РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 19, № 4 2013

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 19 № 4 2013

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 19, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. 330 с.

ISSN 0134–4889

Том 19 № 3 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Том 19 № 3 2013

(Продолжение)

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

КРЯЖИМСКИЙ АРКАДИЙ ВИКТОРОВИЧ

(*К шестидесятипятилетнему юбилею*)

Аркадий Викторович Кряжимский родился 2 января 1949 г. в г. Циндао (Китай). В 1971 г. он окончил математико-механический факультет Уральского государственного университета им. А. М. Горького (г. Свердловск, ныне Екатеринбург) и поступил в аспирантуру; его научным руководителем стал Юрий Сергеевич Осипов. Завершив в 1971 г. работу по созданию основ теории позиционных игр для управляемых систем с запаздывающим аргументом, Юрий Сергеевич предложил Аркадию Викторовичу заняться исследованием дифференциальной игры сближения-уклонения для целевого множества, заданного в бесконечномерном фазовом пространстве системы с запаздыванием. В это время интенсивно развивался один из разделов функционального анализа — выпуклый анализ в гильбертовых пространствах. Привлекая его аппарат, Аркадий Викторович разработал методику решения указанной выше задачи, провел комплексное исследование игры сближения-уклонения с функциональной целью. По результатам этих исследований он успешно защитил кандидатскую диссертацию “Некоторые игровые задачи управления” в 1974 г.

В июле 1972 г. в Институте математики и механики Уральского научного центра АН СССР (г. Свердловск) была создана лаборатория (впоследствии отдел) дифференциальных уравнений, которую возглавил Ю. С. Осипов. Аркадий Викторович со дня основания отдела до начала девяностых годов являлся его сотрудником. В семидесятые годы после защиты кандидатской диссертации он оставил область дифференциальных игр для систем с запаздыванием и переключился на изучение дифференциальных игр для “обыкновенных” систем с неполной информацией и бесконечномерных управляемых систем. По этим темам в лаборатории дифференциальных уравнений проходили многочисленные научные семинары. Одна из трудных актуальных задач состояла в том, чтобы распространить основные положения теории позиционных дифференциальных игр на “обыкновенные” системы, правые части которых не подчиняются условию Липшица по фазовой переменной. Решая эту задачу, Аркадий Викторович создал “универсальную” реализацию принципа экстремального сдвига, не связанную с особенностями фазового пространства управляемой системы. В ее основе лежала довольно привлекательная идея: если смотреть на управляемую систему как на преобразование “управление-траектория”, то правило экстремального сдвига можно задавать не в пространстве “выходов” — траекторий, а в пространстве “входов” — управлений. Эта идея указала путь, который привел в дальнейшем Аркадия Викторовича к следующему решению дифференциальной игры для нелипшицевых “обыкновенных” систем: выход в бесконечномерное функциональное пространство управлений, отыскание адекватного критерия отклонения между “истинным” и “целевым” управлениями и реализация экстремального сдвига в терминах этого критерия. Эти результаты составили основу докторской диссертации А. В. Кряжимского “Дифференциальные игры для нелипшицевых систем” (1981).

К началу восьмидесятых годов разработка принципиальных вопросов теории позиционных дифференциальных игр, связанных с выявлением общих критериев разрешимости игровых задач и общей структуры решений, была, в основном, завершена. Сотрудникам Института математики и механики, занимавшимся дифференциально-игровой тематикой, предстояло определить направления дальнейших исследований. Одно из них предполагало развитие теории позиционных дифференциальных игр "вглубь" посредством создания новых методов решения дифференциально-игровых задач, другое — поиск новых задач и разработку новых теоретических подходов. А. В. Кряжимский вместе с коллегами по отделу сделали выбор в пользу новой тематики. Их замысел состоял в поиске актуальных задач на стыках дисциплин. В то время наряду с исследованиями в области теории управления и дифференциальных игр в институте успешно развивались другие научные направления; одно из них относилось к теории некорректно поставленных задач. Несмотря на удаленность проблематики теории некорректных задач от дифференциальных игр, специалистам-"игровикам" была далеко не чужда идея регуляризации, играющая в этой теории важнейшую роль. Именно с эффектом регуляризации — избавлением от неустойчивости при малых информационных помехах — связан широко известный метод позиционного управления "с поводырем", предложенный Николаем Николаевичем Красовским в первой половине семидесятых годов. Аркадий Викторович и Юрий Сергеевич поставили цель: найти направление приложений методов теории позиционных дифференциальных игр в сфере некорректных задач. Определение конкретного направления искомых приложений представляло собой чрезвычайно трудную проблему, поскольку требовались задачи принципиально нового класса. В теории некорректных задач к объектам, изучаемым в теории управления, наиболее близки так называемые обратные задачи управляемых систем. Типичная обратная задача состоит в нахождении управления, реализующего заданную траекторию системы или заданный сигнал о траектории. Подобные задачи при наличии траекторных возмущений близки процессу наблюдения реальной траектории системы, генерируемой неизвестным управлением, которое при этом теряет традиционный смысл "управления" — разумного воздействия, направленного на оптимизацию движения, поскольку на месте управления появляется ненаблюдаемый и неконтролируемый "вход", подаваемый на систему "внешней средой". Согласно идеологии теории некорректных задач ненаблюдаемый вход подлежит восстановлению; точность восстановления должна быть сколь угодно велика при достаточно большой точности наблюдений. Поскольку прямое наблюдение возмущающих входов, как правило, не представлялось возможным, возникла новая задача о динамическом обращении — о восстановлении текущих значений ненаблюдаемых входов в реальном времени на основании доступных сигналов о траектории. В последующем задача о динамическом обращении явилась "блоком обращения" в общей схеме "обращение-управление", в которой в процессе функционирования управляемой системы, подверженной воздействию ненаблюдаемых входов, на основании текущих, вообще говоря, неточных наблюдений ее состояний в реальном времени приближенно восстанавливаются текущие значения входов ("блок обращения"); эти значения вместе с результатами прямых наблюдений состояний системы подаются в автоматический регулятор, вырабатывающий текущие значения управляющего параметра ("блок управления").

При исследовании задачи динамического обращения важным требованием к искомому алгоритму стало условие его динамичности, т. е. осуществимости в реальном времени. С точки зрения теории некорректных задач это требование, выступающее как ограничение на класс допустимых регуляризирующих алгоритмов, позволило говорить о задаче динамического обращения как о задаче динамической регуляризации. Аркадием Викторовичем совместно с Юрием Сергеевичем был предложен новый методологический подход к динамической регуляризации — принцип регуляризованного экстремального сдвига. Его основой служит процедура управления "с поводырем" из теории позиционных дифференциальных игр. Суть подхода заключается в следующем. Процесс динамического восстановления ненаблюдаемого входа трактуется как процесс управления вспомогательной динамической системой — моделью. Модель, довольно часто являясь "копией" исходной системы, принципиально отличается от последней тем, что она управляема: в модели место неконтролируемого входа занимает управляющий параметр. Текущие значения модельного управления формируются в реальном времени по принципу обратной связи — в виде реакции на "реальную" (неточную) информацию о текущем состоянии исходной системы и на точную информацию о текущем состоянии модели.

Обратная связь в контуре управления моделью подбирается так, чтобы реализация модельного управления как функция времени достаточно точно отслеживала реализацию входа исходной системы.

На начальном этапе описанная схема разрабатывалась для "обыкновенных" конечномерных систем, аффинных по входной переменной. Для таких систем не представлял сложности подбор модельной обратной связи, гарантирующей близость траекторий модели и системы: эта близость обеспечивалась стандартным правилом экстремального сдвига текущего состояния модели на текущий сигнал о состоянии системы. Решающим шагом, определившим дальнейшее развитие подхода, стало понимание того, что подходящая регуляризация правила экстремального сдвига обеспечивает требуемое, значительно более сильное, свойство — близость модельного управления к входу системы в среднеквадратичной метрике. Предложенная регуляризация состоит в совмещении основного критерия — критерия собственно экстремального сдвига с дополнительным критерием — критерием минимизации нормы текущего значения управляющего параметра. В центральной версии метода учет дополнительного критерия выражается в добавлении к основному, линейному, критерию сдвига квадратичной сглаживающей функции, предваренной малым коэффициентом регуляризации. Регуляризованный экстремальный сдвиг — минимизация суммарного критерия по управляющей переменной — в точности соответствует применению метода регуляризации А. Н. Тихонова к правилу экстремального сдвига. На стыке теории некорректных задач и теории позиционного управления был найден новый круг задач — задачи динамической регуляризации и указан подход к их решению — именно метод регуляризованного экстремального сдвига.

Работы по динамическому обращению "обыкновенных" конечномерных систем, проведенные ученым в основном в восьмидесятых годах, были подытожены в монографии[1]. Монография представляет читателю глубокую теорию, покрывающую широкий спектр вопросов — от постановок задач о динамическом обращении, изучения проблемы их разрешимости, сравнения возможностей динамических и апостериорных методов до построения оптимальных алгоритмов и детальной реализации схемы "обращение-управление", сыгравшей важную мотивирующую роль на начальном этапе исследований. Базу теории составляют методы регуляризованного экстремального сдвига, соединяющие, как было отмечено выше, подходы теории позиционных дифференциальных игр и теории некорректных задач. Отдельные разделы теории апеллируют к методам теории дифференциальных уравнений, теории управления (в частности, аппарату обобщенных управлений), теории оценивания, функционального анализа, выпуклого анализа, теории приближения функций. Явные описания алгоритмов обращения и обращения-управления, готовые для непосредственного применения и сопровождаемые оценками точности, комбинируются с изучением тонких качественных вопросов, таких как регуляризуемость, порядковая оптимальность, асимптотическая оптимальность и др.

В ходе создания теории динамического обращения ее авторами был развит новый подход к исследованию некоторых разделов теории решения операторных уравнений, теории приближения функций и др. Наиболее сильное развитие получили приложения идеологии динамического обращения к задачам классической бесконечномерной оптимизации. Начало этому направлению было положено во второй половине восьмидесятых годов. В это время был предложен новый итерационный алгоритм, ориентированный на решение линейно-выпуклой задачи оптимального управления при наличии фазовых ограничений. Алгоритм был построен по принципу регуляризованного экстремального сдвига, примененного к искусственно сконструированной динамической модели с дискретным временем. Исходная задача об оптимальном управлении трактуется как задача оптимизации в пространстве искусственно сформированных процессов при ограничениях типа равенств (доставляются уравнением системы) и типа включений (доставляются исходными фазовыми ограничениями и исходными ограничениями на управления). Введение специального функционала Ляпунова, связанного с методом регу-

[1] Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problem for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.

ляризации А. Н. Тихонова, и его стабилизация по правилу регуляризованного экстремального сдвига приводят к тому, что состояния модели приближаются к искомому решению. В последующих работах подобные алгоритмические схемы, базирующиеся на идеях регуляризации, уточнялись и распространялись на разные классы экстремальных задач. Основная направленность данного цикла работ — продвижение в область методов глобальной невыпуклой оптимизации. В одной из работ был исследован широкий класс невыпуклых задач оптимизации с ограничениями, для которых принцип регуляризованного экстремального сдвига дает сходящийся итерационный алгоритм решения. Задачи этого класса характеризуются геометрическим условием отделимости графика функции “возмущенного оптимального значения”.

В середине восьмидесятых годов Аркадий Викторович начинает исследования, связанные с оборонной тематикой. Вплоть до развала Советского Союза в 1991 г. сотрудники руководимого им сектора отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики проводили исследования совместно с коллегами из НПО “Энергия” (г. Королев, Московская область) и НПО “Автоматика” (г. Свердловск). Эти исследования посвящены процессам взаимодействия динамических систем в условиях неполной и меняющейся информации.

В начале девяностых годов А. В. Кряжимский уезжает работать в Международный институт прикладного системного анализа (г. Лаксенбург, Австрия), где до конца 2012 г. руководит проектом “Динамические системы” (после укрупнения названным “Перспективы системного анализа”). Системный, всесторонний подход к решению сложных междисциплинарных задач, являющийся своего рода визитной карточкой института, в полной мере присущ Аркадию Викторовичу. Неоценима его роль в исследовании таких масштабных проблем, как различные прикладные игровые задачи, а также задачи моделирования экономического роста; определения оптимальных путей достижения устойчивого развития в глобальном масштабе; моделирования динамики рынка инноваций; оптимальной транспортировки газа и др.

Находясь за рубежом, он не теряет связи со своей научной “альма матер” — отделом дифференциальных уравнений Института математики и механики УрО РАН, активно сотрудничая в разных областях исследований. Работая в Австрии, Аркадий Викторович периодически возвращается к классической тематике дифференциальных игр для “обыкновенных” конечномерных систем и проводит исследование на стыке теории дифференциальных и эволюционных игр. В частности, обращаясь к задачам позиционного управления с неполной информацией о фазовых состояниях, совместно с Ю. С. Осиповым он развивает новый подход к построению обратных связей, гарантирующих требуемое качество движений. Этот метод, названный “пакетами программ”, развивает идею программных конструкций. Пакет программ — это, по существу, априори выбираемое игроком-союзником семейство его потенциально допустимых “физически реализуемых” ответов-программ на всевозможные реализации факторов неопределенности.

С 1996 г. по настоящее время Аркадий Викторович Кряжимский работает в Математическом институте РАН им. В. А. Стеклова: сначала в качестве ведущиего, а с 1997 г. — главного научного сотрудника; одновременно читает лекции на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Его лекции пользуются большой популярностью у студентов благодаря полноте содержания, информативности и ясности изложения материала. Немаловажную роль играет и личное обаяние лектора.

Важные черты Аркадия Викторовича — широта научного кругозора и работоспособность на высочайшем интеллектуальном уровне. Он успешно решает задачи из самых разных разделов математики и пограничных наук. Основные мотивы, которыми он руководствуется при выборе новых задач, — синтез дисциплин и практическая содержательность постановок.

Результатом плодотворного труда, признанием весомого вклада ученого в развитие российской науки является избрание в Академию наук. С мая 1997 г. А.В. Кряжимский — член-корреспондент РАН, а с мая 2006 г. — академик РАН.

Талантливый человек талантлив во всем. Эта фраза очень точно характеризует Аркадия Викторовича Кряжимского. С детства он неравнодушен к музыке и литературе: прекрасно играет на гитаре, сочиняет стихи и авторские песни. Аркадий Викторович — чуткий и отзывчивый человек, он прост в общении и не подавляет своим положением и заслуженным авторитетом. Все, кто знаком с ним, отмечают его интеллигентность, увлеченность, энциклопедичность и поразительную готовность как делиться своими идеями, так и воспринимать и обсуждать чужие.

Коллеги и ученики

СПИСОК ОСНОВНЫХ ТРУДОВ А. В. КРЯЖИМСКОГО

1. Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 1. С. 3–13 (совм. с Ю. С. Осиповым).
2. Дифференциально-разностная игра уклонения от функциональной цели // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 4. С. 71–79.
3. Некоторые игровые задачи сближения-уклонения: автореф. дис ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Урал. гос. ун-т. Свердловск, 1974. 15 с.
4. Дифференциальная игра сближения в условиях неполной информации о системе // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27, № 4. С. 521–526.
5. О допустимости одной оптимальной стратегии // Дифференц. игры и задачи упр.: сб. ст. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1975. Вып. 15. С. 125–130.
6. Альтернатива в линейной игре сближения-уклонения с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 4. С. 773–776.
7. Об одной игровой задаче сближения двух точек на плоскости в условиях неполной информации // Задачи упр. с неполной информацией: сб. ст. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1976. Вып. 19. 1976. С. 62–77 (совм. с С. Д. Филипповым).
8. К задаче об уклонении от функциональной цели линейной системы с последействием // Игровые задачи упр.: сб. ст. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. Вып. 24. 1977. С. 46–52.
9. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
10. О стохастической аппроксимации в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 5. С. 1020–1023.
11. Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, № 2. С. 202–209 (совм. с В. И. Максимовым).
12. Задачи управления в системах с распределенными параметрами // Динамика упр. систем: сб. ст. Новосибирск: Наука, 1979. С. 199–208 (совм. с Ю. С. Осиповым, С. П. Охезиным).
13. Дифференциальные игры для нелипшицевых систем: автореф. дис ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. 25 с.
14. О некоторых стабильных мостах для линейных управляемых систем // Оптим. упр. системами с неопредел. информацией: сб. ст. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. С. 35–41.
15. On stable position control in differential games // J. Appl. Math. Mech. 1980. Vol. 42, no. 6. P. 1055–1060.
16. Deviation of a linear system with aftereffect from a functional target // J. Dynamic Systems Measurement Control. 1981. Vol. 103, no. 2. P. 43–48, 111. (Trans. ASME, Ser. G).
17. Игровая задача уклонения для кусочно-непрерывной системы // Упр. и оценивание в динам. системах: сб. ст. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1982. С. 25–41.
18. О динамическом решении операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 552–556 (совм. с Ю. С. Осиповым).
19. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60 (совм. с Ю. С. Осиповым).
20. О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, № 6. С. 883–890 (совм. с Ю. С. Осиповым, В. И. Максимовым).
21. К вопросу о корректности задачи оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 10. С. 1659–1665 (совм. с О. Абдырахмановым).
22. О регуляризации задачи оптимального управления для системы с неединственностью // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук. 1984. № 4. С. 3–6 (совм. с О. Абдырахмановым).
23. О регуляризации задачи оптимального управления для системы с неединственностью. II // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук. 1984. № 6. С. 7–11 (совм. с О. Абдырахмановым).

24. On positional calculation of Ω-normal controls in dynamical system // Probl. Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform. 1984. Vol. 13, no. 6. P. 425–436 (совм. с Ю. С. Осиповым).
25. О динамике текущей точки траектории с переменным начальным условием // Задачи упр. и моделирования в динам. системах: сб. ст. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 19–27. (совм. с А. В. Кимом).
26. О моделировании параметров динамической системы // Задачи упр. и моделирования в динам. системах: сб. ст. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 47–68 (совм. с Ю. С. Осиповым).
27. О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 192–199 (совм. с Ю. С. Осиповым).
28. Метод функций Ляпунова в задаче моделирования движения // Устойчивость движения: сб. ст. / Иркут. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск: Наука, 1985. С. 53–56 (совм. с Ю. С. Осиповым).
29. Дифференциальная игра сближения-уклонения с m целевыми множествами // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288, № 3. С. 525–527 (совм. с М. С. Габриеляном).
30. О слабой непрерывности движений по уравнению для управляемых дифференциальных включений и систем с разрывной правой частью // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1895–1905 (совм. с К. Э. Ловцким).
31. Positional modeling of stochastic control in dynamical systems // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. Berlin: Springer, 1986. Vol. 81. P. 696–704. (Stochastic optimization; Kiev, 1984) (jointly with Yu. S. Osipov).
32. On the positional regularizing algorithms for control dynamical systems // Differential equations and applications (Ruse, 1985) / ‘Angel Kanchev’ Tech. Univ. Ruse. 1987. Vol. I, II. P. 767–770.
33. Optimization of the ensured result for the dynamical systems // Proc. Intern. Congr. Math. (Berkeley, Aug. 3–11, 1986). 1987. Vol. 2. P. 1171–1179.
34. К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Некоторые методы позиционного и программного упр.: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 34–54 (совм. с Ю. С. Осиповым).
35. Обратные задачи динамики и управляемые модели // Механика и научно-техн. прогресс. Т. 1: Общ. и прикл. механика. М.: Наука, 1987. С. 196–211 (совм. с Ю. С. Осиповым).
36. Устойчивые решения обратных задач динамики управляемых систем // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 126–146 (совм. с Ю. С. Осиповым).
37. О методах позиционного моделирования управления в динамических системах // Качеств. вопросы теории дифференц. уравнений и упр. систем: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1988. С. 34–44 (совм. с Ю. С. Осиповым).
38. Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некотор. задачи упр. и устойчивости: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1989. С. 33–47 (совм. с Ю. С. Осиповым).
39. О непрерывности лебеговских множеств в задаче оптимального управления // Задачи оптимизации и устойчивости в упр. системах: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1990. С. 54–73.
40. О восстановлении множества возмущений по измерениям траектории // Исслед. по систем. анализу и прил.: сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1990. С. 15–35 (совм. с А. Ю. Вдовиным).
41. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: an international tribute. Teaneck; N. J.: World Sci. Publ, 1991. Vol. I, II. P. 636–675.
42. О нижней оценке точности одного метода позиционной регуляризации для задачи восстановления возмущения // Задачи моделирования и оптимизации: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1991. С. 3–13 (совм. с А. Ю. Вдовиным).
43. Order optimal real-time observers for completely observable control systems // Appl. Math. Comput. Sci. 1992. Vol. 2, no. 1. P. 149–154.
44. Dynamical regularizibility of inverse problems for control systems // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. Berlin: Springer, 1992. Vol. 180. P. 384–393. (System modelling and optimization; Zurich, 1991).
45. О задаче коммивояжера с движущимися объектами // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1993. № 4. С. 233–238 (совм. с В. Б. Савиновым).
46. Об условиях устойчивости неупреждающей аппроксимации движения // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 243–256.

47. О дифференциально-эволюционных играх // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 257–287 (совм. с Ю. С. Осиповым).
48. Об одной модели конфликтного взаимодействия с последействием в управлениях // Маршрутно-распределит. задачи: межвуз. сб. науч. тр. / УГТУ. 1995. С. 44–53 (совм. с В. Б. Савиновым).
49. On Estimation of forcing functions in parabolic systems. Laxenburg, 1995. 34 p. (Report / IIASA; WP-95-75) (jointly with V. I. Maksimov, E. A. Samarskaia).
50. Endogenous growth, absorptive capasities and international R & D spillovers. Laxenburg, 1995. 48 p. (Report / IIASA; WP-95-92) (jointly with G. Hutschenreiter, Yu. M. Kaniovski).
51. An endogenous growth model for technological leading-following: an asymptotical analysis. Laxenburg, 1995. 54 p. (Report / IIASA; WP-95-93).
52. Inverse problem of ordinary differential equations: Dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach Sci. Publ., 1995. 625 p (jointly with Yu. S. Osipov).
53. Dynamical inverse problems for systems with distributed parameters // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1996. Vol. 4, no. 4. P. 267–282 (jointly with Yu. S. Osipov, V. I. Maksimov).
54. On finite-dimensional parametrizations of attainability sets // Appl. Math. Comput. 1996. Vol. 78, no. 2–3. P. 137–151 (jointly with V. I. Heymann).
55. Об одном вероятностном подходе к количественному описанию динамики природных процессов // Пробл. упр. и информатики. 1996. № 1–2. С. 192–210 (совм. с В. И. Максимовым, А. А. Соловьевым, А. Г. Ченцовым).
56. Reconstruction of boundary sources through sensor observations. Laxenburg, 1996. 16 p. (Working Paper / IIASA; WP-96-97) (jointly with Yu. S. Osipov, V. I. Maksimov).
57. О реконструкции входов в параболических системах // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 3. С. 51–72 (совм. с В. И. Максимовым, Е. А. Самарской).
58. Constraint aggregation principle in convex optimization // Math. Programm. Ser. B. 1997. Vol. 76, № 3. P. 353–372 (jointly with Yu. M. Ermoliev, A. Ruszczynmski).
59. О реконструкции экстремальных возмущений в параболических уравнениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 3. С. 291–301 (совм. с Ю. С. Осиповым, В. И. Максимовым).
60. Convex optimization via feedbacks // SIAM J. Contr. and Optimiz. 1998. Vol. 37, no. 1. P. 278–302.
61. Equilibrium and guaranteing solutions in evolutionary nonzero sum games. Laxenburg, 1998. 52 p. (Interim Report / IIASA; IR-98-003/Jan.) (jointly with A. M. Tarasyev).
62. Searching market equilibria under uncertain utilities. Laxenburg, 1998. 21 p. (Interim Report / IIASA; IR-98-007/Febr.) (jointly with A. Nentjes, S. Shibayev, A. M. Tarasyev).
63. Об одной инерационной процедуре решения задачи управления с фазовыми огранчениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 9. С. 1484–1489 (совм. с В. И. Максимовым).
64. Guaranteed optimization in insurance of catastrophic risks. Laxenburg, 1998. 12 p. (Interim Report / IIASA; IR-98-082/Aug.) (jointly with B. V. Digas, Yu. M. Ermoliev).
65. Normal behavior, altruism and agression in cooperative game dynamics. Laxenburg, 1998. 47 p. (Interim Report / IIASA; IR-98-076) (jointly with A. F. Kleimenov).
66. Аппроксимационная линейная редукция в дифференциальной игре наведения-уклонения // Тр. МИАН. 1998. Т. 220. С. 173–194. (совм. с Ю. С. Осиповым).
67. О двумерной редукции в дифференциальной игре качества // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 218–233 (совм. с Ю. С. Осиповым).
68. Игровая модель переговоров и рыночные равновесия // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. М.: ВИНИТИ,1999. Т. 61. С. 15–32. (Тр. Междунар. конф., посвящ. 90-летию Л. С. Понтрягина, Москва, 31 авг.–6 сент., 1998 г.) (совм. с А. Нентьесом, С. В. Шибаевым, А. М. Тарасьевым).
69. Asymptotic growth rates in knowledge-exchanging economies // Ann. Oper. Res. 1999. Vol. 89. P. 61–73. (Nonlinear dynamical systems and adaptive methods; Vienna, 1997) (jointly with V. F. Borisov, G. Hutschenreiter).
70. Constraint aggregation principle in the problem of optimal control of distributed parameter systems // Proc. of Intern. IFAC Workshop. Laxenburg, 1999. P. 137–141. (Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization; Chelyabinsk, 1998) (jointly with F. Kappel, V. Maksimov).
71. Dynamics for bimatrix games via analytic centers // Stability Control Theory Methods Appl. London: Gordon and Breach, 1999. Vol. 9. P. 129–138. (Dynamics and control; Sopron, 1995)(jointly with G. Sonnevend).

72. Adaptive dynamics in games played by heterogeneous populations // Games Econom. Behav. 2000. Vol. 31, no. 1. P. 50–96 (jointly with Yu. M. Kaniovski, H. P. Young).
73. Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой реакции-диффузии // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 5. С. 599–601 (совм. с Ф. Каппелем, В. И. Максимовым).
74. Optimal enforcement on a pure seller's market of illicit drugs // J. Optim. Theory Appl. 2000. Vol. 106, no. 1. P. 1–22 (jointly with V. Borisov, G. Feichtinger).
75. Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 579–597, 717 (совм. с Ю. С. Осиповым, В. И. Максимовым).
76. Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 131–140 (совм. с Ю. С. Осиповым).
77. Оптимизация страхования катастрофических рисков: гарантированный подход // Информ. техн. в экономике: теория, модели и методы: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2000. С. 98–105. (совм. с Б. В. Дигасом).
78. Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 71–88 (совм. с С. М. Асеевым, А. М. Тарасьевым).
79. On the problem of optimal compatibility // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. Vol. 9, no. 3. P. 283–300 (jointly with S. V. Paschenko).
80. Constraint aggregation in infinite-dimensional spaces and applications // Math. Oper. Res. 2001. Vol. 26, no. 4. P. 769–795 (jointly with A. Ruszczynмski).
81. Optimization problems with convex epigraphs. Application to optimal control // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2001. Vol. 11, no. 4. P. 773–801. (Mathematical methods of optimization and control of large-scale systems; Ekaterinburg, 2000).
82. Modeling market equilibrium for transboundary environmental problem // Nonlinear Anal. 2001. Vol. 47, no. 2. P. 991–1002 (Proc. of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 2; Catania, 2000) (jointly with A. Nentjes, S. Shibayev, A. Tarasyev).
83. Optimization problems with convex epigraphs. Application to optimal control // Intern. J. Appl. Math. and Comput. Sci. 2001. Vol. 11, no. 4. P. 773–801.
84. К решению линейной задачи быстродействия со смешанными ограничениями // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил.: Тем. обзоры. М.: ВИНИТИ, 2002. Т. 90. С. 232–260. (совм. с С. В. Пащенко).
85. Dynamic model of market of patents and equilibria in technology stocks // Comput. Math. Appl. 2002. Vol. 44, no. 7. P. 979–995. (Global optimization, control, and games, IV) (jointly with C. Watanabe, Y. Tou).
86. Экстремальные задачи с отделимыми графиками // Кибернетика и систем. анализ. 2002. № 2. С. 32–55 (совм. с Ю. С. Осиповым).
87. On a game of gas pipeline projects competition // Game Theory and Applications: Proc. Intern. Congr. Math. (ICM2002GTA). Qingdao: Qingdao Publ. House, 2002. P. 327–334 (jointly with G. Klaassen, O. Nikonov, Ya. Minullin).
88. Динамическая модель оптимального инвестирования в исследования и разработки // Соврем. математика и ее прил. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005. 2003. Т. 9. С. 3–43 (совм. с С. М. Асеевым, Г. Хутченрейтером).
89. Optimization of technological growth. Kanagawa: Gendaitosho, 2004. 392 p. (jointly with C. Watanabe).
90. О выпуклой двухуровневой задаче оптимизации // Нелинейная динамика и упр.: сб. ст. / МГУ. М.: Физматлит, 2004. Вып.4. С. 257–286 (совм. с Р. А. Усачевым).
91. A solution algorithm for problems of optimal control in Hilbert spaces // J. Math. Sci. 2004. Vol. 121, no. 2. P. 2226–2247 (jointly with V. I Maksimov).
92. On exact stabilization of an uncertain dynamical system // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. Vol. 12, no. 2. P. 145–182 (jointly with V. Maksimov).
93. Метод экстремального сдвига и задачи оптимизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 83–105 (совм. с Ю. С. Осиповым).
94. Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects // J. Optim. Theory Appl. 2004. Vol. 120, no. 1. P. 147–179 (jointly with G. Klaassen, A. M. Tarasyev).
95. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с функционалом, заданным несобственным интегралом // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 583–585 (совм. с С. М. Асеевым).

96. Parallelization in an algorithm of multi-dimensional nonconvex optimization: an application to insurance network design // Lecture Notes in Computer Sci. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2004. Vol. 3019. P. 754–761. (Parallel Processing and Applied Mathematics; Czestochowa, 2003) (jointly with V. I Maksimov).
97. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 3. P. 1094–1119 (jointly with S. M. Aseev).
98. Global long-term energy-economy-environment scenarios with an emphasis on Russia // Perspectives in Energy J. 2005. Vol. 9. P. 119–137 (jointly with Ya. Minullin, L. Schrattenholzer).
99. Равновесие по Нэшу в играх многих лиц выбором моментов времени и интегральными функционалами платы // Соврем. математика и ее прил. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005. Т. 26. С. 42–53 (совм. с С. А. Брыкаловым, О. Н. Головиной).
100. On identification of nonobservable contamination sources // Environmental Modelling and Software. 2005. Vol. 20. P. 1057–1061 (jointly with V. I. Maksimov).
101. A dynamical model of optimal investment in R&D // J. of Math. Sci. 2005. Vol. 26, no. 6. P. 1495–1535 (jointly with S. M. Aseev, G. Hutschenreiter).
102. A system-robust stabilization technique with application to an uncertain model of global carbon cycle // Modeling and Control of Autonomous Decision Support Based Systems: Proc. of the 13th International Workshop on Dynamics and Control (Wiesensteig, Germany, May 22–26, 2005) / eds. E. Hofer, E. Reithmeier. Aachen: Shaker Verlag, 2005. P. 149–156.
103. A dynamic model of optimal investment in research and development with international knowledge spillovers // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 125–133 (jointly with S. Aseev, G. Hutschenreiter, A. Lysenko).
104. Алгоритм решения задач оптимального управления в гильбертовых пространствах // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил.: Темат. обзоры. М.: ВИНИТИ, 2006. Т. 110. С. 155–188 (совм. с В. И. Максимовым).
105. Задача об оптимальном параметре совместности: метод конструктианой регуляризации // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 2006. № 2. С. 128-166 (совм. с Е. А. Ровенской, Ю. С. Осиповым).
106. Game of timing in gas pipeline projects competition: simulation software and generalized equilibrium solutions // Advances in dynamic games. Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. Boston: Birkhäuser Boston, 2006. Vol. 8. P. 237–252 (jointly with O. Nikonov, Ya. Minullin).
107. Задачи динамического обращения // Вест. РАН. 2006. Т. 76, № 7. С. 615–624 (совм. с Ю. С. Осиповым).
108. Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой параболических уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 157–172 (совм. с В. И. Максимовым).
109. О работах Ю. С. Осипова по математической теории управления // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4. С. 5–24.
110. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–272 (совм. с С. М. Асеевым).
111. Об одном классе задач оптимального управления, возникающих в математической экономике // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 16–31 (совм. с С. М. Асеевым).
112. О режиме повторяемости редких сильных событий (катастроф): новые подходы и результаты их применения // Изменение окр. среды и климата. Природные и связан. с ними техноген.: в 8 т. / Ин-т географии РАН. М., 2008. Т. 3. С. 143–188 (совм. с В. И. Максимовым, Е. А. Ровенской, М. В. Родкиным).
113. Introduction: towards the design of an integrated socio-environmental assessment model for the Baltic Sea region // Ecolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control: Applications to Industrial and Societal Problems. Barcelona: International Center of Numerical Methods in Engineering, 2008. P. 425–429 (jointly with B. Fath, H. Lilienstrom, E. Rovenskaya).
114. Convex two-level optimization problem // Comput. Math. Model. 2008. Vol. 19, no. 1. P. 73–101 (jointly with R. A. Usachev).
115. On rough inversion of a dynamical system with a disturbance // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 6. P. 587–600 (jointly with V. I. Maksimov).
116. Shadow prices in infinite-horizon optimal control problems with dominating discounts // Appl. Math. Comput. 2008. Vol. 204, no. 2. P. 519–531 (jointly with S. M. Aseev).

117. Infinite-horizon dynamic programming and application to management of economies effected by random natural hazards // Appl. Math. Comput. 2008. Vol. 204, no. 2. P. 609–620 (jointly with M. Obersteiner, A. Smirnov).
118. Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157. (совм. с Ю. С. Осиповым).
119. Метод экстремального сдвига Н. Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. № 4. С. 18–30 (совм. с Ю. С. Осиповым, В. И. Максимовым).
120. On a boundedly rational Pareto-optimal trade in emission reduction Laxenburg, Austria. 2009. 24 p. (Interim Report / IIASA; IR-09-017).
121. О динамической регуляризации при случайных помехах // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 134–147 (совм. с Ю. С. Осиповым).
122. Модели экономического развития. Авторитарное планирование и сиюминутные решения // Проблемы динамич. упр.: сб. науч. тр. / МГУ. М.: МАКС Пресс, 2010. Вып. 5. С. 157–165.
123. Изучение упрощенной модели сбора налогов с предприятия государством с учетом белого и теневого капиталов // Нелинейная динамика и управление: сб. науч. тр. / под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина М.: Физматлит, 2010. № 7. С. 287–310 (совм. с М. С. Никольским, С. П. Коноваловым).
124. On a decentralized boundedly rational emission reduction strategy // Dynamic Systems, Economic Growth and the Environment / eds. J. Crespo-Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev. Berlin: Springer Verlag, 2010. P. 215–235. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance; vol. 12).
125. Two-step "win-stay, lose-shift" and learning to cooperate in the repeated prisoner's dilemma // Int. Game Theory Rev. 2010. Vol. 12, no. 4. P. 437–451.
126. Resource-saving infinite-horizon tracking under uncertain input // Appl. Math. Comput. 2010. Vol. 217, no. 3. P. 1135–1140 (jointly with V. Maksimov).
127. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с (совм. с Ю. С. Осиповым, В. И. Максимовым).
128. Методы экстремального управления и задачи динамического обращения // Вест. Нижегород. ун-та. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. № 4, ч. 2. С. 184–185 (совм. с В. И. Максимовым).
129. Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002 (совм. с В. И. Максимовым).
130. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161 (совм. с Ю. С. Осиповым, В. И. Максимовым).
131. Числовая кодировка дискретизованных управлений и аппроксимационный метрический критерий разрешимости игровой задачи наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 105–124.
132. О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167 (совм. с Ю. С. Осиповым).
133. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, вып. 2. С. 3–64 (совм. с С. М. Асеевым, К. О. Бесовым).
134. О равновесных стратегиях поведения в бесконечных повторяющихся играх // Проблемы динам. упр.: сб. науч. тр. / МГУ. М.: МАКС Пресс, 2012. Вып. 6. С. 133–159 (совм. с А. В. Райгородской).
135. Security in the age of systemic risk: Strategies, tactics and options for dealing with femtorisks and beyond. Laxenburg, 2012. 14 p. (Interim Report / IIASA; IR-12-0100) (jointly with A. Frank, M. Goud Collins, M. Clegg, U. Dieckmann, V. Kremenyuk, J. Linnerooth-Bayer, S. Levin, A. Lo, B. Ramalingam, J. Ramo, S. Roy, D. Saari, Z. Shtauber, K. Sigmund, J. Tepperman, S. Thurner, W. Yiwei, D. von Winterfeldt).
136. Towards detection of early warning signals on financial crises. 2012. 26 p. (Interim Report / IIASA; IR-12-001) (jointly with A. Puchkova).
137. Relaxation of optimal control problems and linear-quadratic systems // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, № 1–2. P. 17–42.
138. О сочетании процессов реконструкции и гарантирующего управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 5–21 (совм. с В. И. Максимовым).

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В СООТНОШЕНИЯХ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА[1]

С. М. Асеев

Для класса задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, возникающих при исследовании процессов экономического роста, изучаются свойства сопряженной переменной, фигурирующей в соотношениях принципа максимума Понтрягина и определяемой посредством формулы, аналогичной формуле Коши для решений линейных дифференциальных систем. Показано, что при выполнении условия типа доминирования дисконтирующего множителя так определенная сопряженная переменная удовлетворяет как основным соотношениям принципа максимума (сопряженной системе и условию максимума) в нормальной форме, так и дополнительному условию стационарности гамильтониана. Кроме того, рассмотрена основанная на данной формуле новая экономическая интерпретация сопряженной переменной.

Ключевые слова: Задачи оптимального экономического роста, бесконечный горизонт, принцип максимума Понтрягина, сопряженная переменная, условие стационарности гамильтониана.

S. M. Aseev. On some properties of the adjoint variable in the relations of the Pontryagin maximum principle for optimal economic growth problems.

For a class of infinite horizon optimal control problems that appear in studies on economic growth processes, the properties of the adjoint variable in the relations of the Pontryagin maximum principle defined by a formula similar to the Cauchy formula for the solutions to linear differential systems are studied. It is shown that, under a dominating discount condition, the adjoint variable defined in this way satisfies both the core relations of the maximum principle (the adjoint system and the maximum condition) in the normal form and the additional stationarity condition for the Hamiltonian. In addition, a new economic interpretation of the adjoint variable based on this formula is considered.

Keywords: optimal economic growth problems, infinite horizon, Pontryagin's maximum principle, adjoint variable, stationarity condition for the Hamiltonian.

Введение

Начиная с работы Ф. Рамсея [20] динамические модели оптимального экономического роста обычно формулируют в виде задач оптимального управления на бесконечном интервале времени (см., например, [8; 13]). Эти задачи характеризуются фиксированным начальным состоянием, отсутствием каких-либо ограничений на поведение допустимых траекторий на бесконечности и специальным видом интегрального функционала, задаваемого несобственным интегралом с дисконтированием. Задачи данного класса иногда называют *задачами оптимального экономического роста*. Как известно, основные трудности исследования этих задач связаны с бесконечным горизонтом планирования (см., например, [2; 4]).

В последние годы в области теории оптимального управления для задач на бесконечном интервале времени был получен ряд новых результатов. При помощи метода конечно-временных аппроксимаций (см. [2–4; 9]) и метода игольчатых вариаций (см. [10; 11]) были получены варианты принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащие дополнительные условия на сопряженную переменную. В частности, при выполнении условий типа доминирования дисконтирующего множителя в работах [2–4; 9–11] были доказаны различные варианты

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00685-а, 13-01-12446-офи-м2), ДРПННиТ (проект 1.1348.2011) и научной программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”.

принципа максимума в нормальной форме с сопряженной переменной, определяемой по рассматриваемому оптимальному процессу при помощи формулы, аналогичной известной формуле Коши [7] для решений линейных дифференциальных систем. В некоторых ситуациях такое представление сопряженной переменной позволяет охарактеризовать ее асимптотическое поведение и обосновать применение стандартных условий трансверсальности на бесконечности (см. [2–4; 9–11]). Более того, это представление сопряженной переменной может быть использовано в качестве их альтернативы (см. обсуждение примера 2.4 в [11]).

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение свойств сопряженной переменной, определяемой по оптимальному процессу при помощи формулы, аналогичной формуле Коши для решений линейных дифференциальных систем. Исходя из результатов работ [10; 11], показано, что в случае выполнения условия типа доминирования дисконтирующего множителя такое задание сопряженной переменной влечет выполнение как основных соотношений принципа максимума в нормальной форме (сопряженной системы и условия максимума), так и дополнительного условия стационарности гамильтониана. Кроме того, обсуждается вытекающая из данного представления сопряженной переменной ее новая экономическая интерпретация.

