. Мы, пользуясь представлением $\mathbf{RH} = \mathbf{G} * \mathbf{R}$, приводим новый алгоритм, непосредственно основанный на подходе Б. Тилсона [9] к изучению псевдомногообразий моноидов на языке категорий. В дальнейшем мы предполагаем конечность всех рассматриваемых объектов (моноидов, категорий).

1. Предварительные сведения

Основные понятия теории полугрупп можно найти в монографиях [4;10]. Отношения Грина $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{H}$ на моноиде S определяются формулами $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow aS = bS$, $a\mathscr{L}b \Leftrightarrow Sa = Sb$, $a\mathscr{J}b \Leftrightarrow SaS = SbS$, $\mathscr{D} = \mathscr{R} \vee \mathscr{L}$, $\mathscr{H} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}$. В конечных моноидах $\mathscr{D}$ совпадает с $\mathscr{J}$.

Пусть H — произвольный $\mathscr{H}$-класс моноида S. Моноид $St_r(H) = \{x \in S \mid Hx = H\}$ называется *правым стабилизатором класса* H. На $St_r(H)$ определим отношение $\sim$, положив $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $hx = hy$ для некоторого (а значит, для любого) $h \in H$. Это отношение является конгруэнцией на $St_r(H)$. Обозначим фактормоноид моноида $St_r(H)$ по конгруэнции $\sim$ через $\Gamma_r(H)$ и назовем $\Gamma_r(H)$ *моноидом переходов класса* H. Моноид переходов $\Gamma_r(H)$ является просто транзитивной группой подстановок на H. Если $\mathscr{H}$-классы H_1 и H_2 содержатся в одном $\mathscr{D}$-классе, то группы $\Gamma_r(H_1)$ и $\Gamma_r(H_2)$ изоморфны. Абстрактная группа $\Gamma_r(H)$ называется *группой Шютценберже* $\mathscr{D}$*-класса* D, содержащего H.

По аналогии с правым стабилизатором $\mathscr{H}$-класса обозначим через $St_r(P) = \{x \colon Px \subseteq P\}$ правый стабилизатор произвольного подмножества $P \subseteq S$. Для произвольного $\mathscr{H}$-класса H обозначим через $Pw_r(H)$ множество элементов $St_r(H)$, поточечно стабилизирующих H.

Пусть V и W — конечные моноиды, $v, v_1, v_2 \in V$ и $w, w_1, w_2 \in W$. *Полупрямое произведение* $V * W$ — это множество $V \times W$, где W действует на V слева в соответствии с правилами $w(v_1v_2) = w(v_1)w(v_2)$ и $w_1(w_2(v)) = (w_1w_2)(v)$, а произведение пар определяется следующим образом: $(v_1, w_1)(v_1, w_2) = (v_1w_1(v_2), w_1w_2)$. Будем также говорить, что V *делит* W, если V является гомоморфным образом некоторого подмоноида моноида W.

Пусть $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ — псевдомногообразия моноидов. Через $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ далее будем обозначать *полупрямое произведение* $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. Моноид S содержится в $\mathbf{V} * \mathbf{W}$, если S делит некоторое полупрямое произведение $V * W$ для некоторых $V \in \mathbf{V}, W \in \mathbf{W}$.

В работе [9] Б. Тилсон рассмотрел категории как алгебраические структуры и обобщил с помощью них многие понятия и операции из теории полугрупп. Приведем использованные им определения основных понятий из теории категорий и соответствующие аналоги известных понятий для моноидов (таких, как псевдомногообразие, деление и т.п.).

Категория P задается графом, который определяется *множеством объектов* $Obj(P)$ и *множествами стрелок (морфизмов)* $P(t_1, t_2)$ из объекта t_1 в объект t_2 для каждой пары объектов $t_1, t_2 \in Obj(P)$. Стрелку $p \in P(t_1, t_2)$ будем обозначать через $p \colon t_1 \to t_2$. Каждой паре стрелок $p \colon t_1 \to t_2$ и $q \colon t_2 \to t_3$ с помощью *операции композиции* сопоставляется стрелка $pq \colon t_1 \to t_3$. Операция композиции ассоциативна, т. е. для стрелок $p \colon t_1 \to t_2$, $q \colon t_2 \to t_3$ и $r \colon t_3 \to t_4$ выполняется равенство $(pq)r = p(qr)$. Кроме того, каждому объекту сопоставляется *тождественная стрелка* $1_t \colon t \to t$ со свойствами $p1_t = p$ и $1_tq = q$. Произвольный моноид S можно отождествить с категорией, которая состоит из единственного объекта и множества стрелок, изоморфного S. *Подкатегория* P' категории P представляет собой подграф графа категории P, который является категорией относительно операции композиции, унаследованной от категории P, причем тождественные стрелки этой категории являются и тождественными стрелками в P. Каждый полный подграф графа категории P является подкатегорией в P. В частности, для каждого объекта $t \in Obj(P)$ полная подкатегория $P(t)$ на этом объекте является моноидом, который называют *локальным моноидом* категории P.

Пусть X и Y — графы. *Произведение графов* $Z = X \times Y$ определяется множеством объектов $Obj(Z) = Obj(X) \times Obj(Y)$ и множествами стрелок $Z[(s,t),(s',t')] = X(s,s') \times Y(t,t')$. Произведение семейства графов $\{X_b \colon b \in \beta\}$ определяется аналогично и обозначается $\Pi\{X_b \colon b \in \beta\}$.

Произведение семейства категорий $\{P_b : b \in \beta\}$ — это произведение соответствующих графов $\Pi\{P_b : b \in \beta\}$, снабженное покоординатно операцией композиции.

Пусть X и Y — множества. Каждому подмножеству Z декартова произведения $X \times Y$ сопоставляется *отношение множеств* $f : X \to Y$, определяемое правилом $f(x) = \{y \in Y : (x, y) \in Z\}$. Обратно, каждое отношение множеств $f : X \to Y$ определяет некоторое подмножество $X \times Y$, а именно $Z = \{(x, y) : y \in f(x)\}$. Отношение множеств $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если $x \neq x'$ влечет $f(x) \neq f(x')$ для всех $x, x' \in X$. Отношение множеств $f : X \to Y$ называется *всюду определенным*, если $f(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$. *Реляционный морфизм моноидов* $\varphi : S \lhd T$ — это всюду определенное отношение моноидов $\varphi : S \to T$ такое, что φ — подмоноид $S \times T$.

Пусть X и Y — графы. *Отношение графов* $f : X \to Y$ определяется отношением множеств $f : Obj(X) \to Obj(Y)$ и отношением множеств стрелок $f : X(s, s') \to Y(t, t')$ для любой пары множеств стрелок $X(s, s')$ и $Y(t, t')$, где $t \in f(s)$ и $t' \in f(s')$. Каждое отношение графов $f : X \to Y$ определяет подграф графа $X \times Y$. Отношение графов называется *всюду определенным*, если отношение множеств объектов $f : Obj(X) \to Obj(Y)$ и все отношения множеств стрелок $f : X(s, s') \to Y(t, t')$ являются всюду определенными. Пусть теперь P и Q — категории. *Реляционный морфизм категорий* $\varphi : P \lhd Q$ — это всюду определенное отношение категорий $\varphi : P \to Q$ такое, что φ — подкатегория $P \times Q$. Реляционный морфизм $\varphi : P \lhd Q$ называется *делением*, если все отношения множеств стрелок инъективны. Говорят также, что категория P *делит* категорию Q.

Псевдомногообразием категорий называется семейство конечных категорий, замкнутое относительно формирования конечных произведений и операции деления. Пусть V — псевдомногоообразие моноидов. Через $\mathbf{V}_C$ обозначим *псевдомногообразие категорий, порожденное* $\mathbf{V}$. Категория P принадлежит $\mathbf{V}_C$, если P делит M для некоторого моноида $M \in \mathbf{V}$. Через $\mathbf{lV}$ обозначим псевдомногообразие всех конечных категорий, чьи локальные моноиды принадлежат $\mathbf{V}$. Псевдомногообразие $\mathbf{V}$ называется *локальным*, если $\mathbf{V}_C = \mathbf{lV}$.

Пусть $\varphi : S \lhd T$ — реляционный морфизм моноидов. Каждому $t \in \varphi(S)$ и каждой паре $(s', t') \in \varphi$ сопоставляется функция $[t, (s', t')] : \varphi^{-1}(t) \to \varphi^{-1}(tt')$, где $[t, (s', t')](s) = ss'$. *Производная категория* D_φ морфизма φ определяется следующим образом: объектами являются элементы из образа $\varphi(S)$, а наборами стрелок являются $D_\varphi(t_1, t_2) = \{[t_1, (s, t)] \mid (s, t) \in \varphi, t_1 t = t_2\}$.

Напомним, что рефлексивное и симметричное бинарное отношение ρ называется *толерантностью*. Толерантность ρ на моноиде S называется *согласованной с умножением*, если для любых $a, b, x, y \in S$ из соотношений $a \,\rho\, x$ и $b \,\rho\, y$ следует $ab \,\rho\, xy$. Будем называть *ρ-классом* максимальное по включению подмножество элементов из S, находящихся попарно в отношении ρ. В общем случае элемент $x \in S$ может принадлежать нескольким ρ-классам. Толерантность ρ назовем *стабильной*, если для каждого ρ-класса K и каждого $x \in S$ из условия $Kx \cap K \neq \varnothing$ следует $Kx \subseteq K$. Предположим, что толерантность ρ содержит правое отношение Грина $\mathscr{R}$ на S. Толерантность ρ назовем $\mathscr{R}$-минимальной, если для произвольного фиксированного ρ-класса K любой $\mathscr{R}$-класс, лежащий в K, минимален во множестве всех $\mathscr{R}$-классов, лежащих в K относительно стандартного частичного порядка $\leq$ на множестве $\mathscr{R}$-классов на моноиде S: $R_a \leq R_b$ тогда и только тогда, когда $aS \subseteq bS$, $a, b \in S$.

2. Построение алгоритма

Как было указано выше, существует алгоритм [2], определяющий, принадлежит ли данный моноид псевдомногообразию $\mathbf{RH} = \mathbf{G} * \mathbf{R}$. Приведем новый критерий, основанный на построении наименьшей согласованной с умножением толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ такой, что ее классы представляют собой объединения $\mathscr{R}$-классов.

Построение $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$. Перенумеруем $\mathscr{R}$-классы моноида S в виде $K^0_1, \ldots, K^0_{n_0}$. Для каждого произведения вида $K^0_i K^0_j$ рассмотрим минимальное по включению объединение $\mathscr{R}$-классов, содержащее $K^0_i K^0_j$. Назовем эти объединения *$\mathscr{R}$-покрытиями*. Перенумеруем полученные $\mathscr{R}$-

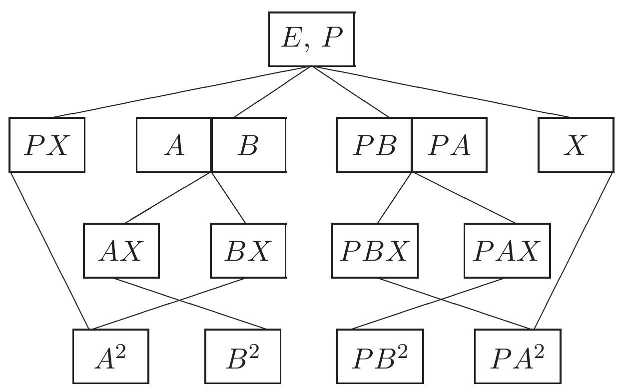
покрытия в виде $K_1^1, \dots, K_{n_1}^1$, и для всех произведений вида $K_i^j K_m^l$ рассмотрим их $\mathscr{R}$-покрытия $K_1^2, \dots, K_{n_2}^2$. Будем продолжать процедуру до тех пор, пока каждое новое $\mathscr{R}$-покрытие не будет содержаться в одном из уже построенных, что произойдет в силу конечности моноида. Максимальные по включению множества K_i^j являются классами толерантности $\mathscr{R}_{cr}^\sharp$. $\square$

Приведем пример моноида, принадлежащего $\mathbf{RH}$, но не удовлетворяющего равенству $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, и построим для него толерантность $\mathscr{R}_{cr}^\sharp$. Пусть G обозначает группу, состоящую из единицы 1 и инволюции a. Как следует из работы [11], моноид $TM_4(G)$ всех треугольных мономиальных по строкам матриц над группой G с присоединенным нулем удовлетворяет равенству $\mathscr{R} = \mathscr{H}$. Обозначим через M подмоноид $TM_4(G)$, порожденный следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $AP = B$ и $BP = A$, получаем $A\mathscr{R}B$ в M. Более того, выполнены следующие соотношения: $X = XA = XB$, $AB = A^2$, $BA = B^2$ и $X^2 = PA^2$.

Следующая диаграмма иллюстрирует $\mathscr{R}$-структуру моноида M. Клетками обозначаются $\mathscr{H}$-классы, смежные клетки обозначают $\mathscr{H}$-классы одного $\mathscr{R}$-класса.



$\mathscr{R}$-структура моноида M.

В соответствии с процедурой построения $\mathscr{R}_{cr}^\sharp$ множества, обозначаемые $K_1^0, \dots, K_{13}^0$, — это изображенные выше $\mathscr{R}$-классы. Как легко видеть из диаграммы, их попарные произведения добавляют следующие множества к уже имеющимся $\mathscr{R}_{cr}^\sharp$-классам: $K_1^1 = \{A, B, PA, PB\}$, $K_2^1 = \{A^2, B^2\}$, $K_3^1 = \{A^2, PA^2\}$, $K_4^1 = \{B^2, PB^2\}$, $K_5^1 = \{PA^2, PB^2\}$, $K_6^1 = \{X, PX\}$, $K_7^1 = \{AX, BX\}$, $K_8^1 = \{AX, PAX\}$, $K_9^1 = \{BX, PBX\}$, $K_1^1 = \{PAX, PBX\}$. На третьем шаге получаем $K_1^2 = \{A^2, B^2, PA^2, PB^2\}$ и $K_2^2 = \{AX, BX, PAX, PBX\}$, и процесс стабилизируется. Классами по толерантности $\mathscr{R}_{cr}^\sharp$, таким образом, являются множества $K_1^0 = \{E, P\}$, K_1^1, K_6^1, K_1^2 и K_2^2, т. е. толерантность $\mathscr{R}_{cr}^\sharp$ является конгруэнцией.

Специализация теоремы 13.2 из [9] для интересующего нас случая непосредственно приводит к следующему критерию принадлежности конечного моноида псевдомногообразию $\mathbf{G} * \mathbf{R}$.

Теорема 1. *Конечный моноид S принадлежит псевдомногообразию $\mathbf{G} * \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда существует такой реляционный морфизм $\varphi \colon S \lhd T$, что $D_\varphi \in \mathbf{G}_C$ и $T \in \mathbf{R}$.*

В соответствии с [9, предложение 13.8] псевдомногообразие всех конечных групп $\mathbf{G}$ локально. Тогда по [9, предложение 13.5] конечная категория принадлежит $\mathbf{G}_C$ в том и только том случае, когда все ее локальные моноиды принадлежат $\mathbf{G}$. Сформулируем теперь основной результат этой работы.

Теорема 2. *Конечный моноид S принадлежит псевдомногообразию* $\mathbf{RH}$ *тогда и только тогда, когда толерантность $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$ является стабильной и $\mathscr{R}$-минимальной на S и для произвольного $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$-класса K множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H \subseteq K$.*

Доказательство. Предположим, что толерантность $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$ является $\mathscr{R}$-минимальной и стабильной на S и для произвольного $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$-класса K множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $\mathscr{H}$-классов $H \subseteq K$. Обозначим через T набор множеств K_i^j, построенных выше. Тогда в соответствии с процессом построения T снабжается структурой моноида, где роль единицы играет $\mathscr{R}$-класс, содержащий единицу моноида S. Определим реляционный морфизм $\varphi\colon S \lhd T$, сопоставив каждому $s \in S$ множество всех K_i^j, содержащих s. Обозначим правое отношение Грина на моноиде T через $\bar{\mathscr{R}}$. Пусть $A\bar{\mathscr{R}}B$ для некоторых $A, B \in T$. Тогда найдутся такие элементы $X, Y \in T$, что $AX = B$ и $BY = A$, откуда $AXY = A$. Выбрав произвольно представителей $a, b, x, y \in S$ множеств A, B, X, Y, имеем $ax\,\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}\,b$ и $axy\,\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}\,a$. Так как $axy \leq_{\mathscr{R}} a$, то соотношение $axy\,\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}\,a$ в силу $\mathscr{R}$-минимальности $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$ влечет $axy\,\mathscr{R}\,a$, т. е. $axyz = a$ для некоторого $z \in S$, откуда $a\,\mathscr{R}\,ax$. Поскольку $ax, b \in B$ и B по построению содержит $\mathscr{R}$-класс элемента ax, то $a \in B$, откуда $A \subseteq B$. Из равенства $BY = A$ аналогично получаем $B \subseteq A$, т. е. $A = B$ в T. Таким образом, отношение $\bar{\mathscr{R}}$ тривиально на моноиде T.

Зафиксируем $K \in T$ и возьмем $x \in St_r(K)$. Пусть P — произвольный $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$-класс, содержащий K, тогда в силу стабильности $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$ имеем $x \in St_r(P)$. С другой стороны, если взять $s \in St_r(P)$, то в силу $\mathscr{R}$-минимальности $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$ имеем $p\,\mathscr{R}\,ps$ для любого $p \in P$, т. е. s стабилизирует любое объединение $\mathscr{R}$-классов, лежащих в P, откуда $St_r(K) = St_r(P)$. Так как $St_r(K)$ является подмоноидом в S, достаточно показать обратимость действия x на K. Возьмем произвольный $a \in K \subseteq P$. В силу $\mathscr{R}$-минимальности $\mathscr{R}_{cr}^{\sharp}$ имеем $a\,\mathscr{R}\,ax$, а тогда найдется такой $y \in S$, что $axy = a$. Так как $Py \cap P \neq \varnothing$, то y также принадлежит $St_r(P)$, и тогда $xy \in St_r(P)$. Обозначим $\mathscr{H}$-класс элемента a через H_a. Элемент xy стабилизирует a — значит, он стабилизирует H_a поточечно, поскольку группа Шютценберже $\mathscr{H}$-класса просто транзитивна. Но тогда по условию xy должен поточечно стабилизировать все $\mathscr{H}$-классы, лежащие в P, в том числе и лежащие в K. Это означает, что действие y обратно по отношению к действию x на K. В терминах категории D_φ это означает, что локальный моноид $D_\varphi(\varphi(K))$ является группой. Так как множество $K \in T$ было выбрано произвольно, то $D_\varphi \in \mathbf{G}_C$.

Пусть теперь для S существует реляционный морфизм $\varphi\colon S \lhd T$ со свойствами $T \in \mathbf{R}$ и $D_\varphi \in \mathbf{V}_G$. Без ограничения общности положим $\varphi(S) = T$. Как известно [3], существуют такой моноид M и такие гомоморфизмы $\alpha\colon M \to S$ и $\beta\colon M \to T$, что $\varphi = \alpha^{-1}\beta$. Пусть $\bar{\mathscr{R}}$ по-прежнему обозначает правое отношение Грина на T, а $\widehat{\mathscr{R}}$ обозначает правое отношение Грина на M. Если $p, q \in M$ и $p\,\widehat{\mathscr{R}}\,q$, то $px = q$ и $qy = p$ для некоторых элементов $x, y \in M$. Тогда $\beta(p)\beta(x) = \beta(q)$ и $\beta(q)\beta(y) = \beta(p)$, откуда $\beta(p)\,\bar{\mathscr{R}}\,\beta(q)$ в T, и тогда $\beta(p) = \beta(q)$, поскольку $T \in \mathbf{R}$. Следовательно, образы всех элементов одного $\widehat{\mathscr{R}}$-класса совпадают, и β индуцирует на M конгруэнцию δ, содержащую отношение $\widehat{\mathscr{R}}$. Рассмотрев действие α на M, получаем, что образы δ-классов формируют согласованную с умножением толерантность ρ на S. Покажем, что она является стабильной. Пусть P — некоторый δ-класс, и для некоторого элемента $\alpha(x) \in S$ имеем $\alpha(P)\alpha(x) \cap \alpha(P) \neq \varnothing$. Тогда $Px \cap P \neq \varnothing$, откуда $Px \subseteq P$, так как δ — конгруэнция. Следовательно $\alpha(P)\alpha(x) \subseteq \alpha(P)$, что означает стабильность толерантности ρ. Покажем теперь, что ρ содержит отношение $\mathscr{R}$ на S. Зафиксируем произвольный элемент $a \in S$ и произвольный ρ-класс $\alpha(P)$, содержащий a. Пусть $p_a \in \alpha^{-1}(a) \cap P$. Возьмем такой элемент $b \in S$, что $a\,\mathscr{R}\,b$, и такие элементы $x, y \in S$, что $ax = b$ и $bx = a$. Пусть элементы $p_b, p_x, p_y \in M$ — произвольные элементы множеств $\alpha^{-1}(b)$, $\alpha^{-1}(x)$ и $\alpha^{-1}(y)$ соответственно. Тогда имеем $p_a p_x = p_b$ и $p_b p_y = p_a$ в M. Из этих равенств получаем, что $\beta(p_a)\beta(p_x) = \beta(p_b)$ и $\beta(p_b)\beta(p_y) = \beta(p_a)$ в T, откуда $\beta(p_a)\,\bar{\mathscr{R}}\,\beta(p_b)$ и, следовательно, $\beta(p_a) = \beta(p_b)$. Получили, что $p_a, p_b \in P$, и тем самым $b \in \alpha(P)$. В силу произвольности выбора P и b мы заключаем, что $\mathscr{R} \subseteq \rho$ на S.

Теперь покажем, что толерантность ρ является $\mathscr{R}$-минимальной. Возьмем произвольный ρ-класс Q и предположим, что он содержит сравнимые $\mathscr{R}$-классы R_q и R_{qs}, где $q \in Q$, $s \in S$.

Тогда $Qs \cap Q \neq \varnothing$, и в силу стабильности ρ имеем $s \in St_r(Q)$. Так как локальный моноид $D_\varphi(\varphi(Q))$ по условию является группой, то действие x на Q обратимо, и для некоторого $t \in St_r(Q)$ имеем $qst = q$, т. е. $q \mathscr{R} qs$, и $R_q = R_{qs}$. Таким образом, каждый $\mathscr{R}$-класс, лежащий в Q, минимален во множестве всех $\mathscr{R}$-классов, лежащих в Q, что и требовалось. Поскольку толерантность $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ содержится в ρ, то и для нее выполнена $\mathscr{R}$-минимальность. Более того, из приведенных рассуждений следует, что действие локальной группы $D_\varphi(\varphi(Q))$ осуществляется лишь внутри $\mathscr{R}$-классов, лежащих в Q. Это означает, что если $s \in St_r(Q)$, то s стабилизирует любое объединение $\mathscr{R}$-классов, лежащих в Q, в том числе и $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классы, лежащие в Q. Предположим, что для некоторого $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класса $K \subseteq Q$ выполнено $Kx \cap K \neq \varnothing$. Тогда $Qx \cap Q \neq \varnothing$, откуда $s \in St_r(Q)$, и, следовательно, $s \in St_r(K)$.

Зафиксируем теперь произвольный $\mathscr{H}$-класс $H \subseteq Q$ и предположим, что H содержится в $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классе K, $K \subseteq Q$. Пусть $h = xy \in Pw_r(H)$, тогда действие y обратно по отношению к действию x в группе Шютценберже класса H. Так как группа Шютценберже, очевидно, является подгруппой в группе $D_\varphi(\varphi(Q))$, то y осуществляет действие, обратное к действию x, на всем классе Q, т. е. $xy \in Pw_r(H_i)$ для всех $\mathscr{H}$-классов $H_i \subseteq Q$. Таким образом, множества $Pw_r(H)$ совпадают для всех $H \subseteq Q$, а значит, и для всех $H \subseteq K$. Теорема доказана. □

Отметим, что в процессе построения толерантности $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ мы можем параллельно проверять ее на $\mathscr{R}$-минимальность. Для этого необходимо и достаточно, чтобы на каждом шаге каждое из вновь построенных $\mathscr{R}$-покрытий не содержало сравнимых $\mathscr{R}$-классов. Если построенная толерантность $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ оказалась $\mathscr{R}$-минимальной, то, очевидно, для ее стабильности необходимо и достаточно, чтобы объединение любых двух пересекающихся $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-классов не содержало сравнимых $\mathscr{R}$-классов. Совпадение множеств $Pw_r(H)$ для каждого $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$-класса, очевидно, можно проверить алгоритмически. Поэтому приведенная выше процедура построения $\mathscr{R}^\sharp_{cr}$ и теорема 2 предоставляют разрешимый критерий принадлежности моноида S псевдомногообразию $\mathbf{RH}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Almeida J.** Finite semigroups and universal algebra. Singapore: World Scientific, 1994. 511 p.
2. **Karnofsky J., Rhodes J.** Decidability of complexity one-half for finite semigroups // Semigroup Forum. 1992. Vol. 24. P. 55–66.
3. **Pin J.-E.** Relational morphisms, transductions and operations on languages // Lect. Notes Comp. Sci. 1989. Vol. 386. P. 34–55.
4. **Pin J.-E.** Varieties of formal languages. London: North Oxford Academic Publishers, 1986. 148 p.
5. **Rhodes J., Steinberg B.** The q-theory of finite semigroups. New York: Springer, 2009. 666 p.
6. **Schützenberger M. P.** On finite monoids having only trivial subgroups // Inf. Control. 1965. Vol. 8. P. 190–194.
7. **Simon I.** Piecewise testable events // Lect. Notes Comp. Sci. 1975. Vol. 33. P. 214–222.
8. **Straubing H.** On finite $\mathscr{J}$-trivial monoids // Semigroup Forum. 1980. Vol. 19. P. 107–110.
9. **Tilson B.** Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids // J. Pure and Applied Algebra. 1987. Vol. 48. P. 83–198.
10. **Лаллеман Ж.** Полугруппы и комбинаторные приложения. Москва: Мир, 1985. 440 с.
11. **Первухина Т. В.** Структура конечных моноидов, удовлетворяющих соотношению $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 181–191.

Первухина Татьяна Вячеславовна
младший науч. сотрудник
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им Б. Н. Ельцина
e-mail: cristofory@gmail.com

Поступила 14.10.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.5

ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСОВ МУЛЬТИВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Плещева, Н. И. Черных

Предложен метод построения ортогональных базисов мультивсплесков пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ по любым известным мультимасштабирующим функциям, порождающим кратномасштабный анализ размерности больше единицы.

Ключевые слова: мультивсплеск, кратномасштабный анализ, мультимасштабирующие функции, маска, матричная маска.

E. A. Pleshcheva, N. I. Chernykh. Construction of orthogonal multiwavelet bases.

We propose a method for constructing orthogonal multiwavelet bases of the space $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ for any known multiscaling functions that generate a multiresolution analysis of dimension greater than 1.

Keywords: multiwavelet, multiresolution analysis, multiscaling function, mask, matrix mask.

Введение

Рассмотрим, как в [3; 5–7], вместо одной масштабирующей функции систему из k функций $\{\varphi^l(x)\colon l=\overline{1,k}\}$, чьи сдвиги и сжатия порождают по классической схеме Малла соответствующий им кратномасштабный анализ размерности $k>1$. Как отмечал Кейнерт [2, гл. 10], существуют способы построения мультивсплесков по известным мультимасштабирующим функциям, удовлетворяющим "минимальным условиям регулярности". В статье [4] приведен универсальный метод построения биортогональных базисов мультивсплесков в случае, когда мультимасштабирующие функции имеют компактный носитель. В нашей работе метод построения мультивсплесков по мультимасштабирующим функциям не использует никаких дополнительных ограничений, кроме п. д) следующего известного определения КМА$_k$.

О п р е д е л е н и е. Последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств

$$\ldots\subset V_j\subset V_{j+1}\subset\ldots\ (j\in\mathbb{Z}) \tag{0.1}$$

пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ называется его кратномасштабным анализом размерности k (КМА$_k$), если удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_j V_j}=\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$,

б) $\bigcap_j V_j=\{0\}$,

в) $f(x)\in V_j \Leftrightarrow \forall l\in\mathbb{Z}\ \ f(x-l/2^j)\in V_j$,

г) $f(x)\in V_0 \Leftrightarrow \forall j\in\mathbb{Z}\ \ f(2^jx)\in V_j$,

д) найдутся такие функции $\varphi^s(x)$, $s=\overline{1,k}$ из $V_0\subset\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, что множество их целочисленных сдвигов $\varphi^s(x-n)$, $s=\overline{1,k}$, $n\in\mathbb{Z}$ образует ортонормированный в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ базис пространства V_0. Функции $\varphi^1(x),\varphi^2(x),\ldots,\varphi^k(x)$ называются *мультимасштабирующими*.

Основным результатом данной работы является алгоритм построения ортонормированных базисов пространств мультивсплесков по известным ортонормированным базисам пространств кратномасштабного анализа.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00004), Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1).

Аналогично случаю одной масштабирующей функции определяются подпространства W_j всплесков, соответствующих КМА$_k$ с условиями

$$W_j \dotplus V_j = V_{j+1}, \quad V_j \in \text{КМА}_k, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{0.2}$$

где символ $\dotplus$ означает ортогональную сумму подпространств.

1. Необходимые условия ортогональности в терминах масок масштабирующих функций

Все изложенное в этом разделе хорошо известно (см., например, [2, гл. 7]), подобно случаю $k = 1$, и представлено здесь для введения необходимых понятий и обозначений. Выпишем масштабирующие соотношения для функций, образущих базис пространств КМА$_k$. Для этого введем масштабирующую вектор-функцию (столбец)

$$\Phi(x) = \Big(\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x)\Big)^T.$$

Из определения КМА$_k$ следует, что компоненты вектор-функции $\Phi_{j,n}(x) = 2^{j/2}\Phi(2^j x - n)$ образуют ортонормированный базис пространства V_j, и, значит, условие (0.1) эквивалентно выполнению равенства

$$\Phi(x) \overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n \Phi_{1,n}(x) \tag{1.3}$$

с матричными коэффициентами

$$H_n = \begin{pmatrix} h_n^{1,1} & h_n^{1,2} & \ldots & h_n^{1,k} \\ h_n^{2,1} & h_n^{2,2} & \ldots & h_n^{2,k} \\ \ldots & & & \\ h_n^{k,1} & h_n^{k,2} & \ldots & h_n^{k,k} \end{pmatrix}$$

и покомпонентной сходимостью в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ рядов, составляющих (1.3). Это эквивалентно тому, что последовательности комплексных чисел $\{h_n^{r,s}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $(r, s = \overline{1, k})$ принадлежит $l^2(\mathbb{Z})$.

После преобразования Фурье равенство (1.3) принимает вид

$$\widehat{\Phi}(\omega) = M\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{1.4}$$

где

$$\widehat{\Phi}(\omega) = \Big(\widehat{\varphi^1}(\omega), \widehat{\varphi^2}(\omega), \ldots, \widehat{\varphi^k}(\omega)\Big)^T,$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n e^{-2\pi i n\omega} = \begin{pmatrix} m^{1,1}(\omega) & m^{1,2}(\omega) & \ldots & m^{1,k}(\omega) \\ m^{2,1}(\omega) & m^{2,2}(\omega) & \ldots & m^{2,k}(\omega) \\ \ldots & & & \\ m^{k,1}(\omega) & m^{k,2}(\omega) & \ldots & m^{k,k}(\omega) \end{pmatrix}.$$

Матрицу $M(\omega)$ принято называть *маской системы масштабирующих функций*, ее элементы

$$m^{r,s}(\omega) \overset{\mathbf{L}^2}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n^{r,s} e^{-2\pi i n\omega}$$

суть 1-периодические интегрируемые с квадратом на $[0, 1)$ функции, т. е. функции из $\mathbf{L}^2[0, 1)$. Положим $\big\langle \Phi(x), \Phi(x-n) \big\rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)[\Phi(x-n)]^* dx$, где $[\Phi(x)]^* = [\overline{\varphi^1}(x), \overline{\varphi^2}(x), \ldots, \overline{\varphi^k}(x)]$. Здесь и далее $A \overset{*}{=} (\overline{A})^T$ — транспонированная комплексно сопряженная матрица для матрицы A. Ясно, что условие $\int_{\mathbb{R}} \varphi^r(x)\overline{\varphi^s(x-n)}dx = \delta_{r,s}\delta_{0,n}$ $(r,s=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z})$ ортонормированности системы $\{\varphi^s(x-n)\colon s=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z}\}$ эквивалентно матричному равенству (с единичной матрицей I размерности k)

$$\big\langle \Phi(x), \Phi(x-n)\big\rangle = \delta_{0,n}I.$$

Как и в классическом случае, переходя к преобразованиям Фурье, имеем

$$\big\langle \Phi(x), \Phi(x-n)\big\rangle = \big\langle \widehat{\Phi}(\omega), \widehat{\Phi}(\omega)e^{-2\pi i n\omega}\big\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(\omega)[\widehat{\Phi}(\omega)]^* e^{2\pi i n\omega}d\omega = \delta_{0,n}I.$$

Представляя последний интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам $[l,l+1]$ и заменяя в этих интегралах ω на $\omega-l$, как и в классическом случае (см., например, [1, гл. 1]), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(\omega)[\widehat{\Phi}(\omega)]^* e^{2\pi i n\omega}d\omega = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \widehat{\Phi}(\omega)[\widehat{\Phi}(\omega)]^* e^{2\pi i n\omega}d\omega$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \widehat{\Phi}(\omega-l)[\widehat{\Phi}(\omega-l)]^* e^{2\pi i n(\omega-l)}d\omega = \int_0^1 \Big[\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega-l)[\widehat{\Phi}(\omega-l)]^*\Big] e^{2\pi i n\omega}d\omega = \delta_{0,n}I,$$

откуда следует необходимое и достаточное условие ортогональности в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ системы $\{\varphi^s(x-n)\colon s=\overline{1,k},\ n\in\mathbb{Z}\}$:

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega-l)\big[\widehat{\Phi}(\omega-l)\big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{1.5}$$

Из этого условия вытекает известное необходимое условие для масок $M(\omega)$, которое мы представляем в новой необходимой нам форме, отраженной в следующем утверждении.

Утверждение. *Пусть*

$$\mathfrak{M}(\omega) = \Big[M(\omega); M\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big] = \begin{pmatrix} m^{1,1}(\omega) & \dots & m^{1,k}(\omega) & m^{1,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & m^{1,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ m^{2,1}(\omega) & \dots & m^{2,k}(\omega) & m^{2,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & m^{2,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ m^{k,1}(\omega) & \dots & m^{k,k}(\omega) & m^{k,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & m^{k,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}.$$

Если система $\{\varphi^s(x-n)\colon s=\overline{1,k},\ n\in\mathbb{Z}\}$ *— ортонормированная, то*

$$\mathfrak{M}(\omega)(\mathfrak{M}(\omega))^* \overset{\text{п.в.}}{=} I.$$

Доказательство. Из равенств (1.4) и $(AB)^*=B^*A^*$ вытекает

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega-l)\big[\widehat{\Phi}(\omega-l)\big]^* = \sum_{l\in\mathbb{Z}} M\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big[\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^*\Big[M\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{1.6}$$

Разложение последней суммы по известной схеме на две, по четным и по нечетным l, вместе с условием (1.5) влечет

$$I \overset{\text{п.в.}}{=} M\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big[M\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]^* + M\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big[M\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big]^*. \tag{1.7}$$

Легко проверить, что это равенство после замены $\omega/2$ на ω в терминах введенной матрицы $\mathfrak{M}(\omega)$ переписывается в следующей эквивалентной форме:

$$\mathfrak{M}(\omega)(\mathfrak{M}(\omega))^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{1.8}$$

Действительно, например, первый элемент первой строки этой матрицы равен

$$\sum_{s=1}^{k}\left|m^{1,s}(\omega)\right|^2+\sum_{s=1}^{k}\left|m^{1,s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\right|^2,$$

где первая и вторая суммы являются первыми элементами первой строки матриц $M(\omega)[M(\omega)]^*$ и $M(\omega+1/2)[M(\omega+1/2)]^*$ соответственно. Аналогично проверяются остальные равенства. $\square$

2. Базисы пространств мультивсплесков

Построим пространства всплесков W_j $(j\in\mathbb{Z})$ на основе матриц $\mathfrak{M}(\omega)$. Из (0.2) следует, что для этого достаточно построить W_0 такое, что $W_0\dotplus V_0=V_1$, так как ясно, что для остальных $j\in\mathbb{Z}$ будет $W_j=d_2^jW_0$, где d_2 — оператор двоичного сжатия: $(d_2f)(x)=f(2x)$. Далее строим вектор-функцию

$$\Psi(x)=\Big(\psi^1(x),\psi^2(x),\dots,\psi^k(x)\Big)^T,\quad \psi^s(x)\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R}),\quad s=\overline{1,k}, \tag{2.1}$$

такую, что $\{\psi^s(x-n)\},\ s=\overline{1,k},\ n\in\mathbb{Z}$ — ортонормированная система в пространстве $W_0\subset V_1$.

Для того чтобы функции $\psi^s(x)$ лежали в $W_0\subset V_1$, должны существовать такие матрицы H_n^{ψ}, составленные из элементов $\{h_n^{r,s,\psi}\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l_2$, чтобы выполнялось соотношение

$$\Psi(x)\overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_n^{\psi}\sqrt{2}\Phi(2x-n). \tag{2.2}$$

Здесь ряд из вектор-функций в правой части равенства покомпонентно сходится в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. В терминах преобразований Фурье равенство (2.2) выглядит следующим образом:

$$\widehat{\Psi}(\omega)=M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{2.3}$$

где маска системы мультивсплесков $M^{\psi}(\omega)$ определяется выражением

$$M^{\psi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_n^{\psi}e^{-2\pi in\omega}=\begin{pmatrix} m_{\psi}^{1,1}(\omega) & m_{\psi}^{1,2}(\omega) & \dots & m_{\psi}^{1,k}(\omega)\\ m_{\psi}^{2,1}(\omega) & m_{\psi}^{2,2}(\omega) & \dots & m_{\psi}^{2,k}(\omega)\\ \dots & & & \\ m_{\psi}^{k,1}(\omega) & m_{\psi}^{k,2}(\omega) & \dots & m_{\psi}^{k,k}(\omega)\end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$m_{\psi}^{r,s}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_n^{r,s,\psi}e^{-2\pi in\omega}\in\mathbf{L}^2[0,1)\quad (r,s=\overline{1,k}).$$

Введем матрицу

$$\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)=\begin{pmatrix} m_{\psi}^{1,1}(\omega) & \dots & m_{\psi}^{1,k}(\omega) & m_{\psi}^{1,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & m_{\psi}^{1,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\\ m_{\psi}^{2,1}(\omega) & \dots & m_{\psi}^{2,k}(\omega) & m_{\psi}^{2,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & m_{\psi}^{2,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\\ \dots & & & & & \\ m_{\psi}^{k,1}(\omega) & \dots & m_{\psi}^{k,k}(\omega) & m_{\psi}^{k,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & m_{\psi}^{k,k}(\omega+\frac{1}{2})\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Выразим в терминах матриц $\mathfrak{M}(\omega)$ и $(\mathfrak{M}^{\psi}(\omega))$ условия ортонормированности системы $\{\psi^1(x-n),\psi^2(x-n),\dots,\psi^k(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и ортогональности пространств V_0 и $\widetilde{W}_0=\overline{\operatorname{span}}\{\psi^r(x-n)\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi^s(x-n), s=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z}\}$ *— ортонормированная система. Тогда для ортонормированности системы* $\{\psi^s(x-n), s=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z}\}$ *вида* (2.2) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)(\mathfrak{M}^{\psi}(\omega))^* \overset{\text{п.в.}}{=} I, \tag{2.6}$$

а для ортогональности пространств $\widetilde{W}_0$ *и* V_0 *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)(\mathfrak{M}(\omega))^* \overset{\text{п.в.}}{=} \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{0}$ *— нулевая матрица размерности* $k\times k$.

Доказательство аналогично случаю КМА$_1$. Пусть система $\{\psi^s(x-n), s=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z}\}$ ортонормированна. Тогда справедливость равенства (2.6) следует из доказательства утверждения: там нужно вместо (1.4) использовать (2.3), заменить $\widehat{\Phi}(\omega-l)$ на $\widehat{\Psi}(\omega-l)$, сохранить $\widehat{\Phi}$ в правой части (1.6), а M заменить на M^{ψ} и применить обозначение (2.5). В итоге вместо (1.8) получим (2.6). Легко видеть, что, в отличие от утверждения, эти рассуждения обратимы, если ортогональность системы $\{\varphi^s(x-n), s=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z}\}$ уже предполагается.

По обычной схеме обоснуем равенство

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega-l)[\widehat{\Psi}(\omega-l)]^* = \mathbf{0}.$$

Как всегда, условие ортогональности $\langle\psi^r(x-n), \varphi^s(x-l)\rangle = 0$, $r,s=\overline{1,k}$, $n,l\in\mathbb{Z}$, пространств W_0 и V_0 эквивалентно условиям

$$\langle\Phi(x), \Psi(x-n)\rangle = \mathbf{0}, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

или, в терминах преобразований Фурье, условию

$$\langle\widehat{\Phi}(\omega), \widehat{\Psi}(\omega)e^{-2\pi in\omega}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(\omega)[\widehat{\Psi}(\omega)]^* e^{2\pi in\omega}d\omega = \mathbf{0}.$$

Отсюда путем стандартных преобразований (см. обоснование формулы (1.5)) получаем, что формула (2.8) эквивалентно равенствам

$$\int\limits_0^1 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega-l)[\widehat{\Psi}(\omega-l)]^* e^{2\pi in\omega}d\omega \overset{\text{п.в.}}{=} \mathbf{0}, \quad n\in\mathbb{Z},$$

а из него уже следует равенство

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega-l)[\widehat{\Psi}(\omega-l)]^* = \mathbf{0}.$$

Подставляя сюда представления (2.3) и (1.4), имеем

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega-l)[\widehat{\Psi}(\omega-l)]^* = \sum_{l\in\mathbb{Z}} M\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big[M^{\psi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^*$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} M\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big[\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^*\Big[M^{\psi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \mathbf{0}.$$

Как и в классическом случае, после преобразований, примененных при выводе (1.7), получаем, что из (2.8) вытекает равенство

$$M\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big[M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]^* + M\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big[M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \mathbf{0}. \tag{2.9}$$

Вставляя в (2.9) между множителями M и M^{ψ} матрицу I в виде

$$\sum \widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-m}{2}\Big)\Big[\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-m}{2}\Big)\Big]^*$$

при $m=2l$ и $m=2l+1$, видим, что эти преобразования также обратимы: из (2.9) следует (2.8).

Как и в доказательстве утверждения, легко проверить, что равенство (2.9) после замены $\omega/2$ на ω в терминах матриц $\mathfrak{M}(\omega)$, $\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)$ переписывается в виде

$$\mathfrak{M}(\omega)(\mathfrak{M}^{\psi}(\omega))^* \overset{\text{п.в.}}{=} \mathbf{0}. \tag{2.10}$$

Действительно, например, первый элемент первой строки этой матрицы равен $\sum_{s=1}^{k} m^{1,s}(\omega)\overline{m_{\psi}^{1,s}}(\omega)+\sum_{s=1}^{k} m^{1,s}(\omega+1/2)\overline{m_{\psi}^{1,s}}(\omega+1/2)$, а первая и вторая суммы являются первыми элементами первой строки матриц $M(\omega/2)[M^{\psi}(\omega/2)]^*$ и $M(\omega/2+1/2)[M^{\psi}(\omega/2+1/2)]^*$ соответственно. Аналогичные рассуждения проводятся для остальных элементов. $\square$

Если найти удовлетворяющую теореме 1 матрицу $\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)$, то по ее части $M^{\psi}(\omega)$ и по формулам (2.2) или (2.3) однозначно определятся функции $\psi^s(x)$, $s=\overline{1,k}$, целочисленные сдвиги которых в силу теоремы 1 порождают ортонормированную систему в пространстве W_0.

Приведем алгоритм построения масок мультивсплесков по известным маскам мультимасштабирующих функций.

Рассмотрим случай $k=2$, затем распространим метод построения $\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)$ на все четные k. Построим определитель

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a^1(\omega) & a^2(\omega) & a^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где $\overrightarrow{i_s}$ — орты, $\overrightarrow{i_1}=(1,0,0,0),\ldots,\overrightarrow{i_4}=(0,0,0,1)$, $m^{r,s}(\omega)$ — элементы маски $M(\omega)$, а вектор $\overrightarrow{a(\omega)}=\big(a^1(\omega),a^2(\omega),a^1(\omega+1/2),a^2(\omega+1/2)\big)$ линейно независим с векторами

$$\overrightarrow{m_1(\omega)}=\Big(\overline{m^{1,1}}(\omega),\overline{m^{1,2}}(\omega),\overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big),\overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

$$\overrightarrow{m_2(\omega)}=\Big(\overline{m^{2,1}}(\omega),\overline{m^{2,2}}(\omega),\overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big),\overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

а в остальном функции $a^1(\omega),a^2(\omega)$ — произвольные 1-периодические из $\mathbf{L}^2[0,1)$.

Ясно, что скалярное умножение вектора типа $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ на векторы $\sum\overrightarrow{i_s}c^s$ в пространстве l_4^2 совпадает с определителем, полученным заменой первой в определителе (2.11) строки на $(\overline{c_1},\overline{c_2},\overline{c_3},\overline{c_4})$. Отсюда получаем, что вектор $\overrightarrow{b_1(\omega)} := \big(b_1^1(\omega),b_1^2(\omega),b_1^3(\omega),b_1^4(\omega)\big)$, построенный таким образом, будет ортогонален в пространстве l_4^2 векторам

$$\overrightarrow{m^1(\omega)}=\Big(m^{1,1}(\omega),m^{1,2}(\omega),m^{1,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big),m^{1,2}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

$$\overrightarrow{m^2(\omega)}=\Big(m^{2,1}(\omega),m^{2,2}(\omega),m^{2,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big),m^{2,2}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big)$$

и 1-периодическим в силу 1-периодичности элементов и соответствующих алгебраических дополнений векторов первой строки определителя (2.11). Из формул

$$b_1^1(\omega) = \det\begin{pmatrix} \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a^2(\omega) & a^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix},$$

$$b_1^3(\omega) = \det\begin{pmatrix} \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a^1(\omega) & a^2(\omega) & a^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}$$

видно, что $b_1^3(\omega) = b_1^1(\omega+1/2)$, так как определитель $b_1^3(\omega)$ после четной перестановки столбцов превращается в определитель $b_1^1(\omega+1/2)$. Аналогично проверяется, что $b_1^4(\omega) = b_1^2(\omega+1/2)$, так что вектор $\overrightarrow{\overline{b_1}(\omega)}$ имеет вид

$$\overrightarrow{\overline{b_1}(\omega)} = \big(b_1^1(\omega), b_1^2(\omega), b_1^1(\omega+1/2), b_1^2(\omega+1/2)\big).$$

Подставив теперь в четвертую строчку определителя (2.11) вектор $\overrightarrow{\overline{b_1}(\omega)}$ вместо $\overrightarrow{a(\omega)}$, получим новый вектор

$$\overrightarrow{b_2(\omega)} = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{b_1^1}(\omega) & \overline{b_1^2}(\omega) & \overline{b_1^1}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{b_1^2}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Ясно, что вектор $\overrightarrow{b_2(\omega)}$ также имеет вид

$$\overrightarrow{b_2(\omega)} := \Big(b_2^1(\omega), b_2^2(\omega), b_2^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), b_2^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big)$$

и ортогонален векторам $\overrightarrow{m^1(\omega)}$ и $\overrightarrow{m^2(\omega)}$. Заменив в определителе (2.12) первую строку на $\overrightarrow{\overline{b_1}(\omega)}$, видим, что $\overrightarrow{b_1(\omega)} \perp \overrightarrow{b_2(\omega)}$ в l_4^2.

По этим векторам можно построить

$$\overrightarrow{m_\psi^s(\omega)} = \Big(m_\psi^{s,1}(\omega), m_\psi^{s,2}(\omega), m_\psi^{s,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), m_\psi^{s,2}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big), \quad s = 1, 2,$$

положив $\overrightarrow{m_\psi^s(\omega)} = \overrightarrow{b_s(\omega)}/\|\overrightarrow{b_s(\omega)}\|_{l_4^2}$. Таким образом, построены маски и матрица $\mathfrak{M}_\psi$ мультивсплесков по системе масштабирующих функций КМА$_2$, конкретнее — по элементам матрицы-маски этой системы. По построению маска $M^\psi(\omega)$ удовлетворяет теореме 1, и ее элементы выглядят следующим образом:

$$m^{r,s}(\omega) = \frac{b_s^r(\omega)}{\|\overrightarrow{b_s(\omega)}\|_{l_4^2}}, \quad r, s = 1, 2.$$

Аналогично строим базисы всплесков для других четных k :

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \dots & \overrightarrow{i_k} & \overrightarrow{i_{k+1}} & \dots & \overrightarrow{i_{2k}} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{1,k}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{1,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ \overline{m^{k,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{k,k}}(\omega) & \overline{m^{k,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{k,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_1^1(\omega) & \dots & a_1^k(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_1^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ a_{k-1}^1(\omega) & \dots & a_{k-1}^k(\omega) & a_{k-1}^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_{k-1}^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

выбрав произвольные 1-периодические функции $\overrightarrow{a_j^s(\omega)}$ из $\mathbf{L}^2[0,1)$ так, чтобы последние $2k-1$ строк определителя были линейно независимы.

Далее $\overrightarrow{\overline{b_1}(\omega)}$ записываем в (2.13) вместо $\overrightarrow{a_1(\omega)}$, получаем $\overrightarrow{b_2(\omega)}$ и т. д. В итоге будем иметь систему векторов $\{\overrightarrow{b_1(\omega)}, \dots, \overrightarrow{b_k(\omega)}\}$, которая после нормировки в l^2_{2k} к единице определяет матрицу $\mathfrak{M}_\psi(\omega)$, как легко проверить, вида (2.5), со свойствами (2.6), (2.7).

Пусть теперь k нечетно. Рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \dots & \overrightarrow{i_k} & \overrightarrow{i_{k+1}} & \dots & \overrightarrow{i_{2k}} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{1,k}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{1,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ \overline{m^{k,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{k,k}}(\omega) & \overline{m^{k,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{k,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_1^1(\omega) & \dots & a_1^k(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_1^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ a_{k-1}^1(\omega) & \dots & a_{k-1}^k(\omega) & a_{k-1}^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_{k-1}^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Построенный 1-периодический по ω вектор $\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)} = (\widetilde{b_1^1}(\omega), \widetilde{b_1^2}(\omega), \dots, \widetilde{b_1^{2k}}(\omega))$ не равен $(\widetilde{b_1^1}(\omega), \dots \widetilde{b_1^k}(\omega), \widetilde{b_1^1}(\omega+1/2) \dots, \widetilde{b_1^k}(\omega+1/2))$, как было при четных k, так как в силу нечетности числа перестановок столбцов алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы (2.14) будем иметь равенства $\widetilde{b_1^s}(\omega+1/2) = -\widetilde{b_1^{k+s}}(\omega)$, $s = \overline{1,k}$. Преобразуем вектор $\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)}$ так, чтобы он удовлетворял нужному условию. Для этого умножим его на функцию $\lambda_1(\omega)$. Получившийся вектор $\lambda_1(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)}$ в l^2_{2k} ортогонален всем $\overrightarrow{m^s(\omega)}$, $s = 1, \dots, k$, и есть

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} := \lambda_1(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)} = \big(\lambda_1(\omega)\widetilde{b_1^1}(\omega), \dots, \lambda_1(\omega)\widetilde{b_1^k}(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b_1^{k+1}}(\omega), \dots, \lambda_1(\omega)\widetilde{b_1^{2k}}(\omega)\big).$$

Определим условия на $\lambda_1(\omega)$, необходимые и достаточные для того, чтобы вектор $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ имел ту же структуру, что и при четных k, т. е. чтобы при $s = \overline{1,k}$ компонента $b_1^s(\omega+1/2) = \lambda_1(\omega+1/2)\widetilde{b_1^s}(\omega+1/2)$ совпадала с компонентой $b_1^{k+s}(\omega) = \lambda_1(\omega)\widetilde{b_1^{k+s}}(\omega)$. В силу отмеченных равенств для $\widetilde{b_1^s}(\omega+1/2)$ ясно, что достаточно для этого дополнительно к 1-периодичности наложить на функцию $\lambda_1(\omega)$ условие

$$\lambda_1(\omega) = -\lambda_1\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big). \tag{2.15}$$

Получившуюся функцию-строку $\overrightarrow{b_1(\omega)} = \lambda_1(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)}$ теперь можно подставить в определитель (2.14), заменив ей строку $\overrightarrow{a_1(\omega)}$, и далее, действуя аналогично, найти $\overrightarrow{\widetilde{b_2}(\omega)}$ и построить

$\overrightarrow{b_2(\omega)} = \lambda_2(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b_2}(\omega)}$ с $\lambda_2(\omega) = -\lambda_2(\omega+1/2)$ и т. д. В итоге после нормировки в l^2_{2k} вектор-строк $\overrightarrow{b_r}$, $r = \overline{1,k}$, получим матричные функции $\mathfrak{M}^\psi, M^\psi$ с теми же свойствами, что и при четных k.

Получив маски $M^\psi(\omega)$ мультивсплесков, мы, как и в классическом случае, находим выражение для преобразований Фурье мультивсплесков через преобразования Фурье мультимасштабирующих функций по формулам (2.3). После обратного преобразования Фурье будет известна вектор-функция (2.1), а значит, известен и набор мультивсплесков $\psi^s_{j,l}$, $s = \overline{1,k}$, $j, l \in \mathbb{Z}$. К тому же результату можно прийти, разложив $M^\psi(\omega)$ в тригонометрический ряд с матричными коэффициентами H^ψ_n, и затем воспользоваться формулой (2.2) для построения вектор-функции (2.1).

В следующей теореме считаем, что маски $M^\psi(\omega)$ построены по изложенной только что схеме как соответствующие подматрицы матрицы $\mathfrak{M}^\psi(\omega)$.

Теорема 2. *Система функций $\psi^s(x-n)$, $s = \overline{1,k}$, $n \in \mathbb{Z}$, восстановленная по преобразованию Фурье* (2.3) *соответствующей вектор-функции $\Psi(x)$, где маска $M^\psi(\omega)$ определена выше, образует базис пространства W_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x) \in W_0$, т. е. 1) $f(x) \in V_1$; 2) $f(x) \perp V_0$. По условию 1) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^f_n \Phi_{1,n}(x)$, где элементы вектор-строки C^f_n лежат в $l^2(\mathbb{Z})$, или, что равносильно,

$$\widehat{f}(\omega) = \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),$$

где $\overrightarrow{m^f(\omega)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^f_n e^{2\pi i n\omega}$ — 1-периодическая вектор-функция размерности 1 на k.