1. Принцип максимума для задач оптимального экономического роста

Модели современной теории экономического роста обычно формулируются в виде следующей задачи оптимального управления.

Задача (P).

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t))\, dt \to \max. \tag{1.3}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значения фазового вектора и вектора управления соответственно в момент времени $t \geq 0$, U — непустой компакт из $\mathbb{R}^m$, $\rho \in \mathbb{R}^1$ — параметр дисконтирования (не обязательно положительный). Предполагается, что начальное состояние x_0 принадлежит заданному открытому выпуклому множеству $G \subset \mathbb{R}^n$, а функции $f\colon G \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ и $g\colon G \times U \mapsto \mathbb{R}^1$ вместе со своими частными производными $f_x\colon G \times U \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ и $g_x\colon G \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывные.

Как обычно, будем считать, что класс допустимых управлений в задаче (P) состоит из всех измеримых (по Лебегу) вектор-функций $u\colon [0,\infty) \mapsto U$. По определению траекторией системы (1.1), соответствующей допустимому управлению $u(\cdot)$, является локально абсолютно непрерывное решение (в смысле Каратеодори) $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (1.1), определенное на некотором конечном или бесконечном интервале времени $[0,\tau)$, $\tau > 0$, удовлетворяющее начальному условию (1.2) и лежащее в множестве G. Траекторию $x(\cdot)$ будем называть допустимой, если она определена на всем бесконечном интервале $[0,\infty)$. Пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему допустимая траектория, называется допустимой парой (в задаче (P)) или процессом.

Интеграл в (1.3) будем понимать как несобственный, т. е. для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ по определению

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t))\, dt,$$

если этот предел существует. В дальнейшем будем предполагать, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ несобственный интеграл в (1.3) сходится (к конечному числу). Допустимую пару $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем называть оптимальной в задаче (P), если интегральный функционал (1.3) принимает на этой паре наибольшее возможное значение.

Определим функцию Гамильтона — Понтрягина $\mathcal{H}\colon [0,\infty) \times G \times U \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H\colon [0,\infty) \times G \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ для задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t,x,u,\psi^0,\psi) = \langle f(x,u),\psi\rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x,u), \quad H(t,x,\psi^0,\psi) = \sup_{u\in U} \mathcal{H}(t,x,u,\psi^0,\psi),$$

$$t \in [0,\infty), \quad x \in G, \quad u \in U, \quad \psi^0 \in \mathbb{R}^1, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

В нормальном случае (при $\psi^0 = 1$) переменную ψ^0 будем опускать и писать $\mathcal{H}(t,x,u,\psi)$ и $H(t,x,\psi)$ соответственно вместо $\mathcal{H}(t,x,u,1,\psi)$ и $H(t,x,1,\psi)$.

Вдоль допустимой пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем рассматривать линеаризованную систему

$$\dot{y}(t) = f_x(x_*(t), u_*(t))y(t) \tag{1.4}$$

и сопряженную к ней систему

$$\dot{z}(t) = -f_x^*(x_*(t), u_*(t))z(t). \tag{1.5}$$

Пусть $Y_*(\cdot)$ и $Z_*(\cdot)$ — их нормированные в момент 0 фундаментальные матрицы. Это означает, что столбцы матричных функций $Y_*(\cdot)$ и $Z_*(\cdot)$ — линейно независимые решения соответственно систем (1.4) и (1.5), а матрицы $Y_*(0)$ и $Z_*(0)$ — диагональные единичные. Как известно, матричные функции $Y_*(\cdot)$ и $Z_*(\cdot)$ связаны соотношением $Z_*^{-1}(t) = [Y_*(t)]^*$, $t \geq 0$.

В силу [18, Theorem 4.2] справедлив следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P).

Теорема 1. *Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальная пара в задаче (P). Тогда существуют такие $\psi^0 \geq 0$ и $\psi(\cdot) \in AC_{\mathrm{loc}}([0,\infty), \mathbb{R}^n)$, что*

(1) *функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы*

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t));$$

(2) *выполняется условие максимума*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \overset{п.в.}{=} H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t));$$

(3) *выполняется условие нетривиальности*

$$\psi^0 + \|\psi(0)\| > 0.$$

Как известно, в общем случае данный вариант принципа максимума может выполняться не обязательно в нормальной форме (в этом случае $\psi^0 = 0$), а стандартные условия трансверсальности на бесконечности вида $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$ или $\lim\limits_{t\to\infty} \langle x_*(t), \psi(t)\rangle = 0$ могут нарушаться (подробнее см. [4; 12; 18; 19]). Данное обстоятельство существенно затрудняет применение теоремы 1 к решению конкретных задач.

Вопрос о выполнении дополнительных условий, характеризующих сопряженные переменные ψ^0 и $\psi(\cdot)$, рассматривался многими авторами (см. [12; 15; 19; 21], а также библиографию в [2; 4]). В частности, в работе [19] показано, что в случае, когда для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ интегральный функционал (1.3) сходится, для оптимального процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ основные соотношения принципа максимума (условия (1) и (2) теоремы 1) всегда можно дополнить следующим условием стационарности гамильтониана:

$$H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)) = \psi^0 \rho \int\limits_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

Заметим, что условие (1.6) аналогично условию трансверсальности по времени для задач со свободным конечным временем [6] и является дополнительным к основным соотношениям принципа максимума (см. [4, пример 6.6]).

В работах [3;4;9] в случае $\rho \geq 0$ при условии типа доминирования дисконтирующего множителя и некоторых дополнительных предположениях при помощи метода конечно-временных аппроксимаций был получен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (P), содержащий как условие стационарности гамильтониана (1.6), так и поточечное описание сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ посредством следующей формулы, аналогичной формуле Коши [7] для решений линейных дифференциальных систем:

$$\psi(t) = Z_*(t) \int\limits_t^\infty e^{-\rho t} [Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0. \tag{1.7}$$

Обсуждение данного результата см. в работе [5], а его дальнейшее обобщение — в [2, разд. 4]. Отметим, что при использовании метода конечно-временных аппроксимаций основные соотношения принципа максимума (сопряженная система и условие максимума), условие стационарности гамильтониана (1.6) и представление для сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ посредством формулы (1.7) получаются независимо друг от друга посредством предельного перехода в соотношениях принципа максимума для аппроксимирующих задач.

С другой стороны, в работах [10; 11] при несколько другом условии типа доминирования дисконтирующего множителя для общей неавтономной задачи с измеримым временем и при ослабленных предположениях на сходимость интегрального функционала при помощи метода игольчатых вариаций (подробнее см. [10; 11]) был получен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, также содержащий описание сопряженной переменной посредством формулы (1.7). При таком подходе основные соотношения принципа максимума (сопряженная система и условие максимума) получаются как следствия задания сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ при помощи формулы (1.7).

Далее покажем, что в случае задачи (P) при выполнении условия типа доминирования дисконтирующего множителя $(A2)$ из [11] задание сопряженной переменной при помощи формулы (1.7) влечет также и выполнение условия стационарности (1.6).

Для этого введем новую фазовую переменную $\tilde{z} = (z, z^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $z^{n+1} \in \mathbb{R}^1$, вектор управления $\tilde{u} = (w, v) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $w \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^1$, и рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

З а д а ч а $(\tilde{P})$.

$$\dot{z}(\tau) = v(\tau) f(z(\tau), w(\tau)), \quad w(t) \in U, \quad v(\tau) \in [0.5, 1.5], \tag{1.8}$$

$$\dot{z}^{n+1}(\tau) = -v(\tau)\rho z^{n+1}(\tau), \tag{1.9}$$

$$\tilde{z}(0) = (x_0, 1),$$

$$\tilde{J}(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = \int\limits_0^\infty v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau))\, d\tau \to \max. \tag{1.10}$$

Здесь $\tilde{z}(0) \in \tilde{G}$, где $\tilde{G} = G \times \mathbb{R}^1$, допустимое управление $\tilde{u}\colon [0,\infty) \mapsto U \times [0.5, 1.5]$ — измеримая (по Лебегу) функция, а остальные данные в задаче $(\tilde{P})$ те же самые, что и в (P). Оптимальность допустимой пары $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$ в задаче $(\tilde{P})$ понимается так же, как и в (P).

Лемма. *Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ — допустимый процесс в задаче (P), $v\colon [0,\infty) \mapsto [0.5, 1.5]$ — произвольная измеримая функция, а функция $t\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ определена равенством $t(\tau) = \int_0^\tau v(s)\, ds$, $\tau \geq 0$. Тогда пара $(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$, где $z(\tau) = x(t(\tau))$, $z^{n+1}(\tau) = e^{-\rho \int_0^\tau v(s)\, ds}$ и $w(\tau) =$*

$u(t(\tau))$, $\tau \geq 0$, — допустимый процесс в задаче $(\tilde{P})$. При этом для любого $\sigma > 0$ имеем

$$\int\limits_0^{\sigma} v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau))\, d\tau = \int\limits_0^{t(\sigma)} e^{-\rho s} g(x(s), u(s))\, ds.$$

В частности, если интеграл в (1.3) на паре $(x(\cdot), u(\cdot))$ сходится, то интеграл в (1.10) также сходится, и справедливо равенство $\tilde{J}(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = J(x(\cdot), u(\cdot))$.

Если же $(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ — допустимый процесс в задаче $(\tilde{P})$, а функция $\tau(\cdot)$ — обратная к функции $t(\cdot)$, определенной равенством $t(\tau) = \int_0^{\tau} v(s)\, ds$, $\tau \geq 0$, то пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $x(t) = z(\tau(t))$, $u(t) = w(\tau(t))$, $t \geq 0$, — допустимый процесс в задаче (P). При этом для любого $T > 0$ имеем

$$\int\limits_0^{T} e^{-\rho s} g(x(s), u(s))\, ds = \int\limits_0^{\tau(T)} v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau))\, d\tau.$$

В частности, если интеграл в (1.10) на паре $(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ сходится, то интеграл в (1.3) также сходится, и справедливо равенство

$$\tilde{J}(\tilde{z}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = J(x(\cdot), u(\cdot)).$$

Доказательство. Действительно, если $(x(\cdot), u(\cdot))$ — допустимый процесс в задаче (P), и $v\colon [0, \infty) \mapsto [0.5, 1.5]$ — произвольная измеримая функция, то функция $t(\cdot)$, определенная равенством $t(\tau) = \int_0^{\tau} v(s) ds$, $\tau \geq 0$, — абсолютно непрерывная и монотонная. Следовательно, функция $w(\cdot)$: $w(\tau) = u(t(\tau))$, $\tau \geq 0$, — измеримая, как суперпозиция измеримой функции $u(\cdot)$ и абсолютно непрерывной монотонной функции $t(\cdot)$. Легко видеть, что соответствующая функция $\tilde{z}(\cdot)$ — абсолютно непрерывная. Прямым дифференцированием проверяется, что функция $\tilde{z}(\cdot)$ является допустимой траекторией в задаче $(\tilde{P})$. Тогда для любого $\sigma > 0$, выполняя замену $t(\tau) = \int_0^{\tau} v(s)\, ds$, $\tau \geq 0$, получаем

$$\int\limits_0^{\sigma} v(\tau) z^{n+1}(\tau) g(z(\tau), w(\tau))\, d\tau = \int\limits_0^{t(\sigma)} e^{-\rho t} g(x(t), u(t))\, dt.$$

Следовательно, сходимость интеграла в (1.3) влечет сходимость интеграла в (1.10) и их равенство.

В одну сторону утверждение леммы доказано. Доказательство утверждения леммы в обратную сторону проводится аналогично. □

В силу доказанной леммы задачи (P) и $(\tilde{P})$ эквивалентны. В частности, если $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальный процесс в задаче (P), то $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$, где $\tilde{z}_*(t) = (x_*(t), e^{-\rho t})$, $\tilde{u}_*(t) = (u_*(t), 1)$, $t \geq 0$, — оптимальный процесс в задаче $(\tilde{P})$.

Доказательство следующего результата основано на реализации схемы доказательства теоремы 4.1 из [11] применительно к вспомогательной задаче $(\tilde{P})$.

Теорема 2. *Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальная пара в задаче (P). Пусть, далее, существуют такие число $\gamma > 0$ и интегрируемая функция $\lambda\colon [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$: $\|\zeta - x_0\| < \gamma$, задача Коши $\dot{x}(t) = f(x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, имеет решение (в смысле Каратеодори) $x(\zeta; \cdot)$ на $[0, \infty)$ в G и*

$$\max_{\theta \in [x(\zeta;t), x_*(t)]} \left| \langle e^{-\rho t} g_x(\theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t). \tag{1.11}$$

Тогда

(1) *для любого* $t \geq 0$ *интеграл*

$$I_*(t) = \int\limits_t^\infty e^{-\rho s}[Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s))\, ds$$

сходится абсолютно, а функция $\psi(\cdot)$*:* $\psi(t) = Z_*(t) I_*(t)$, $t \geq 0$, *(см.* (1.7)*) локально абсолютно непрерывна*;

(2) *функция* $\psi(\cdot)$ *удовлетворяет сопряженной системе*

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)); \tag{1.12}$$

(3) *выполняется условие максимума*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi(t)); \tag{1.13}$$

(4) *выполняется условие стационарности гамильтониана*

$$H(t, x_*(t), \psi(t)) = \rho \int\limits_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0. \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу доказанной леммы из оптимальности процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (P) вытекает оптимальность процесса $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$, где $\tilde{z}_*(t) \equiv (x_*(t), e^{-\rho t})$ и $\tilde{u}_*(t) = (u_*(t), 1)$, $t \geq 0$, в задаче $(\tilde{P})$.

Рассмотрим линеаризованную вдоль оптимальной траектории $\tilde{z}_*(\cdot)$ систему (1.8), (1.9):

$$\dot{y}(t) = f_x(x_*(t), u_*(t)) y(t), \tag{1.15}$$

$$\dot{y}^{n+1}(t) = -\rho y^{n+1}(t). \tag{1.16}$$

Система (1.15), (1.16) имеет блочный вид. Поэтому ее нормированная фундаментальная матрица $\tilde{Y}(\cdot)$ также имеет блочный вид:

$$\tilde{Y}_*(t) = \begin{pmatrix} Y_*(t) & 0 \\ 0 & e^{-\rho t} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Здесь $Y_*(\cdot)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (1.4). Далее, в силу [11, лемма 3.1] при п.в. $t \geq 0$ выполняется неравенство $\|[Y_*(t)]^* g_x(x_*(t), u_*(t))\| \leq \sqrt{n}\lambda(t)$. Отсюда вытекает сходимость для любого $t \geq 0$ несобственного интеграла

$$I_*(t) = \int\limits_t^\infty e^{-\rho s}[Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s))\, ds.$$

Здесь $Z_*(t)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (1.5). Следовательно, функция $\tilde{\psi}(\cdot) = (\psi(\cdot), \psi^{n+1}(\cdot))$, $\psi\colon [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\psi^{n+1}\colon [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, определенная равенством

$$\tilde{\psi}(t) = (\psi(t), \psi^{n+1}(t)) = \begin{pmatrix} Z_*(t) I_*(t) & 0 \\ 0 & e^{\rho t} \displaystyle\int\limits_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\, ds \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \tag{1.17}$$

локально абсолютно непрерывна. Заметим, что формула (1.17) определяет ту же самую сопряженную функцию $\psi(\cdot)$, $\psi(t) = Z_*(t) I_*(t)$, $t \geq 0$, что и в [11, теорема 4.1]. Таким образом, утверждение (1) доказано.

Прямым дифференцированием проверяется, что эта функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы (1.12). Таким образом утверждение (2) доказано.

Доказательство условия максимума для оптимального в задаче $(\tilde{P})$ процесса $(\tilde{z}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot))$, где $\tilde{z}_*(t) = (x_*(t), e^{-\rho t})$, $\tilde{u}_*(t) = (u_*(t), 1)$, $t \geq 0$, проводится при помощи метода игольчатых вариаций полностью аналогично доказательству условия максимума в [11, теорема 4.1]. Оно опирается на оценку (1.11) и свойство сходимости интегрального функционала (1.3) (подробнее см. доказательство леммы 3.2 и теоремы 4.1 в [11]). Получаемое таким образом условие максимума имеет вид

$$\langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t)\rangle - \rho e^{-\rho t}\psi^{n+1}(t) + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t))$$
$$\overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{v\in[0.5,1.5]} v\Big[\sup_{u\in U}\Big(\langle f(x_*(t), u), \psi(t)\rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u)\Big) - \rho e^{-\rho t}\psi^{n+1}(t)\Big]. \tag{1.18}$$

Поскольку для любого $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$\langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t)\rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \leq \sup_{u\in U}\Big(\langle f(x_*(t), u), \psi(t)\rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u)\Big)$$
$$\leq \sup_{v\in[0.5,1.5]} v \sup_{u\in U}\Big(\langle f(x_*(t), u), \psi(t)\rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u)\Big),$$

то равенство (1.18) влечет выполнение условия максимума (1.13) для задачи (P):

$$\langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t)\rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi(t)).$$

Таким образом, утверждение (3) доказано.

Далее, в силу доказанного условия максимума (1.13) получаем, что при п.в. $t \geq 0$ верхняя грань по $v \in [0.5, 1.5]$ в (1.18) достигается в точке $v_*(t) = 1$. Следовательно, в силу непрерывности функции $\psi^{n+1}(\cdot)$ из равенства (1.18) получаем

$$\rho e^{-\rho t}\psi^{n+1}(t) = \sup_{u\in U}\Big(\langle f(x_*(t), u), \psi(t)\rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u)\Big) = H(t, x_*(t), \psi(t)), \quad t \geq 0.$$

С другой стороны, в силу (1.17) имеем

$$\psi^{n+1}(t) = e^{\rho t}\int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

Подставляя данное выражение для $\psi^{n+1}(t)$ в предыдущее равенство получаем условие стационарности гамильтониана (1.14) для задачи (P):

$$H(t, x_*(t), \psi(t)) = \rho\int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

Утверждение (4) доказано. □

Заметим, что использованное в формулировке теоремы 2 условие (1.11) является адаптированным к случаю задачи (P) вариантом условия $(A2)$ из [11].

2. Экономическая интерпретация сопряженной переменной

Экономическая интерпретация принципа максимума Понтрягина [6], предложенная в конце 1960-х гг. Р. Дорфманом [17], основана на отождествлении текущей стоимости вектора капитала со значениями функции оптимального значения и использовании метода динамического программирования Р. Беллмана [14].

Именно при произвольных фиксированных $\xi \in G$ и $t \geq 0$ рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а $(P_{\xi,t})$.

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s)), \quad u(s) \in U,$$

$$x(t) = \xi,$$

$$J_t(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_t^\infty e^{-\rho(s-t)} g(x(s), u(s))\, ds \to \max .$$

Будем считать, что все остальные данные в задаче $(P_{\xi,t})$ те же самые, что и в задаче (P).

Обычно в моделях оптимального экономического роста координаты фазового вектора $x \in G$ интерпретируются как величины различных видов производственного капитала, вектор управления $u \in U$ характеризует инвестиции в эти виды капитала и, возможно, потребление, а функция $g(\cdot,\cdot)$ задает текущую полезность (например, прибыль) $g(x,u)$, получаемую в единицу времени при имеющемся векторе капитала x и выбранном значении управления u.

Предположим, что для любых $\xi \in G$ и $t \geq 0$ задача $(P_{\xi,t})$ имеет решение, и определим текущую функцию оптимального значения $V\colon G \times [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ равенством

$$V(\xi,t) = \max_{(x(\cdot),u(\cdot))} J_t(x(\cdot), u(\cdot)), \quad \xi \in G, \quad t \geq 0.$$

Здесь максимум берется по всем допустимым парам $(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче $(P_{\xi,t})$. Заметим, что определение функции $V(\cdot,\cdot)$ как "текущей" функции оптимального значения связано с тем фактом, что дисконтирование в задаче $(P_{\xi,t})$ осуществляется относительно начального в ней, т. е. текущего, момента времени t. Поэтому для любых $\xi \in G$ и $t \geq 0$ величина $V(\xi,t)$ интерпретируется как *текущая стоимость* (net present value) вектора капитала ξ в момент t. Эта стоимость $V(\xi,t)$ есть величина всей полезности, оцененная на момент t, которую может принести вектор капитала ξ на интервале $[t,\infty)$, если управление будет осуществляться оптимальным образом.

Несложно показать (см., например, [2; 4, § 5]), что в задаче $(P_{\xi,t})$ функция $V(\cdot,\cdot)$ инвариантна по времени, т. е. $V(\xi,t) \equiv V(\xi,0)$, $\xi \in G$, $t \geq 0$. Таким образом, в задаче $(P_{\xi,t})$ способность капитала приносить полезность на интервале $[t,\infty)$, дисконтированная относительно момента t, зависит только от величины ξ. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функцию $V(\cdot)$ как функцию одной переменной $\xi \in G$ и писать $V(\xi)$ вместо $V(\xi,t)$.

Пусть теперь функция $V(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируема на множестве G. Тогда основные соотношения (1) и (2) принципа максимума (теоремы 1) и условие стационарности (1.6) в нормальной форме могут быть получены при помощи метода динамического программирования (см., например, [4, § 5]). При этом значения $p(t) = e^{\rho t}\psi(t)$, $t \geq 0$, текущей сопряженной переменной $p(\cdot)$ вдоль оптимальной траектории $x_*(\cdot)$ определяются равенством

$$p(t) = V_x(x_*(t)), \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Это соотношение позволяет придать экономический смысл координатам вектора $p(t)$ как текущим *переходным ценам* (marginal prices) (их еще называют текущими *невидимыми ценами* (shadow prices)) соответствующих видов капитала в момент t. Данный факт играет ключевую роль в экономической интерпретации соотношений принципа максимума, предложенной Р. Дорфманом [17]. Величины же координат вектора $\psi(t) = e^{-\rho t}p(t)$, $t \geq 0$, понимаются в этом случае как эти цены, но приведенные на начальный момент времени 0, т. е. взятые с учетом дисконтирования относительно момента 0.

Покажем, что формула (1.7) позволяет дать альтернативное толкование координатам вектора $\psi(t)$, $t \geq 0$, сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ как агрегированным с учетом дисконтирования на интервале $[t,\infty)$ переходным межвременным ценам соответствующих видов вектора капитала $x_*(t)$, причем без каких-либо априорных предположений относительно дифференцируемости функции оптимального значения $V(\cdot)$.

Пусть выполняются условия теоремы 2 и $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — оптимальная пара в задаче (P). Тогда для произвольного $t \geq 0$ и любого начального состояния ζ, лежащего в некоторой достаточно малой окрестности $\mathcal{V}(x_*(t))$ точки $x_*(t)$, задача Коши

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u_*(s)), \quad x(t) = \zeta \tag{2.2}$$

имеет решение $x(\zeta, t; \cdot)$, определенное на всем бесконечном интервале $[t, \infty)$ и лежащее в G. В частности, $x(x_*(t), t; s) \equiv x_*(s)$, $s \geq t$. Заметим, что в задаче Коши (2.2) управление $u_*(\cdot)$ фиксировано, меняется только начальное состояние $\zeta \in \mathcal{V}(x_*(t))$.

При произвольных $0 \leq t < s$ определим функцию *межвременной мгновенной полезности* $\pi(\cdot, t, s)$ равенством

$$\pi(\zeta, t, s) = g(x(\zeta, t; s), u_*(s)), \quad \zeta \in \mathcal{V}(x_*(t)).$$

Здесь определение функции $\pi(\cdot, t, s)$ как "межвременной" мгновенной полезности связано с тем фактом, что величина $\pi(\zeta, t, s)$ есть выражение мгновенной полезности, получаемой в момент s в зависимости от вектора капитала ζ в предшествующий момент $t < s$, при заданном на интервале $[t, s]$ управлении $u_*(\cdot)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2. *Тогда для фигурирующей в утверждении теоремы* 2 *сопряженной переменной* $\psi(\cdot)$ *вдоль оптимальной траектории* $x_*(\cdot)$ *справедливо равенство*

$$\psi(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} \pi_\zeta(x_*(t), t, s)\, ds, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Доказательство теоремы 3 несложно получается из теоремы о дифференцируемости решения задачи Коши по начальному значению. Действительно, для любого $t \geq 0$ и произвольного $s > t$ согласно теореме о дифференцируемости решения задачи Коши по начальному значению (см., например, [1, § 2.5.6]) функция $x(\cdot, t; s)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_*(t)$ и

$$x_\zeta(x_*(t), t; s) = Y_*(s)[Y_*(t)]^{-1} = \Big[[Z_*(s)]^{-1}\Big]^*[Z_*(t)]^* = \Big[[Z_*(t)][Z_*(s)]^{-1}\Big]^*.$$

Отсюда вследствие непрерывной дифференцируемости функции $g(\cdot, u_*(s))$ получаем

$$\pi_\zeta(x_*(t), t, s) = [g_x(x_*(s), u_*(s))]^* x_\zeta(x_*(t), t; s) = [g_x(x_*(s), u_*(s))]^* \Big[[Z_*(t)][Z_*(s)]^{-1}\Big]^*$$
$$= [Z_*(t)][Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s)).$$

Следовательно, в силу теоремы 2 справедливо равенство (2.3). □

Заметим, что поскольку при всех $s > t \geq 0$ величина $\pi(x_*(t), t, s)$ есть межвременная мгновенная полезность в момент s вектора капитала $x_*(t)$ в момент t, то координаты ее производной $\pi_\zeta(x_*(t), t, s)$ суть *переходные межвременные цены* в момент s, соответствующие различным видам вектора капитала $x_*(t)$ в момент t. Значения же координат вектора $e^{-\rho s}\pi_\zeta(x_*(t), t, s)$ суть эти цены, но выраженные на момент 0. Отсюда заключаем, что согласно теореме 3 в каждый момент времени $t \geq 0$ вектор $\psi(t)$ представляет собой проинтегрированную на интервале $[t, \infty)$ (с учетом дисконтирования относительно момента 0) соответствующую функцию переходных межвременных цен $\pi_\zeta(x_*(t), t, \cdot)$.

В заключение отметим, что выполнение обоих соотношений (2.1) и (2.3) влечет равенство

$$V_x(x_*(t)) = \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} \pi_\zeta(x_*(t), t, s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Данное равенство означает, что при движении по оптимальной траектории $x_*(\cdot)$ в каждый момент времени $t \geq 0$ текущие переходные цены различных видов вектора капитала $x_*(t)$ равны их агрегированным с учетом дисконтирования относительно этого момента t на всем последующем интервале $[t, \infty)$ переходным межвременным ценам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
2. **Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, вып. 2. С. 3–64.
3. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с функционалом, заданным несобственным интегралом // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 5. С. 583–585.
4. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.**, Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
5. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Об одном классе задач оптимального управления, возникающих в математической экономике // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 16–31.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
7. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
8. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. Princeton; N.J.: Princeton Univ. Press, 2008. 552 p.
9. **Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V.** The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 3. P. 1094–1119.
10. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1–2. P. 43–63.
11. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Needle variations in infinite-horizon optimal control: Research Report 2012-04 / ORCOS Institute of Mathematical Methods in Economics; Vienna University of Technology. Vienna, 2012. 19 p.
    URL: http://orcos.tuwien.ac.at/fileadmin/t/orcos/Research_Reports/2012-04_Ase-VV_rev.pdf.
12. **Aubin J.-P., Clarke F.H.** Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979, Vol. 17. P. 567–586.
13. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. N. Y.: McGraw Hill, 1995. 654 p.
14. **Bellman R.** Dynamic programming. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. 342 p.
15. **Benveniste L.M., Scheinkman J.A.** Duality theory for dynamic optimization models of economics: the continuous time case // J. Econ. Theory. 1982. Vol. 27. P. 1–19.
16. **Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.** Infinite horizon optimal control. Determenistic and Stochastic Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 332 p.
17. **Dorfman R.** An economic interpretation of optimal control theory // Am. Econ. Rev. 1969. Vol. 59. P. 817–831.
18. **Halkin H.** Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. P. 267–272.
19. **Michel P.** On the transversality conditions in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 975–985.
20. **Ramsey F.P.** A mathematical theory of saving // Economic J. 1928. Vol. 38. P. 543–559.
21. **Seierstad A.** Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103, no. 1. P. 201–229.

Асеев Сергей Миронович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)
e-mail: aseev@mi.ras.ru

Поступила 14.08.2013

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

М. С. Близорукова

В статье исследуется задача управления нелинейной системой дифференциальных уравнений второго порядка при наличии неконтролируемых воздействий. В случае, когда в дискретные моменты измеряется с ошибкой одна фазовая координата системы, указывается алгоритм решения. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений. Приводятся результаты компьютерного эксперимента.

Ключевые слова: обратная связь, управление, реконструкция.

M. S. Blizorukova. On a control problem of a nonlinear second-order system.

A control problem for a nonlinear system of second-order differential equations in the presence of uncontrollable effects is investigated. A solution algorithm is proposed in the case when one phase coordinate of the system is measured at discrete moments. The algorithm is stable with respect to information noises and computational errors. Results of a computer experiment are presented.

Keywords: feedback, control, reconstruction.

1. Введение. Постановка задачи

В теории управления большой интерес вызывают задачи управления при неполной информации. Эти задачи могут быть охарактеризованы в общих чертах таким образом. Задана динамическая система, на которую действуют управление и ненаблюдаемое возмущение. В процессе функционирования системы измеряется часть ее текущих состояний. Необходимо указать правило управления, которое гарантировало бы нужный режим для траектории системы независимо от того, какое конкретное возмущение действует.

В работе [1] предложена модель, описывающая взаимодействие климата и биосферы. Там же приведен качественный анализ модели, ориентированный на решение задачи нахождения профиля эмиссии CO_2, максимизирующего кумулятивную эмиссию с учетом температурных климатических изменений. При этом авторами подчеркнут тот факт, что в связи с нелинейностью динамики системы им не удалось использовать современный аппарат теории оптимального управления, а именно принцип максимума или метод динамического программирования. Наша цель отлична от целей работы [1]. Мы сконцентрируем свое внимание на анализе задачи управления по принципу обратной связи. Итак, в качестве математической модели возьмем систему уравнений [1]

$$\begin{aligned} \dot T(t) &= \mu \ln\{C(t)/C_0\} - \alpha T(t), \quad t \in [0,\vartheta], \\ \dot C(t) &= -P_t(C,T) + (1-\varepsilon) m(t) N(t) + \delta_t(T) S(t) + u(t) - Q_{oc}(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $t \in [0,\vartheta]$ — время; $T(t)$ — средняя температура воздуха на поверхности Земли; $C(t)$— общее количество углерода в атмосфере; $N(t)$ и $S(t)$ — количество углерода в растительности и почве соответственно; $P_t(C,T) = P_0(1+a_1T)(1+a_2(C-C_0))$; $\delta_t(T) = \delta_0(1+a_3T)$;

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00110-а и 12-01-00175-а), программы Президиума РАН (проект 12-П-1-1012) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6512.2012.1).

$m(t) = m_0(1.087 + a_4 t)$; $D(t)$ — количество углерода, содержащегося в океане; $Q_{oc}(t)$ — неизвестное возмущение. Значения других параметров приведены в таблице [1, с. 30].

Задача управления состоит в следующем. Имеется система (1.1). Ее начальное состояние, т. е. $T(0)$, $C(0)$, задано. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta,$$

неточно замеряется величина $T(\tau_i)$. Результаты измерений (числа ξ_i^h) удовлетворяют неравенствам

$$|T(\tau_i) - \xi_i^h| \le h, \tag{1.2}$$

где $h \in (0,1)$ — информационная ошибка. Фиксирована некоторая траектория системы (1.1)

$$x_*(t) = \{T_*(t), C_*(t)\}$$

с начальным состоянием $T_*(0) = T(0)$, $C_*(0) = C(0)$. Известны верхние и нижние пределы изменения атмосферной эмиссии $u(t)$, а также $Q_{oc}(t)$. В частности, числа e_1, e_2, $0 < e_1 < e_2 < +\infty$ и g_1, g_2, $0 < g_1 < g_2 < +\infty$ такие, что

$$u(t) \in [e_1, e_2], \quad Q_{oc}(t) \in [g_1, g_2] \quad \text{при всех} \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Задано число $\varepsilon > 0$. Требуется указать алгоритм формирования управления $u(t)$ (по принципу обратной связи) в системе (1.1) такой, что, каково бы ни было неизвестное $Q = Q_{oc}(t) \in [g_1, g_2]$, расстояние (в метрике пространства непрерывных функций) между $x(t)$ и $x_*(t)$ в любой момент $t \in [0, \vartheta]$ не превосходит величины ε, если h и δ достаточно малы.

Здесь

$$x(\cdot) = \{T(\cdot), C(\cdot)\} = \big\{T(\cdot; U(\cdot;\xi), Q_{oc}(\cdot)), C(\cdot; U(\cdot;\xi), Q_{oc}(\cdot))\big\}$$

— траектория системы, порожденная неизвестным возмущением $Q_{oc}(t) \in [g_1, g_2]$ и управлением $u(t) = u^h(t;\xi) = U(\tau_i, \xi_i) \in [e_1, e_2]$, формируемым по принципу обратной связи. Такова содержательная постановка рассматриваемой задачи.

Выбор закона управления, т. е. способа изменения параметра $u(t)$, находится в руках некоторого — будем пользоваться терминологией теории позиционных дифференциальных игр [2–4] — игрока. Игрок должен выбирать этот закон таким образом, чтобы обеспечить указанное выше свойство траектории системы (1.1) при любой возможной реализации воздействия $Q_{oc} = Q_{oc}(t)$. Подчеркнем, что природа воздействия Q_{oc} нам безразлична. Необходимо лишь выполнение двух условий: во-первых, реализация Q_{oc} должна быть измеримой (по Лебегу) функцией на промежутке $[0, \vartheta]$, а во-вторых, она должна удовлетворять включению (1.3).

В настоящей работе указывается алгоритм решения описанной выше задачи, который основан на методе динамического обращения (методе динамической аппроксимации управлений), развитом в [5; 6], а также на известном в теории позиционного управления методе стабильных дорожек [3]. В связи с неполнотой информации (а именно, с доступностью для измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы $x(\tau_i) = \{T(\tau_i), C(\tau_i)\}$, а лишь его части — $T(\tau_i)$) мы вводим в контур управления дополнительный блок — блок динамического восстановления (аппроксимации) неизвестной координаты $C(\cdot)$ (блок идентификации). При этом блок идентификации играет роль поставщика информации о текущем полном фазовом состоянии системы. Эта информация оперативно передается на блок управления, формирующий u по закону обратной связи.

Итак, блок идентификации характеризуется с помощью вспомогательной системы M (модель), имеющей вход $v^h(\cdot)$ и выход $w^h(\cdot)$. Процесс управления по принципу обратной связи системой (1.1) и моделью M разбивается на однотипные шаги. При этом на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, ($i$-й шаг) выполняются следующие действия. В момент τ_i по результатам неточных измерений ξ_i^h (см. (1.2)) и состоянию модели $w^h(\tau_i)$ вычисляются функции

$$v^h(t) = v_i^h = \mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)), \tag{1.4}$$

$$u^h(t) = u_i^h = \mathcal{U}(\tau_i, v_i^h, x_*(\tau_i)), \quad t \in \delta_i, \tag{1.5}$$

которые (до момента τ_{i+1}) подаются на вход системы (1.1), а также на вход модели. Значения ξ_{i+1}^h и $w^h(\tau_{i+1})$ являются результатом работы алгоритма на i-м шаге.

Перейдем к строгой формулировке задачи. В дальнейшем считаем фиксированным семейство разбиений интервала $[0, \vartheta]$:

$$\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \quad \tau_{0,h} = 0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta.$$

Полагаем также в (1.1) $N(t) = N$, $S(t) = N$ при всех $t \in [0, \vartheta]$.

З а д а ч а у п р а в л е н и я. Необходимо указать дифференциальные уравнения модели M:

$$\dot{w}^h(t) = f(\xi_i^h, w^h(\tau_i), v_i^h), \quad t \in \delta_{h,i} = [\tau_{i,h}, \tau_{i+1,h}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \tag{1.6}$$

начальное состояние $w^h(0) = w_0^h$, $w^h(t) \in \mathbb{R}$ и законы формирования управлений u_i^h и v_i^h (вида (1.4), (1.5)) в моменты τ_i такие, что для всех $h \in (0, h_*(\varepsilon))$, $\delta = \delta(h) \in (0, \delta(h_*(\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\max_{t \in [0,\vartheta]} \|x^h(t) - x_*(t)\| \le \varepsilon. \tag{1.7}$$

Здесь символом $x^h(\cdot)$ обозначена h-траектория системы (1.1), а именно функция $x^h(\cdot) = \{T^h(\cdot), C^h(\cdot)\}$, определяемая методом Эйлера согласно законам вида (1.4), (1.5), т. е.

$$T^h(t) = T^h(\tau_i) + (t - \tau_i)\big\{\mu \ln\{C^h(\tau_i)/C_0\} - \alpha T^h(\tau_i)\big\},$$

$$C^h(t) = C^h(\tau_i) + (t - \tau_i)\big[-P_{\tau_i}(C^h, T^h) + (1-\varepsilon)m(\tau_i)N + \delta_{\tau_i}(T^h)S + u_i^h - Q_{oc}(\tau_i)\big] \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где $\tau_i = \tau_{i,h}$; $T^h(0) = T_*(0)$; $C^h(0) = C_*(0)$.

Из отмеченного выше следует, что для решения задачи необходимо указать модель (1.6) и правила $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ выбора управлений (1.4), (1.5), обеспечивающие неравенство (1.7).

2. Алгоритм решения

Укажем алгоритм решения сформулированной задачи. Пусть выполнены следующие условия.

У с л о в и е 1. Известны числа $K, A_1, A_2 \in (0, +\infty)$, $A_1 < A_2$, такие, что всякая h-траектория $x^h(\cdot)$, $x^h(\cdot) = \{T^h(\cdot), C^h(\cdot)\}$, системы (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\max_{0 \le t \le \vartheta} \|x^h(t)\| \le K, \quad \sup_{0 \le t \le \vartheta} \|\dot{x}^h(t)\| \le K, \quad C^h(t) \in [A_1, A_2].$$

У с л о в и е 2. Существует измеримая по Лебегу функция $\varphi(t) \in [e_1 - g_2, e_2 - g_1]$ такая, что предписанный режим $x_*(t) = \{T_*(t), C_*(t)\}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
\dot{T}_*(t) &= \mu \ln\{C_*(t)/C_0\} - \alpha T_*(t), \quad t \in [0, \vartheta], \\
\dot{C}_*(t) &= -P_t(C_*, T_*) + (1-\varepsilon)m(t)N + \delta(T_*)S + \varphi(t),
\end{aligned}$$

с начальным состоянием

$$T_*(0) = T(0), \quad C_*(0) = C(0).$$

Кроме того, $C_*(t) \in [A_1, A_2]$ при всех $t \in [0, \vartheta]$.

Фиксируем некоторую функцию $\gamma(h)\colon (0,1) \to \mathbb{R}^+$ со свойствами

$$\gamma(h) \to 0, \quad h^{1/6}/\gamma(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Будем полагать также, что $\delta(h) \le h$.

Пусть модель M описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{w}^h(t) = \mu \ln\{v_i^h/C_0\} - \alpha\xi_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad w^h(0) = \xi_0^h, \tag{2.1}$$

а правила $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ формирования управлений u_i^h (1.5) и v_i^h (1.4) таковы:

$$v_i^h = C_0 \mathrm{exp}(\pi_i^h), \tag{2.2}$$

$$u_i^h = \begin{cases} e_1, & \text{если} \quad C_*(\tau_i) - v_i^h > 0, \\ e_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\pi_i^h = \begin{cases} -c_i h^{-2/3}, & \text{если } -c_i h^{-2/3} \in [b_1, b_2], \\ b_1, & \text{если } -c_i h^{-2/3} < b_1, \\ b_2, & \text{если } -c_i h^{-2/3} > b_2, \end{cases}$$

$$b_1 = \ln(A_1/C_0), \quad b_2 = \ln(A_2/C_0), \quad c_i = \mu(w^h(\tau_i) - \xi_i^h).$$

Имеет место

Теорема. *Пусть уравнение модели выбрано в виде* (1.6), (2.1), *а законы формирования управлений* $\mathcal{V}$ *и* $\mathcal{U}$ *— в виде* (1.4), (1.5), (2.2), (2.3). *Тогда по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать числа* $h_*(\varepsilon) > 0$ *и* $\delta(h_*(\varepsilon)) > 0$ *такие, что при всех* $h \in (0, h_*(\varepsilon))$ *имеют место неравенства* (1.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим изменение величины

$$\varepsilon(t) = |T^h(t) - T_*(t)|^2 + |C^h(t) - C_*(t)|^2, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Пусть фиксированы $h \in (0, 1)$ и Δ_h. Выбирая управление v_i^h в виде (1.4), (2.2), воспользовавшись леммой 1.2.1 [6, с. 29], нетрудно показать, что

$$\int_0^\vartheta |v^h(t) - C^h(t)|^2 \, dt \le c h^{1/3}, \tag{2.4}$$

где постоянная $c \in (0, +\infty)$ не зависит от $h \in (0, 1)$. Нетрудно видеть, что для всех $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \nu_1(t) \equiv |C^h(t) - C_*(t)|^2 \le \nu_1(\tau_i) + \lambda(t; \tau_i) + L(t, \tau_i) + (t - \tau_i) O_h(t - \tau_i), \\ \nu_2(t) \equiv |T^h(t) - T_*(t)|^2 \le \nu_2(\tau_i) \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$+ (T^h(\tau_i) - T_*(\tau_i)) \int_{\tau_i}^t \left[\mu(\ln C^h(\tau_i) - \ln C_*(t)) + \alpha(T^h(\tau_i) - T_*(\tau_i))\right] d\tau + (t - \tau_i) O_h^{(1)}(t - \tau_i),$$

$$\sum_{i=0}^{m_h - 1} \sup_{t \in \delta_i} O_h^{(1)}(t - \tau_i) \le K_2 < +\infty, \qquad \sum_{i=0}^{m_h - 1} \sup_{t \in \delta_i} O_h(\tau_{i+1} - \tau_i) \le K_1 < +\infty,$$

где

$$\lambda(t; \tau_i) = (C^h(\tau_i) - C_*(\tau_i)) \int_{\tau_i}^t \left[P_\tau(C_*, T_*) - P_{\tau_i}(C^h, T^h) + (\delta_{\tau_i}(T^h) - \delta_\tau(T_*))S\right] d\tau;$$

$$L(t, \tau_i) = (C^h(\tau_i) - C_*(\tau_i)) \int_{\tau_i}^t [u_i^h - Q_{oc}(\tau) - \varphi(\tau)] \, d\tau; \tag{2.6}$$

константы K_1, K_2 не зависят от h, u^h, Q_{oc} и φ. Кроме того,

$$\lambda(t;\tau_i) \le c_1|C^h(\tau_i)-C_*(\tau_i)| \int\limits_{\tau_i}^{t} \Big\{|T^h(\tau_i)-T_*(\tau)|+|C^h(\tau_i)-C_*(\tau)|+|T^h(\tau_i)C^h(\tau_i)-T_*(\tau)C^h(\tau)|\Big\}\, d\tau$$

$$\le c_2|C^h(\tau_i)-C_*(\tau_i)| \int\limits_{\tau_i}^{t} \{|T^h(\tau)-T_*(\tau)|+|C^h(\tau)-C_*(\tau)|\}\, d\tau$$

$$+ O_h^{(2)}(t-\tau_i) \le c_3(t-\tau_i)\nu_1(\tau_i) + c_4 \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau)\, d\tau, \tag{2.7}$$

где

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} \sup_{t\in\delta_i} O_h^{(2)}(t-\tau_i) \le K_3 < +\infty.$$

Заметим, что в силу неравенства $C(t) \ge A_1 > 0$ справедлива оценка

$$|\ln C(t) - \ln C_*(t)| \le \frac{|C(t)-C_*(t)|}{A_1}.$$

В таком случае, учитывая (2.6), (2.7), имеем

$$\nu_2(t) \le (1+c_5(t-\tau_i))\nu_2(\tau_i) + c_6 \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau) d\tau. \tag{2.8}$$

Кроме того,

$$L(t;\tau_i) \le (C^h(\tau_i)-v_i^h) \int\limits_{\tau_i}^{t} [u_i^h - Q_{oc}(\tau_i) - \varphi(\tau)]\, d\tau + (v_i^h - C_*(\tau_i)) \int\limits_{\tau_i}^{t} [u_i^h - Q_{oc}(\tau_i) - \varphi(\tau)]\, d\tau.$$

Принимая во внимание (2.3), получим неравенство

$$(v_i^h - C_*(\tau_i)) \int\limits_{\tau_i}^{t} [u_i^h - Q_{oc}(\tau_i) - \varphi(\tau)]\, d\tau \le 0. \tag{2.9}$$

В силу условия 1 можно указать число $c_7 \in (0,+\infty)$ такое, что равномерно по всем $h \in (0,1)$:

$$|C^h(t) - C_*(\tau_i)| \le c_7(t-\tau_i) \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \tag{2.10}$$

Воспользовавшись (2.4) и (2.10), получаем

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} |C^h(\tau_i) - v_i^h| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_i^h - Q_{oc}(\tau_i) - \varphi(\tau)|\, d\tau$$

$$\le c_8 \Big\{ \int\limits_{0}^{\vartheta} |C^h(t) - v^h(t)|\, dt + \delta^2(h) \Big\} \le c_9\{\delta^2(h) + h^{1/6}\}. \tag{2.11}$$

Учитывая (2.5), (2.7)–(2.9), (2.11) и неравенство $\delta(h) \le h$, для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ будем иметь

$$\varepsilon(t) \le (1+c_{10}(t-\tau_i))\varepsilon(\tau_i) + c_{11} \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon(\tau) d\tau.$$

В силу леммы Гронуолла [7] заключаем, что при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верно неравенство $\varepsilon(t) \le (1 + c_{12}(t-\tau_i))\varepsilon(\tau_i)$. Дальнейшие рассуждения проводятся по стандартной схеме (см., например, [3, с. 59–64]). Теорема доказана.

3. Пример

Описанный выше алгоритм был протестирован на модельном примере. Параметры процесса задавались следующие: $g_1 = 10$, $g_2 = 20$, $e_1 = 5$, $e_2 = 30$, $A_1 = 30$, $A_2 = 300$, $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.00047$, $a_3 = 0.07$, $C_0 = 617$, $P_0 = 60$, $\mu = 0.172$, $\alpha = 0.00005$, $\varepsilon = 0.5$, $\delta_0 = 0.00005$, $N = 690$, $S = 1229$. Начальные условия: $T(0) = 0.64$, $C(0) = 162$. Кроме того, предполагалось, что $m(t) = 0.087(1.087 + 0.00633 \cdot t)$, $\xi_i^h = T(\tau_i) + h$. На рис. 1, 2 представлены результаты моделирования при $h = 0.00001$. Левый рисунок соответствует $\delta = 0.001$, правый — $\delta = 0.03$. На рис. 1 сплошная линия отвечает траектории $C(t)$, а прерывистая — управлению v_i^h. На рис. 2 сплошная линия — траектории $C(t)$, а прерывистая — $C_*(t)$.

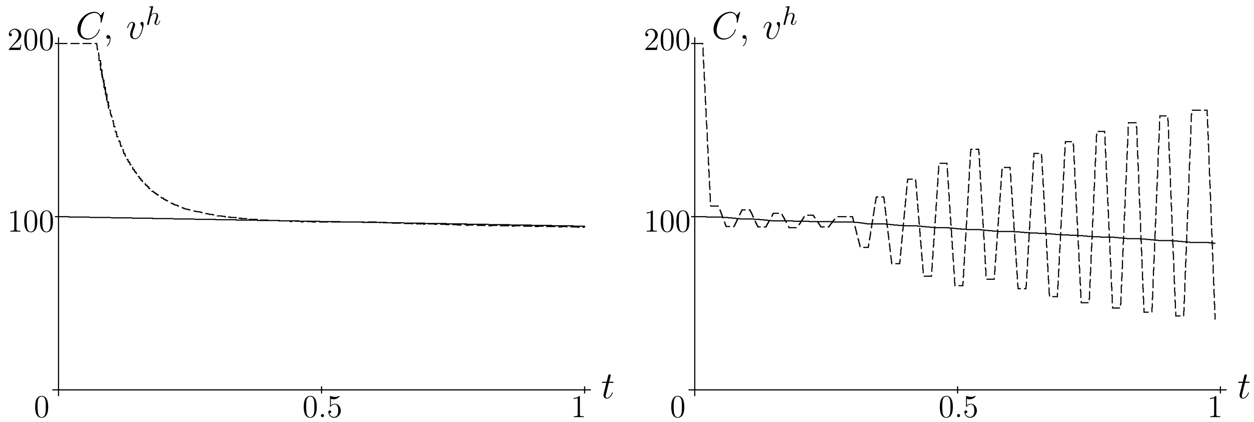


Рис. 1

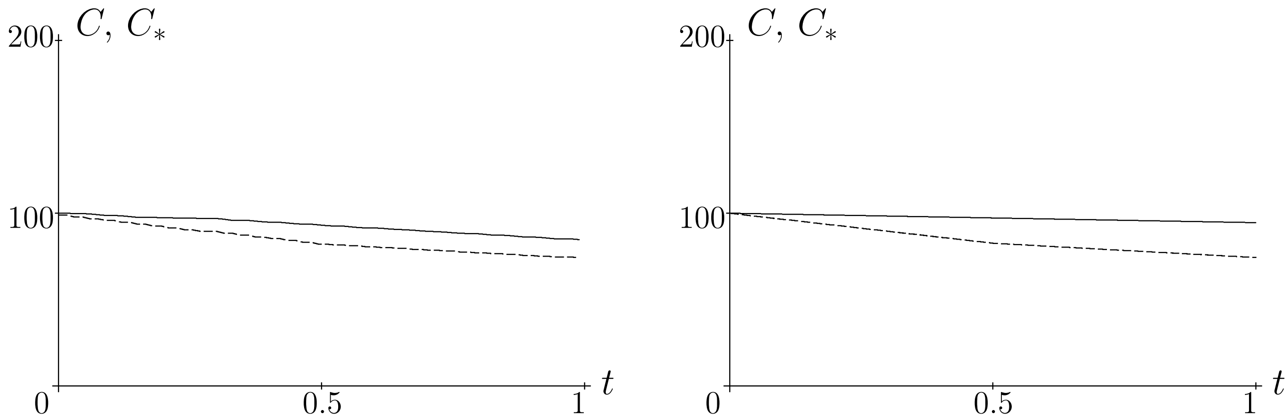


Рис. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Optimisation of reduction of global CO_2 emission based on a simple model of the carbon cycle / Yu. Svirezhev [et al.] // Environmental Modeling and Assessment. 1999. No. 4. P. 23–33.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 522 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.
4. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх [Препринт] / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 80 с.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с.
7. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Либроком, 2012. 225 с.

Близорукова Марина Сергеевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: msb@imm.uran.ru

Поступила 17.04.2013

Том 19 № 4 2013

УДК 517.929

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ[1]

Д. С. Быков

Для решения задачи нахождения оптимального управления системой дифференциальных уравнений с запаздыванием на конечном промежутке времени применяется метод усредняющих аппроксимаций, позволяющий решение исходной задачи аппроксимировать оптимальными управлениями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе найдена скорость сходимости аппроксимирующих управлений к оптимальному.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, оптимальное управление, функциональное пространство состояний, конечномерные аппроксимации.

D. S. Bykov. Accuracy estimate for approximations of the optimal control in a delay system on a finite time interval.

The method of averaging approximations is used for solving the problem of finding an optimal control in a system of delay differential equations on a finite time interval. The method allows to approximate the solution of the problem by optimal controls in systems of ordinary differential equations. The rate of convergence of approximating controls to the optimal control is found.

Keywords: delay differential equations, optimal control, functional phase space, finite-dimensional approximations.

Введение

Применение усредняющей схемы аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации дифференциального уравнения с запаздыванием на бесконечном промежутке времени относительно квадратичного критерия качества впервые было рассмотрено Н. Н. Красовским в работе [1]. В этой работе было показано, что аппроксимирующие управления сильно сходятся к оптимальному управлению. В статье [2] Д. С. Гибсон обосновал применение усредняющих аппроксимаций в задаче нахождения оптимального управления системой, описываемой дифференциальным уравнением с последействием, на конечном и бесконечном промежутке времени. Д. С. Гибсон доказал сходимость аппроксимирующих управлений к оптимальному управлению в равномерной топологии в предположении справедливости гипотезы, позже доказанной в [3]. Д. Саламон показал, что полугруппы аппроксимирующей задачи являются равномерно экспоненциально ограниченными.

Использование сплайнов для нахождения аппроксимаций оптимального управления для системы, порожденной дифференциальным уравнением с последействием, было рассмотрено в [4]. Авторы этой работы Ф. Каппел, Д. Саламон отмечали лучшие свойства их аппроксимации в численных экспериментах, однако теоретически сходимость аппроксимирующих управлений к оптимальному не была обоснована из-за отсутствия сильной сходимости сопряженных аппроксимирующих полугрупп.

Другой тип сплайн-аппроксимаций был предложен К. Ито, Ф. Каппел [5]. Для этого типа аппроксимаций авторы теоретически обосновали сходимость аппроксимирующих управлений

[1]Работа поддержана программой Президиума РАН “Математическая теория управления” (проект 12-П-1-1019), Урало-Сибирским междисциплинарным проектом (проект 12-С-1-1017), проектом УрО РАН М-УрО-2013-2 и РФФИ (проект 13-01-00094).

для задач на конечном и бесконечном промежутке времени. Причем свойства аппроксимирующих полугрупп оказались лучше аналогичных свойств аппроксимирующих полугрупп для схемы усредняющих аппроксимаций, полученных в работе [6].

Для решения задачи оптимальной стабилизации дифференциальных уравнений с последействием также были разработаны и обоснованы методы с использованием кусочно-линейных аппроксимаций и аппроксимаций с использованием функций Лежандра [7–9].

В настоящей работе изучаются усредняющие аппроксимации в задаче нахождения оптимального управления системой дифференциальных уравнений с запаздыванием на конечном промежутке времени. Решена задача нахождения оценки скорости сходимости аппроксимирующих управлений к оптимальному управлению. Аналогичная задача построения оптимального стабилизирующего управления системой дифференциальных уравнений с запаздыванием на бесконечном промежутке времени рассматривалась автором в работах [10; 11].

1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt}=Ax\left(t\right)+A_{\tau}x\left(t-\tau\right)+Bu,\quad t\in\mathbb{R}^{+}=\left[0,\infty\right), \tag{1.1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^r$, A, A_τ — постоянные матрицы порядка n, B — постоянная матрица размерности $n\times r$.

Требуется найти управление u^0, формируемое по принципу обратной связи, которое минимизирует критерий качества переходных процессов

$$J=x^{\top}\left(t_f\right)Gx\left(t_f\right)+\int\limits_0^{t_f}\left(x^{\top}\left(t\right)C_1x\left(t\right)+u^{\top}\left(t\right)C_2u\left(t\right)\right)dt, \tag{1.2}$$

где C_1, G — постоянные неотрицательные матрицы, C_2 — постоянная положительно определенная матрица, $t_f>0$.

В работе [1] предложено в качестве приближений для оптимального управления системой с запаздыванием выбирать оптимальные управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{dx_0^N}{dt}=A_0x_0^N+A_\tau x_N^N+Bu,\\&\frac{dx_i^N}{dt}=\frac{N}{\tau}\left(x_{i-1}^N-x_i^N\right),\quad i=1,\ldots,N,\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $x_i^N\in\mathbb{R}^n$, $i=0,\ldots,N$, с критериями качества

$$J_N=x_0^{N\top}\left(t_f\right)Gx_0^N\left(t_f\right)+\int\limits_0^{t_f}\left(x_0^{N\top}\left(t\right)C_1x_0^N\left(t\right)+u^{\top}\left(t\right)C_2u\left(t\right)\right)dt. \tag{1.4}$$

Анализ точности аппроксимаций удобно проводить в функциональном пространстве состояний [12], в качестве которого выбираем сепарабельное гильбертово пространство $\mathbb{H}=L_2([-\tau,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\rangle_{\mathbb{H}}=\mathbf{x}_2^{\top}\left(0\right)\mathbf{x}_1\left(0\right)+\int_{-\tau}^{0}\mathbf{x}_2^{\top}\left(\vartheta\right)\mathbf{x}_1\left(\vartheta\right)\,d\vartheta$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2\in\mathbb{H}$. В этом пространстве уравнению (1.1) соответствует уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}u,\quad t\in\mathbb{R}^{+}, \tag{1.5}$$

где замкнутый неограниченный оператор $\mathbf{A}$ задается формулами $(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \dfrac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = A\mathbf{x}(0) + A_\tau \mathbf{x}(-\tau)$ и имеет область определения $D(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\right\}$, конечномерный оператор $\mathbf{B}$ определяется формулами $(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(\mathbf{B}u)(0) = Bu$, $u \in \mathbb{R}^r$. При этом критерию качества (1.2) соответствует критерий

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \mathbf{x}_{t_f}^\top(0)\, G\mathbf{x}_{t_f}(0) + \int\limits_0^{t_f} \left(\mathbf{x}_t^\top(0)\, C_1 \mathbf{x}_t(0) + u^\top(t)\, C_2 u(t)\right) dt \\
&= \left\langle \mathbf{G}\mathbf{x}_{t_f}, \mathbf{x}_{t_f}\right\rangle_{\mathbb{H}} + \int\limits_0^{t_f} \left(\langle \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t\rangle_{\mathbb{H}} + u^\top(t)\, C_2 u(t)\right) dt,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где $\mathbf{G} = G\mathbf{P}$, $\mathbf{C}_1 = C_1\mathbf{P}$, $\mathbf{P}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — конечномерный оператор, заданный формулами $(\mathbf{P}\mathbf{x})(0) = \mathbf{x}(0)$, $(\mathbf{P}\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$.

Оптимальное управление $\mathbf{u}^0$ для задачи (1.5), (1.6) задается формулой

$$
\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) = -C_2^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{\Pi}(t)\,\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad t \in [0, t_f], \tag{1.7}
$$

где $\mathbf{B}^*\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, $\mathbf{B}^*\mathbf{x} = B^\top \mathbf{x}(0)$, а $\mathbf{\Pi}(t) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $t \in [0, t_f]$, — неотрицательные самосопряженные ядерные операторы, удовлетворяющие операторному уравнению Риккати [2], являются решением уравнения

$$
\mathbf{\Pi}(t) = T^*(t_f - t)\,\mathbf{G}T(t_f - t) + \int\limits_t^{t_f} T^*(\xi - t)\left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{\Pi}(\xi)\,\mathbf{B}C_2^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{\Pi}(\xi)\right) T(\xi - t)\, d\xi, \quad t \in [0, t_f].
$$

Здесь $\{T(t), t \geq 0\}$ — полугруппа в пространстве $\mathbb{H}$, порождаемая оператором $\mathbf{A}$. Из свойств $\{T(t), t \geq 0\}$ следует, что операторы $\mathbf{\Pi}(\cdot)$ являются сильно непрерывными. В работе [13] показано, что это уравнение имеет единственное решение.

Введем векторы $X^N = \mathrm{col}\left(x_0^N, \ldots, x_N^N\right)$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда задачи (1.3), (1.4) в векторной форме примут вид

$$
\frac{dX^N}{dt} = A_N X^N + B_N u, \tag{1.8}
$$

$$
J_N = X^{N\top}(t_f)\, G_{1N} X^N(t_f) + \int\limits_0^{t_f} \left(X^{N\top}(t)\, C_{1N} X^N(t) + u^\top(t)\, C_2 u(t)\right) dt, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.9}
$$

Здесь $C_{1N} = \left\{C_{1N}^{ij}\right\}_{i,j=0}^N$, $G_{1N} = \left\{G_{1N}^{ij}\right\}_{i,j=0}^N$ — квадратные матрицы порядка $(N+1)\,n$, $C_{1N}^{00} = C_1$, $G_{1N}^{00} = G$, $C_{1N}^{ij} = G_{1N}^{ij} = 0$, $i^2 + j^2 \neq 0$.

Оптимальные управления u_N^0 для задач (1.8), (1.9) задаются формулами (см. [14, с. 496])

$$
u_N^0\left(t, X^N\right) = -C_2^{-1}B_N^\top \Pi_N(t)\, X^N, \quad X^N \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \quad t \in [0, t_f], \tag{1.10}
$$

где $\Pi_N(t)$, $t \in [0, t_f]$, — неотрицательные матрицы порядка $(N+1)\,n$, удовлетворяющие уравнениям Риккати

$$
\dot{\Pi}_N(t) + A_N^\top \Pi_N(t) + \Pi_N(t)\, A_N + \Pi_N(t)\, B_N^\top C_2^{-1} B_N \Pi_N(t) + C_{1N} = 0, \quad \Pi_N(t_f) = G_{1N}.
$$

Функция $\Pi_N(\cdot)$ является дифференцируемой функцией. В работе [15] доказано, что решение этого уравнения всегда существует и единственно на отрезке $[0, t_f]$.

При переходе от пространств состояний $\mathbb{R}^{(N+1)n}$, $N \in \mathbb{N}$, к пространству состояний $\mathbb{H}$ в описании аппроксимирующих задач используем сплайны нулевого порядка

$$\mathbf{x} = \chi_{\{0\}} x^0 + \sum_{k=1}^{N} \chi_{\left[-\frac{k}{N}\tau, -\frac{k-1}{N}\tau\right)} x^k, \quad x^k \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \ldots, N, \quad N \in \mathbb{N},$$

где χ_E — индикатор множества E. Они являются значениями инъективных отображений $\iota_N : \mathbb{R}^{(N+1)n} \to \mathbb{H}$, области значений которых

$$\mathbb{H}_N = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{H} \colon \exists \psi^k \in \mathbb{R}^n,\, k = 0, \ldots, N,\, \mathbf{x} = \psi^0 \chi_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{N} \psi^k \chi_{\left[-\frac{k}{N}\tau, -\frac{k-1}{N}\tau\right)} \right\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Отображения ι_N определяют топологические изоморфизмы пространств $\mathbb{R}^{(N+1)n}$ и $\mathbb{H}_N$, для которых $\iota_N^{-1} \mathbf{x} = \pi_N \mathbf{x}$ при $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_N$, $N \in \mathbb{N}$, где сюръективные отображения $\pi_N \colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{(N+1)n}$ определяются с помощью формул

$$\pi_N \mathbf{x} = \operatorname{col}\left(\mathbf{x}(0), \frac{N}{\tau} \int\limits_{-\frac{\tau}{N}}^{0} \mathbf{x}(\xi)\, d\xi, \ldots, \frac{N}{\tau} \int\limits_{-\tau}^{-\tau + \frac{\tau}{N}} \mathbf{x}(\xi)\, d\xi \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Введенные топологические изоморфизмы позволяют заменить задачи (1.8), (1.9) в пространствах $\mathbb{R}^{(N+1)n}$ эквивалентными задачами в пространствах $\mathbb{H}_N$. Уравнения (1.8) переходят в уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_N \mathbf{x} + \mathbf{B} u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}_N, \tag{1.11}$$

где операторы $\mathbf{A}_N \colon \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}_N$ задаются формулами $\mathbf{A}_N = \iota_N A_N \pi_N$. Критерии качества (1.9) переходят в критерии

$$\mathbf{J}_N = \left(\pi_N \mathbf{x}_{t_f} \right)^\top G_{1N} \pi_N \mathbf{x}_{t_f} + \int\limits_{0}^{t_f} \left(\left(\pi_N \mathbf{x}_t \right)^\top C_{1N} \left(\pi_N \mathbf{x}_t \right) + u^\top(t)\, C_2 u(t) \right) dt. \tag{1.12}$$

Управления (1.10) переходят в управления

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N^0(t, \mathbf{x}) &= -C_2^{-1} B_N^\top \Pi_N(t)\, \pi_N \mathbf{x} = -C_2^{-1} B_N^\top \iota_N^* \pi_N^* \Pi_N(t)\, \pi_N \mathbf{x} \\ &= -C_2^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{\Pi}_N(t)\, \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}_N, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\mathbf{\Pi}_N(t) : \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}_N$, — неотрицательные операторы, определяемые формулами $\mathbf{\Pi}_N(t) = \pi_N^* \Pi_N(t)\, \pi_N$, $N \in \mathbb{N}$, $t \in [0, t_f]$.

Для дальнейших исследований будет удобно расширить задачи (1.11), (1.12) и управления (1.13) на пространство $\mathbb{H}$, используя определения операторов π_N. Расширения операторов $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{\Pi}_N \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ являются конечномерными операторами, и для них оставим прежние обозначения. Расширения управлений $\mathbf{u}_N^0$ будем рассматривать в качестве аппроксимаций оптимального управления $\mathbf{u}^0$.

Из [2, теорема 6.1] в случае усредняющих аппроксимаций и результатов [2, разд. 7] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если C_1, G — постоянные неотрицательные матрицы, C_2 — постоянная положительно определенная матрица, то последовательность оптимальных управлений системами* (1.11) *относительно* (1.12) *сходится в равномерной топологии к оптимальному управлению системой* (1.5) *относительно* (1.6)*, т. е.*

$$\sup_{t \in [0, t_f]} \left\| \mathbf{u}^0(t, \cdot) - \mathbf{u}_N^0(t, \cdot) \right\|_{\mathbb{H} \to \mathbb{R}^r} \to 0 \quad \textit{при} \quad N \to \infty.$$

В настоящей работе получена асимптотическая оценка скорости сходимости аппроксимирующих управлений.

Теорема 2. *Если* C_1, G *— постоянные неотрицательные матрицы,* C_2 *— постоянная положительно определенная матрица, то последовательность оптимальных управлений системами* (1.11) *относительно* (1.12) *сходится в равномерной топологии к оптимальному управлению системой* (1.5) *относительно* (1.6)*, т. е.*

$$\sup_{t\in[0,t_f]} \left\|\mathbf{u}^0(t,\cdot)-\mathbf{u}_N^0(t,\cdot)\right\|_{\mathbb{H}\to\mathbb{R}^r} = O\left(N^{-1/4}\right) \quad \text{при} \quad N\to\infty.$$

2. Доказательство теоремы 2

При доказательстве теоремы используется подход, предложенный в работе [16] для уравнения параболического типа при решении аналогичной задачи.

Применяя формулы (1.7) и (1.13), имеем

$$\left\|\mathbf{u}^0(\zeta,\mathbf{x})-\mathbf{u}_N^0(\zeta,\mathbf{x})\right\|_{\mathbb{H}\to\mathbb{R}^r} = \sup_{\|\mathbf{x}\|\le 1}\left|C_2^{-1}\mathbf{B}^*\left(\mathbf{\Pi}(\zeta)-\mathbf{\Pi}_N(\zeta)\right)\mathbf{x}\right|$$
$$\le \left|C_2^{-1}\right||B|\sup_{\|\mathbf{x}\|\le 1}\left|\left(\left(\mathbf{\Pi}(\zeta)-\mathbf{\Pi}_N(\zeta)\right)\mathbf{x}\right)(0)\right| \le \left|C_2^{-1}\right||B|\sup_{\|\mathbf{x}\|\le 1}\left\|\left(\mathbf{\Pi}(\zeta)-\mathbf{\Pi}_N(\zeta)\right)\mathbf{x}\right\|$$
$$= \left|C_2^{-1}\right||B|\left\|\mathbf{\Pi}(\zeta)-\mathbf{\Pi}_N(\zeta)\right\| = \left|C_2^{-1}\right||B|\sup_{\|\mathbf{x}_\zeta\|\le 1}\left|\left\langle\left(\mathbf{\Pi}(\zeta)-\mathbf{\Pi}_N(\zeta)\right)\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{x}_\zeta\right\rangle\right|, \quad \zeta\in[0,t_f].$$

Рассмотрим задачи оптимального управления (1.5), (1.11) на отрезке $[\zeta,t_f]$ относительно критериев качества

$$J(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}) = J_N(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}) = \left\langle\mathbf{G}\mathbf{x}_{t_f},\mathbf{x}_{t_f}\right\rangle_{\mathbb{H}} + \int\limits_{\zeta}^{t_f}\Big(\left\langle\mathbf{C}_1\mathbf{x}_t,\mathbf{x}_t\right\rangle_{\mathbb{H}} + \mathbf{u}^\top(t)\,C_2\mathbf{u}(t)\Big)\,dt.$$

Используя свойства оптимальных управлений $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}_N^0$ [2, p. 101], получим

$$\left\langle\big(\mathbf{\Pi}(\zeta)-\mathbf{\Pi}_N(\zeta)\big)\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{x}_\zeta\right\rangle = J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right), \quad \zeta\in[0,t_f]. \tag{2.1}$$

При $\zeta=t_f$ из равенства (2.1) следует, что $J\left(t_f,\mathbf{x}_{t_f},\mathbf{u}^0\right) = J_N\left(t_f,\mathbf{x}_{t_f},\mathbf{u}_N^0\right)$, следовательно, $\mathbf{u}^0(t_f,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_N^0(t_f,\mathbf{x})$. Поэтому при доказательстве теоремы предполагаем, что $\zeta<t_f$.

При любом $\zeta\in[0,t_f)$ пространство $\mathbb{H}$ является объединением множеств

$$\mathbb{H}_{\zeta+} = \left\{\mathbf{x}_\zeta\colon \mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H},\ J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\ge 0\right\},$$
$$\mathbb{H}_{\zeta-} = \left\{\mathbf{x}_\zeta\colon \mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H},\ J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right) < 0\right\}.$$

Если $\mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta+}$, то из оптимальности управления $\mathbf{u}^0$ имеем

$$0 \le J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right) - J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right) \le J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right) - J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right), \tag{2.2}$$

где $\widetilde{\mathbf{u}}_N(t,\mathbf{x}|\zeta,\mathbf{x}_\zeta) = \mathbf{u}_N^0\left(t,\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\right)$ при $\zeta\in[0,t_f)$, $\mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta+}$. Здесь ζ и $\mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta+}$ в управление $\widetilde{\mathbf{u}}_N$ входят в качестве параметров, а $\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)$, $t\ge\zeta$, — решение уравнения (1.11) с начальной функцией $\mathbf{x}_\zeta$ под воздействием управления $\mathbf{u}_N^0$.

Если $\mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta-}$, то из оптимальности управления $\mathbf{u}_N^0$ следует

$$0 \le J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right) - J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right) \le J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right) - J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right), \tag{2.3}$$

где $\widehat{\mathbf{u}}_N(t,\mathbf{x}|\zeta,\mathbf{x}_\zeta) = \mathbf{u}^0\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)$ при $\zeta\in[0,t_f)$, $\mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta-}$. Здесь ζ и $\mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta-}$ в управление $\widehat{\mathbf{u}}_N$ входят в качестве параметров, а $\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)$, $t\ge\zeta$, — решение уравнения (1.5) с начальной функцией $\mathbf{x}_\zeta$ под воздействием управления $\mathbf{u}^0$.

Из (2.2), (2.3) получим

$$\sup_{\|\mathbf{x}_\zeta\|\le 1}\left|J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)-J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\right|$$

$$\le \max\left\{\sup_{\substack{\|\mathbf{x}_\zeta\|\le 1,\\ \mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta+}}}\left(J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)-J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\right),\sup_{\substack{\|\mathbf{x}_\zeta\|\le 1,\\ \mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta-}}}\left(J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)-J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)\right\}. \quad (2.4)$$

Оценим первый супремум в правой части (2.4). Значение критерия качества $J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)$ при $\mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta+}$ и произвольного $N\in\mathbb{N}$ определяется формулой

$$J(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N)=\left\langle\mathbf{G}\mathbf{x}_{t_f}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N),\mathbf{x}_{t_f}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N)\right\rangle_{\mathbb{H}}+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big(\left\langle\mathbf{C}_1\mathbf{x}_t(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N),\mathbf{x}_t(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N)\right\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\,\mathbf{u}_N^{0\top}(t,\mathbf{x}_{tN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0))C_2\mathbf{u}_N^0(t,\mathbf{x}_{tN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0))\Big)\,dt,$$

а значение критерия качества $J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)$ — формулой

$$J_N(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0)=\left\langle\mathbf{G}\mathbf{x}_{t_fN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0),\mathbf{x}_{t_fN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0)\right\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big(\left\langle\mathbf{C}_1\mathbf{x}_{tN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0),\mathbf{x}_{tN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0)\right\rangle_{\mathbb{H}}+\mathbf{u}_N^{0\top}(t,\mathbf{x}_{tN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0))C_2\mathbf{u}_N^0(t,\mathbf{x}_{tN}(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0))\Big)\,dt.$$

Найдем решения $\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)$ и $\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)$, $\zeta\le t<t_f$. Учитывая уравнение (1.11) и формулу (1.13), имеем

$$\frac{d\mathbf{x}_{tN}}{dt}=\left(\mathbf{A}_N-\mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N\left(t\right)\right)\mathbf{x}_{tN}, \quad (2.5)$$

где конечномерный оператор $\mathbf{D}\colon\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ задается формулой $\mathbf{D}=\mathbf{B}C_2^{-1}\mathbf{B}^*$. Следовательно, $\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)=S_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta$, $\zeta\le t<t_f$, где $\left\{S_N\left(\xi_1,\xi_2\right),0\le\xi_2\le\xi_1\le t_f\right\}$ — эволюционные операторы, порождаемые уравнением (2.5). Значит, $\widetilde{\mathbf{u}}_N\left(t,\mathbf{x}|\zeta,\mathbf{x}_\zeta\right)=-C_2^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{\Pi}_N\left(t\right)S_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta$. Из уравнения (1.5) получим

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}_t-\mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N\left(t\right)S_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,$$

отсюда, $\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)=\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta$, $\zeta\le t<t_f$, где

$$\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)=T\left(t-\zeta\right)-\int\limits_\zeta^t T\left(t-\xi\right)\mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N\left(\xi\right)S_N\left(\xi,\zeta\right)\,d\xi. \quad (2.6)$$

В результате имеем

$$J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)=\left\langle\mathbf{G}\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big(\left\langle\mathbf{C}_1\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\,\mathbf{u}_N^{0\top}\left(t,\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\right)C_2\mathbf{u}_N^0\left(t,\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\right)\Big)\,dt, \quad (2.7)$$

$$J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)=\left\langle\mathbf{G}S_N\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,S_N\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big(\left\langle\mathbf{C}_1S_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,S_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}$$

$$+\,\mathbf{u}_N^{0\top}\left(t,\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\right)C_2\mathbf{u}_N^0\left(t,\mathbf{x}_{tN}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\right)\Big)\,dt. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) следует

$$J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)-J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)=\Big\langle\big(\widetilde{S}_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)-S_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}S_N\left(t_f,\zeta\right)\big)\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{x}_\zeta\Big\rangle_{\mathbb{H}}$$

$$+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big\langle\big(\widetilde{S}_N^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)-S_N^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1S_N\left(t,\zeta\right)\big)\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{x}_\zeta\Big\rangle_{\mathbb{H}}dt$$

$$\le\left\|\widetilde{S}_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)-S_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}S_N\left(t_f,\zeta\right)\right\|\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2$$

$$+\,t_f\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\widetilde{S}_N^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)-S_N^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1S_N\left(t,\zeta\right)\right\|\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2. \tag{2.9}$$

Оценим первое слагаемое в правой части последнего неравенства

$$\left\|\widetilde{S}_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)-S_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}S_N\left(t_f,\zeta\right)\right\|$$

$$\le\left\|\widetilde{S}_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}\big(\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)-S_N\left(t_f,\zeta\right)\big)\right\|+\left\|\big(\widetilde{S}_N^*\left(t_f,\zeta\right)-S_N^*\left(t_f,\zeta\right)\big)\mathbf{G}S_N\left(t_f,\zeta\right)\right\|$$

$$\le\left(\left\|\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)\right\|+\left\|S_N\left(t_f,\zeta\right)\right\|\right)|G_1|\left\|\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_N\left(t_f,\zeta\right)-S_N\left(t_f,\zeta\right)\big)\right\|.$$

Проделывая аналогичные выкладки для второго слагаемого из правой части неравенства (2.9), получим

$$J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)-J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}_N^0\right)\le\left(|G_1|+|C_1|\,t_f\right)\Big(\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)\right\|+\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|S_N\left(t,\zeta\right)\right\|\Big)$$

$$\times\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)-S_N\left(t,\zeta\right)\big)\right\|\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2. \tag{2.10}$$

Покажем, что $S_N\left(t,\zeta\right)$ равномерно ограничены по N при $\zeta\le t\le t_f$. Поскольку $S_N\left(t,\zeta\right)$ — эволюционный оператор, порождаемый уравнением (2.5), то справедливо неравенство

$$\left\|S_N\left(t,\zeta\right)\right\|\le\left\|T_N\left(t-\zeta\right)\right\|+\int\limits_\zeta^t\left\|T_N\left(t-\xi\right)\right\|\left\|\mathbf{D}\right\|\left\|\mathbf{\Pi}_N\left(\xi\right)\right\|\left\|S_N\left(\xi,\zeta\right)\right\|d\xi,\quad t\ge\zeta,$$

где $\{T_N\left(t\right),t\ge0\}$ — полугруппы, порождаемые инфинитезимальными операторами $\mathbf{A}_N$, $N\in\mathbb{N}$. Полугруппы $\{T_N\left(t\right),t\in\mathbb{R}^+\}$ равномерно ограничены по N на конечном промежутке времени, т. е. существует такое M, что справедливо неравенство $\sup_{t\in[0,t_f]}\left\|T_N\left(t\right)\right\|\le M$. Из теоремы 6.1 работы [2] следует, что $\mathbf{\Pi}_N$ сходятся к $\mathbf{\Pi}$ по N равномерно на $[0,t_f]$, следовательно, существует такое $\widehat{\Pi}$, что справедливо неравенство $\left\|\mathbf{\Pi}_N\left(t\right)\right\|\le\widehat{\Pi}$ для любого $N\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,t_f]$. Таким образом, получаем

$$\left\|S_N\left(t,\zeta\right)\right\|\le M+M\left\|\mathbf{D}\right\|\widehat{\Pi}\int\limits_\zeta^t\left\|S_N\left(\xi,\zeta\right)\right\|d\xi,\quad t\ge\zeta,$$

тогда по лемме Гронуолла имеем $\left\|S_N\left(t,\zeta\right)\right\|\le M\exp\big(M\left\|\mathbf{D}\right\|\widehat{\Pi}(t-\zeta)\big)$ при любом $N\in\mathbb{N}$ и $t\in[\zeta,t_f]$.

Из равномерной ограниченности $S_N\left(t,\zeta\right)$ по N и равенства (2.6) следует равномерная ограниченность $\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)$ по N при $t\in[\zeta,t_f)$.

Оценим теперь последний множитель в (2.10):

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)-S_N\left(t,\zeta\right)\right)=\mathbf{P}\left(T\left(t-\zeta\right)-T_N\left(t-\zeta\right)\right)$$

$$+\int\limits_{\zeta}^{t}\mathbf{P}\left(T_N\left(t-\xi\right)-T\left(t-\xi\right)\right)\mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N\left(\xi\right)S_N\left(\xi,\zeta\right)\,d\xi,$$

следовательно,

$$\sup_{t\in\left[\zeta,t_f\right]}\left\|\mathbf{P}(\widetilde{S}_N\left(t,\zeta\right)-S_N\left(t,\zeta\right))\right\|$$
$$\leq\sup_{t\in\left[0,t_f-\zeta\right]}\left\|\mathbf{P}\left(T\left(t\right)-T_N\left(t\right)\right)\right\|\left(1+t_f\max_{t\in\left[\zeta,t_f\right]}\left\|\mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N\left(t\right)S_N\left(t,\zeta\right)\right\|\right)$$
$$\leq\sup_{t\in\left[0,t_f-\zeta\right]}\left\|\mathbf{P}\left(T\left(t\right)-T_N\left(t\right)\right)\right\|\left(1+t_f\left\|\mathbf{D}\right\|\widehat{\Pi}Me^{M\left\|\mathbf{D}\right\|\widehat{\Pi}\left(t_f-\zeta\right)}\right).$$

В работе [11, утверждение 2.1] показано, что $\max_{t\in\left[0,t_f-\zeta\right]}\left\|\mathbf{P}\left(T\left(t\right)-T_N\left(t\right)\right)\right\|=O\left(N^{-1/4}\right)$ при $N\to\infty$.