По условию 2) $\langle f(x), \varphi^l(x-n)\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = 0$, $l = \overline{1,k}$. В терминах преобразований Фурье, учитывая суммируемость компонент вектор-функций $\widehat{f}(\omega)\widehat{\Phi}(\omega)$, это условие перепишем как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big[e^{-2\pi i n\omega}\overrightarrow{m\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]^* d\omega = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Разобьем интеграл на сумму по отрезкам $[\nu, \nu+1]$, затем перейдем к интегралу по отрезку $[0,1]$. Рассматривая отдельно сумму по четным и по нечетным ν, используя свойства произведения матриц и равенство (1.5), получаем эквивалентное равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \bigg(\overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\Big[\overrightarrow{m\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\Big]^* + \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big[\overrightarrow{m\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big]^*\bigg) e^{2\pi i n\omega} d\omega = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Это означает, что

$$\overrightarrow{m^f(\omega)}\big[M(\omega)\big]^* + \overrightarrow{m^f\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)}\Big[M\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \overrightarrow{0}. \tag{2.16}$$

В силу (2.6) имеем

$$\overrightarrow{m^f(\omega)} = \overrightarrow{\alpha(\omega)}M^\psi(\omega),$$

где $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ — 1-периодическая вектор-строка размерности k. Используя равенства (2.16) и (2.10), определим, каким условиям должно удовлетворять $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$. Легко видеть, что

$$\overrightarrow{\alpha(\omega)}M^\psi(\omega)[M(\omega)]^* + \overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)}M^\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big[M\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^*$$

$$= \bigg(\overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} - \overrightarrow{\alpha(\omega)}\bigg)M^\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big[M\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)}=\overrightarrow{\alpha(\omega)},\ \widehat{f}(\omega)=\overrightarrow{\alpha\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)=\overrightarrow{\alpha\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Psi}(\omega). \tag{2.17}$$

Здесь, как видно из (2.17), $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ — 1/2-периодическая вектор-строка размерности k, следовательно, $\widehat{f}(\omega)$ — это произведение 1-периодического вектора на $\widehat{\Psi}(\omega)$. После обратного преобразования Фурье получим, что

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}D_n\Psi(x-n),$$

где D_n — матричные коэффициенты из разложения

$$\overrightarrow{\alpha\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}D_ne^{-2\pi in\omega}. \qquad \square$$

Данные базисы определяются неоднозначно, с точностью до выбранных векторов $\overrightarrow{a_s(\omega)}$, $s=1,\dots,k-1$, и функций $\lambda_s(\omega)$, $s=1,\dots,k$, с требуемыми свойствами. При четных k построенные векторы $\overrightarrow{b_r(\omega)}$ также можно домножить на функции $\lambda_r(\omega)$ с периодом 1/2. Однако при нормировке векторов $\overrightarrow{b_r(\omega)}$, $r=\overline{1,k}$ при любых $k\in\mathbb{N}$ произвол в $\lambda_s(\omega)$ останется только в виде множителей $\mu_r(\omega)$ — при четных k и $e^{i\pi\omega}\mu_r(\omega)$ — при нечетных k с 1/2-периодическими функциями $\mu_r(\omega)$, у которых $|\mu_r(\omega)|=1$. Отметим, что метод позволяет построить по заданному набору мультимасштабирующих функций более богатый набор базисов всплесков по сравнению с классическим случаем из-за описанного произвола выбора векторов $\overrightarrow{a_s(\omega)}$, $s=1,\dots,k-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
2. **Keinert F.** Wavelets and multiwavelets. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003. 275 p. (Studies in advanced mathematics; vol. 42.)
3. **Lawton W., Lee S., Shen Z.** An algorithm for matrix extension and wavelet construction // Math. Comp. 1996. Vol. 65, no. 214. P. 723–737.
4. **Scopina M.** On construction of multivariate wavelet frames // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2009. Vol. 27, iss. 1. P. 55–72.
5. **Strang G., Strela V.** Short wavelets and matrix dilation equations // IEEE Transactions on Signal Processing. 1995. Vol. 43, no. 1. P. 108–115.
6. **Strela V.** Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform // Stud. Appl. Math. 1997. No 4. P. 335–354.
7. The application of multiwavelet filter banks to image processing / V. Strela, P. N. Heller, G. Strang, P. Topivala, C. Heil // IEEE Transactions on Signal Processing. 1999. Vol. 8, no. 4. P. 548–563.

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Уральский Федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: chernykh@imm.uran.ru

Поступила 05.04.2013

Плещева Екатерина Александровна
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: eplescheva@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 519.658.4

ДВОЙСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПРИМЕНЕНИЮ БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 1-ГО РОДА[1]

Л. Д. Попов

Предложен оригинальный двойственный подход к проблеме оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода по правым частям ограничений, опирающийся на расширение традиционной функции Лагранжа за счет введения в нее дополнительных регуляризирующих и барьерных слагаемых. Приведены теоремы сходимости построенных на ее основе методов, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения, представлены данные численных экспериментов.

Ключевые слова: линейное программирование, несобственные задачи, обобщенные решения, метод барьерных функций.

L. D. Popov. Dual approach to the application of barrier functions for the optimal correction of improper linear programming problems of the first kind.

A novel dual approach to the problem of optimal correction of first-kind improper linear programming problems with respect to their right-hand sides is proposed. It is based on the extension of the traditional Lagrangian by introducing additional regularization and barrier components. Convergence theorems are given for methods based on the augmented Lagrangian, an informal interpretation of the obtained generalized solution is suggested, and results of numerical experiments are presented.

Keywords: linear programming, improper problems, generalized solutions, barrier function method.

Введение

Несобственными принято называть задачи математического программирования, для которых не выполнены основные соотношения двойственности [1; 2]. В случае линейного программирования это задачи с несовместными системами ограничений — прямой и/или двойственной. Такая несовместность может быть как результатом неточного задания исходных данных, так и адекватным отражением внутренних противоречий того объекта, математическая оптимизационная модель которого исследуется. Естественно, что данные противоречивой модели подлежат корректировке, причем наиболее привлекательным является такой формальный подход к ее проведению, при котором процесс поиска минимальных поправок, вносимых в задачу с целью приведения ее к разрешимому виду, совмещен с собственно процессом отыскания конечного решения исправленной задачи. Литература, в которой этот подход получил свое развитие, достаточно разнообразна (см. [3–7] и др.).

В частности, в [7] были предложены методы оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода, основанные на совместном использовании внешних и внутренних (или барьерных) штрафных функций. Эти методы позволяют эффективно совмещать процесс корректировки исходной противоречивой (несобственной) задачи с поиском ее обобщенного (аппроксимационного) решения. В результате они автоматически приводят либо к обычному решению задачи, если она разрешима (собственная), либо к некоторому ее обобщенному решению в случае ее несовместности (противоречивости). При этом получаемое обобщенное решение имеет примечательную содержательную интерпретацию.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00210, 13-07-00181) и программ президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1, 12-П-1-1023 и 12-П-1-1034), а также программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

К недостаткам обсуждаемых методов следовало бы отнести то, что они используют целую иерархию штрафных коэффициентов в духе лексикографической оптимизации, что затрудняет их реализацию на ограниченной разрядной сетке компьютеров. В настоящей работе этот недостаток устранен путем перехода к двойственным формулировкам в соответствующих оптимизационных процедурах.

1. Постановка задачи и исходные предположения

Пусть имеются задача линейного программирования в каноническом формате

$$\min\{(c,x)\colon Ax=b,\ x\geq 0\} \tag{1}$$

и двойственная к ней задача

$$\max\{(b,y)\colon A^Ty\leq c\}. \tag{2}$$

Здесь числовая матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и векторы c и b заданы; x — вектор прямых и y — вектор двойственных переменных (неизвестных); круглые скобки используются для обозначения скалярного произведения; $n>m=\mathrm{rank}A$.

Задачи (1), (2) будем рассматривать при единственном предположении о телесности допустимой области задачи (2). При этом задача (1) может оказаться либо разрешимой (при совместности ее ограничений), либо несобственной 1-го рода (если ее ограничения противоречивы [2]). В последнем случае она может быть приведена к собственному (разрешимому) виду путем коррекции правых частей своих ограничений.

Погрузим исходную задачу в параметрическое семейство задач вида

$$\mathrm{opt}(u)=\min\{(c,x)\colon Ax=b-u,\ x\geq 0\}, \tag{3}$$

здесь u — векторный параметр коррекции.

Введем обозначение $M(u)=\{x\colon Ax=b-u,\ x\geq 0\}$ и определим вектор оптимальной коррекции

$$u_0=\arg\min\{\|u\|\colon M(u)\neq\varnothing\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. В силу свойств метрической проекции на выпуклое замкнутое множество такой вектор всегда существует и является единственным.

Определим обобщенное (аппроксимационное) решение несобственной задачи (1) как обычное решение задачи

$$\min\{(c,x)\colon Ax=b-u_0,\ x\geq 0\}. \tag{4}$$

Телесность допустимой области задачи (2) обеспечивает разрешимость задачи (4) и ограниченность ее оптимального множества.

Подчеркнем, что в случае разрешимости исходной задачи $u_0=0$, и введенное выше обобщенное решение совпадает с ее обычным решением.

В завершение постановочной части укажем на альтернативное представление области

$$M(u_0)=\mathrm{Arg}\min_{x\geq 0}\frac{1}{2}\|Ax-b\|^2.$$

Это представление является связующим звеном между обсуждаемой тематикой и теорией штрафных функций (см., например, [8; 9]).

2. Используемые штрафные конструкции

Методы, предложенные в [7] для отыскания обобщенного решения задачи (1), используют штрафную функцию смешанного типа

$$\Phi(\varepsilon; x) = (c, x) + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|Ax - b\|^2 - \varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i, \qquad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0. \tag{5}$$

Здесь внешние (квадратичные) штрафы применены к ограничениям-равенствам исходной задачи, которые подлежат корректировке, в то время как некорректируемые ограничения на знак неизвестных учтены путем добавления в (5) внутренних штрафов (логарифмических барьеров).

Соотнесем с задачей (1) задачу безусловной минимизации функции $\Phi(\varepsilon; x)$, т.е. задачу поиска такого вектора $\hat{x}_\varepsilon > 0$, что

$$\Phi(\varepsilon; \hat{x}_\varepsilon) = \min_{x>0} \Phi(\varepsilon; x). \tag{6}$$

Связь этой задачи с поиском обобщенного решения задачи (1) становится понятной из следующей серии утверждений ([7, утверждения 1–4]).

Утверждение 1. *Пусть оптимальное множество задачи* (4) *ограничено. Тогда для любой пары параметров* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ *существует единственный вектор* $\hat{x}_\varepsilon \in \mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$, *минимизирующий функцию* (5) *и решающий таким образом задачу* (6).

Утверждение 2. *Пусть допустимая область задачи* (2) *телесна, и параметры в* (5) *стеснены условием* $0 < \varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}_1$, $0 < \varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2$. *Тогда векторы*

$$\hat{u}_\varepsilon = b - A\hat{x}_\varepsilon$$

ограничены в совокупности.

Утверждение 3. *Вектор* $\hat{x}_\varepsilon$ *является допустимым для задачи* (3) *при* $u = \hat{u}_\varepsilon$, *и для него выполнено неравенство*

$$\mathrm{opt}(\hat{u}_\varepsilon) \le (c, \hat{x}_\varepsilon) \le \mathrm{opt}(\hat{u}_\varepsilon) + n\varepsilon_2.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения утверждения* 2. *Тогда совокупность векторов* $\hat{x}_\varepsilon$ *также ограничена.*

Утверждение 4. *Пусть допустимая область задачи* (2) *телесна. Тогда*

$$b - A\hat{x}_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon \to u_0, \qquad (c, \hat{x}_\varepsilon) \to \mathrm{opt}(u_0)$$

при $0 < \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to +0$.

Таким образом, решая задачу (гладкой) безусловной минимизации вспомогательной функции $\Phi(\varepsilon; x)$ при достаточно малых значениях параметров $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, можно получить аппроксимационное решение исходной задачи со сколь угодно высокой точностью. Правда, при стремлении этих параметров к нулю множители при штрафных слагаемых в (5) изменяются в противоположных направлениях (множитель при внешней штрафной функции растет, а при барьерной функции убывает), что затрудняет компьютерные расчеты. Этот недостаток метода можно устранить путем перехода к двойственной экстремальной постановке, что и будет сделано ниже, при этом будет применена техника из работы [10].

3. Двойственный переход

Начнем с того, что перепишем задачу безусловной минимизации (6) в виде задачи минимизации с ограничениями-равенствами

$$\min\{(c,x)+\frac{1}{2\varepsilon_1}\,\|u\|^2-\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\ln\,x_i:\ Ax+u=b\} \tag{7}$$

и построим ее классический Лагранжиан

$$L(\varepsilon;x,u;y)=(c,x)+\frac{1}{2\varepsilon_1}\,\|u\|^2-\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\ln\,x_i-(y,Ax+u-b).$$

Задача (7) может быть представлена как задача поиска минимакса функции $L(\varepsilon;x,u;y)$, т. е. в виде

$$\min_{x>0}\min_{u}\max_{y}L(\varepsilon;x,u;y).$$

Следовательно, двойственной к ней будет задача поиска ее максимина

$$\max_{y}\min_{x>0}\min_{u}L(\varepsilon;x,u;y). \tag{8}$$

Чтобы привести задачу (8) к более конструктивному виду, раскроем последовательно две внутренние операции взятия минимума. На первом шаге имеем, очевидно,

$$\hat L(\varepsilon;x,y)=\min_{u}L(\varepsilon;x,u;y)=L(\varepsilon;x,u;y)|_{u=\varepsilon_1 y}=(c,x)-\frac{\varepsilon_1}{2}\,\|y\|^2-\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\ln\,x_i-(y,Ax-b)$$

$$=(b,y)-\frac{\varepsilon_1}{2}\,\|y\|^2+(c-A^Ty,x)-\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\ln\,x_i.$$

На втором шаге ищем

$$\hat\Psi(\varepsilon;y)=\min_{x>0}\hat L(\varepsilon;x,y)=(b,y)-\frac{\varepsilon_1}{2}\,\|y\|^2+\min_{x>0}\Big[(c-A^Ty,x)-\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\ln\,x_i\Big]$$

$$=(b,y)-\frac{\varepsilon_1}{2}\,\|y\|^2+\sum_{i=1}^{n}\min_{x_i>0}f_i(x_i),$$

где $f_i(x_i)=q_ix_i-\varepsilon_2\ln x_i$ — выпуклые функции, $q_i=c_i-(A_i,y)$, $A_1,\dots,A_n$ — столбцы исходной матрицы A.

Очевидно, что $\min\limits_{x_i>0}f_i(x_i)=-\infty$ при $q_i\le 0$. Если же $q_i>0$, то $f_i'(x_i)=q_i-\varepsilon_2x_i^{-1}=0$ при $x_i=\varepsilon_2q_i^{-1}>0$ и, следовательно,

$$\min_{x_i>0}f_i(x_i)=f_i(\varepsilon_2q_i^{-1})=\varepsilon_2(1-\ln\varepsilon_2)+\varepsilon_2\ln q_i.$$

Отсюда для двойственной целевой функции получаем следующее (точное) выражение:

$$\hat\Psi(\varepsilon;y)=\begin{cases}(b,y)-\dfrac{\varepsilon_1}{2}\|y\|^2+\varepsilon_2\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(c_i-(A_i,y))+\nu_0\,, & \text{если все } (A_i,y)<c_i\,;\\ -\infty & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{9}$$

Здесь $\nu_0=n\varepsilon_2(1-\ln\,\varepsilon_2)$ — постоянное слагаемое.

Опуская в (9) постоянное слагаемое (оно не влияет на искомое решение), приходим к следующей перезаписи двойственной задачи (8): найти $\hat{y}_\varepsilon$ такое, что

$$\Psi(\varepsilon; \hat{y}_\varepsilon) = \max_{y \in N} \Psi(\varepsilon; y), \tag{10}$$

где

$$\Psi(\varepsilon; y) = (b, y) - \frac{\varepsilon_1}{2}\|y\|^2 + \varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - (A_i, y)) \tag{11}$$

и $N = \{y \in \mathbb{R}^m \colon A^T y < c\}$ — внутренность допустимой области задачи (2).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 5. *Пусть допустимая область задачи* (2) *телесна. Тогда задачи* (6) *и* (10) *разрешимы, причем имеют единственные решения $\hat{x}_\varepsilon$ и $\hat{y}_\varepsilon$, которые в паре $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon)$ образуют* (*также единственную*) *седловую точку функции*

$$\hat{L}(\varepsilon; x, y) = (b, y) - \frac{\varepsilon_1}{2}\|y\|^2 + (c - A^T y, x) - \varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

относительно области $\mathbb{R}^n_{++} \times N$.

Заметим, что в силу строгой выпуклости гладкой функции (11) по прямым переменным и ее строгой вогнутости по двойственным переменным ее седловая точка $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon)$ однозначно определяется классическими условиями

$$\nabla_x \hat{L}(\varepsilon; \hat{x}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon) = c - A^T \hat{y}_\varepsilon - \varepsilon_2 \hat{X}_\varepsilon^{-1} e = 0, \tag{12}$$

$$\nabla_y \hat{L}(\varepsilon; \hat{x}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon) = b - \varepsilon_1 \hat{y}_\varepsilon - A\hat{x}_\varepsilon = 0, \tag{13}$$

где $\hat{X}_\varepsilon$ — диагональная $(n \times n)$-матрица с диагональю $\hat{x}_\varepsilon$, $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Все это позволяет сформулировать относительно решения $\hat{y}_\varepsilon$ задачи (10) следующие простые утверждения, дополняющие содержание утверждений 1–4.

Утверждение 6. *Вектор $\hat{x}_\varepsilon = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ с компонентами*

$$\hat{x}_i = \varepsilon_2 (c_i - (A_i, \hat{y}_\varepsilon))^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

есть решение задачи безусловной минимизации функции $\Phi(\varepsilon; x)$.

Доказательство вытекает из равенства нулю градиента функции $\hat{L}(\varepsilon; x, \hat{y}_\varepsilon)$ по x в точке $x = \hat{x}_\varepsilon$ (см. (12)).

Утверждение 7. *Вектор $\hat{y}_\varepsilon$ удовлетворяет условию*

$$b - \varepsilon_1 \hat{y}_\varepsilon + \varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} A_i (c_i - (A_i, \hat{y}_\varepsilon))^{-1} = 0.$$

Доказательство вытекает из предыдущего утверждения и из равенства нулю градиента целевой функции задачи (10) в точке $y = \hat{y}_\varepsilon$ (см. (13)).

Утверждение 8. *В предположении телесности допустимой области задачи* (2) *имеет место сходимость*

$$\varepsilon_1 \hat{y}_\varepsilon = b - A\hat{x}_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon \to u_0$$

при $0 < \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to +0$. В частности, если исходная задача (1) *разрешима, то $\varepsilon_1 \hat{y}_\varepsilon \to 0$.*

Таким образом, оба представленных выше подхода — прямой и двойственный — ведут к одному и тому же результату. Однако целевая функция задачи (10) не содержит разнонаправленных штрафных параметров.

4. Метод Ньютона для решения двойственной задачи

Для максимизации двойственной целевой функции $\Psi(\varepsilon;\cdot)$ можно применить метод Ньютона. Напомним, что его соотношения выглядят следующим образом:

$$y_0 \in N, \qquad y_{t+1} = y_t - \alpha_t H^{-1}(y_t)\nabla\Psi(\varepsilon; y_t), \qquad t = 0, 1, \dots ;$$

здесь α_t — длина шага (обычно $\alpha_t \equiv 1$), $H(y)$ — гессиан функции $\Psi(\varepsilon; y)$, $\nabla\Psi(\varepsilon; y)$ — ее градиент.

Пусть $q(y) = c - A^T y$, $Q(y)$ — диагональная $(n\times n)$-матрица с диагональю $q(y)$. Тогда, как легко проверить,

$$\nabla\Psi(\varepsilon; y) = b - \varepsilon_1 y - \varepsilon_2 AQ(y)^{-1}e, \quad H(y) = -\varepsilon_1 E - \varepsilon_2 AQ(y)^{-2}A^T,$$

где E — единичная $(m\times m)$-матрица, $e = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$.

Последовательность y_t, генерируемая в силу соотношения метода Ньютона, сходится к $\hat{y}_\varepsilon$.

В силу утверждений 1–8 с последовательностью двойственных переменных y_t можно связать последовательность прямых переменных

$$x_t = \varepsilon_2 Q(y_t)^{-1}e \to \hat{x}_\varepsilon$$

и последовательность вариантов коррекции правых частей ограничений исходной задачи

$$u_t = \varepsilon_1 y_t \to \hat{u}_\varepsilon.$$

Заметим, что параметры $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ также можно менять от итерации к итерации, постепенно сводя их значения к нулю и следя за тем, чтобы такое сведение не нарушало сходимости метода Ньютона и позволяло удерживать длину его шага на постоянном уровне.

5. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился как на разрешимых, так и на несобственных задачах линейного программирования средней размерности (100 уравнений и 300 неизвестных) в каноническом формате в среде MATLAB. Разреженные матрицы коэффициентов тестовых задач (50 штук) генерировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением от -1 до 1. Заполненность матриц ненулевыми элементами составляла 5–6%. Правые части ограничений и коэффициенты целевой функции подбирались таким образом, чтобы решение задачи было единственным и совпадало с некоторым заданным заранее. Сравнивалась работа прямого алгоритма из [7], построенного на основе функции (5), и двойственного алгоритма, построенного выше на основе функции (11). В обоих случаях для оптимизации вспомогательной функции применялся метод Ньютона.

Ниже в таблице представлены типичные результаты расчетов. Обозначения колонок: ε — единое значение штрафного параметра, $iter$ — число итераций метода Ньютона, потребовавшееся для достижения заданной точности по градиенту вспомогательной функции (большие значения этого показателя соответствуют отсечке по предельному числу итераций), $\Delta x = ||x - x_0||$ — отклонение полученного прямого решения от точного, $\Delta u = ||Ax - b + u_0||$ — достигнутая точность выполнения ограничений и $\Delta c = |(c, x - x_0)|/(c, x_0)$ — достигнутая точность по целевому функционалу.

Как видно из таблицы, прямой метод при стремлении ε к нулю сравнительно быстро теряет работоспособность (хотя и хорошо минимизирует невязки ограничений прямой задачи), в то время как двойственный метод продолжает получать все более и более точные приближения к искомому (прямому) решению.

Точность получаемого решения в зависимости от значения штрафного параметра

ε	Прямой метод (минимизация $\Phi(\varepsilon; x)$)				Двойственный метод (максимизация $\Psi(\varepsilon; y)$)			
	iter	Δx	Δu	Δc	*iter*	Δx	Δu	Δc
10^{-1}	187	2.402	10^{-13}	0.473	12	2.8	0.006	0.450
10^{-2}	300	0.275	10^{-13}	0.051	13	0.27	0.001	0.051
10^{-3}	800	0.042	10^{-13}	0.008	16	0.002	10^{-4}	0.005
10^{-4}	1000	0.031	10^{-13}	0.005	17	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}
10^{-5}	2000	0.028	10^{-13}	0.005	18	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}
10^{-6}	2000	0.027	10^{-13}	0.005	100	10^{-6}	10^{-7}	10^{-6}
10^{-7}	2000	0.027	10^{-13}	0.005	150	10^{-6}	10^{-7}	10^{-7}

6. Заключение

В настоящей работе изложен двойственный подход к оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода по правым частям ограничений. В его основе лежит классическая функция Лагранжа, расширенная за счет включения в нее регуляризирующих и штрафных (барьерных) слагаемых. Приведены теоремы сходимости метода, дана содержательная интерпретация результата, представлены данные численных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
4. **Морозов В.А.** О псевдорешениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 1387–1391.
5. **Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г.** Обобщенный принцип невязки для решения несовместных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 7. С. 1087–1090.
6. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
7. **Попов Л.Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 3–11.
8. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
9. **Фиакко А., Мак–Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
10. **Еремин И. И., Попов Л. Д.** Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 83–89.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 10.01.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ[1]

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Предлагается метод сведения систем уравненний в частных производных к соответствующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Исследуется система уравнений, описывающая плоские, цилиндрические и сферические течения политропного газа, система безразмерных уравнений Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости, система уравнений Максвелла для вакуума и система уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах. Показано, как данный подход можно использовать для решения некоторых задач (безударное сжатие, турбулентность и т.п.)

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений в частных производных, метод исследования нелинейных уравнений в частных производных, точные решения.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. One method for solving systems of nonlinear partial differential equations.

A method for reducing systems of partial differential equations to corresponding systems of ordinary differential equations is proposed. We study a system of equations describing two-dimensional, cylindrical, and spherical flows of a polytropic gas, a system of dimensionless Stokes equations for the dynamics of a viscous incompressible fluid, a system of Maxwell equations for vacuum, and a system of gas dynamics equations in cylindrical coordinates. We show how this approach can be used for solving certain problems (shockless compression, turbulence, etc.).

Keywords: systems of nonlinear partial differential equations, investigation method for nonlinear partial differential equations, exact solutions.

Введение

Ранее в ряде работ авторы данной статьи, рассматривая направление наиболее интенсивного развития процесса, описываемого нелинейным дифференциальным уравнениием в частных производных, развивали геометрический метод, позволивший получать некоторые классы решений таких уравнений путем сведения их к ОДУ или системе ОДУ и исследовать характер процесса [1–3].

В данной работе этот метод применяется для получения некоторых решений систем нелинейных дифференциальных уравнений: системы уравнений, описывающей плоские, цилиндрические и сферические течения политропного газа, системы безразмерных уравнений Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости, системы уравнений Максвелла для вакуума и системы уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах. Решения перечисленных систем получены после сведения их к системам ОДУ.

1. Рассматривается система, описывающая сферические, цилиндрические и плоские волны при постоянной энтропии [4; 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{k-1}c\frac{\partial c}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial r}+\frac{k-1}{2}\Big(c\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{Nuc}{r}\Big)=0. \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта 12-С-1-1001 “Обратные задачи математической физики и их приложение к синтезированию гидролокационных апертур на борту подводных роботов”, проекта 12-П-1-1009 “Разработка и применение новых аналитических, численных и асимптотических методов в нелинейных задачах математической физики” и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Здесь r — пространственная координата, u — скорость движения газа, c — скорость звука в газе, $c^2 = dp/d\rho$, p — давление, ρ — плотность, $p = p(\rho)$ — уравнение состояния, $k = \mathrm{const}$ — показатель адиабаты, $N = \mathrm{const}$. Если $N = 0$ — имеем плоскую волну, если $N = 1$ — волна цилиндрическая, если $N = 2$ — волна сферическая.

2. Получены некоторые решения системы уравнений Стокса, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости в безразмерном виде [6]:

$$\begin{aligned}
&S\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) = 0,\\
&S\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big) = 0,\\
&S\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) = \frac{1}{F},\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\tag{0.2}$$

Здесь S — число Струхаля, E — число Эйлера, R — число Рейнольдса, F — число Фруда. $\{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости, p — давление.

3. Отмеченный выше подход применен для получения некоторых решений системы уравнений Максвелла в вакууме [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - rot\mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + rot\mathbf{E} = 0. \tag{0.3}$$

Здесь $\mathbf{E} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор электрического поля, $\mathbf{H} = (u_4, u_5, u_6)$ — вектор магнитного поля.

4. Геометрическим методом получена система ОДУ для уравнений газовой динамики, записанных в цилиндрических координатах [8]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r}\varrho v, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r},\\
&\frac{dw}{dt} + \frac{1}{r\varrho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{vw}{r}, \quad \frac{dp}{dt} + c^2\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) = -c^2\varrho\frac{v}{r},\\
&\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial r} + \frac{w}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \text{субстациональная производная}, \quad c^2 = \kappa\frac{p}{\varrho}.
\end{aligned}\tag{0.4}$$

Здесь $\{x, r, \varphi\}$ — цилиндрические координаты, $\{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости, p — давление, ϱ — плотность газа, κ — показатель адиабаты.

На примере системы (0.1) показано, как в частном случае описанный в работе подход приводит к получению хорошо известных в газовой динамике особых решений [4] — простых волн Римана [9].

1. О системе одномерного нестационарного движения политропного газа

Рассмотрим систему (0.1).

Утверждение 1. *Систему* (0.1) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий можно свести к системе* ОДУ.

Доказательство. Будем считать, что существует такая система координат, в которой $u = u(\psi(r,t))$, $c = c(\psi(r,t))$. Тогда поверхность $\psi = \psi(r,t)$ — поверхность уровня указанных функций — и систему (0.1) можно представить в виде

$$u'\psi_t + \Big[uu' + \frac{(c^2)'}{k-1}\Big]\psi_r = 0, \quad (c^2)'r\psi_t + [u(c^2)' + (k-1)c^2u']r\psi_r + (k-1)Nuc^2 = 0. \tag{1.1}$$

Здесь штрих ($'$) обозначает дифференцирование по переменной ψ. Нижние индексы у функции $\psi(r,t)$ обозначают дифференцирование по соответствующей переменной.

Положим, что в первом уравнении системы (1.1) $\psi_t \neq 0$ и $\psi_r/\psi_t = f(\psi)$, где $f(\psi)$ — некоторая функция. Тогда $\psi_r = f(\psi)\psi_t$. Подставив это выражение ψ_r во второе уравнение системы, получим, что $r\psi_t = (1-k)Nuc^2/\{(c^2)' + f[u(c^2)' + (k-1)c^2u']\}$. Правая часть полученного выражения зависит только от ψ. Обозначим ее через $g_1(\psi)$, тогда будем иметь $r\psi_t = g_1(\psi)$, $r\psi_r = r\psi_t f = g_1(\psi)f(\psi) = g_2(\psi)$ (введено обозначение $g_2(\psi) = f(\psi)g_1(\psi)$). Вычислив производную ψ_{tr}, получим $\psi_{tr} = (g_2g_1' - g_1)/r^2$. Вычислив ψ_{rt}, получим $\psi_{rt} = g_2'g_1/r^2$ Потребовав равенства смешанных производных, получим зависимость $g_2g_1' - g_1g_2' = g_1$. Отсюда, полагая, что $g_1 \neq 0$, получаем

$$g_2 = g_1f(\psi), \quad f = C - w, \quad w = \int \frac{d\psi}{g_1}. \tag{1.2}$$

Так как $\psi_r = \psi_t f(\psi)$, то решение этого квазилинейного уравнения первого порядка представимо в виде [7] $\psi = \psi(t + fr)$ или $t = -f(\psi)r + G(\psi)$. Дифференцируем последнее соотношение по t, получаем $1 = G'\psi_t - rf'\psi_t$. Отсюда $\psi_t = 1/(G' - f'r)$. С другой стороны, $\psi_t = g_1/r$. Приравнивая эти соотношения и подставляя в полученное выражение значение $f' = -1/g_1$ из (1.2), получаем, что равенство возможно только тогда, когда $G(\psi) = \mathrm{const}$. Положим $G = t_0$. Тогда из соотношения $t = G - fr$ имеем $f(\psi) = -(t - t_0)/r$. Отсюда $\psi = \psi(y)$, $y = (t - t_0)/r$. Но тогда $u = u(y)$, $c = c(y)$. Подставляя такие функции $u(y)$ и $c(y)$ в систему (0.1), приходим к системе ОДУ

$$\frac{du}{dy} = \frac{Nc^2uy}{c^2y^2 - (1-uy)^2}, \quad \frac{dc^2}{dy} = \frac{(k-1)(1-uy)Nc^2u}{c^2y^2 - (1-uy)^2}$$

или, переходя к независимой переменной $z = 1/y$, получаем систему

$$\frac{du}{dz} = -\frac{Nc^2u}{z[c^2 - (u-z)^2]}, \quad \frac{dc^2}{dz} = \frac{(k-1)(u-z)Nc^2u}{z[c^2 - (u-z)^2]}, \tag{1.3}$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом, выделен некоторый класс решений системы уравнений в частных производных (0.1), задаваемый системой ОДУ (1.3). Нетрудно заметить, что система (1.3) имеет решение вида $u = az$, $c = bz$, где $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$. Подставив в систему решение такого вида, получаем

$$u = \frac{2z}{(k+1) + N(k-1)}, \quad c^2 = \frac{(N+1)(k-1)^2z^2}{[(k+1) + N(k-1)]^2}.$$

Для системы (1.3) численно решена следующая задача: при $z = z_0 = 4.5$ заданы начальные $u = u_0 = 25$, $c = c_0 = 1$ и изучается поведение $c(z)$ при $z < z_0$. Так как система описывает процессы в политропном газе, то при $c \longmapsto \infty$ имеем $\rho \longmapsto \infty$, где ρ — плотность. В этой задаче для некоторых значений $z^* < z < z_0$ будет происходить безударное сжатие газа, а при $z = z^*$ в точке смены знака у знаменателей $[c^2 - (u-z)^2]$ системы (1.3) скорость звука имеет разрыв.

Утверждение 2. *В частном случае, если* $\psi = c$, *система* (0.1) *сводится к* ОДУ

$$\frac{2}{k-1}Ncuu'' - (N+1)uu'^{\,3} - \frac{2}{k-1}cu'^{\,2} + \frac{2}{k-1}uu'\Big(\frac{2}{k-1} - N\Big) + \frac{8}{(k-1)^3} = 0. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для системы (0.1) рассмотрим частный случай, приводящий к простой волне. Положим, что независимая переменная $\psi = c$ и, следовательно, $u = u(c)$, Тогда система (0.1) сведется к системе

$$u'\frac{\partial c}{\partial t} + \Big(uu' + \frac{2}{k-1}c\Big)\frac{\partial c}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \Big(u + \frac{k-1}{2}cu'\Big)\frac{\partial c}{\partial r} = -\frac{k-1}{2}\frac{Nuc}{r}.$$

Здесь штрих ($'$) обозначает дифференцирование по c. Определяя из выписанной системы производные от c по t и по r и требуя равенства смешанных производных, приходим к уравнению для определения $u = u(c)$:

$$\frac{2}{k-1}Ncuu'' - (N+1)uu'^{\,3} - \frac{2}{k-1}cu'^{\,2} + \frac{2}{k-1}uu'\Big(\frac{2}{k-1} - N\Big) + \frac{8}{(k-1)^3} = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Выпишем частное решение уравнения (1.4)

$$u = \pm\frac{1}{k-1}\sqrt{\frac{2[(3-k) - N(k-1)]}{N+1}}\Big[c - \frac{2(N+1)}{3-k-N(k-1)}\Big].$$

Отсюда u — действительная функция в случае $N = 0$, если $k < 3$, в случае $N = 1$, если $k < 2$, в случае $N = 2$, если $k < 5/3$.

2. О системе уравнений Стокса

Рассмотрим систему (0.2).

Утверждение 3. *Система* (0.2) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий может быть сведена к системе* ОДУ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $u = u(\psi(x, y.z, t))$, $v = v(\psi(x, y.z, t))$, $w = w(\psi(x, y.z, t))$, $p = p(\psi(x, y.z, t))$, тогда $\psi(x, y, z, t) = \mathrm{const}$ — поверхность уровня для u, v, w, p. При таком предположении система (0.2) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&Su'\psi_t + uu'\psi_x + vu'\psi_y + wu'\psi_z - \frac{1}{R}[u''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + u'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz})] = 0,\\
&Sv'\psi_t + uv'\psi_x + vv'\psi_y + wv'\psi_z - \frac{1}{R}[v''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + v'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz})] = 0,\\
&Sw'\psi_t + uw'\psi_x + vw'\psi_y + ww'\psi_z - \frac{1}{R}[w''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + w'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz})] = \frac{1}{F},\\
&u'\psi_x + v'\psi_y + w'\psi_z = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В системе (2.1) штрих ($'$) обозначает дифференцирование по ψ, нижние индексы — дифференцирование функции ψ по соответствующим переменным. Пусть $\psi_t \neq 0$. Положим, что $\psi_x/\psi_t = f_1(\psi)$, $\psi_y/\psi_t = f_2(\psi)$, $\psi_z/\psi_t = f_3(\psi)$, $(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2)/\psi_t = f_4(\psi)$, где $f_i(\psi)$ — некоторые произвольные функции ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда $\psi_t = f_4/(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) = g(\psi)$ Из равенства смешанных производных получим, что $\psi_x = ag(\psi)$, $\psi_y = bg(\psi)$, $\psi_z = cg(\psi)$, $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$,

$c = \text{const}$ и, как следствие, $\psi = \psi(l)$, $l = t + ax + by + cz$. Тогда имеем, что $u = u(l)$, $v = v(l)$, $w = w(l)$, $p = p(l)$ и система уравнений (0.2) сводится к системе ОДУ

$$\begin{aligned}
&(S + au + bv + cw)u_l + Eap_l - \frac{1}{R}u_{ll}(a^2 + b^2 + c^2) = 0,\\
&(S + au + bv + cw)v_l + Ebp_l - \frac{1}{R}v_{ll}(a^2 + b^2 + c^2) = 0,\\
&(S + au + bv + cw)w_l + Ecp_l - \frac{1}{R}w_{ll}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{F},\\
&au_l + bv_l + cw_l = 0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

что и требовалось доказать. □

Дифференциальные следствия последнего уравнения системы (2.2) приводят к соотношениям $au_{ll} + bv_{ll} + cw_{ll} = 0$, $au + bv + cw = A$, $A = \text{const}$. Если первое уравнение системы (2.2) умножить на a, второе уравнение системы — на b, а третье уравнение системы — на c и сложить, то получим $p_l = c/[FE(a^2 + b^2 + c^2)]$. Тогда первые три уравнения системы (2.2) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R}u_{ll} - (S + A)u_l - \frac{ca}{F(a^2 + b^2 + c^2)} = 0,\\
&\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R}v_{ll} - (S + A)v_l - \frac{cb}{F(a^2 + b^2 + c^2)} = 0,\\
&\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R}w_{ll} - (S + A)w_l + \frac{a^2 + b^2}{F(a^2 + b^2 + c^2)} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Нетрудно выписать общее решение линейной системы с постоянными коэффициентами (2.3). Если $A \neq (-S)$, то

$$\begin{aligned}
&u = \frac{U_0}{\alpha}\exp(\alpha l) - \frac{\beta}{\alpha}l + U_1, \quad \alpha = \frac{R(S + A)}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \beta = -\frac{caR}{F(a^2 + b^2 + c^2)^2},\\
&\qquad U_0 = \text{const}, \quad U_1 = \text{const};\\
&v = \frac{V_0}{\alpha}\exp(\alpha l) - \frac{b\beta}{a\alpha}l + V_1, \quad V_0 = \text{const}, \quad V_1 = \text{const};\\
&w = -\frac{aU_0 + bV_0}{c\alpha}\exp(\alpha l) + \frac{\beta(a^2 + b^2)}{ac\alpha}l + \frac{A - aU_1 - bV_1}{c};\\
&p = \frac{c}{FE(a^2 + b^2 + c^2)}l + p_0, \quad p_0 = \text{const}, \quad l = t + ax + by + cz.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Если $A = -S$, то

$$\begin{aligned}
&u = -0.5\beta l^2 + U_2 l + U_3, \quad U_2 = \text{const}, \quad U_3 = \text{const};\\
&v = -0.5\beta l^2 + V_2 l + V_3, \quad V_2 = \text{const}, \quad V_3 = \text{const};\\
&w = \frac{0.5\beta(a + b)}{c}l^2 - \frac{aU_2 + bV_2}{c}l - \frac{aU_3 + bV_3 + S}{c}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Как следует из формул (2.4) , эти законы описывают режимы с обострением, что приводит к турбулентности и подтверждает гипотезу, выдвинутую Жаном Лере в 1933 г. Чем больше число Рейнольдса, тем быстрее скорость стремится к бесконечности. Если число Рейнольдса невелико, обострение тоже наступает, но позднее. В случае, когда $A = -S$ (см. формулы (2.5)), картина другая при тех же числах Рейнольдса: возрастание скорости звука незначительное в сравнении с тем, что имеет место при $A \neq -S$, и сдвинуто по времени.

3. О системе уравнений Максвелла

Рассмотрим систему (0.3).

Утверждение 4. *Система* (0.3) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий может быть сведена к системе* ОДУ.

Доказательство. Полагаем, что $u_i = u_i(\psi(t,x,y,z))$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$, тогда система (0.3) приводится к виду

$$\begin{gathered}
u_1'\psi_t + u_5'\psi_z - u_6'\psi_y = 0, \quad u_2'\psi_t + u_6'\psi_x - u_4'\psi_z = 0, \quad u_3'\psi_t + u_4'\psi_y - u_5'\psi_x = 0, \\
u_4'\psi_t - u_2'\psi_z + u_3'\psi_y = 0, \quad u_5'\psi_t - u_3'\psi_x + u_1'\psi_z = 0, \quad u_6'\psi_t - u_1'\psi_y + u_2'\psi_x = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь штрих ($'$) обозначает дифференцирование по ψ, нижние индексы у функции $\psi(t,x,y,z)$ обозначают производную по соответствующей переменной. Рассмотрим случай, когда $\psi_t \neq 0$. Будем считать, что

$$\frac{\psi_z}{\psi_t} = f_1(\psi), \quad \frac{\psi_y}{\psi_t} = f_2(\psi), \quad \frac{\psi_x}{\psi_t} = f_3(\psi), \tag{3.2}$$

где $f_j(\psi)$ $(j = 1,2,3)$ — пока произвольные функции. Нетрудно проверить, что решение системы (3.2) имеет вид

$$\psi = \psi(t + zf_1(\psi) + yf_2(\psi) + xf_3(\psi)). \tag{3.3}$$

Чтобы система (3.1) имела нетривиальное решение, соответствующий определитель должен быть равен нулю. Это имеет место, если $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$. Отсюда, полагая, что $f_3 = \pm\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}$, получим систему соотношений

$$\begin{aligned}
&u_1' = \mp\left(\frac{f_2}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}u_2' + \frac{f_1}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}u_3'\right), \\
&u_4' = f_1u_2' - f_2u_3', \\
&u_5' = \pm\left(\frac{f_1f_2}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}u_2' + \frac{1-f_2^2}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}u_3'\right), \\
&u_6' = \mp\left(\frac{1-f_1^2}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}u_2' + \frac{f_1f_2}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}u_3'\right),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

что и требовалось доказать. □

В соотношениях (3.4) функции $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$, $u_2(\psi)$, $u_3(\psi)$ — произвольные. Положим, например, что $f_1 = f_2 = \psi$ и что в соотношении (3.3), $\psi = t + zf_1 + yf_2 + x\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}$. Пусть также $u_2 =a\psi + c_2$, $u_3 = b\psi + c_3$, $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $c_2 = \mathrm{const}$, $c_3 = \mathrm{const}$. Тогда решение системы (3.4) имеет вид

$$\begin{gathered}
u_1 = 0.5(a+b)\sqrt{1-2\psi^2} + c_1, \quad u_4 = 0.5(a-b)\psi^2 + c_2, \\
u_5 = 0.25(b-a)\psi\sqrt{1-2\psi^2} + \frac{a+3b}{4\sqrt{2}}\arcsin(\psi\sqrt{2}) + c_5, \\
u_6 = 0.25(a-b)\psi\sqrt{1-2\psi^2} + \frac{3a+b}{4\sqrt{2}}\arcsin(\psi\sqrt{2}) + c_6, \\
c_1 = \mathrm{const}, \quad c_4 = \mathrm{const}, \quad c_5 = \mathrm{const}, \quad c_6 = \mathrm{const},
\end{gathered}$$

где

$$\psi = \frac{t(1-y-z) \pm \sqrt{t^2(1-y-z)^2 - (t^2-x^2)[(1-y-z)^2+2x^2]}}{(1-y-z)^2+2x^2}.$$

4. Определение напряженностей магнитного и электрического поля, обеспечивающих движение заряженных частиц с заданной постоянной скоростью

Г. А. Лоренцом установлено [10], что направление дрейфа центра заряженной частицы совпадает с векторным произведением векторов электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей.

Решим для системы (0.3) следующую задачу. Пусть задан вектор скорости дрейфа центра заряда $\mathbf{U} = (u, v, w)$, причем $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, $w = \mathrm{const}$. Тогда [10] выполняются зависимости: $u = u_2u_6 - u_3u_5$, $v = u_3u_4 - u_1u_6$, $w = u_1u_5 - u_2u_4$. Отсюда $uu_1 + vu_2 + wu_3 = 0$ и $uu_4 + vu_5 + wu_6 = 0$, и из системы (3.4) получаем

$$\begin{gathered}
\Big(f_1 \pm \frac{vf_1f_2}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} \mp \frac{w(1-f_1^2)}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}\Big)u_2' \\
+ \Big(-f_2 \pm \frac{v(1-f_2^2)}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} \mp \frac{wf_1f_2}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}\Big)u_3' = 0, \\
\Big(\pm\frac{f_2}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} - \frac{v}{u}\Big)u_2' + \Big(\pm\frac{f_1}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} - \frac{w}{u}\Big)u_3' = 0.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Система (4.1) имеет нетривиальное решение, если $(vf_2 + wf_1 \pm u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2})^2 = u^2+v^2+w^2$. Выражая отсюда f_2, приходим к выводу, что функция f_2 — действительная, если дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю. Следовательно, получаем

$$f_1 = \pm\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \qquad f_2 = \pm\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

Подставив полученные значения f_1 и f_2 в систему (3.4), будем иметь

$$\begin{aligned}
&u_1 = \mp\Big(\frac{v}{u}u_2 + \frac{w}{u}u_3\Big) + a_1, \quad u_4 = \pm\Big(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_2 - \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_3\Big) + a_2, \\
&u_5 = \pm\Big(\frac{vw}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_2 + \frac{u^2+w^2}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_3\Big) + a_3, \\
&u_6 = \mp\Big(\frac{u^2+v^2}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_2 + \frac{vw}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_3\Big) + a_4, \quad a_i = \mathrm{const}, \quad (\mathrm{i} = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Еще раз отметим, что $\mathbf{U} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, следовательно, $u = u_2u_6 - u_3u_5$, $v = u_3u_4 - u_1u_6$, $w = u_1u_5 - u_2u_4$. Подставляя в эти выражения значения компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ из (4.2), получаем, что $u_2 = u_2(u, v, w, a_1, a_2, a_3) = \mathrm{const}$, $u_3 = u_3(u, v, w, a_1, a_2, a_3) = \mathrm{const}$, $a_4 = a_4(u, v, w, a_1, a_2, a_3) = \mathrm{const}$. Таким образом, определяем все постоянные компоненты векторов электрического и магнитного поля, которые обеспечивают дрейф заряженной частицы в определенном направлении с заданной постоянной скоростью. Если заданный дрейф переменный, аналогично можно получать электрическое и магнитное поле, обеспечивающее заданный дрейф.

5. О системе уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах

Рассмотрим систему (0.4).

Утверждение 5. *Система* (0.4) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий может быть сведена к системе* ОДУ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в ранее рассмотренных системах, полагаем, что $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $w = w(\psi)$, $p = p(\psi)$, $\varrho = \varrho(\psi)$. Тогда система (0.4) сводится к системе ОДУ

$$\begin{gathered}
r\varrho'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + \varrho' w\psi_\varphi + \varrho(u' r\psi_x + v' r\psi_r + w'\psi_\varphi) = -\varrho v,\\
r\varrho u'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + w\varrho u'\psi_\varphi + rp'\psi_x = 0,\\
r\varrho v'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + w\varrho v'\psi_\varphi + rp'\psi_r = w^2\varrho,\\
r\varrho w'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + w\varrho w'\psi_\varphi + p'\psi_\varphi = -wv\varrho,\\
rp'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + p' w\psi_\varphi + \kappa p(u' r\psi_x + v' r\psi_r + w'\psi_\varphi) = -\kappa p v.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь, как и ранее, штрих ($'$) обозначает дифференцирование по ψ, а нижние индексы обозначают производные функции ψ по соответствующим переменным.

Положим, что в системе (5.1) $r\psi_t = f_1(\psi)$, $r\psi_x = f_2(\psi)$, $\psi_\varphi = f_3(\psi)$, $r\psi_r = f_4(\psi)$. Тогда, требуя равенства смешанных производных, придем к зависимостям $f_2 = c_2 f_1$, $f_3 = c_3 f_1$,

$$f_4 = f_1 g(\psi), \quad g(\psi) = c_4 - \int \frac{d\psi}{f_1}, \quad \psi_r = g(\psi)\psi_t, \quad c_2 = \mathrm{const} \neq 0, \quad c_3 = \mathrm{const} \neq 0, \quad c_4 = \mathrm{const}.$$

Учитывая все зависимости между первыми производными функции ψ и требуя равенства всех смешанных производных, получаем, что $f_3 = 0$ и $(t + c_2 x + g(\psi) r) = \mathrm{const}$ (полное доказательство см. в разд. 1). Отсюда следует, что $g(\psi) = (t_0 - t - c_2 x)/r$. Пусть $g(\psi) = -\psi$, тогда $\psi = (t - t_0 + c_2 x)/r$. Так как $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\psi)$, $\mathbf{U} = \{p, \varrho, u, v, w\}$, то в результате подстановки таких функций в систему (0.4) приходим к системе ОДУ

$$\begin{gathered}
(q/\varrho)\varrho' + c_2 u' - \psi v' = -v, \quad qu' + (c_2/\varrho)p' = 0, \quad qv' - (\psi/\varrho)p' = w^2, \quad qw' = -vw,\\
[q/(\kappa p)]p' + c_2 u' - \psi v' = -v, \quad \text{где} \quad q = 1 + c_2 u - \psi v,
\end{gathered} \tag{5.2}$$

что и требовалось доказать. □

Сравнивая первое и последнее уравнения системы (5.2), получаем зависимость $p = a\varrho^\kappa$, где $a = \mathrm{const} > 0$. Так как из первого уравнения системы (5.2) имеем $c_2 u' - \psi v' = -v - q(\varrho'/\varrho) = q(w'/w - \varrho'/\varrho)$, то $q' = c_2 u' - \psi v' - v = -2v - q(\varrho'/\varrho) = q(2w'/w - \varrho'/\varrho)$. Отсюда $q'/q = 2w'/w - \varrho'/\varrho$ и $q\varrho/w^2 = c_0$, где $c_0 = \mathrm{const} > 0$, если $w \neq 0$, $\varrho \neq 0$, $q > 0$.

Перепишем полученную систему (5.2) в виде, разрешенном относительно производных, учитывая полученные первые интегралы и полагая, что $[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2] \neq 0$:

$$\begin{gathered}
u' = \frac{\kappa a c_2 \varrho^{\kappa-1}(\psi\varrho - v c_0)}{c_0[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2]}, \qquad v' = \frac{\kappa a \varrho^{\kappa-1}(c_2^2\varrho + \psi v c_0) - q^2\varrho}{c_0[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2]},\\
\varrho' = \frac{q\varrho(v c_0 - \psi\varrho)}{c_0[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2]}.
\end{gathered} \tag{5.3}$$

Система уравнений (5.3) содержит три произвольные постоянные: $a > 0$, $c_2 > 0$, $c_0 > 0$, и если, например, $c_0 = c_0(c_2, a)$, то решение системы зависит от произвольной функции.

Выпишем точные решения системы (0.4):

$$\varrho = \varrho_0 = \mathrm{const}, \quad p = a\varrho_0^\kappa = \mathrm{const}, \quad u = u_0 = \mathrm{const}, \quad v = \varrho_0\psi/c_0,$$

$$w = \sqrt{(1 + c_2 u_0 - \varrho_0\psi^2/c_0)\varrho_0/c_0}.$$

$$\varrho = \varrho_0 = \mathrm{const}, \quad p = a\varrho_0^\kappa = \mathrm{const}, \quad u = \psi^2\varrho_0/c_0 - 1 + \sqrt{a\kappa\varrho_0^{(\kappa-1)}(c_2^2 + \psi^2)}, \quad v = \psi\varrho_0/c_0,$$

$$w = \pm(\varrho_0/c_0)^{1/2}[a\kappa\varrho_0^{(\kappa-1)}(c_2^2 + \psi^2)]^{1/4}.$$

6. Заключение

Геометрический метод, который ранее применялся для исследования и решения нелинейных уравнений в частных производных, может применяться для нелинейных и линейных систем уравнений в частных производных. При этом системы уравнений в частных производных сводятся к системам ОДУ, решение которых позволяет в ряде случаев находить точные решения исходных систем уравнений (см. системы (0.2),(0.4)) и решать некоторые другие задачи (системы (0.1)–(0.3)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.
2. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 209–225.
3. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 209–225.
4. **Станюкович К.П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1955. 804 с.
5. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика/ Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
6. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. 784 с.
7. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.
8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов [и др.]. М: Наука, 1976. 400 с.
9. **Риман Б.** Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948. 543 с.
10. **Лоренц Г.А.** Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1953. 472 с.

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила 4.12.2013

Ульянов Олег Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
ученый секретарь института
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: secretary@imm.uran.ru

Том 20 № 1 2014

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ ФУРЬЕ И КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С. А. Стасюк

В работе получены точные по порядку оценки приближений классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ смешанной гладкости суммами Фурье в метрике L_q при $1 < p < q < \infty$. Спектр приближающих полиномов лежит в множествах, порожденных поверхностями уровня функции $\Omega(t)/\prod_{j=1}^d t_j^{1/p-1/q}$. При некоторых соотношениях между параметрами p, q и θ получены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников рассматриваемых классов в метрике L_q.

Ключевые слова: гиперболический крест, колмогоровский поперечник, наилучшее приближение, смешанная гладкость, суммы Фурье.

S. A. Stasyuk. Approximation by Fourier sums and Kolmogorov widths for classes $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables.

We obtain exact order estimates for approximations of mixed smoothness classes $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ by Fourier sums in the metric L_q for $1 < p < q < \infty$. The spectrum of approximation polynomials lies in the sets generated by level surfaces of the function $\Omega(t)/\prod_{j=1}^d t_j^{1/p-1/q}$. Under some matching conditions on the parameters p, q and θ, we obtain exact order estimates for Kolmogorov widths of the classes under consideration in the metric L_q.

Keywords: hyperbolic cross, Kolmogorov width, best approximation, mixed smoothness, Fourier sums.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, — d-мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_dy_d$. $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

В дальнейшем предполагаем, что для $f \in L_p$ выполняется условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\, dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для $f \in L_p$ рассмотрим смешанный модуль непрерывности порядка l, $l \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_l(f, t)_p := \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,\dots,d}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

где $\Delta_h^l f(x) := \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) := \Delta_{h_d}^l(\dots(\Delta_{h_1}^l f(x)))$, а

$$\Delta_{h_j}^l f(x) := \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} \binom{l}{n} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d)$$

— l-я разность функции $f(x)$ с шагом h_j по переменной x_j.

Пусть $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ возрастает по каждой переменной;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \prod_{j=1}^{d} m_j^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$;

4) $\Omega(t)$ непрерывна при $t_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, d$.

Будем считать, что функция $\Omega(t)$ удовлетворяет также условиям (S), (S_l), которые называют условиями Бари — Стечкина [1]. Это значит следующее.

Функция одной переменной $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S), если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает при некотором α: $\alpha > 0$, т. е. существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_1 > 0$, что $\varphi(\tau_1)/\tau_1^\alpha \le C_1 \varphi(\tau_2)/\tau_2^\alpha$, $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1$.

Функция $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S_l), если $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ почти убывает при некотором γ: $0 < \gamma < l$, т. е. существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_2 > 0$, что $\varphi(\tau_1)/\tau_1^\gamma \ge C_2 \varphi(\tau_2)/\tau_2^\gamma$, $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1$.

Будем говорить, что функция $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l), если она удовлетворяет этим условиям по каждой переменной t_j при фиксированных значениях остальных переменных.

Множество функций Ω, для которых выполняются сформулированные выше условия 1–4, а также условия Бари — Стечкина (S) и (S_l), будем обозначать через $\Phi_{\alpha,l}$.

Теперь приведем определение пространств $MB^\Omega_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных, которые были рассмотрены в работе [2].

Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$ и $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тогда пространство $MB^\Omega_{p,\theta}$ определяется следующим образом:

$$MB^\Omega_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{MB^\Omega_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

где

$$\|f\|_{MB^\Omega_{p,\theta}} := \left(\int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{MB^\Omega_{p,\infty}} := \|f\|_{MH^\Omega_p} := \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}. \tag{1.2}$$

Заметим, что $MB^\Omega_{p,\infty} \equiv MH^\Omega_p$. Шкала пространств $MB^\Omega_{p,\theta}$ является естественным обобщением шкалы пространств (смешанной гладкости) Никольского — Бесова $MB^r_{p,\theta}$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$, периодических функций многих переменных (см., например, [3]) и $MB^\Omega_{p,\theta} \equiv MB^r_{p,\theta}$ при $\Omega(t) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d}$, $r_j < l$, $j = 1, \ldots, d$. Заметим, что при $\theta = \infty$ $MB^r_{p,\theta} \equiv MH^r_p$ — пространства С.М. Никольского, а при $1 \le \theta < \infty$ $MB^r_{p,\theta}$ — пространства О.В. Бесова. Иногда пространства $MB^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, называют пространствами Никольского — Бесова — Аманова.

Далее нам будет удобно рассматривать пространства $MB^\Omega_{p,\theta}$ с декомпозиционной точки зрения и использовать при этом эквивалентные (1.1) и (1.2) определения нормы функций из пространств $MB^\Omega_{p,\theta}$.

Как установлено в [4] ($\theta = \infty$) и [2] ($1 \le \theta < \infty$), для функций из пространств $MB^\Omega_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, справедливы соотношения

$$\|f\|_{MB^\Omega_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f)\|_p^\theta \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty\ , \tag{1.3}$$

$$\|f\|_{MB^\Omega_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}\ , \tag{1.4}$$

где $\Omega(2^{-s}) := \Omega(2^{-s_1},\dots,2^{-s_d})$, $\delta_s(f) := \delta_s(f,x) := (f * \mathcal{D}_{\rho(s)})(x)$, $\mathcal{D}_{\rho(s)}(x) := \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}$, $\rho(s) := \{k = (k_1,\dots,k_d):\ \ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ s_j \in \mathbb{N},\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = 1,\dots,d\}$, а значком "$*$" обозначена операция свертки двух функций, т. е. $\varphi * g := (\varphi * g)(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(y)g(x-y)\,dy$ для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$. Для $\|\mathcal{D}_{\rho(s)}\|_p$ имеет место соотношение

$$\|\mathcal{D}_{\rho(s)}\|_p \asymp 2^{\|s\|_1(1-1/p)}, \quad 1 < p < \infty, \quad \|s\|_1 := (s,1) := s_1 + \dots + s_d, \tag{1.5}$$

которое следует из соответствующего соотношения в одномерном случае (см., например, [5]).

Заметим, что запись $a \asymp b$ будет означать, что для неотрицательных величин a и b, определяемых некоторой совокупностью параметров, существует положительная величина C, не зависящая от одного, обозначенного контекстом параметра, такая, что $C^{-1}a \le b \le Ca$. Если только выполняется неравенство $b \le Ca$ или $b \ge C^{-1}a$, то будем писать $b \ll a$ или $b \gg a$ соответственно.