Окончательно получаем

$$J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N\right)-J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widetilde{\mathbf{u}}_N^0\right)=O\left(N^{-1/4}\right)\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2,\quad \mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta+},\quad N\to\infty.$$

Оценка второго супремума в правой части (2.4) производится аналогично. Значения критериев качеств $J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)$, $J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)$ при $\mathbf{x}\in\mathbb{H}_{\zeta-}$ определяются формулами

$$J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)=\left\langle\mathbf{G}\mathbf{x}_{t_f}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right),\mathbf{x}_{t_f}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\int\limits_{\zeta}^{t_f}\left(\left\langle\mathbf{C}_1\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right),\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right\rangle_{\mathbb{H}}+\mathbf{u}^{0\top}\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)C_2\mathbf{u}^0\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)\right)dt,$$
$$J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)=\left\langle\mathbf{G}\mathbf{x}_{Nt_f}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right),\mathbf{x}_{Nt_f}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)\right\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\int\limits_{\zeta}^{t_f}\left(\left\langle\mathbf{C}_1\mathbf{x}_{Nt}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right),\mathbf{x}_{Nt}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)\right\rangle_{\mathbb{H}}+\mathbf{u}^{0\top}\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)C_2\mathbf{u}^0\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)\right)dt.$$

Вычислим $\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)$ и $\mathbf{x}_{Nt}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)$, $t\geq\zeta$. Учитывая уравнение (1.5) и формулу (1.7), имеем

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt}=\left(\mathbf{A}-\mathbf{D}\mathbf{\Pi}\left(t\right)\right)\mathbf{x}_t. \tag{2.11}$$

Следовательно, $\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)=S\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta$, $\zeta\leq t\leq t_f$, где $\left\{S\left(\xi_1,\xi_2\right),0\leq\xi_2\leq\xi_1\leq t_f\right\}$ — эволюционные операторы, порождаемые уравнением (2.11). Учитывая определение управления $\widehat{\mathbf{u}}_N$, получим $\widehat{\mathbf{u}}_N\left(t,\mathbf{x}|\zeta,\mathbf{x}_\zeta\right)=-C_2^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{\Pi}\left(t\right)S\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta$, $t\geq\zeta$. Тогда $\mathbf{x}_{Nt}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)$ является решением уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}_{Nt}}{dt}=\mathbf{A}_N\mathbf{x}_{Nt}-\mathbf{D}\mathbf{\Pi}\left(t\right)S\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,\quad t\geq\zeta.$$

Отсюда, $\mathbf{x}_{Nt}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)=\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta$, где

$$\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)=T_N\left(t-\zeta\right)-\int\limits_{\zeta}^{t}T_N\left(t-\xi\right)\mathbf{D}\mathbf{\Pi}\left(\xi\right)S\left(\xi,\zeta\right)\,d\xi,\quad t\geq\zeta.$$

Преобразуем выражения для $J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)$ и $J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)$ с учетом формул для $\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)$ и $\mathbf{x}_{Nt}\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)$, $\zeta\le t\le t_f$, имеем

$$J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)=\left\langle \mathbf{G}S\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,S\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big(\left\langle \mathbf{C}_1S\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,S\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}+\mathbf{u}^{0\top}\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)C_2\mathbf{u}^0\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)\Big)\,dt,$$
$$J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)=\left\langle \mathbf{G}\widehat{S}_N\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,\widehat{S}_N\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big(\left\langle \mathbf{C}_1\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta,\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)\mathbf{x}_\zeta\right\rangle_{\mathbb{H}}+\mathbf{u}^{0\top}\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)C_2\mathbf{u}^0\left(t,\mathbf{x}_t\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)\right)\Big)\,dt.$$

Из (2.7) и (2.8) следует

$$J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)-J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)=\Big\langle\big(\widehat{S}_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}\widehat{S}_N\left(t_f,\zeta\right)-S^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}S\left(t_f,\zeta\right)\big)\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{x}_\zeta\Big\rangle_{\mathbb{H}}$$
$$+\int\limits_\zeta^{t_f}\Big\langle\big(\widehat{S}_N^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)-S^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1S\left(t,\zeta\right)\big)\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{x}_\zeta\Big\rangle_{\mathbb{H}}\,dt$$
$$\le\left\|\widehat{S}_N^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}\widehat{S}_N\left(t_f,\zeta\right)-S^*\left(t_f,\zeta\right)\mathbf{G}S\left(t_f,\zeta\right)\right\|\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2$$
$$+\,t_f\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\widehat{S}_N^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)-S^*\left(t,\zeta\right)\mathbf{C}_1S\left(t,\zeta\right)\right\|\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2. \tag{2.12}$$

Проделывая выкладки аналогичные тем, что были сделаны при получении (2.10), выводим

$$J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)-J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)$$
$$\le\left(|G_1|+|C_1|\,t_f\right)\Big(\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)\right\|+\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|S\left(t,\zeta\right)\right\|\Big)\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\mathbf{P}\big(\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)-S\left(t,\zeta\right)\big)\right\|\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2.$$

Доказательство равномерной ограниченности $\left\{\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)\right\}_{N=1}^\infty$, $\zeta\le t\le t_f$, повторяет доказательство равномерной ограниченности $\left\{S_N\left(t,\zeta\right)\right\}_{N=1}^\infty$, $\zeta\le t\le t_f$.

Из определения семейства операторов $\left\{\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)\right\}_{N=1}^\infty$, $\zeta\le t\le t_f$, и эволюционных операторов $\left\{S_N\left(t,\zeta\right)\right\}$, $\zeta\le t\le t_f$, имеем

$$\mathbf{P}\big(S\left(t,\zeta\right)-\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)\big)=\mathbf{P}\left(T\left(t-\zeta\right)-T_N\left(t-\zeta\right)\right)+\int\limits_\zeta^t\mathbf{P}\left(T_N\left(t-\xi\right)-T\left(t-\xi\right)\right)\mathbf{D\Pi}\left(\xi\right)S\left(\xi,\zeta\right)\,d\xi,$$

следовательно,

$$\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\mathbf{P}\big(\widehat{S}_N\left(t,\zeta\right)-S\left(t,\zeta\right)\big)\right\|\le\sup_{t\in[0,t_f-t]}\left\|\mathbf{P}\left(T\left(t\right)-T_N\left(t\right)\right)\right\|\Big(1+t_f\sup_{t\in[\zeta,t_f]}\left\|\mathbf{D\Pi}\left(t\right)S\left(t\right)\right\|\Big).$$

Тогда из асимптотической оценки $\max_{t\in[0,t_f-t]}\left\|\mathbf{P}\left(T\left(t\right)-T_N\left(t\right)\right)\right\|=O\big(N^{-1/4}\big)$, $N\to\infty$, (см. [11, утверждение 2.1]) получаем оценку

$$J_N\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\widehat{\mathbf{u}}_N\right)-J\left(\zeta,\mathbf{x}_\zeta,\mathbf{u}^0\right)=O\big(N^{-1/4}\big)\left\|\mathbf{x}_\zeta\right\|^2,\quad \mathbf{x}_\zeta\in\mathbb{H}_{\zeta-},\quad N\to\infty.$$

Таким образом, из (2.4) следует справедливость теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. С. 716–724.
2. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control and Optimization. 1983. Vol. 21, no. 1. P. 95–139.
3. **Salamon D.** Structure and stability of finite dimensional approximations for functional differential equations // SIAM J. Control and Optimization. 1984. Vol. 23, no. 6. P. 928–951.
4. **Kappel F., Salamon D.** Splines approximation for retarted systems and the Riccati equation // SIAM J. Control and Optimization. 1987. Vol. 25, no. 4. P. 1082–1117.
5. **Ito K., Kappel F.** A uniformly differentiable approximation scheme for delay systems using splines // SIAM J. Applied Math. and Optimization. 1991. Vol. 23. P. 217–262.
6. **Lasiecka I., Manitius A.** Differentiability and convergence rates of approximating semigroups for retarded functional differential equations // SIAM J. Numerical Anal. 1988. Vol. 25, no. 4. P. 883–907.
7. **Propst G.** Piecewise linear approximation for hereditary control problems // SIAM J. Control and Optimization. 1990. Vol. 28, no. 1. P. 70–96.
8. **Ito K., Teglas R.** Legendre-tau approximations for functional differential equations // SIAM J. Control and Optimization. 1986. Vol. 28, no. 4. P. 737–759.
9. **Ito K., Teglas R.** Legendre-tau approximation for functional differential equations Part II: The linear quadratic optimal control problem // SIAM J. Control and Optimization. 1987. Vol. 25, no. 6. P. 1379–1408.
10. **Быков Д.С., Долгий Ю.Ф.** Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 38–47.
11. **Быков Д.С.** Асимптотическая оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы дифференциальных уравнений с запаздыванием / ИММ УрО РАН. Деп. в ВИНИТИ 03.05.12, № 206-B1012. 50 с.
12. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
13. **Curtain R.** The infinite-dimensional Riccati equation with applications to affine hereditary differential systems // SIAM J. Control and Optimization. 1975. Vol. 13, no. 6. P. 1130–1144.
14. **Красовский Н.Н.** Проблемы стабилизации управляемых движений // И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
15. **Kalman R.E.** Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mexicana (2). 1961. Vol. 5. P. 102–119.
16. **Kroller M., Kunisch K.** Convergence rates for the feedback operators arising in the linear quadratic regulator problem governed by parabolic equations // SIAM J. Numerical Anal. 1991. Vol. 28, no. 5. P. 1350–1385.

Быков Данил Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bykovdanila@gmail.com

Поступила 15.04.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.1

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 НА ПЕРИОДЕ

С. Н. Васильев[1]

В пространстве периодических функций со среднеквадратичной нормой найдены значения поперечников для некоторых классов функций, заданных с помощью модуля непрерывности порожденного произвольным разностным оператором и весовой функцией.

Ключевые слова: неравенство Джексона, обобщенный модуль непрерывности, поперечники классов функций.

S. N. Vasil'ev. Widths of some functional classes in the space L_2 on a period.

In a space of periodic functions with mean-square norm, we find the values of widths for some functional classes given by means of a modulus of continuity generated by an arbitrary difference operator and a weight function.

Keywords: Jackson inequality, generalized modulus of continuity, widths of functional classes.

Пусть L_p есть пространство комплекснозначных 2π-периодических функций, с конечной (квази)нормой $\|f\|_p = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ $(0 < p < \infty)$.

Пусть $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, Λ — некоторое подмножество $\mathbb{Z}$, содержащее ноль. Обозначим через $E_\Lambda(f)$ величину наилучшего приближения элемента $f \in L_2$ функциями из L_2, спектр которых сосредоточен на множестве Λ, т. е.

$$E_\Lambda(f) = \inf_{\{c_s\}_{s\in\Lambda}} \Big\| f(x) - \sum_{s\in\Lambda} c_s e^{isx} \Big\|_2.$$

Символом $M = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ обозначим набор комплексных чисел μ_j такой, что

$$0 < \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j| < \infty, \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j = 0. \tag{1}$$

Данному набору M и числу t сопоставим разностный оператор $\Delta_t^M\colon\ L_2 \to L_2$ вида

$$\Delta_t^M f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k f(x + kt).$$

Для функции $f \in L_2$ определим модуль непрерывности

$$\omega_M(f, \delta) = \sup_{|t|\le\delta} \|\Delta_t^M f\|_2, \quad \delta \ge 0. \tag{2}$$

Из условий (1) следует, что разностный оператор и модуль непрерывности (2) обращаются в ноль на функциях, тождественно равных константе.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022) и программы интеграционных проектов, выполняемых совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проект 12-С-1-1018), а также поддержана РФФИ (проект 11-01-00445).

Отметим, что набору

$$M_m = \left\{\mu_j = (-1)^{m-j}\binom{m}{j} \text{ при } j = 0,\dots,m, \quad \mu_j = 0 \text{ при } j<0,\ j>m\right\}, \quad m\in\mathbb{N},$$

соответствует классический модуль непрерывности $\omega_{M_m}(f,\delta) = \omega_m(f,\delta)$ порядка m.

Условимся в дальнейшем называть *весом* неотрицательную интегрируемую по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функцию $v:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ такую, что $\int\limits_0^1 v(t)dt = 1$.

Для функции $g:[0,\delta]\to\mathbb{C}$ обозначим через $\|g\|_{L_{\theta,v,\delta}}$ среднее со степенью θ значение функции g на отрезке $[0,\delta]$ с весом $v(t/\delta)$:

$$\|g\|_{L_{\theta,v,\delta}} = \left(\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta |g(t)|^\theta v(t/\delta)dt\right)^{1/\theta} = \left(\int\limits_0^1 |g(\delta\tau)|^\theta v(\tau)d\tau\right)^{1/\theta}.$$

Обозначим через $\|g\|_{L_{\theta,v}} = \|g\|_{L_{\theta,v,1}}$, тогда $\|g(t)\|_{L_{\theta,v,\delta}} = \|g(\delta t)\|_{L_{\theta,v}}$.

Наряду с модулем непрерывности рассмотрим следующие функционалы, тоже описывающие гладкость функции: среднее от нормы разностного оператора и среднее от модуля непрерывности на отрезке $[0,\delta]$ с весом $v(t/\delta)$, т. е.

$$D_M(f,\delta)_{\theta,v} = \big\|\|\Delta_t^M(f)\|_2\big\|_{L_{\theta,v,\delta}} \tag{3}$$

(здесь внутренняя норма берется по переменной x, а внешняя по t),

$$W_M(f,\delta)_{\theta,v} = \|\omega_M(f,t)\|_{L_{\theta,v,\delta}}. \tag{4}$$

Так как модуль непрерывности не убывает и $\omega_M(f,\tau)\ge\|\Delta_\tau^M f\|_2$, то при всех значениях параметров верны неравенства

$$\omega_M(f,\delta)\ge W_M(f,\delta)_{\theta,v}\ge D_M(f,\delta)_{\theta,v}.$$

Величины вида (3) и (4) в разное время для различных частных случаев изучали Н.И. Черных [1;2], Л.В. Тайков [3], А.А. Лигун [4], В.В. Шалаев [5], М.Г. Есмаганбетов [6], Н.А. Барабошкина [7], С.Б. Вакарчук [8] и другие математики.

В случае $\Lambda_n = \{0,\pm1,\dots,\pm(n-1)\}$, $\theta=2$, $\delta=\pi/n$, $v(t)=\sin(\pi t)$ Н. И. Черных [1;2] нашел величину

$$\lambda_{M,v,\theta,\delta} = \sup_{f\in L_2, f\ne\mathrm{const}}\frac{E_{\Lambda_n}(f)}{D_M(f,\delta)_{\theta,v}}, \tag{5}$$

которая для данного случая совпадает с величинами

$$\sup_{f\in L_2, f\ne\mathrm{const}}\frac{E_{\Lambda_n}(f)}{W_M(f,\delta)_{\theta,v}} \quad \text{и} \quad \sup_{f\in L_2, f\ne\mathrm{const}}\frac{E_{\Lambda_n}(f)}{\omega_M(f,\delta)},$$

т. е. в классическом неравенстве Джексона $E_n(f)\le C\omega_1(f,\pi/n)$ эта величина является наименьшей возможной константой C. В данной статье найдены точные значения $\lambda_{M,v,\theta,\delta}$ для многих наборов параметров и исследованы значения поперечников классов функций, задаваемых с помощью величин (3) и (4).

Заметим, что при любом $s\in\mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\Delta_t^M e^{isx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k e^{is(x+kt)} = e^{isx}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k e^{ikst}.$$

Поэтому для $f(x)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_s e^{isx}$ из L_2 имеем

$$\big\|\Delta_t^M f\big\|_2^2 = \Big\|\sum_{s\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_s e^{isx}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k e^{ikst}\Big\|_2^2 = \sum_{s\in\mathbb{Z}}\Big|\widehat{f}_s\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k e^{ikst}\Big|^2.$$

Введем обозначение
$$\xi(\tau)=\xi_M(\tau)=\Bigl|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k e^{ik\tau}\Bigr|. \tag{6}$$

Из условия $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mu_k|<\infty$ следует, что ξ является непрерывной 2π-периодической функцией. Тогда можно записать
$$\bigl\|\Delta_t^M f\bigr\|_2=\Bigl(\sum_{s\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_s\xi(ts)|^2\Bigr)^{1/2}. \tag{7}$$

Выражение (7) можно считать определением нормы разностного оператора и использовать его в определении модулей непрерывности (2)–(4) с произвольной неотрицательной непрерывной 2π-периодической функцией ξ.

Лемма. *Для любого модуля непрерывности, порожденного набором M, и любого множества Λ, содержащего точку 0, при всех функциях $f\in L_2$, $\delta>0$, $s\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{R}$, $0<\theta\le 2$ с произвольным весом v верно неравенство*
$$D_M(f,\delta)_{\theta,v}\ge E_\Lambda(f)\inf_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda}\|\xi(\delta st)\|_{L_{\theta,v}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению (3) и равенству (7)
$$D_M(f,\delta)_{\theta,v}=\Biggl(\int_0^1\Bigl(\sum_{s\in\mathbb{Z}}\bigl|\widehat{f}_s\xi(\delta ts)\bigr|^2\Bigr)^{\theta/2}v(|t|)dt\Biggr)^{1/\theta}. \tag{8}$$

Используя обратное неравенство треугольника
$$\Biggl(\int_a^b\Bigl(\sum_k|g_k(t)|\Bigr)^p dt\Biggr)^{1/p}\ge\sum_k\Biggl(\int_a^b|g_k(t)|^p dt\Biggr)^{1/p},\quad 0<p\le 1,$$

получаем, что для $p=\theta/2$ (в условиях леммы $0<\theta\le 2$) квадрат выражения в правой части (8) можно оценить как
$$\Biggl(\int_0^1\Bigl|\sum_{s\in\mathbb{Z}}\bigl|\widehat{f}_s\xi(\delta st)\bigr|^2\Bigr|^{\theta/2}v(|t|)dt\Biggr)^{2/\theta}\ge\sum_{s\in\mathbb{Z}}\Biggl(\int_0^1|\widehat{f}_s|^\theta\xi^\theta(\delta st)v(|t|)dt\Biggr)^{2/\theta}$$
$$=\sum_{s\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_s|^2\Biggl(\int_0^1\xi^\theta(\delta st)v(|t|)dt\Biggr)^{2/\theta}\ge\sum_{s\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_s|^2\|\xi(\delta st)\|^2_{L_{\theta,v}}. \tag{9}$$

Из (9) и (8) выводим, что
$$D_M(f,\delta)_{\theta,v}\ge\Bigl(\sum_{s\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_s|^2\|\xi(\delta st)\|^2_{L_{\theta,v}}\Bigr)^{1/2}$$
$$\ge\Bigl(\sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda}|\widehat{f}_s|^2\|\xi(\delta st)\|^2_{L_{\theta,v}}\Bigr)^{1/2}\ge\Bigl(\sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda}|\widehat{f}_s|^2\Bigr)^{1/2}\inf_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda}\|\xi(\delta st)\|_{L_{\theta,v}}.$$

Как известно, справедливо равенство
$$E_\Lambda(f)=\Bigl(\sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda}|\widehat{f}_s|^2\Bigr)^{1/2}\quad\text{для}\quad f(x)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_s e^{isx}\in L_2,$$

следовательно,
$$D_M(f,\delta)_{\theta,v} \geq E_\Lambda(f) \inf_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda} \|\xi(\delta st)\|_{L_{\theta,v}}.$$
Лемма доказана. □

Пусть $Y(\delta) = \|\xi(t)\|_{L_{\theta,v,\delta}} = \|\xi(\delta t)\|_{L_{\theta,v}}$. Заметим, что Y непрерывна, $Y(0)=0$ и $Y(\delta)>0$ при $\delta \neq 0$. Обозначим
$$Y(\delta\Lambda) = \inf_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda} Y(\delta s).$$
Тогда можно записать заключение леммы как
$$D_M(f,\delta)_{\theta,v} \geq E_\Lambda(f) Y(\delta\Lambda). \tag{10}$$

Для произвольной интегрируемой функции g периодической с периодом T из леммы Фейера (см. [9]) следует, что для любого веса v при $s\to\infty$ выполнено
$$\int_0^1 g(st)v(t)dt \to \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \int_0^1 v(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt.$$
Следовательно, для любого $\delta>0$ выполнены соотношения
$$\lim_{s\to\infty} Y(\delta s) = \lim_{s\to\infty} \|\xi(\delta st)\|_{L_{\theta,v}} = \|\xi\|_\theta.$$
Таким образом, для любого множества Λ, при котором мощность $\mathbb{Z}\setminus\Lambda$ бесконечна,
$$Y(\delta\Lambda) = \inf_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda} Y(\delta s) \leq \|\xi\|_\theta.$$

Модифицируя доказательства, изложенные в [10; 11], несложно показать, что существуют вес v и константа δ_0, зависящие только от M, Λ и θ, что при всех $\delta>\delta_0$ величина $Y(\delta\Lambda)$ не меньше предельного значения $Y(\delta s)$ при $s\to\infty$, т. е. $Y(\delta\Lambda) \geq \lim_{s\to\infty} Y(\delta s) = \|\xi\|_\theta$. Отсюда получаем, что для таких v и δ выполнено неравенство
$$D_M(f,\delta)_{\theta,v} \geq E_\Lambda(f)\|\xi\|_\theta.$$
Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого модуля непрерывности, порожденного набором M, любого числа $\theta\in(0,2]$ и любого множества Λ, содержащего точку 0, существуют такой вес v и константа δ_0, зависящие только от M, θ и Λ, что для всех функций $f\in L_2$ при всех $\delta>\delta_0$ верно неравенство*
$$\omega_M(f,\delta) \geq W_M(f,\delta)_{\theta,v} \geq D_M(f,\delta)_{\theta,v} \geq E_\Lambda(f)\|\xi\|_\theta. \quad \square$$

Так как при $\theta\in(0,2]$ верно неравенство $\|\xi\|_\theta \leq \|\xi\|_2 = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mu_k|^2}$, из теоремы 1 следует неравенство Джексона:
$$E_\Lambda(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mu_k|^2}}\,\omega_M(f,\gamma), \quad f\in L_2, \quad \delta\geq\delta_0.$$
В [10] доказано, что это неравенство является точным, т. е. в правой части перед модулем непрерывности нельзя поставить величину меньшую, чем $1/\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mu_k|^2}$, с сохранением неравенства для всех $f\in L_2$.

Для фиксированного значения δ рассмотрим множество таких наборов Λ, значение $Y(\delta s)$ на которых не превосходит значения при остальных значениях s:
$$Q_\delta = \Big\{\Lambda \mid \forall s\in\Lambda \quad \sup_{s\in\Lambda} Y(\delta s) \leq \inf_{s\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda} Y(\delta s) = Y(\delta\Lambda)\Big\}.$$

Так как $Y(0) = 0$, все множества из Q_δ будут содержать ноль. Поскольку Y непрерывна и неотрицательна, при достаточно малых δ в Q_δ будут содержаться начальные отрезки ряда натуральных чисел. Учитывая, что $Y(s)$ имеет положительный конечный предел при $s \to \infty$, несложно убедиться, что в Q_δ существуют множества любой натуральной мощности. Определим класс функций

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\delta, M, v) = \{f \in L_2 : D_M(f,\delta)_{\theta,v} \le 1\}, \quad \theta = 2. \tag{11}$$

В следующей теореме найдены линейные, колмогоровские и бернштейновские поперечники (соответствующие определения см. в [12]) классов $\mathcal{H}$ для многих значений параметров.

Теорема 2. *Пусть задан набор $M = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ такой, что*

$$0 < \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j| < \infty, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j = 0,$$

и множество Λ принадлежит Q_δ. Тогда при $\theta = 2$ для $N = |\Lambda|$ величины линейного, колмогоровского и бернштейновского N-поперечников совпадают и равны

$$d_N(\mathcal{H}) = \sup_{f\in L_2, f\ne\mathrm{const}} \frac{E_\Lambda(f)}{D_M(f,\delta)_{\theta,v}} = \frac{1}{Y(\delta\Lambda)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную функцию $f \in \mathcal{H}$, тогда из (10) следует

$$E_\Lambda(f) \le \frac{D_M(f,\delta)_{\theta,v}}{Y(\delta\Lambda)} = \frac{1}{Y(\delta\Lambda)},$$

Переходя к верхней грани по $f \in \mathcal{H}$, получаем оценку сверху для значений N-поперечников:

$$d_N(\mathcal{H}) \le \sup_{f\in\mathcal{H}} E_\Lambda(f) \le \frac{1}{Y(\delta\Lambda)}. \tag{12}$$

Пусть $\Lambda_m = \Lambda \cup \{m\}$ для произвольного $m \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda$. Заметим, что множество тригонометрических полиномов со спектром из Λ_m содержит множество

$$K = \left\{ g(t) = \sum_{s\in\Lambda_s} c_s e^{ist}, \quad \|g\|_2 \le \frac{1}{Y(\delta m)} \right\},$$

которое является сферой размерности $N+1$ диаметра $1/Y(\delta m)$. Рассмотрим

$$D_M(g,\delta)_{\theta,v} = \left(\int_0^1 \sum_{s\in\Lambda_s} \left|\widehat{g}_s \xi(\delta t s)\right|^2 v(|t|)dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{s\in\Lambda_m} |\hat{g}_s|^2 Y^2(\delta s) \right)^{1/2} \le \sup_{s\in\Lambda_m} Y(\delta s)\|g\|_2.$$

Так как $\Lambda \in Q_\delta$, из определения Q_δ получаем, что $\sup_{s\in\Lambda_m} Y(\delta s) = Y(\delta m)$. Значит,

$$D_M(g,\delta)_{\theta,v} \le \sup_{s\in\Lambda_m} Y(\delta s)\|g\|_2 \le Y(\delta m)\|g\|_2 \le 1,$$

т. е. $g \in \mathcal{H}$. Так как весь шар K содержится в классе $\mathcal{H}$, согласно теореме В. М. Тихомирова [12] о поперечнике шара $d_N(\mathcal{H}) \ge 1/Y(\delta m)$. Переходя к верхней грани по $m \notin \Lambda$, имеем оценку снизу для величин N-поперечников

$$d_N(\mathcal{H}) \ge \sup_{m\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda} \frac{1}{Y(\delta m)} = \frac{1}{\inf\limits_{m\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda} Y(\delta m)} = \frac{1}{Y(\delta\Lambda)},$$

откуда с учетом (12) следует утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
2. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 513–522.
3. **Тайков Л.В.** Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. 1979. Т. 25, вып. 2. С. 217–223.
4. **Лигун А.А.** Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24, вып. 6. С. 785–792.
5. **Шалаев В.В.** О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, вып. 1. С. 125–129.
6. **Есмаганбетов М.Г.** Поперечники классов из $L_2[0,\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. 1999. Т. 65, вып. 6. С. 816–820.
7. **Baraboshkina, N.A.** The Jackson–Stechkin inequality with a nonclassic modulus of continuity / N. A. Baraboshkina // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. Suppl. 1. P. S65–S70.
8. **Вакарчук С.Б.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 5. С. 792–796.
9. **Fejer L.** Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. Reine und Angew. Math. 1910. Vol. 138. P. 22–53.
10. **Васильев С.Н.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 1. С. 11–14.
11. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона В $L_2(\mathbb{R}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №4. С. 93–99.
12. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений / В.М. Тихомиров // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 3. С. 81–120.

Васильев Станислав Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Stanislav.Vasilyev@imm.uran.ru

Поступила 11.07.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 514.17; 532.5

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Рассматриваются уравнения Навье — Стокса и Стокса для несжимаемой среды, заполняющей в каждый момент времени $t \geq 0$ открытый аксиально симметричный цилиндрический слой D. Найдены решения этих уравнений в классе движений, описываемых полями скоростей, линии которых при $t \geq 0$ совпадают с их вихревыми линиями и лежат на аксиально симметричных цилиндрических поверхностях в D.

Ключевые слова: скалярные, векторные и тензорные поля, ротор, уравнение Навье — Стокса, уравнение Стокса.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Some solutions of continuum equations for an incompressible viscous fluid.

We consider the Navier–Stokes equations for an incompressible fluid that at any specific instant $t \geq 0$ fills an open axially symmetric cylindric layer D. We find solutions of these equations in the class of motions described by velocity fields whose lines for $t \geq 0$ coincide with their vortex lines and lie on axially symmetric cylindric surfaces in D.

Keywords: scalar fields, vector fields, tensor fields, curl, Navier–Stokes equation, Stokes equation.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{p}{\rho} + \mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

описывающая движение сплошной среды, в области $D \subset R^3$ при $t \geq 0$. Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — скорость движения среды в момент времени t в точке $\mathbf{x} \in D$, задаваемой радиус-вектором $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\rho = \mathrm{const}$ — плотность среды, $p = p(\mathbf{x}, t)$ — давление в среде, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — плотность (на единицу массы) внешней потенциальной силы, выражаемая через потенциал $u = u(\mathbf{x}, t)$ формулой $\mathbf{f} = -\boldsymbol{\nabla}u$, $\boldsymbol{\nabla}$ и Δ — дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа, $\nu = \mathrm{const}$ — вязкость среды. Символами $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в работе обозначаются скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Задача состоит в том, чтобы найти решения системы уравнений (1) в классе $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{sh}}(D)$ векторных полей (пояснения ниже) в случае, когда D — аксиально симметричный цилиндрический слой, задаваемый в цилиндрической системе координат (r, γ, x_3) с базисом $\big\{\mathbf{e}_r(\gamma) = \mathbf{e}_1\cos\gamma + \mathbf{e}_2\sin\gamma,\ \mathbf{e}_\gamma(\gamma) = -\mathbf{e}_1\sin\gamma + \mathbf{e}_2\cos\gamma,\ \mathbf{e}_3\big\}$ следующей формулой:

$$D = \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3:\ r \in (r_i, r_0),\ \gamma \in [0, 2\pi),\ x_3 \in R\big\}, \tag{2}$$

где $0 < r_i < r_0 < +\infty$. Под классом $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{sh}}(D)$ здесь подразумевается сужение класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ полей $\mathbf{v}$, продольно вихревых в D (по терминологии работы [1]), включающее в себя поля $\mathbf{v}$, совместимые с условиями разрешимости первого из уравнений системы (1). Поэтому дадим сначала описание класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$.

1. Класс $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ исчерпывается векторными полями, подчиняющимся системе уравнений

$$(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = 0, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00462, 12-01-00004, 11-01-00347) и Министерства образования и науки РФ (проект 1.1544.2011).

при условии

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (d\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \not\equiv 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3)) = \mathbf{e}_r(\gamma)$, $\mathcal{L}$ — произвольный спрямляемый замкнутый контур в D.

Последнее из уравнений системы (3) выражает условие коллинеарности векторов поля $\mathbf{v}$ и векторов поля его ротора в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ при любом $t \geq 0$, используемое в [1]. Альтернативой служит условие в форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \tag{5}$$

предложенное И. С. Громекой [2], где $\lambda(\mathbf{x}, t)$ — некоторое скалярное поле. Отсюда вытекают, в частности, и различия в подходах к построению класса векторных полей, подобного классу $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$, в работах [1] и [2] (подробнее см. [3]).

Разобьем $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ на два непересекающихся класса, а именно $\mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$ и $\mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$, полагая, что класс $\mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$ исчерпывается непотенциальными векторными полями, ротор которых равен нулю в D (2), а класс $\mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$ — векторными полями, ротор которых

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ D \ (2). \tag{6}$$

Тогда будем иметь

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D) = \mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D) \cup \mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D). \tag{7}$$

Согласно [3] любое векторное поле из класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ выражается формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t) = \mathbf{v}(r, \gamma, t) = v_\gamma(r, t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + v_3(r, t)\mathbf{e}_3, \tag{8}$$

а его ротор — формулой

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t) = \operatorname{rot} \mathbf{v}(r, \gamma, t) = -\frac{\partial}{\partial r} v_3(r, t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r v_\gamma(r, t)\mathbf{e}_3. \tag{9}$$

Здесь $v_\gamma(r, t)$, $v_3(r, t)$ — скалярные поля, удовлетворяющие либо условиям

$$\frac{1}{r}(r v_\gamma(r, t))' = \lambda(r, t) v_3(r, t), \qquad v_3'(r, t) = -\lambda(r, t) v_\gamma(r, t), \tag{10}$$

где штрих означает дифференцирование по r, либо условию

$$v_\gamma(r, t)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r v_\gamma(r, t) + v_3(r, t)\frac{\partial}{\partial r} v_3(r, t) = 0. \tag{11}$$

И (10), и (11) выражают условия коллинеарности полей (8) и (9). Условия (10) и (5) удобны, когда $\lambda(r, t)$ — заданное в D поле. Если не задаваться полем $\lambda(r, t)$, то удобно использовать не зависящее от него условие (11), следующее из последнего уравнения системы (3).

В случае полей (8), принадлежащих классу $\mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$, когда поле (9), а значит, и поле $\lambda(r, t)$ равны нулю в D, система уравнений (10) легко разрешима относительно полей v_γ, v_3. Опуская вывод, дадим конструктивное описание класса $\mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$, сформулировав следующее предложение.

Предложение 1. *Соответствие* $(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t) \to \mathbf{v}(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t)$ *определяет в* D (2) *при* $t \geq 0$ *поле класса* $\mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$, *если и только если оно устанавливается правилом*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(r, \gamma, x_3), t) = \mathbf{v}(r, \gamma, t) = \frac{1}{r} V_\gamma(t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + V_3(t)\mathbf{e}_3, \tag{12}$$

где $V_\gamma(t)$, $V_3(t)$ *— гладкие ограниченные на* $[0, +\infty)$ *функции и* $V_\gamma(t) \neq 0$ *при любом* $t \geq 0$.

Описание же класса $\mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$ дадим, сформулировав на основе [3] следующее предложение.

Предложение 2. *Соответствие* $(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) \to \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *определяет в* D (2) *при* $t \geq 0$ *поле класса* $\mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$, *если и только если оно устанавливается правилом*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma,t) = \sigma_\varepsilon(t)\exp\left\{-\int\limits_{r_\varepsilon}^{r}\frac{1}{r'}\sin^2\psi(r',t)\,dr'\right\}[\sin\psi(r,t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+\cos\psi(r,t)\mathbf{e}_3],$$

где $\sigma_\varepsilon(t)$ — *отличная от нуля гладкая ограниченная при* $t \geq 0$ *функция,* r_ε — *фиксированное значение переменной* $r \in (r_i, r_0)$; $\psi(r,t)$ — *скалярное поле, гладкое в* D *при* $t \geq 0$ *и гладкое по* t, *причем такое, что* $\partial\psi(r,t)/\partial r + (1/(2r))\sin 2\psi(r,t) \neq 0$ *п. в. в* D.

Согласно этому предложению поле $\mathbf{v}$, принадлежащее классу $\mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$, выражается через независимо задаваемые функцию $\sigma_\varepsilon(t)$ и поле $\psi(r,t)$. Что же касается поля $\lambda(r,t)$, то оно выражается через поле $\psi(r,t)$ (см., например, [3, (42)]).

2. Рассмотрим систему (1). Второе уравнение ее при $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ удовлетворяется тождественно, а первое можно выразить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla}\Big(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+u\Big), \tag{13}$$

где $v = |\mathbf{v}|$, используя формулу $(\mathbf{v},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}v^2/2$, вытекающую из тождества $\boldsymbol{\nabla}v^2/2 \equiv [\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}] + (\mathbf{v},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}$ при $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$. Будем полагать ниже, что потенциал u в (13) подчиняется ограничениям, которые оговариваются в следующем положении.

Положение 1. Потенциал $u = u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = u(r,\gamma,x_3,t)$ есть гладкое в D скалярное поле, непрерывное при любом $t \geq 0$.

Введем векторное поле

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{b}(r,\gamma,t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(r,\gamma,t) - \nu\Delta\mathbf{v}(r,\gamma,t) \tag{14}$$

и перепишем (13) в виде $\mathbf{b} = -\boldsymbol{\nabla}(p/\rho + (1/2)v^2 + u)$. Правая часть здесь — потенциальное в D векторное поле при $t \geq 0$. Следовательно, уравнение (13) разрешимо в классе $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$, если и только если

$$\oint\limits_{\mathcal{L}}(d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),\mathbf{b}(r,\gamma,t)) = 0 \tag{15}$$

для любого спрямляемого замкнутого контура $\mathcal{L}$ в D при любом $t \geq 0$.

Условие потенциальности (15) поля (14) служит тем самым дополнением к условиям (3), (4), сужающим класс $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ (7).

Выразим поле (14) непосредственно через компоненты поля (8). Для этого заметим, что из тождества $[\boldsymbol{\nabla},[\boldsymbol{\nabla},\mathbf{v}]] \equiv \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla},\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$ при $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ следует формула $\Delta\mathbf{v} = -[\boldsymbol{\nabla},[\boldsymbol{\nabla},\mathbf{v}]]$. Используя ее при $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$, будем, очевидно, иметь $\Delta\mathbf{v}(r,\gamma,t) = 0$. Если же $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$, то получаем $\Delta\mathbf{v}(r,\gamma,t) = \mathbf{e}_\gamma(\gamma)(\partial/\partial r)(1/r)(\partial/\partial r)(rv_\gamma(r,t)) + \mathbf{e}_3(1/r)(\partial/\partial r)r(\partial/\partial r)v_3(r,t)$. Принимая во внимание (8) и две последние формулы, выразим поле $\mathbf{b}$ (14) формулой

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(r,\gamma,t) = \mathbf{b}_\gamma(r,t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + b_3(r,t)\mathbf{e}_3. \tag{16}$$

Здесь

$$\mathbf{b}_\gamma(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}v_\gamma(r,t), \qquad \mathbf{b}_3(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}v_3(r,t), \tag{17}$$

если поле $\mathbf{v}$ (8) принадлежит классу $\mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$, и

$$\mathbf{b}_\gamma(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}v_\gamma(r,t) - \nu\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rv_\gamma(r,t), \tag{18}$$

$$\mathbf{b}_3(r,t) = \frac{\partial}{\partial t} v_3(r,t) - \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} v_3(r,t), \tag{19}$$

если поле $\mathbf{v}$ (8) принадлежит классу $\mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$.

3. Обратимся теперь к условию (15) и найдем циркуляцию поля $\mathbf{b}$ (16) по каждому из следующих контуров:

$$\mathcal{L}_r = \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{31}\mathbf{e}_3 :\ \gamma \in [\gamma_1,\gamma_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_2) + x_3\mathbf{e}_3 :\ x_3 \in [x_{31},x_{32}]\big\}$$

$$\cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{32}\mathbf{e}_3 :\ \gamma \in [\gamma_1,\gamma_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_1) + x_3\mathbf{e}_3 :\ x_3 \in [x_{31},x_{32}]\big\},$$

$$\mathcal{L}_\gamma = \big\{\mathbf{x} = r_1\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 :\ x_3 \in [x_{31},x_{32}]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{32}\mathbf{e}_3 :\ r \in [r_1,r_2]\big\}$$

$$\cup \big\{\mathbf{x} = r_2\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 :\ x_3 \in [x_{31},x_{32}]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_{31}\mathbf{e}_3 :\ r \in [r_1,r_2]\big\},$$

$$\mathcal{L}_3 = \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_1) + x_3\mathbf{e}_3 :\ r \in [r_1,r_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r_2\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 :\ \gamma \in [\gamma_1,\gamma_2]\big\}$$

$$\cup \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma_2) + x_3\mathbf{e}_3 :\ r \in [r_1,r_2]\big\} \cup \big\{\mathbf{x} = r_1\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 :\ \gamma \in [\gamma_1,\gamma_2]\big\},$$

$$\mathcal{L}'_3 = \big\{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\gamma) + x_3\mathbf{e}_3 :\ \gamma \in [0,2\pi]\big\}.$$

Получим

$$\oint\limits_{\mathcal{L}_r} (d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3), \mathbf{b}(r,\gamma,t)) = r\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} (\mathbf{e}_\gamma(\gamma), \mathbf{b}(r,\gamma,t) - \mathbf{b}(r,\gamma,t))\,d\gamma$$

$$+ \int\limits_{x_{31}}^{x_{32}} (\mathbf{e}_3, \mathbf{b}(r,\gamma_2,t) - \mathbf{b}(r,\gamma_1,t))\,dx_3 = [b_3(r,t) - b_3(r,t)](x_{32} - x_{31}) \equiv 0,$$

$$\oint\limits_{\mathcal{L}_\gamma} \Big(d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3), \mathbf{b}(r,\gamma,t)\Big) = -\int\limits_{x_{31}}^{x_{32}} \Big(\mathbf{e}_3, \mathbf{b}(r_2,\gamma,t) - \mathbf{b}(r_1,\gamma,t)\Big)\,dx_3$$

$$+ \int\limits_{r_1}^{r_2} \Big(\mathbf{e}_r(\gamma), \mathbf{b}(r,\gamma,t) - \mathbf{b}(r,\gamma,t)\Big)\,dr = -[b_3(r_2,t) - b_3(r_1,t)](x_{32} - x_{31}),$$

$$\oint\limits_{\mathcal{L}_3} \Big(d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3), \mathbf{b}(r,\gamma,t)\Big) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \big[(\mathbf{e}_r(\gamma_1), \mathbf{b}(r,\gamma_1,t)) - (\mathbf{e}_r(\gamma_2), \mathbf{b}(r,\gamma_2,t))\big]\,dr$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \big[r_2(\mathbf{e}_\gamma(\gamma), \mathbf{b}(r_2,\gamma,t)) - r_1(\mathbf{e}_\gamma(\gamma), \mathbf{b}(r_1,\gamma,t))\big]\,d\gamma = [r_2 b_\gamma(r_2,t) - r_1 b_\gamma(r_1,t)](\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$\oint\limits_{\mathcal{L}'_3} \Big(d\mathbf{x}(r,\gamma,x_3), \mathbf{b}(r,\gamma,t)\Big) = r\int\limits_{0}^{2\pi} (\mathbf{e}_\gamma(\gamma), \mathbf{b}(r,\gamma,t))\,d\gamma = 2\pi r b_\gamma(r,t).$$

Согласно этим формулам циркуляция поля $\mathbf{b}$ (16) по каждому из контуров $\mathcal{L}_\gamma$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}'_3$ равна нулю, если и только если

$$b_\gamma(r,t) = 0, \qquad b_3(r,t) = b_3(t), \tag{20}$$

где $b_3(t)$ — некоторая непрерывная при $t \geq 0$ функция, т. е. если и только если

$$\mathbf{b}(r,\gamma,t) = b_3(t)\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\nabla}(b_3(t)x_3 + b_{30}), \tag{21}$$

где b_{30} — некоторая постоянная. Учитывая (21), легко убедиться, что поле $\mathbf{b}$ (16), удовлетворяющее условиям (20), удовлетворяет и условию (15).