Приведем несколько отличную от (1.3) и (1.4) эквивалентную норму для $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $1 \le p,\theta \le \infty$, охватив при этом не рассмотренные в (1.3) и (1.4) крайние значения $p = 1,\infty$. Для этого через $\mathcal{V}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим ядро Валле Пуссена степени $2n-1$ вида $\mathcal{V}_n(t) := 1/n\sum_{k=n}^{2n-1} \mathcal{D}_k(t)$, где $\mathcal{D}_k(t) := \sum_{m=-k}^{k} e^{imt}$ — ядро Дирихле. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, и $s = (s_1,\dots,s_d) \in \mathbb{N}^d$ положим $A_s(f) := f * A_s$, где $A_s(x) := \prod_{j=1}^{d} \big(\mathcal{V}_{2^{s_j}}(x_j) - \mathcal{V}_{2^{s_j-1}}(x_j)\big)$.

Пусть $1 \le p \le \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тогда

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.6}$$

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}\,. \tag{1.7}$$

Соотношение (1.6) установлено в [6], а (1.7) — в [4].

При $\Omega(t) = t_1^{r_1}\dots t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = 1,\dots,d$, т. е. для пространств Никольского — Бесова $MB^{r}_{p,\theta}$, соотношения, соответствующие (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), установлены в [3] (для случая $\theta = \infty$ см. также [7]).

Через $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ обозначим единичный шар пространства $MB^{\Omega}_{p,\theta}$:

$$\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta} := \big\{f \in MB^{\Omega}_{p,\theta} \colon \|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\big\}.$$

Введем обозначение множеств, которые будут являться спектром тригонометрических полиномов, используемых для приближения функций. Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega,p,q,N) := \Big\{s = (s_1,\dots,s_d)\colon \Omega(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)_+} \ge N^{-1},\ s \in \mathbb{N}^d\Big\},$$

$$Q(N) := Q(\Omega,p,q,N) := \bigcup_{s\in\kappa(N)} \rho(s),$$

где $a_+ := \max\{a;0\}$.

Заметим, что множества $Q(N)$ порождаются поверхностями уровня функции $\Omega_1(t) := \Omega(t)/\prod_{j=1}^{d} t_j^{(1/p-1/q)_+}$. В том случае, когда $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $(1/p-1/q)_+ < r_j$, $j = 1,\dots,d$, множества $Q(N)$ являются ступенчатыми гиперболическими крестами. В общем случае будем называть множества $Q(N)$ обобщенными ступенчатыми гиперболическими крестами.

Далее, обозначим

$$\kappa^{\perp}(N) := \mathbb{N}^d \setminus \kappa(N) = \Big\{s = (s_1,\dots,s_d):\ \Omega(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)_+} < N^{-1},\ s \in \mathbb{N}^d\Big\}, \tag{1.8}$$

$$Q^{\perp}(N) := \bigcup_{s\in\kappa^{\perp}(N)} \rho(s),$$

$$\Theta(N) := \kappa^{\perp}(N) \setminus \kappa^{\perp}(2^l N). \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) получаем $(2^l N)^{-1} \le \Omega(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)_+} < N^{-1}$, т. е.

$$\Omega(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)_+} \asymp N^{-1}, \tag{1.10}$$

где $s \in \Theta(N)$.

В [8] показано, что $\Theta(N) \ne \varnothing$ и

$$|\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \tag{1.11}$$

где $|\mathcal{M}|$ — количество элементов множества $\mathcal{M}$.

Теперь приведем определение аппроксимативных характеристик, которые будут изучаться в работе.

Положим

$$\mathcal{T}_{Q(N)} := \Big\{ t\colon t = \sum_{k \in Q(N)} c_k e^{i(k,x)},\ c_k \in \mathbb{C} \Big\}.$$

Для $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, величина

$$E_{Q(N)}(f)_q := \inf_{t \in \mathcal{T}_{Q(N)}} \|f - t\|_q \tag{1.12}$$

— наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром из множества $Q(N)$. Если $F \subset L_q$ — некоторый класс функций, то полагаем

$$E_{Q(N)}(F)_q := \sup_{f \in F} E_{Q(N)}(f)_q. \tag{1.13}$$

Для $f \in L_q$ рассмотрим сумму Фурье вида $S_{Q(N)}(f) := f * \mathcal{D}_{Q(N)}$, где $\mathcal{D}_{Q(N)} := \sum_{k \in Q(N)} e^{i(k,x)}$. Для $F \subset L_q$ определим величину $\mathcal{E}_{Q(N)}(F)_q := \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q$, где

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q := \|f - S_{Q(N)}(f)\|_q \tag{1.14}$$

— величина приближения в метрике пространства L_q функции $f \in L_q$ суммой Фурье $S_{Q(N)}(f)$.

Согласно определениям (1.12) и (1.14) величины $E_{Q(N)}(f)_q$ и $\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q$ связаны неравенством $E_{Q(N)}(f)_q \le \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q$, $1 \le q \le \infty$, однако из теоремы Литтлвуда — Пэли (см., например, [7, теорема A]) при $1 < q < \infty$ вытекает следствие (см., например, [10; 9, гл. I, § 1.4])

$$E_{Q(N)}(f)_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q. \tag{1.15}$$

Заметим, что точные по порядку оценки величин $E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q$, в частности при $1 < q \le p < \infty$, были получены в работах [8] и [10] для классов $\mathbf{MH}^{\Omega}_p$ и $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, соответственно. Однако идея, связанная с рассмотрением множеств, аналогичных $Q(N)$, для построения тригонометрических полиномов, по-видимому, восходит к работе [11]. В [11] А.С. Романюк, в частности, решал задачу о нахождении точных по порядку оценок величин $E_{Q(N)}(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, $1 < p, q < \infty$, где классы $L^{\psi}_{\beta,p}$ являются обобщением по гладкостному параметру классов $\mathbf{MW}^{r}_{\beta,p}$, а множество $Q(N)$ определялось аналогичным образом через функцию (многих переменных) ψ. Установление порядковых оценок величин (1.13) для различных классов функций смешанной гладкости проводилось в работах многих авторов (с более детальной информацией можно ознакомиться, например, в [7; 9; 12]).

Приведем несколько вспомогательных утверждений, необходимых нам в дальнейшем.

Лемма 1 [7, лемма 3.1]. *Пусть $1 \le p < q < \infty$ и $f \in L_p$, тогда*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \big(\|\delta_s(f)\|_p\, 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)}\big)^q. \tag{1.16}$$

Лемма 1 известна в литературе как лемма В.Н. Темлякова.

Лемма 2 [8]. *Пусть функция $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условию (S). Тогда для $0 < p < \infty$*

$$\sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^p. \tag{1.17}$$

Таким образом, учитывая включение $\Theta(N) \subset \kappa^{\perp}(N)$, в силу соотношений (1.17), (1.10) и (1.11), можем записать для $0 < p < \infty$

$$\sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^p \asymp \sum_{s \in \Theta(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^p \asymp N^{-p} \sum_{s \in \Theta(N)} 1 = N^{-p} |\Theta(N)| \asymp N^{-p} (\log_2 N)^{d-1}. \tag{1.18}$$

Утверждение. *Пусть $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, а параметры p и q удовлетворяют одному из следующих условий*: 1) $1 \le q = p < \infty$; 2) $1 < q < p \le \infty$, $p \ge 2$; 3) $1 \le q < p \le 2$. *Тогда при $1 \le \theta \le \infty$*

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1/p_0 - 1/\theta)_+}. \tag{1.19}$$

Заметим, что соотношение (1.19) для $\theta = \infty$ установлено в [8], а для $1 \le \theta < \infty$ — в [10].

Для $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $1 \le \theta < \infty$, имеет место оценка

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta})_\infty \ll N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}, \tag{1.20}$$

которая доказывается аналогично (1.19) в случае $p = q = 1$.

2. Основные результаты и комментарии к ним

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p - 1/q}$, где $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, тогда*

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1/q - 1/\theta)_+}. \tag{2.1}$$

Целью наших дальнейших исследований является обоснование целесообразности приближения классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Фурье $S_{Q(N)}(f)$ (или же другими тригонометрическими полиномами со спектром из $Q(N)$). Для этого решим экстремальную задачу о нахождении величины

$$d_m(F, L_q) := \inf_{\mathcal{L}_m} \sup_{f \in F} \inf_{t \in \mathcal{L}_m} \|f - t\|_q, \tag{2.2}$$

где нижняя грань берется по всем $\mathcal{L}_m$ — m-мерным линейным многообразиям в L_q. В несколько более общем виде величина (2.2) впервые рассмотрена А.Н. Колмогоровым в 1936 г. Величину (2.2) называют m-поперечником по Колмогорову (или колмогоровским m-поперечником) центрально-симметричного подмножества F в пространстве L_q.

Теорема 2. *Если $1 < p < 2$, $1 \le \theta \le 2$, $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p - 1/2}$, а $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, тогда*

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \asymp N^{-1}, \tag{2.3}$$

где N подобрано так, чтобы выполнялось соотношение $|Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m$.

Теорема 3. *Если $2 \le q \le p \le \infty$, $q \ne \infty$, $1 \le \theta \le 2$ или $q = p = \infty$, $\theta = 1$, а $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тогда*

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp N^{-1}, \tag{2.4}$$

где N подобрано так, чтобы выполнялось соотношение $|Q(\Omega, p, q, N)| \asymp m$.

В завершение сформулированных результатов приведем некоторые комментарии.

Замечание 1. В теореме 1 исключен случай $\theta = \infty$, поскольку сответствующий результат для класса $\mathbf{MH}_p^{\Omega}$ получается из [8, теорема 2] как следствие.

Замечание 2. Обозначим $\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\omega} := \mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}$ в случае, когда функция Ω имеет вид $\Omega(t) = \omega(t_1 \dots t_d)$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ — функция одной переменной типа модуля непрерывности порядка l. Тогда для классов $\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\omega}$ результаты теорем 1–3 известны, а именно, теоремы 1 и 2 доказаны в [2], а теорема 3 — в [13] ($2 \le q \le p < \infty$) и в [14] ($2 \le q < \infty$, $p = \infty$).

Замечание 3. В случае $\omega(\tau) = \tau^r$, $0 < r < l$, имеем $\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\omega} \equiv \mathbf{MB}_{p,\theta}^{r}$ и для классов $\mathbf{MB}_{p,\theta}^{r}$ теоремы 1 и 2 доказаны в [15], а теорема 3 — в [16] ($p < \infty$) и в [9, гл. IV, § 4.3] ($p = \infty$).

Замечание 4. Пусть

$$\Omega(t) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{d} t_j^r \,(\log_2 1/t_j)_+^{-b_j} & \text{при} \;\; t_j > 0, \; j = 1, \dots, d \\ 0, & \text{при} \;\; \prod_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $(\log_2 1/t_j)_+ = \max\{1, \log_2 1/t_j\}$, $0 < r < l$, $b_j < r$, $j = 1, \dots, d$. Н.Н. Пустовойтовым [17; 18] установлено, что при $q < p$ для $|Q(\Omega, p, q, N)|$ имеет место соотношение $|Q(\Omega, p, q, N)| \asymp N^{1/r} (\log_2 N)^{-(b_1 + \dots + b_d)/r + d - 1}$, где функция $\Omega(t)$ задана формулой (2.5).

В этом случае оценка (2.4) при выполнении условий теоремы 3 будет иметь вид

$$d_m(\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp m^{-r} (\log_2 m)^{r(d-1) - (b_1 + \dots + b_d)}. \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) дополняет результаты, относящиеся к оценкам величин $d_m(\mathbf{MH}_p^{\Omega}, L_q)$ [19] в случае, когда функция $\Omega(t)$ задана формулой (2.5).

3. Доказательства результатов

3.1. Доказательство теоремы 1

Приведем сначала (см. (2.1)) доказательство оценки сверху и при этом рассмотрим несколько случаев.

Пусть $q < \theta < \infty$. Тогда воспользовавшись для $f \in \mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}$ сначала соотношением (1.16), а затем неравенством Гельдера (с показателем θ/q) и соотношениями (1.3), (1.18) для Ω_1, получим

$$E_{Q(N)}(f)_q \le \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_p = \Bigg\| \sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \delta_s(f) \Bigg\|_q \ll \Bigg(\sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \Big(\|\delta_s(f)\|_p \, 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q)} \Big)^q \Bigg)^{1/q}$$

$$= \Bigg(\sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{-q} \|\delta_s(f)\|_p^q \Big(\Omega(2^{-s}) \, 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q)} \Big)^q \Bigg)^{1/q}$$

$$\le \Bigg(\sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{-\theta} \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \Bigg)^{1/\theta} \Bigg(\sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \Big(\Omega(2^{-s}) \, 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q)} \Big)^{q\theta/(\theta - q)} \Bigg)^{(\theta - q)/(\theta q)}$$

$$\ll \|f\|_{MB_{p,\theta}^{\Omega}} N^{-1} |\Theta(N)|^{1/q - 1/\theta} \ll N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1/q - 1/\theta)}.$$

Пусть $\theta = q$; в этом случае для $f \in \mathbf{MB}_{p,q}^{\Omega}$ имеем

$$E_{Q(N)}(f)_q \ll \Bigg(\sum_{s \in \kappa^{\perp}(N)} \Big(\|\delta_s(f)\|_p \, 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q)} \Big)^q \Bigg)^{1/q}$$

$$\le \Bigg(\sum_{s\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})\big)^{-q} \|\delta_s(f)\|_p^q \Bigg)^{1/q} \sup_{s\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)} \le N^{-1}\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,q}} \le N^{-1}. \quad (3.1)$$

Если же $1 \le \theta < q$, то, используя вложения

$$\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,1} \subset \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\infty}, \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty, \tag{3.2}$$

и установленную оценку (3.1), получаем

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \le E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,q})_q \ll N^{-1}.$$

Таким образом, оценка сверху в теореме доказана.

Перейдем к доказательству в (2.1) оценки снизу. Это доказательство будет базироваться на построении экстремальных функций, соответствующих определенным случаям.

Пусть сначала $q \le \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_{N,p,\theta} = C_3 |\Theta(N)|^{-1/\theta} \sum_{s\in\,\Theta(N)} \Omega(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1(1/p-1)} \mathcal{D}_{\rho(s)}, \quad C_3 > 0.$$

Покажем, что при некоторой постоянной $C_3 > 0$ $f_{N,p,\theta} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$.

Действительно, используя (1.5) и (1.11), получим

$$\|f_{N,p,\theta}\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(f_{N,p,\theta})\|_p^{\theta} \Bigg)^{1/\theta}$$

$$= C_3|\Theta(N)|^{-1/\theta} \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} 2^{\|s\|_1(1/p-1)\theta} \|\mathcal{D}_{\rho(s)}\|_p^{\theta} \Bigg)^{1/\theta} \asymp |\Theta(N)|^{-1/\theta} \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} 1 \Bigg)^{1/\theta} = 1.$$

Далее положим $\Delta_s = \{x : 2^{-s_j} \le x_j < 2^{-s_j+1}, j = 1,\dots,d\}$. Отметим, что $\Delta_s \cap \Delta_{s'} = \varnothing$ при $s \ne s'$. Тогда, принимая во внимание, что $S_{Q(N)}(f_{N,p,\theta}) = 0$, вследствие (1.15) и теоремы Литтлвуда — Пэли будем иметь

$$E_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q = \|f_{N,q,\theta}\|_q$$

$$\asymp \Bigg\| \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} |\delta_s(f_{N,q,\theta},\cdot)|^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg\|_q \gg \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \int_{\Delta_s} |\delta_s(f_{N,q,\theta},x)|^q \, dx \Bigg)^{1/q}$$

$$= C_3|\Theta(N)|^{-1/\theta} \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \Big(\Omega(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1(1/p-1)}\Big)^q \int_{\Delta_s} \Bigg| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} \Bigg|^q dx \Bigg)^{1/q}. \tag{3.3}$$

Поскольку (см., например, [7; 9, гл. 1, § 1.4; 15])

$$\int_{\Delta_s} \Bigg| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} \Bigg|^q dx \gg 2^{\|s\|_1(q-1)},$$

то из (3.3), (1.10) и (1.11) находим

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \gg |\Theta(N)|^{-1/\theta} \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \Big(\Omega(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)}\Big)^q \Bigg)^{1/q} \asymp N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1/q-1/\theta)}.$$

В случае $1 \le \theta < q$ рассмотрим функцию

$$g_{\Omega} = C_4 \Omega(2^{-\tilde{s}})\, 2^{\|\tilde{s}\|_1(1/p-1)} \mathcal{D}_{\rho(\tilde{s})}, \quad C_4 > 0,$$

где $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_d) \in \Theta(N)$.

Согласно (1.5) имеем

$$\|g_\Omega\|_{MB^\Omega_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s>0} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s(g_\Omega)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp 2^{\|\tilde{s}\|_1(1/p-1)} \|\mathcal{D}_{\rho(\tilde{s})}\|_p \asymp 1,$$

поэтому $g_\Omega \in \mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta}$ при соответствующей постоянной $C_4 > 0$.

Учитывая соотношения (1.15), (1.5), (1.10) и то, что $S_{Q(N)}(g_\Omega) = 0$, получим

$$E_{Q(N)}(g_\Omega)_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(g_\Omega)_q = \|g_\Omega\|_p = C_4\, \Omega(2^{-\tilde{s}})\, 2^{\|\tilde{s}\|_1(1/p-1)} \|\mathcal{D}_{\rho(\tilde{s})}\|_q$$

$$\asymp \Omega(2^{-\tilde{s}})\, 2^{\|\tilde{s}\|_1(1/p-1/q)} \asymp N^{-1}.$$

Оценки снизу установлены.

Теорема 1 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2

Оценка сверху в (2.3) следует из (2.1) при $q = 2$ и при N, удовлетворяющем соотношению $|Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m$.

Перейдем теперь к установлению оценок снизу. При доказательстве оценки снизу будем использовать метод, разработанный В.Н. Темляковым [7] при нахождении оценки снизу величины $d_m(\mathbf{MW}^r_{\beta,p}, L_q)$.

Пусть $\mathcal{P}_{Q(N)}$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{T}_{Q(N)}$, тогда для $f \in L_2$ имеет место оценка $\|\mathcal{P}_{Q(N)} f\|_2 \le \|f\|_2$, вследствие которой для $t \in \mathcal{T}_{Q(N)}$ получаем

$$\|t - \mathcal{P}_{Q(N)} f\|_2 = \|\mathcal{P}_{Q(N)}(t - f)\|_2 \le \|t - f\|_2. \tag{3.4}$$

Из неравенства $d_m(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta}, L_2) \ge d_m(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2)$, которое следует из определения (2.2), и (3.4) выводим

$$d_m(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta}, L_2) \gg d_m\big(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2 \cap \mathcal{T}_{Q(N)}\big). \tag{3.5}$$

По заданному числу m подберем N таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$|Q(\Omega, p, 2, N)| = K > 2m \quad \text{и} \quad |Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m. \tag{3.6}$$

Пусть $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{T}_{Q(N)}$ — m-мерное линейное подпространство, порожденное ортонормированной системой функций $\{\varphi_j(\tau)\}_{j=1}^m$. Дополним эту систему до полной ортонормированной системы в $\mathcal{T}_{Q(N)}$ функциями $\varphi_{m+1}(\tau), \ldots, \varphi_K(\tau)$.

Рассмотрим для некоторого $k \in Q(N)$ функцию $e^{i(k,\tau)}$ и запишем ее разложение по системе $\{\varphi_j(\tau)\}_{j=1}^K$, т.е.

$$e_k(\tau) := e^{i(k,\tau)} = \sum_{j=1}^K \alpha_k^j \varphi_j(\tau),$$

где α_k^j — коэффициенты разложения.

Заметим, что поскольку системы $\{\varphi_j(\tau)\}_{j=1}^K$ и $\{e_k(\tau)\}_{k \in Q(N)}$ ортонормированы, то

$$\sum_{k \in Q(N)} |\alpha_k^j|^2 = \sum_{j=1}^K |\alpha_k^j|^2 = 1. \tag{3.7}$$

Для приближения $e_k(\tau)$ ее m-й суммой Фурье в пространстве L_2 имеют место равенства

$$\Big\|e_k(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j \varphi_j(\cdot)\Big\|_2^2 = \Big\| \sum_{j=m+1}^{K} \alpha_k^j \varphi_j(\cdot)\Big\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{K} |\alpha_k^j|^2,$$

и вследствие (3.7) и (3.6) получаем

$$\sum_{k\in Q(N)} \Big\|e_k(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j \varphi_j(\cdot)\Big\|_2^2 = \sum_{k\in Q(N)} \sum_{j=1}^{K} |\alpha_k^j|^2 - \sum_{k\in Q(N)} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_k^j|^2$$

$$= K - m \geq K/2 \asymp \sum_{s\in\kappa(N)} 2^{\|s\|_1}/2. \tag{3.8}$$

Из (3.8) можно сделать вывод о существовании вектора $s^0 \in \kappa(N)$, для которого

$$\sum_{k\in \rho(s^0)} \Big\|e_k(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j \varphi_j(\cdot)\Big\|_2^2 = \sum_{k\in \rho(s^0)} \sum_{j=m+1}^{K} |\alpha_k^j|^2 \geq 2^{\|s^0\|_1}/2. \tag{3.9}$$

Рассмотрим функцию

$$g(\tau) = \sum_{k\in\rho(s^0)} e_k(\tau),\ \ s^0 \in \kappa(N).$$

Согласно (1.3) и (1.5) получим

$$\|g\|_{\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp (\Omega(2^{-s^0}))^{-1} \|\mathcal{D}_{\rho(s^0)}\|_p \asymp (\Omega(2^{-s^0}))^{-1} 2^{\|s^0\|_1(1-1/p)},$$

поэтому $g_{\Omega,\theta} = C_5 \Omega(2^{-s^0})\, 2^{\|s^0\|_1(1/p-1)} g \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ для некоторого значения $C_5 > 0$.

В завершение рассмотрим приближение функции $g(\tau+y)$ ее m-й суммой Фурье (обозначим ее через $S_m(g(\tau+y),\varphi_j)$) по системе $\{\varphi_j(\tau)\}_{j=1}^K$. Принимая во внимание равенства

$$g(\tau+y) - S_m(g(\tau+y),\varphi_j) = \sum_{k\in\rho(s^0)} e_k(y) \sum_{j=1}^{K} \alpha_k^j \varphi_j(\tau) - \sum_{k\in\rho(s^0)} e_k(y) \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j \varphi_j(\tau)$$

$$= \sum_{k\in\rho(s^0)} e_k(y) \sum_{j=m+1}^{K} \alpha_k^j \varphi_j(\tau),$$

можем записать

$$\big\|g(\cdot+y) - S_m(g(\cdot+y),\varphi_j)\big\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{K} \Big| \sum_{k\in\rho(s^0)} \alpha_k^j e_k(y)\Big|^2.$$

Отсюда, учитывая (3.9), имеем

$$(2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \big\|g(\cdot+y) - S_m(g(\cdot+y),\varphi_j)\big\|_2^2\, dy = \sum_{k\in\rho(s^0)} \sum_{j=m+1}^{K} |\alpha_k^j|^2 \geq 2^{\|s^0\|_1}/2. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует существование такого $y_0 \in \mathbb{T}^d$, что для $g_{\Omega,\theta} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ имеет место неравенство

$$\big\|g_{\Omega,\theta}(\cdot+y_0) - S_m(g_{\Omega,\theta}(\cdot+y_0),\varphi_j)\big\|_2 \geq \sqrt{C_5/2}\,\Omega(2^{-s^0})\, 2^{\|s^0\|_1(1/p-1/2)}.$$

Вследствие (3.5) и последнего неравенства имеем требуемую оценку снизу

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \gg \Omega(2^{-s^0})\, 2^{\|s^0\|_1(1/p-1/2)} \geq N^{-1}.$$

Теорема 2 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3

Оценка сверху в (2.4) следует из оценок (1.19), (1.20) при N, удовлетворяющем соотношению $|Q(\Omega,p,q,N)| \asymp m$.

Перейдем к доказательству оценки снизу. Как и в предыдущей теореме, по заданному числу m подберем N таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$|Q(\Omega,p,q,N)| = K > 2m \quad \text{и} \quad |Q(\Omega,p,q,N)| \asymp m. \tag{3.11}$$

Поскольку при $2 \le q \le p \le \infty$ $Q(\Omega,p,q,N) \equiv Q(\Omega,\infty,2,N)$, а правая часть (2.4) от p, q и θ не зависит, то достаточно установить оценку снизу величины $d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1},L_2)$, поскольку при указанных в условии теоремы значениях p, q и θ имеют место следующие неравенства (вследствие (3.2) и монотонности L_q-нормы):

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \ge d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta},L_2) \ge d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta},L_2) \ge d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1},L_2). \tag{3.12}$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить по модифицированной схеме доказательства предыдущей теоремы.

На основании (3.12) и (3.5) получаем

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \gg d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2 \cap \mathcal{T}_{Q(N)}). \tag{3.13}$$

Из (3.9) делаем вывод о существовании вектора $k^0 \in \rho(s^0)$ ($s^0 \in \kappa(N)$), для которого имеет место неравенство

$$\Big\| e_{k^0}(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha^j_{k^0}\varphi_j(\cdot) \Big\|_2^2 \ge 1/2. \tag{3.14}$$

Рассмотрим функцию $g_{N,\Omega}(\tau) = C_6\Omega(2^{-s^0})e_{k^0}(\tau)$, где $k^0 \in \rho(s^0)$, $s^0 \in \kappa(N)$. Используя (1.6), легко убедиться, что $g_{N,\Omega} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1}$ при некотором $C_6 > 0$.

Далее, рассуждая, как в доказательстве теоремы 2, но с функцией $g_{N,\Omega}$ вместо $g_{\Omega,\theta}$ и принимая во внимание неравенство (3.14), получим

$$d_m\big(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2 \cap \mathcal{T}_{Q(N)}\big) \gg \Omega(2^{-s^0}) \ge N^{-1}. \tag{3.15}$$

Сопоставляя (3.13) и (3.15), приходим к требуемой оценке снизу.

Теорема 3 доказана.

В заключение выражаю благодарность профессору А.С. Романюку за внимание к работе и обсуждение рассматриваемых в ней вопросов. Также выражаю искреннюю признательность рецензенту за сделанные им замечания, способствовавшие улучшению изложения полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1952. Т. 2. С. 489–523.
2. **Sun Y., Wang H.** Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 356–377.
3. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187. С. 143–161.
4. **Пустовойтов Н.Н.** Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. 1994. Т. 20, № 1. P. 35–48.
5. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–178.
6. **Стасюк С.А., Федуник О.В.** Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. 2006. Т. 58, № 5. С. 692–704.

7. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
8. **Пустовойтов Н.Н.** Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 107–117.
9. **Романюк А.С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. Київ: Інститут математики НАН України, 2012. Т. 92. Праці Інституту математики НАН України. 353 с.
10. **Стасюк С.А.** Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 108–121.
11. **Романюк А.С.** О приближении классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 5. С. 662–672.
12. **Temlyakov V.N.** Approximation of periodic functions. New York: Nova Science, 1993. 419 p.
13. **Стасюк С.А.** Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 11. С. 1557–1568.
14. **Конограй А.Ф.** Поперечники класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох // Мат. Студії. 2008. Т. 29, № 2. С. 192–206.
15. **Романюк А.С.** Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 10. С. 1398–1408.
16. **Галеев Э.М.** Поперечники классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 5. С. 656–665.
17. **Пустовойтов Н.Н.** Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. 2008. Т. 34, № 3. P. 187–224.
18. **Пустовойтов Н.Н.** О наилучших приближениях аналогами “своих” и “не своих” гиперболических крестов // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 3. С. 466–476.
19. **Пустовойтов Н.Н.** О поперечниках по Колмогорову классов функций с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. 2012. Т. 38, № 1. P. 41–64.

Стасюк Сергей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступила 16.10.2013

Том 20 № 1 2014

УДК 519.65

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УЗЛАМИ[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Построены локальные $\mathcal{L}$-сплайны с произвольным расположением узлов, сохраняющие ядро линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ порядка r с постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого действительны и попарно различны.

Ключевые слова: локальные L-сплайны, дифференциальный оператор, произвольные узлы.

E. V. Strelkova, V. T Shevaldin. Local exponential splines with arbitrary knots.

We construct local $\mathcal{L}$-splines that have an arbitrary arrangement of knots and preserve the kernel of a linear differential operator $\mathcal{L}$ of order r with constant coefficients and real pairwise distinct roots of the characteristic polynomial.

Keywords: local L-splines, differential operator, arbitrary knots.

Введение

Пусть в узлах равномерной с шагом $h>0$ сетки $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ заданы значения $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ некоторой функции $f(x)\colon y_j=f(jh),\ j\in\mathbb{Z}$. Обозначим через B_r нормализованный полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) порядка $r\in\mathbb{N}$ (степени $r-1$) с носителем $\operatorname{supp} B_r=[0,rh]$ и равномерными узлами $0,h,2h,\dots,rh$ (см., например, [1, гл. 1]). В 1975 году Т. Лич и Л. Шумейкер [2] (см. также [1, гл. 9]) для любой функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ построили локальные полиномиальные сплайны r-го порядка вида

$$S_r(x)=S_r(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{s=-k}^{k}\gamma_s f((j+s)h)B_r\Big(x-jh-\frac{rh}{2}\Big)\quad(x\in\mathbb{R}),\tag{0.1}$$

где $k=[(r-1)/2]$ и действительные коэффициенты γ_s выбирались из условия точности формулы $S_r(f,x)=f(x)$ для алгебраических многочленов степени $r-1$. В [2] (см. также [1, гл. 9]) было доказано, что такой выбор коэффициентов может быть осуществлен единственным образом. Аналогичные построения были выполнены в [1; 2] и для произвольной (не обязательно равномерной) сетки узлов $\Delta=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Эти результаты нашли применение в вычислительной математике и обобщались в различных направлениях. Выделим лишь те из них, которые непосредственно относятся к теме настоящей работы. Е. В. Стрелкова (Шевалдина) в двух своих работах [3; 4] построила локальные $\mathcal{L}$-сплайны $S(x)$ соответственно четного и нечетного порядков r (а затем исследовала их аппроксимативные свойства в терминах ядра интегрального представления погрешности аппроксимации) с равномерными узлами $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, сохраняющие все функции из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которо-

[1]Работа выполнена в рамках Программы Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики” при поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4), РФФИ (проект 14-01-00496), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1), интеграционного проекта, выполняемого совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проект 12-С-1-1018), а также Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

го предполагались действительными и попарно различными. Такие $\mathcal{L}$-сплайны называются экспоненциальными. В [5] авторами был предложен единый подход (независимо от четности r) к построению еще более общих конструкций локальных экспоненциальных сплайнов с равномерными узлами и была выписана невырожденная система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов (аналогов чисел γ_s в (0.1)) линейной комбинации узловых значений $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ ($j \in \mathbb{Z},\ 0 \le \alpha < 1$) аппроксимируемой функции f в схеме локальной аппроксимации, точной на подпространстве ядра оператора $\mathcal{L}$. В [6] эта система линейных алгебраических уравнений была сведена к треугольной, что позволило выписать ее решение явно. В этой работе также изучались формосохраняющие свойства построенных сплайнов. В [7] были найдены порядковые (по h) оценки погрешности аппроксимации соответствующих соболевских классов функций локальными экспоненциальными сплайнами указанного вида, точными на всем ядре оператора $\mathcal{L}$. Отметим, что вопросы формосохранения сплайнами аппроксимируемых узловых значений $\{y_{j+\alpha}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ (неотрицательность, обобщенная монотонность и выпуклость) рассматривались (см. например, [8–10] и библиографию к ним) и для некоторых других локальных полиномиальных и $\mathcal{L}$-сплайнов (в том числе и с неравномерными узлами).

Настоящая работа продолжает исследования [3–7]. В следующих разделах мы по схеме полиномиального случая [1, гл. 9] построим локальные экспоненциальные сплайны с произвольными узлами, сохраняющие все функции из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ порядка r с постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого действительны и попарно различны. И тем самым обобщим конструкции локальных экспоненциальных сплайнов, точных на ядре оператора $\mathcal{L}$, из работ [5; 6].

1. Обозначения и вспомогательные функции

Дадим основные определения. Пусть $r \in \mathbb{N}$, D — оператор дифференцирования и β_j ($j = \overline{1,r}$) — попарно различные действительные числа. Рассмотрим последовательность линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(D) = D - \beta_1, \quad \mathcal{L}_s = \mathcal{L}_s(D) = (D-\beta_s)\mathcal{L}_{s-1}(D) \quad (s = \overline{2,r}).$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{s=1}^{r}(D-\beta_s). \tag{1.1}$$

Определим бесконечную в обе стороны сетку $\Delta = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ($x_j < x_{j+1},\ j \in \mathbb{Z}$) узлов на числовой прямой $\mathbb{R}$ и пусть

$$h_j = x_{j+1} - x_j.$$

Обозначим φ_r решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ ($j = \overline{0,r-1}$), где $\delta_{j,r-1}$ — символ Кронекера. Используя рекуррентное соотношение

$$\varphi_r(x) = \int\limits_0^x e^{\beta_r(x-t)}\varphi_{r-1}(t)\,dt,$$

индукцией по r получаем равенство

$$\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j x} \prod_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{r}(\beta_j-\beta_k)^{-1}. \tag{1.2}$$

Для произвольной последовательности $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ действительных чисел определим обобщенные разделенные разности $\Delta^{\mathcal{L}_s}[y_{j+s}, y_{j+s-1},\dots,y_j]$, соответствующие оператору $\mathcal{L}_s$ $(s=\overline{1,r})$. Положим

$$\Delta^{\mathcal{L}_1}[y_{j+1}, y_j] = y_{j+1} - a_{1,j}y_j,$$

$$\Delta^{\mathcal{L}_s}[y_{j+s}, y_{j+s-1},\dots,y_j] = \Delta^{\mathcal{L}_{s-1}}[y_{j+s}, y_{j+s-1},\dots,y_{j+1}] - a_{s,j}\Delta^{\mathcal{L}_{s-1}}[y_{j+s-1}, y_{j+s-2},\dots,y_j], \tag{1.3}$$

где $s=\overline{2,r}$. Числа $a_{s,j}$ $(s=\overline{1,r})$ в (1.3) будем выбирать из условий равенства нулю этих разностей для сеточных значений $y_j = e^{\beta_s x_j}$ $(s=\overline{1,r})$ функций $e^{\beta_1 x}, e^{\beta_2 x},\dots,e^{\beta_r x}$ из ядра оператора $\mathcal{L}_r$. А именно, если при каждом фиксированном $s=\overline{1,r}$ уже выбраны числа $a_{1,j}, a_{2,j},\dots,a_{s-1,j}$, то для определения $a_{s,j}$ положим

$$\Delta^{\mathcal{L}_s}\big[y_{j+s}, y_{j+s-1},\dots,y_j\big] = 0 \tag{1.4}$$

для чисел $y_j = e^{\beta_s x_j}$ $(j\in\mathbb{Z})$. Таким образом, из (1.4) последовательно определяются числа $a_{1,j}, a_{2,j},\dots,a_{r,j}$. В частности, имеем

$$a_{1,j} = e^{\beta_1 h_j}, \quad a_{2,j} = e^{\beta_2 h_j}\frac{e^{\beta_2 h_{j+1}} - e^{\beta_1 h_{j+1}}}{e^{\beta_2 h_j} - e^{\beta_1 h_j}}$$

и т. д. Обобщенные разности могут быть представлены в виде

$$\Delta^{\mathcal{L}_s}[y_{j+s}, y_{j+s-1},\dots,y_j] = \sum_{i=0}^{s}(-1)^{s-i}\mu_i^{(j,s)}y_{j+i} \quad (s=\overline{1,r}), \tag{1.5}$$

где числа $\mu_i^{(j,s)}$ $(i=\overline{0,s})$ являются действительными и не зависят от y_j.

Отметим, что в случае равномерной сетки узлов $\Delta=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ (т. е. при $h_j = x_{j+1}-x_j = h$) формула (1.5) впервые, вероятно, была выписана А. Шармой и И. Цимбаларио в работе [11], посвященной вопросам экстремальной функциональной интерполяции. В этом случае числа $\mu_i^{(j,s)}$ не зависят от j и имеют вид

$$\mu_s^{(j,s)} = 1, \quad \mu_{s-1}^{(j,s)} = \sum_{k=1}^{s} e^{\beta_k h},\dots,\mu_0^{(j,s)} = \prod_{k=1}^{s} e^{\beta_k h},$$

т. е. являются коэффициентами при степенях x в алгебраическом многочлене $p_s(x) = \prod_{k=1}^{s}(x+e^{\beta_k h})$. Начало исследованию свойств обобщенных разделенных разностей, соответствующих произвольной чебышевой системе функций $u_s(x)$ $(s=\overline{1,r})$ и произвольной сетке узлов $\Delta=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, было положено Т. Поповичу [12] в 1959 году. В [12] и последующих публикациях, в которых исследовались обобщенные разделенные разности (см., например, [13–15]), аннулирующие все функции данной системы, они строились не рекуррентно (как это было проделано выше), а по другой схеме — в форме отношения некоторых определителей. Для системы функций $u_s(x) = e^{\beta_s x}$ $(s=\overline{1,r})$ разложение по y_k $(k=\overline{j,j+s})$ этих определителей приводит к формулам (1.5).

На основе коэффициентов $\mu_i^{(j,r)}$ разности

$$\Delta^{\mathcal{L}_r}[y_{j+r}, y_{j+r-1},\dots,y_j] = \mu_r^{(j,r)}y_{j+r} - \mu_{r-1}^{(j,r)}y_{j+r-1} + \ldots + (-1)^r\mu_0^{(j,r)}y_j$$

определим последовательность $\{B_{r,j}(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ экспоненциальных B-сплайнов с узлами на сетке $\Delta=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Положим

$$B_{r,j}(x) = \mu_r^{(j,r)}\varphi_r((x-x_j)_+) - \mu_{r-1}^{(j,r)}\varphi_r((x-x_{j+1})_+) + \cdots + (-1)^r\mu_0^{(j,r)}\varphi_r((x-x_{j+r})_+)$$

$$(j\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R}), \tag{1.6}$$

где функция φ_r имеет вид (1.2) и t_+ означает $\max\{0, t\}$. Ясно, что сплайн $B_{r,j}$ имеет узлы в точках $x_j,\ x_{j+1}, \ldots, x_{j+r}$, носитель $\operatorname{supp} B_{r,j} = [x_j, x_{j+r}]$ и $B_{r,j} \in C^{r-2}(\mathbb{R})$.

З. Вронич [13] в 1990 году в своей диссертации изучал чебышевские сплайны с произвольными узлами, соответствующие дифференциальному оператору r-го порядка вида

$$\widetilde{\mathcal{L}}_r(D)f = \frac{1}{w_r} D\Big(\frac{1}{w_{r-1}} D\Big(\frac{1}{w_{r-2}} \cdots D\Big(\frac{f}{w_0}\Big) \cdots\Big)\Big),$$

где функции $w_s(x)$ $(s = \overline{0, r})$ предполагались достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми и положительными на отрезке $[a, b]$. В силу известного равенства (см., например, [16])

$$(D - \beta)f(x) = e^{\beta x} D(e^{-\beta x} f(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

к чебышевским сплайнам относятся, в частности, экспоненциальные сплайны, соответствующие линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r(D)$ вида (1.1). В своей работе З. Вронич определял соответствующие обобщенные разделенные разности в терминах определителей Т. Поповичу [12] и затем по формулам, аналогичным (1.6), на произвольной сетке $\Delta = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ узлов построил нормированные (в C) чебышевские B-сплайны $N_{r,j}(x)$, которые обладали следующими свойствами: $N_{r,j}(x) > 0$ при $x_j < x < x_{j+r}$, носитель $\operatorname{supp} N_{r,j} = [x_j, x_{j+r}]$ и $\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{r,j}(x) = 1$ (см. [13, гл. 2]). Поэтому для экспоненциальных B-сплайнов $B_{r,j}(x)$ из формулы (1.6) имеет место равенство

$$N_{r,j}(x) = K_{r,j} B_{r,j}(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.7}$$

где $K_{r,j}$ — некоторые константы.

Перейдем теперь к построению локальных экспоненциальных сплайнов $S(x) = S(f, x)$, аппроксимирующих произвольную функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Как и ранее, положим $y_j = f(x_j)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и построим систему функционалов

$$I_j = \sum_{i=1}^{r} c_{i,j} y_{j+i-1} \quad (j \in \mathbb{Z},\ c_{i,j} \in \mathbb{R}). \tag{1.8}$$

Локальный экспоненциальный сплайн на сетке $\Delta = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, соответствующий функции f, определим формулой

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_j B_{r,j}(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.9}$$

В силу определения B-сплайнов при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ сумма (1.9) содержит лишь конечное число слагаемых. Например, если $x \in [x_l, x_{l+1}]$ $(l \in \mathbb{Z})$, то

$$S(x) = \sum_{j=l-r+1}^{l} I_j B_{r,j}(x) = \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{i=1}^{r} c_{i,j} y_{j+i-1} B_{r,j}(x).$$

В следующем разделе мы строим локальные экспоненциальные сплайны $S(x)$ вида (1.9), сохраняющие все базисные функции из ядра оператора $\mathcal{L}_r$.

2. Сведение задачи к системе линейных уравнений

Коэффициенты $c_{i,j}$ в представлении (1.8) задают способ локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации.

Теорема. *Пусть все числа β_j $(j = \overline{1, r})$ действительны и попарно различны. Коэффициенты $c_{i,j}$ $(i = \overline{1, r},\ j \in \mathbb{Z})$ в схеме локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации* (1.8)–(1.9) *условиями*

$$S(e^{\beta_s \bullet}, x) = e^{\beta_s x} \quad (x \in \mathbb{R},\ s = \overline{1, r}) \tag{2.1}$$

определяются однозначно.

Доказательство. Функционал I_j (1.8) можно записать в виде

$$I_j = b_{1,j}y_j + b_{2,j}\Delta^{\mathcal{L}_1}[y_{j+1}, y_j] + \dots + b_{r,j}\Delta^{\mathcal{L}_{r-1}}[y_{j+r-1}, y_{j+r-2}, \dots, y_j], \tag{2.2}$$

где разности $\Delta^{\mathcal{L}_s}[y_{j+s}, y_{j+s-1,\dots,y_j}]$ $(s=\overline{1,r-1})$ определены формулами (1.3). Из (1.5) следует, что числа $c_{i,j}$ выражаются через числа $b_{i,j}$ с помощью равенств

$$c_{i,j} = \sum_{m=i}^{r}(-1)^{m-i}\mu_{i-1}^{(j,m-1)}b_{m,j}. \tag{2.3}$$

Поэтому из (2.2) следует, что при $x \in [x_l, x_{l+1}]$ $(l \in \mathbb{Z})$

$$S(x) = S(f,x) = \sum_{j=l-r+1}^{l}\sum_{i=1}^{r} b_{i,j}\Delta^{\mathcal{L}_{i-1}}[y_{j+i-1}, y_{j+i-2}, \dots, y_j]B_{r,j}(x). \tag{2.4}$$

В этом равенстве полагаем $\Delta^{\mathcal{L}_0}[y_j] = y_j$. Подставляя в (2.4) вместо функции f последовательно функции $e^{\beta_1 x}, e^{\beta_2 x}, \dots, e^{\beta_r x}$ из ядра оператора $\mathcal{L}_r$, при $x \in [x_l, x_{l+1}]$ в силу равенств (1.4) из (2.1) получаем следующую систему из r уравнений:

$$\sum_{j=l-r+1}^{l} b_{1,j}B_{r,j}(x) = e^{\beta_1 x},$$

$$\sum_{j=l-r+1}^{l}(b_{1,j} + b_{2,j}\Delta^{\mathcal{L}_1}[y_{j+1}, y_j])B_{r,j}(x) = e^{\beta_2 x}, \quad \text{здесь} \ \ y_j = e^{\beta_2 x_j},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\sum_{j=l-r+1}^{l}(b_{1,j} + b_{2,j}\Delta^{\mathcal{L}_1}[y_{j+1}, y_j] + \dots + b_{r,j}\Delta^{\mathcal{L}_{r-1}}[y_{j+r-1}, y_{j+r-2}, \dots, y_j])B_{r,j}(x) = e^{\beta_r x}, \tag{2.5}$$

здесь $y_j = e^{\beta_r x_j}$.

Преобразуем правые части $e^{\beta_1 x}, e^{\beta_2 x}, \dots, e^{\beta_r x}$ полученной системы уравнений. Из результатов З. Вронича [13, гл. 2] применительно к экспоненциальным сплайнам с произвольными узлами при $x \in [x_l, x_{l+1}]$ вытекают следующие равенства (аналоги тождеств Марсдена для полиномиальных сплайнов):

$$e^{\beta_s x} = \sum_{j=l-r+1}^{l}\eta_j^{(s)}N_{r,j}(x) \quad (s=\overline{1,r}), \tag{2.6}$$

где числа $\eta_j^{(s)}$ выписаны в [13, теорема 2.9]. Поскольку система B-сплайнов $N_{r,j}(x)$ линейно независима [13, гл. 2], то из равенств (2.5), (2.6) и (1.7) выводим следующую треугольную систему r линейных алгебраических уравнений для определения чисел $b_{s,j}$ $(s=\overline{1,r})$:

$$b_{1,j}K_{r,j} = \eta_j^{(1)},$$

$$\big(b_{1,j} + b_{2,j}\Delta^{\mathcal{L}_1}[e^{\beta_2 x_{j+1}}, e^{\beta_2 x_j}]\big)K_{r,j} = \eta_j^{(2)},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Big(b_{1,j} + b_{2,j}\Delta^{\mathcal{L}_1}[e^{\beta_r x_{j+1}}, e^{\beta_r x_j}] + \dots + b_{r,j}\Delta^{\mathcal{L}_{r-1}}[e^{\beta_r x_{j+r-1}}, e^{\beta_r x_{j+r-2}}, \dots, e^{\beta_r x_j}]\Big)K_{r,j} = \eta_j^{(r)}.$$

Из этой треугольной системы числа $b_{s,j}$ $(s=\overline{1,r})$ определяются однозначно. Поэтому из равенств (2.3) числа $c_{i,j}$ также находятся единственным образом. Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и я. Для равномерной сетки узлов ($h_j = x_{j+1} - x_j = h$) данная теорема доказана авторами в [5]. При этом числа $c_{i,j}$ $(i = \overline{1,r})$ не зависят от j. В [6] их удалось выписать явно. Для локальных полиномиальных сплайнов с произвольными узлами аналогичная теорема доказана в [1, гл. 9] (см. также [2]). В этом случае числа $b_{i,j}$ $(i = \overline{1,r})$ также удалось явно вычислить [1, гл. 9, § 4] после громоздких преобразований и ряда вспомогательных лемм. С точки зрения приложения результатов, полученных в настоящей работе, хотелось бы получить явные формулы для параметров $c_{i,j}$ $(i = \overline{1,r})$ и в экспоненциальном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, no. 4. P. 294–325.
3. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами четного порядка, сохраняющими ядро дифференциального оператора // Изв. ТулГУ. 2009. Т. 2. С. 62–73. (Естественные науки.)
4. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.
5. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
6. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Формосохранение при аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами произвольного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. Т. 17, № 3. С. 291–299.
7. **Волков Ю.С., Пыткеев Е.Г., Шевалдин В.Т.** Порядки аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 135–144.
8. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
9. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраняющая некоторые свойства аппроксимируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 156–166.
10. **Волков Ю.С., Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов // Мат. тр. 2011. Т. 14, № 2. С. 73–82.
11. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, вып. 2. С. 161–173.
12. **Popoviciu T.** Sur le reste dans certains formules lineares d'approximation de l'analyse // Mathematica (Cluj). 1959. Vol. 1. P. 95–142.
13. **Wronicz Z.** Chebyshevian splines: Dissertationes mathematical. Warszawa: Polska Academia Nauk, Institute Mathematyczny, 1990. 99 p.
14. **Muhlbach G.** A recurrence formula for generalized divided differences and some applications // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 9, no. 2. P. 165–172.
15. **Walz G.** Generalized divided differences, with applications to generalized B-splines // Calcolo. 1992. Vol. 29, no. 1–2. P. 111–123.
16. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

Поступила 8.07.2013

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.518.86

СКОРОСТЬ ПОВЕДЕНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ВЗВЕШЕННОЙ МЕРЫ МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ НА ОТРЕЗКЕ[1]

К. С. Тихановцева

Пусть $\mathcal{P}_n(\alpha)$ есть множество алгебраических многочленов p_n порядка n с действительными коэффициентами с нулевым взвешенным средним значением с ультрасферическим весом $\varphi^{(\alpha)}(t) = (1-t^2)^\alpha$ на отрезке $[-1,1]$: $\int_{-1}^1 \varphi^{(\alpha)}(t)p_n(t)dx = 0$. Изучается задача о наименьшем значении $\mu_n = \inf\{m(p_n)\colon p_n \in \mathcal{P}_n(\alpha)\}$ взвешенной меры $m(p_n) = \int_{\mathcal{X}(p_n)} \varphi^{(\alpha)}(t)dt$ множества $\mathcal{X}(p_n) = \{t \in [-1,1]\colon p_n(t) \geq 0\}$ точек отрезка, в которых многочлен p_n является неотрицательным. Найден порядок поведения величины μ_n по n, а именно доказано, что $\mu_n(\alpha) \asymp n^{-2(\alpha+1)}$, $n \to \infty$.

Ключевые слова: алгебраические многочлены, многочлены с нулевым взвешенным средним значением, ультрасферический вес.

K. S. Tikhanovtseva. The rate of the smallest value of the weighted measure of the nonnegativity set for polynomials with zero mean value on a closed interval.

Let $\mathcal{P}_n(\alpha)$ be the set of algebraic polynomials p_n of order n with real coefficients and zero weighted mean value with ultraspherical weight $\varphi^{(\alpha)}(t) = (1-t^2)^\alpha$ on the interval $[-1,1]$: $\int_{-1}^1 \varphi^{(\alpha)}(t)p_n(t)dx = 0$. We study the problem on the smallest value $\mu_n = \inf\{m(p_n)\colon p_n \in \mathcal{P}_n(\alpha)\}$ of the weighted measure $m(p_n) = \int_{\mathcal{X}(p_n)} \varphi^{(\alpha)}(t)dt$ of the set where p_n is nonnegative. The order of μ_n with respect to n is found: it is proved that $\mu_n(\alpha) \asymp n^{-2(\alpha+1)}$ as $n \to \infty$.

Keywords: algebraic polynomials, polynomials with zero weighted mean value, ultraspherical weight.

Введение

Предположим, что функции φ и ψ неотрицательны, суммируемы на отрезке $[-1,1]$ и отличны от нуля на множестве положительной меры из $[-1,1]$; такие функции называют весом. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\varphi)$ есть множество многочленов p с действительными коэффициентами степени точно $n \geqslant 1$, для которых выполняется условие

$$\int_{-1}^{1} p(t)\varphi(t)\,dt = 0. \tag{0.1}$$

Для многочлена $p \in \mathcal{P}_n$ введем множество

$$\mathcal{X}(p) = \{t \in [-1,1]\colon p(t) \geqslant 0\}$$

точек отрезка $[-1,1]$, в которых многочлен неотрицателен. Величина

$$m(p) = m_\psi(p) = \int_{\mathcal{X}(p)} \psi(t)dt$$

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 12-01-31495), Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

является ψ-мерой множества $\mathcal{X}(p)$. Интерес представляет наименьшее значение этой меры, т. е. величина

$$\mu_n = \mu_n(\varphi,\psi) = \inf\{m_\psi(p)\colon p\in\mathcal{P}_n\} = \inf_{p\in\mathcal{P}_n}\int\limits_{\mathcal{X}(p)}\psi(t)\,dt. \tag{0.2}$$

В 1987 г. А. Г. Бабенко [1] для единичных весов $\psi=\varphi\equiv 1$ нашел порядок поведения μ_n по n при $n\to\infty$. Десять лет спустя В. В. Арестов и В. Ю. Раевская [2] исследовали задачу (0.2) для $\psi\equiv 1$ и некоторого класса весов φ. Они доказали, что если вес φ положителен, непрерывен на $(-1,1)$ и удовлетворяет условию, согласно которому при любом $\theta\in(0,1)$ функции

$$\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(\theta t-1)},\quad \frac{\varphi(1-t)}{\varphi(1-\theta t)}$$

не убывают по переменному t на интервале $(0,2)$, то множество положительности экстремального многочлена есть промежуток. Исходя из этого свойства, они получили в данном случае точное значение величины μ_n и указали экстремальные многочлены.

В настоящей работе задача (0.2) изучается для ультрасферического веса

$$\varphi(t)=\psi(t)=(1-t^2)^\alpha; \tag{0.3}$$

величину (0.2) в этом случае будем обозначать $\mu_n(\alpha)$. В работах [3; 4] исследовались свойства экстремального многочлена задачи (0.2), (0.3) для произвольного n и дано точное решение для $n=2$ и $n=3$. В данной работе будет доказано следующее утверждение.

Теорема. *При любом $n\geqslant 1$ и любом $\alpha\geqslant 0$ справедливы оценки*

$$A(n,\alpha)\leqslant\mu_n(\alpha)\leqslant B(n,\alpha), \tag{0.4}$$

в которых

$$A(n,\alpha)=\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}}\,\frac{1}{n^{2(\alpha+1)}},$$

а величина $B(n,\alpha)$ обладает свойством

$$\lim_{n\to\infty}B(n,\alpha)n^{2(\alpha+1)}=\frac{2^{2\alpha+1}}{\alpha+1}j_1^{2(\alpha+1)}; \tag{0.5}$$

здесь $j_1=j_1(\alpha)$ есть наименьший положительный нуль функции Бесселя J_α.

Это утверждение содержит порядок поведения по n величины $\mu_n(\alpha)$, а именно

$$\mu_n(\alpha)\asymp n^{-2(\alpha+1)},\quad n\to\infty.$$

В случае $\alpha=0$ порядок поведения $\mu_n(0)\asymp n^{-2}$ величины $\mu_n(0)$ по n получил А.Г.Бабенко [1]. В [2, теорема 3] найдено точное значение величины $\mu_n(0)$; из этого результата также можно получить порядок ее поведения. Для полуцелых $\alpha\geqslant 0$ порядок поведения величины $\mu_n(\alpha)$ содержится в работе [5].

При обосновании теоремы используются положения работы А. Г. Бабенко [1, гл. 1, § 2], которые, как отмечает А. Г. Бабенко, восходят к Д. Джексону и С. Н. Бернштейну.

1. Оценка снизу

Обоснование первого неравенства в (0.4) начнем со следующего довольно очевидного утверждения.

Лемма 1. *Для любых точек a, b со свойством $-1 < a < b < 1$, выполняется неравенство*

$$\int\limits_{-1}^{b-a-1} (1-t^2)^\alpha dt \leqslant \int\limits_a^b (1-t^2)^\alpha dt. \tag{1.1}$$

Доказательство. При $\alpha = 0$ утверждение теоремы очевидно, поэтому будем считать, что $\alpha > 0$. Положим $h = (b-a)/2$. Исходя из веса $\psi(t) = (1-t^2)^\alpha$, определим функцию

$$\Psi(x) = \int\limits_{x-h}^{x+h} \psi(t)dt$$

переменного $x \in [-1+h, 1-h]$. В терминах функции Ψ неравенство (1.1) можно записать в виде

$$\Psi(-1+h) \leq \Psi(x), \quad x \in [-1+h, 1-h]. \tag{1.2}$$

Выясним знак производной $\Psi'(x) = \psi(x+h) - \psi(x-h)$. Легко понять, что для точек x_1, $x_2 \in [-1,1]$ неравенство $\psi(x_1) < \psi(x_2)$ выполняется в том и только в том случае, если $|x_2| < |x_1|$. Следовательно, неравенство $\Psi'(x) > 0$ имеет место в том и только в том случае, если $|x+h| < |x-h|$ или, что то же самое, $(x+h)^2 < (x-h)^2$, т.е. $1 \leq x < 0$. Таким образом, функция Ψ возрастает на $[-1+h, 0]$ и убывает на $[0, 1-h]$. Вес ψ является четным на $[-1,1]$; отсюда нетрудно сделать вывод, что функция Ψ также четная на $[-1+h, 1-h]$. Таким образом, доказано следующее утверждение:

$$\Psi(-1+h) = \Psi(1-h) < \Psi(x), \quad x \in (-1+h, 1-h). \tag{1.3}$$

Свойство (1.3) содержит (1.2). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Для любого $n \geqslant 1$ и любого $\alpha \geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$\mu_n(\alpha) \geq \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}} \, \frac{1}{n^{2(\alpha+1)}}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен $p \in \mathcal{P}_n$, $p \not\equiv 0$. Можно считать, что его равномерная норма $\|p\| = \|p\|_{C[-1,1]} = \max\{|p(t)|\colon t \in [-1,1]\}$ равна единице: $\|p\| = 1$. Положим $c(p) = \max\{p(t)\colon -1 \leqslant t \leqslant 1\}$. Пусть $t_0 \in [-1,1]$ – точка, в которой этот многочлен равен $c(p)$, а t_1 – ближайший к t_0 ноль многочлена p на отрезке $[-1,1]$. Тогда

$$m(p) \geqslant \left| \int\limits_{t_1}^{t_0} (1-t^2)^\alpha dt \right| \geqslant \int\limits_{1-|t_1-t_0|}^{1} (1-t^2)^\alpha dt = \int\limits_{1-|t_1-t_0|}^{1} ((1-t)(1+t))^\alpha dt$$

$$\geqslant \int\limits_{1-|t_1-t_0|}^{1} (1-t)^\alpha dt = \frac{-1}{\alpha+1}(1-t)^{\alpha+1}\Big|_{1-|t_1-t_0|}^{1} = \frac{1}{\alpha+1}|t_0-t_1|^{\alpha+1}.$$

В силу неравенства А. А. Маркова (см., например, [6, гл. 1, § 7]) справедлива оценка $\|p'\|_{C[-1,1]} \leqslant n^2$, с помощью которой получаем $c(p) = |p(t_0) - p(t_1)| \leq |t_1 - t_0|\, n^2$. Поэтому справедливо неравенство

$$m(p) \geqslant \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{c(p)}{n^2}\Big)^{\alpha+1}. \tag{1.5}$$

Пусть $t_2 \in [-1,1]$ есть точка, в которой $|p(t_2)| = \|p\|_{C[-1,1]} = 1$. Неравенство А. А. Маркова влечет оценку

$$|p(t)| \geqslant 1 - n^2|t-t_2|, \quad t_2 - n^{-2} \leqslant t \leqslant t_2 + n^{-2}. \tag{1.6}$$

Если $p(t_2) = +1$, то $c(p) = 1$, а потому уже из (1.5) следует оценка

$$m(p) \geqslant \frac{1}{\alpha+1}\,\frac{1}{n^{2(\alpha+1)}}. \tag{1.7}$$

Рассмотрим случай, когда $p(t_2) = -1$. Воспользуемся соотношением

$$c(p)m(p) \geqslant \int\limits_{\chi(p)} \varphi(t)p(t)dt = -\int\limits_{[-1,1]\setminus\chi(p)} \varphi(t)p(t)dt.$$

С помощью этого соотношения, формулы (1.6) и леммы 1 получаем

$$-\int\limits_{[-1,1]\setminus\chi(p)} \varphi(t)p(t)dt = \int\limits_{[-1,1]\setminus\chi(p)} \varphi(t)|p(t)|dt \geqslant \int\limits_{([-1,1]\setminus\chi(p))\cap[t_2-\frac{1}{n^2};t_2+\frac{1}{n^2}]} \varphi(t)|p(t)|dt$$

$$\geqslant \int\limits_{[-1,1]\cap[t_2-\frac{1}{n^2};t_2+\frac{1}{n^2}]} \varphi(t)(1-n^2|t-t_2|)dt = [x = t - t_2]$$

$$= \int\limits_{[-1-t_2,1-t_2]\cap[-\frac{1}{n^2};\frac{1}{n^2}]} \varphi(x+t_2)(1-n^2|x|)dx \geqslant \int\limits_0^{1/n^2} \varphi(x-1)(1-n^2x)dx.$$

Для последнего интеграла имеем

$$\int\limits_0^{1/n^2} \varphi(x-1)(1-n^2x)dx = \int\limits_0^{1/n^2} (1-(x-1)^2)^\alpha(1-n^2x)dx$$

$$= \int\limits_0^{1/n^2} ((2-x)x)^\alpha(1-n^2x)dx \geqslant \int\limits_0^{1/n^2} x^\alpha(1-n^2x)dx = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\cdot\frac{1}{n^{2(\alpha+1)}}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$c(p)m(p) \geqslant \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\,\frac{1}{n^{2(\alpha+1)}}.$$

В силу этого неравенства и неравенства (1.5) имеем

$$m(p) \geqslant \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}}\,\frac{1}{n^{2(\alpha+1)}}. \tag{1.8}$$

Правая часть последнего неравенства меньше правой части неравенства (1.7). Следовательно, неравенство (1.8) справедливо независимо от знака $p(t_2)$. А этот факт влечет неравенство (1.4). Лемма доказана. □

2. Оценка сверху

Лемма 3. *Для любого $\alpha \geqslant 0$ величина μ_n не возрастает по n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $\mu_{n-1} \geqslant \mu_n$, $n \geq 2$. Пусть P^*_{n-1} – экстремальный многочлен степени $n-1$. Рассмотрим многочлен $P_n(t) = P_n(t,\varepsilon) = P^*_{n-1}(t) + \varepsilon(t^n - c)$, где $c = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^n\varphi(t)dt$. Нетрудно понять, что если $\varepsilon > 0$, то $P_n \in \mathcal{P}_n$, а потому $m(P_n) \geqslant \mu_n$. Функция $m(P_n(t,\varepsilon))$ непрерывна по ε, при этом $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} m(P_n(t,\varepsilon)) = \mu_{n-1}$. Следовательно, $\mu_{n-1} \geqslant \mu_n$. Лемма 3 доказана. □

Задачу (0.2), (0.3) можно рассматривать не только на множестве многочленов $\mathcal{P}_n$ степени точно n, но и на множестве многочленов $\widetilde{\mathcal{P}_n}$ степени не выше n, удовлетворяющих условию (0.1). В силу леммы 3 эти две задачи эквивалентны и многочлен, являющийся экстремальным для первой задачи, будет являться экстремальным и для второй.

Пусть $Q_n = Q_{n,\alpha}$, $0 \leq n < \infty$, есть система многочленов Гегенбауэра (ультрасферических многочленов), ортогональных на $(-1,1)$ с (ультрасферическим) весом (0.3). При $n \geq 1$ обозначим через $\{x_{\nu,n}\}_{\nu=1}^n$ нули многочлена Q_n на интервале $(-1,1)$, занумерованные в убывающем порядке по индексу ν, и положим $\theta_{\nu,n} = \arccos x_{\nu,n}$, $1 \leq \nu \leq n$. Натуральному числу n сопоставим число

$$\overline{n} = \overline{n}(n) = \Big[\frac{n+1}{2}\Big];$$

здесь $[\cdot]$ есть целая часть числа. Если число n нечетное, то $2\overline{n}-1 = n$, а если число n четное, то $2\overline{n}-1 = n-1$ и, значит, всегда $2\overline{n}-1 \leq n$; таким образом, число $\overline{n}$ выбрано из тех соображений, что $2\overline{n}-1$ есть наибольшее нечетное число, не превосходящее числа n.

Лемма 4. *При $n \geqslant 1$ для любого $\alpha \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\mu_n(\alpha) \leqslant B(n,\alpha), \tag{2.1}$$

в котором

$$B(n,\alpha) = \frac{1}{x_{1,\overline{n}}} \cdot \frac{1}{2(\alpha+1)}\,\theta_{1,\overline{n}}^{2(\alpha+1)},$$

где $\theta_{1,\nu} = \arccos x_{1,\bar{\nu}}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3 величина μ_n не возрастает по n. Поэтому неравенство (2.1) достаточно доказать для нечетного n, т. е. достаточно доказать, что при любом $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\mu_{2n-1}(\alpha) \leqslant \frac{1}{x_{1,n}} \cdot \frac{1}{2(\alpha+1)}\,\theta_{1,n}^{2(\alpha+1)}. \tag{2.2}$$

Докажем это неравенство с помощью многочлена

$$P_{2n-1}(t) = \frac{Q^2_{n,\alpha}(t)}{t - t_n}, \tag{2.3}$$

где $Q_{n,\alpha}(t)$ – многочлен Гегенбауэра степени n, а $t_n = x_{1,n}$ – его наибольший корень. Убедимся, что многочлен $P_{2n-1}(t)$ лежит во множестве $\mathcal{P}_{2n-1}$, а точнее, удовлетворяет условию (0.1) с весом (0.3). Многочлен $P_{2n-1}(t)$ является произведением двух многочленов $Q_{n,\alpha}(t)/(t-t_n)$ и $Q_{n,\alpha}(t)$. Многочлен Гегенбауэра $Q_{n,\alpha}(t)$ ортогонален всем многочленам меньшей степени с весом $(1-t^2)^\alpha$, так что, действительно, многочлен (2.3) удовлетворяет условию (0.1), (0.3).

Множество неотрицательности многочлена $P_{2n-1}(t)$ есть отрезок $[t_n, 1]$ и еще $n-1$ точка, поэтому

$$m(P_{2n-1}(t)) = \int_{t_n}^{1} (1-t^2)^\alpha dt.$$

Для последнего интеграла справедливы следующие соотношения:

$$m(P_{2n-1}(t)) = \int_{t_n}^{1} (1-t^2)^\alpha dt = \int_{t_n}^{1} \frac{1}{t} t(1-t^2)^\alpha dt \leqslant \frac{1}{t_n} \int_{t_n}^{1} t(1-t^2)^\alpha dt$$

$$= \frac{1}{t_n} \frac{1}{2(\alpha+1)} (1-t_n^2)^{\alpha+1} = \frac{1}{t_n} \frac{1}{2(\alpha+1)} (1-\cos^2\theta_{1,n})^{\alpha+1}$$

$$= \frac{1}{t_n} \frac{1}{2(\alpha+1)} (\sin\theta_{1,n})^{2(\alpha+1)} \leqslant \frac{1}{t_n} \frac{1}{2(\alpha+1)} \theta_{1,n}^{2(\alpha+1)}.$$

Отсюда следует, что неравенство (2.2) действительно имеет место. Лемма 4 доказана. □

3. Доказательство теоремы

Существенная часть доказательства теоремы содержится в леммах 2 и 4. В частности, первое (левое) неравенство из (0.4) доказано в лемме 2. В силу леммы 4 для величины $\mu_n(\alpha)$ имеет место неравенство (2.1). Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться, что величина

$$B(n,\alpha) = \frac{1}{x_{1,\overline{n}}} \frac{1}{2(\alpha+1)} \theta_{1,\overline{n}}^{2(\alpha+1)},$$

обладает свойством (0.5).

Воспользуемся известным фактом о поведении нулей многочленов Якоби, ортогональных на $(-1,1)$ с весом $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, и в частности нулей многочленов Гегенбауэра $\{Q_{n,\alpha}\}$, ортогональных на $(-1,1)$ с ультрасферическим весом $(1-t^2)^\alpha$. Напомним, что выше через $\{x_{\nu,n}\}_{\nu=1}^{n}$ при $n \geq 1$ были обозначены нули многочлена $Q_{n,\alpha}$ на интервале $(-1,1)$, занумерованные в убывающем порядке по индексу ν. Известно (см., например, [7, гл. 8, теорема 8.1.2]), что для величин $\theta_{\nu,n} = \arccos x_{\nu,n}$ при фиксированном ν имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_{\nu,n} = j_\nu, \tag{3.1}$$

где $j_\nu = j_\nu(\alpha)$ есть ν-й положительный нуль функции Бесселя J_α.

Запишем

$$B(n,\alpha)n^{2(\alpha+1)} = \frac{1}{x_{1,\overline{n}}} \frac{1}{2(\alpha+1)} (\overline{n}\theta_{1,\overline{n}})^{2(\alpha+1)} (n/\overline{n})^{2(\alpha+1)}. \tag{3.2}$$

В силу (3.1) имеем $\overline{n}\,\theta_{1,\overline{n}} \to j_1$, а потому $x_{1,\overline{n}} \to 1$, при $n \to +\infty$. Кроме того, как нетрудно понять, $n/\overline{n} \to 2,\ n \to \infty$. Поэтому из (3.2) следует свойство (0.5). Теорема доказана. □

Автор выражает благодарность В.В. Арестову за постановку задачи и всестороннюю поддержку при подготовке данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г.** Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: дис. … канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987. 109 с.
2. **Арестов В.В., Раевская В.Ю.** Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 332–344.
3. **Тихановцева К.С.** О наименьшей мере множества неотрицательности алгебраического многочлена с нулевым взвешенным средним значением на отрезке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 300–311.
4. **Кузнецов С.В., Тихановцева К.С.** Множество неотрицательности наименьшей меры многочленов с нулевым взвешенным средним значением на отрезке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 211–223.

5. **Дейкалова М.В.** Об одной экстремальной задаче для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на многомерной сфере // Изв. Урал. гос. ун-та. Т. 44, № 9. С. 42–54. (Математика и механика.)
6. **Даугавет И.К.** Введение в классическую теорию приближения функций: учеб. пособие. СПб., 2011. 232 с.
7. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

Тихановцева Кристина Сергеевна
Поступила 01.07.2013
математик
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: kristina-tih@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.911.5

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

И. А. Финогенко

Для неавтономных функционально-дифференциальных включений вводится понятие предельных функционально-дифференциальных включений, изучаются их свойства, исследуются свойства типа инвариантности ω-предельных множеств решений и устанавливается аналог принципа инвариантности Ла-Салля с использованием функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной.

Ключевые слова: предельное функционально-дифференциальное включение, неавтономная система, квазиинвариантное множество, функционал Ляпунова, принцип инвариантности.

I. A. Finogenko. The invariance principle for nonautonomous functional differential inclusions.

For nonautonomous functional differential inclusions, the notion of limiting functional differential inclusions is introduced, their properties are studied, invariance type properties of ω-limiting sets of solutions are investigated, and an analog of the LaSalle invariance principle with the use of Lyapunov functionals with constant-sign derivative is established.

Keywords: limiting functional differential inclusion, nonautonomous system, quasi-invariant set, Lyapunov functional, invariance principle.

1. Введение

В известных теоремах Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [1] об асимптотической устойчивости автономных систем дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ были использованы функции Ляпунова со знакопостоянной производной в силу системы. При этом требовался дополнительный анализ множества нулей производной функции Ляпунова на наличие в нем целых траекторий системы. Позднее были установлены различные модификации теорем Барбашина — Красовского, основанные на некотором легко распознаваемом свойстве инвариантности ω-предельных множеств. Выводы, которые можно сделать лишь из предположения знакопостоянства производной функции Ляпунова, аккумулированы в теореме Ла-Салля, известной как принцип инвариантности (см. [2, с. 190]), согласно которому ω-предельное множество решения автономного дифференциального уравнения принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству из множества нулей производной функции Ляпунова в силу рассматриваемого уравнения.

Для неавтономных уравнений $\dot{x} = f(t,x)$ ω-предельные множества не обладают свойством полуинвариантности, а множество нулей производной функции Ляпунова зависит не только от фазовой переменной. Попытки преодолеть эти трудности привели к понятиям сдвигов $f^a(t,x) = f(t+a,x)$ отображений $f(t,x)$ и так называемых предельных уравнений, относительно которых ω-предельные множества решений исходных уравнений обладают свойствами типа инвариантности. Такая теория, основанная на представлении решений неавтономных дифференциальных уравнений в виде динамических систем, заложена в [3] и получила дальнейшее развитие в [4–7]. В настоящее время метод предельных уравнений развивается в работах

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 13-01-00287), Программы фундаментальных исследований № 17 Президиума РАН, СО РАН (междисциплинарный проект № 80) и ФЦП Министерства образования и науки РФ (проект 2012-1.2.1-12-000-1001-011).

многих авторов и позволяет изучать асимптотическое поведение решений различных классов неавтономных систем. Этим вопросам применительно к неавтономным функционально-дифференциальным уравнениям с использованием функционалов Ляпунова со знакопостоянными производными посвящена монография [8] и обзорная статья [9]. В данной работе рассматриваются неавтономные функционально-дифференциальные включения.

2. Предельные многозначные отображения

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из R^n обозначается $\rho(B,A) = \sup_{b\in B} d(b,A)$, где $d(b,A) = \inf_{a\in A}\|b-a\|$. Через $A^\epsilon = \{x : d(x,A) < \epsilon\}$ обозначается ϵ-окрестность множества A и через $\overline{A}$ — замыкание множества A. Очевидно, что $\rho(B,A) < \epsilon \Leftrightarrow B \subset A^\epsilon$, и значение $\rho(B,A)$ не изменится, если множество A или B заменить на его замыкание.

Ниже мы приводим некоторые определения и факты теории многозначных отображений (см. [10–12]), которые используются в дальнейшем.

Пусть $comp\,R^n$ ($conv\,R^n$) — совокупность всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств из R^n, X — метрическое пространство с метрикой $\varrho(\cdot,\cdot)$. Отображение $G : X \to comp\,R^n$ будем называть *полунепрерывным сверху* (соответственно, *полунепрерывным снизу*) в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x,x_0) < \delta$, выполняется $G(x) \subset (G(x_0))^\epsilon$ (соответственно, $G(x_0 \subset G(x))^\epsilon$).

Полунепрерывность сверху (соответственно, полунепрерывность снизу) отображения $G(x)$ означает, что $\lim_{x\to x_0} \rho(G(x), G(x_0)) = 0$ (соответственно, $\lim_{x\to x_0} \rho(G(x_0), G(x)) = 0$).

Отображение $G(x)$ называется *непрерывным* в точке x_0, если оно одновременно полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу в этой точке.

Метрика Хаусдорфа в пространстве $comp\,R^n$ определяется равенством (см. [10, с. 23]): $dist\,(A,B) = \max\{\rho(B,A),\, \rho(A,B)\}$. Непрерывность отображений со значениями в $comp\,R^n$ с метрикой Хаусдорфа понимается в обычном для метрических пространств смысле и совпадает с приведенным выше определением непрерывности.

Для ограниченных множеств $A \subset R^n$ справедливы равенства (см. [13, с. 50])

$$\overline{co}\,A = co\,\overline{A},\ (co\,A)^\epsilon = co\,(A^\epsilon), \tag{2.1}$$

где символ co (соответственно, $\overline{co}$) обозначает выпуклую (соответственно, выпуклую замкнутую) оболочку множества. Отметим также неравенства

$$\rho(co\,A, co\,B) \le \rho(A,B),\ dist\,(co\,A, co\,B) \le dist\,(A,B), \tag{2.2}$$

справедливые для любых множеств $A, B \subset comp\,R^n$, из которых вытекает, что если отображение $G : X \to comp\,R^n$ полунепрерывно сверху, полунепрерывно снизу или непрерывно, то соответствующими свойствами обладает и отображение $co\,G : X \to conv\,R^n$, $(co\,G)(x) = co\,G(x)$.

Скажем, что точка p принадлежит *нижнему пределу* $Li\,A_n$ последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots \in comp\,R^n$, если любая окрестность точки p пересекается со всеми множествами A_n, начиная с некоторого номера. Точка p принадлежит *верхнему пределу* $Ls\,A_n$ последовательности $A_1, A_2, \ldots$, если любая окрестность точки p пересекается с бесконечным числом множеств A_n. Справедливы утверждения (см. [10, с. 343–347])

$$p \in Li\,A_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(p,A_n) = 0;\ p \in Ls\,A_n \Leftrightarrow \lim \inf_{n\to+\infty} d(p,A_n) = 0 \tag{2.3}$$

и равенства

$$\overline{Li\,A_n} = Li\,A_n = Li\,\overline{A}_n,\ \overline{Ls\,A_n} = Ls\,A_n = Ls\,\overline{A}_n. \tag{2.4}$$

Последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots$ называется *сходящейся* к множеству A: $A = \mathrm{Lim}_{n\to+\infty} A_n$, если $A = Li\,A_n = Ls\,A_n$. Сходимость ограниченной последовательности множеств в пространстве $comp\, R^n$ в смысле метрики Хаусдорфа совпадает со сходимостью в смысле операции Lim (см. [11, с. 56]).

Пусть $J = [a, b]$ — отрезок числовой прямой R^1 с мерой Лебега μ. Отображение $H : J \to comp\, R^n$ *измеримо*, если для него выполняется свойство Лузина (см. [12, с. 62–65]). Измеримое многозначное отображение имеет измеримый селектор: существует измеримая функция $h :\to R^n$, такая, что $h(t) \in H(t)$ для всех $t \in J$. Полунепрерывное сверху и полунепрерывное снизу многозначные отображения со значениями в $comp\, R^n$ являются измеримыми. Многозначное отображение $H : R^1 \to comp\, R^n$ называется измеримым, если его сужение на любой отрезок J измеримо.

Через C_τ обозначается пространство всех непрерывных функций $\phi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$, $\tau > 0$, и со значениями в R^n, снабженное sup-нормой $\|\phi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau\le\theta\le 0} \|\phi(\theta)\|$. Для любой непрерывной функции $x : R^1 \to R^n$ определим функцию $x_t(\cdot) \in C_\tau$ равенством $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \le \theta \le 0$.

Для отображения $F : R^1 \times C_\tau \to conv\, R^n$ через $F^a(t, \phi(\cdot)) = F(t+a, \phi(\cdot))$ обозначается сдвиг многозначного отображения $F(t, \phi(\cdot))$ на величину $a > 0$. Введем в рассмотрение два вида многозначных отображений, порождаемых сдвигами, которые будем называть предельными для многозначного отображения F:

$$F^*(t, \phi(\cdot)) = \cap_{b\ge 0} \overline{co} \cup_{a\ge b} F(t + a, \phi(\cdot)), \tag{2.5}$$

$$F'(t, \phi(\cdot)) = \cap_{n\ge 1} \overline{co} \cup_{k\ge n} F(t + t_k, \phi(\cdot)), \tag{2.6}$$

где $t_n \to +\infty$ — произвольная последовательность (одна и та же для любых $(t, \phi(\cdot))$).

Лемма 1. *Пусть $t \to F(t, \phi(\cdot))$ — ограниченное при каждом фиксированном $\phi(\cdot)$ многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Для любых фиксированных $(t, \phi(\cdot))$ множества $F^*(t, \phi(\cdot))$ и $F'(t, \phi(\cdot))$ непустые, выпуклые и компактные, и справедливы равенства*

$$\lim_{b\to+\infty} dist\big(\overline{co} \cup_{a\ge b} F(t + a, \phi(\cdot)), F^*(t, \phi(\cdot))\big) = 0, \tag{2.7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} dist\big(\overline{co} \cup_{k\ge n} F(t + t_k, \phi(\cdot)), F'(t, \phi(\cdot))\big) = 0. \tag{2.8}$$

2. *Для любой функции $\phi(\cdot)$ множество $F^*(t, \phi(\cdot))$ не зависит от t: $F^*(t, \phi(\cdot)) = F^*(\phi(\cdot))$ для всех $t \in R^1$. $\big($В дальнейшем будем полагать, что $F^*(\phi(\cdot)) = F^*(0, \phi(\cdot))$.$\big)$*

3. *Для предельного относительно последовательности $t_n \to +\infty$ отображения выполняется $F'(t, \phi(\cdot)) \subset F^*(\phi(\cdot))$ для любых $(t, \phi(\cdot))$.*

4. *Если существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} dist\big(F(t, \phi(\cdot)), G(\phi(\cdot))\big) = 0, \tag{2.9}$$

то

$$F'(t, \phi(\cdot)) = F^*(\phi(\cdot)) = G(\phi(\cdot)) \tag{2.10}$$

для любого предельного отображения F' и для любого t.

5. *Если существует предел*

$$\lim_{t_n\to+\infty} dist\big(F(t + t_n, \phi(\cdot)), G(t, \phi(\cdot))\big) = 0,$$

то $F'(t, \phi(\cdot)) = G(t, \phi(\cdot))$ для предельного отображения F', соответствующего последовательности $\{t_n\}$.

6. *Если отображение $F = f(t, \phi(\cdot))$ однозначно, то его предельные отображения в общем случае многозначны. При этом значение $f^*(\phi(\cdot))$ $\big($соответственно, $f'(t, \phi(\cdot))\big)$ будет однозначно тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{t\to+\infty} f(t, \phi(\cdot))$ $\big($соответственно, тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{t_n\to+\infty} f(t+t_n, \phi(\cdot))\big)$.*

7. *При любой фиксированной функции $\phi(\cdot)$ множество $F^*(t, , \phi(\cdot))$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций $h(t) \in F(t, \phi(\cdot))$ при условии, что $t \to +\infty$.*

8. *При любых фиксированных $(t, \phi(\cdot))$ множество $F'(t, \phi(\cdot))$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов $z_k \in F(t + t_k, \phi(\cdot))$, где $\{t_k\}$ — последовательность, которая определяет отображение $F'(t, \phi(\cdot))$.*

Доказательство. Зафиксируем $\phi(\cdot)$ и обозначим

$$H(t,b)(t) = \overline{co} \cup_{a\ge b} F(t+a, \phi(\cdot)), \quad H^n(t) = \overline{co} \cup_{k\ge n} F(t+t_k, \phi(\cdot)). \tag{2.11}$$

Из условий леммы вытекает, что множества $H(t,b)$, $H^n(t)$ компактны для любых t, b и $n = 1, 2, \ldots$.

Докажем утверждение 1. Пусть $b_k \to +\infty$ — произвольная последовательность. Тогда из нее можно выделить бесконечно большую монотонно возрастающую подпоследовательность, за которую, чтобы не вводить новых обозначений, примем саму эту последовательность. Обозначим $P(t) = \cap_{k\ge1} H(t, b_k)$. Так как последовательность непустых компактных множеств $H(t, b_k)$ монотонно убывает по включению (при любом фиксированном t), то из теоремы [10, с. 422] получаем, что множество $P(t)$ непустое, компактное, и справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} dist(H(t, b_k), P(t)) = 0. \tag{2.12}$$

Легко видеть, что множество $P(t)$ совпадает с $H^*(t) = \cap_{b>0} H(t, b)$ и как пересечение выпуклых множеств является выпуклым. Итак, из любой последовательности $b_k \to +\infty$ можно выделить подпоследовательность, для которой выполняется (2.12) с одним и тем же значением предела, равным $H^*(t)$. Тогда с учетом первого из равенств (2.11) и определения множества $F^*(t, \phi(\cdot))$ заключаем, что $H^*(t) = F^*(t, \phi(\cdot))$ и справедливо равенство (2.7).

Равенство (2.8) доказывается аналогично с использованием второго равенства (2.11).

Докажем утверждение 2. В силу (2.7) для любого $b' > 0$ выполняется

$$\lim_{b\to+\infty} dist(H(t, b+b'), H^*(t)) = 0.$$

С другой стороны для любых b и b' справедливо равенство $H(t, b+b') = H(t+b', b)$ и поэтому

$$\lim_{b\to+\infty} dist(H(t, b+b'), H^*(t+b')) = 0.$$

Следовательно, $H^*(t) = H^*(t+b')$, и теперь легко видеть, что $H^*(t) = H^*(t') = F^*(\phi(\cdot))$ для любых t, $t' \in R^1$.

Утверждение 3 вытекает непосредственно из определений предельных отображений $F^*(\phi(\cdot))$ и $F'(t, \phi(\cdot))$.

Докажем утверждение 4. Из (2.9) вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется число B такое, что

$$F(t, \phi(\cdot)) \subset (G(\phi(\cdot)))^\epsilon, \; G(\phi(\cdot)) \subset (F(t, \phi(\cdot)))^\epsilon$$

для всех $t > B$. Отсюда получаем

$$\overline{co} \cup_{t>b} F(t, \phi(\cdot)) \subset \overline{(G(\phi(\cdot)))^\epsilon}, \; G(\phi(\cdot)) \subset \overline{co} \cup_{t>b} (F(t, \phi(\cdot)))^\epsilon$$

для любого $b > B$. Следовательно,

$$\lim_{b\to+\infty} dist\big(\overline{co} \cup_{t\ge b} F(t, \phi(\cdot)), G(\phi(\cdot))\big) = 0$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} dist\big(\overline{co}\cup_{k\geq n} F(t+t_k,\phi(\cdot)), G(\phi(\cdot))\big)=0$$

для любой последовательности $t_k\to+\infty$ и любого t. Теперь равенство (2.10) вытекает из (2.7) и (2.8).

Утверждение 5 доказывается аналогично утверждению 4.

Утверждение 6 вытекает из утверждений 1, 4 и 5.

Докажем утверждение 7. Обозначим $\Phi(t)=F(t,\phi(\cdot))$ и $\Phi^*=\cap_{b\geq 0}\overline{co}\cup_{t\geq b}\Phi(t)$. Так как $\Phi^*=F^*(\phi(\cdot))$, утверждение 7 будет доказано, если мы установим, что множество Φ^* представляет собой выпуклую замкнутую оболочку пределов всех сходящихся последовательностей $\{h(t_n)\}$ таких, что $h(t_n)\in\Phi(t_n)$, $n=1,2,\ldots$.

Обозначим $P(b)=\cup_{t\geq b}\Phi(t)$ и $P^*=\cap_{b\geq 0}\overline{P(b)}$. Рассуждая так же, как при доказательстве утверждения 1, убеждаемся, что P^* — непустое компактное множество и

$$\lim_{b\to+\infty} dist(\overline{P(b)},P^*)=0. \tag{2.13}$$

Из соотношений (2.1), (2.2), равенств (2.13) и (2.7) вытекает, что $co\,P^*=\Phi^*$. Таким образом, нам осталось доказать, что P^* — множество пределов всех последовательностей со свойством $h(t_n)\in\Phi(t_n)$.

Пусть $b_n\to+\infty$ — произвольная последовательность. Из равенства (2.13) и свойств (2.4) операций, Li и Ls заключаем, что

$$Li\,P(b_n)=Ls\,P(b_n)=P^*. \tag{2.14}$$

Возьмем произвольный элемент $p\in P^*$. Из (2.3) и (2.14) вытекает, что существует последовательность $p_n\in P(b_n)$, сходящаяся к p. Следовательно, найдется последовательность элементов $h(t_n)$, удовлетворяющих условию $h(t_n)\in\Phi(t_n)$ и таких, что $p_n=h(t_n)\to p$.

Обратно, пусть p — предел некоторой сходящейся последовательности со свойством $h(t_n)\in\Phi(t_n)$. Тогда, очевидно, $h(t_{k_n})\in P(b_n)$, если только $t_{k_n}\geq b_n$. Таким образом, p является пределом некоторой подпоследовательности из последовательности $\{h(t_n)\}$. Еще раз воспользовавшись соотношениями (2.3) и (2.14), заключаем, что $p\in P^*$.

Утверждение 8 доказывается аналогично.

Лемма доказана.

3. Предельные функционально-дифференциальные включения

Будем рассматривать функционально-дифференциальное включение

$$\dot x\in F(t,x_t(\cdot)),\quad x_{t_0}(\cdot)=\phi_0(\cdot), \tag{3.1}$$

где функция $\phi_0(\cdot)\in C_\tau$ задает начальное значение для задачи (3.1) в момент времени $t=t_0$.

Под *решением* задачи (3.1) понимается непрерывная функция $x:[t_0-\tau,T)\to R^n$, абсолютно непрерывная на любом отрезке $[t_0,t_1]$, $t_1<T$, такая, что выполняется начальное условие $x_{t_0}=\phi_0(\cdot)$ и ее производная $\dot x(t)$ удовлетворяет включению (3.1) для почти всех $t\in[t_0,T)$.

Сформулируем условия, которые используются при исследовании задачи (3.1).

A1. *Для каждых фиксированных $(t,\phi(\cdot))$ множество $F(t,\phi(\cdot))$ — непустое, выпуклое и компактное.*

A2. *При почти каждом фиксированном t многозначное отображение $\phi(\cdot)\to F(t,\phi(\cdot))$ полунепрерывно сверху.*

A3. *Для любой функции $\phi(\cdot)$ существует измеримый селектор многозначного отображения $t\to F(t,\phi(\cdot))$.*

A4. *Для любого ограниченного множества* $Q \subset C_\tau$ *существует константа* M *такая, что для любых* $(t, \phi(\cdot)) \in R^1 \times Q$ *и* $f \in F(t, \phi(\cdot))$ *выполняется неравенство* $\|f\| \leq M$.

При выполнении условий A1–A4 задача (3.1) для любой начальной функции имеет локальное решение (см., например, [14]). При этом любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0 - \tau, \omega)$ и любое ограниченное непродолжимое решение определено на промежутке $[t_0 - \tau, +\infty)$.

Функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F^*(\phi(\cdot)) \tag{3.2}$$

называется *предельным* для включения (3.1), и функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, \phi(\cdot)) \tag{3.3}$$

называется *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ для включения (3.1).

Предельные функционально-дифференциальные включения (3.2) и (3.3) будут изучаться при дополнительном условии

A5. *Для любых* $\phi(\cdot)$ *и* $\epsilon > 0$ *существуют числа* $\delta > 0$ *и* γ *такие, что*

$$F(t, \psi(\cdot)) \subset \bigl(F(t, \phi(\cdot))\bigr)^\epsilon \tag{3.4}$$

для всех $t > \gamma$ *и* $\|\psi(\cdot) - \phi(\cdot)\|_C < \delta$.

Отметим, что условие (3.4) означает, что $\lim_{t\to+\infty, \psi(\cdot)\to\phi(\cdot)} \rho\bigl(F(t, \psi(\cdot)), F(t, \phi(\cdot))\bigr) = 0$.

Лемма 2. *Если для многозначного отображения* F *выполняются условия* A1–A5, *то для предельных многозначных отображений* F^* *и* F' *выполняются условия* A1–A4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие A1 для отображений F^* и F' вытекает из утверждения 1 леммы 1.

Докажем выполнение условия A2 для многозначного отображения F^*. Для этого нужно доказать полунепрерывность сверху отображения $F^*(\phi(\cdot))$ в произвольной точке $\phi_0(\cdot)$. Пусть $\epsilon > 0$ произвольно, и пусть $\{\phi_i(\cdot)\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к $\phi_0(\cdot)$. Из условия A5 вытекает, что существуют число $\gamma = \gamma(\epsilon, \phi_0(\cdot)) > 0$ и номер $N = N(\epsilon, \phi_0(\cdot))$ такие, что $F(t, \phi_i(\cdot)) \subset (F(t, \phi_0(\cdot)))^{\epsilon/2}$ для любых $t > \gamma$ и $i \geq N$. Тогда с учетом (2.1) получаем

$$\overline{co} \cup_{a\geq b} F(a, \phi_i(\cdot)) \subset \bigl(\overline{co} \cup_{a\geq b} F(a, \phi_0(\cdot))\bigr)^\epsilon \tag{3.5}$$

для любых $b > \gamma$ и $i \geq N$. С учетом равенства (2.7) (при $t = 0$) и переходя в (3.5) к пределу в метрике Хаусдорфа при $b \to +\infty$ при каждом фиксированном $i \geq N$, получаем $F^*(\phi_i(\cdot)) \subset \overline{(F^*(\phi_0(\cdot)))^\epsilon}$. Из последнего соотношения получаем $\rho\bigl(F^*(\phi_i(\cdot)), F^*(\phi_0(\cdot))\bigr) \to 0$ при $i \to +\infty$, что в силу произвольности последовательности $\{\phi_i(\cdot)\}$ означает полунепрерывность сверху в точке $\phi_0(\cdot)$ многозначного отображения $F^*(\phi(\cdot))$.

Докажем A2 для предельного многозначного отображения $F'(t, \phi(\cdot))$, определенного последовательностью $\{t_k\}$. Для этого достаточно показать, что для любой фиксированной функции $\phi_0(\cdot)$ и произвольного $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\phi_0(\cdot), \epsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\rho\bigl(F'(t, \phi(\cdot)), F'(t, \phi_0(\cdot))\bigr) < \epsilon \tag{3.6}$$

для всех $t \in R^1$ и $\|\phi(\cdot) - \phi_0(\cdot)\| < \delta$.

Из условия A5 получаем, что для любых $(t, \phi_0(\cdot))$ и произвольного $\epsilon > 0$ существуют число $\delta = \delta(\phi_0(\cdot), \epsilon) > 0$ и номер $m = m(\phi_0(\cdot), t, \epsilon)$ такие, что

$$\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, \phi(\cdot)) \subset \bigl(\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, \phi_0(\cdot))\bigr)^\epsilon \tag{3.7}$$

для всех $n \geq m$ и $\|\phi(\cdot) - \phi_0(\cdot)\| < \delta$. Здесь мы учли также второе из равенств (2.1). Далее, с учетом равенства (2.8), перейдем в (3.7) к пределу в метрике Хаусдорфа при $n \to +\infty$ при каждых фиксированных $(t, \phi(\cdot))$. Тогда $F'(t, \phi(\cdot)) \subset \overline{(F'(t, \phi_0(\cdot)))^{\epsilon}}$, откуда вытекает (3.6). Это неравенство означает, что $F'(t, \phi(\cdot))$ полунепрерывно в точке $\phi_0(\cdot)$ по переменной $\phi(\cdot)$ равномерно относительно $t \in R^n$.

Условие A3 для отображения $F^*(\phi(\cdot))$ очевидно выполняется. Докажем его выполнение для отображения $F'(t, \phi(\cdot))$, которое определяется последовательностью $\{t_k\}$. Пусть $z(t) \in F(t, \phi(\cdot))$ — измеримое сечение отображения $t \to F(t, \phi(\cdot))$, существование которого вытекает из условия A3. Тогда, очевидно, $z(t+t_k) \in F(t+t_k, \phi(\cdot))$. Обозначим $Z(t) = \cap_{n\geq 1} \overline{co} \cup_{k\geq n} z(t+t_k)$. Тогда $Z(t)$ — измеримое на каждом отрезке $[\alpha, \beta]$ многозначное отображение (см. [12, с. 68]) и по построению выполняется включение $Z(t) \subset F'(t, \phi(\cdot))$. Измеримое многозначное отображение $Z(t)$ имеет измеримое сечение $y(t)$, которое, очевидно, и будет сечением многозначного отображения $t \to F'(t, \phi(\cdot))$.

Условие A4 для отображений F^* и F' вытекает из определений (2.5) и (2.6).

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. 1) В силу леммы 1 условие A1 для отображений F^* и F' вытекает лишь из ограниченности отображения $t \to F(t, \phi(\cdot))$ при каждой фиксированной функции $\phi(\cdot)$.

2) Условие A3 (соответственно, A4) для отображения $t \to F'(t, \phi(\cdot))$ вытекает из условия A3 (соответственно, из условия A4) для отображения F. Таким образом, условие A5 используется вместе с условием A2 только для доказательства полунепрерывности сверху предельных отображений.

3) Из доказательства видно, что в лемме 2 установлена равномерная относительно t полунепрерывность сверху предельного отображения $F'(t, \phi(\cdot))$ по переменной $\phi(\cdot)$ в каждой точке $\phi_0(\cdot)$.

4) Если в условиях A2 и A5 заменить свойство полунепрерывности сверху многозначного отображения $F(t, \phi(\cdot))$ по переменной $\phi(\cdot)$ на свойство полунепрерывности снизу, то отображение $F^*(\phi(\cdot))$ будет полунепрерывным снизу, а $F'(t, \phi(\cdot))$ — полунепрерывно снизу по переменной $\phi(\cdot)$ равномерно относительно t. Для однозначных отображений $\phi(\cdot) \to f(t, \phi(\cdot))$ свойства полунепрерывности сверху и полунепрерывности снизу совпадают со свойством непрерывности функции $f(t, \phi(\cdot))$ по переменной $\phi(\cdot)$. Таким образом, предельные (в общем случае многозначные) отображения $f^*(\phi(\cdot))$ и $f'(t, \phi(\cdot))$ для функции $f(t, \phi(\cdot))$ в рамках предположений леммы 2 будут непрерывными по переменной $\phi(\cdot)$.

5) Если в условии A3 существование измеримого сечения у отображения $t \to F(t, \phi(\cdot))$ для каждой фиксированной функции $\phi(\cdot)$ заменить на более сильное условие измеримости этого отображения, то любое предельное отображение $t \to F'(t, \phi(\cdot))$ будет измеримым. Действительно, это отображение получается из отображения $t \to F(t, \phi(\cdot))$ при помощи счетных операций объединения, пересечения и перехода к выпуклым замкнутым оболочкам и поэтому (см. [12, с. 68]) является измеримым.

Из лемм 1 и 2 вытекает

Теорема 1. *При выполнении условий* A1–A5 *предельные дифференциальные включения* (3.3), (3.2) *для любых начальных данных* $(t_0, \phi_0(\cdot))$ *имеют локальные решения, любое их ограниченное непродолжимое решение определено на правом максимальном промежутке существования* $[t_0 - \tau, +\infty)$*, и любое решение включения* (3.3) *является одновременно решением включения* (3.2).

Всюду в дальнейшем мы полагаем, что все ограниченные решения включений (3.1)–(3.3) определены на правых максимальных промежутках существования.

4. Квазиинвариантность ω-предельных множеств

Для полноты изложения сформулируем следующее утверждение из [15, теорема 4.1].

Утверждение 1. *Пусть последовательность $\{y^k(\cdot)\}$ абсолютно непрерывных функций $y^k : I \to R^n$, $I = [a, b]$, удовлетворяет следующим условиям:*

1. $y^k(t) \to y(t)$ при любом фиксированном $t \in I$;

2. $\|\dot{y}^k(t)\| \leq g(t)$ для п. в. $t \in I$, $k = 1, 2, \dots$, где $g : I \to R^1$ — суммируемая по Лебегу функция.

Тогда $y(t)$ — абсолютно непрерывная функция такая, что

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} \dot{y}^k(t) \tag{4.1}$$

для п. в. $t \in I$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия A1–A5 и $x(t)$ — ограниченное решение включения (3.1). Обозначим $y^k(t) = x(t + t_k)$. Тогда:*

1. Для любой последовательности $t_k \to +\infty$, $t_k \geq t_0$, $k = 1, 2, \dots$, и для любого числа $T > 0$ из последовательности функций $y^k(t)$, $t \in I = [-\tau, T]$, можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

2. Предел $y(t)$ любой равномерно сходящейся на отрезке I последовательности функций $y^k(t)$ является решением включения (3.3) с предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ многозначным отображением $F'(t, \phi(\cdot))$ в правой части, и выполняется начальное условие $y_0(\cdot) = \lim_{k\to+\infty} x_{t_k}(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как $x(t)$ — ограниченное решение, то существование равномерно сходящейся на любом отрезке I подпоследовательности у последовательности функций $y^k(t)$ следует из условия A4 и теоремы Арцела.

2. Пусть последовательность функций $y^k(t)$ равномерно на отрезке I сходится к функции $y(t)$. Так как $y^k_t(\cdot) = x_{t+t_k}(\cdot)$, то $\dot{y}^k(t) \in F(t + t_k, y^k_t(\cdot))$ для почти всех $t \in [0, T]$. Тогда в соответствии с формулой (4.1) получаем

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n\geq 1}\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, y^k_t(\cdot)) \tag{4.2}$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

Пусть $\epsilon > 0$ и $t \in [0, T]$ произвольны. Из условия A5 и сходимости последовательности функций $y_k(t)$ к $y(t)$ так же, как при доказательстве леммы 2, вытекает, что найдется номер $n_{\epsilon,t}$ такой, что для любого $n \geq n_{\epsilon,t}$ выполняется

$$\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, y^k_t(\cdot)) \subset \left(\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, y_t(\cdot))\right)^\epsilon.$$

Тогда из (4.2) получаем $\dot{y}(t) \in (\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, y_t(\cdot)))^\epsilon$ для почти каждого $t \in [0, T]$ и для любого номера $n \geq n_{\epsilon,t}$. Так как $\overline{co} \cup_{k\geq n} F(t + t_k, y_t(\cdot)) \to F'(t, y_t(\cdot))$ при $n \to +\infty$ и в силу произвольности $\epsilon > 0$, получаем $\dot{y}(t) \in F'(t, y_t(\cdot))$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Теорема доказана.

Будем говорить, что множество $D \subset C_\tau$ *полуинвариантно относительно включения* (3.1), если для любой функции $\psi(\cdot) \in D$ существует решение $y(t)$ включения (3.2) такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Множество $D \subset C_\tau$ *квазиинвариантно относительно включения* (3.1), если для любой функции $\psi(\cdot) \in D$ существует решение $y(t)$ включения (3.3) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t, \phi(\cdot))$ в правой части, такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Функцию $\psi(\cdot)$ назовем *ω-предельной* для решения $x(t)$ включения (3.1), определенного на промежутке $[t_0 - \tau, +\infty)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x_{t_n}(\cdot) \to \psi(\cdot)$. Множество всех ω-предельных функций обозначим $\Lambda^+(x)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия А1–А4. Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (3.1) множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и $d(x_t(\cdot), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$, где d означает расстояние от точки до множества в пространстве C_τ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как решение $x(t)$ ограничено, то из условия А4 вытекает, что множество $\cup_{t\geq t_0} x_t(\cdot) \subset C_\tau$ предкомпактно. Тогда все упомянутые в формулировке теоремы свойства множества $\Lambda^+(x)$, кроме определенного выше свойства квазинвариантности, вытекают из представления

$$\Lambda^+(x) = \cap_{\tau\geq t_0} \overline{\cup_{t\geq\tau} x_t(\cdot)}$$

(см., например, [16]).

Докажем квазиинвариантность множества $\Lambda^+(x)$. Пусть $\psi(\cdot) \in \Lambda^+(x)$, $x_{t_k}(\cdot) \to \psi(\cdot)$ для последовательности $t_k \to +\infty$ и $F'(t, \phi(\cdot))$ — соответствующее ей предельное многозначное отображение. Последовательность функций $y^k(t) = x(t+t_k)$, определенных на отрезке $I_1 = [-\tau, T]$, очевидно, ограничена, а из условия А4 вытекает, что она равностепенно непрерывна. Тогда в соответствии с теоремой Арцела из этой последовательности можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{y^{k_{1,s}}(\cdot)\}$, предел $z^1(t)$ которой в силу теоремы 2 является решением для включения (3.3). При этом очевидно, что $z^1_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $z^1_t(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \in I_1$.

Для отрезка $I_2 = [-\tau, 2T]$ из последовательности $\{y^{k_{1,s}}(\cdot)\}$ также можно выделить сходящуюся к функции $z^2(t)$ подпоследовательность $\{y^{k_{2,s}}(\cdot)\}$, которая в соответствии с теоремой 2 является решением (3.3) с тем же самым предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ отображением $F'(t,x)$ в правой части. При этом $z^2_t(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \in I_2$ и $z^2(t) = z^1(t)$ для всех $t \in I_1$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность функций $z^m(t)$, определенных на отрезках $I_m = [-\tau, mT]$, которые являются решениями включения (3.3) с одним и тем же отображением $F'(t,x)$ в правой части и для которых выполняются $z^m_t(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ и $z^{m+1}(t) = z^m(t)$ для всех $t \in I_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда функция $z(t) = z^m(t)$, $t \in I_m$, определена для любого $t \in [-\tau, +\infty)$, является решением включения (3.3) и для нее выполняются $z_0(\cdot) = \psi(\cdot)$, $z_t(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. В силу утверждения 3 леммы 1 свойство квазинвариантности влечет свойство полуинвариантности для любого множества D, в том числе и для множества $\Lambda^+(x)$. Однако для произвольного множества D эти свойства имеют смысл только при условиях существования и продолжимости решений включений (3.2) и (3.3) для любых начальных данных, которые обеспечивает теорема 1.

5. Принцип инвариантности

В соответствии с [17] введем следующие определения.

Для произвольной функции $\psi(\cdot) \in C_\tau$ и числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\psi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Psi(\cdot)$ функции $\psi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau, \Delta]$.

Будем говорить, что функционал $W : C_\tau \to R$ имеет *инвариантную производную* $\partial_\psi W$ в точке $\psi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ функция $Y_\Psi(\xi) = W(\Psi_\xi(\cdot))$, где $\xi \in [0, \Delta)$, имеет в нуле конечную правую производную, инвариантную относительно функций $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ (т.е. значение правой производной в нуле одно и то же для всех $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$).

Функционал $V : R^1 \times R^n \times C_\tau \to R$ называется *инвариантно дифференцируемым* в точке $p = (t, x, \psi(\cdot)) \in R^1 \times R^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$, $\partial_t V$ и для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ выполняется равенство

$$V(t+\eta,x+z,\Psi_\xi(\cdot))-V(t,x,\psi(\cdot))$$

$$=\partial_t V[p]\cdot\eta+\langle\nabla_x V[p],z\rangle+\partial_\psi V[p]\cdot\xi+o\left(\sqrt{\eta^2+\|z\|^2+\xi^2}\right) \tag{5.1}$$

при $\eta>0$, $z\in R^n$, $\xi\in[0,\Delta)$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Psi(\cdot)\in E_\Delta(\psi(\cdot))$. (Здесь $\nabla_x V$ — градиент функционала V по переменной x, $\partial_t V$ — частная производная по t, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения).

З а м е ч а н и е 3. Для того чтобы функционал V был инвариантно дифференцируемым в точке $p=(t,x,\psi(\cdot))$, необходимо, чтобы он имел в этой точке частные производные $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$, $\partial_t V$, и достаточно, чтобы они были инвариантно непрерывны в точке p (см. [17, с. 44]).

Верхнюю производную $\dot V^+(t,\phi(\cdot))$ функционала $V(t,x,\phi(\cdot))$ в точке $(t,\phi(0),\phi(\cdot))$ в силу дифференциального включения (3.1) определим следующим равенством:

$$\dot V^+(t,\phi(\cdot))=\sup_{y\in F(t,\phi(\cdot))}\left(\langle\nabla_x V,y\rangle+\partial_\phi V+\partial_t V\right)\Big|_{x=\phi(0)}.$$

Если функционал $V(t,x,\phi(\cdot))$ инвариантно дифференцируем, то в силу леммы 1 из [18] для любого решения $x(t)$ включения (3.1) выполняется неравенство

$$D^+v(t)\le\dot V^+(t,x_t(\cdot)), \tag{5.2}$$

где $D^+v(t)$ — верхнее правое производное число Дини функции $v(t)=V(t,x(t),x_t(\cdot))$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия А1–А5, $x(t)$ — ограниченное решение включения (3.1) с ω-предельным множеством $\Lambda^+(x)$. Предположим, что существует непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал $V(t,x,\phi(\cdot))$, ограниченный снизу на каждом множестве вида $R^1\times K[0]\times K$, где $K\subset C_\tau$ — компактное множество, $K[0]=\{\phi[0]:\phi(\cdot)\in K\}$, такой, что для всех $\phi(\cdot)$ и почти всех t выполняется неравенство*

$$\dot V^+(t,\phi(\cdot))\le -w(t,\phi(\cdot)), \tag{5.3}$$

где $w(t,\phi(\cdot))\ge 0$ — измеримый по t, непрерывный по $\phi(\cdot)$, ограниченный на каждом множестве вида $R^1\times K$ функционал такой, что для любой функции $\phi(\cdot)$ выполняется условие

$$\lim_{t\to+\infty,\phi'(\cdot)\to\phi(\cdot)}\|w(t,\phi'(\cdot))-w(t,\phi(\cdot)\|=0. \tag{5.4}$$

Тогда для каждой функции $\psi(\cdot)\in\Lambda^+(x)$ существуют предельные отображения w', F' (соответствующие одной и той же последовательности $t_n\to+\infty$) и решение $y(\cdot)$ включения (3.3) с начальной функцией $y_0(\cdot)=\psi(\cdot)$ такое, что

$$y_t(\cdot)\in\Lambda^+(x) \tag{5.5}$$

для всех $t\ge 0$ и

$$w'(t,y_t(\cdot))=0 \tag{5.6}$$

для п.в. всех $t\ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что условие (5.4) означает, что для функции w выполняется условие А5. Поэтому из лемм 1, 2 с учетом замечания 1 вытекает, что для любой последовательности $t_k\to+\infty$ определено (вообще говоря, многозначное) измеримое по t и непрерывное по $\phi(\cdot)$ предельное отображение $w'(t,\phi(\cdot))$.

Пусть $x(t)$ — ограниченное решение включения. Тогда $K=\overline{\cup_{t\ge t_0}x_t(\cdot)}$ — компактное множество в пространстве C_τ, и для произвольной функции $\psi(\cdot)\in\Lambda^+(x)$ существует последовательность $t_k\to+\infty$ такая, что $x_{t_k}(\cdot)\to\psi(\cdot)$. В силу неравенств (5.2) и (5.3) функция

$t \to V(t, x(t), x_t(\cdot))$ является невозрастающей и по предположению теоремы ограничена снизу на множестве $R^1 \times K[0] \times K$. Поэтому существует

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, x(t), x_t(\cdot)) = c. \tag{5.7}$$

Обозначим $y^k(t) = x(t + t_k)$, $t \in [-\tau, T]$, $T > 0$. Из сделанных предположений и теоремы Арцела вытекает существование равномерно сходящейся подпоследовательности у последовательности $\{y^k(\cdot)\}$. Не ограничивая общности рассуждений, полагаем, что сама эта последовательность сходится к некоторой функции $y(t)$.

Из условий (5.3) и (5.2) имеем

$$V(t_k + t, y^k(t), y^k_t(\cdot)) - V(t_k, y^k(0), y^k_0(\cdot)) \le -\int_0^t w(t_k + t, y^k_t(\cdot))dt \le 0 \tag{5.8}$$

для любого $t \in [0, T]$. Тогда из (5.7) получаем, что

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^T w(t_k + t, y^k_t(\cdot))dt = 0. \tag{5.9}$$

Из неравенства (5.4) вытекает

$$\lim_{k \to +\infty} |w(t + t_k, y^k_t(\cdot)) - w(t + t_k, y_t(\cdot))| = 0 \tag{5.10}$$

для любого $t \in [0, T]$. Так как

$$\left| \int_0^T w(t + t_k, y^k_t(\cdot))dt - \int_0^T w(t + t_k, y_t(\cdot)dt \right| \le \int_0^T \left| w(t + t_k, y^k_t(\cdot)) - w(t + t_k, y_t(\cdot)) \right| dt,$$

то из (5.9) и (5.10) и из теоремы Лебега об ограниченной сходимости получаем

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^T w(t + t_k, y_t(\cdot))dt = 0. \tag{5.11}$$

Поскольку $w(t, \phi(\cdot)) \ge 0$, то условие (5.11) означает сходимость последовательности функций $w_k(t) = w(t + t_k, y_t(\cdot))$ к нулю в пространстве $L_1([0, T], R^1)$, и поэтому из нее можно выделить подпоследовательность функций $w_{k_i}(t)$, сходящейся к нулю почти всюду на отрезке $[0, T]$. Тогда из утверждений 5 и 6 леммы 1 следует, что

$$\lim_{k_i \to +\infty} w_{k_i}(t) = w'(t, y_t(\cdot)) \tag{5.12}$$

для п.в. $t \in [0, T]$, где $w'(t, \phi(\cdot))$ — предельная относительно последовательности $\{t_{k_i}\}$ функция. Так как подпоследовательность $\{y^{k_i}(\cdot)\}$ также сходится к функции $y(t)$, $t \in [-\tau, T]$, то в силу теоремы 2 $y(t)$ является решением предельного относительно последовательности $\{t_{k_i}\}$ включения (3.3) и, очевидно,

$$y_0(\cdot) = \psi(\cdot),\ y_t(\cdot) \in \Lambda^+(x), \quad t \in [0, T]. \tag{5.13}$$

Воспользовавшись леммой Цорна, нетрудно убедиться, что существует непродолжимое решение $y(t)$ включения (3.3), определенное на промежутке $[-\tau, \omega)$, удовлетворяющее (5.12) и (5.13) на промежутке $[0, \omega)$. Если $\omega < +\infty$, то $y(t)$ может быть продолжено на отрезок $[-\tau, \omega]$, а затем — на некоторый промежуток $[-\tau, \omega')$, $\omega < \omega'$. Следовательно, $\omega = +\infty$.

Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть $w(t,\phi(\cdot)) \geq 0$ — измеримое по $t \in R^1$, непрерывное по $\phi(\cdot)$ и ограниченное при каждой фиксированной функции $\phi(\cdot)$ отображение такое, что выполняется условие* (5.4). *Тогда для предельного отображения w^*, определенного равенством* (2.5) (*применительно к функции $w(t,\phi(\cdot))$*), *выполняется*

$$w^*(\phi(\cdot)) = [\alpha, \beta], \tag{5.14}$$

где

$$\alpha = \lim_{b\to+\infty} \inf_{t\in(b,+\infty)} w(t,\phi(\cdot)), \quad \beta = \lim_{b\to+\infty} \sup_{t\in(b,+\infty)} w(t,\phi(\cdot)), \tag{5.15}$$

и функции $\alpha = \alpha(\phi(\cdot))$ и $\beta = \beta(\phi(\cdot))$ непрерывны.

Доказательство. Представление w^* в виде (5.14) вытекает из того, что на числовой прямой замкнутые отрезки и только они являются выпуклыми, замкнутыми множествами. Равенства (5.15) вытекают из утверждения 7 леммы 1. Далее, с учетом замечания 1 из леммы 2 следует непрерывность отображения $w^*(\phi(\cdot))$ в метрике Хаусдорфа, что равносильно непрерывности функций $\alpha(\phi(\cdot))$ и $\beta(\phi(\cdot))$.