4. Уравнение (13) при $\mathbf{b}$ (16), удовлетворяющем условиям (20), можно в силу (21) выразить формулой $\boldsymbol{\nabla}[b_3(t)x_3 + b_{30} + (1/\rho)p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) + (1/2)v^2(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) + u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)] = 0$. Следовательно, уравнение (13) удовлетворяется в этом случае, если и только если

$$b_3(t)x_3 + b_{30} + \frac{1}{\rho}p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) + \frac{1}{2}v^2(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) + u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \frac{1}{\rho}P(t), \tag{22}$$

где $P(t)$ — некоторая непрерывная при $t \geq 0$ функция.

Разрешая (22) относительно p и учитывая (8), а также положение 1, запишем:

$$p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = P(t) - \rho\Big[\frac{1}{2}v^2(r,t) + u(r,\gamma,x_3,t) + b_3(t)x_3 + b_{30}\Big]. \tag{23}$$

Формула (23) выражает давление среды в D при $t \geq 0$, если

$$P(t) - \rho\Big[\frac{1}{2}v^2(r,t) + u(r,\gamma,x_3,t) + b_3(t)x_3 + b_{30}\Big] \geq 0 \tag{24}$$

в D для любого t, поскольку давление в среде неотрицательно.

5. Равенства (20), выражающие в дифференциальной форме условие разрешимости (15) первого уравнения системы (1) в классе $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ полей (8), накладывают ограничения, сужающие класс $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ до класса $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ph}}(D)$ полей (8), удовлетворяющих системе уравнений (1). Учитывая это и принимая во внимание разбиение (7) класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$, сформулируем

О п р е д е л е н и е. Сужение $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ph}}(D)$ есть объединение

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ph}}(D) = \widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{ph}}(D) \cup \widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{ph}}(D)$$

принадлежащих $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ классов $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{ph}}(D)$ и $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{ph}}(D)$, образованных полями $\mathbf{v}$ (8) из $\mathfrak{L}'_{\mathrm{sh}}(D)$ и $\mathfrak{L}''_{\mathrm{sh}}(D)$, удовлетворяющими условию (15) или же условиям (20), равносильным ему.

Таким образом, дальнейшая задача состоит в том, чтобы выразить условия (20) в виде, разрешенном относительно компонент $v_\gamma(r,t)$, $v_3(r,t)$ поля (8); найти сужения $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{ph}}(D)$, $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{ph}}(D)$, предложить конструктивное описание решений системы уравнений (1) в классе $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{ph}}(D)$.

Начнем со случая, когда искомое поле $\mathbf{v}$ (8) относится к классу $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{ph}}(D)$.

6. Условия (20) при $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}'_{\mathrm{ph}}(D)$ выражаются, согласно (17) и (12), уравнениями $(\partial/\partial)t\,(1/r)\,V_\gamma(t) = 0$, $(\partial/\partial)t\,V_3(t) = b_3(t)$, которые удовлетворяются, если и только если

$$V_\gamma(t) = c_\gamma, \qquad b_3(t) = \dot{V}_3(t), \tag{25}$$

где c_γ — отличная от нуля постоянная; точка означает дифференцирование по t. Следовательно, поле (12) принадлежит сужению $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{ph}}(D)$ лишь при выполнении условий (25). Учитывая это, сформулируем следующее предложение.

Предложение 3. *Соответствие* $(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) \to \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *определяет в* D (2) *при* $t \geq 0$ *поле класса* $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{ph}}(D)$, *если и только если оно устанавливается правилом*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma,t) = \frac{1}{r}c_\gamma\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + V_3(t)\mathbf{e}_3,$$

где c_γ *— отличная от нуля постоянная;* $V_3(t)$ *— гладкая ограниченная при* $t \geq 0$ *функция.*

Формула (23) и условие (24) при $\mathbf{v} \in \widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{ph}}(D)$ принимают вид

$$p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = P(t) - \rho\Big[\frac{1}{2}v^2(r,t) + u(r,\gamma,x_3,t) + \dot{V}_3(t)x_3 + b_{30}\Big], \tag{26}$$

где $P(t)$ — непрерывная при $t \geq 0$ функция, b_{30} — постоянная, $v^2(r,t) = (1/r^2)c_\gamma^2 + V_3^2(t)$;

$$P(t) - \rho\Big[\frac{1}{2}v^2(r,t) + u(r,\gamma,x_3,t) + \dot{V}_3(t)x_3 + b_{30}\Big] \geq 0. \tag{27}$$

Резюмируя сказанное, сформулируем следующее предложение.

Предложение 4. *Пара* $(\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t), p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t))$ *полей, где первое как функция* t *при* $t \geq 0$ *является гладким и ограниченным, а второе непрерывным, есть гладкое в области* D (2) *решение системы уравнений* (1), *если*:

1) $\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\rm ph}(D)$;

2) *потенциал* u *силового поля* $\mathbf{f}$ *в* (1) *удовлетворяет условиям положения* 1;

3) $p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ — *скалярное поле в* D, *определяемое формулой* (26) *при условии, что* $P(t)$ — *непрерывная функция при любом* $t \geq 0$;

4) *потенциал* u, *функции* $P(t)$, $V_3(t)$ *и постоянная* b_{30} *удовлетворяют в* D *условию* (27) *при любом* $t \geq 0$.

7. Будем полагать теперь, что искомое поле $\mathbf{v}$ (8) относится к классу $\mathfrak{L}''_{\rm ph}(D)$. Тогда условия (20) выражаются согласно (18), (19) формулами

$$\frac{\partial}{\partial t}v_\gamma(r,t) - \nu\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rv_\gamma(r,t) = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_3(r,t) - \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}v_3(r,t) = b_3(t). \tag{29}$$

Выразим скалярные поля $v_\gamma(r,t)$, $v_3(r,t)$ в (8) в виде

$$v_\gamma(r,t) = \frac{\nu}{r_e}\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau), \qquad v_3(r,t) = \frac{\nu}{r_e}\widetilde{v}_3(\xi,\tau) \tag{30}$$

через безразмерные скалярные поля

$$\widetilde{v}_\gamma = \widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau), \qquad \widetilde{v}_3 = \widetilde{v}_3(\xi,\tau), \tag{31}$$

зависящие от безразмерных переменных $\xi = r/r_e$, $\tau = \nu t/r_e^2$. Здесь $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$, $\tau \in [0, +\infty)$, где $\xi_i = r_i/r_e$, $\xi_0 = r_0/r_e$, r_e — некоторая положительная постоянная с размерностью длины. Поля (31) в силу условий (28), (29) должны подчиняться условиям

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau) - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau) = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\widetilde{v}_3(\xi,\tau) - \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\widetilde{v}_3(\xi,\tau) = \widetilde{b}_3(\tau), \tag{33}$$

где

$$\widetilde{b}_3(\tau) = \frac{r_e^3}{\nu^2}b_3(t)\Big|_{t=\tau r_e^2/\nu}. \tag{34}$$

Перейдем от условий (32), (33) к условиям, разрешенным явным образом относительно полей $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$, $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$. Для этого рассмотрим сначала следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}y(\xi,\tau) - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi y(\xi,\tau) = 0. \tag{35}$$

8. Применим к решению уравнения (35) метод разделения переменных Фурье. Полагая

$$y(\xi,\tau) = V(\xi)T(\tau) \tag{36}$$

в (35), придем к системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \tau}T(\tau) = -\omega T(\tau), \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi V(\xi) = -\omega V(\xi), \tag{37}$$

где ω — вещественная постоянная разделения. Для каждого фиксированного значения ω система (37) имеет свое решение. Обозначим его через $(T(\tau,\omega),V(\xi,\omega))$, а решение (36) уравнения (35) при этом значении ω обозначим через

$$y(\xi,\tau,\omega)=V(\xi,\omega)T(\tau,\omega). \tag{38}$$

Нетрудно убедиться, что система (37) при $\omega=0$ имеет следующее решение: $(T(\tau,0)=A_0$, $V(\xi,0)=c'_{-1}\xi^{-1}+c'_1\xi)$, где $A_0,\ c'_{-1},\ c'_1$ — постоянные. Поэтому решение (38) при $\omega=0$ можно выразить, полагая $c_{-1}=c'_{-1}A_0,\ c_1=c'_1A_0$, формулой

$$y(\xi,\tau,0)=c_{-1}\xi^{-1}+c_1\xi=y_0(\xi). \tag{39}$$

При $\omega\neq 0$ решение первого уравнения системы (37) имеет вид $T(\tau,\omega)=A_\omega e^{-\omega\tau}$, где A_ω — постоянная, зависящая только от ω. Учитывая это, выразим решение (38) при $\omega\neq 0$ формулой

$$y(\xi,\tau,\omega)=A_\omega e^{-\omega\tau}V(\xi,\omega). \tag{40}$$

Обратимся ко второму уравнению системы (37) и запишем его при $\omega\neq 0$ в виде

$$\frac{d^2}{d\xi^2}V(\xi,\omega)+\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}V(\xi,\omega)+\Big(\omega-\frac{1}{\xi^2}\Big)V(\xi,\omega)=0. \tag{41}$$

Перейдем в (41) от переменной ξ к переменной z, используя формулы

$$z=\xi\sqrt{\omega},\qquad \xi=\frac{z}{\sqrt{\omega}}, \tag{42}$$

где

$$\arg z=\arg\sqrt{\omega}=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ \omega>0,\\ \pi/2, & \text{если}\ \ \omega<0;\end{cases}$$

$$V(\xi,\omega)=V(\xi(z),\omega)=\widetilde{V}(z,\omega),\qquad \widetilde{V}(z,\omega)=\widetilde{V}(\xi(z),\omega)=V(\xi,\omega);$$
$$\frac{d}{d\xi}=\sqrt{\omega}\frac{d}{dz},\qquad \frac{d}{dz}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{d}{d\xi}. \tag{43}$$

Получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dz^2}\widetilde{V}(z,\omega)+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\widetilde{V}(z,\omega)+\Big(1-\frac{1}{z^2}\Big)\widetilde{V}(z,\omega)=0. \tag{44}$$

Общее решение уравнения (44) есть цилиндрическая функция порядка 1, которая может быть выражена как линейная комбинация функций Бесселя первого и второго рода (см., например, [4, гл. 21, § 8, п. 1]). Учитывая это, запишем

$$\widetilde{V}(z,\omega)=C'_{1\omega}J_1(z)+C'_{2\omega}N_1(z). \tag{45}$$

Здесь $C'_{1\omega},\ C'_{2\omega}$ — постоянные, зависящие только от ω;

$$J_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k+1} \tag{46}$$

— функция Бесселя первого рода порядка 1;

$$N_1(z)=\frac{2}{\pi}J_1(z)\Big(\ln\frac{z}{2}+C\Big)-\frac{1}{\pi}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-1}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k+1}\Bigg(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}\Bigg) \tag{47}$$

— функция Бесселя второго рода порядка 1 (или функция Неймана порядка 1), где C — постоянная Эйлера – Маскерони (см. [4, формулы 21.4–6]); $\sum_{j=1}^{k} 1/j = 0$ при $k = 0$.

Подставляя теперь (45) в (40), выразим решение (38) при $\omega \neq 0$ следующей формулой:

$$y(\xi,\tau,\omega) = e^{-\omega\tau}\big[C_1(\omega)J_1(z) + C_2(\omega)N_1(z)\big]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}, \tag{48}$$

принимая обозначения $C_1(\omega) = A_\omega C'_{1\omega},\ C_2(\omega) = A_\omega C'_{2\omega}$.

Для целей настоящей работы представляют интерес вещественные решения (39), (48). Решение (39) и решение (48) при $\omega > 0$ вещественны, когда вещественны постоянные c_{-1}, c_1 и постоянные $C_1(\omega),\ C_2(\omega)$, поскольку значения функций Бесселя вещественны при вещественных z. При $\omega < 0$ переменная z принимает мнимые значения. При таких z согласно (46), (47) имеем $J_1(z) = i\mathrm{Im}\,J_1(z),\ N_1(z) = \mathrm{Re}\,N_1(z) + i\mathrm{Im}\,N_1(z)$, где

$$\mathrm{Im}\,J_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}\Big(\frac{|z|}{2}\Big)^{2k+1}; \qquad \mathrm{Re}\,N_1(z) = -\mathrm{Im}\,J_1(z);$$

$$\mathrm{Im}\,N_1(z) = \frac{2}{\pi}\Big(\ln\frac{|z|}{2} + C\Big)\mathrm{Im}\,J_1(z) + \frac{1}{\pi}\Big(\frac{|z|}{2}\Big)^{-1} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}\Big(\frac{|z|}{2}\Big)^{2k+1}\Bigg(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}\Bigg).$$

Следовательно, решение (48) вещественно при $\omega < 0$, в чем нетрудно убедиться, если и только если постоянные $C_1(\omega),\ C_2(\omega)$, соответствующие отрицательным значениям ω, удовлетворяют условиям: $C_1(\omega)$ — вещественное или комплексное число, а $C_2(\omega) = i\mathrm{Re}\,C_1(\omega)$.

9. Уравнение (35) совпадает, с точностью до обозначения искомой функции, с уравнением, выражающим условие (32). Учитывая это и используя частные решения (39), (48), перейдем от условия (32) к следующему, разрешенному относительно $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$, условию:

$$\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau) = \begin{cases} \widetilde{v}_{0\gamma}(\xi), & \text{если}\ \ \omega = 0,\\ \widetilde{y}_\gamma(\xi,\tau,\omega), & \text{если}\ \ \omega \neq 0. \end{cases} \tag{49}$$

Здесь

$$\widetilde{v}_{0\gamma}(\xi) = c_{-1\gamma}\xi^{-1} + c_{1\gamma}\xi; \tag{50}$$

$$\widetilde{y}_\gamma(\xi,\tau,\omega) = e^{-\omega\tau}\big[C_{1\gamma}(\omega)J_1(z) + C_{2\gamma}(\omega)N_1(z)\big]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}, \tag{51}$$

где $c_{-1\gamma},\ c_{1\gamma}$ — вещественные постоянные; $C_{1\gamma}(\omega),\ C_{2\gamma}(\omega)$ — постоянные, обе вещественные, когда $\omega > 0$, но при $\omega < 0$ постоянная $C_{1\gamma}(\omega)$ — вещественное или комплексное число, а $C_{2\gamma}(\omega) = i\mathrm{Re}\,C_{1\gamma}(\omega)$.

10. Обратимся к условию (33) и дифференцируя (33) по ξ, придем к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{v}_3(\xi,\tau)\Big) - \frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{1}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{v}_3(\xi,\tau)\Big) = 0,$$

которое совпадает с уравнением (35), если положить $\partial\widetilde{v}_3(\xi,\tau)/\partial\xi = y(\xi,\tau)$. Замечая это и учитывая формулы (39), (48), запишем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{v}_3(\xi,\tau) = \begin{cases} \widetilde{v}'_{03}(\xi), & \text{если}\ \ \omega = 0,\\ \widetilde{y}'_3(\xi,\tau,\omega), & \text{если}\ \ \omega \neq 0. \end{cases} \tag{52}$$

Здесь

$$\widetilde{v}'_{03}(\xi) = c_{-13}\xi^{-1} + c_{13}\xi; \tag{53}$$

$$\widetilde{y}'_3(\xi,\tau,\omega) = e^{-\omega\tau}\big[C_{13}(\omega)J_1(z) + C_{23}(\omega)N_1(z)\big]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}, \tag{54}$$

где c_{-13}, c_{13} — вещественные постоянные; $C_{13}(\omega), C_{23}(\omega)$ — постоянные, обе вещественные, когда $\omega > 0$, но при $\omega < 0$ постоянная $C_{13}(\omega)$ — вещественное или комплексное число, а $C_{23}(\omega) = i\mathrm{Re}\, C_{13}(\omega)$.

Разрешим уравнение (52) относительно $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$. Для этого, во-первых, выразим формулу (53) в виде

$$\widetilde{v}'_{03}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\widetilde{v}_{03}(\xi), \tag{55}$$

где

$$\widetilde{v}_{03}(\xi) = c_{-13}\ln\xi + \frac{1}{2}c_{13}\xi^2. \tag{56}$$

Во-вторых, формулу (54), используя вторую из формул (43) и рекуррентные соотношения

$$J_1(z) = -\frac{d}{dz}J_0(z), \qquad N_1(z) = -\frac{d}{dz}N_0(z),$$

преобразуем к виду

$$\widetilde{y}'_3(\xi,\tau,\omega) = \frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega). \tag{57}$$

Здесь $J_0(z)$ и $N_0(z)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода порядка 0, которые, согласно [4, гл. 21, § 8, п. 1], могут быть выражены следующими формулами:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}, \tag{58}$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi}J_0(z)\Big(\ln\frac{z}{2} + C\Big) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}, \tag{59}$$

где C — постоянная Эйлера — Маскерони;

$$\widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega) = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}e^{-\omega\tau}[C_{13}(\omega)J_0(z) + C_{23}(\omega)N_0(z)]. \tag{60}$$

Заметим, что функция (60) вещественна при любом $\omega \neq 0$, если постоянные $C_{13}(\omega)$, $C_{23}(\omega)$, соответствующие каждому значению ω, удовлетворяют условиям, которые оговариваются в пояснении к формуле (54), поскольку при $\omega < 0$ согласно (58), (59) имеем

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\Big(\frac{|z|}{2}\Big)^{2k}, \qquad N_0(z) = \mathrm{Re}\, N_0(z) + i\mathrm{Im}\, N_0(z),$$

где

$$\mathrm{Re}\, N_0(z) = \frac{2}{\pi}J_0(z)\Big(\ln\frac{|z|}{2} + C\Big) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\Big(\frac{|z|}{2}\Big)^{2k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}; \qquad \mathrm{Im}\, N_0(z) = J_0(z).$$

Подставляя теперь (55), (57) в (52), придем к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\xi}[\widetilde{v}_3(\xi,\tau) - \widetilde{v}_{03}(\xi)] = 0, & \text{если } \omega = 0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi}[\widetilde{v}_3(\xi,\tau) - \widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega)] = 0, & \text{если } \omega \neq 0,\end{cases}$$

которые удовлетворяются, если и только если

$$\widetilde{v}_3(\xi,\tau) = \begin{cases} \widetilde{v}_{03}(\xi) + \widetilde{B}_{30}(\tau), & \text{если } \omega = 0,\\ \widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega) + \widetilde{B}_{3\omega}(\tau), & \text{если } \omega \neq 0.\end{cases} \tag{61}$$

Здесь $\widetilde{B}_{30}(\tau)$, $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$ — некоторые функции, зависящие только от τ. Выбор их должен подчиняться определенным ограничениям, поскольку при $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$ (61) должно выполняться условие (33). Установим эти ограничения. Выпишем сначала входящие в (33) производные:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\widetilde{v}_3(\xi,\tau)=\begin{cases}\dot{\widetilde{B}}_{30}(\tau), & \text{если}\ \ \omega=0,\\ -\omega\widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega)+\dot{\widetilde{B}}_{3\omega}(\tau), & \text{если}\ \ \omega\neq 0,\end{cases}\tag{62}$$

где точка над символом означает дифференцирование по τ;

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{v}_3(\xi,\tau)=\begin{cases}2c_{13}, & \text{если}\ \ \omega=0,\\ -\omega\widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega), & \text{если}\ \ \omega\neq 0.\end{cases}\tag{63}$$

Заметим, что при выводе последней из формул (63) использовались равенство (57), вторая из формул (42), первая из формул (43), формула (54) и рекуррентные соотношения

$$\frac{d}{dz}zJ_1(z)=zJ_0(z),\qquad \frac{d}{dz}zN_1(z)=zN_0(z).\tag{64}$$

Первое из них следует из формулы (20) в [5, гл. VII, п. 95, с. 596]. В справедливости второго можно убедиться, используя (46), (47), (58), (59) и первое из соотношений (64).

Постановка (62), (63) в уравнение, выражающее условие (33), приводит к системе уравнений $\{\dot{\widetilde{B}}_{30}(\tau)-2c_{13}=\widetilde{b}_3(\tau),\text{если }\omega=0;\ \dot{\widetilde{B}}_{3\omega}(\tau)=\widetilde{b}_3(\tau),\text{если }\omega\neq 0\}$. Разрешая ее относительно $\widetilde{B}_{30}(\tau)$, $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$, получим

$$\widetilde{B}_{30}(\tau)=\widetilde{b}_{30}+2c_{13}\tau+\widetilde{B}_3(\tau),\qquad \widetilde{B}_{3\omega}(\tau)=\widetilde{b}_{3\omega}+\widetilde{B}_3(\tau),\tag{65}$$

где $\widetilde{b}_{30}$, $\widetilde{b}_{3\omega}$ — постоянные,

$$\widetilde{B}_3(\tau)=\int\limits_0^\tau\widetilde{b}_3(\tau')\,d\tau'.\tag{66}$$

11. Результаты, полученные в разд. 9, 10, позволяют перейти от условий, выражаемых в дифференциальной форме уравнениями (32), (33), к условиям (49), (61), разрешенным относительно $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$, $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$. Стало быть, искомое поле (8) удовлетворяет условию (15), если компоненты $v_\gamma(r,t)$, $v_3(r,t)$ его выражаются (см. (30)) через безразмерные скалярные поля $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$ (49), $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$ (61). Поле (8) при таких $v_\gamma(r,t)$, $v_3(r,t)$ принадлежит классу $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\rm sh}(D)$, если и только если $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$ (49), $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$ (61) совместимы с условием коллинеарности поля (8) полю его ротора и с условием (6). Ротор поля (8) выражается через поля (31) формулой

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{v}&=\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)=\operatorname{rot}\mathbf{v}(r,\gamma,t)\\&=\frac{\nu}{r_e^2}\Big[-\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{v}_3(\xi,\tau)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)\mathbf{e}_3\Big]\Big|_{\xi=\frac{r}{r_e},\ \tau=\frac{\nu t}{r_e^2}},\end{aligned}\tag{67}$$

а условие коллинеарности полей (8), (67), выведеное из (11), — формулой

$$\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)+\widetilde{v}_3(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{v}_3(\xi,\tau)=0.\tag{68}$$

Установим ограничения на $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$ (49), $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$ (61), следующие из (68).

12. Будем полагать в формулах (49), (61), сначала, что $\omega=0$. Поле (8) в этом случае и ротор его будут выражаться формулами

$$\mathbf{v}=\frac{\nu}{r_e}\big[\widetilde{v}_{0\gamma}(\xi)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+(\widetilde{v}_{03}(\xi)+\widetilde{B}_{30}(\tau))\mathbf{e}_3\big]\Big|_{\xi=\frac{r}{r_e},\ \tau=\frac{\nu t}{r_e^2}},\tag{69}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{\nu}{r_e^2}\big[-(c_{-13}\xi^{-1} + c_{13}\xi)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + 2c_{1\gamma}\mathbf{e}_3\big]\Big|_{\xi=\frac{r}{r_e}}, \tag{70}$$

а условие (68) будет выражаться равенством

$$a_{-1}(\tau)\xi^{-1} + a_1(\tau)\xi + \frac{1}{2}c_{13}^2\xi^3 + c_{-13}^2\xi^{-1}\ln\xi + c_{-13}c_{13}\xi\ln\xi = 0, \tag{71}$$

где $a_{-1}(\tau) = 2c_{-1\gamma}c_{13} + c_{-13}\widetilde{B}_{30}(\tau)$; $a_1(\tau) = 2c_{1\gamma}^2 + (1/2)c_{-13}c_{13} + c_{13}\widetilde{B}_{30}(\tau)$.

Равенство (71) справедливо при любом $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$, если и только если выполняются условия $a_{-1}(\tau) \equiv 0$, $a_1(\tau) \equiv 0$, $c_{-13} = 0$, $c_{13} = 0$ в силу линейной независимости функций ξ^α, где $\alpha = -1, 1, 3$, и $\xi^\beta \ln\xi$, где $\beta = -1, 1$, что имеет место, если и только если

$$c_{-1\gamma} = c_{1\gamma} = c_{-13} = c_{13} = 0. \tag{72}$$

При условиях (72) из (69), (70), используя формулы (50), (56), выводим

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{r_e}\widetilde{B}_{30}(\tau)\mathbf{e}_3\Big|_{\tau=\frac{\nu t}{r_e^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\mathbf{v} \equiv 0 \quad \text{в} \quad D\ (2). \tag{73}$$

Согласно (73) поле (8) при $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$ (49), $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$ (61), соответствующих значению $\omega = 0$, потенциально в D при $t \geq 0$ и поэтому классу $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D)$ принадлежать не может.

13. Будем полагать теперь в (49), (61), что $\omega \neq 0$. Тогда поле (8) и поле (67) его ротора будут выражаться формулами

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{r_e}\big[\widetilde{y}_\gamma(\xi,\tau,\omega)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + (\widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega) + \widetilde{B}_{3\omega}(\tau))\mathbf{e}_3\big]\Big|_{\xi=\frac{r}{r_e},\ \tau=\frac{\nu t}{r_e^2}}, \tag{74}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{\nu}{r_e^2}\big[-\widetilde{y}_3'(\xi,\tau,\omega)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \widetilde{y}_\gamma'(\xi,\tau,\omega)\mathbf{e}_3\big]\Big|_{\xi=\frac{r}{r_e},\ \tau=\frac{\nu t}{r_e^2}}, \tag{75}$$

а условие (68) — равенством

$$\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)\widetilde{y}_3'(\xi,\omega) + e^{-\omega\tau}\Lambda(\xi,\omega) = 0. \tag{76}$$

Здесь $\widetilde{y}_\gamma(\xi,\tau,\omega)$, $\widetilde{y}_3(\xi,\tau,\omega)$ и $\widetilde{y}_3'(\xi,\tau,\omega)$ определяются формулами (51), (60) и (54),

$$\widetilde{y}_\gamma'(\xi,\tau,\omega) = e^{-\omega\tau}\sqrt{\omega}[C_{1\gamma}(\omega)J_0(z) + C_{2\gamma}(\omega)N_0(z)]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}, \tag{77}$$

$$\widetilde{y}_3'(\xi,\omega) = [C_{13}(\omega)J_1(z) + C_{23}(\omega)N_1(z)]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}, \tag{78}$$

$$\Lambda(\xi,\omega) = \widetilde{y}_\gamma(\xi,\omega)\widetilde{y}_\gamma'(\xi,\omega) + \widetilde{y}_3(\xi,\omega)\widetilde{y}_3'(\xi,\omega), \tag{79}$$

где

$$\widetilde{y}_\gamma(\xi,\omega) = [C_{1\gamma}(\omega)J_1(z) + C_{2\gamma}(\omega)N_1(z)]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}; \tag{80}$$

$$\widetilde{y}_\gamma'(\xi,\omega) = \sqrt{\omega}[C_{1\gamma}(\omega)J_0(z) + C_{2\gamma}(\omega)N_0(z)]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}; \tag{81}$$

$$\widetilde{y}_3(\xi,\omega) = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}[C_{13}(\omega)J_0(z) + C_{23}(\omega)N_0(z)]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}. \tag{82}$$

При выводе формулы (75) использовались равенство (57), вторая из формул (42), первая из формул (43) и реккурентные соотношения (64).

Заметим, что функции (77), (78), (80), (81) — вещественны при любом $\omega \neq 0$, если $C_{1\gamma}(\omega)$, $C_{2\gamma}(\omega)$ и $C_{13}(\omega)$, $C_{23}(\omega)$ удовлетворяют условиям в пояснениях к формулам (51) и (54).

14. Рассмотрим условие (76). Но прежде выделим разновидности функций $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$, принимая во внимание, что левая часть в (76) при любом фиксированном $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$ есть линейная комбинация функций $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$ и $e^{-\omega\tau}$ переменной $\tau \in [0, +\infty)$, и оговорим их, сформулировав

Положение 2. Пусть $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$ и $e^{-\omega\tau}$ — линейно независимые функции переменной $\tau \in [0, +\infty)$, причем $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau) \not\equiv 0$ п. в. в $[0, +\infty)$;

2) $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau) = B_{3\omega}e^{-\omega\tau}$, где $B_{3\omega}$ — отличная от нуля постоянная;

3) $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau) = 0$ при любом $\tau \in [0, +\infty)$.

Предположим, что $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$ удовлетворяет условию 1) положения 2. Тогда условие (76) выполнимо при любом $\tau \in [0, +\infty)$ в силу линейной независимости функций $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$, $e^{-\omega\tau}$, если и только если $\widetilde{y}_3'(\xi, \omega) = 0$ и $\Lambda(\xi, \omega) = 0$ для любого $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$. Эти условия, в свою очередь, выполнимы (см. (78)–(81)) при любом $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$, если и только если

$$C_{13}(\omega) = C_{23}(\omega) = 0 \quad \text{и} \quad C_{1\gamma}(\omega) = C_{2\gamma}(\omega) = 0 \tag{83}$$

в силу линейной независимости функций Бесселя. При условиях (83) из (74), (75), используя формулы (51), (60), (54), (77), выводим

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{r_e}\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)\Big|_{\tau=\frac{\nu t}{r_e^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\mathbf{v} \equiv 0 \quad \text{в} \quad D\ (2). \tag{84}$$

Согласно (84) поле (8) при $\widetilde{v}_\gamma(\xi, \tau)$ (49), $\widetilde{v}_3(\xi, \tau)$ (61), соответствующих отличным от нуля значениям ω, и при $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$, удовлетворяющем условию 1) положения 2, есть поле, потенциальное в D при любом $t \geq 0$. Такое поле классу $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\rm sh}(D)$ принадлежать не может.

Предположим, что $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$ удовлетворяет условию 2) положения 2. Условие (76) в этом случае эквивалентно условию $B_{3\omega}\widetilde{y}_3'(\xi, \omega) + \Lambda(\xi, \omega) = 0$, которое при $B_{3\omega} \neq 0$ и любом $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$ выполняться не может, поскольку $\widetilde{y}_3'(\xi, \omega)$ и $\Lambda(\xi, \omega)$ — линейно независимые (см. формулы (78)–(82)) функции $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$.

Наконец, пусть $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$ удовлетворяет условию 3) положения 2. Тогда условие (76) эквивалентно условию

$$\Lambda(\xi, \omega) = 0. \tag{85}$$

Запишем его, переходя в (79) к явным выражениям (80) – (82), (78) для $\widetilde{y}_\gamma$, $\widetilde{y}_\gamma'$, $\widetilde{y}_3$, $\widetilde{y}_3'$, в виде

$$\Big[\sqrt{\omega}C_{1\gamma}^2(\omega) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}C_{13}^2(\omega)\Big]J_0(z)J_1(z) + \Big[\sqrt{\omega}C_{1\gamma}(\omega)C_{2\gamma}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}C_{13}(\omega)C_{23}(\omega)\Big]$$

$$\times\Big[J_0(z)N_1(z) + J_1(z)N_0(z)\Big] + \Big[\sqrt{\omega}C_{2\gamma}^2(\omega) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}C_{23}^2(\omega)\Big]N_0(z)N_1(z) = 0.$$

Отсюда видно, что условие (85) выполнимо при любом $\xi \in (\xi_i, \xi_0)$ в силу линейной независимости произведений функций Бесселя, если и только если $\omega C_{1\gamma}^2(\omega) - C_{13}^2(\omega) = 0$, $\omega C_{2\gamma}^2(\omega) - C_{23}^2(\omega) = 0$, $\omega C_{1\gamma}(\omega)C_{2\gamma}(\omega) - C_{13}(\omega)C_{23}(\omega) = 0$. Эти условия удовлетворяются, в свою очередь, если и только если

$$C_{1\gamma}(\omega) = C_1(\omega), \quad C_{13}(\omega) = -\eta\sqrt{\omega}C_1(\omega), \quad C_{2\gamma}(\omega) = C_2(\omega), \quad C_{23}(\omega) = -\eta\sqrt{\omega}C_2(\omega). \tag{86}$$

Здесь $\eta = \pm 1$, через $C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ обозначены постоянные, зависящие только от ω и удовлетворяющие условиям: при $\omega > 0$ постоянные $C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ вещественны, при $\omega < 0$ постоянная $C_1(\omega)$ — вещественное или комплексное число, а $C_2(\omega) = i\operatorname{Re}C_1(\omega)$. Однако эти условия при $\omega < 0$ совместимы с условиями (86), если и только если $C_1(\omega) = C_2(\omega) = 0$.

При условиях (86), из (74), (75), используя формулы (51), (60), (54), (77), выводим

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{r_e}\Big[\widetilde{w}_\gamma(\xi, \tau, \omega)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \widetilde{w}_3(\xi, \tau, \omega, \eta)\mathbf{e}_3\Big]\Big|_{\xi=\frac{r}{r_e},\ \tau=\frac{\nu t}{r_2 2}}, \tag{87}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{1}{r_e}\eta\sqrt{\omega}\mathbf{v}, \tag{88}$$

где $\omega > 0$,

$$\widetilde{w}_\gamma(\xi,\tau,\omega) = e^{-\omega\tau}\Big[C_1(\omega)J_1(z) + C_2(\omega)N_1(z)\Big]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}},$$

$$\widetilde{w}_3(\xi,\tau,\omega,\eta) = e^{-\omega\tau}\eta\Big[C_1(\omega)J_0(z) + C_2(\omega)N_0(z)\Big]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}.$$

Согласно (87), (88) поле (8) при $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$ (49) и $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$ (61), соответственно равных

$$\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau) = \widetilde{w}_\gamma(\xi,\tau,\omega) \ \text{ и } \ \widetilde{v}_3(\xi,\tau) = \widetilde{w}_3(\xi,\tau,\omega,\eta), \qquad \omega > 0, \tag{89}$$

и при $\widetilde{B}_{3\omega}(\tau)$, удовлетворяющем условию 3) положения 2, коллинеарно в D полю его ротора при любом $\tau \in [0,+\infty)$.

З а м е ч а н и е 1. Условие 3) положения 2 эквивалентно (см. вторую из формул (65) и формулы (66), (34)) условиям $\widetilde{b}_{3\omega} = 0$, $\widetilde{b}_3(\tau) = 0$ при $\tau \in [0,+\infty)$ и $b_3(t) = 0$ при $t \in [0,+\infty)$.

Резюмируя сказанное, сформулируем следующее предложение.

Предложение 5. *Поле* (8) *при* $\widetilde{v}_\gamma(\xi,\tau)$, $\widetilde{v}_3(\xi,\tau)$ (89) *и при* $b_3(\tau) \equiv 0$ *удовлетворяет условию* (15) *и коллинеарно полю его ротора в* D (2) *при любом* $t \geq 0$.

Отметим некоторые из свойств, охарактеризованных в предложении 5, полей (8) и оговорим их в следующих, легко проверяемых, замечаниях.

З а м е ч а н и е 2. Поля (8), соответствующие различным ω, не коллинеарны.

З а м е ч а н и е 3. Линейная комбинация векторных полей (8), соответствующих двум различным значениям ω, есть векторное поле, неколлинеарное полю его ротора.

15. Обсудим полученные результаты. Исходя из предложения 5, замечаний 2 и 3, заключаем, что поле $\mathbf{v}$ (87) принадлежит сужению $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D)$. Охарактеризуем $\mathbf{v}$ в следующем предложении.

Предложение 6. *Соответствие* $(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) \to \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *определяет в* D (2) *при* $t \in [0,+\infty)$ *поле, принадлежащее сужению* $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D)$, *если и только если оно устанавливается правилами*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma,t) = e^{-\omega\tau}\mathbf{w}(r,\gamma,\omega,\eta)\Big|_{\tau=\frac{\nu t}{r_e^2}},$$

$$\mathbf{w}(r,\gamma,\omega,\eta) = \frac{\nu}{r_e}\Big\{[C_1(\omega)J_1(z) + C_2(\omega)N_1(z)]\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \eta[C_1(\omega)J_0(z) + C_2(\omega)N_0(z)]\mathbf{e}_3\Big\}\Big|_{z=\frac{r}{r_e}\sqrt{\omega}},$$

где ω — *положительная постоянная*; $C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ — *вещественные постоянные, зависящие только от* ω, *а* $\eta = \pm 1$.

Поля $\mathbf{v} \in \widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D)$ удовлетворяют условиям разрешимости (20) первого уравнения системы (1) при $b_3(t) \equiv 0$. Учитывая это, обратимся к формуле (23), выражающей первое уравнение системы (1) в разрешенном относительно p виде, и к условию (24). При $\mathbf{v} \in \widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D)$ из (23), (24), принимая обозначение $w(r,\omega) = |\mathbf{w}(r,\gamma,\omega,\eta)|$, выводим

$$p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = P(t) - \rho\Big[\frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{2\omega\nu t}{r_e^2}\Big)w^2(r,\omega) + u(r,\gamma,x_3,t) + b_{30}\Big], \tag{90}$$

$$P(t) - \rho\Big[\frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{2\omega\nu t}{r_e^2}\Big)w^2(r,\omega) + u(r,\gamma,x_3,t) + b_{30}\Big] \geq 0. \tag{91}$$

Сформулируем следующее предложение.

Предложение 7. *Пара* $(\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t), p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t))$ *полей, где первое как функция* $t \in [0,+\infty)$ *является гладким и ограниченным, а второе непрерывным, есть гладкое в* D (2) *решение системы уравнений* (1), *если*:

1) $\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ *принадлежит сужению* $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D)$;

2) *потенциал* u *силового поля в* (1) *удовлетворяет условиям положения* 1;

3) $p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ — *скалярное поле в* D, *определяемое формулой* (90) *при условии, что* $P(t)$ — *непрерывная функция* $t \in [0,+\infty)$;

4) *потенциал* u, $P(t)$, *постоянная* b_{30} *удовлетворяют в* D *условию* (91) *при* $t \in [0,+\infty)$.

16. В заключение обсудим приложение полученных результатов к построению решений $(\mathbf{v},p)$ в $D^4 = \{(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) : \ \mathbf{x}(r,\gamma,x_3) \in D \ (2), \ t \in [0,t_f]\}$, где $0 < t_f < +\infty$, линеаризованной по Стоксу системы уравнений (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{f} + \nu\Delta\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ D^4 \tag{92}$$

при условиях следующего положения.

Положение 3. Соответствие $(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) \to \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t)$ устанавливается правилом (8); $\mathbf{f} = -\boldsymbol{\nabla} u$, где потенциал $u = u(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = u(r,\gamma,x_3,t)$ — гладкое в D скалярное поле, непрерывное при $t \in [0,t_f]$.

Сформулируем, во-первых, проверяемое непосредственной подстановкой следующее предложение.

Предложение 8. *Пара* $(\mathbf{v},p)$ *полей в* D^4, *определяемых формулами*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma,t) = \frac{1}{r}C_\gamma\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \mathcal{V}_3(t)\mathbf{e}_3,$$

$$p = p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathcal{P}(t) - \rho\Big[u(r,\gamma,x_3,t) + \frac{d}{dt}\mathcal{V}_3(t) + b_0\Big],$$

где первое как функция $t \in [0,t_f]$ *является гладким, а второе непрерывным, есть гладкое в* D *решение системы уравнений* (92), *если*:

1) $\mathcal{V}_3(t)$ — *гладкая, а* $\mathcal{P}(t)$ — *непрерывная функции* $t \in [0,t_f]$, C_γ *и* b_0 — *постоянные*;

2) *потенциал* u *векторного поля* $\mathbf{f}$ *удовлетворяет условиям положения* 3;

Замечание 4. Поле $\mathbf{v}$, охарактеризованное в предложении 8, принадлежит классу $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{\mathrm{sh}}(D)$ при любом $t \in [0,t_f]$, если и только если $C_\gamma \neq 0$.