Лемма доказана.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *для любого ограниченного решения $x(\cdot)$ включения* (3.1) *множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему квазинвариантному подмножеству множества*

$$E_w = \{\phi(\cdot) : \alpha(\phi(\cdot)) = 0\}, \tag{5.16}$$

где функция $\alpha(\phi(\cdot))$ определена в первом из равенств (5.15).

Доказательство. Пусть $\phi(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ — произвольная функция. Из теоремы 4 вытекает, что существует решение $y(t)$ предельного включения (3.3) с начальным условием $y_0(\cdot) = \phi(\cdot)$, такое, что выполняются соотношения (5.6) и (5.5). Тогда в силу равенства (5.14) и включения $w(t, y_t(\cdot)) \in w^*(y_t(\cdot))$ получаем, что $\alpha(y_t(\cdot)) = 0$ для п. в. $t \in [0,T]$. В силу леммы 3 функция $\alpha(y_t(\cdot))$ непрерывна, и тогда $\alpha(\phi(\cdot)) = 0$, откуда следует, что $\Lambda^+(x)$ принадлежит множеству (5.16).

Теорема доказана.

Отметим, что так как $w(t,\psi(\cdot)) \geq 0$, то формуле (5.16) можно придать другой вид, а именно:

$$E_w = \bigl\{\phi(\cdot) : \exists t_k \to +\infty,\ \lim_{k\to+\infty} w(t_k,\phi(\cdot)) = 0\bigr\}.$$

Пусть функционал $V = V(x,\phi(\cdot))$ не зависит от t. Введем обозначения

$$\dot V^*(\phi(\cdot)) = \sup_{y\in F^*(\phi(\cdot))} \bigl(\langle \nabla_x V(x,\phi(\cdot)), y\rangle + \partial_\phi V(x,\phi(\cdot))\bigr)\big|_{x=\phi(0)},$$

$$\dot V'(t,\phi(\cdot)) = \sup_{y\in F'(t,\phi(\cdot))} \bigl(\langle \nabla_x V(x,\phi(\cdot)), y\rangle + \partial_\phi V(x,\phi(\cdot))\bigr)\big|_{x=\phi(0)}.$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* A1–A5, *$x(t)$ — ограниченное решение включения* (3.1) *с ω-предельным множеством $\Lambda^+(x)$. Предположим, что существует непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал $V(x,\phi(\cdot))$ такой, что для всех $\phi(\cdot)$ и почти всех t выполняется неравенство*

$$\dot V^+(t,\phi(\cdot)) = \sup_{y\in F(t,\phi(\cdot))} (\langle \nabla_x V(x,\phi(\cdot)), y\rangle + \partial_\phi V(x,\phi(\cdot)))\big|_{x=\phi(0)} \leq 0. \tag{5.17}$$

Тогда:

1. *Для любой функции* $\psi(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ *существуют предельное относительно некоторой последовательности* $\{t_k\}$ *отображение* $F'(t, \phi(\cdot))$ *и решение* $y(t)$ *включения* (3.3) *с начальной функцией* $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$, *такое, что выполняется*

$$\dot{V}'(t, y_t(\cdot)) = 0,\ \dot{V}^*(y_t(\cdot)) = 0 \tag{5.18}$$

для п. в. $t \geq 0$.

2. *Множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества*

$$E(\dot{V}^* = 0) \stackrel{\Delta}{=} \{\psi(\cdot) : \dot{V}^*(\psi(\cdot)) = 0\}. \tag{5.19}$$

Доказательство. Из (5.17) и (5.2) вытекает, что функция $v(t) = V(x(t), x_t(\cdot))$ монотонно не убывает. Так как решение $x(t)$ ограничено, то множество $K[0] \times K$, где $K = \overline{\{\cup x_t(\cdot) : t \geq t_0\}}$, компактно, и в силу непрерывности функция $V(x, \phi(\cdot))$ ограничена на нем. Следовательно, существует предел $\lim_{t\to+\infty} v(t) = c$ и, очевидно,

$$\Lambda^+(x) \subset \{\psi(\cdot) : V(\psi(0), \psi(\cdot)) = c\}.$$

1. Пусть $\psi(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ — произвольная функция. В силу теоремы 4 существуют предельное относительно некоторой последовательности $\{t_k\}$ отображение $F'(t, \phi(\cdot))$ и решение $y(t)$ включения (3.3) с начальной функцией $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ такое, что выполняется $y_t(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$. Тогда

$$\frac{dV(y(t), y_t(\cdot))}{dt} = 0 \tag{5.20}$$

для всех $t \geq 0$. (В точке $t = 0$ рассматривается правая производная.)

Неравенство $\langle \nabla_x V(x, \phi(\cdot)), y_k\rangle + \partial_\phi V(x, \phi(\cdot))|_{\,x=\phi(0)} \leq 0$ сохраняется при замене y_k на любые значения y из выпуклого замыкания множества пределов всех сходящихся последовательностей $y_k \in F(t_k, \phi(\cdot))$ и $y_k \in F(t + t_k, \phi(\cdot))$. Поэтому из (5.17) и утверждений 7, 8 леммы 1 вытекают неравенства

$$\dot{V}^*(\phi(\cdot)) \leq 0,\ \dot{V}'(t, \phi(\cdot)) \leq 0 \tag{5.21}$$

для любых $\phi(\cdot)$ и п.в. $t \geq 0$. Теперь из неравенств (5.21), равенства (5.20) и неравенства (5.2) (применительно к предельным включениям (3.2) и (3.3)) получаем (5.18).

2. Из утверждения 3 леммы 1 вытекает, что функция $y(t)$ удовлетворяет также дифференциальному включению

$$\dot{y}(t) \in F^*(y_t(\cdot)) \tag{5.22}$$

для почти всех $t \in [0, T]$. В силу леммы 2 многозначное отображение $F^*(x)$ полунепрерывно сверху и при этом имеет выпуклые компактные значения. Тогда, используя формулу среднего значения для интеграла Лебега, так же, как при доказательстве теоремы 1 из [13, с. 56] нетрудно убедиться, что включение (5.22) равносильно включению $Cont\, y(t) \subset F^*(y_t(\cdot))$ для каждой точки $t \in [0, T]$, где $Cont\, y(t)$ — контингенция функции $y(t)$, т. е. представляет собой множество z предельных точек последовательностей $(y(t_i) - y(t))/(t_i - t)$ при $t_i \to t$. (В точке $t = 0$ рассматривается правая контингенция.)

Пусть $z \in Cont\, y_0(\cdot)$. Тогда (см. формулу (5.1))

$$0 = V(y(t_i), y_{t_i}(\cdot)) - V(y(0), y_0(\cdot)) = \langle \nabla_x V(y(0), y_0(\cdot)), z\rangle t_i + \partial_\psi V(y(0), y_0(\cdot))t_i + o(t_i),$$

откуда при $t_i \to +0$ получаем

$$0 = \langle \nabla_x V(y(0), y_0(\cdot)), z\rangle + \partial_\psi V(y(0), y_0(\cdot)) \leq \dot{V}^*(y_0(\cdot)).$$

Теперь из первого неравенства (5.21) вытекает $y_0(\cdot) \in E(\dot{V}^* = 0)$, и с учетом полуинвариантности множества $\Lambda^+(x)$ справедливо равенство (5.19). Теорема доказана.

Теоремы 5 и 6 являются аналогами принципа инвариантности применительно к неавтономному функционально-дифференциальному включению (3.1).

В заключение отметим, что метод предельных включений исследования неавтономных систем согласуется с известными ранее методами предельных уравнений, обобщает их и в равной степени может применяться к функционально-дифференциальным включениям и уравнениям, к дифференциальным включениям и уравнениям без последействия.

Отметим также, что из определений предельных многозначных отображений $F'(t,\phi(\cdot))$ и $F^*(\phi(\cdot))$ вытекает, что они не изменятся, если отказаться от предположения о выпуклости множества значений многозначного отображения $F(t,\phi(\cdot))$ из правой части включения (3.1). Тогда все результаты данной статьи останутся верными, если в условиях A2 и A5 полунепрерывность сверху $F(t,\phi(\cdot))$ по переменной $\phi(\cdot)$ заменить на непрерывность в метрике Хаусдорфа, а в условии A3 существование измеримого селектора заменить на измеримость отображения $t \to F(t,\phi(\cdot))$. Иными словами, если предположить, что $F : R^1 \times C_\tau \to comp\, R^n$ — отображение типа Каратеодори.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. **Руш Н., Абетс М., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
3. **Sell G.R.** Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I, II // Trans. Amer. Vath. Soc. 1967. Vol. 127, no. 2. P. 241–283.
4. **Artstein Z.** Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. Vol. 23, iss. 2. P. 216–223.
5. **Artstein Z.** Topological dynamics of ordinary differential equations and Kurzweil equation // J. Differ. Equations. 1977. Vol. 23, iss. 2. P. 224–243.
6. **Artstein Z.** The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. Vol. 25, iss. 2. P. 184–202.
7. **Artstein Z.** Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Differ. Equations. 1978. Vol. 27, iss. 2. P. 172–189.
8. **Андреев А.С.** Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 327 с.
9. **Андреев А.С.** Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
10. **Куратовский К.** Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
11. **Куратовский К.** Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969. 624 с.
12. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
13. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
14. **Финогенко И.А.** О решениях некоторых функционально-дифференциальных включений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 11. С. 2001–2002.
15. **Davy J.L.** Properties of the solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 379–398.
16. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
17. **Ким А.В.** i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 1996. 233 с.
18. **Сурков А.В.** Об устойчивости функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1055–1063.

Финогенко Иван Анатольевич
д-р физ.-мат. наук
зав. лаб.
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: fin@icc.ru

Поступила 19.10.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 519.6

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КОНСТРУКЦИЯХ РАСШИРЕНИЙ[1]

А. Г. Ченцов

Рассматриваются представления компактов Стоуна и некоторых их аналогов, связанные с использованием ультрафильтров в качестве обобщенных элементов в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера.

Ключевые слова: компакт, топологическое пространство, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Ultrafilters of measurable spaces and their application in extension constructions.

We consider representations of Stone compact sets and of their analogs in connection with the use of ultrafilters as generalized elements in abstract attainability problems with constraints of asymptotic nature.

Keywords: compact set, topological space, ultrafilter.

1. Введение

Используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, БУ — база ультрафильтра, в/з — вещественнозначная (функция), ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр.

Настоящая работа посвящена построению объектов, которые могли бы эффективно использоваться в конструкциях расширений. Конструкции такого рода находят применение в задачах прикладной математики (теория управления, вариационное исчисление и др.) и в общей топологии. При всем наличии особенностей расширений первого и второго типов угадывается и целый ряд общих положений. В частности, это касается применения ультрафильтров (максимальных фильтров), играющих важную роль в компактификации Стоуна — Чеха (см. [1; 2], а также [3, с. 165–167]). Данная компактификация, широко используемая в общей топологии, оказалась полезной и в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости (см. [4]), прототипом которых является известная в теории управления задача о построении области достижимости (см. [5–7] и др.).

Затруднения при “практическом использовании” данной компактификации связаны с отсутствием конструктивного описания так называемых свободных у/ф, ответственных за асимптотические эффекты, не реализуемые посредством точек исходного пространства, именуемых ниже обычными решениями. Данное затруднение касается у/ф семейства всех п/м множества обычных решений. Можно, однако, попытаться рассматривать “неполные” у/ф, а точнее, у/ф тех или иных подсемейств семейства всех п/м упомянутого множества. Наиболее известная процедура такого рода связана с пространствами Стоуна, конструируемыми с использованием у/ф алгебры множеств. Данное пространство всякий раз оказывается компактом, т. е. компактным хаусдорфовым пространством. Применительно к расширениям абстрактных задач о достижимости эта процедура использовалась в большой серии работ (см., в частности, [8–14]), при этом рассматривались и некоторые аналоги компактов Стоуна. Целью этих построений

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12–01–00537, 13–01–90414 укр–ф_а, 13–04–00847), программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12-П-1-1012, 12-П-1-1019) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

было получение представлений МП, эти МП в задачах вышеупомянутого типа играли (объективно) роль асимптотических аналогов областей достижимости в теории управления. Опуская сейчас изложение самих конструкций, связанных с построением МП (см. [8–14]), отметим, что с точки зрения применения данных конструкций существенны следующие два момента.

Прежде всего, требуется указать достаточно представительные классы ИП, для которых соответствующие пространства Стоуна допускают конструктивное (и достаточно простое) описание. Было бы желательно, чтобы упомянутые ИП могли при этом хотя бы гипотетически использоваться в задачах, возникающих в прикладной математике (теория управления, математическое программирование).

Второе обстоятельство, характерное именно для расширений абстрактных задач о достижимости, связано с эффективной реализацией непрерывных модификаций целевых отображений, т. е. отображений, на значениях которых определяются элементы притяжения, объединяемые в МП. Здесь надо иметь в виду, что само пространство обычных решений может не оснащаться, в отличие от случая задач общей топологии, какой-либо топологической структурой, а потому и сами целевые отображения не обладают “разумной” непрерывностью. В настоящей работе исследуются оба обстоятельства, упомянутых ранее: с одной стороны, на основе результатов [12–14] конструируется класс ИП, для которых удается дать конструктивное (с точностью до гомеоморфизма) описание компакта Стоуна, включая “бесконечномерный” случай, а с другой, (в духе конструкций [14]) указывается весьма общий класс отображений, допускающих нужную непрерывную модификацию с областью определения в виде вышеупомянутого компакта (рассматриваются также некоторые аналоги, отвечающие более общим вариантам ИП).

Важную роль в упомянутых построениях играют конструкции широко понимаемых сужений у/ф и целевых отображений на подпространства ИП, у которых “единица” не обладает, вообще говоря, измеримостью в смысле исходного ИП. Такие подпространства весьма естественны, в частности, в случаях, когда на промежуточных этапах используются декартовы произведения (вообще говоря, бесконечные) некоторых “элементарных” ИП.

2. Общие определения и обозначения

Используем стандартную теоретико-множественную символику: кванторы, связки; через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Разумеется, $\exists!$ заменяет фразу “существует и единственно”, def — фразу “по определению”. Принимаем аксиому выбора. Множество, все элементы которого сами являются множествами, называем *семейством*. Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначается одноэлементное множество, содержащее x. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X, через $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, то B^A есть def множество всех отображений из A в B; при $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ $f^1(C) \triangleq \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f.

Специальные семейства. Фиксируем в пределах настоящего пункта непустое множество I. Тогда $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ — семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(I)$ (элементы $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ — непустые семейства п/м I и только они);

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) \mid (\varnothing \in \mathcal{I}) \,\&\, (I \in \mathcal{I}) \,\&\, (A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{2.1}$$

есть семейство всех π-систем [15] п/м I с “нулем” и “единицей”. Алгебры п/м I и топологии на I суть частные случаи π-систем из множества (2.1), поскольку выражения

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \big\{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid I \setminus L \in \mathcal{L}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\big\}, \quad (\mathrm{top})[I] \triangleq \Big\{\tau \in \pi[I] \,\Big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} \tag{2.2}$$

определяют семейства всех алгебр п/м I и всех топологий на I соответственно. При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ реализуется ТП (I,τ). Если $x \in I$, то $N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ порождает фильтр $N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists T \in N^0_\tau(x)\colon T \subset H\}$ окрестностей x в (I,τ) (см. [16, гл. I]); $(x-\mathrm{bas})[\tau] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}\big(N_\tau(x)\big) \mid \forall A \in N_\tau(x)\ \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset A\}$ есть семейство всех локальных баз (I,τ) в точке x. Возвращаясь к первому множеству в (2.2), введем в рассмотрение аналогичное множество полуалгебр п/м I. Для этого примем некоторые общие обозначения: $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\overline{m,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid (m \le k)\,\&\,(k \le n)\}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Условимся далее, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами. С учетом этого для всякого множества Y и числа $n \in \mathbb{N}$ полагаем, как обычно, $Y^n \triangleq Y^{\overline{1,n}}$, получая множество всех кортежей $(y_i)_{i\in\overline{1,n}}\colon \overline{1,n} \to Y$. Здесь и ниже используем индексную форму записи отображений и, в частности, кортежей (см. [7]). При $\mathcal{L} \in \pi[I]$, $A \in \mathcal{P}(I)$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_m(A,\mathcal{L}) \triangleq \Big\{(L_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{L}^m \;\Big|\; \Big(A = \bigcup_{i=1}^m L_i\Big)\,\&\,(L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall p \in \overline{1,m}\ \ \forall q \in \overline{1,m}\setminus\{p\})\Big\},$$

получаем множество всех (конечных упорядоченных) $\mathcal{L}$-разбиений множества A “длины” m. Тогда $\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(I\setminus L,\mathcal{L}) \ne \varnothing\}$ есть семейство всех полуалгебр п/м I; при $\mathcal{I} \in \Pi[I]$ в виде $\mathbf{a}^0_I(\mathcal{I}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(A,\mathcal{I}) \ne \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I]$ имеем алгебру п/м I, порожденную [17] полуалгеброй $\mathcal{I}$. Всегда $(\mathrm{alg})[I] \subset \Pi[I]$.

Специальные отображения. Если X и Y — непустые множества, $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$, то $C(X,\tau_1,Y,\tau_2)$ есть def множество всех (τ_1,τ_2)-непрерывных отображений из множества Y^X, $(\mathrm{Hom})[X;\tau_1;Y;\tau_2]$ — множество всех гомеоморфизмов [2, § 1.4] (X,τ_1) на (Y,τ_2).

В [14; 18] отмечалась важная роль (для рассматриваемых конструкций расширений) ярусных отображений и отображений с ярусными компонентами. Сейчас ограничимся ярусными в/з функциями, следуя [19, гл. 2] (более общий случай см. в [14]). Если I — непустое множество, то при $J \in \mathcal{P}(I)$ через $\chi_J[I]$ обозначаем индикатор J [17, с. 64]: $\chi_J[I] \in \mathbb{R}^I$ определяется условиями $\big(\chi_J[I](x) \triangleq 1\ \forall x \in J\big)\,\&\,\big(\chi_J[I](\tilde{x}) \triangleq 0\ \forall \tilde{x} \in I\setminus J\big)$. Тогда при $\mathcal{I} \in \Pi[I]$ (т.е. в случае, когда $(I,\mathcal{I})$ есть ИП с полуалгеброй множеств) через $B_0(I,\mathcal{I})$ обозначаем линейную оболочку множества $\{\chi_L[I]\colon L \in \mathcal{I}\}$ (линейные операции в пространствах в/з функций определяем поточечно); см. [19, с. 108]. Оснащаем множество $\mathbb{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на I линейными операциями, индуцированными из $\mathbb{R}^I$, и традиционной sup-нормой [20, с. 261] $\|\cdot\|_I$, получая банахово пространство (см. [19, § 2.6]) $\big(\mathbb{B}(I),\|\cdot\|_I\big)$, в котором $B_0(I,\mathcal{I})$, где $\mathcal{I} \in \Pi[I]$, образует линейное многообразие. Замыкание $B_0(I,\mathcal{I})$ в топологии sup-нормы $\|\cdot\|_I$ обозначаем через $B(I,\mathcal{I})$ (см. [19, гл. 3]). Элементы $B(I,\mathcal{I})$ именуем ярусными функциями на I ($B(I,\mathcal{I})$ соответствует $B(S,\Sigma)$ в [20, гл. IV]). Если к тому же Γ — непустое множество, $f\colon I \to \mathbb{R}^\Gamma$ и $f(\cdot)(\gamma) \triangleq \big(f(x)(\gamma)\big)_{x\in I} \in B(I,\mathcal{I})$ $\forall \gamma \in \Gamma$, то называем f отображением с ярусными компонентами, что согласуется с более общим определением [14, разд. 6].

3. Ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств

В пределах настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$ и рассматриваем (как правило) непустые подсемейства $\mathcal{P}'(\mathbf{I})$, т.е. семейства из $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(\mathbf{I})\big)$ (непустые семейства непустых п/м $\mathbf{I}$). Среди таких семейств выделяются фильтры и БФ. Мы, однако, исследуем сейчас фильтры и базы фильтров некоторой наперед заданной π-системы $\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]$, которую также фиксируем в настоящем разделе, получая в виде $(\mathbf{I},\mathcal{J})$ некий аналог “обычного” ИП. Используя расширительное толкование, далее $(\mathbf{I},\mathcal{J})$ также будем называть ИП. Тогда

$$\begin{aligned}\beta^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] &\triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{B})\,\&\,(\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2)\}\\ &= \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}\setminus\{\varnothing\}) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2)\}\end{aligned} \tag{3.1}$$

есть семейство всех БФ в ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$. В свою очередь,

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\,\& \\ \&\,\bigl(\forall F \in \mathcal{F}\ \forall J \in \mathcal{J}\ (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F})\bigr)\} \tag{3.2}$$

есть множество всех фильтров в $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$. Связь (3.1), (3.2) реализуется посредством стандартной операции

$$(\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{J}] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{J} \mid \exists B \in \mathcal{B} \colon B \subset J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \qquad \forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}]. \tag{3.3}$$

Итак, операция $\mathcal{B} \mapsto (\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{J}] \colon \beta^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \to \mathbb{F}^*(\mathcal{J})$ дает правило сопоставления каждой БФ соответствующего фильтра ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$. В виде

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall J \in \mathcal{J}\ (J \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (J \in \mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'\bigl(\mathbb{F}^*(\mathcal{J})\bigr) \tag{3.4}$$

имеем [8, § 5] (непустое) множество всех у/ф (максимальных фильтров) ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$. С (3.4) естественным образом связывается операция, переводящая БУ в у/ф. В этой связи отметим, что [12, предложение 3.1]

$$\beta^{00}_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \mid (\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\,\mathcal{J}] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})\} \\ = \{\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \mid \forall J \in \mathcal{J}\ (J \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}) \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B} \colon B \subset J)\} \in \mathcal{P}'(\beta^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}])$$

(легко видеть, что $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}) \subset \beta^{00}_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}]$). Соответственно, нужная операция имеет вид

$$\mathcal{B} \mapsto (\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{J}] \colon \beta^{00}_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \to \mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}).$$

Отметим, что

$$\bigl((\mathbf{I}, \mathcal{J}) - \mathrm{ult}\bigr)[x] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{J} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \qquad \forall x \in \mathbf{I}. \tag{3.5}$$

Фильтры, определяемые в (3.5), называем *тривиальными*. Они, вообще говоря, могут не быть максимальными (см. [12, замечание 3.1]). Необходимые и достаточные условия максимальности всех фильтров (3.5) см. в [12, (3.22)]. В общем же случае π-системы $\mathcal{J}$

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \Bigl\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}) \,\Big|\, \bigcap_{J \in \mathcal{U}} J = \varnothing\Bigr\} = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}) \setminus \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{J}), \tag{3.6}$$

где (здесь и ниже) $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{\bigl((\mathbf{I}, \mathcal{J}) - \mathrm{ult}\bigr)[x] \colon x \in \mathbf{I}\} \in \mathcal{P}'\bigl(\mathbb{F}^*(\mathcal{J})\bigr)$. Элементы (3.6) называем *свободными* у/ф ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$; в связи с (3.6) отметим свойство [12, (3.27)].

Топологические свойства. Полагаем, что $\Phi_{\mathcal{J}}(J) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}) \mid J \in \mathcal{U}\}\ \forall J \in \mathcal{J}$. Семейство $(\mathbb{UF})[\mathbf{I}; \mathcal{J}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{J}}(J) \colon J \in \mathcal{J}\} \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})]$ есть, в частности, база (единственной) топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})]$, определяемой стандартным образом [2]; при этом

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] = \{G \in \mathcal{P}\bigl(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})\bigr) \mid \forall \mathcal{U} \in G\ \exists U \in \mathcal{U} \colon \Phi_{\mathcal{J}}(U) \subset G\}. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что

$$\bigl(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}]\bigr) \tag{3.8}$$

есть T_2-пространство (хаусдофово ТП).

З а м е ч а н и е 3.1. Если $\mathcal{J} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, то (3.8) — компакт, именуемый ниже компактом Стоуна (пространством Стоуна); см., в частности, [8; 9].

З а м е ч а н и е 3.2. Если имеет место

$$\forall J \in \mathcal{J}\ \forall x \in \mathbf{I} \setminus J\ \exists X \in \mathcal{J} \colon (x \in X)\,\&\,(X \cap J = \varnothing), \tag{3.9}$$

то $\big((\mathbf{I},\mathcal{J})-\mathrm{ult}\big)[y]\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\ \forall y\in\mathbf{I}$. Итак, при условии (3.9) в виде $\big((\mathbf{I},\mathcal{J})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]\stackrel{\triangle}{=}\Big(\big((\mathbf{I},\mathcal{J})-\mathrm{ult}\big)[s]\Big)_{s\in\mathbf{I}}$ имеем оператор из $\mathbf{I}$ в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$. Условие (3.9) выполнено при $\mathcal{J}\in\Pi[\mathbf{I}]$ и, тем более, при $\mathcal{J}\in(\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$. Поэтому в этих случаях определено правило $\big((\mathbf{I},\mathcal{J})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$ погружения $\mathbf{I}$ в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$, превращающее точки $\mathbf{I}$ в тривиальные ультрафильтры $(\mathbf{I},\mathcal{J})$. В общем случае условие (3.9), $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$ и $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{J})$ образуют разбиение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ (см. [14, (3.19)]).

З а м е ч а н и е 3.3. Возвращаясь к общему случаю $\mathcal{J}\in\pi[\mathbf{I}]$, отметим, что все множества из $(\mathbb{UF})[\mathbf{I};\mathcal{J}]$ являются открыто-замкнутыми. В самом деле, пусть $J_*\in\mathcal{J}$ и $\mathcal{U}_*\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\setminus\Phi_{\mathcal{J}}(J_*)$. Тогда $J_*\notin\mathcal{U}_*$ и, стало быть (см. (3.4)), для некоторого множества $U_*\in\mathcal{U}_*$ имеет место $J_*\cap U_*=\varnothing$ (в самом деле, если $J_*\cap U\neq\varnothing\ \forall U\in\mathcal{U}_*$, то согласно (3.4) $J_*\in\mathcal{U}_*$, что невозможно), где, в частности, $U_*\in\mathcal{J}$. Но тогда $\Phi_{\mathcal{J}}(J_*)\cap\Phi_{\mathcal{J}}(U_*)=\varnothing$ (в противном случае нашелся бы у/ф $\mathfrak{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$, для которого $\varnothing=J_*\cap U_*\in\mathfrak{U}$), а это означает, что $\Phi_{\mathcal{J}}(U_*)\subset\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\setminus\Phi_{\mathcal{J}}(J_*)$. Итак,

$$U_*\in\mathcal{U}_*\colon\ \Phi_{\mathcal{J}}(U_*)\subset\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\setminus\Phi_{\mathcal{J}}(J_*).\tag{3.10}$$

Коль скоро у/ф $\mathcal{U}_*$ выбирался произвольно, имеем из (3.7), (3.10), что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\setminus\Phi_{\mathcal{J}}(J_*)\in\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}]$, а потому $\Phi_{\mathcal{J}}(J_*)$ замкнуто в ТП (3.8). С другой стороны, $\Phi_{\mathcal{J}}(J_*)\in\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}]$ как элемент базы. Требуемое свойство доказано. Это означает, что ТП (3.8) нульмерно (см. [2, с. 529]).

Напомним [8, предложение 5.3], что при $L_1\in\mathcal{J}$, $L_2\in\mathcal{J}$ и $L_1\cap L_2=\varnothing$ непременно $\Phi_{\mathcal{J}}(L_1)\cap\Phi_{\mathcal{J}}(L_2)=\varnothing$. Кроме того, $\mathbf{I}\in\mathcal{F}\ \forall\mathcal{F}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{J})$ и $\{\mathbf{I}\}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{J})$.

Предложение 3.1. *Если $J\in\mathcal{J}$, то справедливо равенство*

$$\Phi_{\mathcal{J}}(J)=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\mid J\cap U\neq\varnothing\ \forall U\in\mathcal{U}\}.\tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\mathfrak{F}$ обозначим множество в правой части (3.11). Если $\mathfrak{U}\in\Phi_{\mathcal{J}}(J)$, то $J\in\mathfrak{U}$ и согласно (3.2) $J\cap U\neq\varnothing\ \forall U\in\mathfrak{U}$. Следовательно, $\mathfrak{U}\in\mathfrak{F}$. Тем самым установлено вложение

$$\Phi_{\mathcal{J}}(J)\subset\mathfrak{F}.\tag{3.12}$$

Выберем произвольно $\mathcal{F}\in\mathfrak{F}$. Тогда $\mathcal{F}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ и при этом

$$J\cap F\neq\varnothing\qquad\forall F\in\mathcal{F}.\tag{3.13}$$

Согласно [8, (4.1), (5.7)] $\mathcal{F}=\{L\in\mathcal{J}\mid L\cap F\neq\varnothing\ \forall F\in\mathcal{F}\}$. Отсюда (см. (3.13)) $J\in\mathcal{F}$, а это означает, что $\mathcal{F}\in\Phi_{\mathcal{J}}(J)$, чем завершается проверка вложения $\mathfrak{F}\subset\Phi_{\mathcal{J}}(J)$. С учетом (3.12) получаем равенство $\Phi_{\mathcal{J}}(J)=\mathfrak{F}$, означающее справедливость (3.11).

Предложение доказано.

Отметим также следующее простое свойство: если $J\in\mathcal{J}\setminus\{\varnothing\}$, то $\Phi_{\mathcal{J}}(J)\neq\varnothing$. В самом деле, пусть $L\in\mathcal{J}\setminus\{\varnothing\}$. Выберем произвольно $x_*\in L$ и рассмотрим фильтр $((\mathbf{I},\mathcal{J})-\mathrm{ult})[x_*]\in\mathbb{F}^*(\mathcal{J})$. Тогда [8, (2.12)] для некоторого $\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$

$$((\mathbf{I},\mathcal{J})-\mathrm{ult})[x_*]\subset\mathcal{U}.\tag{3.14}$$

При этом $L\in((\mathbf{I},\mathcal{J})-\mathrm{ult})[x_*]$ согласно (3.5), а потому (см. (3.14)) $L\in\mathcal{U}$ и, следовательно, $\mathcal{U}\in\Phi_{\mathcal{J}}(L)$.

4. Простейшие варианты продолжения фильтров и ультрафильтров

Если I — непустое множество, $\mathcal{I}_1\in\pi[I]$, $\mathcal{I}_2\in\pi[I]$ и $\mathcal{I}_1\subset\mathcal{I}_2$, то, как легко видеть, $\mathbb{F}^*(\mathcal{I}_1)\subset\beta^0_{\mathcal{I}_2}[I]$ (см. (3.1), (3.2)). В этой связи полагаем (см. [21, (2.4.2)]), фиксируя в настоящем разделе множество I, $I\neq\varnothing$, что

$$\psi[\mathcal{I};\mathcal{M}]\stackrel{\triangle}{=}\{J\in\mathcal{I}\mid\exists M\in\mathcal{M}\colon M\subset J\}\qquad\forall\mathcal{I}\in\pi[I]\qquad\forall\mathcal{M}\in\mathcal{P}(\mathcal{I}).\tag{4.1}$$

Разумеется, $\psi[\mathcal{I}_2;\mathcal{F}] = (I-\mathbf{fi})[\mathcal{F}|\mathcal{I}_2] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}_2)$ при $\mathcal{I}_1 \in \pi[I]$, $\mathcal{I}_2 \in \pi[I]$, $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}_1)$. Тем самым реализуется важный частный случай процедуры (3.3), имеющий смысл продолжения исходного фильтра $\mathcal{F}$. В связи с упомянутым свойством введем [21, (2.4.1)] семейства $\pi_0[I;\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{J} \in \pi[I] \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{I}\}$ $\forall \mathcal{I} \in \pi[I]$, элементами которых являются π-системы I. При этом, как уже отмечалось,

$$\psi[\mathcal{I};\mathcal{F}] = (I-\mathbf{fi})[\mathcal{F}|\mathcal{I}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \qquad \forall \mathcal{I} \in \pi[I] \qquad \forall \mathcal{J} \in \pi_0[I;\mathcal{I}] \qquad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}). \tag{4.2}$$

Основные свойства операции (4.2) см. в [13, разд. 3, 4; 21 § 2.4].

Некоторые добавления. В настоящем пункте совсем кратко коснемся одного вопроса, связанного с операцией, обратной (4.1). В этой связи напомним, что [21, (2.4.4)] при $\mathcal{I} \in \pi[I]$, $\mathcal{J} \in \pi_0[I;\mathcal{I}]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})$

$$\psi[\mathcal{I};\mathcal{F}] \cap \mathcal{J} = \mathcal{F}. \tag{4.3}$$

Итак, операция пересечения с исходной π-системой реализует возврат к исходному фильтру.

Теперь рассмотрим вопрос о применении процедуры, подобной (4.3), к произвольным элементам компакта Стоуна. Итак, зафиксируем до конца настоящего пункта алгебры множеств $\mathcal{A}_1 \in (\mathrm{alg})[I]$ и $\mathcal{A}_2 \in (\mathrm{alg})[I]$, для которых $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Тогда

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{A}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}_1) \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}_2). \tag{4.4}$$

При доказательстве (4.4) используется известное свойство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A}\ (A \in \mathcal{F}) \vee (I \setminus A \in \mathcal{F})\} \qquad \forall \mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[I]. \tag{4.5}$$

Возвращаясь к проверке (4.4), выберем произвольно $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}_2)$. При этом [21, (2.4.5)] $\mathfrak{U} \cap \mathcal{A}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A}_1)$. Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_1$. Тогда, в частности, $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_2$, а потому в силу (4.5)

$$(\mathbf{A} \in \mathfrak{U}) \vee (I \setminus \mathbf{A} \in \mathfrak{U}). \tag{4.6}$$

Поскольку $(\mathbf{A} \in \mathcal{A}_1) \& (I \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{A}_1)$, то согласно (4.6) $(\mathbf{A} \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{A}_1) \vee (I \setminus \mathbf{A} \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{A}_1)$. Поскольку выбор $\mathbf{A}$ был произвольным, установлено, что $\forall A \in \mathcal{A}_1\ (A \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{A}_1) \vee (I \setminus A \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{A}_1)$. С учетом (4.5) получаем, что $\mathfrak{U} \cap \mathcal{A}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}_1)$. Коль скоро и выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, свойство (4.4) доказано.

В [9] отмечен вариант (4.4), соответствующий частному случаю $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(I)$. В обосновании, приведенном в [9, разд. 4], использовалось построение с применением конечно-аддитивных $(0,1)$-мер. Здесь приведено прямое (и более простое) рассуждение. Упомянутый частный случай представляется наиболее важным, поскольку в этом случае (4.4) определяет связь с реализацией компактификации Стоуна — Чеха (см. [3, 1.28; 9, (4.13)]).

Сейчас ограничимся рассмотрением ИП с полуалгеброй множеств, фиксируя до конца настоящего раздела

$$\mathfrak{L} \in \Pi[I]$$

и получая в виде $(I, \mathfrak{L})$ упомянутое ИП. Тогда (см. [13, разд. 4; 21, § 2.4]) $\big(\psi[\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L});\mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*\big(\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})\big)\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{L})\big) \,\&\, \big(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{L})\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*\big(\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})\big)\big)$. При этом $\Psi[\mathfrak{L}] \overset{\triangle}{=} \big(\psi[\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L});\mathcal{U}]\big)_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{L})}$ есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{L})$ на $\mathbb{F}_0^*\big(\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})\big)$, а $\mathfrak{U} \mapsto \mathfrak{U} \cap \mathfrak{L} \colon \mathbb{F}_0^*\big(\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})\big) \to \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{L})$ — биекция, обратная к $\Psi[\mathfrak{L}]$. Из упомянутых определений легко следует [13, предложение 4.1], что $\Psi[\mathfrak{L}]$ есть гомеоморфизм ТП $\big(\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{L}), \mathbf{T}_{\mathfrak{L}}^*[I]\big)$ на компакт $\big(\mathbb{F}_0^*\big(\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})\big), \mathbf{T}^*_{\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})}[I]\big)$, т. е.

$$\Psi[\mathfrak{L}] \in (\mathrm{Hom})\big[\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{L}); \mathbf{T}_{\mathfrak{L}}^*[I]; \mathbb{F}_0^*\big(\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})\big); \mathbf{T}^*_{\mathbf{a}_I^0(\mathfrak{L})}[I]\big].$$

Последнее ТП есть компакт Стоуна, а потому первое из упоминаемых ТП также является (непустым) компактом. Итак, ТП (3.8), отвечающее ИП с полуалгеброй множеств, является непустым нульмерным (см. замечание 3.3) компактом. Отметим, что ИП с полуалгеброй множеств естественным образом возникает при построении декартова произведения компактов Стоуна (имеется в виду полуалгебра измеримых прямоугольников).

5. Компакты Стоуна в скалярном случае

В настоящем разделе рассматриваются варианты ИП, у которых “единица” является непустым п/м $\mathbb{R}$ (см. в этой связи [11; 12]). Напомним три характерных примера.

$1')$ Следуя [11, с. 237], рассмотрим $\mathbb{N}$ в оснащении полуалгеброй $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2 \in \Pi[\mathbb{N}]$, где $\mathcal{Z}_1$ — семейство всех “промежутков” $\overline{p,q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, а $\mathcal{Z}_2 \overset{\triangle}{=} \{\overrightarrow{n,\infty}\colon n \in \mathbb{N}\}$. Алгебра $\mathbf{a}^0_{\mathbb{N}}(\mathcal{Z})$ имеет очень простую структуру: в терминах семейства $\mathbf{K}$ всех конечных п/м $\mathbb{N}$ (включая $\varnothing$) и семейства $\mathbf{C} \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{N} \setminus K\colon K \in \mathbf{K}\}$ реализуется равенство $\mathbf{a}^0_{\mathbb{N}}(\mathcal{Z}) = \mathbf{K} \cup \mathbf{C}$, где $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}\big(\mathbf{a}^0_{\mathbb{N}}(\mathcal{Z})\big)$ (более того, $\mathbf{C}$ — единственный свободный у/ф). Тогда (см. [11, с. 237])

$$\mathbb{F}^*_0\big(\mathbf{a}^0_{\mathbb{N}}(\mathcal{Z})\big) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}\big(\mathbf{a}^0_{\mathbb{N}}(\mathcal{Z})\big) \cup \{\mathbf{C}\}. \tag{5.1}$$

$2')$ Фиксируя $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in]\alpha,\infty[$, конструируем “стрелку” $[\alpha,\beta[= \{\xi \in \mathbb{R} \mid (\alpha \le \xi) \,\&\, (\xi < \beta)\}$. Через $\mathfrak{P}[\alpha;\beta]$ обозначаем семейство всех полуинтервалов $[p,q[$, $p \in [\alpha,\beta]$, $q \in [\alpha,\beta]$. Разумеется, $\mathfrak{P}[\alpha;\beta] \in \Pi\big[[\alpha,\beta[\big]$, а $([\alpha,\beta[, \mathfrak{P}[\alpha;\beta])$ есть ИП с полуалгеброй множеств.

Если $x \in]\alpha,\beta]$, то [11, с. 238] через $\mathfrak{U}^0_x[\alpha;\beta]$ обозначаем семейство всех полуинтервалов $[c,d[$, $c \in [\alpha,x[$, $d \in [x,\beta]$. Тогда $\mathcal{U}^0_x[\alpha;\beta] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta])$ и (см. разд. 4)

$$\Psi\big[\mathfrak{P}[\alpha;\beta]\big](\mathfrak{U}^0_x[\alpha;\beta]) = \psi\big[\mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta[}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta]); \mathfrak{U}^0_x[\alpha;\beta]\big]$$

$$= \{L \in \mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta[}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta]) \mid \exists U \in \mathfrak{U}^0_x[\alpha;\beta]\colon U \subset L\} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}\big(\mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta[}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta])\big).$$

Тогда (см.[11, с. 238]) имеем следующее равенство:

$$\mathbb{F}^*_0\big(\mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta[}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta])\big) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}\big(\mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta[}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta])\big) \cup \{\Psi\big[\mathfrak{P}[\alpha;\beta]\big](\mathfrak{U}^0_x[\alpha;\beta])\colon x \in]\alpha,\beta]\}.$$

Имеем конструктивное и достаточно простое описание множества $\mathbb{F}^*_0\big(\mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta[}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta])\big)$ (ранее в (5.1) было получено подобное описание $\mathbb{F}^*_0\big(\mathbf{a}^0_{\mathbb{N}}(\mathcal{Z})\big)$).

$3')$ Сохраняем предположения $2')$ в отношении чисел α и β (в частности, имеем неравенство $\alpha < \beta$). Рассмотрим отрезок $[\alpha,\beta]$ с полуалгеброй

$$\mathfrak{I}[\alpha;\beta] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{P}([\alpha,\beta]) \mid \exists c \in [\alpha,\beta]\ \exists d \in [\alpha,\beta];\ (]c,d[\subset L) \,\&\, (L \subset [c,d])\} \in \Pi\big[[\alpha,\beta]\big] \tag{5.2}$$

промежутков $\mathbb{R}$, содержащихся в $[\alpha,\beta]$, а также алгебру $\mathcal{A}_0[\alpha;\beta] \overset{\triangle}{=} \mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta]}(\mathfrak{I}[\alpha;\beta]) \in (\mathrm{alg})\big[[\alpha,\beta]\big]$, порожденную полуалгеброй (5.2). Тогда [12, (6.5)]

$$\big(\mathcal{J}^{(-)}_t[\alpha;\beta] \overset{\triangle}{=} \{[c,t[\colon c \in [\alpha,t[\} \in \beta^{00}_{\mathcal{A}_0[\alpha;\beta]}\big[[\alpha,\beta]\big]\ \forall t \in]\alpha,\beta]\big) \,\&$$

$$\& \big(\mathcal{J}^{(+)}_t[\alpha;\beta] \overset{\triangle}{=} \{]t,c]\colon c \in]t,\beta]\} \in \beta^{00}_{\mathcal{A}_0[\alpha;\beta]}\big[[\alpha,\beta]\big]\ \forall t \in [\alpha,\beta[\big). \tag{5.3}$$

В [12, предложение 6.1] установлено, что БУ (5.3) определяют все множество $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}_0[\alpha;\beta])$:

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}_0[\alpha;\beta]) = \{([\alpha,\beta] - \mathbf{fi})\big[\mathcal{J}^{(-)}_t[\alpha;\beta] | \mathcal{A}_0[\alpha;\beta]\big] : t \in]\alpha,\beta]\}$$

$$\cup \{([\alpha,\beta] - \mathbf{fi})\big[\mathcal{J}^{(+)}_t[\alpha;\beta] | \mathcal{A}_0[\alpha;\beta]\big] : t \in [\alpha,\beta[\}. \tag{5.4}$$

Фактически (5.4) характеризует множество $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}_0[\alpha;\beta])$, так как $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}_0[\alpha;\beta]) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}_0[\alpha;\beta]) \cup \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{A}_0[\alpha;\beta])$. Это доставляет возможность непосредственного построения компакта Стоуна

$$\big(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}_0[\alpha;\beta]), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}_0[\alpha;\beta]}\big[[\alpha;\beta]\big]\big). \tag{5.5}$$

Данное представление компакта (5.5) было использовано в [22, разд. 6] для целей представления пространства Стоуна в случае декартова произведения ИП, подобных $([\alpha,\beta], \mathcal{A}_0[\alpha;\beta])$.

Объединяя $1')$–$3')$, получаем набор “одномерных” ИП, для которых пространство Стоуна допускает исчерпывающее и достаточно простое описание.

6. Декартовы произведения

В настоящем разделе совсем кратко напомним положения [22], связанные с возможностью построения пространства у/ф в ИП большой мощности. Сначала условимся о некоторых обозначениях, имея в виду операцию тензорного произведения семейств, каждое из которых содержит “единицу”.

Если H — множество, то $\mathfrak{P}_0[H] \triangleq \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)\big) \mid H \in \mathcal{H}\}$; элементы $\mathfrak{P}_0[H]$ — непустые подсемейства $\mathcal{P}(H)$ с “единицей” и только они. Разумеется, для каждого такого подсемейства объединение всех его множеств совпадает с H. Заметим, что $\pi[H] \subset \mathfrak{P}_0[H]$ (как следствие $(\mathrm{top})[H] \subset \mathfrak{P}_0[H]$) и $\mathbb{F}^*(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{P}_0[H]\ \forall \mathcal{H} \in \pi[H]$.

Бесконечные произведения. В пределах данного пункта фиксируем непустые множества I и $\mathbb{H}$. С учетом аксиомы выбора

$$\prod_{i\in I} M_i = \{f \in \mathbb{H}^I \mid f(j) \in M_j\ \forall j \in I\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H}^I) \qquad \forall (M_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H})^I.$$

Если фиксирована мультифункция $(M_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H})^I$, то

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{P}_0[M_i] = \{(\mathcal{M}_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{H})\big)^I \mid \mathcal{M}_j \in \mathfrak{P}_0[M_j]\ \forall j \in I\}.$$

Следующее соглашение (не являющееся общепринятым) характеризует тензорное произведение совокупности семейств, каждое из которых содержит “единицу”: если $(M_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H})^I$ и $(\mathcal{M}_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} \mathfrak{P}_0[M_i]$, то

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{M}_i \triangleq \Big\{T \in \mathcal{P}\big(\prod_{i\in I} M_i\big) \mid \exists (N_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\colon \big(T = \prod_{i\in I} N_i\big)\ \&$$
$$\&\ \big(\exists K \in \mathrm{Fin}(I)\colon M_j = N_j\ \forall j \in I \setminus K\big)\Big\} \tag{6.1}$$

(напомним, что $\mathrm{Fin}(I)$ — семейство всех непустых конечных п/м I). Будем рассматривать

$$\Big(\prod_{i\in I} M_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{M}_i\Big)$$

как (тензорное) произведение пространств $(M_i, \mathcal{M}_i)$, $i \in I$.

Тензорные произведения ультрафильтров. До конца настоящего раздела фиксируем непустые множества X и Y, а также отображение $(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X$. Итак, при $x \in X$ в виде E_x имеем непустое п/м Y. Тогда

$$\prod_{x\in X} E_x = \{f \in Y^X \mid f(s) \in E_s\ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}'(Y^X). \tag{6.2}$$

Кроме того, фиксируем $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \pi[E_x]$ (обобщенный кортеж: $(\mathcal{L}_x)_{x\in X}$ есть отображение из X в $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(Y)\big)$ такое, что $\mathcal{L}_s \in \pi[E_s]\ \forall s \in X$). В виде $(E_x, \mathcal{L}_x)$, $x \in X$, имеем систему (широко понимаемых) ИП. Тогда в соответствии с (6.1) определено семейство $\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$, причем, как легко показать,

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x = \Big\{\mathbb{L} \in \mathcal{P}\big(\prod_{x\in X} E_x\big) \mid \exists (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\colon \big(\mathbb{L} = \prod_{x\in X} L_x\big)\ \&$$
$$\&\ (\exists K \in \mathrm{Fin}(X)\colon L_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K)\Big\} \in \pi\big[\prod_{x\in X} E_x\big]. \tag{6.3}$$

Мы рассматриваем пространство
$$\Big(\prod_{x\in X} E_x, \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big)$$
как произведение ИП $(E_x, \mathcal{L}_x)$, $x \in X$. Учитывая [22, (3.4)–(3.7)], в соответствии с (6.1) определяем тензорное произведение фильтров. При этом
$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{F}_x \in \mathbb{F}^*\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big) \qquad \forall (\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x).$$
Особенно важен частный случай, касающийся тензорного произведения у/ф (см. [22]):
$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x \in \mathbb{F}_0^*\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big) \qquad \forall (\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x). \tag{6.4}$$
В связи с (6.4) напомним [22, (3.4)], что
$$\prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \in \mathcal{P}'\Big(\prod_{x\in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)\Big); \tag{6.5}$$
в частности, множество в левой части (6.5) непусто. Более того, отображение
$$(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \mapsto \bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x \colon \prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \to \mathbb{F}_0^*\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big) \tag{6.6}$$
является [22, разд. 3] биекцией. Данное положение относительно отображения (6.6) можно усилить до утверждения о гомеоморфности, однако сначала отметим, что
$$\Big(\Big(\prod_{x\in X} E_x, \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big)-\mathrm{ult}\Big)[f] = \bigotimes_{x\in X} \big((E_x, \mathcal{L}_x) - \mathrm{ult}\big)[f(x)] \qquad \forall f \in \prod_{x\in X} E_x \tag{6.7}$$
(тензорное произведение тривиальных фильтров есть тривиальный фильтр); в связи с (6.7) отметим также, что $\forall (\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$
$$\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big)\Big) \Longleftrightarrow \big(\exists s \in X \colon \mathcal{U}_s \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_s)\big).$$
Полагаем для краткости, что $\tau_x \overset{\triangle}{=} \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}_x}[E_x]$ $\forall x \in X$. Получили, что $\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \tau_x\big)$, $x \in X$, есть система хаусдорфовых ТП, для которой обычным образом [2] определяется тихоновское произведение. Для этого в соответствии с (6.1) сначала определяется [22, (4.1)] π-система
$$\bigotimes_{x\in X} \tau_x \in \pi\Big[\prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\Big],$$
являющаяся базой следующей топологии Θ множества-произведения $\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$:
$$\Theta \overset{\triangle}{=} \Big\{G \in \mathcal{P}\Big(\prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\Big) \,\big|\, \forall (\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in G\ \exists B \in \bigotimes_{x\in X} \tau_x \colon \big((\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in B\big)\ \& \\ \& \, (B \subset G)\Big\} \in (\mathrm{top})\Big[\prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\Big]. \tag{6.8}$$
В [22, разд. 4] установлено, что отображение (6.6) есть гомеоморфизм ТП $\big(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \Theta\big)$ на
$$\Big(\mathbb{F}_0^*\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big), \mathbf{T}^*_{\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x}\Big[\prod_{x\in X} E_x\Big]\Big). \tag{6.9}$$

Таким образом, получаем описание хаусдорфова ТП (6.9) в терминах тихоновского произведения (см. (6.8)), что оказывается полезным, если “пространства-сомножители” допускают достаточно простое представление (см. разд. 5).

Полагаем до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L}_x \in \Pi[E_x]\ \forall x \in X$. Тогда

$$(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \Pi[E_x], \tag{6.10}$$

а $(E_x, \mathcal{L}_x)$, $x \in X$, суть ИП с полуалгебрами множеств. Согласно положениям разд. 4 при $x \in X$ в виде $\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \tau_x\big)$ имеем непустой нульмерный компакт. Кроме того, в рассматриваемом случае (6.10)

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \Pi\Big[\prod_{x\in X} E_x\Big] \tag{6.11}$$

(см. [22, (5.2)]), а тогда ТП (6.9) также есть непустой нульмерный компакт. Наконец, с учетом (6.11) конструируем алгебру

$$\mathcal{L} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{a}^0_{\prod\limits_{x\in X} E_x}\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big) \in (\mathrm{alg})\Big[\prod_{x\in X} E_x\Big], \tag{6.12}$$

порожденную полуалгеброй (6.11). Тогда в виде ТП

$$\Big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}\Big[\prod_{x\in X} E_x\Big]\Big) \tag{6.13}$$

имеем компакт Стоуна, отвечающий декартову произведению “элементарных” ИП. Используя свойства гомеоморфности оператора $\Psi\big[\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x\big]$ (см. разд. 4), получаем [22, теорема 5.1], что

$$(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \mapsto \psi\Big[\mathcal{L}; \bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x\Big]\colon \prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \to \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \tag{6.14}$$

есть гомеоморфизм ТП $\big(\prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \Theta\big)$ на компакт (6.13).

7. Ультрафильтры подпространств измеримых пространств

Условимся о соглашении: если $\mathcal{S}$ — произвольное непустое семейство (множеств) и T — множество, то $\mathcal{S}\big|_T \stackrel{\triangle}{=} \{S \cap T\colon S \in \mathcal{S}\}$; ясно, что $\mathcal{S}\big|_T \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(T)\big)$. Если P — непустое множество, $Q \in \mathcal{P}'(P)$ и $f \in \mathbb{R}^P$, то (здесь и ниже) $(f|\,Q) \stackrel{\triangle}{=} \big(f(q)\big)_{q\in Q} \in \mathbb{R}^Q$. В настоящем разделе полагаем, что E — непустое множество, $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $A \in \mathcal{P}'(E)$. Тогда, как легко видеть,

$$\mathcal{L}\big|_A = \{A \cap L\colon L \in \mathcal{L}\} \in (\mathrm{alg})[A], \tag{7.1}$$

а потому $(A, \mathcal{L}\big|_A)$ есть ИП с алгеброй множеств, являющееся подпространством ИП $(E, \mathcal{L})$. В интересах представления $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\big|_A)$ введем в рассмотрение множество

$$\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid U \cap A \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{7.2}$$

Поскольку $A \neq \varnothing$ и $\big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \in \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\,A]$ при $x \in A$, имеем из (7.2), что

$$\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big). \tag{7.3}$$

Из (3.7) следует, что множество $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|A]$ (7.3) замкнуто в компакте

$$\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big). \tag{7.4}$$

Как следствие получаем при $\mathbf{t}^*_A[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big|_{\mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A]}$ в виде

$$(\mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A], \mathbf{t}^*_A[\mathcal{L}]) \tag{7.5}$$

непустой компакт, являющийся подпространством ТП (7.4). Из определений разд. 3 (см. (3.2), (3.4)) вытекает, что

$$\mathcal{U}\big|_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A) \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A]. \tag{7.6}$$

С другой стороны, имеем следующее общее свойство:

$$\{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathfrak{U}\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \qquad \forall \mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A) \tag{7.7}$$

(при доказательстве максимальности фильтра в левой части (7.7) используется известное [17, с. 26] свойство (4.5); прочие рассуждения в связи с проверкой (7.7) извлекаются из определений разд. 3). Комбинируя (3.4), (7.6) и (7.7), получаем, что

$$\mathcal{U} = \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}\big|_A\} \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A]. \tag{7.8}$$

Предложение 7.1. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A)$, *то*

$$\{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}\} \in \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A]. \tag{7.9}$$

Доказательство. В силу (7.7) имеем, что $\mathcal{V} \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathcal{U}\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. Поскольку $\varnothing \notin \mathcal{U}$, то (см. 7.9)) $A \cap V \neq \varnothing\ \forall V \in \mathcal{V}$. В силу (7.2) имеем, что $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A]$.

Предложение доказано.

Введем (см. (7.6)) в рассмотрение отображение $\alpha\colon \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A] \to \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A)$, для которого

$$\alpha(\mathcal{U}) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{U}\big|_A \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A]. \tag{7.10}$$

Тогда, как легко видеть, α есть биекция $\mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\, A]$ на $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A)$ (инъективность проверяется с учетом (7.8), а сюръективность — с учетом (3.4) и предложения 7.1). Через β обозначаем биекцию $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A)$ на $\mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|A]$, обратную к α. Тогда $\beta\colon \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A) \to \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|A]$ и при этом $\alpha^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{\beta(\mathcal{U})\}\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A)$. Используя предложение 7.1, заключаем, что

$$\beta(\mathfrak{U}) = \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathfrak{U}\} \qquad \forall \mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A). \tag{7.11}$$

Теорема 7.1. *Отображение α есть гомеоморфизм:*

$$\alpha \in (\mathrm{Hom})\big[\mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|A]; \mathbf{t}^*_A[\mathcal{L}]; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}|_A}[A]\big].$$

Доказательства требует только свойство непрерывности α, которое фактически вытекает из (3.7) (напомним, что ТП (7.5) и

$$\big(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}|_A}[A]\big) \tag{7.12}$$

являются компактами; далее следует учесть [2, теорема 3.1.13]). Итак, компакт (7.12) является гомеоморфом по отношению к компакту (7.5), допускающему (см. (7.2)) конструктивное описание.

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о сужении свободных у/ф. Для этого отметим прежде всего, что

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}[\mathcal{L}|A] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|A] \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\} = \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|A] \cap \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}). \tag{7.13}$$

Легко видеть, что у/ф из множества (7.13) сужаются до свободных у/ф:

$$\mathcal{U}\big|_A \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}\big|_A) \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}[\mathcal{L}|A]. \tag{7.14}$$

Предложение 7.2. *Пусть* $\forall x \in E \setminus A\ \exists L \in \mathcal{L}\colon (x \in L)\&(L \cap A = \varnothing)$. *Тогда*

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}\big|_A) = \{\mathcal{U}\big|_A \colon \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}[\mathcal{L}|\,A]\}. \tag{7.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (7.15). Тогда согласно (7.14)

$$\Omega \subset \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}\big|_A). \tag{7.16}$$

Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}\big|_A)$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\big|_A)$ и при этом пересечение всех множеств из $\mathfrak{U}$ пусто. С учетом (7.11)

$$\mathfrak{A} \overset{\triangle}{=} \beta(\mathfrak{U}) = \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \in \mathfrak{U}\} \in \mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|A]. \tag{7.17}$$

Тогда $\alpha^{-1}(\{\mathfrak{U}\}) = \{\mathfrak{A}\}$, а потому

$$\mathfrak{A}\big|_A = \mathfrak{U} \tag{7.18}$$

(см. (7.10)). Покажем, что $\mathfrak{A} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. Допустим противное. Тогда $\mathfrak{A} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$, а потому (см. разд. 3) $\mathfrak{A} = \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x_*]$, где $x_* \in E$. Следовательно, $\mathfrak{A} = \{L \in \mathcal{L} \mid x_* \in L\}$. При этом $(x_* \in A) \vee (x_* \in E \setminus A)$. Случай $x_* \in A$ невозможен (см. (7.17)) в силу вышеупомянутого свойства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}$ — свободный у/ф) и равенства (7.18). Таким образом, $x_* \in E \setminus A$, а тогда для некоторого $\Lambda \in \mathcal{L}$

$$(x_* \in \Lambda)\&(\Lambda \cap A = \varnothing). \tag{7.19}$$

Из (7.19) вытекает, что $\Lambda \in \mathfrak{A}$, а потому из (7.18) следует, что $A \cap \Lambda \in \mathfrak{U}$, и, соответственно (см. (7.19)), $\varnothing \in \mathfrak{U}$, что невозможно, так как $\mathfrak{U}$ — фильтр. Противоречие показывает, что на самом деле $\mathfrak{A} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$ и согласно (7.13), (7.17) $\mathfrak{A} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}[\mathcal{L}|A]$. Из (7.18) вытекает тогда, что $\mathfrak{U} \in \Omega$, чем завершается проверка вложения $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}\big|_A) \subset \Omega$. С учетом (7.16) имеем теперь требуемое равенство (7.15).

Предложение доказано.

Из предложения 7.2 имеем, конечно, что (см. (7.10))

$$\big(\forall x \in E \setminus A\ \exists L \in \mathcal{L}\colon (x \in L)\&(L \cap A = \varnothing)\big) \Rightarrow \big(\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}\big|_A) = \alpha^1\big(\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}[\mathcal{L}|A]\big)\big).$$

З а м е ч а н и е 7.1. Пусть в пределах настоящего замечания $A \in \mathcal{L}$. Тогда определено множество $\Phi_{\mathcal{L}}(A)$ и с учетом (3.4) и (7.2) имеем равенство $\mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|A] = \Phi_{\mathcal{L}}(A)$. Множество $\Phi_{\mathcal{L}}(A)$ открыто-замкнуто в ТП $\big(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big)$.

Частные случаи. Рассмотрим некоторые варианты сочетания конструкций трех последних разделов. Итак, возвращаясь к (6.2), предположим, что $Y = \mathbb{R}$ и при каждом $x \in X$, где X соответствует разд. 6, $(E_x, \mathcal{L}_x)$ есть ИП одного из следующих трех типов: 1) $E_x = \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}_x = \mathbf{a}^0_{\mathbb{N}}(\mathcal{Z})$; 2) $E_x = [\alpha, \beta[$ и $\mathcal{L}_x = \mathbf{a}^0_{[\alpha,\beta[}(\mathfrak{P}[\alpha;\beta])$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in]\alpha, \infty[$; 3) для некоторых $a \in \mathbb{R}$ и $b \in]a, \infty[$ $E_x = [a, b]$ и $\mathcal{L}_x = \mathcal{A}_0[a; b]$.

Воспользуемся при вышеупомянутой конкретизации семейств $(E_x, \mathcal{L}_x)$, $x \in X$, конструкцией, используемой в (6.3) (тензорное произведение) и доставляющей в данном случае ИП

$$\Big(E, \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x\Big), \text{ где } E \overset{\triangle}{=} \prod_{x \in X} E_x. \tag{7.20}$$

В (7.20) реализовано ИП с полуалгеброй множеств. Используя (6.12), это ИП “превращаем” в компакт (6.13). Наконец, конкретизируя таким образом ИП $(E, \mathcal{L})$ настоящего раздела ($\mathcal{L}$ соответствует (6.12)), обращаемся к ИП $(A, \mathcal{L}\big|_A)$ (см. (7.1) при $A \in \mathcal{P}'(E)$). Данный этап полагаем сейчас завершающим. Рассмотрим процесс преобразования компактов Стоуна, считая начальным этап, связанный с конкретизациями 1), 2), 3).

Компакты $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \tau_x) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}_x}[E_x])$, $x \in X$, определяются явным образом (см. разд. 5), что позволяет рассматривать их тихоновское произведение (см. (6.8)) и его гомеоморф (6.9), который позднее "преобразуется" в компакт Стоуна (6.13); последний оказывается гомеоморфом данного тихоновского произведения (соответствующий "сквозной" гомеоморфизм указан в (6.14)).

Далее конструктивно (см. (7.2)) определяем подпространство "завершающего" (предыдущую цепочку) компакта (6.13) и реализуем (7.12) как гомеоморф (см. теорему 7.1) упомянутого подпространства.

Замечание 7.2. Наиболее уязвимым в указанном построении является, по-видимому, использование на этапе, определяемом (6.13), достаточно "бедной множествами" алгебры (6.12). Это сказывается, конечно, и на этапе, определяемом посредством (7.12).

Замечание 7.3. Отметим простой пример приведенной здесь общей схемы, а именно, включение в нее простейшего варианта пространства скалярных программных управлений с геометрическими ограничениями, систематическое исследование которых было начато Л. С. Понтрягиным. Имеется в виду случай, когда (для простоты) $X = [0,1[$ есть промежуток управления; $E_x = [-c, c]$ при всех $x \in X$ ($c \in]0, \infty[$ — ограничение на разворот "руля"), что соответствует 3) при $a = -c$ и $b = c$ и реализует нужный вариант $\mathcal{A}_0[a;b]$; A — множество всех кусочно-постоянных и непрерывных справа функций из $[0,1[$ в $[-c,c]$. Итак, A — множество всех "рэлейных" программных управлений, а $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\big|_A)$ есть множество у/ф алгебры $\mathcal{L}\big|_A \in (\mathrm{alg})[A]$ п/м A. Таким образом, (7.12) — компакт Стоуна, отвечающий функциональному пространству скалярных программных управлений, ограниченных по модулю константой c.

8. Отображения с ярусными компонентами

В связи с конструкцией расширения работы [14] (и ряда других работ) имеет смысл коснуться вопросов, связанных со структурой пространства [14, (4.1)]. Эти вопросы оказываются напрямую связанными с ИП, используемыми в предыдущих разделах, в свете подхода [14, разд. 6], вариантом которого мы здесь и ограничимся. Итак, остановимся сейчас на кратком описании данного подхода в частном случае.

Пространство сходимости образов ультрафильтров. В пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества I и J; через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную топологию $\mathbb{R}$, порожденную метрикой-модулем $\rho\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$; $\rho(\xi, \eta) \triangleq |\xi - \eta|$ $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\forall \eta \in \mathbb{R}$. Через $\otimes^J(\tau_{\mathbb{R}})$ обозначаем топологию поточечной сходимости [2] в $\mathbb{R}^J$: $\otimes^J(\tau_{\mathbb{R}}) \in (\mathrm{top})[\mathbb{R}^J]$ есть топология тихоновской степени $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ (см. в этой связи [21, с. 59]), где J используется в качестве индексного множества. Разумеется, хаусдорфово ТП $(\mathbb{R}^J, \otimes^J(\tau_{\mathbb{R}}))$ есть тихоновская степень ТП, метризуемого полной метрикой, что соответствует [14, (6.16)]. В связи с проблемой конструирования МП представляет интерес множество $\mathbb{F}_{\lim}[I; \mathcal{I}; \mathbb{R}^J; \otimes^J(\tau_{\mathbb{R}})]$ [14, (4.1)], где $\mathcal{I} \in \Pi[I]$ (в пределах данного пункта). Это множество имеет смысл пространства сходимости образов у/ф ИП $(I, \mathcal{I})$.

Напомним, что (см. разд. 2) при $f\colon I \to \mathbb{R}^J$ и $\mathbf{j} \in J$ функция $f(\cdot)(\mathbf{j}) \triangleq (f(i)(\mathbf{j}))_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ есть $\mathbf{j}$-я компонента f. Следуя [14, (6.17)], получаем в виде

$$B_{\otimes}[I; \mathcal{I}; \mathbb{R}; \rho|J] \triangleq \{f \in (\mathbb{R}^J)^I \mid f(\cdot)(\mathbf{j}) \in B(I, \mathcal{I}) \ \forall \mathbf{j} \in J\} \tag{8.1}$$

множество всех отображений из I в $\mathbb{R}^J$ с ярусными компонентами. Роль таких отображений раскрывается в [14, (6.18)], частным случаем которого является следующее: $B_{\otimes}[I; \mathcal{I}; \mathbb{R}; \rho|J] \subset \mathbb{F}_{\lim}[I; \mathcal{I}; \mathbb{R}^J; \otimes^J(\tau_{\mathbb{R}})]$. С этой точки зрения важно располагать возможностью достаточно конструктивного описания $B(I, \mathcal{I})$ (см. (8.1)). Ясно, что этот вопрос касается выбора ИП $(I, \mathcal{I})$. Схема, намеченная в предыдущем разделе, также нуждается в упомянутом описании пространств ярусных функций, причем здесь уже требуется исследование взаимосвязей этих пространств для различных вариантов ИП.

Далее вернемся к построениям разд. 7, связанным с переходом от рассмотрения ИП к представлениям, касающимся его подпространств.

Итак, фиксируем сейчас произвольное непустое множество E, $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и $A \in \mathcal{P}'(E)$; пару $(A, \mathcal{E}|_A)$ рассматриваем как подпространство (широко понимаемого) ИП $(E, \mathcal{E})$. При этом $\mathcal{E}|_A = \{A \cap L \colon L \in \mathcal{E}\} \in \pi[A]$. Легко видеть, что $(\mathcal{E} \in \Pi[E]) \Rightarrow (\mathcal{E}|_A \in \Pi[A])$ и, кроме того, $(\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]) \Rightarrow (\mathcal{E}|_A \in (\mathrm{alg})[A])$. Если $\mathcal{E}$ есть σ-алгебра п/м E, то $\mathcal{E}|_A$ есть σ-алгебра п/м A, а $(A, \mathcal{E}|_A)$ является подпространством стандартного (в данном случае) ИП $(E, \mathcal{E})$ в обычном смысле. Используем ниже для всяких непустого множества H и π-системы $\mathcal{H} \in \pi[H]$ определения $B_0(H, \mathcal{H})$ и $B(H, \mathcal{H})$, соответствующие [19, § 2.7]. Данные определения являются несколько более общими в сравнении с разд. 2. Учитываем (см. разд. 2), что при $M \in \mathcal{P}(E)$ непременно $(\chi_M[E]|A) = \chi_{A \cap M}[A]$, откуда непосредственно следует, что $(f|A) \in B_0(A, \mathcal{E}|_A)\ \forall f \in B_0(E, \mathcal{E})$. Как следствие (см. [19, § 2.7]) имеем свойство

$$(f|A) \in B(A, \mathcal{E}|_A) \qquad \forall f \in B(E, \mathcal{E}). \tag{8.2}$$

Свойство (8.2) позволяет конструировать некоторые отображения с ярусными компонентами в виде сужений аналогичных отображений, определенных на более обширных множествах. Такое представление может оказаться полезным для построений, использующих теорему 7.1.

Еще одно представление, связанное с ярусностью, касается декартова произведения. Ограничимся здесь рассмотрением произведения двух ИП. Однако сначала условимся о соглашении: если z есть упорядоченная пара, т. е. $z = (x, y)$ для некоторых объектов x и y, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z, получая $\mathrm{pr}_1(z) = x$ и $\mathrm{pr}_2(z) = y$. В случае $z \in M \times N$, где M и N — множества, имеем, конечно, $\mathrm{pr}_1(z) \in M$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in N$. В качестве M и N могут использоваться семейства. Итак, фиксируем до конца настоящего раздела ИП $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ и $(\mathbb{T}, \mathcal{T})$ с полуалгебрами множеств: $\mathbb{S}$ и $\mathbb{T}$ — непустые множества, $\mathcal{S} \in \Pi[\mathbb{S}]$ и $\mathcal{T} \in \Pi[\mathbb{T}]$. Тогда $\mathbb{S} \times \mathbb{T} \neq \varnothing$ и

$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(h) \times \mathrm{pr}_2(h) \colon h \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}\} \in \Pi[\mathbb{S} \times \mathbb{T}] \tag{8.3}$$

(полуалгебра измеримых прямоугольников). Следовательно, $(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$ есть ИП с полуалгеброй множеств, причем [23, § 6.5]

$$B_0(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}) = B_0\big(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathbf{a}^0_{\mathbb{S} \times \mathbb{T}}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{T})\big), \tag{8.4}$$

$$B(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}) = B\big(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathbf{a}^0_{\mathbb{S} \times \mathbb{T}}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{T})\big). \tag{8.5}$$

С учетом (8.4), (8.5) ограничимся рассмотрением некоторых свойств $B(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$. Если $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ и $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$, то

$$f \odot g \stackrel{\triangle}{=} \Big(f\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)g\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big)_{z \in \mathbb{S} \times \mathbb{T}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{S} \times \mathbb{T}}. \tag{8.6}$$

Разумеется, $(f \odot g)(x, y) = f(x)g(y)\ \forall x \in \mathbb{S}\ \forall y \in \mathbb{T}$. При этом, конечно, $\chi_{M \times N}[\mathbb{S} \times \mathbb{T}] = \chi_M[\mathbb{S}] \odot \chi_N[\mathbb{T}]\ \forall M \in \mathcal{P}(\mathbb{S})\ \forall N \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$. Поскольку (8.4) и (8.5) — линейные пространства, имеем теперь (см. (8.3)), что

$$f \odot g \in B_0(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}) \qquad \forall f \in B_0(\mathbb{S}, \mathcal{S}) \qquad \forall g \in B_0(\mathbb{T}, \mathcal{T}). \tag{8.7}$$

Отметим сейчас для полноты изложения два очень простых предложения, характеризующих $B(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$.

Предложение 8.1. *Если $\varphi \in B(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ и $\psi \in B(\mathbb{T}, \mathcal{T})$, то $\varphi \odot \psi \in B(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$.*

Доказательство. Ясно, что $\varphi \odot \psi \in \mathbb{B}(\mathbb{S} \times \mathbb{T})$. Используя определения разд. 2, подберем последовательности

$$(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to B_0(\mathbb{S}, \mathcal{S}), \qquad (\psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to B_0(\mathbb{T}, \mathcal{T}), \tag{8.8}$$

для которых $(\|\varphi_i-\varphi\|_{\mathbb{S}})_{i\in\mathbb{N}}\to 0$, $(\|\psi_i-\psi\|_{\mathbb{T}})_{i\in\mathbb{N}}\to 0$. Иными словами, последовательности (8.8) сходятся равномерно к φ и ψ соответственно:

$$\big((\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}\rightrightarrows\varphi\big)\,\&\,\big((\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}\rightrightarrows\psi\big).$$

При этом согласно (8.7) $\varphi_j\odot\psi_j\in B_0(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})$ $\forall j\in\mathbb{N}$. С учетом (8.6) имеем при $k\in\mathbb{N}$ и $z\in\mathbb{S}\times\mathbb{T}$, что

$$|(\varphi_k\odot\psi_k)(z)-(\varphi\odot\psi)(z)|=|\varphi_k\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)\psi_k\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)-\varphi\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)\psi\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)|$$
$$\le|\varphi_k\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)-\varphi\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)|\,|\psi_k\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)|+|\varphi\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)|\,|\psi_k\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)-\psi\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)|$$
$$\le\|\varphi_k-\varphi\|_{\mathbb{S}}\,\|\psi_k\|_{\mathbb{T}}+\|\varphi\|_{\mathbb{S}}\,\|\psi_k-\psi\|_{\mathbb{T}}\le\|\varphi_k-\varphi\|_{\mathbb{S}}\,\|\psi\|_{\mathbb{T}}+\|\varphi_k-\varphi\|_{\mathbb{S}}\,\|\psi_k-\psi\|_{\mathbb{T}}+\|\varphi\|_{\mathbb{S}}\,\|\psi_k-\psi\|_{\mathbb{T}}.$$

Это означает равномерную сходимость $(\varphi_k\odot\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}\rightrightarrows\varphi\odot\psi$, т.е. сходимость

$$\big(\|(\varphi_k\odot\psi_k)-(\varphi\odot\psi)\|_{\mathbb{S}\times\mathbb{T}}\big)_{k\in\mathbb{N}}\to 0.$$

Получили требуемое свойство $\varphi\odot\psi\in B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})$.

Предложение доказано.

Поскольку $B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})$ — линейное пространство, из предложения 8.1 вытекает, в частности, что

$$\sum_{i=1}^{k}f_i\odot g_i\in B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})\ \forall k\in\mathbb{N}\ \forall(f_i)_{i\in\overline{1,k}}\in B(\mathbb{S},\mathcal{S})^k\ \forall(g_i)_{i\in\overline{1,k}}\in B(\mathbb{T},\mathcal{T})^k. \tag{8.9}$$

С другой стороны, из определений легко следует, что

$$\forall h\in B_0(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})\ \exists n\in\mathbb{N}\ \exists(f_i)_{i\in\overline{1,n}}\in B_0(\mathbb{S},\mathcal{S})^n\ \exists(g_i)_{i\in\overline{1,n}}\in B_0(\mathbb{T},\mathcal{T})^n\colon h=\sum_{i=1}^{n}f_i\odot g_i. \tag{8.10}$$

Свойства (8.9) и (8.10) доставляют удобное представление $B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})$. Пусть

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{\odot}[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]&\stackrel{\triangle}{=}\Big\{h\in\mathbb{B}(\mathbb{S}\times\mathbb{T})\mid\exists n\in\mathbb{N}\ \exists(f_i)_{i\in\overline{1,n}}\in B(\mathbb{S},\mathcal{S})^n\\&\qquad\exists(g_i)_{i\in\overline{1,n}}\in B(\mathbb{T},\mathcal{T})^n\colon h=\sum_{i=1}^{n}f_i\odot g_i\Big\}\\&=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_i\odot g_i\colon((f_i)_{i\in\overline{1,n}},(g_i)_{i\in\overline{1,n}})\in B(\mathbb{S},\mathcal{S})^n\times B(\mathbb{T},\mathcal{T})^n\Big\},\end{aligned} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}^0_{\odot}[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]&\stackrel{\triangle}{=}\Big\{h\in\mathbb{B}(\mathbb{S}\times\mathbb{T})\mid\exists n\in\mathbb{N}\\&\qquad\exists(f_i)_{i\in\overline{1,n}}\in B_0(\mathbb{S},\mathcal{S})^n\ \exists(g_i)_{i\in\overline{1,n}}\in B_0(\mathbb{T},\mathcal{T})^n\colon h=\sum_{i=1}^{n}f_i\odot g_i\Big\}\\&=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_i\odot g_i\colon((f_i)_{i\in\overline{1,n}},(g_i)_{i\in\overline{1,n}})\in B_0(\mathbb{S},\mathcal{S})^n\times B_0(\mathbb{T},\mathcal{T})^n\Big\}.\end{aligned} \tag{8.12}$$

Коль скоро $B_0(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})$ — линейное многообразие [19, предложение 2.7.2], из (8.7) и (8.12) вытекает, что $\mathfrak{B}^0_{\odot}[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]\subset B_0(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})$, а из (8.10) и (8.12) следует противоположное вложение. В итоге

$$\mathfrak{B}^0_{\odot}[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]=B_0(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}). \tag{8.13}$$

Условимся теперь о следующем соглашении: если $H\in\mathcal{P}(\mathbb{B}(\mathbb{S}\times\mathbb{T}))$, то $\overline{H}$ есть def замыкание H в топологии sup-нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{S}\times\mathbb{T}}$; в частности,

$$B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})=\overline{B_0(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})}. \tag{8.14}$$

Предложение 8.2. *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})=\overline{\mathfrak{B}^0_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]}=\overline{\mathfrak{B}_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]}. \tag{8.15}$$

Доказательство. Первое равенство в (8.15) следует из (8.13), (8.14). Далее, из (8.9) и (8.11) имеем, что

$$\mathfrak{B}_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]\subset B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}),$$

откуда в силу замкнутости множества (8.14) получаем вложение

$$\overline{\mathfrak{B}_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]}\subset B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}). \tag{8.16}$$

Но из определений (8.11), (8.12) легко следует, что $\mathfrak{B}^0_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]\subset\mathfrak{B}_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]$, а тогда с учетом уже доказанного первого равенства в (8.15) имеем вложение $B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})\subset\overline{\mathfrak{B}_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]}$, что в сочетании с (8.16) доставляет следующее равенство: $B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})=\overline{\mathfrak{B}_\odot[\mathbb{S};\mathbb{T};\mathcal{S};\mathcal{T}]}$.

Предложение доказано.

Последнее весьма очевидное предложение логично связать с построениями разд. 5, имея в виду ситуацию, когда ИП $(\mathbb{S},\mathcal{S})$ и $(\mathbb{T},\mathcal{T})$ соответствуют каждое одному из вариантов $1')-3')$; для этих вариантов описание $B(\mathbb{S},\mathcal{S})$ и $B(\mathbb{T},\mathcal{T})$ в достаточной степени прояснено в [11;12], что позволяет (см. (8.15)) рассматривать $B(\mathbb{S}\times\mathbb{T},\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})$ и выяснять некоторые полезные свойства данного пространства.

9. Множество допустимых обобщенных элементов

В настоящем разделе рассмотрим вопрос о представлении вспомогательного МП, определяемого как множество допустимых обобщенных элементов [14, (4.8)]. До конца настоящего раздела фиксируем ИП $(E,\mathcal{L})$ с алгеброй множеств: E — непустое множество, $\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]$. Фиксируем, кроме того, непустое семейство $\mathcal{E}$ п/м E; итак, $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Семейство $\mathcal{E}$ полагаем далее направленным: постулируем, что

$$\forall B_1\in\mathcal{E}\ \forall B_2\in\mathcal{E}\ \exists B_3\in\mathcal{E}\colon B_3\subset B_1\cap B_2. \tag{9.1}$$

Семейство $\mathcal{E}$ со свойством (9.1) используется далее в качестве ограничений асимптотического характера (условие (9.1) не снижает общности, как показано в [8, с. 119], но доставляет некоторые удобства в смысле последующей символики). В рассматриваемом случае (см. (9.1)) множество [14, (4.8)], являющееся МП в соответствующем ТП, допускает следующее представление: если $(Y,\mathbf{t})$, $Y\neq\varnothing$, есть ТП и $g\in Y^E$, то

$$(\mathbf{as})[E;Y;\mathbf{t};g;\mathcal{E}]=\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathrm{cl}(g^1(\Sigma),\mathbf{t}), \tag{9.2}$$

где $\mathrm{cl}(\cdot,\mathbf{t})$ — оператор замыкания в ТП $(Y,\mathbf{t})$. Рассмотрим сначала применение (9.2) в случае, когда $Y=\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, $\mathbf{t}=\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$, g есть отображение $((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]$, определяемое как

$$x\mapsto((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x]\colon E\longrightarrow\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \tag{9.3}$$

(см. замечание 3.2). Данный вариант (9.2) определяет вспомогательное МП, играющее важную роль в вопросах представления (основного) МП в T_3-пространстве (см. [14, предложение 5.1]).

Замечание 9.1. В [8–14] основное внимание уделялось случаю, когда $\mathcal{E}\subset\mathcal{L}$, что отвечает идее согласования измеримой структуры и “асимптотических ограничений”. Здесь делается отказ от данного (достаточно ограничительного) условия согласованности. Условие (9.1), как уже отмечалось, несущественно. Поэтому последующие утверждения можно рассматривать как обобщение результатов [14, разд. 5].

Напомним одно представление [9], полагая в соответствии с [9, с. 291], что

$$(\mathrm{Star})[A;\mathcal{L}] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \neq \varnothing\} \qquad \forall A \in \mathcal{P}(E) \tag{9.4}$$

(в [9, с. 290] отмечена связь семейства (9.4) с известным понятием звезды п/м E). Учтем также связь (9.3), (9.4), отмеченную в [9, (6.7)]. Напомним, что при $A \in \mathcal{P}(E)$ множество $((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A) = \{((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x]\colon x \in A\}$ есть образ A при действии отображения (9.3).

Предложение 9.1. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то справедливо следующее равенство:*

$$\mathrm{cl}(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \mathcal{U} \subset (\mathrm{Star})[A;\mathcal{L}]\}. \tag{9.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathbf{F}$ множество в правой части (9.5). Пусть $\mathcal{V} \in \mathrm{cl}(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. Из определения $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ вытекает (см. (3.7)), что

$$\{\Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L \in \mathcal{V}\} \in (\mathcal{V} - \mathrm{bas})[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \tag{9.6}$$

По выбору $\mathcal{V}$ имеем из (9.6), что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \cap ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A) \neq \varnothing \qquad \forall L \in \mathcal{V}. \tag{9.7}$$

Пусть $V \in \mathcal{V}$. С учетом (9.7) можно указать (см. (9.3)) $v \in A$ со свойством $((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[v] \in \Phi_{\mathcal{L}}(V)$. Это означает, что $V \in ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[v]$ и, как следствие, $v \in V$ (см. (3.5)). В частности, $A \cap V \neq \varnothing$ и $V \in (\mathrm{Star})[A;\mathcal{L}]$. Поскольку выбор V был произвольным, имеем из (9.4), что $\mathcal{V} \subset (\mathrm{Star})[A;\mathcal{L}]$. Итак, $\mathcal{V} \in \mathbf{F}$. Установлено вложение

$$\mathrm{cl}(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \subset \mathbf{F}. \tag{9.8}$$

Выберем произвольно $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}$. Тогда $\mathfrak{F} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом $\mathfrak{F} \subset (\mathrm{Star})[A;\mathcal{L}]$. Это означает, что

$$A \cap L \neq \varnothing \qquad \forall L \in \mathfrak{F}. \tag{9.9}$$

Из (9.3) и (9.9) легко следует тот факт, что

$$((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L) \neq \varnothing \qquad \forall L \in \mathfrak{F} \tag{9.10}$$

(действительно, при $L \in \mathfrak{F}$ и $x \in A \cap L$ для $\mathcal{X} \triangleq ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x]$ имеем, что $\mathcal{X} \in ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A)$ и $L \in \mathcal{X}$). Из (3.7) и (9.10) вытекает, что $\mathfrak{F} \in \mathrm{cl}(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$ (используется свойство, подобное(9.6)), чем и завершается проверка вложения

$$\mathbf{F} \subset \mathrm{cl}(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]). \tag{9.11}$$

Из (9.8) и (9.11) следует равенство (9.5).

Предложение доказано.

Возвращаясь к нужной конкретизации (9.2), получаем с учетом предложения 9.1, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E];((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{E} \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{9.12}$$

Наиболее важным представляется вариант (9.12) при условии $\varnothing \notin \mathcal{E}$ (в этом случае $\mathcal{E}$ — БФ множества E; случай же $\varnothing \in \mathcal{E}$ неинтересен: согласно (9.2), (9.12) рассматриваемое МП в этом случае пусто). Итак, постулируем, что $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E))$. С учетом (9.1) имеем, что $\mathcal{E}$ есть БФ множества E: $\mathcal{E} \in \beta^0_{\mathcal{P}(E)}[E]$. Согласно (7.2), (7.3) определены множества

$$\mathbb{F}^*_0[\mathcal{L}|\Sigma] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid U \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})) \qquad \forall \Sigma \in \mathcal{E}. \tag{9.13}$$

Из (9.12) и (9.13) вытекает следующее представление вспомогательного МП в компакте Стоуна.

Теорема 9.1. *Вспомогательное МП есть пересечение всех множеств* (9.13):

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}]=\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]. \tag{9.14}$$

Доказательство. Обозначим через Ξ множество в правой части (9.14). Пусть $\mathcal{U}_1\in(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}]$. Тогда согласно (9.12) $\mathcal{U}_1\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $\Sigma\cap U\neq\varnothing\ \forall\Sigma\in\mathcal{E}\ \forall U\in\mathcal{U}_1$. Из (9.13) имеем, что $\mathcal{U}_1\in\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\ \forall\Sigma\in\mathcal{E}$. В итоге $\mathcal{U}_1\in\Xi$, чем завершается проверка вложения

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}]\subset\Xi. \tag{9.15}$$

Пусть теперь $\mathcal{U}_2\in\Xi$. Тогда $\mathcal{U}_2\in\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\ \forall\Sigma\in\mathcal{E}$. В частности, имеем (учитываем свойство $\mathcal{E}\neq\varnothing$), что $\mathcal{U}_2\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. При этом согласно (9.13) $U\cap\Sigma\neq\varnothing\ \forall U\in\mathcal{U}_2\ \forall\Sigma\in\mathcal{E}$. С учетом (9.12) имеем, что $\mathcal{U}_2\in(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}]$. Итак, $\Xi\subset(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}]$. Используя данное вложение и (9.15), получаем (9.14).

Теорема доказана.

Рассмотрим аналоги положений [14, предложение 4.1, теорема 5.1]. Фиксируем хаусдорфово ТП $(\mathbf{H},\tau)$, $\mathbf{H}\neq\varnothing$, в котором определяем, следуя [16, гл. I], сходимость БФ множества $\mathbf{H}$ (имеются в виду семейства $\mathcal{B}\in\beta^0_{\mathcal{P}(\mathbf{H})}[\mathbf{H}]$). Условимся обозначать упомянутую сходимость посредством выражений вида $\mathcal{B}\overset{\tau}{\Longrightarrow}y$, где $\mathcal{B}$ — БФ множества $\mathbf{H}$ и $y\in\mathbf{H}$. Пусть $\mathbf{f}\in\mathbf{H}^E$. Если $\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то

$$\mathbf{f}^1[\mathcal{U}]\overset{\triangle}{=}\{\mathbf{f}^1(U)\colon U\in\mathcal{U}\}$$

есть БФ $\mathbf{H}$, т.е. $\mathbf{f}^1[\mathcal{U}]\in\beta^0_{\mathcal{P}(\mathbf{H})}[\mathbf{H}]$. Полагаем в дальнейшем, что $\mathbf{f}\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$ [14, (4.1)]; это в нашем случае эквивалентно условию

$$\forall\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists y\in\mathbf{H}\colon\mathbf{f}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}y.$$

Замечание 9.2. Конкретный вариант $\mathbf{f}$ можно реализовать по схеме [14, разд. 6] в виде отображения из множества E в тихоновскую степень ТП, метризуемого полной метрикой, со свойством ярусности (относительно $(E,\mathcal{L})$) всех компонент (отображения $\mathbf{f}$). В частности, можно полагать упомянутое ТП совпадающим с $\mathbb{R}$ в оснащении обычной $|\cdot|$-топологией и использовать в качестве $\mathbf{f}$ отображение из множества, подобного (8.1). В случае конечной степени $\mathbb{R}$ можно привлекать для построения $\mathbf{f}$ конструкции на основе (8.11) и предложения 8.2.

Возвращаясь к общему случаю $\mathbf{f}\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$, отметим, что согласно определению [14, с. 303] реализуется оператор $\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]\in\mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$. В силу [14, предложение 4.1]

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\Big)=\Big\{y\in\mathbf{H}\mid\exists\mathcal{U}\in\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\colon\mathbf{f}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}y\Big\}. \tag{9.16}$$

Полагаем в дальнейшем, что $(\mathbf{H},\tau)$ есть T_3-пространство (иными словами, $(\mathbf{H},\tau)$ есть T_1-пространство, для которого в каждой точке замкнутые окрестности образуют локальную базу; следуем здесь определению [24, гл. 4]). Тогда согласно [14, предложение 5.1] в силу теоремы 9.1

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{f};\mathcal{E}]=\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\Big). \tag{9.17}$$

Из (9.16), (9.17) вытекает следующая основная

Теорема 9.2. *Справедлива цепочка равенств*

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{f};\mathcal{E}]=\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\Big)=\Big\{y\in\mathbf{H}\mid\exists\mathcal{U}\in\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\colon\mathbf{f}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}y\Big\}.$$

Содержательный смысл утверждения состоит в следующем: у/ф из пересечения всех множеств $\mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]$, $\Sigma \in \mathcal{E}$, исчерпывают как множество $\mathcal{E}$-допустимых обобщенных элементов, так и множество приближенных решений, т. е. “аппроксиматоров”, в задаче о построении МП в $(\mathbf{H}, \tau)$ (на значениях $\mathbf{f}$) при использовании $\mathcal{E}$ в качестве ограничений асимптотического характера. В заключение отметим несколько весьма очевидных наблюдений. Так, с учетом (9.2) и теоремы 9.1 получаем, что [25, (5.2.24)]

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma] \neq \varnothing, \tag{9.18}$$

причем множество в левой части (9.18) замкнуто в компакте $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$, а значит компактно (в данном ТП).

Отметим теперь одну простую возможность сравнения МП, отвечающих различным вариантам $\mathbf{f}$. Итак, пусть $\mathbf{f}_1 \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$ и $\mathbf{f}_2 \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$. Рассмотрим варианты предыдущих построений для $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f} = \mathbf{f}_2$. Легко проверяется свойство, подобное отмеченному в [3, с. 165]: $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\exists U \in \mathcal{U}\colon \mathbf{f}_1(x) = \mathbf{f}_2(x)\ \forall x \in U) \Longrightarrow (\varphi_{\lim}[\mathbf{f}_1](\mathcal{U}) = \varphi_{\lim}[\mathbf{f}_2](\mathcal{U})).$$

С учетом данного свойства и (9.17) получаем следующие утверждения:

$$\begin{gathered}\Big(\exists \mathcal{U} \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\ \exists U \in \mathcal{U}\colon \mathbf{f}_1(x) = \mathbf{f}_2(x)\ \forall x \in U)\\ \Longrightarrow ((\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{f}_1;\mathcal{E}] \cap (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{f}_2;\mathcal{E}] \neq \varnothing\Big);\end{gathered} \tag{9.19}$$

$$\begin{gathered}\Big(\forall \mathcal{U} \in \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbb{F}_0^*[\mathcal{L}|\Sigma]\ \exists U \in \mathcal{U}\colon \mathbf{f}_1(x) = \mathbf{f}_2(x)\ \forall x \in U\Big)\\ \Longrightarrow ((\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{f}_1;\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{f}_2;\mathcal{E}]).\end{gathered} \tag{9.20}$$

В (9.19) указаны условия, гарантирующие существование хотя бы одного “общего” элемента притяжения, а в (9.20) содержится условие, достаточное для совпадения двух МП. Итак (см. (9.17), (9.19), (9.20)) вспомогательное МП, определяемое конструктивно в виде пересечения множеств, подобных (7.2), (7.3), позволяет изучать различные свойства основного МП, реализуемого в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$. Согласование рассматриваемой конструкции с построениями [14, разд. 4, 5] (в частном случае $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$) обеспечивается свойством, указанном в замечании 7.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Архангельский А. В.** Компактность // Итоги науки и техники. 1989. Т. 50. С. 7–128. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
2. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
3. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.
4. **Ченцов А. Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Соврем. математика и ее приложения / АН Грузии, Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
5. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. **Красовский Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
7. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
8. **Ченцов А. Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
9. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.

10. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения: задача соблюдения ограничений асимптотического характера // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1047–1064.
11. **Ченцов А. Г.** Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 225–239.
12. **Ченцов А. Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
13. **Ченцов А. Г.** К вопросу о представлении элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
14. **Ченцов А. Г.** Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 298–314.
15. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
16. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
17. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
18. **Ченцов А. Г.**. Об одном примере построения множеств притяжения с использованием пространства Стоуна // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 4. С. 108–124.
19. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2009. 389 с.
20. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
21. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
22. **Ченцов А. Г.** К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств // Тр. Ин-та математики и механики Уро РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 307–319.
23. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2010. 542 с.
24. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
25. **Chentsov A. G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 10.07.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.957+517.988+517.977.56

О ГЛАДКОСТИ АППРОКСИМИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ГУРСА — ДАРБУ НА ВАРЬИРУЕМОЙ ОБЛАСТИ[1]

А. В. Чернов

На примере управляемой нелинейной системы Гурса — Дарбу изучается один достаточно общий подход к приближенному решению задач оптимального управления сосредоточенными и распределенными системами, аффинными по управляющим переменным, как на фиксированной, так и на варьируемой области независимых переменных. Основная идея указанного подхода состоит в аппроксимации исходной бесконечномерной задачи оптимизации гладкой конечномерной задачей математического программирования сравнительно небольшой размерности путем сплайновой разрывной интерполяции искомого управления на подвижной сетке. Устанавливается существование частных производных функций аппроксимирующей задачи и выводятся соответствующие формулы.

Ключевые слова: приближенное решение задач оптимального управления, система Гурса — Дарбу, сплайновая интерполяция управления, подвижная сетка, формулы производных.

A. V. Chernov. On the smoothness of an approximated optimization problem for a Goursat–Darboux system on a varied domain.

We use an example of a controlled nonlinear Goursat–Darboux system to study a rather general approach to the approximate solution of optimal control problems associated with lumped and distributed parameter systems that are affine in control variables; the domain of independent variables can be fixed or varied. The main idea of this approach consists in the approximation of the original infinite-dimensional optimization problem by a smooth finite-dimensional mathematical programming problem of comparatively small dimension with the help of spline discontinuous interpolation of the desired control on a floating mesh. We establish the existence of partial derivatives for functions of the approximating problem and derive necessary formulas.

Keywords: approximate solving of optimal control problems, Goursat–Darboux system, spline interpolation of the control, floating mesh, derivatives formulas.

Введение

Актуальной является разработка эффективных численных методов оптимального управления, которые позволяли бы оптимизировать нелинейные динамические системы и были бы применимы к задачам с варьируемой областью. На данный момент существует обширная литература, касающаяся линейной задачи быстродействия для сосредоточенных систем (см., например, [1]); значительно меньше разработок относительно распределенных систем (см., например, [2]); и сравнительно мало работ, посвященных приближенному решению аналогичных задач для нелинейных распределенных систем. Среди первых работ, касающихся приближенной оптимизации распределенных систем с варьируемой областью, отметим, например, [3]. Укажем, что при оптимизации динамических систем зачастую используется метод конечномерной аппроксимации всей задачи управления (как самого управления, так и управляемой системы) с достаточно мелким фиксированным шагом разбиения. Такой метод позволяет свести исходную задачу бесконечномерной оптимизации к задаче математического программирования, но приводит к большой размерности аппроксимирующей (конечномерной) задачи. Между тем очевидно, что если искать оптимальное управление в виде разрывного кусочно линейного сплайна с *подвижной* (т. е. управляемой) сеткой, то это позволило бы существенно уменьшить количество узлов сетки (в особенности, если из принципа максимума доступна информация о

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

структуре оптимального управления), а тем самым и размерность аппроксимирующей задачи. Кроме того, при таком подходе область изменения независимых переменных может быть не фиксирована, что позволяет рассматривать задачи оптимального управления со свободным временем (и вообще варьируемой областью). По-видимому, впервые идея подобной аппроксимации управления была описана в [3] и затем переоткрыта в [4]. Соответствующий метод был назван в [4] *методом подвижных узлов* (*the floating nodes method*) и применялся для оптимизации сосредоточенных управляемых систем. В [4] рассматривались и кусочно постоянные, и кусочно линейные аппроксимации управления с подвижной сеткой. Как справедливо указано в [4], эффективность метода обеспечивается автоматическим рациональным выбором узловых точек на интервале времени. Основной результат работы [4] состоял в том, что авторы продемонстрировали более высокую точность приближения к оптимальному управлению, обеспечиваемую методом подвижных узлов в классе разрывных функций по сравнению с модифицированным методом последовательной линеаризации. Кроме того, были представлены результаты численного решения конкретных задач управления. В работе [5] также исследовалось применение кусочно постоянных аппроксимаций управления с подвижными узлами к решению задачи оптимизации сосредоточенной управляемой системы. Было показано, что каждая из аппроксимирующих задач, рассматриваемая как конечномерная задача математического программирования, разрешима; проведен анализ сходимости аппроксимаций. Приведены два примера численного решения, продемонстрировавших эффективность изучаемого подхода.

В данной статье на примере управляемой нелинейной системы Гурса — Дарбу изучается задача математического программирования, возникающая в результате кусочно линейной аппроксимации управления с подвижной (управляемой) сеткой в распределенных задачах оптимизации с (вообще говоря) варьируемой областью. Здесь мы, таким образом, продолжаем исследование *техники параметризации управления* в применении к распределенным системам, начатое в работе [6], где рассматривался случай фиксированной области, фиксированной сетки и кусочно постоянной аппроксимации управления. Далее мы существенно опираемся на предположение о том, что для каждого допустимого управления и каждого фиксированного множества независимых переменных управляемая начально-краевая задача имеет единственное решение. В результате описанной выше сплайновой интерполяции искомого управления, а также параметризации семейства множеств независимых переменных функционал исходной задачи обращается в функцию нескольких переменных. Основной результат статьи заключается в том, что при некоторых естественных требованиях устанавливается существование градиента упомянутой функции и выводятся формулы для ее частных производных по всем переменным. Поэтому для решения аппроксимирующей задачи математического программирования можно (по крайней мере, формально) использовать эффективные численные методы конечномерной условной оптимизации, и в частности готовые математические пакеты. Описание предлагаемого подхода для сосредоточенных управляемых систем, а также соответствующие примеры численной реализации, подтверждающие его эффективность, см. в [7].

Прежде чем сформулировать основной результат статьи, отметим, что он относится к достаточно конкретной управляемой системе и конкретному способу аппроксимации управления. Вместе с тем его доказательство основано на достаточно общем подходе к оценке приращения функционалов, определенных на решениях управляемых распределенных систем, представимых функционально-операторным уравнением типа Гаммерштейна с варьируемой областью. Статья, таким образом, содержит некую абстрактную часть, которая относится к функционально-операторному уравнению общего вида. Упомянутая абстрактная часть, имея здесь вспомогательный, подчиненный характер, вместе с тем представляет также и самостоятельный интерес в силу применимости и к другим конкретным управляемым системам с варьируемой областью. В связи с вышесказанным примем некоторые соглашения. Число $s \in \mathbb{N}$ и векторы α, $\beta \in \mathbb{R}^s$, $\alpha \leq 0 \leq \beta$ (векторные неравенства понимаем покомпонентно) на протяжении всей статьи считаем заданными. Кроме того, для чисел $n, \ell, m \in \mathbb{N}$ и семейства компактов $\mathcal{P} = \{\Pi_T \colon T \in \mathbb{R}^n_+\}$ обозначим $\mathbb{F}(\mathcal{P}, n, \ell, m, s)$ — класс всех функций $f(t, \xi, \upsilon) : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, непрерывно дифференцируемых по переменным $\xi \in \mathbb{R}^\ell$, $\upsilon \in \mathbb{R}^s$ и вместе с производными измеримых по $t \in \mathbb{R}^n_+$, непрерывных по $\{\xi; \upsilon\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и таких, что

F$_1$) $f\big(., x(.), u(.)\big) \in L_1^m(\Pi_T)$ для любых $T \in \mathbb{R}^n_+$, $x \in L^\ell_\infty(\Pi_T)$, $u \in L^s_\infty(\Pi_T)$;

F$_2$) $f'_\xi\big(., x(.), u(.)\big) \in L^{m\times\ell}_\infty(\Pi_T)$ для любых $T \in \mathbb{R}^n_+$, $x \in L^\ell_\infty(\Pi_T)$, $u \in L^s_\infty(\Pi_T)$;

F$_3$) функция $f'_\upsilon(t, \xi, \upsilon)$ не зависит от υ и непрерывна.

Наконец, для числа $n \in \mathbb{N}$ определим множество

$$\mathcal{D}(n, s) = \Big\{u \in L^s_\infty(\mathbb{R}^n_+) \colon u(t) \in [\alpha; \beta] \text{ для п.в. } t \in \mathbb{R}^n_+\Big\}.$$

1. Формулировка основного результата

Пусть $\mathcal{P}$ — семейство компактов $\Pi_T = [0; T_1] \times [0; T_2]$, $T = \{T_1; T_2\} \in \mathbb{R}^2_+$; $f \in \mathbb{F}(\mathcal{P}, 2, 1, 1, 1)$; $s = 1$; $\mathcal{D} = \mathcal{D}(2, 1)$; функции ω_1 и ω_2 абсолютно непрерывны соответственно на $[0; T_1]$ и $[0; T_2]$ для любого $T \in \mathbb{R}^2_+$; $\omega_1(0) = \omega_2(0)$. Рассмотрим управляемую систему Гурса—Дарбу

$$\begin{cases} x''_{t_1t_2}(t) = f\Big(t, x(t), u(t)\Big), \quad t = \{t_1; t_2\} \in \Pi_T = [0, T_1] \times [0, T_2]; \\ x(t_1, 0) = \omega_1(t_1),\ t_1 \in [0, T_1]; \quad x(0, t_2) = \omega_2(t_2),\ t_2 \in [0, T_2]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Решение задачи (1.1) будем понимать в смысле п.в. и искать его среди функций из $\mathbb{C}(\Pi_T)$, имеющих смешанную производную в классе $L_1(\Pi_T)$. Далее будем предполагать, что $\forall T \in \mathbb{R}^2_+$ существует константа $\gamma(T) > 0$ такая, что задача (1.1) имеет единственное решение $x[u, T]$ в классе $\mathbb{C}(\Pi_T)$ для всех $u \in \mathcal{D}$ и при этом $\big\|x[u, T]\big\|_{L_\infty(\Pi_T)} \le \gamma(T)$. С учетом данного предположения для $T \in \mathbb{R}^2_+$, $u \in \mathcal{D}$ рассмотрим функционал

$$J[u, T] = \int\limits_{\Pi_T} F\big(t, x[u, T](t), u(t)\big)\, dt,$$

где $F \in \mathbb{F}(\mathcal{P}, 2, 1, 1, 1)$. Отсюда, в частности, следует (см. условие **F**$_3$)), что функция F аффинна по управляющим переменным $F(t, \xi, \upsilon) = \Phi_0(t, \xi) + \big(\Phi(t, \xi), \upsilon\big)$. Для того чтобы сформулировать основной результат, определим оператор $A_T \colon L_1(\Pi_T) \to \mathbb{C}(\Pi_T)$ с помощью формулы

$$A_T[z](t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} d\xi_1 \int\limits_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2.$$

Через $\widetilde{A}_T$ будем обозначать оператор A_T, рассматриваемый как *линейный ограниченный оператор* (ЛОО) $L_1(\Pi_T) \to L_1(\Pi_T)$. Сопряженный оператор дается формулой

$$\widetilde{A}^*_T[z](t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{T_1} d\xi_1 \int\limits_{t_2}^{T_2} z(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2; \quad \widetilde{A}^*_T : L_\infty(\Pi_T) \to L_\infty(\Pi_T).$$

Ясно, что на самом деле он действует в пространство $\mathbb{C}(\Pi_T)$. *Сопряженным уравнением* по отношению к системе (1.1) при заданных $u \in \mathcal{D}$ и $T \in \mathbb{R}^2_+$ будем называть уравнение

$$\psi = \widetilde{A}^*_T\big[(f'_\xi)^*\psi + (F'_\xi)^*\big], \quad \psi \in \mathbb{C}(\Pi_T),$$

где $f'_\xi = f'_\xi\big(.,x[u,T],u\big)$, $F'_\xi = F'_\xi\big(.,x[u,T],u\big)$; для произвольной матрицы Ξ символ Ξ^* означает, как обычно, транспонированную матрицу. Решение сопряженного уравнения будем обозначать $\psi[u,T](.)$. Кроме того, будем использовать обозначение

$$\mathcal{H}(t) \equiv \mathcal{H}[u,T](t) \equiv \psi^*[u,T](t)\, f'_v\big(t,x[u,T](t)\big) + F'_v\big(t,x[u,T](t)\big).$$

Кусочно линейная сплайновая интерполяция искомого управления. Пусть заданы числа $\nu,\mu\in\mathbb{N}$. Будем рассматривать управляющие переменные двух типов. Управляющие переменные первого типа обозначим $h_{ij}=\{h_i^{(1)},h_j^{(2)}\}\in\mathbb{R}^2$, $i=\overline{1,\nu}$, $j=\overline{1,\mu}$, а второго типа — как $\omega_{ij}=\big\{w_{ij}^{(1)},w_{ij}^{(2)},w_{ij}^{(3)};v_{ij}^{(1)},v_{ij}^{(2)},v_{ij}^{(3)}\big\}\in[\alpha;\beta]^6$, $i=\overline{1,\nu}$, $j=\overline{1,\mu}$. Упорядоченные наборы управляющих переменных первого типа обозначим $\vec{h}$. Аналогичный смысл будет иметь обозначение $\vec{\omega}$. Положим

$$\begin{cases} T_1=T_1[\vec{h}]=\sum\limits_{i=1}^{\nu}\big(h_i^{(1)}\big)^2, & \tau_i^{(1)}=\tau_i^{(1)}[\vec{h}]=\sum\limits_{\kappa=1}^{i}\big(h_\kappa^{(1)}\big)^2, \quad \tau_0^{(1)}=0;\\ T_2=T_2[\vec{h}]=\sum\limits_{j=1}^{\mu}\big(h_j^{(2)}\big)^2, & \tau_j^{(2)}=\tau_j^{(2)}[\vec{h}]=\sum\limits_{\kappa=1}^{j}\big(h_\kappa^{(2)}\big)^2, \quad \tau_0^{(2)}=0.\end{cases}$$

С каждой парой $\{\vec{h};\vec{\omega}\}$ будем соотносить кусочно линейное управление

$$u(t)=\begin{cases} W_{ij}(t)=W_{ij}[\vec{\omega};\Pi_{ij}](t), & t\in\Pi_{ij}^+, \quad i=\overline{1,\nu},\ j=\overline{1,\mu};\\ V_{ij}(t)=V_{ij}[\vec{\omega};\Pi_{ij}](t), & t\in\Pi_{ij}^-, \quad i=\overline{1,\nu},\ j=\overline{1,\mu};\\ 0, & t\notin\Pi_T,\end{cases}$$

где[2] $\Pi_{ij}\equiv[\tau_{i-1}^{(1)};\tau_i^{(1)}]\times[\tau_{j-1}^{(2)};\tau_j^{(2)}]$, Π_{ij}^+, Π_{ij}^- — треугольники с вершинами $(\tau_{i-1}^{(1)};\tau_{j-1}^{(2)})$, $(\tau_{i-1}^{(1)};\tau_j^{(2)})$, $(\tau_i^{(1)};\tau_j^{(2)})$ и $(\tau_{i-1}^{(1)};\tau_{j-1}^{(2)})$, $(\tau_i^{(1)};\tau_{j-1}^{(2)})$, $(\tau_i^{(1)};\tau_j^{(2)})$;

$$W_{ij}(t)\equiv w_{ij}^{(1)}+(w_{ij}^{(3)}-w_{ij}^{(2)})\,\frac{t_1-\tau_{i-1}^{(1)}}{\tau_i^{(1)}-\tau_{i-1}^{(1)}}+(w_{ij}^{(2)}-w_{ij}^{(1)})\,\frac{t_2-\tau_{j-1}^{(2)}}{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}},$$

$$V_{ij}(t)\equiv v_{ij}^{(1)}+(v_{ij}^{(2)}-v_{ij}^{(1)})\,\frac{t_1-\tau_{i-1}^{(1)}}{\tau_i^{(1)}-\tau_{i-1}^{(1)}}+(v_{ij}^{(3)}-v_{ij}^{(2)})\,\frac{t_2-\tau_{j-1}^{(2)}}{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}.$$

Таким образом, функционал $J[u]$ обращается в функцию $\nu+\mu+\nu\mu\cdot 6s$ переменных, которую будем обозначать $J\{\vec{h};\vec{\omega}\}$. Следующее утверждение содержит основной результат статьи.

Теорема 1. *При сделанных предположениях функция $J\{\vec{h};\vec{\omega}\}$ имеет частные производные по всем переменным и справедливы формулы*[3]

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{(1)}}=\frac{1}{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}\int\limits_{\Pi_{ij}^+}\mathcal{H}(t)\,(\tau_j^{(2)}-t_2)\,dt, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{(2)}}=\frac{1}{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}\int\limits_{\Pi_{ij}^+}\mathcal{H}(t)\,(t_2-\tau_{j-1}^{(2)})\,dt-\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{(3)}}, \tag{1.3}$$

[2]Мы считаем здесь, что $\tau_{i-1}^{(1)}<\tau_i^{(1)}$ и $\tau_{j-1}^{(2)}<\tau_j^{(2)}$. В противном случае можно считать, что W_{ij} и V_{ij} принимают любое фиксированное значение из $[\alpha;\beta]$, поскольку на значении функционала это никак не скажется.

[3]Мы предполагаем здесь, что знаменатели дробей не равны нулю. В противном случае производные, в выражения которых они входят, следует считать нулевыми.

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{(3)}} = \frac{1}{\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}} \int\limits_{\Pi_{ij}^+} \mathcal{H}(t)\,(t_1 - \tau_{i-1}^{(1)})\,dt, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_{ij}^{(1)}} = \frac{1}{\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}} \int\limits_{\Pi_{ij}^-} \mathcal{H}(t)\,(\tau_i^{(1)} - t_1)\,dt, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_{ij}^{(2)}} = \frac{1}{\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}} \int\limits_{\Pi_{ij}^-} \mathcal{H}(t)\,(t_1 - \tau_{i-1}^{(1)})\,dt - \frac{\partial J}{\partial v_{ij}^{(3)}}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_{ij}^{(3)}} = \frac{1}{\tau_j^{(2)} - \tau_{j-1}^{(2)}} \int\limits_{\Pi_{ij}^-} \mathcal{H}(t)\,(t_2 - \tau_{j-1}^{(2)})\,dt, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial h_i^{(1)}} = 2\,h_i^{(1)} \Bigg[&\int\limits_0^{T_2} \Phi_0\big(T_1, t_2, x[u,T](T_1,t_2)\big)\,dt_2 \\
&+ \sum_{j=1}^{\mu} \Bigg\{ \int\limits_{\Pi_{ij}^+} \mathcal{H}(t)\,\frac{\partial}{\partial \tau_i^{(1)}} W_{ij}[\Pi_{ij}](t)\,dt + \int\limits_{\Pi_{ij}^-} \mathcal{H}(t)\,\frac{\partial}{\partial \tau_i^{(1)}} V_{ij}[\Pi_{ij}](t)\,dt \\
&+ \frac{1}{\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}} \int\limits_{\Gamma_{ij}} \mathcal{H}(t)\,\big[W_{ij}[\Pi_{ij}](t) - V_{ij}[\Pi_{ij}](t)\big]\,(t_1 - \tau_{i-1}^{(1)})\,dt_2 \\
&+ \int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\tau_j^{(2)}} \mathcal{H}(\tau_i^{(1)}, t_2)\,V_{ij}(\tau_i^{(1)}, t_2)\,dt_2 + \sum_{\kappa=i+1}^{\nu} \Bigg[\int\limits_{\Gamma_{\kappa j}} \mathcal{H}(t)\Big[W_{\kappa j}(t) - V_{\kappa j}(t)\Big]\,dt_2 \\
&- \int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\tau_j^{(2)}} \mathcal{H}(\tau_{\kappa-1}^{(1)}, t_2)\,W_{\kappa j}(\tau_{\kappa-1}^{(1)}, t_2)\,dt_2 + \int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\tau_j^{(2)}} \mathcal{H}(\tau_\kappa^{(1)}, t_2)\,V_{\kappa j}(\tau_\kappa^{(1)}, t_2)\,dt_2 \\
&- \int\limits_{\Pi_{ij}^+} \mathcal{H}(t)\frac{\partial}{\partial t_1} W_{\kappa j}(t)\,dt - \int\limits_{\Pi_{ij}^-} \mathcal{H}(t)\frac{\partial}{\partial t_1} V_{\kappa j}(t)\,dt \Bigg] \Bigg\} \Bigg].
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Формула для $\partial J/\partial h_i^{(2)}$ записывается аналогично (с той лишь разницей, что t_1 и t_2, W и V, $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ меняются ролями). В представленных выше формулах предполагается, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i^{(1)}} W_{ij}[\Pi_{ij}](t) = -(w_{ij}^{(3)} - w_{ij}^{(2)})\,\frac{t_1 - \tau_{i-1}^{(1)}}{(\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)})^2}; \quad \frac{\partial}{\partial t_1} W_{ij}(t) = \frac{w_{ij}^{(3)} - w_{ij}^{(2)}}{\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}};$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i^{(1)}} V_{ij}[\Pi_{ij}](t) = -(v_{ij}^{(2)} - v_{ij}^{(1)})\,\frac{t_1 - \tau_{i-1}^{(1)}}{(\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)})^2}; \quad \frac{\partial}{\partial t_1} V_{ij}(t) = \frac{v_{ij}^{(2)} - v_{ij}^{(1)}}{\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}};$$

Γ_{ij} *— направленный отрезок с началом в точке $(\tau_{i-1}^{(1)}, \tau_{j-1}^{(2)})$ и концом в точке $(\tau_i^{(1)}, \tau_j^{(2)})$.*

Отметим, что Γ_{ij} — это отрезок прямой $t_2 = \tau_{j-1}^{(2)} + \big(\tau_j^{(2)} - \tau_{j-1}^{(2)}\big)\,\big(\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}\big)^{-1}\,(t_1 - \tau_{i-1}^{(1)})$, ориентированный в направлении возрастания параметра $t_1 \in [\tau_{i-1}^{(1)}; \tau_i^{(1)}]$.