Во-вторых, заметим, что система (92) разрешима в случае векторных полей $\mathbf{v}$, которые выражаются следующей формулой:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathbf{v}(r,\gamma,t) = \frac{\nu}{r_e}\Big[\widetilde{\mathbf{v}}_0(\xi,\gamma,\tau) + \widetilde{\mathbf{W}}(\xi,\gamma,\tau)\Big]\Big|_{\xi=\frac{r}{r_e},\ \tau=\frac{\nu t}{r_e^2}}. \tag{93}$$

Здесь $\tau \in [0,\tau_f]$, где $\tau_f = \nu t_f/r_e^2$;

$$\widetilde{\mathbf{v}}_0(\xi,\gamma,\tau) = (\widetilde{C}_{-1\gamma}\xi^{-1} + \widetilde{C}_{1\gamma}\xi)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \Big[\widetilde{C}_{-13}\ln\xi + \frac{1}{2}\widetilde{C}_{13}\xi^2 + \widetilde{\mathcal{B}}_3(\tau)\Big]\mathbf{e}_3;$$

$$\widetilde{\mathbf{W}}(\xi,\gamma,\tau) = \widetilde{W}_\gamma(\xi,\tau)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \widetilde{W}_3(\xi,\tau)\mathbf{e}_3, \tag{94}$$

где $\widetilde{C}_{-1\gamma}$, $\widetilde{C}_{1\gamma}$, $\widetilde{C}_{-13}$, $\widetilde{C}_{13}$ — постоянные; $\widetilde{\mathcal{B}}(\tau)$ — гладкая функция $\tau \in [0,\tau_f]$. Компоненты поля (94), выражаются несобственными интегралами по области $G = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$:

$$\widetilde{W}_\gamma(\xi,\tau) = \int\limits_G e^{-\omega\tau}\Big[\widetilde{C}_{1\gamma}(\omega)J_1(z) + \widetilde{C}_{2\gamma}(\omega)N_1(z)\Big]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}\,d\omega,$$

$$\widetilde{W}_3(\xi,\tau) = -\int\limits_G e^{-\omega\tau}\frac{1}{\sqrt{\omega}}\Big[\widetilde{C}_{13}(\omega)J_0(z) + \widetilde{C}_{23}(\omega)N_0(z)\Big]\Big|_{z=\xi\sqrt{\omega}}d\omega.$$

Здесь $\widetilde{C}_{1\gamma}(\omega),\ \widetilde{C}_{2\gamma}(\omega),\ \widetilde{C}_{13}(\omega),\ \widetilde{C}_{23}(\omega)$ — функции $\omega \in G$, удовлетворяющие условиям

$$\widetilde{C}_{2\gamma}(\omega) = i\mathrm{Re}\,\widetilde{C}_{1\gamma}(\omega), \qquad \widetilde{C}_{23}(\omega) = i\mathrm{Re}\,\widetilde{C}_{13}(\omega), \quad \text{если} \quad \omega \in (-\infty, 0), \tag{95}$$

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{C}_{1\gamma}(\omega) = \mathrm{Im}\,\widetilde{C}_{2\gamma}(\omega) = \mathrm{Im}\,\widetilde{C}_{13}(\omega) = \mathrm{Im}\,\widetilde{C}_{23}(\omega) = 0, \quad \text{если} \quad \omega \in (0, +\infty). \tag{96}$$

Действительно, при $\mathbf{v}$ (93) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} = \frac{\nu^2}{r_e^3}\big[\dot{\widetilde{\mathcal{B}}}_3(\tau) - 2\widetilde{C}_{13}\big]\mathbf{e}_3\Big|_{\tau=\frac{\nu t}{r_e^2}}. \tag{97}$$

Подстановка (97) в первое уравнение системы (92) приводит к уравнению относительно p. Разрешая его, получаем

$$p = p(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3),t) = \mathcal{P}(t) - \rho\bigg\{u(r,\gamma,x_3,t) + \frac{\nu^2}{r_e^3}x_3\big[\dot{\widetilde{\mathcal{B}}}_3(\tau) - 2\widetilde{C}_{13}\big]\Big|_{\tau=\frac{\nu t}{r_e^2}+b_0} + b_0\bigg\}, \tag{98}$$

где $\mathcal{P}(t)$ — непрерывная при $t \in [0,t_f]$ функция; b_0 — постоянная.

Принимая во внимание сказанное, сформулируем следующее предложение.

Предложение 9. *Пара* $(\mathbf{v}, p)$ *полей в* D^4, *определяемых формулами* (93) – (96), (98), *где первое как функция* $t \in [0,t_f]$ *является ограниченным и гладким, а второе непрерывным, есть гладкое в* D *решение системы уравнений* (92), *если*:

1) $\widetilde{\mathcal{B}}_3(\tau)\big|_{\tau=\frac{\nu t}{r_e^2}}$ *— гладкая, а* $\mathcal{P}(t)$ *— непрерывная функции* $t \in [0,t_f]$;

2) *выбор функций* $\widetilde{C}_{1\gamma}(\omega),\ \widetilde{C}_{2\gamma}(\omega),\ \widetilde{C}_{13}(\omega),\ \widetilde{C}_{23}(\omega)$ *переменной* $\omega \in G$ *подчиняется условиям* (95), (96) *и обеспечивает указанные выше свойства пары* $(\mathbf{v}, p)$;

3) *потенциал* u *удовлетворяет условиям положения* 3.

З а м е ч а н и е 5. Поле $\mathbf{v}$, охарактеризованное в предложении 9, принадлежит классу $\widetilde{\mathfrak{L}}''_{\mathrm{sh}}(D)$ при $t \in [0,t_f]$, если и только если $\widetilde{C}_{-1\gamma} = \widetilde{C}_{1\gamma} = \widetilde{C}_{-13} = \widetilde{C}_{13} = 0,\ \widetilde{\mathcal{B}}_3(\tau) \equiv 0,\ \widetilde{C}_{1\gamma}(\omega) = C_1\delta(\omega-\omega_1),\ \widetilde{C}_{2\gamma}(\omega) = C_2\delta(\omega-\omega_1),\ \widetilde{C}_{13}(\omega) = -\eta\sqrt{\omega}C_1\delta(\omega-\omega_1),\ \widetilde{C}_{23}(\omega) = -\eta\sqrt{\omega}C_2\delta(\omega-\omega_1)$, где $\delta(\omega-\omega_1)$ — символическая δ-функция Дирака (см. [4, п. 21.9–2]); ω_1 — фиксированное положительное значение ω; $C_1,\ C_2$ — вещественные постоянные; $\eta = \pm 1$.

Итак, множество решений $(\mathbf{v}, p)$ системы уравнений (92) при условиях положения 3 содержит множество решений $(\mathbf{v}, p)$ системы уравнений (1) при $\mathbf{v}$ (8), принадлежащих классу $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{sh}}(D)$ как строгое включение. Обусловлено это тем, что для разрешимости уравнения Стокса из (92) при $\mathbf{v}$ (8) достаточно выполнения условий (28), (29), тогда как для разрешимости уравнения Навье — Стокса из (1) при $\mathbf{v}$ (8), принадлежащем классу $\widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathrm{sh}}(D)$, требуется еще и выполнение условий (10) или (11) и (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121.
2. **Громека И.С.** Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. 1881. 107 с. // Громека И. С. Собр. соч. Казань: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с.
3. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 120–134.

4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.
5. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1958. 678 с.

Верещагин Владимир Пантелеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
науч. сотрудник
Российский государственный профессионально-педагогический университет
г. Екатеринбург
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Поступила 29.03.2013

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ[1]

Н. Л. Григоренко

В работе рассматривается задача управления нестационарной динамической системой с нефиксированным моментом окончания и терминальным функционалом при наличии неопределенных параметров. Предложен алгоритм построения управления, использующий конструкции необходимых условий оптимальности и принципа скоростного градиента, доставляющего функционалу качества гарантированное значение. Приведены результаты расчета управления и значений функционала для тестовых параметров модели.

Ключевые слова: управляемая система, оптимальное управление, управление в условиях неопределенности.

N. L. Grigorenko. A control problem with dominating uncertainty.

A control problem for a nonstationary dynamic system with unfixed termination time and terminal functional in the presence of uncertain parameters is considered. A control construction algorithm is proposed, which uses elements of necessary optimality conditions and the speed gradient principle providing a guaranteed value of the quality functional. The results of computing the control and values of the functional for test parameters of the model are presented.

Keywords: control system, optimal control, control under uncertainty.

Введение

В работе рассматривается нелинейная задача управления динамической системой, содержащей неопределенный параметр, который не может быть компенсирован ресурсами управления. Минимакс показателя качества такой системы является конечной отрицательной величиной. Параметр неопределенности не всегда принимает свое наихудшее значение относительно функционала. Ставится задача о выборе управления, которое строится по предыстории реализующейся в режиме реального времени неопределенности и фазовых переменных и нацелено на достижение функционалом качества некоторого гарантированного значения (зависящего от реализовавшейся неопределенности). Соответствующие задачи управления возникают, например, при оптимизации экономических показателей эффективности производственного процесса, в котором в качестве неопределенных параметров выступают неизвестные вперед цены на готовую продукцию.

Подходы к решению игровых задач управления, на которые опирается данная работа, содержатся в работах [1–19].

Предлагаемый в статье подход к решению такого класса задач опирается на анализ исходной задачи с помощью необходимых условий оптимальности при предположении полной информации о неопределенности на рассматриваемом интервале управления. Структурная формула оптимального управления из принципа максимума Понтрягина в ряде случаев зависит только от предыстории неопределенности. Информация о значении неопределенности на всем интервале управления в ряде случаев учитывается только в краевых условиях. Для неизвестных параметров сопряженной переменной может быть выписана система дифференциальных уравнений, аналогичная непрерывному варианту градиентного метода при условии выполнения для него условий теорем о сходимости. Начальные значения для такой системы,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00175), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6512.2012.1).

содержащей предысторию неопределенности, в ряде случаев могут быть выбраны по гипотезам о характере поведения неопределенности в будущем.

Модели производственных процессов, родственные рассмотренным в данной работе, рассматривались в [20; 21], где приведено решение задачи оптимального управления для модели, описывающей динамику экономического процесса в случае квадратичной зависимости концентрации чистого минерала от глубины залегания при постоянных характеристиках полезных ископаемых. В [22] приведено решение задачи оптимального управления для модели с линейной концентрацией в классе позиционных управлений и рассмотрена задача оптимального управления на бесконечном горизонте планирования.

В настоящей работе рассмотрена модель с доминирующей неопределенностью и интегральным функционалом качества. Найден качественный вид игрового управления, для расчета параметров которого предложен численный алгоритм. Приведены результаты расчета задачи игрового управления для тестовых параметров модели.

1. Постановка задачи управления с доминирующей неопределенностью

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t), v(t), t), \quad t_0 \le t \le \theta, \quad z(t_0) = z_0, \tag{1.1}$$

где $z \in E^n, u \in P \subset E^p, v \in Q \subset E^q$, E^n — n-мерное евклидово пространство, P и Q — компакты в евклидовых пространствах. Параметром u распоряжаются первый игрок, v — неопределенный параметр, непрерывная функция, о которой в момент t известны значения для $s \in [0, t]$. Допустимые управления первого игрока — измеримые функции $u(t)$ со значениями в P. Процесс управления оканчивается в первый момент времени $T \le \theta$, для которого выполнено условие $g(T, z(T)) = 0$.

Предположение 1. *Функция f и множества P и Q удовлетворяют условиям, гарантирующим существование, единственность и нелокальную продолжимость решений системы* (1.1)*. Для любых допустимых $u(t), v(t)$ существует момент времени $T = T(u(\cdot), v(\cdot))$, для которого $g(t, z(T)) = 0$, где $z(t)$ — решение уравнения* (1.1) *при $u(t), v(t)$.*

Функционал качества процесса управления имеет вид

$$J(T, u(\cdot), v(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} f^0(z(t), u(t), v(t), t)\, dt. \tag{1.2}$$

Функция f^0 непрерывно дифференцируема по x и непрерывна по u, v, t. Цель первого игрока — применить управление $u(\cdot)$, гарантирующее возможно большее значение функционала $J(T, u(\cdot), v(\cdot))$. Задача управления (1.1), (1.2) рассматривается с позиции первого игрока. Для достижения своих целей первый игрок выбирает управление в классе квазистратегий $u(t, v_t(\cdot))$ [3, с. 24].

О п р е д е л е н и е 1. В задаче (1.1), (1.2) параметр неопределенности v доминирует над параметром управления u, если существуют непрерывные функции $v_1(t) \in Q, v_2(t) \in Q$, $t \in [0, \theta]$ и константы $d_1, d_2, d_1 < d_2$, такие, что для любых допустимых управлений $u_1(t) \in P$, $u_2(t) \in P$ и траекторий $z_1(t) = z_1(t, u_1(t), v_1(t))$, $z_2(t) = z_2(t, u_2(t), v_2(t))$, порождаемых помехами и управлениями $v_i(t), u_i(t)$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство $f^0(z_1(t), u_1(t), v_1(t), t) < d_1 < d_2 < f^0(z_2(t), u_2(t), v_2(t), t)$ при всех $t \in [t_0, \theta]$.

Предположение 2. *В задаче* (1.1), (1.2) *параметр неопределенности v доминирует над параметром управления u.*

Предположение 3. *В задаче оптимального управления для системы* (1.1), (1.2) (*при известной вперед помехе* $v(t)$) *существует оптимальное управление.*

Оптимальное управление в такой задаче обозначим через $\bar{u}(t, v(t))$, соответствующее значение функционала (1.2) — через $\bar{J}(T, \bar{u}(t, v(t)), v(t))$.

З а д а ч а 1. Найти квазистратегию $u(t, v_t(\cdot))$ и соответствующий ей показатель $\xi(T, v_t(\cdot))$, определяемый следующим соотношением: при реализации неопределенности $v(\tau), t_0 \le \tau \le t$, значение функционала (1.2) $J(T, u(t, v_t(\cdot)), v(\cdot)) \ge \xi(T, v_t(\cdot))\bar{J}(T, \bar{u}(t, v(t)), v(t))$.

З а м е ч а н и е. Показателем такой квазистратегии является доля значения порождаемого им функционала от функционала в соответствующей задаче оптимального управления с известной наперед неопределенностью. Квазистратегия, для которой такая доля больше, является предпочтительнее.

2. Подход к решению задачи управления с доминирующей неопределенностью

Для нахождения игрового управления используем конструкции принципа максимума [4, гл. 1, 2] и скоростного градиента для интегрального функционала [23, гл. 2]. Функция Понтрягина, Лагранжиан и максимизатор функции Понтрягина имеют вид

$$H(z, u, v, t, \psi, a_0) = -a_0 f^0(z, u, v, t) + (\psi, f(z, u, t)), \tag{2.1}$$

$$l(y, T, a_0) = a_0 g(T, y),$$

$$u^*(z, v, t, \psi, a_0) = \arg\max_{u \in P} H(z, u, v, t, \psi, a_0). \tag{2.2}$$

Предположение 4. *В задаче оптимального управления* (1.1), (1.2) *максимизатор* (2.2) *функции Понтрягина* (2.1) *не содержит особых режимов* [24, гл. 2, 3].

Предпишем первому игроку применять управление (2.2). Подставим его в функционал (1.2) и будем считать вектор ψ зависящим от времени и выбираемым первым игроком:

$$J_1(t, u^*(t, v_t(\cdot)), v(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t} f^0(z(\tau), u^*(\tau), v(\tau), \tau)\, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(z(\tau), \psi(\tau), v(\tau), \tau)\, d\tau.$$

Скорость изменения функционала J в момент t равна $\Phi(z(t), \psi(t), v(t), t)$. Используя непрерывный вариант градиентного метода [25, с. 247] для параметра $\psi(t)$, предпишем первому игроку выбирать вектор ψ как функцию времени из условия:

$$\frac{d\psi}{dt} = a(t)\frac{\partial \Phi(z, \psi, v, t)}{\partial \psi}, \quad \psi(t_0) = \psi_0, \tag{2.3}$$

где $a(t) > 0$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция при $t \ge t_0, a(t) > \bar{a}_0 > 0$, $a'(t) < 0\ \forall t \ge t_0$. Начальные условия ψ_0 для уравнения (2.3) являются параметрами подхода.

Предположение 5. *Функция* $\Phi(z, \psi, v, \tau)$ *такова, что для уравнения* (2.3) *выполнены условия теоремы существования, единственности и нелокальной продолжимости решения.*

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если для управляемого процесса* (1.1), (1.2) *выполнены предположения* 1–5, *то управление* $u^*(t, v_t(\cdot))$ *является решением задачи* 1 *с показателем* $\xi(T, v_t(\cdot)) = J_1\big(T, u^*(t, v_t(\cdot)), v(\cdot)\big) / \bar{J}\big(T, \bar{u}(t, v(t)), v(t)\big)$.

Доказательство утверждения 1 может быть проведено по схеме получения условий сходимости непрерывного варианта градиентного метода [25, с. 247–249]. В следующих разделах мы проведем построения разд. 2 для конкретной задачи вида (1.1), (1.2).

3. Задача управления для модели динамики экономических показателей

3.1. Постановка задачи управления

Рассмотрим следующую задачу управления с неопределенным параметром:

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T(u(\cdot))) = x_1, \quad t \in [0, T(u(\cdot))], \quad 0 < P \le u(t) \le Q, \tag{3.1}$$

$$J(T, u(\cdot), s(\cdot)) = \int\limits_0^{T(u(\cdot))} e^{-\nu t}\Big(-mu(t) - pP + s(t)P\Big(2 - \frac{P}{u^k(t)}\Big)\Big)\,dt$$
$$- g_1 e^{\nu_1 T(u(\cdot))} P^{\gamma_1} - g_2 e^{\nu_2 T(u(\cdot))} Q^{\gamma_2} \ \ge \xi(s(\cdot)). \tag{3.2}$$

Здесь $x(t)$ — фазовая переменная, $u(t)$ — управляющий параметр первого игрока, $T(u(\cdot))$ — нефиксированный момент окончания процесса, $x, u \in \mathbb{R}^1$; $g_1 \ge 0$, $g_2 \ge 0$, $\nu_1 \ge 0$, $\nu_2 \ge 0$, $0 \le \gamma_1 \le 1$, $0 \le \gamma_2 \le 1$, x_1, P, Q, $0 < P \le Q$, ν, m, p, k — положительные параметры, имеющие содержательную интерпретацию, $s(t) \in [s_1, s_2]$, $s_2 \ge s_1 > 0$, — неопределенный параметр: непрерывная функция, о которой в момент t первому игроку известны значения $s(\tau)$, $\tau \in [0, t]$. Цель первого игрока — применить управление $u(\cdot)$, гарантирующее возможно большее значение оценки $\xi(s(\cdot))$. Задача управления (3.1), (3.2) рассматривается с позиции первого игрока.

Управление первого игрока выбирается в классе контрстратегий $u(t, s_t(\cdot))$ — измеримых по Лебегу функций $u(t)$, удовлетворяющих ограничению $P \le u(t) \le Q$. Задача (3.1), (3.2) является задачей с доминирующей неопределенностью.

3.2. Вспомогательная задача оптимального управления

Для конструирования стратегии управления в задаче (3.1), (3.2) рассмотрим решение соответствующей задачи оптимального управления при известной наперед функции $s(t)$:

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T(u(\cdot))) = x_1, \quad t \in [0, T(u(\cdot))], \quad P \le u(t) \le Q, \tag{3.3}$$

$$J_1(T, u(\cdot)) = \int\limits_0^{T(u(\cdot))} e^{-\nu t}\Big(mu(t) + pP - s(t)P\Big(2 - \frac{P}{u^k(t)}\Big)\Big)\,dt$$
$$+ g_1 e^{\nu_1 T(u(\cdot))} P^{\gamma_1} + g_2 e^{\nu_2 T(u(\cdot))} Q^{\gamma_2} \quad \longrightarrow \min_{u(t)\in[P,Q],\ P>0,\ Q\ge P}. \tag{3.4}$$

Здесь $x(t)$ — фазовая переменная, $u(t)$ — управление, T — нефиксированный момент окончания процесса, $x, u \in \mathbb{R}^1$; $g_1 \ge 0$, $g_2 \ge 0$, $\nu_1 \ge 0$, $\nu_2 \ge 0$, $0 \le \gamma_1 \le 1$, $0 \le \gamma_2 \le 1$, x_1, P, Q, $0 < P \le Q$, ν, m, p, $s(t)$, k — положительные параметры, функция $s(t)$ непрерывна. В задаче (3.3), (3.4) существует оптимальное управление в классе измеримых по Лебегу функций [26, гл.4]. Для исследования задачи оптимального управления (3.3), (3.4) мы применяем необходимые условия оптимальности процессов с параметрами в форме принципа максимума Понтрягина для задач с нефиксированным моментом времени [4, гл. 1,4; 25, гл. 6,8].

3.3. Принцип максимума для задачи (3.3), (3.4)

Согласно [4, гл. 1,4; 25, гл. 6,8] для задачи с нефиксированным временем имеет место следующее утверждение: если $(u^*(t), x^*(t), T)$ есть решение задачи (3.3), (3.4), то существуют вектор $a = (a_0,\ a_1)$ и функция $\psi(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$H(t, u, \psi, a_0) = -a_0 e^{-\nu t}\Big(- (2s(t) - p)P + mu + \frac{s(t)P^2}{u^k}\Big) + \psi u,$$

$$l(\xi, z, t, T, a_1) = l(x_0, x(T), t_0, T, a) = -a_0(Ae^{\nu_1 T} + Be^{\nu_2 T})$$
$$+ a_1(x(T) - x_1), \;\; u^*(t, a_0) = \arg\max_{u\in[P,Q]} H(t, u, \psi, a_0),$$
$$\dot\psi = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \psi(T) = -\frac{\partial l}{\partial z} = -a_1, \quad a = (a_0, \; a_1) \neq 0, \quad a_0 \geq 0,$$
$$H(T, u, \psi, a) = \frac{\partial l}{\partial T} = -a_0(A\nu_1 e^{\nu_1 T} + B\nu_2 e^{\nu_2 T}), \quad A = g_1 P^{\gamma_1}, \quad B = g_2 Q^{\gamma_2}.$$

3.4. Максимизатор функции Понтрягина

Максимизатор функции Понтрягина $H(t, u, \psi, a_0)$ зависит от $a_0, \; a_1, \; t$. Пусть $a_0 = 0$ (анормальный случай). Тогда $H = -a_1 u$ и экстремальное управление имеет вид

$$u^*(t, a_1) = \begin{cases} P_1, & \text{если} \;\; a_1 > 0, \\ Q_1, & \text{если} \;\; a_1 < 0. \end{cases}$$

Пусть $a_0 > 0$ (нормальный случай). Тогда $H(t, u, q) = a_0 e^{-\nu t} K(t, u, q)$, где

$$K(t, u, q) = K(b(t), s(t), u) = (2s(t) - p)P - b(t)u - \frac{s(t)P^2}{u^k}, \quad b(t) = b(q, t) = m + qe^{\nu t}, \quad q = \frac{a_1}{a_0}.$$

Утверждение 2. *Максимизатор функции $K(b, s, u)$ имеет вид*

$$u^*\Big(\frac{b}{s}\Big) = \begin{cases} Q, & \textit{если} \;\; \dfrac{b}{s} < \dfrac{P^2\, k}{Q^{k+1}}, \\ \Big(\dfrac{sP^2k}{b}\Big)^{\frac{1}{k+1}}, & \textit{если} \;\; \dfrac{P^2\, k}{Q^{k+1}} \leq \dfrac{b}{s} \leq \dfrac{k}{P^{k-1}}, \\ P, & \textit{если} \;\; \dfrac{b}{s} > \dfrac{k}{P^{k-1}}. \end{cases} \quad \textit{если} \;\; b(t) > 0, \tag{3.5}$$

$$u^*\Big(\frac{b}{s}\Big) = Q, \;\; \textit{если} \; b(t) \leq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b(t) > 0$. Функция $K(b, s, u)$ обладает свойствами:

$$K'_u = -b + \frac{sP^2k}{u^{k+1}} < 0 \;\; \text{при} \;\; u > \Big(\frac{sP^2k}{b}\Big)^{\frac{1}{k+1}}; \quad K'_u > 0 \;\; \text{при} \;\; u < \Big(\frac{sP^2k}{b}\Big)^{\frac{1}{k+1}};$$

$$K'_u = 0 \;\; \text{при} \;\; u = \Big(\frac{sP^2k}{b}\Big)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Учитывая $u \in [P, Q], \; P > 0$, получаем (3.5). Если $b(t) \leq 0$, то $K(u)$ монотонно возрастает по u и $u^* = Q$. Лемма 1 доказана.

Управление $u^*\Big(\dfrac{b(q,t)}{s(t)}\Big)$ согласно (3.5) в момент времени t зависит от $s(t)$, параметра q и расположения величины $\dfrac{b(q,t)}{s(t)}$ по отношению к интервалам $\Big(-\infty, \dfrac{P^2k}{Q^{k+1}}\Big), \; \Big[\dfrac{P^2k}{Q^{k+1}}, \dfrac{k}{R^{k-1}}\Big]$, $\Big(\dfrac{k}{R^{k-1}}, +\infty\Big)$, определяющим вид экстремального управления. В зависимости от параметра q при известном в момент t значении $s(t)$ из (3.5) имеем

$$u^*(q, t) = u^*\Big(\frac{b(q,t)}{s(t)}\Big) = \begin{cases} Q, & \text{если} \;\; q < \dfrac{\frac{P^2k}{Q^{k+1}} s(t) - m}{e^{\nu t}}, \\ \Big(\dfrac{sP^2k}{b}\Big)^{\frac{1}{k+1}}, & \text{если} \;\; \dfrac{\frac{P^2k}{Q^{k+1}} s(t) - m}{e^{\nu t}} \leq q \leq \dfrac{\frac{k}{P^{k-1}} s(t) - m}{e^{\nu t}}, \\ P, & \text{если} \;\; q > \dfrac{\frac{k}{P^{k-1}} s(t) - m}{e^{\nu t}}. \end{cases} \tag{3.6}$$

При известном вперед $s(t)$ значения q, T находятся из краевых условий принципа максимума.

3.5. Построение игрового управления

Рассмотрим случай наличия информации в текущий момент t о значении $s(\tau),\ 0 \le \tau \le t$. Предпишем первому игроку применять управление (3.6), зависящее от текущего значения $s(t)$ и значения $q = q(t)$. Целевой функционал имеет вид

$$J_2(q(\cdot)) = \int\limits_0^t R(s(\tau), q(\tau), \tau)\, d\tau, \tag{3.7}$$

$$R(s(\tau), q(\tau), \tau) = e^{-\nu\tau}\Big(mu^*(q(\tau),\tau) + p\,P - s(\tau)P\Big(2 - \frac{P}{(u^*(q(\tau),\tau))^k}\Big)\Big)$$

$$= e^{-\nu\tau} \times \begin{cases} mQ + pP - 2s(\tau)P + \dfrac{s(\tau)P^2}{Q^k} \quad \text{при} \quad q < \dfrac{\dfrac{P^2k}{Q^{k+1}}s(\tau) - m}{e^{\nu\tau}}, \\ \dfrac{m(sP^2k)^{\frac{1}{k+1}}}{(m+qe^{\nu\tau})^{\frac{1}{k+1}}} + pP - 2s(\tau)P + \dfrac{s(\tau)P^2}{(s(\tau)P^2k)^{\frac{k}{k+1}}}\big(m+qe^{\nu\tau}\big)^{\frac{k}{k+1}} \\ \qquad\qquad\qquad \text{при} \quad \dfrac{\dfrac{P^2k}{Q^{k+1}}s(\tau) - m}{e^{\nu\tau}} \le q \le \dfrac{\dfrac{k}{P^{k-1}}s(\tau) - m}{e^{\nu\tau}}, \\ mP + pP - 2s(\tau)P + s(\tau)P^{(2-k)} \quad \text{при} \quad \dfrac{\dfrac{k}{P^{k-1}}s(\tau) - m}{e^{\nu\tau}} < q. \end{cases}$$

Значение $q = q(\tau)$ предпишем выбирать первому игроку из условия максимизации скорости убывания целевого функционала (3.7) [23, с. 30–32]. Скорость изменения функционала (3.7) равна $R(s(\tau), q(\tau), \tau)$. Используя непрерывный вариант градиентного метода [25, с. 247] для параметра $q(t)$, получаем уравнение

$$\dot q = -a(\tau)R'_q(s(\tau), q, \tau)\Psi(\tau, q, q_1(\tau), q_2(\tau))$$

$$= -a(\tau)e^{-\nu\tau} \times \begin{cases} 0, & q < q_1(\tau), \\ \Phi(q,\tau)\Psi(\tau, q, q_1(\tau), q_2(\tau)), & q_1(\tau) \le q \le q_2(\tau), \\ 0, & q_2(\tau) < q, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\Phi(q,\tau) = \frac{e^{\nu\tau}}{k+1}\big(s(\tau)P^2k\big)^{\frac{1}{k+1}}\Big[-m\Big(m+qe^{\nu\tau}\big)^{\frac{-2-k}{k+1}} + \big(m+qe^{\nu\tau}\big)^{\frac{-1}{k+1}}\Big],$$

$$\Psi(\tau, q, q_1(\tau), q_2(\tau)) = \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\Big(\frac{q - q_1(\tau)}{\alpha}\Big) - \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\Big(\frac{q - q_2(\tau)}{\alpha}\Big),$$

$$q_1(\tau) = \frac{\dfrac{P^2k}{Q^{k+1}}s(\tau) - m}{e^{\nu\tau}}, \quad q_2(\tau) = \frac{\dfrac{k}{P^{k-1}}s(\tau) - m}{e^{\nu\tau}}, \tag{3.9}$$

где $a(\tau) > 0$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция при $\tau \ge 0$, $a(\tau) > \bar a_0 > 0$, $a'(\tau) < 0\ \forall \tau \ge 0$, α — малая положительная константа. Функция $\Psi(\tau, q, q_1(\tau), q_2(\tau))$ гарантирует гладкость правой части уравнения (3.8) по q. Выбор начального значения параметра $q(0)$ осуществляется первым игроком и является параметром метода. Подходы к его выбору могут быть предложены для конкретных моделей с учетом свойств изучаемых процессов.

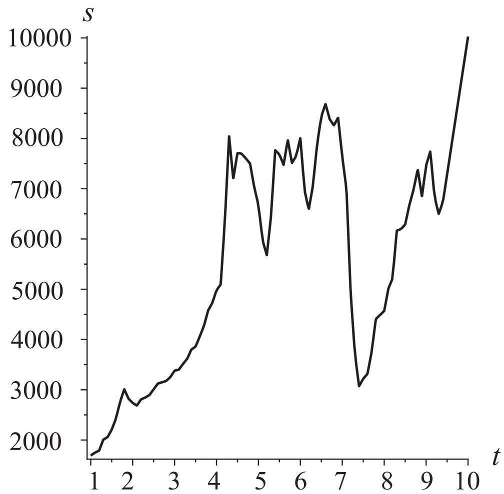


Рис. 1. Функция $s(t)$, аппроксимирующая цены на медь.

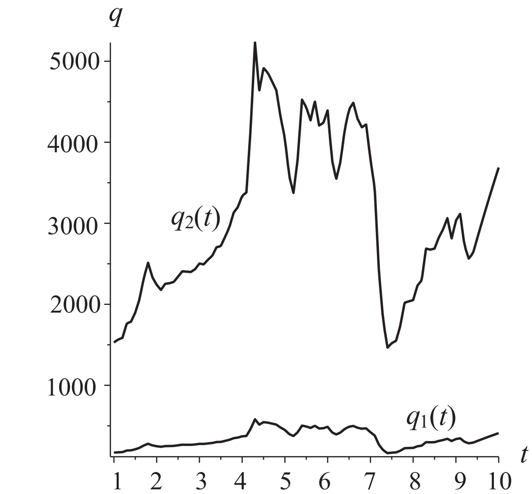


Рис. 2. Функции $q_1(t), q_2(t)$, построенные согласно (3.9).

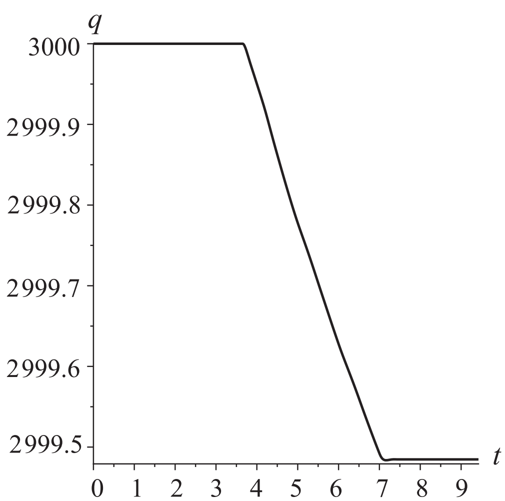


Рис. 3. Решение $q(t)$ уравнения (3.8) при $q(0) = 3000$.

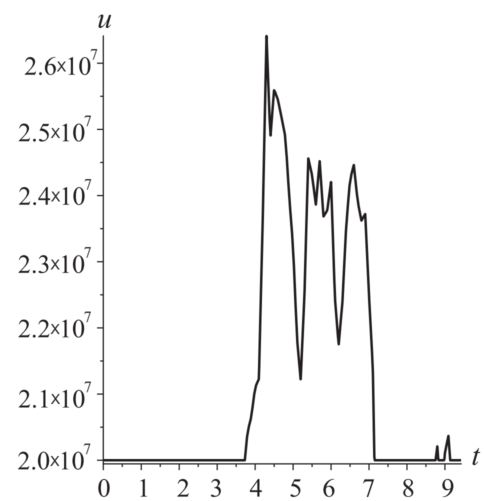


Рис. 4. Функция $u^*(q(t), t)$ при $q(0) = 3000$.

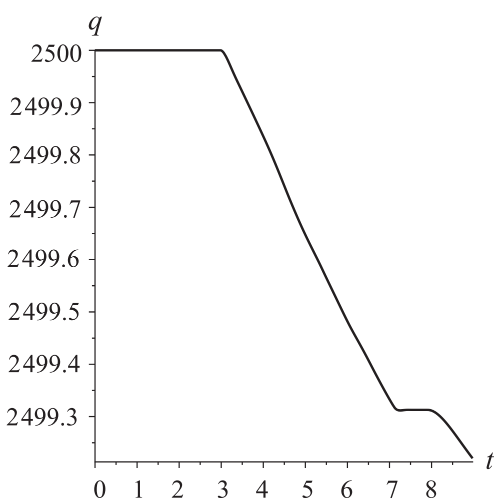


Рис. 5. Решение $q(t)$ уравнения (3.8) при $q(0) = 2500$.

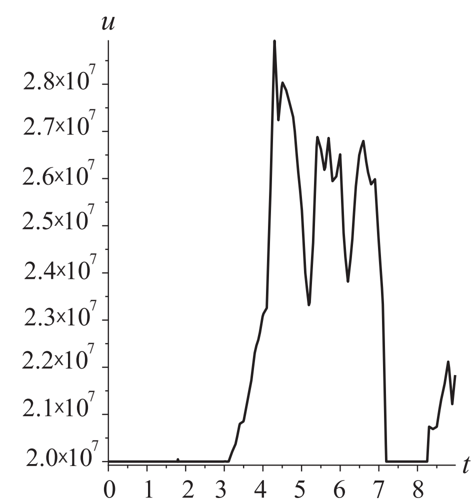


Рис. 6. Функция $u^*(q(t), t)$ при $q(0) = 2500$.

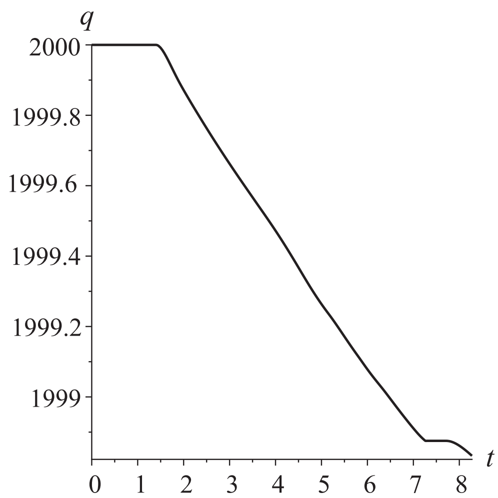


Рис. 7. Решение $q(t)$ уравнения (3.8) при $q(0) = 2000$.

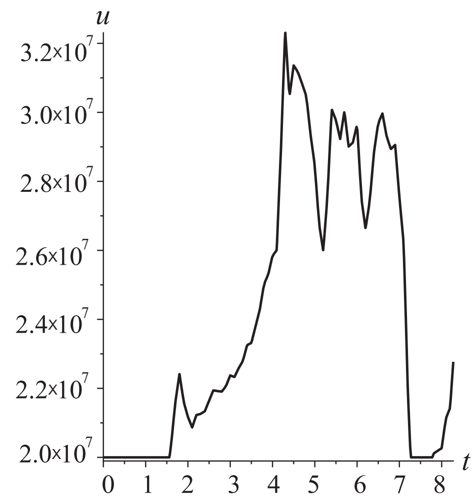


Рис. 8. Функция $u^*(q(t), t)$ при $q(0) = 2000$.

3.6. Вычисление показателя качества для тестовых параметров

В приводимых далее расчетах игрового процесса управления в момент t используется информация о $s(\tau)$, $\tau \in [0, t]$. Информация о будущем значении $s(\xi)$, $\xi > t$ не используется. Параметры процесса: $x_1 = 2 \cdot 10^8$, $P = 2 \cdot 10^7$, $Q = 6 \cdot 10^7$, $m = 1$, $p = 5$, $\nu = 0.1$, $\nu_1 = 0.05$, $\nu_2 = 0.04$, $g_1 = 1$, $g_2 = 1$, $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.8$, $k = 1$. Функция $a(t)$ (3.8) имеет вид $a(t) = 1/P(1/(1+t) + 0.1)$. Кусочно-линейная функция $s(t)$ изображена на рис. 1. Ее значения соответствуют данным биржевых цен на медь за 1999–2010 гг. При $q(0) = 3500$ и управлении (3.6) имеем $T = 9.7$, $J = 584122223565.959$; при $q(0) = 3000$ и управлении (3.6) имеем $T = 9.425$, $J = 586130402409.521$; при $q(0) = 2500$ и управлении (3.6) — $T = 8.975$, $J = 585337026444.973$; при $q(0) = 2000$ и управлении (3.6) — $T = 8.275$, $J = 576693745604.450$. На рис. 2 приведены функции $q_1(t)$, $q_2(t)$ (см. (3.9)), на рис. 3, 5, 7 приведена функция $q(t)$ — решение системы (3.8) при $q(0) = 3000, 2500, 2000$ соответственно; на рис. 4, 6, 8 приведена функция $u^*(q(t), t)$ — (3.6) при $q(0) = 3000, 2500, 2000$ соответственно. Расчеты функционала для функций $s(t)$, соответствующих другим минералам (цинк, олово и др.), показывают, что способ выбора значения $q(0)$ для модели (3.1),(3.2) зависит от ожидаемого вида функции $s(t)$. Для возрастающей функции $s(t)$ значение $q(0)$ целесообразно выбирать больше $s(0)$, для постоянной или убывающей функции $s(t)$ — меньше $s(0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. **Субботин А.И. Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1961. 391 с.
5. Избранные труды Л. С. Понтрягина. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.
6. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
7. Избранные труды Ю. С. Осипова. М.: Изд-во МГУ, 2009. 654 с.
8. **Osipov Yu.S. Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
9. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1973.

10. Избранные труды А. Б. Куржанского. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
11. **Кряжимский А.В. Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
12. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
13. **Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.** Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 264 с.
14. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 424 p.
15. **Максимов В.И.** О восстановлении входов в линейных параболических уравнениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 125–136.
16. **Ушаков В.Н. Успенский А.А. Малев А.Г.** Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 209–225.
17. **Никольский М.С.** О релейности оптимального по быстродействию управления для некоторых двумерных билинейных управляемых объектов // Проблемы динамического управления: сб. науч. тр. фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2010. №. 5. С. 166–180.
18. **Kumkov S.I., Patsko V.S.** Control of informational sets in a pursuit problem // Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. Vol. 3: New trends in dynamic games and applications. Boston: Birkhäuser, 1995. P. 191–206.
19. **Chikrii A.A.** Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Springer Optim. Appl. Vol. 17. New York: Springer, 2008. P. 349–387.
20. О задаче оптимального управления с интегральным функционалом от рациональной функции управления / Н.Л. Григоренко, Д.В. Камзолкин, Л.Н. Лукьянова, Д.Г. Пивоварчук // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 11.С. 1586–1600.
21. **Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В., Лукьянова Л.Н.** Об одном классе моделей динамики экономических показателей производства и планирования инфраструктур // Прикл. математика и информатика: тр. фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2012. № 41. С. 97–104.
22. **Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.** Закон гиперболического тангенса при синтезировании оптимального управления в одной нелинейной модели с дисконтированием // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 1490–1506.
23. **Фрадков А.Л.** Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990. 296 с.
24. **Габасов Р. Кириллова Ф.М.** Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
25. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 820 с.
26. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Поступила 01.04.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977.1

ВНУТРЕННИЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

М. И. Гусев

В работе рассматривается задача об аппроксимации множеств достижимости нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями. Предполагается, что фазовые ограничения заданы в виде множества решений нелинейного неравенства или системы неравенств. Изучается аналог метода штрафных функций, состоящий в замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений посредством сужения множества скоростей исходной системы. Это сужение (правая часть вспомогательной системы) зависит от скалярного коэффициента штрафа. Доказана сходимость аппроксимирующих множеств в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы при стремлении коэффициента штрафа к бесконечности, получена оценка скорости сходимости.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, фазовые ограничения, инвариантность, метод штрафных функций.