Доказательство теоремы 1 основано на формуле приращения функционала, устанавливаемой методом функционально-операторных уравнений (см. следующий раздел), и проводится в разд. 5.

2. Метод функционально-операторных уравнений

Решение задачи (1.1) можно понимать как решение уравнения

$$x = \theta + A_T\big[f(.,x,u)\big], \quad x \in \big[\mathbb{C}(\Pi_T)\big]^{\ell}, \tag{2.1}$$

где $\theta(t) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0)$, $\ell = 1$.

Далее при выводе формул приращения функционала (в следующих двух разделах) *мы абстрагируемся от конкретного вида элемента θ, функции f и оператора A_T*. Это помимо того что удобно, поскольку дает возможность более компактной записи, оправдано также и тем, что существуют другие примеры сведения управляемых распределенных систем к уравнению вида (2.1), см. [8; 9]. Итак, будем считать, что $n, \ell, m, s \in \mathbb{N}$ — произвольные заданные числа и для любых $T \in \mathbb{R}^n_+$, $u \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(n,s)$ рассматривается произвольное функционально-операторное уравнение вида (2.1), где $\mathcal{P} = \big\{\Pi_T \colon T \in \mathbb{R}^n_+\big\}$ — заданное семейство компактов, $\theta \in \big[\mathbb{C}(\Pi_T)\big]^{\ell}$, $f \in \mathbb{F}(\mathcal{P}, n, \ell, m, s)$, $A_T \colon L^m_1(\Pi_T) \to \big[\mathbb{C}(\Pi_T)\big]^{\ell}$ — заданный ЛОО. Далее для измеримого ограниченного множества $H \subset \mathbb{R}^n$ будем использовать обозначения: P_H — оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества H; S_H — оператор сужения на множество H; Q_H — оператор продолжения нулем с множества H на более широкое множество (понятное из контекста). Через $\widetilde{A}_T$ обозначаем оператор A_T, понимаемый как ЛОО $L_1(\Pi_T) \to L_1(\Pi_T)$. Укажем дополнительные предположения, которые нам понадобятся.

Семейство компактов $\mathcal{P} = \big\{\Pi_T : T \in \mathbb{R}^n_+\big\}$ удовлетворяет следующим условиям:

M$_1$) $\forall\, \lambda > 0\ \exists\, T_\lambda \in \mathbb{R}^n_+ \colon \Pi_T \subset \Pi_{T_\lambda}$ для всех $T \in \mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющих неравенству $\|T\| \le \lambda$;

M$_2$) $\forall\, T', T'' \in \mathbb{R}^n_+$ имеем $\Pi_{T'} \cap \Pi_{T''} \in \mathcal{P}$;

M$_3$) $\forall\, T', T'' \in \mathbb{R}^n_+$ мера симметрической разности $\mathrm{mes}\big(\Pi_{T'} \triangle \Pi_{T''}\big) \to 0$ при $T'' \to T'$.

Оператор A_T обладает следующими свойствами:

A$_1$) $P_{\Pi_{T'}} \widetilde{A}_T = P_{\Pi_{T'}} \widetilde{A}_T P_{\Pi_{T'}}$ $\forall\, T, T' \in \mathbb{R}^n_+$ таких, что $\Pi_{T'} \subset \Pi_T$ (множество $\Pi_{T'}$ является вольтерровым по отношению к оператору $\widetilde{A}_T$, см. [10]);

A$_2$) для всех $T \in \mathbb{R}^n_+$ таких, что $\|T\| \le \lambda$, имеем[4] $\widetilde{A}_T = S_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}$;

A$_3$) для любого $y \in L^{m\times\ell}_\infty(\Pi_T)$ операторы $A_{T,y} \colon L^\ell_1(\Pi_T) \to L^\ell_1(\Pi_T)$ и $A_{y,T} \colon L^m_1(\Pi_T) \to L^m_1(\Pi_T)$, определяемые соответственно формулами $A_{T,y}[x] = \widetilde{A}_T[yx]$, $A_{y,T}[z] = y\,\widetilde{A}_T[z]$, квазинильпотентны, т. е. спектральные радиусы $\rho(A_{T,y}) = \rho(A_{y,T}) = 0$;

A$_4$) для всех $T \in \mathbb{R}^n_+$ сопряженный оператор $\widetilde{A}^*_T \colon L^\ell_\infty(\Pi_T) \to L^m_\infty(\Pi_T)$ действует в пространство $\mathbb{C}(\Pi_T)^m$;

A$_5$) $\forall\, T \in \mathbb{R}^n_+$ ЛОО A_T обладает положительной мажорантой[5] $B_T \colon L_1(\Pi_T) \to L_\infty(\Pi_T)$, причем для всякого $y \in L_\infty(\Pi_T)$ оператор $B_{T,y} \colon L_\infty(\Pi_T) \to L_\infty(\Pi_T)$, определяемый формулой $B_{T,y}[x] = B_T[yx]$, $x \in L_\infty(\Pi_T)$, является квазинильпотентным: $\rho(B_{T,y}) = 0$.

Достаточные условия выполнения следующего предположения можно найти в [8; 9].

H) для любого $T \in \mathbb{R}^n_+$ существует константа $\gamma(T) > 0$ такая, что уравнение (2.1) имеет единственное решение $x[u,T] \in \mathbb{C}(\Pi_T)^\ell$ для всех $u \in \mathcal{D}$ и $\big\|x[u,T]\big\|_{L^\ell_\infty(\Pi_T)} \le \gamma(T)$.

---

[4]Это естественное предположение о преемственности между операторами при варьировании множества независимых переменных — в том смысле, что оператор $\widetilde{A}_T$ можно понимать как своего рода сужение оператора $\widetilde{A}_{T_\lambda}$ на класс функций, сосредоточенных на более узком множестве $\Pi_T \subset \Pi_{T_\lambda}$.

[5]ЛОО $B_T \colon L_1(\Pi_T) \to L_\infty(\Pi_T)$ таким, что $\big|A_T[z]\big| \le B_T\big[|z|\big]$ $\forall\, z \in L^m_1(\Pi_T)$.

Теорема 2. *При выполнении предположений разд.* 1 *задача* (1.1), *представленная как уравнение* (2.1), *обладает свойствами* $\mathbf{M}_1$)– $\mathbf{M}_3$), $\mathbf{A}_1$)–$\mathbf{A}_5$), $\mathbf{H}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение свойства $\mathbf{A}_3$) следует из [10] с учетом [8]. Аналогичным образом выполняется свойство $\mathbf{A}_5$) при $B_T[z] = A_T[z]$. Остальные свойства выполняются очевидным образом. □

Предположим теперь, что $F \in \mathbb{F}(\mathcal{P}, n, \ell, m, s)$ и задан интегральный функционал того же вида, что и в разд. 1:

$$J[u,T] = \int\limits_{\Pi_T} F\big(t, x[u,T](t), u(t)\big)\, dt.$$

Отметим, что согласно условию $\mathbf{F}_3$) функция F обладает аффинностью по управляющим переменным

$$F(t,\xi,\upsilon) = \Phi_0(t,\xi) + \big(\Phi(t,\xi), \upsilon\big). \tag{2.2}$$

Следующее утверждение дает формулу приращения функционала.

Теорема 3. *Пусть для уравнения* (2.1) *выполнены предположения* $\mathbf{M}_1$)–$\mathbf{M}_3$), $\mathbf{A}_1$)–$\mathbf{A}_5$), $\mathbf{H}$); $\lambda > 0$ *— заданное число,* $u \in \mathcal{D}$. *Тогда существуют функции* $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *и* $\Upsilon\colon \mathbb{R}_+^{2n} \to \mathbb{R}_+$ *такие, что для любых* $\widehat{u} \in \mathcal{D}$ *и* T, $\widehat{T} \in \mathbb{R}_+^n$, $\|T\|$, $\|\widehat{T}\| \le \lambda$, *имеем* $\Upsilon(T,\widehat{T}) \to 0$ *при* $\widehat{T} \to T$, *и для* $\Delta J = J[\widehat{u},\widehat{T}] - J[u,T]$ *справедливо представление*

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}} \big(\Psi, \widehat{u}\big)\, dt - \int\limits_{\Pi_T} \big(\Psi, u\big)\, dt + \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \big(\chi_{\Pi_{\widehat{T}}} - \chi_{\Pi_T}\big)\, \Phi_0\big(t, x[u,T_\lambda]\big)\, dt + \Upsilon(T,\widehat{T})\, \Re + o(\Re), \tag{2.3}$$

где $\Re = \sigma(\|T_\lambda\|)\, \|\Delta u\|_{L_1^s(\Pi_{T_\lambda})}$, $\Delta u \equiv P_{\Pi_{\widehat{T}}}\widehat{u} - P_{\Pi_T} u$; *и кроме того,* $\Psi \equiv (f_\upsilon')^* Q_{\Pi_T}\psi + (F_\upsilon')^*$, $\psi = \psi[u,T] \in \mathbb{C}(\Pi_T)^m \subset L_\infty^m(\Pi_T)$ *— решение сопряженного уравнения*

$$\psi = \widetilde{A}_T^*\big[(f_\xi')^*\psi + (F_\xi')^*\big], \tag{2.4}$$

$f_\xi' = f_\xi'\big(., x[u,T], u\big)$, $f_\upsilon' = f_\upsilon'\big(., x[u,T], u\big)$, $F_\xi' = F_\xi'\big(., x[u,T], u\big)$, $F_\upsilon' = F_\upsilon'\big(., x[u,T], u\big)$.

Доказательство теоремы 3 см. в разд. 4. В разд. 3 устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для ее доказательства. В свою очередь теоремы 2, 3 существенным образом используются при доказательстве теоремы 1 (см. разд. 5).

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Существует функция* $\overline{\gamma} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $\big\|x[u,T]\big\|_{L_\infty^\ell(\Pi_T)} \le \overline{\gamma}(\|T\|)$ *для всех* $u \in \mathcal{D}$, $T \in \mathbb{R}_+^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\|T\| \le \lambda$. Согласно условию $\mathbf{M}_1$) $\Pi_T \subset \Pi_{T_\lambda}$. По условию $\mathbf{A}_1$) $S_{\Pi_T} x[u,T_\lambda] = x[u,T]$. Тогда

$$\big\|x[u,T]\big\|_{L_\infty^\ell(\Pi_T)} = \big\|P_{\Pi_T} x[u,T_\lambda]\big\|_{L_\infty^\ell(\Pi_{T_\lambda})} \le \big\|x[u,T_\lambda]\big\|_{L_\infty^\ell(\Pi_{T_\lambda})}.$$

И по предположению $\mathbf{H}$) $\big\|x[u,T_\lambda]\big\|_{L_\infty^\ell(\Pi_{T_\lambda})} \le \gamma(T_\lambda)$. Остается обозначить $\overline{\gamma}(\lambda) \equiv \gamma(T_\lambda)$. □

Лемма 2. *Существует функция* $\sigma_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что для любого вектора* $T \in \mathbb{R}_+^n$, *управлений* u, $\widehat{u} \in \mathcal{D}$ *и соответствующего решения* $x = x[u,T] \in \mathbb{C}(\Pi_T)^\ell$ *уравнения* (2.1) *справедлива оценка* $\big\|f(.,x,\widehat{u}) - f(.,x,u)\big\|_{L_1^m(\Pi_T)} \le \sigma_1\big(\|T\|\big)\, \|\widehat{u} - u\|_{L_1^s(\Pi_T)}$, *а также аналогичная оценка при замене* f *на* F, m *на* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую оценку. Вторая оценка доказывается аналогично. Обозначим $\Delta u \equiv \widehat{u} - u$. Согласно лемме Адамара

$$\big|f(.,x,\widehat{u}) - f(.,x,u)\big| \le \int\limits_0^1 \big|f'_v(.,x,u+\theta\,\Delta u)\big|\,d\theta\,|\Delta u| = \big|f'_v(.,x)\big|\,|\Delta u|.$$

С учетом леммы 1 положим $z_*(t) \equiv \max\big\{\big|f'_v(t,\xi)\big| \colon |\xi| \le \overline{\gamma}(\|T\|)\big\}$, $t \in \Pi$. Согласно [11, лемма 3.1] найдется функция $\widetilde{x} \in \mathbb{S}^\ell(\Pi_T)$ такая, что $|\widetilde{x}| \le \overline{\gamma}(\|T\|)$ и при этом $z_*(t) = \big|f'_v\big(t,\widetilde{x}(t)\big)\big|$. В соответствии с условием $\mathbf{F}_3$) получаем, что $z_* \in L_\infty(\Pi_T)$. Таким образом,

$$\big\|f(.,x,\widehat{u}) - f(.,x,u)\big\|_{L_1^m(\Pi_T)} \le \big\|z_*\,|\Delta u|\big\|_{L_1(\Pi_T)} \le \|z_*\|_{L_\infty(\Pi_T)}\,\big\|\Delta u\big\|_{L_1^s(\Pi_T)}.$$

Здесь $\|z_*\|_{L_\infty(\Pi_T)}$ зависит лишь от $\gamma(\|T\|)$. □

Лемма 3. *Существует функция $\sigma_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall\, T \in \mathbb{R}_+^n$, а также управлений u, $\widehat{u} \in \mathcal{D}$ и отвечающих им решений $x = x[u,T]$, $\widehat{x} = x[\widehat{u},T] \in \mathbb{C}(\Pi_T)^\ell$ уравнения* (2.1) *справедлива оценка $\big|\Delta x\big| \le \sigma_2\big(\|T\|\big)\,\|\Delta u\|_{L_1^s(\Pi_T)}$, $\Delta x = \widehat{x} - x$, $\Delta u = \widehat{u} - u$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует непосредственно из [11, теорема 2.1] и леммы 2.

Лемма 4. *Пусть $\lambda > 0$, $y \in L_\infty^{m\times\ell}(\Pi_{T_\lambda})$. Тогда для всякого $T \in \mathbb{R}_+^n$, $\|T\| \le \lambda$ и соответственно $y_T = S_{\Pi_T} y$ справедливы представления*

$$A^k_{T,y_T} = S_{\Pi_T} A^k_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T}, \quad A^k_{y_T,T} = S_{\Pi_T} A^k_{y,T_\lambda} Q_{\Pi_T} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую из формул (3.1). Вторая доказывается аналогично. Доказательство проведем индукцией по $k \in \mathbb{N}$. Но, прежде всего, заметим, что в соответствии с условием $\mathbf{A}_1$) $P_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y} P_{\Pi_T}[z] = P_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda} P_{\Pi_T}[yz] = P_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda}[yz] = P_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y}[z]$ для всех $z \in L_1^\ell(\Pi_{T_\lambda})$, откуда

$$P_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y} P_{\Pi_T} = P_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y}. \tag{3.2}$$

1. Пусть $k = 1$, $z \in L_1^\ell(\Pi_T)$. Согласно $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{A}_1$) имеем

$$A_{T,y_T}[z] = \widetilde{A}_T[y_T z] = S_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda} Q_{\Pi_T} y_T [Q_{\Pi_T} z] = S_{\Pi_T} P_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda} P_{\Pi_T} y [Q_{\Pi_T} z]$$
$$= S_{\Pi_T} P_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda}[y\,Q_{\Pi_T} z] = S_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda}[y\,Q_{\Pi_T} z] = S_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T}[z].$$

2. Предположим, что первая из формул (3.1) верна при $k = j$. Докажем ее справедливость при $k = j + 1$. Пользуясь условиями $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{A}_1$), а также п. 1, предположением индукции и равенством (3.2), можем записать

$$A^{j+1}_{T,y_T} = S_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T}\, S_{\Pi_T} A^j_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T} = S_{\Pi_T} P_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y} P_{\Pi_T}\, A^j_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T}$$
$$= S_{\Pi_T} P_{\Pi_T} A_{T_\lambda,y} A^j_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T} = S_{\Pi_T} A^{j+1}_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T}.$$ □

Лемма 5. *Пусть $\lambda > 0$, $y \in L_\infty^{m\times\ell}(\Pi_{T_\lambda})$. Тогда $\forall\, T \in \mathbb{R}_+^n$, $\|T\| \le \lambda$, и $y_T = S_{\Pi_T} y$ справедливы оценки $\big\|A^k_{T,y_T}\big\| \le \big\|A^k_{T_\lambda,y}\big\|$, $\big\|A^k_{y_T,T}\big\| \le \big\|A^k_{y,T_\lambda}\big\|$, $k \in \mathbb{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую из оценок. Вторая доказывается аналогично. В соответствии с (3.1) можем записать

$$\big\|A^k_{T,y_T}\big\| = \sup\Big\{\big\|S_{\Pi_T} A^k_{T_\lambda,y} Q_{\Pi_T}[z]\big\|_{L_1^\ell(\Pi_T)} \colon z \in L_1^\ell(\Pi_T),\ \|z\| \le 1\Big\}$$
$$= \sup\Big\{\big\|P_{\Pi_T} A^k_{T_\lambda,y}[z]\big\|_{L_1^\ell(\Pi_{T_\lambda})} \colon z \in L_1^\ell(\Pi_{T_\lambda}),\ z = P_{\Pi_T} z,\ \|z\| \le 1\Big\}$$
$$\le \sup\Big\{\big\|P_{\Pi_T} A^k_{T_\lambda,y}[z]\big\|_{L_1^\ell(\Pi_{T_\lambda})} \colon z \in L_1^\ell(\Pi_{T_\lambda}),\ \|z\| \le 1\Big\} = \big\|P_{\Pi_T} A^k_{T_\lambda,y}\big\|,$$

и таким образом, $\big\|A^k_{T,y_T}\big\| \le \big\|P_{\Pi_T} A^k_{T_\lambda,y}\big\| \le \big\|A^k_{T_\lambda,y}\big\|$. □

Лемма 6. *Пусть выполняются предположения леммы 5. Тогда существует константа* $\sigma(\lambda, y) > 0$ *такая, что* $\forall T \in \mathbb{R}^n_+$, $\|T\| \le \lambda$, *справедливы оценки* $\left\|R(A_{T,y_T})\right\| \le \sigma(\lambda, y)$, $\left\|R(A_{y_T,T})\right\| \le \sigma(\lambda, y)$. *Здесь* $R(A_{T,y_T}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A^k_{T,y_T}$, $R(A_{y_T,T}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A^k_{y_T,T}$.

Доказательство. По лемме 5 $\left\|R(A_{T,y_T})\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k_{T,y_T}\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k_{T_\lambda,y}\| \equiv \sigma_1(\lambda, y)$. Последний ряд сходится по признаку Коши, условию $\mathbf{A}_3$) и формуле И.М. Гельфанда. Аналогично $\left\|R(A_{y_T,T})\right\| \le \sigma_2(\lambda, y)$. Остается взять $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. □

Лемма 7. *Пусть* $\lambda > 0$. *Тогда* $\widetilde{A}^*_T = S_{\Pi_T} \widetilde{A}^*_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}$ *для всех* $T \in \mathbb{R}^n_+$, $\|T\| \le \lambda$.

Доказательство. По условию $\mathbf{A}_2$) для любых $x \in L^\ell_\infty(\Pi_T)$ и $z \in L^m_1(\Pi_T)$ имеем

$$\int\limits_{\Pi_T} \big(x, \widetilde{A}_T[z]\big)\, dt = \int\limits_{\Pi_T} \big(x, S_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}[z]\big)\, dt = \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \big(Q_{\Pi_T}[x], P_{\Pi_T} \widetilde{A}_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}[z]\big)\, dt$$

$$= \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \big(Q_{\Pi_T}[x], \widetilde{A}_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}[z]\big)\, dt = \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \big(\widetilde{A}^*_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}[x], Q_{\Pi_T}[z]\big)\, dt = \int\limits_{\Pi_T} \big(S_{\Pi_T} \widetilde{A}^*_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}[x], z\big)\, dt,$$

откуда $\widetilde{A}^*_T = S_{\Pi_T} \widetilde{A}^*_{T_\lambda} Q_{\Pi_T}$. □

Лемма 8. *Пусть* $\lambda > 0$, $y \in L^{m\times\ell}_\infty(\Pi_{T_\lambda})$. *Тогда для всех* $T \in \mathbb{R}^n_+$, $\|T\| \le \lambda$, *имеем*

$$P_{\Pi_{T_\lambda} \setminus \Pi_T} \widetilde{A}^*_{T_\lambda} P_{\Pi_{T_\lambda} \setminus \Pi_T} = P_{\Pi_{T_\lambda} \setminus \Pi_T} \widetilde{A}^*_{T_\lambda}, \quad P_{\Pi_{T_\lambda} \setminus \Pi_T} A^*_{y,T_\lambda} P_{\Pi_{T_\lambda} \setminus \Pi_T} = P_{\Pi_{T_\lambda} \setminus \Pi_T} A^*_{y,T_\lambda},$$

откуда $P_{\Pi_T} \widetilde{A}^*_{T_\lambda} P_{\Pi_T} = \widetilde{A}^*_{T_\lambda} P_{\Pi_T}$, $P_{\Pi_T} A^*_{y,T_\lambda} P_{\Pi_T} = A^*_{y,T_\lambda} P_{\Pi_T}$, $\big(P_{\Pi_T} A^*_{y,T_\lambda} P_{\Pi_T}\big)^k = \big(A^*_{y,T_\lambda}\big)^k P_{\Pi_T}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Лемма 8 является непосредственным следствием условий $\mathbf{M}_1$), $\mathbf{A}_1$) и [13, лемма I.1.4].

4. Формула для приращения функционала

Лемма 9. *Существует функция* $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что для любых* u, $\widehat{u} \in \mathcal{D}$, $T \in \mathbb{R}^n_+$ *справедливо представление*

$$\Delta J = J[\widehat{u}, T] - J[u, T] = \int\limits_{\Pi_T} \big((f'_v)^* \psi + (F'_v)^*, \Delta u\big)\, dt + o(\Re), \tag{4.1}$$

где $\psi = \psi[u, T] \in \mathbb{C}(\Pi_T)^m \subset L^m_\infty(\Pi_T)$ — *решение сопряженного уравнения* (2.4) *и предполагается, что* $f'_v = f'_v\big(., x[u, T], u\big)$, $F'_v = F'_v\big(., x[u, T], u\big)$; $\Re = \sigma(\|T\|)\, \|\Delta u\|_{L^s_1(\Pi_T)}$.

Доказательство. Обозначим $x = x[u, T]$, $\widehat{x} = x[\widehat{u}, T]$, $\Delta x = \widehat{x} - x$, $\Delta u = \widehat{u} - u$. Пользуясь леммой Адамара, имеем

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi_T} \big[F(., \widehat{x}, \widehat{u}) - F(., x, \widehat{u})\big]\, dt + \int\limits_{\Pi_T} \big[F(., x, \widehat{u}) - F(., x, u)\big]\, dt = \int\limits_{\Pi_T} dt \int\limits_0^1 F'_\xi(., x + \theta \Delta x, \widehat{u})\, d\theta \cdot \Delta x$$

$$+ \int\limits_{\Pi_T} dt F'_v(., x)\, \Delta u = \int\limits_{\Pi_T} F'_\xi(., x, \widehat{u})\, \Delta x\, dt + \int\limits_{\Pi_T} F'_v(., x)\, \Delta u\, dt + \hat{\mathcal{R}}(u, \widehat{u}),$$

где $|\hat{\mathcal{R}}(u, \widehat{u})| \le \|\Delta x\|_{L^\ell_\infty(\Pi_T)} \sup\limits_{y,w} \Big\| \big|F'_\xi(., x + y, w) - F'_\xi(., x, w)\big| \Big\|_{L_1(\Pi_T)}$. Здесь супремум берется по всем функциям $y \in L^\ell_\infty(\Pi_T)$, $w \in L^s_\infty(\Pi_T)$ таким, что $|y| \le \|\Delta x\|_{L^\ell_\infty}$, $|w| \le |\alpha| + |\beta|$.

В силу [11, лемма 3.2] существует функция $\widehat{\eta}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +0$ такая, что $|\hat{\mathcal{R}}(u,\widehat{u})| \le \widehat{\eta}\big(\|\Delta x\|_{L^\ell_\infty}\big)\, \|\Delta x\|_{L^\ell_\infty}$. Пользуясь леммой 3, заключаем, что

$$|\hat{\mathcal{R}}(u,\widehat{u})| \le \widehat{\eta}\big[\sigma_2(\|T\|)\, \|\Delta u\|_{L^s_1(\Pi_T)}\big]\, \sigma_2(\|T\|)\, \|\Delta u\|_{L^s_1(\Pi_T)};$$

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi_T} F'_\xi(.,x,\widehat{u})\, \Delta x\, dt + \int\limits_{\Pi_T} F'_\upsilon(.,x)\, \Delta u\, dt + o(\Re)$$

при $\sigma = \sigma_2$. Пользуясь аффинностью функции $F(t,\xi,\upsilon)$ по υ, можем считать, что найдется некоторая функция $\Phi(t,\xi)\colon \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая таким же условиям, как функция $\big|F'_\xi(t,\xi,\upsilon)\big|$, и такая, что $\big|F'_\xi(.,x,\widehat{u}) - F'_\xi(.,x,u)\big| = \Phi(.,x)\, |\Delta u|$. Для $\lambda > 0$ обозначим $Q_\lambda \equiv \Pi_{T_\lambda}$. Согласно условию $\mathbf{A}_2$) $x = S_{\Pi_T} x[u,T_\lambda]$. Пользуясь [11, лемма 3.1] аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 2, нетрудно подобрать функцию $z_\lambda \in L_\infty(Q_\lambda)$ такую, что $\max\big\{\Phi(.,y) \,:\, y \in L^\ell_\infty(Q_\lambda),\ \|y\| \le \gamma(T_\lambda)\big\} \le z_\lambda$. Отсюда $\big\|F'_\xi(.,x,\widehat{u}) - F'_\xi(.,x,u)\big\|_{L_1(\Pi_T)} \le \|z_\lambda\|_{L_\infty(Q_\lambda)}\, \|\Delta u\|_{L^s_1(\Pi_T)}\, \forall\, T \in \mathbb{R}^n_+$, $\|T\| \le \lambda$. Иными словами, найдется функция $\sigma_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\big\|F'_\xi(.,x,\widehat{u}) - F'_\xi(.,x,u)\big\|_{L_1(\Pi_T)} \le \sigma_3(\|T\|)\, \|\Delta u\|_{L^s_1(\Pi_T)}$. Пользуясь еще раз леммой 3, получаем представление

$$J[\widehat{u},T] - J[u,T] = \int\limits_{\Pi_T} F'_\xi(.,x,u)\, \Delta x\, dt + \int\limits_{\Pi_T} F'_\upsilon(.,x)\, \Delta u\, dt + o(\Re), \tag{4.2}$$

в котором $\sigma = \sigma_2 + \sigma_3$. Рассмотрим приращение решения

$$\Delta x = A_T\big[f(.,\widehat{x},\widehat{u}) - f(.,x,u)\big] = \widetilde{A}_T\big[f(.,\widehat{x},\widehat{u}) - f(.,x,u)\big].$$

Практически повторяя проведенные выше выкладки, только с заменой интеграла по множеству Π_T на $\widetilde{A}_T$ и F на f, получаем

$$\Delta x = \widetilde{A}_T\big[f'_\xi(.,x,u)\Delta x\big] + \widetilde{A}_T\big[f'_\upsilon(.,x)\Delta u\big] + \mathcal{R}, \quad \big\|\mathcal{R}\big\|_{L^\ell_\infty(\Pi_T)} = o(\Re), \tag{4.3}$$

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}(u,\widehat{u})$. Обозначим $\Lambda_T : L^\ell_1(\Pi_T) \to L^m_1(\Pi_T)$ — оператор умножения на функцию $y_T = f'_\xi(.,x,u) \in L^{m\times\ell}_\infty(\Pi_T)$. Согласно условию $\mathbf{A}_3$) спектральный радиус[6] $\rho(\widetilde{A}_T\Lambda_T) < 1$. Поэтому определен ЛОО

$$R_T \equiv R(\widetilde{A}_T\Lambda_T) = (I - \widetilde{A}_T\Lambda_T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\widetilde{A}_T\Lambda_T)^k : L^\ell_1(\Pi_T) \to L^\ell_1(\Pi_T),$$

а стало быть, $\Delta x = R_T\widetilde{A}_T\big[f'_\upsilon(.,x,u)\, \Delta u\big] + R_T\big[\mathcal{R}(u,\widehat{u})\big]$. Заметим, что y_T можно представить как $y_T = S_{\Pi_T} y$, $y = f'_\xi\big(.,x[u,T_\lambda],u\big) \in L^{m\times\ell}_\infty(\Pi_{T_\lambda})$. Поэтому, пользуясь леммой 6 и учитывая (4.3), получаем

$$\int\limits_{\Pi_T} F'_\xi(.,x,u)\, \Delta x\, dt = \int\limits_{\Pi_T} F'_\xi(.,x,u)\, R_T\widetilde{A}_T\big[f'_\upsilon(.,x,u)\, \Delta u\big]\, dt + o(\Re).$$

По условию $F'_\xi \in L_\infty$. Таким образом, можем записать

$$\int\limits_{\Pi_T} F'_\xi(.,x,u)\, \Delta x\, dt = \int\limits_{\Pi_T} \Big(\widetilde{A}^*_T\, R^*_T\big[F'_\xi(.,x,u)^*\big], f'_\upsilon(.,x,u)\, \Delta u\Big)\, dt + o(\Re).$$

Обозначая $\psi \equiv \widetilde{A}^*_T\, R^*_T\big[F'_\xi(.,x,u)^*\big] \in L^m_\infty(\Pi_T)$ и подставляя полученное выражение в (4.2), получаем (4.1). Положим $\varphi \equiv R^*_T\big[F'_\xi(.,x,u)^*\big] \in L^\ell_\infty(\Pi_T)$. Тогда $\psi = \widetilde{A}^*_T[\varphi]$. Как известно (см. [12, т. 1, с. 516]), для ЛОО Λ, обладающего обратным ЛОО, справедливо равенство

[6]Оператор $\widetilde{A}_T\Lambda_T$ рассматривается здесь как ЛОО $L^\ell_1 \to L^\ell_1$.

$\big(\Lambda^*\big)^{-1} = \big(\Lambda^{-1}\big)^*$. Поэтому $R_T^* = \big[(I - \widetilde{A}_T\Lambda_T)^{-1}\big]^* = (I - \Lambda_T^*\widetilde{A}_T^*)^{-1}$, откуда заключаем, что функция φ является решением уравнения

$$\varphi - (f_\xi')^*\,\widetilde{A}_T^*[\varphi] = (F_\xi')^*.$$

Действуя на это уравнение оператором $\widetilde{A}_T^*$, убеждаемся, что $\psi = \widetilde{A}_T^*[\varphi]$ является решением уравнения (2.4). По условию $\mathbf{A}_3$) спектральный радиус $\rho(\Lambda_T\widetilde{A}_T) = 0$. Поэтому $\rho(\widetilde{A}_T^*\Lambda_T^*) = 0$ и уравнение (2.4) имеет единственное решение. □

Лемма 10. *Пусть $\lambda > 0$, $u \in \mathcal{D}$. Тогда для всех T, $T' \in \mathbb{R}_+^n$, $\|T\|$, $\|T'\| \le \lambda$, имеем $\big\|Q_{\Pi_{T'}}\psi[u,T'] - Q_{\Pi_T}\psi[u,T]\big\|_{L_\infty^m(\Pi_{T_\lambda})} \to 0$ при $T' \to T$ и вообще при $\operatorname{mes}\big(\Pi_{T'}\triangle\Pi_T\big) \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости примем обозначения: $\Psi \equiv Q_{\Pi_T}\psi[u,T] \in L_\infty^m(\Pi_{T_\lambda})$, $\Psi' \equiv Q_{\Pi_{T'}}\psi[u,T'] \in L_\infty^m(\Pi_{T_\lambda})$, $\Delta\Psi \equiv \Psi' - \Psi$, а также $y_T \equiv f_\xi'\big(.,x[u,T],u\big) \in L_\infty^{m\times\ell}(\Pi_T)$, $Y_T \equiv F_\xi'\big(.,x[u,T],u\big) \in L_\infty^{1\times\ell}(\Pi_T)$ и, соответственно, $y = y_{T_\lambda}$, $Y = Y_{T_\lambda}$. По условию $\mathbf{A}_1$) $S_{\Pi_T}x[u,T_\lambda] = x[u,T]$. Отсюда ясно, что $y_T = S_{\Pi_T}y$, $Y_T = S_{\Pi_T}Y$. Заметим, что $Q_{\Pi_T}S_{\Pi_T} = P_{\Pi_T}$. Поэтому в соответствии с леммой 7 можем записать

$$\Psi' = P_{\Pi_{T'}}\widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big[y^*P_{\Pi_{T'}}\Psi' + P_{\Pi_{T'}}[Y^*]\big], \quad \Psi = P_{\Pi_T}\widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big[y^*P_{\Pi_T}\Psi + P_{\Pi_T}[Y^*]\big].$$

По лемме 8 то же самое можно переписать в виде

$$\Psi' = \widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big[y^*P_{\Pi_{T'}}\Psi'\big] + \widetilde{A}_{T_\lambda}^*P_{\Pi_{T'}}\big[Y^*\big], \quad \Psi = \widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big[y^*P_{\Pi_T}\Psi\big] + \widetilde{A}_{T_\lambda}^*P_{\Pi_T}\big[Y^*\big].$$

Вычитая из первого соотношения второе, получаем

$$\Delta\Psi = \widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big[y^*\Delta\Psi\big] + \widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big(P_{\Pi_{T'}} - P_{\Pi_T}\big)\big[Y^*\big], \quad \text{или} \quad \Delta\Psi = A_{y,T_\lambda}^*\big[\Delta\Psi\big] + \widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big(P_{\Pi_{T'}} - P_{\Pi_T}\big)\big[Y^*\big].$$

По условию $\mathbf{A}_3$) спектральный радиус $\rho(A_{y,T_\lambda}) = 0$. Это означает, что на пространстве $L_1^m(\Pi_{T_\lambda})$ определен ЛОО $R(A_{y,T_\lambda}) = (I - A_{y,T_\lambda})^{-1}$. Как известно (см. [12, т. 1, с. 516]), для ЛОО Λ, обладающего обратным ЛОО, справедливо равенство $\big(\Lambda^*\big)^{-1} = \big(\Lambda^{-1}\big)^*$. Отсюда делаем вывод, что на $L_\infty^m(\Pi_{T_\lambda})$ определен ЛОО $R(A_{y,T_\lambda}^*) = (I - A_{y,T_\lambda}^*)^{-1} = R(A_{y,T_\lambda})^*$. Поэтому полученное выше соотношение можно переписать в виде $\Delta\Psi = R(A_{y,T_\lambda}^*)\big[\widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big(P_{\Pi_{T'}} - P_{\Pi_T}\big)\big[Y^*\big]\big]$. Таким образом, $\big\|\Delta\Psi\big\|_{L_\infty^m(\Pi_{T_\lambda})} \le \big\|R(A_{y,T_\lambda}^*)\big\| \cdot \big\|\widetilde{A}_{T_\lambda}^*P_{\Pi_{T'}\triangle\Pi_T}Y^*\big\|_{L_\infty^\ell(\Pi_{T_\lambda})}$. Заметим, что оператор $\widetilde{A}_{T_\lambda}$ действует по той же формуле, что и оператор $A_{T_\lambda}\colon L_1^m(\Pi_{T_\lambda}) \to \mathbb{C}(\Pi_{T_\lambda})^\ell$. Отсюда понятно, что $\widetilde{A}_{T_\lambda}$ можно рассматривать и как оператор $L_1^m(\Pi_{T_\lambda}) \to L_2^\ell(\Pi_{T_\lambda})$, и, следовательно, сопряженный оператор $\widetilde{A}_{T_\lambda}^*$ допускает расширение до ЛОО $L_2^\ell(\Pi_{T_\lambda}) \to L_\infty^m(\Pi_{T_\lambda})$. Тогда полученную выше оценку можем преобразовать к виду

$$\big\|\Delta\Psi\big\|_{L_\infty^m(\Pi_{T_\lambda})} \le \big\|R(A_{y,T_\lambda}^*)\big\| \cdot \big\|\widetilde{A}_{T_\lambda}^*\big\|_{L_2^\ell \to L_\infty} \cdot \big\|P_{\Pi_{T'}\triangle\Pi_T}Y^*\big\|_{L_2^\ell(\Pi_{T_\lambda})}.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться условием $\mathbf{M}_3$) и абсолютной непрерывностью интеграла Лебега. □

Далее мы используем представление (2.2).

Лемма 11. *Пусть $\Phi_0 \equiv 0$; $\lambda > 0$ — заданное число. Тогда для любых u, $\widehat{u} \in \mathcal{D}$ и T, $\widehat{T} \in \mathbb{R}_+^n$, $\|T\|$, $\|\widehat{T}\| \le \lambda$, $\Delta J = J[\widehat{u},\widehat{T}] - J[u,T]$, имеем*

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi_T\cap\Pi_{\widehat{T}}} \Big((f_v')^*\psi + (F_v')^*, \Delta u\Big)\,dt + \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} F_v'\,\widehat{u}\,dt - \int\limits_{\Pi_T\setminus\Pi_{\widehat{T}}} F_v'\,u\,dt + o(\Re),$$

где $\Re = \sigma(\|T_\lambda\|)\,\|\Delta u\|_{L_1^s(\Pi_{T_\lambda})}$; $\psi = \psi[u,T'] \in \mathbb{C}(\Pi_{T'})^m \subset L_{p'}^m(\Pi_{T'})$ — решение сопряженного уравнения (2.4) при $T = T' \in \mathbb{R}_+^n$, $\Pi_T \cap \Pi_{\widehat{T}} = \Pi_{T'}$; $\Delta u \equiv P_{\Pi_{\widehat{T}}}\widehat{u} - P_{\Pi_T}u$; $f_v' = f_v'\big(.,x[u,T_\lambda],u\big)$, $F_v' = F_v'\big(.,x[u,T_\lambda],u\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее для упрощения записи будем считать, что $P_{\Pi_{\widehat{T}}}\widehat{u} = \widehat{u}$, $P_{\Pi_T}u = u$. Согласно условию $\mathbf{M}_2$) найдется $T' \in \mathbb{R}^n_+$ такое, что $\Pi_T \cap \Pi_{\widehat{T}} = \Pi_{T'}$. Поэтому в соответствии с (2.2) при $\Phi_0 \equiv 0$ (учитывая, что $x[u,T] = S_{\Pi_T}x[u,T_\lambda]$, $x[\widehat{u},\widehat{T}] = S_{\Pi_{\widehat{T}}}x[\widehat{u},T_\lambda]$), можем записать

$$J[u,T] = J[u,T'] + \int\limits_{\Pi_T\setminus\Pi_{\widehat{T}}} F'_\upsilon(t,x[u,T_\lambda])\,u(t)\,dt; \quad J[\widehat{u},\widehat{T}] = J[\widehat{u},T'] + \mathcal{R},$$

$$\mathcal{R} = \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} F'_\upsilon(t,x[\widehat{u},T_\lambda])\,\widehat{u}(t)\,dt = \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} F\big(t,x[\widehat{u},T_\lambda],\widehat{u}(t)\big)\,dt$$

$$= \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} F\big(t,x[u,T_\lambda],\widehat{u}(t)\big)\,dt + \mathcal{R}_1 = \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} F'_\upsilon(t,x[u,T_\lambda])\,\widehat{u}(t)\,dt + \mathcal{R}_1,$$

$$\mathcal{R}_1 \equiv \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} \big\{F(t,x[\widehat{u},T_\lambda],\widehat{u}) - F(t,x[u,T_\lambda],\widehat{u})\big\}\,dt.$$

В силу (2.2) можем записать $F'_\xi(t,\xi,\upsilon) = \upsilon^*\Phi'_\xi(t,\xi)$. При этом на множестве $\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T$ управление $u \equiv 0$ и, следовательно, $\widehat{u} = \Delta u$. Тогда, пользуясь леммой Адамара, получаем

$$\mathcal{R}_1 = \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} \Delta u^* \int\limits_0^1 \Phi'_\xi\big(t,x[u,T_\lambda] + \theta\,\Delta x\big)\,d\theta\,\Delta x\,dt.$$

Пользуясь [11, лемма 3.1] аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 2, нетрудно подобрать функцию $z_\lambda \in L_\infty(\Pi_{T_\lambda})$ такую, что $\max\big\{\big|\Phi'_\xi(t,\xi)\big| \colon |\xi| \le \gamma(T_\lambda)\big\} = z_\lambda$. Таким образом, $|\mathcal{R}_1| \le \|z_\lambda\|_{L_\infty(\Pi_{T_\lambda})}\,\|\Delta x\|_{L^\ell_\infty(\Pi_{T_\lambda})}\,\|\Delta u\|_{L^s_1(\Pi_{T_\lambda})}$. В соответствии с леммой 3 это означает, что $\mathcal{R}_1 = o(\Re)$. Остается воспользоваться леммой 9 при $T = T'$. □

Лемма 12. *Пусть* $\Phi \equiv 0$; $\lambda > 0$ *— заданное число,* $u \in \mathcal{D}$. *Существует функция* $\Upsilon\colon \mathbb{R}^{2n}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что для любых* $\widehat{u} \in \mathcal{D}$ *и* T, $\widehat{T} \in \mathbb{R}^n_+$, $\|T\|$, $\|\widehat{T}\| \le \lambda$, *имеем* $\Upsilon(T,\widehat{T}) \to 0$ *при* $\widehat{T} \to T$, *и для* $\Delta J = J[\widehat{u},\widehat{T}] - J[u,T]$ *справедливо представление*

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi_T\cap\Pi_{\widehat{T}}} \Big((f'_\upsilon)^*\psi + (F'_\upsilon)^*, \Delta u\Big)\,dt + \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \big(\chi_{\Pi_{\widehat{T}}} - \chi_{\Pi_T}\big)\,\Phi_0\big(t,x[u,T_\lambda]\big)\,dt + \Upsilon(T,\widehat{T})\,\Re + o(\Re),$$

где $\Re = \sigma(\|T_\lambda\|)\,\|\Delta u\|_{L^s_1(\Pi_{T_\lambda})}$; $\psi = \psi[u,T'] \in \mathbb{C}(\Pi_{T'})^m \subset L^m_{p'}(\Pi_{T'})$ *— решение сопряженного уравнения* (2.4) *при* $T = T' \in \mathbb{R}^n_+$, $\Pi_T \cap \Pi_{\widehat{T}} = \Pi_{T'}$; $\Delta u \equiv P_{\Pi_{\widehat{T}}}\widehat{u} - P_{\Pi_T}u$; $f'_\upsilon = f'_\upsilon\big(.,x[u,T_\lambda],u\big)$, $F'_\upsilon = F'_\upsilon\big(.,x[u,T_\lambda],u\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности рассуждений далее будем считать, что $P_{\Pi_{\widehat{T}}}\widehat{u} = \widehat{u}$, $P_{\Pi_T}u = u$. С учетом (2.2)

$$J[u,T] = \int\limits_{\Pi_T\cap\Pi_{\widehat{T}}} \Phi_0\big(t,x[u,T]\big)\,dt + \int\limits_{\Pi_T\setminus\Pi_{\widehat{T}}} \Phi_0\big(t,x[u,T]\big)\,dt,$$

$$J[\widehat{u},\widehat{T}] = \int\limits_{\Pi_T\cap\Pi_{\widehat{T}}} \Phi_0\big(t,x[\widehat{u},\widehat{T}]\big)\,dt + \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T} \Phi_0\big(t,x[\widehat{u},\widehat{T}]\big)\,dt.$$

Согласно условию $\mathbf{M}_2$) найдется $T' \in \mathbb{R}^n_+$ такое, что $\Pi_T \cap \Pi_{\widehat{T}} = \Pi_{T'}$. Отсюда $\Delta J = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$, где

$$\mathcal{J}_1 \equiv J[\widehat{u}, T'] - J[u, T'], \quad \mathcal{J}_2 \equiv \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \big(\chi_{\Pi_{\widehat{T}}} - \chi_{\Pi_T}\big)\, \Phi_0\big(t, x[u, T_\lambda]\big)\, dt,$$

$$\mathcal{J}_3 \equiv \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \chi_{\Pi_{\widehat{T}} \setminus \Pi_T} \Phi_0\big(t, x[\widehat{u}, T_\lambda]\big)\, dt - \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \chi_{\Pi_{\widehat{T}} \setminus \Pi_T} \Phi_0\big(t, x[u, T_\lambda]\big)\, dt.$$

Рассмотрим $\mathcal{J}_1$. Непосредственно из леммы 9 при $T = T'$ имеем $\mathcal{J}_1 = \int_{\Pi_{T'}} \big((f'_v)^* \psi[u, T'] + (F'_v)^*, \Delta u\big)\, dt + o(\Re)$, где $f'_v = f'_v\big(., x[u, T_\lambda], u\big)$, $F'_v = F'_v\big(., x[u, T_\lambda], u\big)$.

Слагаемое $\mathcal{J}_2$ уже имеет требуемый вид.

Рассмотрим $\mathcal{J}_3$. Заметим, что функция $F = \chi_{\Pi_{\widehat{T}} \setminus \Pi_T}(t) \Phi_0(t, \xi)$ удовлетворяет всем условиям типа $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_3$) (т. е. нашим предположениям относительно интегранта функционала), причем $F'_v \equiv 0$. Поэтому по лемме 9 при $T = T_\lambda$ имеем $\mathcal{J}_3 = \int_{\Pi_{T_\lambda}} \big((f'_v)^* \widetilde{\psi}, \Delta u\big)\, dt + o(\Re)$, где $\widetilde{\psi} \equiv R(A^*_{y, T_\lambda})\, \widetilde{A}^*_{T_\lambda} \big[\chi_{\Pi_{\widehat{T}} \setminus \Pi_T} Y^*\big]$, а y, Y — такие же, как в лемме 10. Остается воспользоваться оценкой

$$\|\widetilde{\psi}\|_{L^m_\infty(\Pi_{T_\lambda})} \le \big\|R(A^*_{y, T_\lambda})\big\| \cdot \big\|\widetilde{A}^*_{T_\lambda}\big\|_{L_2 \to L_\infty} \cdot \big\|\chi_{\Pi_{\widehat{T}} \setminus \Pi_T} Y^*\big\|_{L^\ell_2(\Pi_{T_\lambda})}$$

и абсолютной непрерывностью интеграла Лебега. □

Доказательство теоремы 3. Далее для упрощения записи будем считать, что $P_{\Pi_{\widehat{T}}} \widehat{u} = \widehat{u}$, $P_{\Pi_T} u = u$. Обозначим $\Psi' \equiv (f'_v)^* Q_{\Pi_{T'}} \psi[u, T'] + (F'_v)^*$, где, как и выше, $\Pi_T \cap \Pi_{\widehat{T}} = \Pi_{T'}$. В соответствии с леммами 11, 12 и линейным характером зависимости ψ от F'_ξ можем записать

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}} \big(\Psi', \widehat{u}\big)\, dt - \int\limits_{\Pi_T} \big(\Psi', u\big)\, dt + \int\limits_{\Pi_{T_\lambda}} \big(\chi_{\Pi_{\widehat{T}}} - \chi_{\Pi_T}\big)\, \Phi_0\big(t, x[u, T_\lambda]\big)\, dt + \Upsilon(T, \widehat{T})\, \Re + o(\Re).$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}} \big(\Psi', \widehat{u}\big)\, dt - \int\limits_{\Pi_T} \big(\Psi', u\big)\, dt = \int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}} \big(\Psi, \widehat{u}\big)\, dt - \int\limits_{\Pi_T} \big(\Psi, u\big)\, dt$$

$$+ \int\limits_{\Pi_T} \Big((f'_v)^* Q_{\Pi_{T'}} \psi[u, T'] - (f'_v)^* Q_{\Pi_T} \psi[u, T], \Delta u\Big)\, dt.$$

С учетом очевидного неравенства $\operatorname{mes}\big(\Pi_T \setminus \Pi_{T'}\big) \le \operatorname{mes}\big(\Pi_T \triangle \Pi_{\widehat{T}}\big)$ и условия $\mathbf{M}_3$) остается лишь воспользоваться леммой 10. □

Замечание 1. Как видно из доказательства леммы 10 и условия $\mathbf{A}_4$), функция $Q_{\Pi_T} \psi[u, T]$ непрерывна на множестве Π_{T_λ}. Поэтому согласно условию $\mathbf{F}_3$) функция Ψ также является непрерывной.

5. Доказательство основного результата

Для упрощения выкладок введем обозначение $\aleph_j \equiv h_j^2$, $j = \overline{1, \nu}$. Далее мы везде предполагаем, что вектор $T = \{T_1; T_2\} \in \mathbb{R}^2_+$ фиксирован, а вектор $\widehat{T} = \{\widehat{T}_1; \widehat{T}_2\} \in \mathbb{R}^2_+$ может варьироваться. В этом смысле мы вправе взять $\lambda = \|T\| + 1 = |T_1| + |T_2| + 1$. Докажем формулы (1.2)–(1.8). Формулы (1.2)–(1.7) устанавливаются сравнительно легко и единообразно — см. далее п. 1). Доказательство формулы (1.8) более нетривиально — см. далее п. 2).

1) Зафиксируем произвольно $i \in \overline{1,\nu}$, $j \in \overline{1,\mu}$. Найдем $\partial J/\partial w_{ij}^{(1)}$. Пусть управление $u \in \mathcal{D}$ соответствует набору $\{\vec{h};\vec{\omega}\}$. Дадим приращение $\delta = \Delta w_{ij}^{(1)}$ компоненте $w_{ij}^{(1)}$ и обозначим $\widehat{u}$ соответствующую вариацию управления u; $\Delta u = \widehat{u} - u$. Тогда

$$\Delta u(t) = \begin{cases} \delta\left(\tau_j^{(2)} - t_2\right)\left(\tau_j^{(2)} - \tau_{j-1}^{(2)}\right)^{-1}, & t \in \Pi_{ij}^+; \\ 0, \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Норма

$$\|\Delta u\|_{L_1^s} = \frac{|\delta|}{\tau_j^{(2)} - \tau_{j-1}^{(2)}} \int\limits_{\Pi_{ij}^+} (\tau_j^{(2)} - t_2)\,dt = \frac{|\delta|}{6}\,(\tau_j^{(2)} - \tau_{j-1}^{(2)})\,(\tau_i^{(1)} - \tau_{i-1}^{(1)}),$$

следовательно, $o(\Re) = o(\delta)$. В соответствии с теоремой 3 (она применима в силу теоремы 2) и формулой (2.3) получаем

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi_T} \Big(\Psi, \Delta u\Big)\,dt + o(\delta) = \left(\frac{\delta}{\tau_j^{(2)} - \tau_{j-1}^{(2)}}, \int\limits_{\Pi_{ij}^+} \Psi(t)\,(\tau_j^{(2)} - t_2)\,dt\right) + o(\delta).$$

Отсюда, учитывая, что $S_{\Pi_T}\Psi(t) = \mathcal{H}^*(t)$, получаем формулу (1.2). Формулы (1.3)–(1.7) доказываются аналогично.

2) Зафиксируем произвольно $i \in \overline{1,\nu}$. Для упрощения выкладок обозначим $\aleph_i^{(1)} \equiv \big(h_i^{(1)}\big)^2$. Найдем производную $\partial J/\partial\aleph_i^{(1)}$. Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что

$$\omega_{\kappa j} = \big\{w_{\kappa j}^{(1)},\ldots,w_{\kappa j}^{(3)}; v_{\kappa j}^{(1)},\ldots,v_{\kappa j}^{(3)}\big\} \in [\alpha;\beta]^6, \quad \kappa = \overline{1,\nu}, \quad j = \overline{1,\mu}.$$

Рассмотрим вариацию $\delta = \Delta\aleph_i^{(1)}$ компоненты $\aleph_i^{(1)}$ и обозначим соответственно $\widehat{T} = \{T_1 + \delta; T_2\}$,

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} W_{\kappa j}(t), & t \in \Pi_{\kappa j}^+, & \kappa = \overline{1, i-1},\ j = \overline{1,\mu}; \\ V_{\kappa j}(t), & t \in \Pi_{\kappa j}^-, & \kappa = \overline{1, i-1},\ j = \overline{1,\mu}; \\ W_{i\to\delta,j}(t), & t \in \Pi_{i\to\delta,j}^+, & \kappa = i,\ j = \overline{1,\mu}; \\ V_{i\to\delta,j}(t), & t \in \Pi_{i\to\delta,j}^-, & \kappa = i,\ j = \overline{1,\mu}; \\ W_{\kappa j}(t_1 - \delta, t_2), & t \in \Pi_{\kappa j}^+ + \vec{\delta}, & \kappa = \overline{i+1,\nu},\ j = \overline{1,\mu}; \\ V_{\kappa j}(t_1 - \delta, t_2), & t \in \Pi_{\kappa j}^- + \vec{\delta}, & \kappa = \overline{i+1,\nu},\ j = \overline{1,\mu}, \end{cases}$$

где приняты следующие обозначения: $\vec{\delta} \equiv \{\delta; 0\}$, $\Pi_{i\to\delta,j} \equiv [\tau_{i-1}^{(1)}; \tau_i^{(1)} + \delta) \times [\tau_{j-1}^{(2)}; \tau_j^{(2)})$,

$$W_{i\to\delta,j}(t) \equiv W_{ij}[\vec{\omega}; \Pi_{i\to\delta,j}](t), \quad V_{i\to\delta,j}(t) \equiv V_{ij}[\vec{\omega}; \Pi_{i\to\delta,j}](t).$$

Далее будем считать, что $\tau_{i-1}^{(1)} < \tau_i^{(1)}$ и модуль $|\delta|$ настолько мал, что $\tau_{i-1}^{(1)} < \tau_i^{(1)} - |\delta|$. Формулы для случая $\tau_{i-1}^{(1)} = \tau_i^{(1)}$ можно вывести путем предельного перехода $\tau_i^{(1)} \to \tau_{i-1}^{(1)} + 0$, т. е. $h_i^{(1)} \to 0$.

Для приращения $\Delta u = \widehat{u} - u$ нетрудно получить оценку

$$\|\Delta u\|_{L_1^s} \le |\beta - \alpha|\,2\nu\,T_2\,|\delta| + \sum_{j=1}^{\mu}\Big\{\mathcal{J}_{ij} + \sum_{\kappa=i+1}^{\nu}\mathcal{J}_{\kappa j}\Big\},$$

где

$$\mathcal{J}_{ij} \equiv \int\limits_{\Pi_{i\to\delta,j}^+ \cap \Pi_{ij}^+} \big|W_{i\to\delta,j} - W_{ij}\big|\,dt + \int\limits_{\Pi_{i\to\delta,j}^- \cap \Pi_{ij}^-} \big|V_{i\to\delta,j} - V_{ij}\big|\,dt;$$

$$\mathcal{J}_{\kappa j} \equiv \int\limits_{(\Pi_{\kappa j}^+ + \vec{\delta}) \cap \Pi_{\kappa j}^+} \big|W_{\kappa j}(t_1 - \delta, t_2) - W_{\kappa j}(t_1, t_2)\big|\,dt + \int\limits_{(\Pi_{\kappa j}^- + \vec{\delta}) \cap \Pi_{\kappa j}^-} \big|V_{\kappa j}(t_1 - \delta, t_2) - V_{\kappa j}(t_1, t_2)\big|\,dt.$$

Ясно, что $\mathcal{J}_{\kappa j} \le 2\,|\beta-\alpha|\,|\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}|\,|\delta|$. Заметим, что функция $W_{i\to\delta,j}(t)$ получается из функции $W_{ij}(t)$ варьированием параметра $\tau_i^{(1)}$. При этом очевидно, что существует производная

$$\frac{\partial}{\partial\tau_i^{(1)}} W_{ij}[\Pi_{ij}](t) = -(w_{ij}^{(3)}-w_{ij}^{(2)})\,\frac{t_1-\tau_{i-1}^{(1)}}{(\tau_i^{(1)}-\tau_{i-1}^{(1)})^2}.$$

То же самое можно заметить и относительно функций $V_{i\to\delta,j}(t)$ и $V_{ij}(t)$. Поэтому, исходя из сделанных замечаний и леммы Адамара, получаем оценку $\mathcal{J}_{ij} \le |\beta-\alpha|\,|\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}|\,|\delta|$. Таким образом (см. теорему 3),

$$\Upsilon(T,\widehat{T})\,\Re + o(\Re) = o(\delta). \tag{5.1}$$

Воспользуемся теоремой 3 и формулой (2.3). В соответствии с формулами (2.3) и (5.1), нам нужно исследовать два специфических приращения — см. далее пп. (а) и (б). Для упрощения выкладок будем считать, что $s=1$.

(а) Рассмотрим

$$\int\limits_{\Pi_{\widehat{T}}} \Psi(t)\,\widehat{u}(t)\,dt - \int\limits_{\Pi_T} \Psi(t)\,u(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\mu}\Big\{\mathcal{F}_{ij}^{+}(\tau_i^{(1)}+\delta)-\mathcal{F}_{ij}^{+}(\tau_i^{(1)})$$

$$+\,\mathcal{F}_{ij}^{-}(\tau_i^{(1)}+\delta)-\mathcal{F}_{ij}^{-}(\tau_i^{(1)}) + \sum_{\kappa=i+1}^{\nu}\Big[\mathcal{F}_{\kappa j}^{+}(\delta)-\mathcal{F}_{\kappa j}^{+}(0)+\mathcal{F}_{\kappa j}^{-}(\delta)-\mathcal{F}_{\kappa j}^{-}(0)\Big]\Big\},$$

где

$$\mathcal{F}_{ij}^{+}(y) \equiv \int\limits_{\tau_{i-1}^{(1)}}^{y} dt_1 \int\limits_{\sigma_{ij}[y](t_1)}^{\tau_j^{(2)}} \Psi(t)\,W_{ij}\big[[\tau_{i-1}^{(1)};y]\times[\tau_{j-1}^{(2)};\tau_j^{(2)})\big](t)\,dt_2,$$

$$\sigma_{ij}[y](t_1) \equiv \tau_{j-1}^{(2)} + \frac{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}{y-\tau_{i-1}^{(1)}}\,(t_1-\tau_{i-1}^{(1)}),$$

$$\mathcal{F}_{ij}^{-}(y) \equiv \int\limits_{\tau_{i-1}^{(1)}}^{y} dt_1 \int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\sigma_{ij}[y](t_1)} \Psi(t)\,V_{ij}\big[[\tau_{i-1}^{(1)};y]\times[\tau_{j-1}^{(2)};\tau_j^{(2)})\big](t)\,dt_2,$$

$$\mathcal{F}_{\kappa j}^{+}(y) \equiv \int\limits_{\tau_{i-1}^{(1)}+y}^{\tau_i^{(1)}+y} dt_1 \int\limits_{\sigma_{\kappa j}[\tau_\kappa^{(1)}](t_1-y)}^{\tau_j^{(2)}} \Psi(t)\,W_{\kappa j}(t_1-y,t_2)\,dt_2,$$

$$\mathcal{F}_{\kappa j}^{-}(y) \equiv \int\limits_{\tau_{i-1}^{(1)}+y}^{\tau_i^{(1)}+y} dt_1 \int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\sigma_{\kappa j}[\tau_\kappa^{(1)}](t_1-y)} \Psi(t)\,V_{\kappa j}(t_1-y,t_2)\,dt_2.$$

В силу замечания 1 и построения функций W_{ij}, V_{ij}, $W_{\kappa j}$, $V_{\kappa j}$ условия теоремы о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра (y), выполняются. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathcal{F}_{ij}^{+}(\tau_i^{(1)}+\delta)-\mathcal{F}_{ij}^{+}(\tau_i^{(1)})}{\delta} = \frac{\partial}{\partial\tau_i^{(1)}}\,\mathcal{F}_{ij}^{+}(\tau_i^{(1)}) = \int\limits_{\Pi_{ij}^{+}} \Psi\,\frac{\partial}{\partial\tau_i^{(1)}}\,W_{ij}[\vec{\omega};\Pi_{ij}]\,dt$$

$$+\int\limits_{\tau_{i-1}^{(1)}}^{\tau_i^{(1)}} dt_1\,\Psi\bigl(t_1,\sigma_{ij}[\tau_i^{(1)}](t_1)\bigr)\,W_{ij}\bigl(t_1,\sigma_{ij}[\tau_i^{(1)}](t_1)\bigr)\,\frac{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}{(\tau_i^{(1)}-\tau_{i-1}^{(1)})^2}\,(t_1-\tau_{i-1}^{(1)})\,dt_2,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathcal{F}_{ij}^-(\tau_i^{(1)}+\delta)-\mathcal{F}_{ij}^-(\tau_i^{(1)})}{\delta}=\frac{\partial}{\partial\tau_i^{(1)}}\,\mathcal{F}_{ij}^-(\tau_i^{(1)})=\int\limits_{\Pi_{ij}^-}\Psi\,\frac{\partial}{\partial\tau_i^{(1)}}\,V_{ij}[\vec{\omega};\Pi_{ij}]\,dt$$

$$-\int\limits_{\tau_{i-1}^{(1)}}^{\tau_i^{(1)}} dt_1\,\Psi\bigl(t_1,\sigma_{ij}[\tau_i^{(1)}](t_1)\bigr)\,V_{ij}\bigl(t_1,\sigma_{ij}[\tau_i^{(1)}](t_1)\bigr)\,\frac{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}{(\tau_i^{(1)}-\tau_{i-1}^{(1)})^2}\,(t_1-\tau_{i-1}^{(1)})\,dt_2$$

$$+\int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\tau_j^{(2)}}\Psi(\tau_i^{(1)},t_2)\,V_{ij}(\tau_i^{(1)},t_2)\,dt_2,\ \lim_{\delta\to 0}\frac{\mathcal{F}_{\kappa j}^+(\delta)-\mathcal{F}_{\kappa j}^+(0)}{\delta}=\bigl(\mathcal{F}_{\kappa j}^+\bigr)'(0)=-\int\limits_{\Pi_{\kappa j}^+}\Psi(t)\,\frac{\partial}{\partial t_1}W_{\kappa j}(t)\,dt$$

$$+\int\limits_{\tau_{\kappa-1}^{(1)}}^{\tau_\kappa^{(1)}}\Psi\bigl(t_1,\sigma_{\kappa j}[\tau_\kappa^{(1)}](t_1)\bigr)\,W_{\kappa j}\bigl(t_1,\sigma_{\kappa j}[\tau_\kappa^{(1)}](t_1)\bigr)\,\frac{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}{\tau_\kappa^{(1)}-\tau_{\kappa-1}^{(1)}}\,dt_1-\int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\tau_j^{(2)}}\Psi(\tau_{\kappa-1}^{(1)},t_2)\,W_{\kappa j}(\tau_{\kappa-1}^{(1)},t_2)\,dt_2,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathcal{F}_{\kappa j}^-(\delta)-\mathcal{F}_{\kappa j}^-(0)}{\delta}=\bigl(\mathcal{F}_{\kappa j}^-\bigr)'(0)=-\int\limits_{\Pi_{\kappa j}^-}\Psi(t)\,\frac{\partial}{\partial t_1}V_{\kappa j}(t)\,dt$$

$$-\int\limits_{\tau_{\kappa-1}^{(1)}}^{\tau_\kappa^{(1)}}\Psi\bigl(t_1,\sigma_{\kappa j}[\tau_\kappa^{(1)}](t_1)\bigr)\,V_{\kappa j}\bigl(t_1,\sigma_{\kappa j}[\tau_\kappa^{(1)}](t_1)\bigr)\,\frac{\tau_j^{(2)}-\tau_{j-1}^{(2)}}{\tau_\kappa^{(1)}-\tau_{\kappa-1}^{(1)}}\,dt_1+\int\limits_{\tau_{j-1}^{(2)}}^{\tau_j^{(2)}}\Psi(\tau_\kappa^{(1)},t_2)\,V_{\kappa j}(\tau_\kappa^{(1)},t_2)\,dt_2.$$

(б) Рассмотрим $\Delta\mathcal{F}\equiv\int_{\Pi_{\widehat{T}}\setminus\Pi_T}\Phi_0\bigl(t,x(t)\bigr)\,dt-\int_{\Pi_T\setminus\Pi_{\widehat{T}}}\Phi_0\bigl(t,x(t)\bigr)\,dt$. Если $\delta>0$, то $T_1+\delta>T_1$ и

$$\Delta\mathcal{F}=\int\limits_{T_1}^{T_1+\delta}dt_1\int\limits_0^{T_2}\Phi_0\bigl(t,x(t)\bigr)\,dt_2\ \Rightarrow\ \lim_{\delta\to+0}\frac{\Delta\mathcal{F}}{\delta}=\int\limits_0^{T_2}\Phi_0\bigl(T_1,t_2,x(T_1,t_2)\bigr)\,dt_2.$$

Если же $\delta<0$, то $T_1+\delta<T_1$ и $\Delta\mathcal{F}=-\int_{T_1-|\delta|}^{T_1}dt_1\int_0^{T_2}\Phi_0\bigl(t,x(t)\bigr)\,dt_2$. Поэтому для левостороннего предела $\lim\limits_{\delta\to-0}\dfrac{\Delta\mathcal{F}}{\delta}=\lim\limits_{|\delta|\to+0}\dfrac{(-\Delta\mathcal{F})}{|\delta|}$ получаем то же самое представление. Таким образом, $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\Delta\mathcal{F}}{\delta}=\int_0^{T_2}\Phi_0\bigl(T_1,t_2,x(T_1,t_2)\bigr)\,dt_2$. Отсюда и из (5.1), п. 2(а) и теоремы 3 получаем (1.8).$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров В.М.** Итерационный метод вычисления в реальном времени оптимального по быстродействию управления // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 1. С. 1–28.
2. **Васильев Ф.П., Иванов Р.П.** О приближенном решении задачи быстродействия в банаховых пространствах при наличии ограничений на фазовые координаты // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 328–347.

3. **Волин Ю.М., Островский Г.М.** О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26, № 7. С. 1197–1204.
4. **Golubev Yu.F., Seregin I.A., Khayrullin R.Z.** The floating nodes method // Sov. J. Comput. Syst. Sci. 1992. Vol. 30, no. 2. P. 71–76.
5. **Li R., Teo K.L., Wong K.H., Duan G.R.** Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems // Math. Comput. Modelling. 2006. Vol. 43, no. 11–12. P. 1393–1403.
6. **Чернов А.В.** О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 12. С. 2029–2043.
7. **Чернов А.В.** О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестн. Нижегор. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 6(1). С. 107–114.
8. **Чернов А.В.** О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
9. **Чернов А.В.** Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
10. **Сумин В.И., Чернов А.В.** Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1402–1411.
11. **Чернов А.В.** О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1616–1629.
12. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Т.1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
13. **Сумин В.И.** Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. I. Н. Новгород: ННГУ, 1992. 110 с.

Чернов Андрей Владимирович
Поступила 16.05.2013
канд. физ.-мат. наук, доцент
Нижегородский государственный университет,
Нижегородский государственный технический университет
e-mail: chavnn@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 519.624

УСТОЙЧИВАЯ СТАНДАРТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ПРИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ [1]

Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина

Рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии с возмущающим параметром ε ($\varepsilon \in (0,1]$) при старшей производной, аппроксимируемая стандартной монотонной разностной схемой на равномерной сетке. Такая схема не сходится ε-равномерно и, кроме того, в случае ее сходимости не является ε-равномерно хорошо обусловленной и устойчивой к компьютерным возмущениям. В статье разрабатывается техника исследования решений стандартной разностной схемы при наличии компьютерных возмущений. Установлены условия, при которых стандартная разностная схема становится устойчивой к возмущениям; получены необходимые и достаточные условия сходимости компьютерных решений при стремлении числа сеточных узлов к бесконечности, а также оценки числа сеточных узлов (в зависимости от параметра ε и компьютерных возмущений Δ, определяемых длиной машинного слова), для которых погрешность численного решения наименьшая.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная краевая задача, уравнение конвекции-диффузии, стандартная разностная схема, равномерная сетка, равномерная норма, обусловленность разностной схемы, возмущенная разностная схема, компьютерные возмущения, возмущения данных, устойчивая стандартная разностная схема.

G. I. Shishkin, L. P. Shishkina. A stable standard difference scheme for a singularly perturbed convection–diffusion equation in the presence of computer perturbations.

A Dirichlet problem approximated by the standard monotone difference scheme on a uniform grid is considered for a singularly perturbed ordinary differential convection–diffusion equation with perturbation parameter ε ($\varepsilon \in (0,1]$) multiplying the highest-order derivative. Such a scheme does not converge ε-uniformly and, moreover, in the case of its convergence, it is not ε-uniformly well-conditioned and stable to computer perturbations. In this paper, a technique is developed to study solutions of the standard difference scheme in the presence of computer perturbations. Conditions are derived under which the standard finite difference scheme becomes stable to perturbations, necessary and sufficient conditions are obtained for the convergence of computer solutions as the number of grid nodes tends to infinity, and estimates are given for the number of grid nodes (depending on the parameter ε and computer perturbations Δ defined by the number of computer word digits) for which the error of the numerical solution is smallest.

Keywords: singularly perturbed boundary value problem, convection–diffusion equation, standard difference scheme, uniform grid, maximum norm, conditioning of a difference scheme, perturbed difference scheme, computer perturbations, data perturbations, stable standard difference scheme.

1. Введение

Классические разностные схемы на равномерных сетках (стандартные схемы) широко используются для решения прикладных задач ввиду их простоты и удобства в использовании [1]. Нередко такие схемы применяются и для решения сингулярно возмущенных уравнений. Однако, как оказалось, эти стандартные схемы для задачи конвекции-диффузии не сходятся ε-равномерно в равномерной норме, причем в случае сходимости этих схем они не являются ε-равномерно хорошо обусловленными, как и ε-равномерно устойчивыми к возмущению данных; см., например, [2–5].

Известная техника (теоретического и экспериментального) исследования сходимости стандартных схем на равномерных сетках в случае их сходимости (см., например, [2; 6–9]) при

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00618).

наличии возмущений данных сеточной задачи и/или компьютерных возмущений, вообще говоря, оказывается непригодной. Таким образом, применимость для решения сингулярно возмущенных задач стандартных схем на равномерных сетках при наличии возмущений требует теоретического обоснования и экспериментального исследования.

Из [2–5] также следует, что при $\varepsilon \to 0$ для сходимости стандартной схемы необходимо неограниченно увеличивать число сеточных интервалов N используемой сетки, а для устойчивости схемы необходимо использовать компьютер с неограниченно растущим числом разрядов машинного слова t (величина t соответствует компьютерным возмущениям данных $\triangle$). Таким образом, появляется интерес к следующей "практической задаче", а именно, при заданном значении параметра ε, определяющем дифференциальную задачу, найти число сеточных интервалов стандартной схемы N и число разрядов машинного слова t $(t = t(\triangle))$, которые обеспечивают требуемую точность δ^* вычисляемого компьютерного решения. Для сингулярно возмущенных задач исследования устойчивости схем и ошибок возмущенного сеточного решения для стандартных разностных схем при возмущении данных, помимо работ [2–5], в литературе не известны; стандартные схемы для сингулярно возмущенных задач при наличии компьютерных возмущений ранее не рассматривались.

В настоящей работе для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии разрабатывается техника исследования сеточных решений при наличии компьютерных возмущений. При известных допустимых компьютерных возмущениях $\triangle$ и заданных значениях параметра ε устанавливаются условия, налагаемые на параметры стандартной схемы (число интервалов сетки N, $N = N(\varepsilon, \triangle)$), при которых ошибки возмущенного сеточного решения по порядку такие же, как ошибки стандартной разностной схемы при отсутствии возмущений, т. е. строится устойчивая стандартная разностная схема при наличии компьютерных возмущений.

Постановка краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии, стандартная схема на равномерной сетке и цель исследования приводятся в разд. 2. Ряд результатов из [3] по исследованию стандартной схемы при возмущении данных, используемых в построениях, приводится в разд. 3. Стандартная разностная схема в случае компьютерных возмущений и аппроксимация решений стандартной схемы компьютерными решениями рассматриваются в разд. 4 и 5 соответственно.

2. Постановка задачи. Цель работы

На множестве $\overline{D} = D \cup \Gamma$, $D = (0,1)$, рассмотрим задачу Дирихле для обыкновенного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии[1]

$$L_{(2.1)}u(x) \equiv \left\{\varepsilon a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} - c(x)\right\} u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \qquad (2.1)$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 и Γ_2 — левая и правая части границы Γ; функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{D}$, причем[2]

$$m \le a(x),\, b(x),\, c(x) \le M, \quad |f(x)| \le M, \quad x \in \overline{D}, \quad |\varphi(x)| \le M, \quad x \in \Gamma,$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. При малых значениях параметра ε в окрестности множества Γ_1 появляется пограничный слой.

[1] Запись $L_{(j,k)}$ $(m_{(j,k)},\ M_{(j,k)},\ G_{h(j,k)})$ означает, что эти операторы (постоянные, сетки) введены в формуле (j,k).

[2] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

Задачу (2.1) аппроксимируем стандартной разностной схемой [1]

$$\Lambda z(x) \equiv \{\varepsilon\, a(x)\, \delta_{\overline{x}\widehat{x}} + b(x)\, \delta_x - c(x)\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{2.2}$$

Здесь $\overline{D}_h = \overline{D}{}^u_h$ — равномерная сетка с шагом $h = 1/N$, где $N+1$ — число узлов $x = x^i$ сетки $\overline{D}{}^u_h$, $i = 0, 1, \ldots, N$; $D_h = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x)$ — вторая центральная разностная производная, $\delta_x\, z(x)$ и $\delta_{\overline{x}}\, z(x)$ — первые разностные (вперед и назад) производные. Разностная схема (2.2) монотонна ε-равномерно [1].

Для $z(x) - u(x)$ — ошибки решения невозмущенной разностной схемы (2.2) (или короче: ошибки сеточного решения) — в случае достаточной гладкости данных задачи (2.1) выполняется оценка (см., например, оценку (3.3) в [3])

$$\|u - z\|_{\overline{D}_h} \le M\, \delta_{st}; \quad \delta_{st} = \delta_{st}(\varepsilon, N) = \left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-1} N^{-1}; \tag{2.3}$$

оценка неулучшаема по порядкам входящих величин с точностью до постоянной-сомножителя. Оценка (2.3) выполняется в случае априорной оценки

$$|d^k/dx^k\, u(x)| \le M\, (1 + \varepsilon^{1-k} + \varepsilon^{-k}\, \exp^{-m\, \varepsilon^{-1} x}), \quad x \in \overline{D}, \quad k \le K, \quad K = 3, \tag{2.4}$$

которая следует из оценки (4.4) в [3].

Для стандартной схемы величина δ_{st} определяется произведением $\varepsilon\, N$: $\delta_{st} = \delta_{st\,1}(\varepsilon N) = (\varepsilon N + 1)^{-1}$. Будем говорить, что величина $\delta_{st} = \delta_{st\,(2.3)}(\varepsilon, N)$, а также $\delta = \delta(\varepsilon, N)$, где $\delta = \delta(\varepsilon, N) = \varepsilon^{-1} N^{-1}$, — параметры точности разностной схемы (2.2) (или короче, точность разностной схемы) и $M_{(2.3)}$ — постоянная скорости сходимости.

Как следует из статьи [3], стандартная разностная схема в случае ее сходимости не является ε-равномерно устойчивой к возмущениям данных сеточной задачи.

Цель настоящей работы — в случае стандартной разностной схемы (2.2), сходящейся к решению краевой задачи (2.1) с оценкой (2.3), исследовать сходимость сеточного решения при наличии компьютерных возмущений и найти условия, при которых стандартная разностная схема в случае ее сходимости является устойчивой к компьютерным возмущениям.

3. Об устойчивости и сходимости стандартной разностной схемы при возмущении данных

Для исследования решений стандартной разностной схемы при наличии компьютерных возмущений необходимы некоторые результаты исследования устойчивости к возмущению данных стандартной разностной схемы, полученные в работе [3]. Приведем их здесь.

3.1. Разностной схеме (2.2) соответствует матричная запись

$$A\, Y = F. \tag{3.1}$$

Здесь A — трехдиагональная $(N+1) \times (N+1)$-матрица (a_{ij}); Y и F — векторы из пространства $\mathbb{R}^{N+1}$ с равномерной вектор-нормой $\|\cdot\|$. Компоненты матрицы A и векторов Y и F определяются соотношениями

$$a_{i,i-1} = -\varepsilon\, h^{-2}\, a(x_i), \quad a_{ii} = 2\, \varepsilon\, h^{-2}\, a(x_i) + h^{-1}\, b(x_i) + c(x_i),$$

$$a_{i,i+1} = -\varepsilon\, h^{-2}\, a(x_i) - h^{-1}\, b(x_i), \quad 2 \le i \le N; \quad Y_i = z(x_i), \quad 1 \le i \le N+1;$$

$$F_1 = \varphi(x_1), \quad F_i = -f(x_i), \quad 2 \le i \le N, \quad F_{N+1} = \varphi(x_{N+1});$$

здесь $x_{i(3.1)} = x^{i+1}$, $x^i \in \overline{D}_h$.

3.2. Разностной схеме (2.2) при возмущении данных соответствует матричная запись

$$A^*\, Y^* = F^*. \tag{3.2}$$

Здесь A^* — возмущенная матрица (a^*_{ij}), Y^* и F^* — возмущенные векторы, $A^* = A + \delta A$, $Y^* = Y + \delta Y$, $F^* = F + \delta F$.

В покомпонентной записи матрицы δA и векторов δF и δY имеем

$$\delta a_{i,i-1} = -\varepsilon\, h^{-2}\, \delta a_i^{i-1}, \quad \delta a_{ii} = 2\,\varepsilon\, h^{-2}\, \delta a_i^i + h^{-1}\, \delta b_i^i + \delta c_i^i, \tag{3.3}$$

$$\delta a_{i,i+1} = -\varepsilon\, h^{-2}\, \delta a_i^{i+1} - h^{-1}\, \delta b_i^{i+1}, \quad 2 \le i \le N;$$

$$\delta F_1 = \delta\varphi(x_1), \quad \delta F_i = -\delta f(x_i), \quad 2 \le i \le N, \quad \delta F_{N+1} = \delta\varphi(x_{N+1}); \quad \delta Y_i = \delta z(x_i).$$

Стандартной разностной схеме при возмущении данных соответствует возмущенная стандартная разностная схема

$$\Lambda^* z^*(x) \equiv \{\varepsilon a^*(x)\delta_{\overline{x}\widehat{x}} + b^*(x)\delta_x - c^*(x)\}\, z^*(x) = f^*(x), \quad x \in D_h, \quad z^*(x) = \varphi^*(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{3.4}$$

Здесь $x = x^i$, $x^i \in \overline{D}_h$, и в соотношениях ниже $x_i = x^{i-1}$, $x^i \in \overline{D}_h$,

$$a^*(x_i) = a(x_i) + \delta a_i^{i-1}, \quad b^*(x_i) = b(x_i) + \delta b_i^{i+1} + \varepsilon\, h^{-1}\, (-\delta a_i^{i-1} + \delta a_i^{i+1}),$$

$$c^*(x_i) = c(x_i) + \delta c_i^i - \varepsilon\, h^{-2}\, (\delta a_i^{i-1} - 2\, \delta a_i^i + \delta a_i^{i+1}) + h^{-1}\, (\delta b_i^i - \delta b_i^{i+1}),$$

$$f^*(x_i) = f(x_i) + \delta f_i, \quad \varphi^*(x_i) = \varphi(x_i) + \delta\varphi_i;$$

$z^*(x)$ есть возмущенное сеточное решение — решение возмущенной разностной схемы (3.4).

Для $z^*(x) - z(x)$ — возмущения сеточного решения — имеем оценку

$$\|z^* - z\|_{\overline{D}_h} \le M\, \big[\; \varepsilon\, N^2\, |\delta a_i^j|^\wedge + N\, |\delta b_i^j|^\wedge + |\delta c_i^i|^\wedge + |\widehat{\psi}_i^i|^\wedge \;\big]; \tag{3.5a}$$

$$|\delta a_i^j|^\wedge = \max_{i,j} |\delta a_i^j|, \quad |\delta b_i^j|^\wedge = \max_{i,j} |\delta b_i^j|, \quad |\delta c_i^i|^\wedge = \max_i |\delta c_i^i|,$$

$$|\widehat{\psi}_i^i|^\wedge = \max \big[\max_{i;\, i=1,N+1} |\delta a_i^i|,\ \max_i |\delta f_i|,\ \max_i |\delta\varphi_i| \big].$$

Для $z^*(x) - u(x)$ — ошибки возмущенного сеточного решения — выполняется оценка в примитивных переменных ε, N

$$\|u - z^*\|_{\overline{D}_h} \le M\, \big[(\varepsilon + N^{-1})^{-1}\, N^{-1} + \varepsilon\, N^2\, |\delta a_i^j|^\wedge + N\, |\delta b_i^j|^\wedge + |\delta c_i^i|^\wedge + |\widehat{\psi}_i^i|^\wedge \;\big]. \tag{3.5b}$$

С ростом $\varepsilon\, N$ решение возмущенной схемы (3.4) сходится к решению схемы (2.2) и, следовательно, к решению краевой задачи (2.1) при условии

$$\varepsilon^{-1}\, N^{-1} = o(1), \quad \max_{i,j;\, i \ne 1,N+1} |\delta a_i^j| = o(\varepsilon^{-1}\, N^{-2}), \quad \max_{i,j} |\delta b_i^j| = o(N^{-1}), \tag{3.6}$$

$$\max_{i;\, i=1,N+1} |\delta a_i^i|, \quad \max_i |\delta c_i^i|, \quad \max_i |\delta f_i|, \quad \max_i |\delta\varphi_i| = o(1); \quad N \to \infty, \quad \varepsilon \in (0,1].$$

Условие (3.6) в примитивных переменных ε, N необходимо и достаточно для сходимости возмущенной схемы (3.4) при $N \to \infty$.

3.3. В информативных переменных ε, δ для возмущения решения $z^*(x) - z(x)$ выполняется оценка

$$\|z^* - z\|_{\overline{D}_h} \le M\, \eta(\varepsilon,\, \delta), \tag{3.7}$$

где $\eta(\varepsilon,\, \delta) = \eta(\varepsilon,\, \delta; \delta A,\, \delta F) = \varepsilon^{-1}\, \delta^{-2}\, |\delta a_i^j|^\wedge + \varepsilon^{-1}\, \delta^{-1}\, |\delta b_i^j|^\wedge + |\delta c_i^i|^\wedge + |\widehat{\psi}_i^i|^\wedge$, $|\widehat{\psi}_i^i|^\wedge = |\widehat{\psi}_i^i|^\wedge_{(3.5)}$, $\delta = \delta_{(2.3)}(\varepsilon,\, N)$; оценка неулучшаема с точностью до постоянной-сомножителя.

Для числа обусловленности разностной схемы (2.2) $\text{æ}_P(A; \overline{D}_h)$ выполняется оценка в информативных переменных

$$\text{æ}_P(A; \overline{D}_h) \le M\, \varepsilon^{-1}\, \delta^{-2}; \tag{3.8}$$

оценка неулучшаема с точностью до постоянной-сомножителя. При фиксированных значениях δ в силу оценки (3.8) число обусловленности $æ_P(A;\overline{D}_h)$ неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$; схема (2.2) не является ε-равномерно хорошо обусловленной.

3.4. Для ошибки возмущенного сеточного решения $z^*(x) - u(x)$ в информативных переменных ε, δ выполняется оценка

$$\|u - z^*\|_{\overline{D}_h} \le M\,[\;\delta + \eta_{(3.7)}(\varepsilon,\,\delta;\,\delta A,\,\delta F)\;]. \tag{3.9}$$

Разностная схема (2.2) не является ε-равномерно устойчивой к возмущению данных. Условие, накладываемое на возмущения данных разностной схемы (2.2),

$$\max_{i,j}|\delta a_i^j| = o(\varepsilon\,\delta^2), \quad \max_{i,j}|\delta b_i^j| = o(\varepsilon\,\delta), \quad \max_i|\delta c_i^i|,\, \max_i|\delta f_i|,\, \max_i|\delta\varphi_i| = o(1), \tag{3.10}$$

где $\delta \to 0$, $\varepsilon \in (0,1]$, является необходимым и достаточным для сходимости возмущенного решения $z^*(x)$ к $u(x)$ при $\delta \to 0$.

При фиксированных возмущениях данных точность возмущенного сеточного решения падает с уменьшением ε до полной потери точности при достаточно малых ε (а именно, при условии $\varepsilon \le \max\{\delta^{-2}\max_{i,j}|\delta a_i^j|,\ \delta^{-1}\max_{i,j}|\delta b_i^j|\}$).

4. Стандартная разностная схема в случае компьютерных возмущений

Рассмотрим стандартную разностную схему в том случае, когда возмущения решения порождаются компьютерными возмущениями при вычислении решения сеточной задачи на компьютере в силу конечности разрядов машинного слова.

4.1. Через $\vartriangle$ обозначим максимум возмущений данных сеточной задачи, вносимых при компьютерных вычислениях. Пусть $z^*_\vartriangle(x), x \in \overline{D}_h$, есть соответствующее компьютерное решение (т. е. возмущенное решение, получаемое на компьютере) разностной схемы в матричной записи (3.2), (3.3) при условии

$$|\delta a_i^j|,\ |\delta b_i^j|,\ |\delta c_i^i|,\ |\delta f(x_i)| \le \vartriangle, \quad 2 \le i \le N; \quad |\delta\varphi(x_i)| \le \vartriangle, \quad i = 1, N+1. \tag{4.1}$$

Функция $z^*_\vartriangle(x), x \in \overline{D}_h$, — решение разностной схемы (3.4), в которой компьютерные возмущения данных δa_i^j, δb_i^j, δc_i^i, $\delta f(x_i)$, $\delta\varphi(x_i)$ удовлетворяют условию (4.1). Будем говорить, что $z^*_\vartriangle(x)$ есть решение разностной схемы (3.4), (4.1) — стандартной разностной схемы при компьютерных возмущениях. Условие (4.1) можно также рассматривать как условие, налагаемое на возмущения данных стандартной разностной схемы при возмущении ее данных, приведенных в разд. 3.

З а м е ч а н и е 1. Конкретные реализуемые в вычислениях возмущения данных в условии (4.1) (определяющие конкретное сеточное решение $z^*_\vartriangle(x)$), вообще говоря, могут быть произвольными. Такое поведение компьютерных решений существенно затрудняет анализ их сходимости. Рассмотрение контролируемых возмущений данных разностной схемы типа (3.3) позволило в разд. 3 выявить влияние возмущения данных на сеточные решения. Полученные в разд. 3 результаты теперь применяются в случае условия (4.1).

Для $\|z^*_\vartriangle - z\|_{\overline{D}_h}$ — возмущения решения стандартной разностной схемы при компьютерных возмущениях, где $z(x)$ — решение стандартной разностной схемы (2.2), (2.1), а $z^*_\vartriangle(x)$ — решение возмущенной стандартной разностной схемы (3.4) при компьютерных возмущениях, удовлетворяющих условию (4.1), с учетом оценки (3.7) получаем оценку в информативных переменных

$$\|z^*_\vartriangle - z\|_{\overline{D}_h} \le M\,\varepsilon^{-1}\,\delta^{-2}\,\vartriangle, \tag{4.2a}$$

где $M = 4M_{(3.7)}$. Эта оценка эквивалентна следующей оценке в примитивных переменных:

$$\|z^*_\vartriangle - z\|_{\overline{D}_h} \le M\,\varepsilon\,N^2\,\vartriangle\,. \tag{4.2b}$$

Оценка (4.2) неулучшаема по порядкам входящих величин.

Оценку сеточной функции $z^*_\Delta(x) - u(x)$ — ошибки компьютерного решения — запишем в виде

$$\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h} \leq \left. \|u - z\|_{\overline{D}_h}\right|_{(2.3)} + \left.\|z^*_\Delta - z\|_{\overline{D}_h}\right|_{(4.2)} \equiv \sigma(u-z; z^*_\Delta - z), \tag{4.3a}$$

где $\sigma(u-z; z^*_\Delta - z)$ — суммарная ошибка (сумма ошибки решения стандартной схемы $\|u-z\|_{\overline{D}_h}$ и возмущения $\|z^*_\Delta - z\|_{\overline{D}_h}$) возмущенного сеточного решения. В информативных переменных ε, δ с учетом оценок (2.3) и (4.2) получаем оценку

$$\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h} \leq M_1\,\delta + M_2\,\varepsilon^{-1}\,\delta^{-2}\ \Delta \leq M\left[\ \delta + \varepsilon^{-1}\,\delta^{-2}\ \Delta\ \right], \tag{4.3b}$$

где $M_1 = M_{(2.3)}$, $M_2 = M_{(4.2a)}$. В примитивных переменных имеем оценку

$$\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h} \leq M_1\,(\varepsilon + N^{-1})^{-1}\,N^{-1} + M_2\,\varepsilon\,N^2\ \Delta\ . \tag{4.3c}$$

Оценка (4.3) неулучшаема по порядкам входящих величин.

Из оценки (4.3b) следует, что условие, накладываемое на компьютерные возмущения

$$\Delta = o(\,\varepsilon\,\delta^2) \tag{4.4}$$

(эквивалентное условию $\Delta = o(\,\varepsilon^{-1}\,N^{-2}))$ при $\delta = o(1)$, $\varepsilon \in (0,1]$, является необходимым и достаточным для сходимости компьютерного решения $z^*_\Delta(x)$ к $u(x)$ при $\delta \to 0$.

При условии $(\varepsilon^{-1}\,\delta^{-2}\ \Delta \leq M\,\delta)$

$$\Delta \leq M\,\varepsilon\,\delta^3, \tag{4.5}$$

эквивалентном $\Delta \leq M\,\varepsilon^{-2}\,N^{-3}$, имеем оценку

$$\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h} \leq M\,\delta. \tag{4.6}$$

При нарушении условия (4.5) (при $\Delta \gg \varepsilon\,\delta^3$), вообще говоря, $\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h} \gg \delta$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть для решения $u(x)$ задачи* (2.1) *выполняется оценка* (2.4). *Тогда для возмущения сеточного решения и ошибки компьютерного решения справедливы оценки* (4.2) *и* (4.3) *соответственно. Условие* (4.4)*, накладываемое на возмущения данных* (4.1)*, является необходимым и достаточным для сходимости компьютерного решения $z^*_\Delta(x)$ при $\delta \to 0$; при условии* (4.5) *компьютерное решение сходится с оценкой* (4.6).

З а м е ч а н и е 2. Отсутствие ε-равномерной устойчивости стандартной разностной схемы (2.2) к возмущениям, в частности компьютерным, весьма ограничивает ее применимость. При решении схемы (2.2) на компьютере с фиксированной длиной машинного слова точность вычисляемого решения падает с уменьшением параметра ε до полной потери точности при достаточно малых значениях ε (а именно, при $t \approx \ln\ \varepsilon^{-1}$, где t — число разрядов машинного слова, $t = \ln\ \Delta^{-1}$).

З а м е ч а н и е 3. При наличии компьютерных возмущений, чтобы получить сеточное решение с требуемой точностью δ при $\varepsilon \to 0$, необходимо использовать сетки с неограниченно растущим числом интервалов N (а именно, как $N \geq \varepsilon^{-1}\delta^{-1}$), а также компьютер с неограниченно растущим числом разрядов машинного слова t (а именно, как $t \geq \ln\ (\varepsilon^{-1}\,\delta^{-3})$ в переменных ε, δ).

З а м е ч а н и е 4. В случае условия (4.5) ошибка компьютерного решения по порядку такая же, как решения невозмущенной схемы (2.2).

З а м е ч а н и е 5. Сравнивая допустимые возмущения данных (3.6), (3.10) и компьютерные возмущения (4.4), при которых решения возмущенных задач сходятся к решению невозмущенной схемы, видим, что эти возмущения одинаковы в случае возмущения в коэффициентах при второй производной, однако другие допустимые возмущения данных в случае условия (3.6) слабее, чем в случае условия (4.4).

4.2. Обсудим поведение оценки ошибки компьютерного решения с учетом ее структуры.

В соответствии с оценкой (4.3) ошибка компьютерного решения $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$, зависящая от величин ε, δ, $\triangle$, растет с ростом δ при больших δ, а также при $\delta \to 0$. При заданных значениях ε, $\triangle$ найдем параметр $\delta = \delta^{opt}$ — оптимальный параметр точности стандартной разностной схемы при компьютерных возмущениях, при котором оценка ошибки компьютерного решения $\|z^*_\triangle - u\|$ принимает наименьшее значение.

Правые части оценок (4.3b) и (4.3c) (представляемые в виде декомпозиции — суммы ошибки решения невозмущенного решения и возмущения) являются выпуклыми функциями относительно величин δ и N соответственно.

Пусть для ошибки компьютерного решения выполняется соотношение, подобное соотношению (4.3a):

$$\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h} \le \widetilde{M}_1\, \delta + \widetilde{M}_2\, \varepsilon^{-1}\, \delta^{-2}\ \triangle \equiv \Psi(\delta; \varepsilon, \triangle), \tag{4.7}$$

здесь $\widetilde{M}_1 = M_{1\,(4.3b)}$, $\widetilde{M}_2 = M_{2\,(4.3b)}$. Таким образом, функция $\Psi(\delta; \varepsilon, \triangle)$ есть функция двух аргументов δ и $\varepsilon^{-1}\ \triangle$, выпуклая вниз по аргументу δ.

В соответствии с (4.7) функция $\Psi(\delta; \varepsilon, \triangle)$ как функция аргумента δ, $\delta = \delta_{(2.3)}(\varepsilon, N)$, принимает следующее наименьшее значение при $\delta = \delta^{opt}$:

$$\Psi^{opt}(\delta; \varepsilon, \triangle) = \Psi(\delta^{opt}; \varepsilon, \triangle) = 3 \times 2^{-2/3}\, \widetilde{M}_1^{2/3}\, \widetilde{M}_2^{1/3}\, \varepsilon^{-1/3}\ \triangle^{1/3} = \frac{3}{2}\ \widetilde{M}_1\ \delta^{opt}, \tag{4.8}$$

где δ^{opt} — оптимальный параметр точности разностной схемы при компьютерных возмущениях, определяется соотношением

$$\delta^{opt} = \delta^{opt}(\varepsilon, \triangle) = M_\delta\, \varepsilon^{-1/3}\ \triangle^{1/3}, \quad M_\delta = 2^{1/3}\, \widetilde{M}^{-1/3}, \quad \widetilde{M} = \widetilde{M}_1\, \widetilde{M}_2^{-1}. \tag{4.9}$$

Соотношению (4.9) для δ^{opt} соответствует следующее соотношение для N^{opt} — оптимального числа сеточных интервалов разностной схемы при компьютерных возмущениях:

$$N^{opt} = N^{opt}(\varepsilon, \triangle) = M_N\, \varepsilon^{-2/3}\ \triangle^{-1/3}, \quad M_N = M_\delta^{-1}. \tag{4.10}$$

Таким образом, при условии

$$\delta = \delta^{opt} \quad or \quad N = N^{opt} \tag{4.11a}$$

(эквивалентном условию $\delta = M_{\delta\,(4.9)}\, \varepsilon^{-1/3}\ \ \triangle^{1/3}$) и заданных величинах ε и $\triangle$ для ошибки компьютерного решения имеем оценку

$$\min_\delta \|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h},\ \min_N \|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h} \le \Psi(\delta^{opt}; \varepsilon, \triangle), \tag{4.11b}$$

где в соответствии с (4.8)

$$\Psi(\delta^{opt}; \varepsilon, \triangle) = \frac{3}{2}\ \widetilde{M}_1\ \delta^{opt} = 3 \times 2^{-2/3}\ \widetilde{M}_1^{2/3}\ \widetilde{M}_2^{1/3}\ \varepsilon^{-1/3}\ \ \triangle^{1/3},$$

причем для ошибки $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ и возмущения $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ — компонент ошибки компьютерного решения $\min\limits_\delta \|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$ — выполняются оценки

$$\|u - z\|_{\overline{D}_h}\ |_{\delta = \delta^{opt}} \le \widetilde{M}_1\, \delta^{opt} = 2^{1/3}\, \widetilde{M}_1^{2/3}\, \widetilde{M}_2^{1/3}\, \varepsilon^{-1/3}\ \ \triangle^{1/3}, \tag{4.11c}$$

$$\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}\ |_{\delta = \delta^{opt}} \le \widetilde{M}_2\, \varepsilon^{-1}\, (\delta^{opt})^{-2}\ \triangle = 2^{-2/3}\, \widetilde{M}_1^{2/3}\, \widetilde{M}_2^{1/3}\, \varepsilon^{-1/3}\ \ \triangle^{1/3}\ . \tag{4.11d}$$

При условии (4.11a) оценка ошибки компьютерного решения, как и оценки каждой из компонент ошибки компьютерного решения — величины одного порядка.

Из оценок (4.11b), (4.11c) следует, что наименьшая оценка ошибки компьютерного решения и оценки компонент этой оценки при заданных значениях ε и Δ есть $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/3}\ \Delta^{1/3})$ и по порядку они становятся $\mathcal{O}(1)$ при условии $\Delta \approx \varepsilon$.

4.3. Найдем оценки ошибки компьютерного решения в зависимости от величин ε, δ, Δ в случае, когда $\delta \neq \delta^{opt}$.

В случае, когда оценки ошибки $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ и возмущения $\|z^*_\Delta - z\|_{\overline{D}_h}$ одинаковы, величину δ обозначим δ^{eq}; для δ^{eq} имеем представление

$$\delta^{eq} = (\widetilde{M}_1^{\,-1}\, \widetilde{M}_2)^{1/3}\, \varepsilon^{-1/3}\ \Delta^{1/3}\ .$$

При условии

$$\delta \le \delta^{eq} \tag{4.12a}$$

(эквивалентном условию $N \ge \varepsilon^{-1}\,(\delta^{eq})^{-1}$) с учетом оценок

$$\|u - z\|_{\overline{D}_h} \le \widetilde{M}_1\, \delta, \quad \|z^*_\Delta - z\|_{\overline{D}_h} \le \widetilde{M}_2\, \varepsilon^{-1}\, \delta^{-2}\ \Delta$$

для ошибки компьютерного решения получаем оценку, неулучшаемую по порядкам входящих величин,

$$\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h}\ |_{\delta \le \delta^{eq}}\ \le 2\, \widetilde{M}_2\, \varepsilon^{-1} \delta^{-2}\ \Delta\ . \tag{4.12b}$$

Из оценки (4.12) вытекает, что с уменьшением δ при условии $\delta \le \delta^{eq}$ (либо с ростом N при условии $N \ge \varepsilon^{-1}\,(\delta^{eq})^{-1}$) оценка ошибки компьютерного решения существенно нарастает и становится порядка единицы при $\delta \approx \varepsilon^{-1/2}\ \Delta^{1/2}$ (соответственно при $N \approx \varepsilon^{-1/2}\ \Delta^{-1/2}$). Здесь главный член в оценке ошибки компьютерного решения — возмущение сеточного решения; ошибка сеточного решения невозмущенной схемы мала по сравнению с ошибкой компьютерного решения.

При условии

$$\delta \ge \delta^{eq} \tag{4.13a}$$

(эквивалентном условию $N \le \varepsilon^{-1}\,(\delta^{eq}\,)^{-1}$) для ошибки компьютерного решения получается оценка, неулучшаемая по порядкам входящих величин,

$$\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h}\ |_{\delta \ge \delta^{eq}}\ \le 2\, \widetilde{M}_1\, \delta. \tag{4.13b}$$

Из оценки (4.13) следует, что с ростом δ при условии $\delta \ge \delta^{eq}$ (либо с уменьшением N при условии $N \le \varepsilon^{-1}\,(\delta^{eq}\,)^{-1}$) оценка ошибки компьютерного решения также нарастает и становится порядка единицы при $\delta \approx 1$ (соответственно при $N \approx \varepsilon^{-1}$). Здесь главный член в оценке ошибки компьютерного решения — ошибка невозмущенного сеточного решения; ошибка решения невозмущенной разностной схемы одного порядка с ошибкой компьютерного решения.

Таким образом, установлена

Теорема 2. *Пусть для величин* δ *и* N *выполняется условие* (4.11a). *Тогда для* $\|u - z^*_\Delta\|_{\overline{D}_h}$ *— ошибки компьютерного решения* $z^*_\Delta(x)$ *и ее компонент: ошибки* $\|u - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h}$ *и возмущения* $\|z^*_\Delta - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h}$ *— справедливы оценки* (4.11b)–(4.11d). *В случае условий* (4.12a) *и* (4.13a) *для ошибок компьютерного решения выполняются оценки* (4.12b) *и* (4.13b) *соответственно.*

5. Аппроксимация решений стандартной разностной схемы компьютерными решениями

Рассмотрим связь ошибок невозмущенной разностной схемы и компьютерного решения при различных значениях величин ε, δ и Δ.

5.1. Введем ряд определений, позволяющих классифицировать компьютерные решения.

О п р е д е л е н и е 1. В том случае, когда компоненты ошибки компьютерного решения $\|u-z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$: ошибка невозмущенного решения $\|u-z\|_{\overline{D}_h}$ и возмущение компьютерного решения $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ — одного порядка, будем говорить, что компьютерное решение $z^*_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$, является адекватным по порядку его компонент $\|u-z\|_{\overline{D}_h}$ и $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$, или короче, адекватным компьютерным решением; адекватное компьютерное решение обозначаем $z^{*\,(adeq)}_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$.

О п р е д е л е н и е 2. В том случае, когда ошибка решения невозмущенной схемы $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ и ошибка компьютерного решения $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$ одного порядка, будем говорить, что компьютерное решение $z^*_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$, является решением, гарантирующим (по порядку) точность решения невозмущенной разностной схемы $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, или короче, гарантированным компьютерным решением; гарантированное компьютерное решение обозначаем $z^{*\,(guar)}_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$.

О п р е д е л е н и е 3. Если же ошибка решения невозмущенной схемы $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ по порядку меньше ошибки компьютерного решения $\|u-z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$, будем говорить, что компьютерное решение $z^*_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$ (по отношению к решению невозмущенной разностной схемы) является зашумленным (по порядку) решением невозмущенной разностной схемы $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, или короче, зашумленным компьютерным решением; зашумленное компьютерное решение обозначаем $z^{*\,(noisy)}_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$.

5.2. Получим ряд оценок для ошибок адекватного, гарантированного и зашумленного компьютерных решений.

При условии

$$\delta \approx \delta^{opt}_{(4.9)} \tag{5.1}$$

решение возмущенной разностной схемы является адекватным. Адекватное компьютерное решение сходится при неулучшаемом условии

$$\triangle = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0,\, 1]. \tag{5.2}$$

В силу оценок (4.11) для адекватного компьютерного решения $z^{*\,(adeq)}_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$, справедлива оценка в переменных ε, $\triangle$

$$\|u - z^{*\,(adeq)}_\triangle\|_{\overline{D}_h} \le M\,\varepsilon^{-1/3}\ \triangle^{1/3}, \tag{5.3a}$$

где $M_{(5.3a)} \ge 3 \times 2^{-2/3}\ M^{2/3}_{1\,(4.3b)}\ M^{1/3}_{2\,(4.3b)}$. Для соответствующих компонент $\|u - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h}$ и $\|z^{*\,(adeq)}_\triangle - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h}$, где $z^{\,opt}(x)$ — решение невозмущенной стандартной разностной схемы при условии $N = N^{opt}_{(4.10)}$, выполняются оценки

$$\|u - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h} \le M_{\delta\,u}\,\varepsilon^{-1/3}\ \triangle^{1/3}; \quad \|z^{*\,(adeq)}_\triangle - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h} \le M_{\delta\,z}\,\varepsilon^{-1/3}\ \triangle^{1/3}, \tag{5.3b}$$

где $M_{\delta\,u} \ge \dfrac{2}{3}\,M_{(5.3a)}$, $M_{\delta\,z} \ge \dfrac{1}{3}\,M_{(5.3a)}$, причем величины δ^{opt} и N^{opt} удовлетворяют условию

$$\delta^{opt} = \delta^{opt}(\varepsilon, \triangle) = M_{\delta(4.9)}\,\varepsilon^{-1/3}\ \triangle^{1/3}; \quad N^{opt} = M_{N(4.10)}\,\varepsilon^{-2/3}\ \triangle^{-1/3}\,. \tag{5.3c}$$

В силу оценок (5.3) справедливы также “стандартные” оценки в информативных переменных

$$\|u - z^{*\,(adeq)}_\triangle\|_{\overline{D}_h} \le M\,\delta, \tag{5.4a}$$

$$\|u - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h},\ \|z^{*\,(adeq)}_\triangle - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h} \le M\,\delta, \tag{5.4b}$$

где $\delta = \varepsilon^{-1}\,N^{-1}$ при $\delta \approx \delta^{opt}$, $N \approx N^{opt}$.

При условии

$$\delta \le M\delta^{opt}, \tag{5.5a}$$

включающем условие (5.1), компьютерное решение является гарантированным $z^*_\triangle = z^{*\,(guar)}_\triangle$. Для компьютерного решения выполняется оценка

$$\|u - z^{*\,(guar)}_\triangle\|_{\overline{D}_h} \le M\,\delta. \tag{5.5b}$$

Если же выполняется условие

$$\delta \gg \delta^{opt}, \tag{5.6a}$$

компьютерное решение является зашумленным $z^*_\triangle = z^{*\,(noisy)}_\triangle$. Для зашумленного компьютерного решения имеем оценку

$$\|u - z^{*\,(noisy)}_\triangle\|_{\overline{D}_h} \le M\,\varepsilon^{-1}\delta^{-2}\ \triangle\ . \tag{5.6b}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть для компьютерного возмущения* $\triangle$ *выполняется условие* (5.2). *Тогда для* $\|u - z^{*\,(adeq)}_\triangle\|_{\overline{D}_h}$ *— ошибки адекватного компьютерного решения* $z^{*\,(adeq)}_\triangle(x)$ *и ее компонент: ошибки* $\|u - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h}$ *и возмущения* $\|z^{*\,(adeq)}_\triangle - z^{\,opt}\|_{\overline{D}_h}$ *— справедливы оценки* (5.3) *и* (5.4) *в переменных* $\{\varepsilon,\,\triangle\}$ *и* $\{\delta\}$ *соответственно. В случае условий* (5.5a) *и* (5.6a) *для гарантированного и зашумленного компьютерных решений выполняются оценки* (5.5b) *и* (5.6b) *соответственно.*

З а м е ч а н и е 6. При наличии компьютерных возмущений, чтобы при заданном значении параметра ε получить адекватное и гарантированное компьютерные решения с требуемой точностью δ, необходимо использовать компьютер с числом разрядов машинного слова $t \approx \ln\,(\varepsilon^{-1}\,\delta^{-3})$ (что эквивалентно компьютерным возмущениям $\triangle \approx \varepsilon\,\delta^3$), а также сетки с числом интервалов $N \approx \varepsilon^{-1}\,\delta^{-1}$.

5.3. Рассмотрим условия, обеспечивающие устойчивость стандартной разностной схемы при наличии компьютерных возмущений.

О п р е д е л е н и е 4. Решая стандартную разностную схему (2.2) на компьютере, при наличии компьютерных возмущений, удовлетворяющих условию (4.1), находим компьютерное решение — функцию $z^*_\triangle(x)$, $x \in \overline{D}_h$. В том случае, когда компьютерные решения $\{z^*_\triangle(x),\ x \in \overline{D}_h\}$ при условиях, связывающих параметры стандартной схемы и компьютера, являются гарантированными компьютерными решениями, стандартную разностную схему (2.2), реализуемую на компьютере, назовем устойчивой стандартной разностной схемой при наличии компьютерных возмущений, или короче, устойчивой стандартной разностной схемой.

В случае условия (5.2) при дополнительном условии, налагаемом на число интервалов N,

$$N \le M\,N^{opt}; \quad N^{opt} = N^{opt}(\varepsilon, \triangle) = M_{N(4.10)}\,\varepsilon^{-2/3}\ \triangle^{-1/3}, \tag{5.7a}$$

эквивалентном условию (5.5a), компьютерное решение $\{z^*_\triangle(x),\ x \in \overline{D}_h\ |_{(5.7a)}\}$ является гарантированным компьютерным решением $z^*_\triangle = z^{*\,(guar)}_\triangle$.

Для ошибок гарантированного компьютерного решения, с учетом оценок (5.3c) и (5.4a), получаем следующую оценку в переменных $\varepsilon, \triangle$, подобную оценке (5.5b):

$$\|u - z^{*\,(guar)}_\triangle\|_{\overline{D}_h} \le M\,\varepsilon^{-1}\,N^{-1} \le M\,\varepsilon^{-1/3}\ \triangle^{1/3}; \tag{5.7b}$$

заметим, что $\|u - z\|_{\overline{D}_h}\Big|_{(2.3)} \approx \|u - z^{*\,(guar)}_\triangle\|_{\overline{D}_h}\Big|_{(5.7b)}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема об устойчивости стандартной разностной схемы:

Теорема 4. *Пусть для компьютерного возмущения* $\vartriangle$ *выполняется условие* (5.2), *а также условие* (5.7a). *Тогда стандартная разностная схема* (2.2), *реализуемая на компьютере, является устойчивой стандартной разностной схемой. Для* $\|u - z_{\vartriangle}^{*\,(guar)}\|_{\overline{D}_h}$ *— ошибки компьютерного решения* $z_{\vartriangle}^{*\,(guar)}(x)$ *— справедлива оценка* (5.7b).

З а м е ч а н и е 7. В соответствии с оценкой (5.7b) при наличии компьютерных возмущений для сходимости возмущенного решения при $\varepsilon \to 0$ помимо условия, накладываемого на число интервалов сетки $N \to \infty$ $(N \gg \varepsilon^{-1})$, необходимо также неограниченно увеличивать число разрядов машинного слова t $(t \approx \ln\ \vartriangle^{-1} \gg \ln \varepsilon^{-1})$.

6. Выводы

Для стандартной разностной схемы (классической схемы на равномерной сетке), аппроксимирующей задачу Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии с возмущающим параметром ε $(\varepsilon \in (0,1])$, разработана техника исследования сеточных решений в случае компьютерных возмущений и установлены условия, при которых стандартная разностная схема становится устойчивой к компьютерным возмущениям.

Получены следующие результаты:

6.1. При фиксированных значениях параметра ε и компьютерного возмущения $\vartriangle$ ошибка возмущенного решения в соответствии с оценкой (4.3c) есть выпуклая функция величины N, причем при больших N ошибка компьютерного решения становится большой, в то время как ошибка решения стандартной разностной схемы мала — порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1} N^{-1})$, $N^{-1} = o(\varepsilon)$.

6.2. Чтобы компьютерное решение сходилось с требуемой точностью δ при заданном значении параметра ε, $\varepsilon \in (0,1]$, необходимо использовать компьютер с числом разрядов машинного слова $t \approx \ln\,(\varepsilon^{-1}\,\delta^{-3})$, а также сетки с числом интервалов $N \approx \varepsilon^{-1}\,\delta^{-1}$; здесь t, $N \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ (см. утверждения замечания 3 и теоремы 1 в разд. 4).

6.3. Установлены условия, связывающие параметр ε, число интервалов сетки N (либо точность δ решения невозмущенной схемы) и компьютерные возмущения данных $\vartriangle$, при выполнении которых стандартная разностная схема становится устойчивой к компьютерным возмущениям; для решения такой схемы (называемого гарантированным) выполняется оценка

$$\left\|u - z_{\vartriangle}^{*\,(guar)}\right\|_{\overline{D}_h} \le M\,\varepsilon^{-1}\,N^{-1} \le M\,\varepsilon^{-1/3}\ \vartriangle^{1/3}$$

(см. оценку (5.7) и утверждение теоремы 4 в разд. 5), т. е. компьютерное решение сходится с таким же порядком, что и решение невозмущенной схемы.

Выражаем благодарность академику А. Н. Коновалову за плодотворное обсуждение проблем, связанных с потерей устойчивости стандартных численных методов к возмущению данных, возникающих при решении задач с пограничными слоями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
2. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference methods for singular perturbation problems. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p. (Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics; vol. 140.)
3. **Шишкин Г.И.** Обусловленность разностной схемы метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 291–304.
4. **Шишкин Г.И.** Устойчивость стандартной схемы для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 6. С. 648–650.

5. **Shishkin G.I.** Stability of difference schemes on uniform grids for a singularly perturbed convection-diffusion equation // Proc. of the 9th European Conf. on Numerical Math. and Advanced Appl. (ENUMATH 2011; Leicester, September 2011) / Eds. A. Cangiani, R.L. Davidchack, E. Georgoulis, A.N. Gorban, J. Levesley, M.V. Tretyakov. Berlin: Springer, 2013. P. 293–302.
6. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992, 233 с.
7. Robust computational techniques for boundary layers / P.A. Farrell, A.F. Hegarty, J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin. Boca Raton: Chapman & HAll/CRC, 2000. 254 p.
8. **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Robuts numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion-reaction and flow problems. 2 ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 604 p. (Springer Series in Computational Mathematics; vol. 24.)
9. **Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Revised ed. Singapore: World Scientific, 2012. 176 p.

Шишкин Григорий Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Поступила 29.10.2013

Шишкина Лидия Павловна
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Lida@convex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина

TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Фото на с. 4 В. В. Кабанов

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 24.02.14. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 39, 1. Уч.-изд. л. 32,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226