M. I. Gusev. Internal approximations of reachable sets of control systems with state constraints.

We consider the approximation problem for reachable sets of a nonlinear control system with state constraints, which are given as the solution set of a nonlinear inequality or a system of inequalities. An analog of the penalty function method is proposed, which consists in replacing the original system with state constraints by an auxiliary system without constraints by means of the restriction of the set of velocities of the original system. This restriction (the right-hand side of the auxiliary system) depends on a scalar penalty coefficient. It is proved that approximating sets converge in the Hausdorff metric to the reachable set of the original system as the penalty coefficient tends to infinity. An estimate of the convergence rate is obtained.

Keywords: control system, reachable set, state constraints, invariance, penalty function method.

1. Введение

В статье предлагается способ приближенного построения множеств достижимости управляемой системы с фазовыми ограничениями. Алгоритмы приближенного построения множеств достижимости систем с фазовыми ограничениями, основанные на дискретных аппроксимациях, аппроксимациях при помощи эллипсоидов и полиэдров, рассматривались во многих работах (см., например, [1–7]). Предлагаемый в данной статье метод можно рассматривать как аналог метода штрафных функций. Он основан на замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений посредством сужения множества скоростей исходной системы. Это сужение (правая часть вспомогательной системы) зависит от скалярного коэффициента штрафа. Доказана сходимость аппроксимирующих множеств в хаусдорфовой метрике к множеству достижимости исходной системы при стремлении коэффициента штрафа к бесконечности, получена оценка скорости сходимости. Это дает возможность применения методов построения внешних оценок множеств достижимости [8] к системам с фазовыми ограничениями.

Метод штрафных функций в экстремальных задачах основан на приближенной замене задачи оптимизации при наличии ограничений последовательностью задач безусловной оптимизации. В методе внешних штрафов к целевой функции исходной задачи добавляется функция штрафа, быстро растущая (если речь о задаче на минимум) вне ограничений. Получающаяся

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019) и интеграционного проекта СО и УРО РАН № 12-П-1-1017.

последовательность решений задач безусловной оптимизации приближается к решению исходной задачи извне ограничений. В методе внутренних штрафных функций к целевой функции добавляется барьерная функция, которая стремится к бесконечности при приближении к границе ограничений изнутри. Получающиеся в этом методе приближенные решения находятся внутри ограничений.

Применительно к задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями метод штрафных функций часто используется для снятия фазовых ограничений при организации численных процедур решения задач и для исследования условий оптимальности.

В данной работе описано применение аналога метода штрафных функций к построению множеств достижимости нелинейных управляемых систем с фазовыми ограничениями. Поскольку определение множества достижимости не связано с решением экстремальной задачи, возникает вопрос об особенности применения метода штрафных функций, позволяющего осуществить снятие фазовых ограничений.

Способ снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости и траекторных трубок для дифференциального включения был предложен в работах [9; 10]. Здесь рассматривалось дифференциальное включение с выпуклым фазовым ограничением

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x(t) \in Y(t), \quad t \in [t_0, \theta]. \tag{1.1}$$

Трубки траекторий последнего аппроксимировались решениями семейства дифференциальных включений без фазовых ограничений

$$\dot{x} \in F_L(t,x) = F(t,x) + L(x - Y(t)), \quad t \in [t_0, \theta],$$

зависящих от матричного параметра L. Для точек (t,x), удовлетворяющих фазовым ограничениям, очевидно $F(t,x) \subset F_L(t,x)$, и интегральная трубка последнего включения шире, чем у системы (1.1).

В [9; 10] было показано, что при выполнении некоторых условий пересечение пучков траекторий семейства по L дает пучок траекторий исходного дифференциального включения, удовлетворяющих фазовым ограничениям. Для множества достижимости в общем случае пересечение по L позволяет получить его верхнюю оценку, т. е. рассмотренная процедура имеет некоторую аналогию с методом внешних штрафных функций.

Метод аппроксимации множеств достижимости, предложенный в работе [11], ближе к методу барьерных функций. Снятие фазовых ограничений осуществляется за счет сужения множества скоростей исходной системы вблизи границы ограничений. Это не позволяет траекториям аппроксимирующей системы пересекать эту границу. При этом множество достижимости аппроксимирующей системы приближает множество достижимости системы с фазовыми ограничениями изнутри. В настоящей статье данный метод обобщается на случай фазовых ограничений, заданных системой неравенств. При этом усилены результаты [11], в частности доказана липшицевость по фазовым координатам правых частей аппроксимирующих систем и получены оценки для скорости сходимости множеств достижимости.

2. Основные определения и постановка задачи

Рассматривается нелинейная управляемая система

$$\dot{x} = f(x,u), \quad t \in [t_0, \theta], \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр. Считаем, что ограничение на управление имеет вид

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, \theta], \tag{2.2}$$

где U — компакт в $\mathbb{R}^r$. В качестве управлений будем рассматривать измеримые функции $u\colon [t_0, \theta] \to U$, множество всех таких функций обозначим через $\mathcal{U}$.

Перечислим некоторые из используемых далее обозначений. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ (x, y) — скалярное произведение, $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ — евклидова норма. Замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$ обозначаем как $B_r(\bar{x})$: $B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - \bar{x}\| \leq r\}$, через $B_r^0(\bar{x})$ обозначаем открытый шар (внутренность $B_r(\bar{x})$). Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символами ∂S, $\operatorname{Int} S$, $\operatorname{co} S$ обозначаются соответственно граница, внутренность и выпуклая оболочка S, $\nabla g(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x. Пусть $h(A, B)$ — хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ — семейство выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Символом $:=$ будем обозначать равенство по определению.

Будем далее считать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Отображение $f(x, u) \colon \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям*

1) *$f(x, u)$ непрерывно и локально липшицево по x равномерно по $u \in U$;*

2) *условие подлинейного роста: существует $C > 0$ такое, что*

$$\|f(x, u)\| \leq C(1 + \|x\|), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U;$$

3) *множество скоростей $F(x) := f(x, U)$ выпукло для каждого x.*

Систему (2.1) можно представить в виде эквивалентного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(t_0) = x^0,$$

где многозначное отображение $F \colon \mathbb{R}^n \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ локально липшицево в метрике Хаусдорфа. Решениями дифференциального включения являются абсолютно непрерывные функции $x \colon [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ для почти всех t.

Фазовые ограничения имеют вид

$$x(t) \in S, \quad t \in [t_0, \theta], \tag{2.3}$$

где S — компакт в $\mathbb{R}^n$, содержащий вектор x^0.

Обозначим через $x(t, u(\cdot), x^0)$ решение системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$. Множеством (областью) достижимости системы (2.1) с фазовым ограничением (2.3) в момент времени θ называется множество

$$G(\theta) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(\cdot) \in \mathcal{U},\ x = x(\theta, u(\cdot), x^0),\ x(t, u(\cdot), x^0)) \in S,\ t \in [t_0, \theta]\bigr\}.$$

Таким образом, $G(\theta)$ — множество всех точек, в которые можно перевести систему (2.1) в момент времени θ из начального состояния x^0 при ограничениях (2.2), (2.3). Для дифференциального включения множество достижимости $G(\theta)$ — сечение множества решений включения в момент времени θ.

Мы в данной работе рассматриваем следующую задачу: построить дифференциальное включение (или эквивалентную управляемую систему)

$$\dot{x} \in F_k(x), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.4}$$

правая часть которого зависит от скалярного параметра $k > 0$ (коэффициента штрафа), такую, что

1) отображение $F_k(x)$ непрерывно или локально липшицево по $x \in S$;

2) $F_k(x) \subset F(x)$, $x \in S$;

3) все решения включения (2.4) с начальным условием $x^0 \in S$ удовлетворяют фазовым ограничениям $x(t) \in S$ на отрезке $[t_0, \theta]$;

4) $G_k(\theta) \to G(\theta)$ в метрике Хаусдорфа при $k \to \infty$, где $G_k(\theta)$ — множество достижимости системы (2.4) без фазовых ограничений.

Таким образом, исходная управляемая система заменяется семейством управляемых систем без фазовых ограничений, зависящих от скалярного параметра k. Множества достижимости данных систем должны аппроксимировать $G(\theta)$ при $k \to \infty$. Будем дифференциальное включение (2.4) (или эквивалентную управляемую систему) называть аппроксимирующим для системы (2.1).

Далее мы рассматриваем в качестве S множество, заданное системой гладких неравенств:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m\}, \tag{2.5}$$

где функции $g_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы. Аппроксимирующую систему для (2.1), (2.5) будем строить следующим образом. Введем новое ограничение на управление в точке $x \in \mathbb{R}^n$, заданное множеством

$$U_k(x) = \{u \in U \colon (\nabla g_i(x), f(x,u)) \le -k g_i(x),\ i = 1, \ldots, m\},$$

где $\nabla g_i(x)$ — градиент функции g_i. Рассмотрим управляемую систему с ограничением на управление, зависящим от фазовых координат,

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U_k(x), \quad t \in [t_0, \theta]. \tag{2.6}$$

Эту систему можно заменить эквивалентным дифференциальным включением (2.4), если положить $F_k(x) = f(x, U_k(x))$. Эквивалентность (2.6) и (2.4) понимается в следующем смысле. Для любой абсолютно непрерывной вектор-функции $x(t)$, являющейся решением дифференциального включения (2.6), существует измеримая вектор-функция $u(t)$ со значениями из U такая, что

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U_k(x(t)),$$

для почти всех $t \in [t_0, \theta]$. Обратно, если пара $x(t), u(t)$ удовлетворяет (2.6), то $x(t)$ есть решение (2.4). Заметим, что для правых частей включений (2.1), (2.4) выполняется условие $F_k(x) \subset F(x)$. Очевидно, $F_k(x)$ можно представить в следующем виде:

$$F_k(x) = \bigl\{f \in F(x) \colon (\nabla g_i(x), f) \le -k g_i(x),\ i = 1, \ldots, m\bigr\},$$

т. е. $F_k(x)$ является пересечением $F(x)$ и системы замкнутых полупространств (при $\nabla g_i(x) \ne 0$). Если $F(x)$ — выпуклый компакт, то $F_k(x)$ — также выпуклый компакт.

3. Вспомогательные результаты

При исследовании свойств функции цены в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями и ее связи с обобщенными решениями уравнений Гамильтона — Якоби используются теоремы о приближении допустимых траекторий (см., например, [12–14]). В данной статье используются близкие по содержанию результаты работ [15; 16], которые устанавливают возможность приближения траекторий системы (2.1), удовлетворяющих фазовым ограничениям, траекториями этой же системы, лежащими строго внутри фазовых ограничений. Эти результаты приведены в данном разделе. Кроме того, мы сформулируем несколько вспомогательных утверждений о свойствах множества S, заданного системой нелинейных неравенств (2.5).

Далее считается выполненным следующее предположение.

Предположение 2 [15]. *Множество S удовлетворяет условиям*

S1. *Множество S компактно и для каждого $x \in \partial S$*

$$N_S^C(x) \cap \{-N_S^C(x)\} = \{0\}.$$

S2. *Условие внутренней точки*

$$\forall\, x \in \partial\, S, \quad \forall\, 0 \ne \zeta \in N_S^C(x) \quad \min_{u \in U} (\zeta, f(x,u)) < 0.$$

Здесь $N_S^C(x)$ обозначает нормальный конус Кларка к множеству S в точке x [17]. Условие S1 эквивалентно требованию $\operatorname{Int} T_S^C(x) \neq \varnothing$, где $T_S^C(x)$ — касательный конус Кларка к множеству S. Условие S2 означает, что для любой граничной точки множества S существует вектор скорости системы (2.1) в этой точке, направленный внутрь S.

Условия S1, S2 обеспечивают слабую инвариантность множества S: для любого начального состояния $x^0 \in S$ существует допустимое управление $u(\cdot)$ такое, что соответствующая траектория $x(t)$ системы удовлетворяет фазовому ограничению $x(t) \in S$, $t \geq t_0$ (см., например, [16]).

Пусть $\hat{S}$ — замыкание дополнения S в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $d(x) = \min_{y \in \hat{S}} \|x - y\|$, $d(x)$ — евклидово расстояние от x до $\hat{S}$. Для $r > 0$ пусть $S_r := \{x \in S \colon d(x) \geq r\}$.

В дальнейшем мы используем следующее утверждение.

Лемма 1 [15, Lemma 2.2]. *Пусть выполнено предположение* 2. *Найдутся положительные числа* r_0, W, *для которых справедливо следующее утверждение. Для любых начального состояния* $x^0 \in \operatorname{Int} S$, *числа* $0 \leq r \leq \min\{r_0, d(x^0)\}$ *и управления* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, *удовлетворяющего ограничению* $x(t, x^0, u(\cdot)) \in S$, $\forall t \in [t_0, \theta]$, *существует управление* $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ *такое, что*

$$\|x(t, x^0, u(\cdot)) - x(t, x^0, \bar{u}(\cdot))\| \leq Wr, \quad x(t, x^0, \bar{u}(\cdot)) \in S_r \quad \forall t \in [t_0, \theta].$$

Другими словами, лемма утверждает, что любую траекторию из S, начинающуюся во внутренней точке S, можно аппроксимировать траекториями, лежащими строго внутри S. При этом точность аппроксимации линейно зависит от расстояния аппроксимирующей траектории до границы S. Заметим, что W не зависит от начального состояния x^0.

Далее мы сформулируем несколько вспомогательных определений и утверждений, относящихся к геометрии множества S, заданного в виде множества решений системы нелинейных неравенств (2.5).

О п р е д е л е н и е. Векторы $a^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$, называются положительно линейно независимыми, если для любых $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, из равенства $\sum_{i=1}^m \alpha_i a^i = 0$ следует, что $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Линейно независимые векторы являются, очевидно, положительно линейно независимыми. Обозначим через $\operatorname{co}\{a^1, \ldots, a^m\}$ выпуклую оболочку множества из m векторов a^i:

$$\operatorname{co}\{a^1, \ldots, a^m\} = \Big\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a^i \colon \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \Big\}.$$

Справедливо следующее очевидное утверждение.

Утверждение 1. *Векторы* $a^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$, *положительно линейно независимы тогда и только тогда, когда* $0 \notin \operatorname{co}\{a^1, \ldots, a^m\}$.

Для $x \in S$ обозначим $I(x) = \{i \colon g_i(x) = 0\}$; $I(x)$ — множество номеров активных в точке x ограничений. Далее будем считать выполненным следующее условие.

Предположение 3. *В тех точках* $x \in S$, *где* $I(x) \neq \varnothing$, *градиенты* $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, *положительно линейно независимы.*

Если S рассматривать как допустимое множество в задаче нелинейного программирования, то предположение 3 представляет собой одно из известных условий регулярности ограничений. Мы требуем выполнение данного условия всех точках границы S.

Утверждение 2. *Пусть выполнено предположение* 3. *Тогда*

a) *в тех точках $x \in S$, где $I(x) \neq \varnothing$, нормальный конус $N_S^C(x)$ представим в виде*

$$N_S^C(x) = \Big\{ \sum_{i \in I(x)} \alpha_i \nabla g_i(x) \colon \alpha_i \geq 0 \Big\},$$

и выполняется условие S1*;*

b) $\partial S = \{x \in S \colon I(x) \neq \varnothing\}$, $\operatorname{Int} S = \{x \in S \colon g_i(x) < 0,\ i = 1, \ldots, m\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть утверждения a) вытекает из [17, следствие 2, с. 59]. Докажем равенство b). Пусть $x \in S$ и $I(x) = \varnothing$. Следовательно, $g_i(x) < 0$, $i = 1, \ldots, m$, и из непрерывности функций g_i получаем, что $x \in \operatorname{Int} S$. Пусть $I(x) \neq \varnothing$, тогда $\nabla g_i(x)$ для $i \in I(x)$ положительно линейно независимы. Это эквивалентно условию $0 \notin \operatorname{co}\{\nabla g_i(x) \colon i \in I(x)\}$. Применяя теорему о строгой отделимости нулевого вектора от не содержащего его выпуклого компакта $\operatorname{co}\{\nabla g_i(x) \colon i \in I(x)\}$, убеждаемся, что существует вектор $h \neq 0$ такой, что $(\nabla g_i(x), h) < 0$, $i \in I(x)$. Следовательно, при достаточно малых $\tau > 0$ будем иметь $g_i(x + \tau h) < 0$, $g_i(x - \tau h) > 0$, $i \in I(x)$. Поэтому, в любой окрестности x найдутся отличные от x точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие S. Это означает, что $x \in \partial S$.

Докажем выполнение условия $S1$. Рассмотрим $x \in \partial S$. Предположим, что $0 \neq b \in N_S^C(x) \cap \{-N_S^C(x)\}$. С учетом доказанного

$$b = \sum_{i \in I(x)} \alpha_i \nabla g_i(x) = -\sum_{i \in I(x)} \beta_i \nabla g_i(x), \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0,$$

откуда получаем

$$\sum_{i \in I(x)} (\alpha_i + \beta_i) \nabla g_i(x) = 0.$$

Из положительной линейной независимости градиентов $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, получим, что $\alpha_i = \beta_i = 0$, в противоречие с условием $b \neq 0$. Это завершает доказательство утверждения. □

Предположения 2, 3 с учетом доказанного выше можно заменить следующим.

Предположение 4. *В точках $x \in S$, в которых $I(x) \neq \varnothing$, градиенты $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, положительно линейно независимы и*

$$\min_{u \in U} (\zeta, f(x, u)) < 0, \quad \forall \zeta \in \operatorname{co}\{\nabla g_i(x),\ i \in I(x)\}.$$

4. Оценки для функции расстояния $d(x)$

Рассмотрим вначале случай гладкой границы S.

Лемма 2. *Пусть $m = 1$ и выполнено предположение* 3*, которое в данном случае эквивалентно требованию, чтобы градиент функции $g_1(x)$ не обращался в нуль в точках $x \in S$, в которых $g_1(x) = 0$. Существует константа $L > 0$ такая, что*

$$d(x) \leq -L g_1(x) \quad \forall x \in S. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении предположения 3 $\hat{S} = \{z \colon g_1(z) \geq 0\}$. Пусть $d(x) > 0$. Существует точка $y \in \hat{S}$ такая, что $\|x - y\| = d(x)$. Очевидно, $y \in \partial S$, т. е. $g_1(y) = 0$. Применяя к экстремальной задаче

$$\|x - y\|^2 = \min_{g_1(z) \geq 0} \|x - z\|^2$$

правило множителей Лагранжа, имеем $y - x = \lambda \nabla g_1(y)$, где $\lambda > 0$. Отсюда получим

$$d(x) = \|x - y\| = \lambda \|\nabla g_1(y)\|, \quad \lambda = \frac{d(x)}{\|\nabla g_1(y)\|}.$$

На компактном множестве ∂S норма градиента g_1 ограничена снизу и сверху положительными константами

$$0 < a \leq \|\nabla g_1(y)\| \leq A.$$

Применяя формулу Тейлора, имеем

$$g_1(x) = g_1(y) - d(x)\left(\frac{\nabla g_1(y)}{\|\nabla g_1(y)\|}, \nabla g_1(y)\right) + r(x) = -d(x)\|\nabla g_1(y)\| + r(x),$$

где

$$r(x) = \big(x - y, \nabla g_1(x + \zeta(y - x)) - \nabla g_1(y)\big), \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Из последней формулы нетрудно вывести оценку $|r(x)| \leq \alpha(d(x))d(x)$, где $\alpha(z) \to 0$ при $z \to 0$, и эта оценка не зависит от того, на каком y достигается соответствующий минимум.

Для заданного $a > 0$ подберем $\delta > 0$ так, чтобы $|\alpha(d(x))| < a/2$ для любого $x \in S$ при $d(x) < \delta$. Для таких точек будем иметь неравенство

$$-g_1(x) \geq ad(x) - \alpha(d(x))d(x) \geq \frac{ad(x)}{2},$$

откуда получим неравенство (4.1), если возьмем $L = L_1 := 2/a$. Множество точек

$$S_\delta := \{x \in S \colon d(x) \geq \delta\}$$

компактно и $\min_{x \in S_\delta} d(x) \geq \delta$. Неравенство (4.1) выполняется для точек этого множества, если взять, например, $L = L_2 := \max_{x \in S_\delta}(-g_1(x)/\delta)$. Выбирая $L = \max\{L_1, L_2\}$, получим (4.1). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Пусть S — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, заданное системой неравенств $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, функции $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, выпуклы и удовлетворяют условию Слейтера:*

$$\min_x g(x) < 0, \quad g(x) := \max_{i=1,\ldots,m} g_i(x).$$

Тогда существует константа $L > 0$ такая, что

$$d(x) \leq -Lg(x) \quad \forall x \in S.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{x}$ — точка минимума $g(x)$, обозначим $\bar{g} = -g(\bar{x})$. Возьмем произвольную точку $x \in S$ такую, что $-g(x) < \bar{g}/2$. Соединим $\bar{x}$ отрезком с x и продолжим его за точку x до пересечения с границей S. Точки отрезка, соединяющего $\bar{x}$ и x, имеют вид $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda(x - \bar{x})$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Из выпуклости $g(x)$ следует, что

$$g(x(\lambda)) \geq (1 - \lambda)g(\bar{x}) + \lambda g(x) \geq g(\bar{x}) + \lambda(g(x) - g(\bar{x})),$$

при $0 \leq \lambda \leq 1$. Так как $g(x) - g(\bar{x}) > -\bar{g}/2 + \bar{g} > 0$, то функция $g(x(\lambda))$ возрастает и обращается в нуль при $\tilde{x} = x(\tilde{\lambda})$, где

$$1 < \tilde{\lambda} \leq \frac{-g(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})}.$$

Поскольку $\tilde{x} = \bar{x} + \tilde{\lambda}(x - \bar{x})$, то

$$\|\tilde{x} - x\| = (\tilde{\lambda} - 1)\|\bar{x} - x\| \leq \frac{-g(x)}{g(x) - g(\bar{x})}\|\bar{x} - x\| \leq \frac{2}{\bar{g}}(-g(x))\|\bar{x} - x\| \leq \|\bar{x} - x\|.$$

Если $g(\tilde{x}) = 0$, то $\tilde{x} \in \hat{S}$, следовательно, $d(x) \le \|\tilde{x} - x\|$. Положим

$$L_1 = \frac{2}{\bar{g}} \max_{x,y \in S} \|x - y\|,$$

получим $d(x) \le -L_1 g(x)$. Пусть $x \in S_1 := \{x \in S\colon\ -g(x) \ge \bar{g}/2\}$. Множество S_1 компактно. Следовательно, существует $\sigma > 0$ такое, что $\|x - y\| \le \sigma$, $\forall x \in S_1$, $y \in \partial S$. Для завершения доказательства леммы достаточно положить $L = \max\{L_1, L_2\}$, где $L_2 = 2\sigma/\bar{g}$. □

Приведем еще одно утверждение, относящееся к условию S2 предположения 2. Если множество S задано системой гладких неравенств и выполнено предположение 3, то это условие в точке $x \in \partial S$ принимает следующий вид:

$$\min_{u \in U} (\zeta, f(x,u)) < 0, \quad \forall\, \zeta = \sum_{i \in I(x)} \alpha_i \nabla g_i(x) \ne 0, \quad \alpha_i \ge 0.$$

Если обозначить $F(x) = f(x, U)$, то данное неравенство можно заменить следующим:

$$\max_{\zeta \in C(x)} \min_{f \in F(x)} (\zeta, f) < 0, \tag{4.2}$$

где $C(x) := \mathrm{co}\{\nabla g_i(x), i \in I(x)\}$.

Лемма 4. *Пусть $F(x)$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Для того чтобы выполнялось неравенство* (4.2)*, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $\bar{f} \in F(x)$ такой, что выполняются неравенства*

$$(\nabla g_i(x), \bar{f}) < 0, \quad i \in I(x). \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (4.3). Возьмем $\zeta = \sum_{i \in I(x)} \alpha_i \nabla g_i(x) \in C(x)$. Умножая каждое из неравенств (4.3) на $\alpha_i \ge 0$ и складывая, получим $(\zeta, \bar{f}) < 0$ для любого $\zeta \in C(x)$, откуда следует (4.2). Для доказательства необходимости заметим, что по теореме о седловой точке билинейной функции (ζ, f) имеем

$$\max_{\zeta \in C(x)} \min_{f \in F(x)} (\zeta, f) = \min_{f \in F(x)} \max_{\zeta \in C(x)} (\zeta, f).$$

Поэтому $\min_{f \in F(x)} \max_{\zeta \in C(x)} (\zeta, f) < 0$. Выбирая в качестве $\bar{f}$ вектор, на котором достигается минимум, из последнего неравенства получаем (4.3). □

5. Липшицевость некоторых классов многозначных отображений

Напомним, что $B_\delta(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - \bar{x}\| \le \delta\}$. Пусть $a(x)\colon B_\delta(\bar{x}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha(x)\colon B_\delta(\bar{x}) \to \mathbb{R}$ — заданные отображения. Для $F \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\hat{F}(x) = \{f \in F\colon (a(x), f) \le \alpha(x)\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — подмножество выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ такое, что $(\exists K > 0)$ $(\forall F \in \mathcal{F})$ $\max_{y \in F} \|y\| \le K$ (т. е. $\mathcal{F}$ ограничено в метрике Хаусдорфа).

Лемма 5. *Пусть $a(x)$, $\alpha(x)$ удовлетворяют условию Липшица на $B_\delta(\bar{x})$ и существует $\sigma > 0$ такое, что для любого $F \in \mathcal{F}$ найдется $\bar{f} \in F$, для которого выполнено неравенство*

$$(a(\bar{x}), \bar{f}) \le \alpha(\bar{x}) - 2\sigma. \tag{5.1}$$

Тогда существует $\delta_0 < \delta$ такое, что многозначные отображения $\hat{F}(x)$ удовлетворяют условию Липшица на $B_{\delta_0}(\bar{x})$, при этом константа Липшица может быть выбрана одной и той же для всех $\hat{F}(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\hat{F}(x)$ — выпуклый компакт. Из липшицевости $a(x)$, $\alpha(x)$ следует, что существует δ_0 такое, что

$$(\forall F \in \mathcal{F})\ (\exists \bar{f} \in F)\ (a(x), \bar{f}) \le \alpha(x) - \sigma \tag{5.2}$$

для всех $x \in B_{\delta_0}(\bar{x})$. Из последнего неравенства получаем, что $\hat{F}(x) \ne \varnothing\ \forall x \in B_\delta(\bar{x})$.

Возьмем $F \in \mathcal{F}$, выберем x, $x' \in B_{\delta_0}(\bar{x})$ и оценим хаусдорфово расстояние между $\hat{F}(x)$ и $\hat{F}(x')$. Очевидно, $\bar{f} \in \hat{F}(x) \cap \hat{F}(x')$, где $\bar{f} \in F$ — вектор из условия (5.1). Пусть $f \in \hat{F}(x)$, $f \notin \hat{F}(x')$, т. е. $f \in F$, $(a(x), f) \le \alpha(x)$, $(a(x'), f) > \alpha(x')$. Справедливо неравенство

$$(a(x'), f) - (a(x), f) \le K\|a(x) - a(x')\| \le K\gamma\|x - x'\|,$$

где γ — константа Липшица для $a(x)$. Отсюда имеем

$$(a(x'), f) \le \alpha(x') + (K\gamma + \gamma_1)\|x - x'\|,$$

где γ_1 — константа Липшица для $\alpha(x)$. Таким образом,

$$0 < (a(x'), f) - \alpha(x') \le K_1\|x - x'\|,$$

где $K_1 = K\gamma + \gamma_1$. Заметим, что $\bar{f}$ и f лежат по разные стороны гиперплоскости $\{y\colon (a(x'), y) = \alpha(x')\}$. Соединяя эти точки отрезком прямой, найдем точку пересечения $f(\lambda)$ отрезка с данной гиперплоскостью. Здесь $f(\lambda) = \lambda\bar{f} + (1 - \lambda)f$,

$$\lambda = \frac{(a(x'), f) - \alpha(x')}{(a(x'), f) - (a(x'), \bar{f})}.$$

Принимая во внимание неравенства (5.2) и (5.2), получим, что $0 \le \lambda \le K_2\sigma^{-1}\|x - x'\|$, $\lambda < 1$. Так как F выпукло, то $f(\lambda) \in F$, кроме того, $(a(x'), f(\lambda)) = \alpha(x')$, и, значит, $f(\lambda) \in \hat{F}(x')$. Далее имеем

$$\|f - f(\lambda)\| = \lambda\|\bar{f} - f\| \le C\|x - x'\|,$$

где

$$C = K_2\sigma^{-1} \max_{f,g \in F} \|f - g\| \le 2KK_2\sigma^{-1}.$$

Следовательно, для каждого $f \in \hat{F}(x)$ найдется $f' \in \hat{F}(x')$ такой, что $\|f - f'\| \le C\|x - x'\|$. Поскольку в приведенном выше рассуждении точки x и x' равноправны, то $h(\hat{F}(x), \hat{F}(x')) \le C\|x - x'\|$. Константа C при этом не зависит от конкретного $F \in \mathcal{F}$. Лемма доказана. □

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $a \ne 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множество $A \in \mathbb{R}^{(n+1)}$, элементами которого служат пары (a, α): $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Предположим, что A компактно и $\min_{(a,\alpha)\in A} \|a\| > 0$. Для $F, F_1 \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $\hat{F} = \{f \in F\colon (a, f) \le \alpha\}$, $\hat{F}_1 = \{f \in F_1\colon (a, f) \le \alpha\}$.

Лемма 6. *Пусть существует $\sigma > 0$ такое, что для любого $F \in \mathcal{F}$ найдется $\bar{f} \in F$, для которого выполнено неравенство*

$$(a, \bar{f}) \le \alpha - \sigma$$

для всех $(a, \alpha) \in A$. Тогда существуют $\delta > 0$ и $L > 0$ такие, что для любых $F, F_1 \in \mathcal{F}$, для которых $h(F, F_1) \le \delta$, справедливо неравенство

$$h(\hat{F}, \hat{F}_1) \le Lh(F, F_1).$$

При этом константу L можно выбрать не зависящей от $(a, \alpha) \in A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $F, F_1 \in \mathcal{F}$ и обозначим $h = h(F, F_1)$. Возьмем произвольный вектор $f \in \hat{F}_1$. Предположим, что $f \notin \hat{F}$. Найдем в F ближайшую к f точку, которую обозначим через $\tilde{f}$. Очевидно, $\|f - \tilde{f}\| \leq h$. Допустим, что $\tilde{f} \notin \hat{F}$; это означает выполнение неравенства $(a, \tilde{f}) > \alpha$. Обозначим $\beta = \alpha - (a, \tilde{f})$. Так как $(a, f) \leq \alpha$, то $0 < \beta \leq \|a\|\|f - \tilde{f}\| \leq \|a\|h$. Соединим точки $\bar{f}$ и $\tilde{f}$ из выпуклого множества F отрезком прямой $f(\lambda) = \lambda \bar{f} + (1 - \lambda)\tilde{f}$ и выберем λ из условия $(a, f(\lambda)) = \alpha$. Получим

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta - (a, \bar{f})},$$

откуда следует, что $0 < \lambda \leq \beta/(\beta + \sigma) < \beta/\sigma$ и, значит,

$$\|\tilde{f} - f(\lambda)\| \leq \frac{K_1 \beta}{\sigma},$$

где $K_1 = \max_{f,g \in F} \|f - g\| \leq 2\,K$. Таким образом, для любого $f \in \hat{F}_1$ существует $g \in \hat{F}$ такой, что

$$\|f - g\| \leq \Big(\frac{K_1 \|a\|}{\sigma} + 1\Big) h.$$

Выберем $\delta \leq \sigma/2\,\|a\|$. При $h(F, F_1) \leq \delta$ найдется $\hat{f} \in F_1$, для которого $\|\bar{f} - \hat{f}\| \leq \delta$ и, следовательно,

$$(a, \hat{f}) > \alpha - \frac{\sigma}{2}.$$

Таким образом, для F_1 также выполнено условие леммы, и в приведенных выше рассуждениях мы можем поменять местами F и F_1, заменив σ на $\sigma/2$ и K_1 на $K_1 + 2\,\delta$. Константа Липшица в приведенных рассуждениях оценивается сверху величиной, зависящей только от K, $\|a\|$, σ для всех F, F_1 и $(a, \alpha) \in A$. В оценку для δ входит $\|a\|$ в знаменателе дроби. Условия на $\mathcal{F}, A$ позволяют выбрать L, δ не зависящими от параметров. Лемма доказана. $\square$

Пусть $F(x)$ — многозначное отображение шара $B_\delta(\bar{x})$ в $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $a(x)\colon B_\delta(\bar{x}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha(x)\colon B_\delta(\bar{x}) \to \mathbb{R}$ — заданные отображения. Определим многозначное отображение $\hat{F}(x)\colon B_\delta(\bar{x}) \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\hat{F}(x) = \{f \in F(x)\colon (a(x), f) \leq \alpha(x)\}.$$

Лемма 7. *Пусть $F(x)$, $a(x)$, $\alpha(x)$ удовлетворяют условию Липшица на шаре $B_\delta(\bar{x})$ и существует вектор $\bar{f} \in F(\bar{x})$ такой, что*

$$(a(\bar{x}), \bar{f}) < \alpha(\bar{x}).$$

Тогда существует $\delta_0 < \delta$ такое, что многозначное отображение $\hat{F}(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $B_{\delta_0}(\bar{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\sigma_1 = \alpha(\bar{x}) - (a(\bar{x}), \bar{f}) > 0$. Пусть L, γ, γ_1 — константы Липшица для отображений $F(x), a(x), \alpha(x)$ в $B_\delta(\bar{x})$. Пусть K таково, что $\|f\| \leq K$, $\forall f \in F(x)$, $x \in B_\delta(\bar{x})$. Поскольку $h(F(x), F(\bar{x})) \leq L\|x - \bar{x}\|$, то $\forall x \in B_\delta(\bar{x})\ \exists \bar{f}_x \in F(x)$ такой, что $\|\bar{f} - \bar{f}_x\| \leq L\|x - \bar{x}\|$. Для x, $x' \in B_\delta(\bar{x})$ имеем

$$\alpha(x') - (a(x'), \bar{f}_x) \geq \alpha(\bar{x}) - (a(\bar{x}), \bar{f}) - (\gamma_1 + K\gamma)\|\bar{x} - x'\| - L\|x - \bar{x}\|(\|a(\bar{x})\| + \gamma\|x - \bar{x}\|).$$

Выберем $\delta_1 < \delta$ так, чтобы

$$(\gamma_1 + K\gamma)\delta_1 + L\delta_1(\|a(\bar{x})\| + \gamma\delta_1) < \frac{\sigma_1}{2},$$

обозначив $\sigma = \sigma_1/2$, получим, что в шаре $B_{\delta_1}(\bar{x})$ выполнено условие

$$(\forall x, x' \in B_{\delta_1}(\bar{x}))\ (\exists \bar{f}_x \in F(x))\ (a(x'), \bar{f}_x) \leq \alpha(x') - \sigma.$$

Для доказательства леммы оценим хаусдорфово расстояние между $\hat{F}(x)$ и $\hat{F}(x')$ для x, $x' \in B_{\delta_0}(\bar{x})$, где δ_0 мы определим далее. Положим

$$\bar{F} = \{f \in F(x) \colon (a(x'), f) \le \alpha(x')\}.$$

Оценим расстояния $h(\bar{F}, \hat{F}(x))$ и $h(\bar{F}, \hat{F}(x')$. Обозначим $\mathcal{F} = \{F(x) \colon x \in B_{\delta_1}(\bar{x})\}$, тогда $\|f\| \le K$ для любых $f \in F(x)$, $x \in B_{\delta_1}(\bar{x})$. По лемме 5 найдутся $\delta_0 < \delta_1$, $L_1 > 0$ такие, что $h(\bar{F}, \hat{F}(x)) \le L_1\|x - x'\|$ для любых x, $x' \in B_{\delta_0}(\bar{x})$.

Для оценки $h(\bar{F}, \hat{F}(x'))$ воспользуемся леммой 6. Выберем в качестве A множество

$$A = \{(a(x), \alpha(x)) : x \in B_{\delta_0}(\bar{x})\},$$

множество A, очевидно, компактно, и $\min\{\|a\| \colon (a, \alpha) \in A\} > 0$. По лемме 6 найдутся $\delta_2 > 0$, $L_2 > 0$ такие, что

$$h(\bar{F}, \hat{F}(x')) \le L_2 h(F(x), F(x'))$$

при $h(F(x), F(x')) \le \delta_2$ при любой паре $(a, \alpha) \in A$. Выберем δ_0 настолько малым, чтобы

$$h(F(x), F(x')) \le L\|x - x'\| \le \delta_2$$

при x, $x' \in B_{\delta_2}(\bar{x})$. Тогда $h(\bar{F}, \hat{F}(x')) \le LL_2\|x - x'\|$. В итоге получим для любых x, $x' \in B_{\delta_0}(\bar{x})$

$$h(\hat{F}(x), \hat{F}(x')) \le (LL_2 + L_1)\|x - x'\|,$$

что завершает доказательство леммы. □

З а м е ч а н и е 1. В формулировках приведенных выше лемм можно заменить шар $B_\delta(\bar{x})$ ($B_{\delta_0}(\bar{x})$) на пересечение шара с множеством S, содержащим $\bar{x}$.

6. Основные результаты

Начнем со случая фазовых ограничений, имеющих гладкую границу. Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \le 0\}$, где $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Теорема 1. *Пусть $f(x, u)$ удовлетворяет предположению 1, фазовые ограничения удовлетворяют условиям леммы 2, и пусть $\nabla g(x)$ является локально липшицевым отображением в некоторой окрестности границы $\partial S = \{x \colon g(x) = 0\}$. Пусть выполнено условие S2, которое в данном случае принимает вид*

$$\min_{u \in U}(\nabla g(x), f(x, u)) < 0 \quad \forall\, x \in \partial S.$$

Тогда существует $k_0 > 0$ такое, что при $k \ge k_0$ многозначное отображение $x \to F_k(x)$ липшицево на S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\sigma(x) = -\frac{1}{2}\min_{u \in U}(\nabla g(x), f(x, u)).$$

Из непрерывности $\nabla g(x)$ и $f(x, u)$ по x следует, что для каждого $x \in \partial S$ существует $r(x) > 0$ такое, что

$$\min_{u \in U}(\nabla g(y), f(y, u)) < -\sigma(x)$$

для всех $y \in S$, $\|x - y\| < r(x)$. Шары $B^0_{r(x)}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|x - y\| < r(x)\}$ образуют открытое покрытие ∂S. В силу компактности ∂S можно выделить конечный набор шаров $B^0_{r(x^i)}(x^i)$,

$i = 1, \dots, q$, объединение которых содержит ∂S. Положив $\sigma = \min_{i=1,\dots,q} \sigma(x^i)$, получим что для всех $y \in B^0 = \bigcup_{i=1}^q B^0_{r(x^i)}(x^i)$ выполняется неравенство

$$\min_{u\in U}(\nabla g(y), f(y,u)) < -\sigma < 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$S(\varepsilon) = \{x \in S\colon -\varepsilon \le g(x) \le 0\},$$

$S(\varepsilon)$ — компактное подмножество S. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$, при котором $S(\varepsilon) \subset B^0$. Допустив что это не так, построим последовательности $\varepsilon_j \to 0$, $x^j \in S(\varepsilon_j)$, $x^j \notin B^0$. Так как S компактно, можно считать, что $x^j \to \bar{x} \in S$. Очевидно, $\bar{x} \in \partial S$ и, следовательно, $\bar{x} \in B^0$. Так как B^0 открыто, все x^j, начиная с некоторого j_0, принадлежат B^0 в противоречие с допущением.

Зафиксируем выбранное ε. Рассмотрим компактное множество $\bar{S}(\varepsilon) = \{x \in S\colon g(x) \le -\varepsilon\}$. Выберем k_0 так, чтобы

$$k_0\varepsilon \ge \max_{x\in S}\max_{u\in U}(\nabla g(x), f(x,u)).$$

Фиксируем $k \ge k_0$, при $x \in \bar{S}(\varepsilon)$, очевидно, имеем

$$-kg(x) \ge (\nabla g(x), f(x,u)) \quad \forall u \in U,$$

следовательно, $F_k(x) = F(x) = f(x,U)$. Таким образом, $F_k(x)$ локально липшицево на $\bar{S}(\varepsilon)$. Пусть $x \in S \setminus \bar{S}(\varepsilon)$, тогда $-\varepsilon < g(x) \le 0$ и, значит, $x \in B^0$, отсюда,

$$\min_{u\in U}(\nabla g(x), f(x,u)) < -kg(x) - \sigma.$$

В точке x выполняется условие леммы 7, если положить $a(x) = \nabla g(x)$, $\alpha(x) = -kg(x)$. Следовательно, $F_k(x) = F(x) \cap \{f\colon (a(x), f) \le \alpha\}$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x. Так как S по предположению — компакт, из выполнения условия Липшица для многозначного отображения $F_k(x)$ в окрестности каждой точки $x \in S$ следует его липшицевость на S. Теорема доказана. □

Рассмотрим множество S, заданное системой неравенств:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n\colon g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}.$$

Функции $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы. Будем считать, что выполнено предположение 1. Тогда $\partial S = \{x \in S\colon I(x) \ne \varnothing\}$, $\operatorname{Int} S = \{x \in S\colon g_i(x) < 0,\ i = 1, \dots, m\}$. Введем следующие обозначения: $I = \{1, \dots, n\}$, $J(x) = I \setminus I(x)$. Для $M \subset I$ обозначим

$$F_k^M(x) = \{f \in f(x,U)\colon (\nabla g_i(x), f) \le -kg_i(x),\ i \in M\}.$$

Теорема 2. *Пусть $f(x,u)$ удовлетворяет предположению 1, фазовые ограничения удовлетворяют условию леммы 2, и пусть $\nabla g_i(x)$, $i \in I$, являются локально липшицевыми отображениями в некоторой окрестности границы S. Пусть выполнено условие S2, которое в данном случае имеет вид*

$$\min_{u\in U}(\zeta, f(x,u)) < 0 \quad \forall 0 \ne \zeta = \sum_{i\in I(x)} \alpha_i \nabla g_i(x), \quad \alpha_i \ge 0.$$

Тогда существует $k_0 > 0$ такое, что при $k \ge k_0$ многозначное отображение $x \to F_k(x)$ липшицево на S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 4 условие S2 принимает вид

$$(\forall x \in \partial S,\ i \in I(x))\ (\exists \bar{u} \in U)\ (\nabla g_i(x), f(x,u)) < 0.$$

Фиксируем точку $x \in \partial S$. Найдутся $r_0(x) > 0, \varepsilon(x) > 0$ такие, что $g_i(y) \leq -\varepsilon(x)$, $\forall i \in J(x)$, $\|y - x\| < r_0(x)$. Выберем $k(x)$ так, чтобы

$$k(x)\varepsilon(x) \geq (\nabla g_i(y), f(y,u)) \quad \forall u \in U, \quad y \in S, \quad \|y - x\| < r_0(x).$$

Тогда при $y \in B^0_{r_0(x)}(x) \cap S$ и $k \geq k(x)$ имеем

$$F_k(y) = \{f \in F(y) \colon (\nabla g_i(y), f) \leq -k g_i(y),\ i \in I(x)\}.$$

Фиксируем $k \geq k(x)$. Докажем липшицевость $F_k(y)$ в некоторой окрестности x. Упорядочим числа $i \in I(x)$ по возрастанию: $I(x) = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$, $N = |I|$. Для $i = i_1$ выполнено условие $(\nabla g_i(x), \bar{f}) < 0$, где $\bar{f} = f(x, \bar{u})$. Из доказательства теоремы 1 следует, что $F_k^{i_1}(y)$ липшицево на $B^0_{r_1(x)}(x) \cap S$ при некотором $r_1(x) < r(x)$. Далее рассмотрим в качестве $F(y)$ отображение $F_k^{i_1}(y)$. Поскольку $(\nabla g_{i_2}(x), \bar{f}) < 0$ и $\bar{f} \in F_k^{i_1}(x)$, то $F^{\{i_1,i_2\}}$ липшицево на множестве $B^0_{r_2(x)}(x) \cap S$ при некотором $r_2(x) < r_1(x)$. Повторяя данное рассуждение $N-1$ раз, получим, что отображение $F_k(y)$ липшицево на множестве $B^0_{r(x)}(x) \cap S$, где $r(x) > 0$.

Итак, мы доказали, что для каждого $x \in \partial S$ существуют $r(x)$, $k(x)$ такие, что при $k \geq k(x)$ отображение $F_k(y)$ липшицево на множестве $B^0_{r(x)}(x) \cap S$. Шары $B^0_{r(x)}(x)$ образуют открытое покрытие ∂S. Пользуясь компактностью ∂S, можно выбрать конечное число $B^0_{r(x^i)}(x^i)$, $x^i \in \partial S$, $i = 1, \ldots, q$ так, чтобы $\partial S \subset B^0 = \bigcup_{i=1}^q B^0_{r(x^i)}(x^i)$. Выберем $k \geq k(x^i)$, $i = 1, \ldots, q$, многозначное отображение $F_k(x)$ липшицево на множестве $B^0 \cap S$. Обозначим

$$-\nu = \max_{x \in S \setminus B^0} g(x)$$

(здесь максимум достигается, так как $S \setminus B^0$ компактно). Очевидно, что $\nu > 0$. На множестве $S \setminus B^0$ $-g_i(x) \geq \nu$ для всех $i = 1, \ldots, m$. При выборе достаточно большого k (см. доказательство теоремы 1) будем иметь $F_k(x) = F(x)$ при $x \in S \setminus B^0$, т.е. $F_k(x)$ липшицево на S. Теорема доказана. □

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 4. *Существует* $k_0 > 0$ *такое, что* $U_k(x) \neq \varnothing$ $(F_k(x) \neq \varnothing)$ $\forall x \in S$, *и при любом начальном векторе* $x^0 \in S$ *имеют место включения* $G_k(\theta) \subset G(\theta)$ *при* $k \geq k_0$, $G_{k_1}(\theta) \subset G_{k_2}(\theta)$ *при* $k_0 \leq k_1 \leq k_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится по схеме работы [11] с небольшими изменениями. В малой окрестности границы S непустота $U_k(x)$ $(F_k(x))$ с учетом леммы 4 обеспечивается неравенством (4.3). Вне этой окрестности при достаточно большом k $F_k(x) = F(x)$ (см. доказательство теоремы 3). Включение $G_{k_1}(\theta) \subset G_{k_2}(\theta)$ при $k_0 \leq k_1 \leq k_2$ является очевидным следствием включения $F_{k_1}(x) \subset F_{k_2}(x)$. Если $x \in G_k(\theta)$, $k > 0$, то существует траектория $x(t)$ дифференциального включения (2.4) такая, что $x(\theta) = x$. Дифференцируя $g_i(x)$ вдоль траектории, получим

$$\frac{d}{dt} g_i(x(t)) \leq -k g_i(x(t)) \quad \text{п.в.} \quad t \in [t_0, \theta], \quad i = 1, \ldots, m.$$

Из теорем сравнения для дифференциальных неравенств [18] получаем

$$g_i(x(t)) \leq g_i(x^0) e^{-k(t-t_0)} \leq 0, \quad t \in [t_0, \theta], \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, $x(t) \in S$ и в силу включения $F_k(x) \subset F(x)$ вектор-функция $x(t)$ есть решение системы (2.1), удовлетворяющее фазовым ограничениям. Значит, $G_k(\theta) \subset G(\theta)$. □

Теорема 3. *Пусть $f(x,u)$ удовлетворяет предположению 1, ограничения задачи удовлетворяю условиям леммы 2 (или леммы 3) и предположению 4. Пусть x^0 — внутренняя точка S. Тогда существуют $k_0>0$, $M>0$ такие, что для любого $k>k_0$ справедливо неравенство*

$$h(G_k(\theta),G(\theta))\le\frac{M}{k}.$$

Доказательство. Выберем $x^0\in\operatorname{Int}S$, обозначим $d_0=d(x^0)$. Пусть $x\in G(\theta)$, т. е. существует такая траектория $x(t)$ системы (2.1) с начальным состоянием $x(t_0)=x^0$, удовлетворяющая фазовым ограничениям, что $x(\theta)=x$. По лемме 1 найдутся W, r_0 такие, что для любого $0<r\le\min\{r_0,d_0\}$ найдется траектория $\bar{x}(t)$ системы (2.1) с начальным состоянием $x(t_0)=x^0$, для которой $\|x(t)-\bar{x}(t)\|\le Wr$, $d(\bar{x}(t)\ge r$, при $t\in[t_0,\theta]$.

Из лемм 2, 3 следует, что найдется $L>0$, для которого $-Lg(x)\ge d(x)$, $x\in S$, $g(x)=\max_{i=1,\dots,m}g_i(x)$. Следовательно,

$$-g_i(\bar{x}(t))\ge\frac{r}{L},\quad i=1,\dots,m. \tag{6.1}$$

Обозначим

$$Q=\max_{i=1,\dots,m}\max_{x\in S,f\in F(x)}(\nabla g_i(x),f).$$

Тогда, если выбрать k так, чтобы $kr\ge LQ$ из (6.1) получим $\dot{\bar{x}}(t)\in F_k(\bar{x}(t))$, т. е. $\bar{x}(\theta)\in G_k(\theta)$. Возьмем $k=LQ/r$, при $k\ge k_0=LQ/\min\{r_0,d_0\}$ будем иметь

$$\|\bar{x}(t)-x(t)\|\le\frac{M}{k},$$

где $M=WLQ$. Таким образом, для каждого $x\in G(\theta)$ найдется $\bar{x}\in G_k(\theta)$, для которого $\|\bar{x}-x\|\le M/k$. Учитывая, что $G_k(\theta)\subset G(\theta)$ приходим к утверждению теоремы. □

Замечание 2. Утверждение теоремы 3 остается справедливым, если в качестве $G(\theta)$ и $G_k(\theta)$ рассматривать множества точек, в которые можно попасть в момент θ из начальных состояний x^0, принадлежащих заданному компакту X^0. Условие $x^0\in\operatorname{Int}S$ в этом случае заменяется условием $X^0\subset\operatorname{Int}S$.

Замечание 3. Из теорем о параметризации многозначных отображений [19] вытекает возможность представления аппроксимирующего дифференциального включения $\dot{x}\in F_k(x)$ в виде управляемой системы $\dot{x}=f_k(x,u)$, $u\in V$, с лишицевой по x правой частью и компактными ограничениями на управление.

7. Пример: линейная по управлению система с ограничениями в виде линейных неравенств

Рассмотрим линейную по u управляемую систему со скалярным управлением

$$\dot{x}=f(x)+Bu,\quad |u|\le1,\quad x(t_0)=x^0,$$

где $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция, B — вектор-столбец. Будем считать, что фазовые ограничения заданы системой линейных неравенств

$$g_i(x)=(a^i,x)-\alpha_i\le0,\quad i=1,\dots,m,$$

$a^i\in\mathbb{R}^n$, $a^i\ne0$, $i=1,\dots,m$. Будем считать, что $(a^i,B)\ne0$, $i=1,\dots,m$. Введем следующие обозначения:

$$I_1=\{i\colon(a^i,B)>0\},\quad I_2=\{i\colon(a^i,B)<0\},$$

в предположении о непустоте и ограниченности S множества I_1, I_2 не пусты. Положим $I_1(x)=I_1\cap I(x)$, $I_2(x)=I_2\cap I(x)$ для $x\in S$. Для любого $x\in\partial S$ имеем $I(x)=I_1(x)\cup I_2(x)$ при этом одно из множеств $I_1(x)$ или $I_2(x)$ может оказаться пустым. Мы считаем выполненным предположение 4, которое здесь может быть записано в виде двух условий:

$$0 \notin \mathrm{co}\{a^i,\ i \in I(x)\},$$

$$\exists \bar{u} \in [-1,1] \quad (a^i, f(x)) + (a^i, B)\bar{u} < 0 \quad \forall i \in I(x) \quad \forall x \in S, \quad I(x) \neq \varnothing. \tag{7.1}$$

Определим функции

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} \min\limits_{i \in I_1(x)} -\dfrac{(a^i, f(x))}{(a^i, B)}, & \text{если} \quad I_1(x) \neq \varnothing, \\ \qquad\qquad 1, & \text{если} \quad I_1(x) = \varnothing, \end{cases}$$

$$\underline{v}(x) = \begin{cases} \max\limits_{i \in I_2(x)} -\dfrac{(a^i, f(x))}{(a^i, B)}, & \text{если} \quad I_1(x) \neq \varnothing, \\ \qquad\qquad -1, & \text{если} \quad I_2(x) = \varnothing. \end{cases}$$

Тогда условие (7.1) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\underline{v}(x) < \min\{1, \bar{v}(x)\}, \quad \max\{-1, \underline{v}(x)\} < \bar{v}(x) \quad \forall x \in S, \quad I(x) \neq \varnothing.$$

Пусть $\phi_k^i(x) := [-(a^i, f(x)) - k(a^i, x) + k\alpha_i]/(a^i, B)$, положим

$$\omega_k(x) = \min\Big\{1, \min_{i \in I_1} \phi_k^i(x)\Big\}, \quad \psi_k(x) = \max\Big\{-1, \max_{i \in I_2} \phi_k^i(x)\Big\}.$$

При достаточно большом k имеет место неравенство $\psi_k(x) \le \omega_k(x)$ для $x \in S$, поэтому множество $U_k(x) = [\psi_k(x), \omega_k(x)]$ не пусто. Элементарными преобразованиями система (2.6) приводится к виду

$$\dot{x} = f_k(x) + B_k(x)u, \quad |u| \le 1, \quad x(t_0) = x^0,$$

где

$$f_k(x) = f(x) + \frac{\omega_k(x) + \psi_k(x)}{2}B, \quad B_k(x) = \frac{\omega_k(x) - \psi_k(x)}{2}B.$$

Если исходная система линейна: $f(x) = Ax$, то функции $f_k(x)$, $B_k(x)$ кусочно-линейны.

Таким образом, в данном примере аппроксимирующая система может быть выписана в явном виде. Платой за снятие фазовых ограничений служит усложнение уравнений, описывающих аппроксимирующую систему, по сравнению с исходными: вместо постоянной матрицы B при управлении мы получаем матрицу $B_k(x)$, зависящую от состояния системы и параметра штрафа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
2. **Лотов А.В.** Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 67–78.
3. **Матвийчук А.Р., Ушаков В.Н.** О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.
4. **Kurzhanski A.B., Mitchell I.M., Varaiya P.** Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems // J. Optim. Theory Appl. 2006. Vol. 128, no. 3. P. 499–521.
5. **Baier R., Chahma I. A., Lempio F.** Stability and convergence of Euler's method for state-constrained differential inclusions // SIAM J. Optim. 2007. Vol. 18, no. 3. P. 1004–1026.
6. **Bonneuil N.** Computing reachable sets as capture-viability kernels in reverse time // Appl. Math. 2012. Vol. 3. P. 1593–1597.

7. **Костоусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
8. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
9. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
10. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
11. **Гусев М.И.** О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 81–86.
12. **Forcellini F., Rampazzo F.** On nonconvex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set // Differential Integral Equations. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 471–497.
13. **Frankowska H., Vinter R.B.** Existence of neighboring feasible trajectories: applications to dynamic programming for state-constrained optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 2000. Vol. 104, no. 1. P. 21–40.
14. **Bettiol P., Bressan A., Vinter R.** On trajectories satisfying a state constraint: $W^{(1,1)}$ estimates and counterexamples // SIAM J. Control Optim. 2010. Vol. 48, no. 7. P. 4664–4679.
15. **Stern R.J.** Characterization of the state constrained minimal time function // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 2. P. 697–707.
16. **Clarke F.H., Rifford L., Stern R.J.** Feedback in state constrained optimal control // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2002. Vol. 7. P. 97–133.
17. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М. Наука, 1988. 271 с.
18. **Walter W.** Differential and integral inequalities. Berlin: Springer, 1970. 352 p.
19. **Ornelas A.** Parametrization of Caratheodory multifunctions // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1990. Vol. 83. P. 33–44.

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: gmi@imm.uran.ru.

Поступила 30.07.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ДВУХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПО РАЗМЕРУ КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

А. А. Давыдов[1], А. С. Платов[2]

Для модели, описывающей динамику двух структурированных по размеру конкурирующих популяций при выбранных интенсивностях их эксплуатации, доказано существование и единственность стационарного решения. Показано, что существуют интенсивности эксплуатации, доставляющие максимум заданного функционала выгоды на соответствующем им стационарном решении.

Ключевые слова: Структурированная по размеру популяция, оптимальная эксплуатация, стационарное решение.

A. A. Davydov, A. S. Platov. Optimal exploitation of two competing size-structured populations.

For a model describing the dynamics of two competing size-structured populations under chosen intensities of their exploitation, the existence and uniqueness of a stationary solution is proved. It is shown that there exist exploitation intensities that maximize a given profit functional on the stationary solution corresponding to them.

Keywords: size-structured population, optimal exploitation, stationary solution.

Введение

Динамика эксплуатации двух структурированных по размеру конкурирующих популяций описывается системой уравнений [1; 2]

$$\frac{\partial x_i(t,l)}{\partial t} + \frac{\partial\big(g_i(l,E_1(t),E_2(t))x_i(t,l)\big)}{\partial l} = -\big(\mu_i(l,E_1(t),E_2(t)) - u_i(l)\big)x_i(t,l), \quad i=1,2, \tag{0.1}$$

где x_i — плотность биомассы i-й популяции размера l в момент времени t; g_i и μ_i — коэффициенты ее прироста и смертности соответственно; u_i — интенсивность эксплуатации этой популяции. Функция E_i отвечает за часть конкуренции, которую создает i-я популяция. Она вычисляется по формуле

$$E_i(t) = \int\limits_0^{L_i} \chi_i(l)x_i(t,l)\,dl, \tag{0.2}$$

где χ_i — непрерывная функция, а отрезок $[0,L_i]$, $L_i>0$, — диапазон размеров, на котором мы эксплуатируем i-ю популяцию.

В работе [3] предполагалось, что все коэффициенты модели зависели от суммарной конкуренции, которая имела вид

$$E = \sum_{k=1}^{N} E_k.$$

Здесь мы рассматриваем более общий случай, когда конкуренция является вектором, $E = (E_1,E_2)$, а не просто суммой его компонент.

[1]Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”.

[2]Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-12446 офи_м2) и проекта ДРПННиТ №1.1348.2011 Министерства образования и науки РФ.

Как и в работах [3; 4], за приток новых индивидов отвечает граничное условие, которое является суммой естественного воспроизводства и промышленного возобновления p_i:

$$x_i(t,0) = \int\limits_0^{L_i} r_i(l, E_1(t), E_2(t)) x_i^{\beta_i}(t,l)\, dl + p_i(t), \tag{0.3}$$

где функции r_i и β_i, $\beta_i \in (0,1)$, характеризуют репродуктивность биомассы и нелинейную зависимость естественного воспроизводства от плотности биомассы соответственно.

Здесь коэффициенты модели предполагаются непрерывными функциями от *показателя конкуренции* $E = (E_1, E_2)$ и удовлетворяют естественным ограничениям (которые аналогичны наложенным в [3; 4]):

a) коэффициенты прироста g_i и рождаемости r_i являются невозрастающими по E_1 и E_2 функциями при каждом $l \in [0, L_i]$, первый из них всюду положителен, а второй всюду неотрицателен и положителен на некотором интервале размеров на отрезке $[0, L_i]$, $i = 1, 2$;

b) каждый из коэффициентов смертности μ_i — положительная неубывающая по E_1 и E_2 функция при $l \in [0, L_i]$;

c) отношение $g_i(0,\cdot)/g_i(l,\cdot)$ есть невозрастающая по E_1 и E_2 функция при $l \in [0, L_i]$.

Первые два из этих условий характеризуют не улучшение условий развития популяции при росте конкуренции, а последнее условие — не меньшее влияние конкуренции на рост индивидуумов малых размеров, чем на рост больших. Всюду здесь и ниже $i = 1, 2$, если не оговорено противное.

1. Существование стационарного решения

Здесь доказано существование стационарного решения в динамике двух популяций при выбранных интенсивностях эксплуатации каждой из них.

Такое решение $x = \{x_1, x_2\}$ должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений (0.1) без производной по времени:

$$\frac{d(g_i(l,E)x_i(l))}{dl} = -\big(\mu_i(l,E) + u_i(l)\big)x_i(l),$$

где показатель конкуренции уже имеет некоторое числовое значение — вектор $E = (E_1, E_2)$, соответствующий этому решению.

Если не связывать этот показатель с решением, а рассмотреть его как двумерный параметр, то решение последнего уравнения легко находится. Оно имеет вид

$$x_i(l,E) = \frac{g_i(0,E)x_i(0,E)}{g_i(l,E)} \exp\Big\{ -\int\limits_0^l m_i(s,E)\, ds\Big\}, \tag{1.4}$$

где

$$m_i(s,E) = \frac{\mu_i(s,E) + u_i(s)}{g_i(s,E)}.$$

Мы будем предполагать, что так найденные решения по отношению к параметрам E_1 и E_2 удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial x_i}{\partial E_i} \le \frac{\partial x_i}{\partial E_j}, \quad i,j = 1,2, \quad i \ne j, \tag{1.5}$$

если эти производные существуют, т. е. “маргинальное” влияние на объем популяции межвидовой конкуренция всегда не сильнее, чем внутривидовой.

Теорема 1. *Пусть при $i = 1, 2$ функция $p_i(t) = p_{0,i} \geq 0$ постоянна, функции g_i, μ_i и r_i непрерывны по всем аргументам и удовлетворяют условиям a)–c), а интенсивность эксплуатации u_i измерима и удовлетворяет условию*

$$U_{i,1}(l) \leq u_i(l) \leq U_{i,2}(l), \quad l \in [0, L_i],$$

с некоторыми непрерывными на $[0, L_i]$ функциями ограничений $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$, $0 \leq U_{i,1} \leq U_{i,2}$. Тогда существует ненулевое стационарное решение задачи (0.1)–(0.3), *и такое решение единственно, если коэффициенты g_i, μ_i и r_i дифференцируемы и выполнены условия* (1.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подстановка решения (1.4) в краевые условия (0.3) позволяет получить систему уравнений на плотность биомассы "нулевого" размера $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}) = (x_{1,0}(0, E), x_{2,0}(0, E))$:

$$x_{i,0} - p_{i,0} = x_{i,0}^{\beta_i} \int\limits_0^{L_i} r_i(l, E) \left[\frac{g_i(0, E)}{g_i(l, E)} \exp\left\{ - \int\limits_0^l m_i(s, E)\, ds \right\} \right]^{\beta_i} dl. \tag{1.6}$$

При $p_{0,i} \geq 0$ и $\beta \in (0, 1)$ существует единственное положительное решение $x_{0,i}$ уравнения (1.6), что нетрудно видеть. Подстановка этого решения в (1.4) дает стационарное решение, соответствующее заданному значению параметра конкуренции $E = (E_1, E_2)$.

Покажем, что существуют такое значение параметра конкуренции и соответствующие ему стационарные решения (1.4), для которых показатели конкуренции, вычисленные по формуле (0.2), доставляют в точности это значение.

С этой целью рассмотрим следующие функции f_i и F_i от параметров E_1, E_2:

$$f_i(E_1, E_2) = \int\limits_0^{L_i} \chi_i(l) x(l, E_1, E_2)\, dl, \quad F_i(E_1, E_2) := E_i - f_i(E_1, E_2).$$

В силу условий a)–c) функция f_i не возрастает с ростом компонент показателя конкуренции, поэтому функция F_1 (или F_2) при фиксированном значении параметра E_2 (соответственно E_1) строго монотонна по E_1 (соответственно по E_2) и неограниченно возрастает при $E_1 \to \infty$ (соответственно при $E_2 \to \infty$). Но

$$F_1(0, E_2) < 0, \quad F_2(E_1, 0) < 0.$$

Следовательно, существуют функции $E_i = \phi_i(E_j)$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, однозначно определенные при неотрицательных значениях аргумента, положительные и такие, что

$$F_1(\phi_1(E_2), E_2) \equiv 0 \quad \text{и} \quad F_2(E_1, \phi_2(E_1)) \equiv 0 \quad \text{при} \quad E_1 \geq 0, \quad E_2 \geq 0.$$

Эти функции невозрастающие, поскольку функции f_j невозрастающие по обоим аргументам. Следовательно, в положительном квадранте существует точка пересечения графиков функций $E_i = \phi_i(E_j)$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Нетрудно видеть, что координаты (E_1, E_2) такой точки доставляют значения параметров, которые совпадают с показателями конкуренции, вычисляемыми на стационарных решениях, соответствующих этим параметрам.

Таким образом, ненулевое стационарное решение существует. Покажем, что оно единственно, если выполнены условия (1.5). Достаточно доказать, что в этих условиях ограничение функции F_2 на график функции ϕ_1 является строго монотонной функцией от E_2 и, следовательно, обращается в нуль не более чем в одной точке. С этой целью посчитаем полную производную этого ограничения по E_2. Имеем

$$\frac{d}{dE_2} \left(E_2 - f_2(\phi_1(E_2), E_2) \right) = 1 - \frac{\partial f_2}{\partial E_1} \frac{d\phi_1(E_2)}{dE_2} - \frac{\partial f_2}{\partial E_2}. \tag{1.7}$$

Производная $\partial f_2/\partial E_2$ неположительна в силу условий a)–c), а по теореме о неявной функции из уравнения $F_1 = 0$ находим

$$\frac{d\phi_1(E_2)}{dE_2} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial E_2}}{\left(1 - \dfrac{\partial f_1}{\partial E_1}\right)}.$$

В силу условий (1.5) имеем оценку

$$\left|\frac{d\phi_1(E_2)}{dE_2}\right| < 1.$$

Отсюда, учитывая эти же условия в (1.7), находим

$$\frac{dF_2(\phi_1(E_2), E_2)}{dE_2} > 0.$$

Таким образом, ограничение функции F_2 на график функции ϕ_1 действительно является строго монотонной функцией от E_2. Следовательно, искомый показатель конкуренции $E = (E_1, E_2)$ и соответствующие ему стационарные решения (1.4) определяются однозначно.

Теорема 1 доказана.

2. Существование оптимального стационарного решения

Таким образом, в силу теоремы 1 существует стационарное состояние популяции при выбранной интенсивности $u = (u_1, u_2)$ ее эксплуатации и векторе p промышленного возобновления.

Рассмотрим задачу выбора *пары* (p, u), доставляющей на таком состоянии максимальный доход при функционале выгоды

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^{L_i} c_i(l) u_i(l) x_i(l, E)\, dl + c_{L_i} x_i(L_i, E) - p_{i,0} c_{i,0} \right). \tag{2.1}$$

Здесь c_i, $c_{i,0}$ и c_{L_i} — это агрегированные цены. Кроме того, предполагается, что вектор $p_0 = \{p_{1,0}, p_{2,0}\}$ и вектор функция $u = \{u_1, u_2\}$ удовлетворяют следующим ограничениям

$$0 \le P_{i,1} \le p_{i,0} \le P_{i,2}, \quad 0 \le U_{i,1} \le u_i \le U_{i,2}. \tag{2.2}$$

с некоторыми константами $P_{i,1}$ и $P_{i,2}$ и непрерывными функциями $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$. Такие векторы и их набор мы будем называть *допустимыми*.

Теорема 2. *Пусть цены c_i являются непрерывными функциями, коэффициенты модели g_i, μ_i и r_i дифференцируемы и удовлетворяют условиям a)–c), при этом g_i и μ_i отделены от нуля, и выполнены условия* (1.5)*, тогда существует допустимая пара (p_0, u), стационарное решение для которой доставляет максимум функционала* (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полезна

Лемма [3, Lemma 1]. *В условиях теоремы* (2) *функционал выгоды ограничен на множестве допустимых пар (p, u).*

В силу ограниченности функционала на множестве допустимых пар существует точная верхняя грань его значений. Рассмотрим теперь последовательность допустимых пар $(p_{1,k}, p_{2,k})$ и $(u_{1,k}, u_{2,k})$, для которых значение функционала выгоды на соответствующем стационарном решении стремится к этой грани при $k \to \infty$. Для k-го члена последовательности обозначим через $E_{i,k}$ значения уровня конкуренции на соответствующем стационарном решении для i-й популяции.

По предположению компоненты допустимых векторов возобновления ограничены, поэтому из последовательности $\{(p_{1,k}, p_{2,k})\}_{k=1}^{\infty}$ по теореме Больцано — Вейерштрасса можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Без нарушения общности считаем, что сама исходная последовательность является сходящейся, т. е.

$$(p_{1,k}, p_{2,k}) \to (p_{1,\infty}, p_{2,\infty}) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Ясно, что предельный вектор возобновления $(p_{1,\infty}, p_{2,\infty})$ также является допустимым.

Значения $E_{i,k}$ показателей конкуренции также ограничены, поэтому и из их последовательности также можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Снова, как и в случае с векторами возобновления, не нарушая общности, считаем сходящейся саму эту последовательность:

$$(E_{1,k}, E_{2,k}) \to (E_{1,\infty}, E_{2,\infty}) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Обозначим $E_\infty := (E_{1,\infty}, E_{2,\infty})$.

Наконец, для компоненты $u_{i,k}$ вектора интенсивностей эксплуатации и любых значений $l_1, l_2 \in [0, L_i]$, $l_1 \le l_2$, соответствующая функция $\phi_{i,k}$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{l_1}^{l_2} \frac{U_{i,1}(l)}{g_i(l, E_{1,k}, E_{2,k})}\, dl \le \phi_{i,k}(l_2) - \phi_{i,k}(l_1) \le \int\limits_{l_1}^{l_2} \frac{U_{i,2}(l)}{g_i(l, E_{1,k}, E_{2,k})}\, dl. \tag{2.3}$$

В частности, эта функция удовлетворяет условию Липшица с константой

$$C_i := \max_{l \in [0, L_i]} \left\{ \frac{u_{i,2}(l)}{g_i(l, f(0))} \right\}.$$

Следовательно, последовательность функций $\{\phi_{i,k}\}_{k=1}^{k=\infty}$ ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[0, L_i]$ и, значит, по теореме Арцела — Асколи [5] из нее можно выбрать равномерно сходящуюся на этом отрезке подпоследовательность $\{\phi_{i,k_m}\} \rightrightarrows \phi_{i,\infty}$ при $k_m \to \infty$. Применяя этот выбор сначала для $i = 1$, а затем для $i = 2$, выбирая уже лишь из индексов, оставшихся на предыдущем шаге, получим подпоследовательность индексов $\{k_m\}$, для которой последовательность $\{\phi_{i,k_m}\}$ равномерно сходится при $i = 1, 2$.

Но функционал (2.1) зависит непрерывно от вектора E, начального значения x_0 и вектор-функции ϕ, что нетрудно видеть. Начальный вектор, в свою очередь, непрерывно зависит от вектора E, вектора возобновления и этой вектор функции. Следовательно, данный функционал непрерывно зависит от вектора E, вектора возобновления и вектор-функции ϕ. Следовательно, на предельных значениях E_∞, p_∞ и ϕ_∞ этот функционал принимает значение своей точной верхней грани, т. е. максимальное значение.

Для завершения доказательства утверждения теоремы нам необходимо найти допустимую интенсивность эксплуатации u, интегрирование которой доставляет предельную вектор-функцию ϕ_∞. Понятно, что в результате предельного перехода каждая компонента этой вектор-функции должна удовлетворять условию (2.3) и быть абсолютно непрерывной. Следовательно, почти всюду на интервале $[0, L_i]$ производная этой компоненты существует и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{U_{i,1}(l)}{g_i(l, E_\infty)} dl \le \phi'_{i,\infty}(l) \le \frac{U_{i,2}(l)}{g_i(l, E_\infty)} dl.$$

Таким образом, соответствующую компоненту вектора интенсивностей эксплуатации можно определить по формуле

$$u_{i,\infty}(l) = g_i(l, E_\infty)\phi'_{i,\infty}(l)$$

в любой точке существования этой производной, а в любой из остальных точек на отрезке $[0, L_i]$ доопределить любым значением из отрезка $[U_{i,1}, U_{i,2}]$. Определенная так интенсивность $u_{i,\infty}$ является допустимой и доставляет нужную функцию $\phi_{i,\infty}$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murphy L.F.** A nonlinear growth mechanism in size structured population dynamics // J. Theor. Biol. 1983. Vol. 104. P. 493–506.
2. **Roos A.M.** A gentle introduction to models of physiologically structured populations // Structured population models in marine, terrestrial, and freshwater systems / eds. S. Tuljapurkar, H. Caswell. New York: Chapman and Hall, 1997. P. 119–204. (Population and Community Biology).
3. **Panesh A.A., Platov A.S.** Optimization of size-structured population with interacting species // J. Math. Sci. 2013. Vol. 188, no. 3. P. 293–298.
4. **Davydov A.A., Platov A.S.** Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition // Moscow Math. J. 2012. Vol. 12, no. 2. P. 269–273.
5. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

Давыдов Алексей Александрович
Поступила 30.07.2013
д-р физ.-мат. наук, профессор
Владимирский государственный университет
им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия
e-mail: davydov@vlsu.ru, davydov@iiasa.ac.at

Платов Антон Сергеевич
Владимирский государственный университет
им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: platovmm@mail.ru

Том 19 № 4 2013

УДК 517.929

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА — КРАСОВСКОГО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Ю. Ф. Долгий

Для линейных автономных систем с последействием предложен метод вычисления квадратичных функционалов Ляпунова — Красовского. Нахождение их представлений сводится к решению краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Рассмотрены случаи их эквивалентности краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с последействием, устойчивость, квадратичные функционалы.

Yu. F. Dolgii. Computation of Lyapunov–Krasovskii quadratic functionals for linear autonomous systems with aftereffect.

A method of computing Lyapunov–Krasovskii quadratic functionals is proposed for linear autonomous systems with aftereffect. The finding of their representations is reduced to solving boundary value problems for functional differential equations. The cases of their equivalence to boundary value problems for systems of ordinary differential equations are considered.

Keywords: differential equations with aftereffect, stability, quadratic functionals.

Введение

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-r}^{0} [d\eta(s)]\, x(t+s), \tag{0.1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x\colon [-r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta(0) = 0$.

Для систем с последействием теорию второго метода Ляпунова разработал Н. Н. Красовский [1, гл. 7]. Он показал, что при анализе устойчивости линейной автономной системы и при ее оптимальной стабилизации можно использовать ограниченные квадратичные функционалы [1;2]. Его идеи получили дальнейшее развитие в работах по теории устойчивости [3–12] и теории оптимальной стабилизации систем дифференциальных уравнений с последействием [9;13–18].

При исследовании указанных проблем возникает задача нахождения ограниченного квадратичного функционала, производная которого в силу системы (0.1) совпадает с заданным ограниченным квадратичным функционалом.

При решении поставленной задачи в работе [19] использовались канонические аппроксимации системы (0.1) обыкновенными дифференциальными уравнениями [20; 21], а в работах [8; 20] — аппроксимации системы (0.1) разностными уравнениями.

Дальнейший прогресс в решении поставленной задачи связан с использовании представлений ограниченных квадратичных функционалов. Для пространства $\mathbb{C} = \mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ этот метод развивался в работах [3; 22]. В работе [22] получена краевая задача для уравнений в

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований “Математическая теория управления” (проект 12-П-1-1019) и гранта РФФИ (проект 13-01-00094).

частных производных первого порядка, определяющая коэффициенты представления квадратичного функционала Ляпунова — Красовского линейного дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием.

Представления ограниченных квадратичных функционалов Ляпунова — Красовского для линейных автономных систем с последействием удобно описывать в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ [23] со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int\limits_{-r}^{0} \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)\, d\vartheta, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{H}.$$

Методы вычисления квадратичных функционалов Ляпунова — Красовского для различных классов линейных автономных систем с последействием предлагались в работах [6–9; 24]. В работе [24] получена краевая задача для уравнений в частных производных первого порядка, определяющая коэффициенты представлений квадратичных функционалов Ляпунова — Красовского линейных автономных систем с последействием общего вида. Аналогичная краевая задача получена в работе [9] для линейных автономных систем с распределенными и сосредоточенными запаздываниями.

В данной работе показано, что нахождение представлений квадратичных функционалов Ляпунова — Красовского связано с решением краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Рассмотрены случаи эквивалентности этих задач краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Уравнение Ляпунова в гильбертовом пространстве

Ограниченный квадратичный функционал w в гильбертовом пространстве допускает представление

$$w(x(\cdot)) = (Wx(\cdot), x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in \mathbb{H},$$

где $W\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор [25, с. 76]. Система с последействием описывается в пространстве $\mathbb{H}$ уравнением [1, с. 162]

$$\frac{dx_t}{dt} = \mathcal{A}x_t, \tag{1.1}$$

где неограниченный оператор $\mathcal{A}\colon D(\mathcal{A}) \to \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathcal{A}x)(\vartheta) = \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathcal{A}x)(0) = \int\limits_{-r}^{0} [d\eta(s)]x(s),$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{x(\cdot)\colon x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1\left([-r, 0], \mathbb{R}^n\right)\right\}.$$

Задается линейный ограниченный самосопряженный оператор $W\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, и рассматривается уравнение Ляпунова

$$U\mathcal{A} + \mathcal{A}^*U + W = 0. \tag{1.2}$$

Здесь неограниченный оператор $\mathcal{A}^*\colon D(\mathcal{A}^*) \to \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathcal{A}^*y)(\vartheta) = -\frac{d\hat{y}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathcal{A}^*y)(0) = \hat{y}(0),$$

$$D(\mathcal{A}^*) = \left\{y(\cdot) \in \mathbb{H}\colon \hat{y}(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1\left([-r, 0], \mathbb{R}^n\right), \hat{y}(-r) + \eta^\top(-r)y(0) = 0\right\},$$

$$\hat{y}(\vartheta) = y(\vartheta) - \eta^\top(\vartheta)y(0), \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad \hat{y}(0) = \hat{y}(-0).$$

Решение уравнения (1.2) ищется в классе линейных ограниченных самосопряженных операторов.

Уравнение (1.1) будем решать в случае, когда линейный ограниченный самосопряженный оператор W допускает представление

$$(Wx(\cdot))(\vartheta) = M(\vartheta, 0)x(0) + \int\limits_{-r}^{0} M(\vartheta, s)x(s)\, ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad x(\cdot) \in \mathbb{H},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $M^\top(0,0) = M(0,0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

2) для почти всех $\vartheta \in [-r, 0)$ справедливо равенство $M^\top(0,\vartheta) = M(\vartheta, 0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и отображение $M(\cdot, 0) \in \mathbb{L}_2([-r,0), \mathbb{R}^{n\times n})$;

3) для почти всех точек $(\vartheta, s) \in [-r,0)\times[-r,0)$ справедливо равенство $M^\top(s,\vartheta) = M(\vartheta, s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и отображение $M(\cdot,\cdot) \in \mathbb{L}_2([-r,0)\times[-r,0), \mathbb{R}^{n\times n})$.

Условия (1)–(3) обеспечивают принадлежность оператора W классу вполне непрерывных операторов Гильберта — Шмидта [26, с. 141].

Лемма. *Пусть спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ принадлежит множеству $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon Re(\lambda) < 0\}$ и выполнены условия* (1)–(3)*. Тогда решение уравнения Ляпунова* (1.2) *единственно и определяет вполне непрерывный оператор Гильберта — Шмидта, допускающий представление*

$$(Ux(\cdot))(\vartheta) = K(\vartheta, 0)x(0) + \int\limits_{-r}^{0} K(\vartheta, s)x(s))\, ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad x(\cdot) \in \mathbb{H}, \tag{1.3}$$

удовлетворяющее условиям:

$1')$ $K^\top(0,0) = K(0,0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*;*

$2')$ *для почти всех $\vartheta \in [-r,0)$ справедливо равенство $K^\top(0,\vartheta) = K(\vartheta,0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и отображение $K(\cdot,0) \in \mathbb{L}_2([-r,0), \mathbb{R}^{n\times n})$;*

$3')$ *для почти всех точек $(\vartheta, s) \in [-r,0)\times[-r,0)$ справедливо равенство $K^\top(s,\vartheta) = K(\vartheta,s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и отображение $K(\cdot,\cdot) \in \mathbb{L}_2([-r,0)\times[-r,0), \mathbb{R}^{n\times n})$.*

Доказательство. При сделанных предположениях существование единственного решения уравнения (1.2), а также выполнение условий $(1')$–$(3')$ следует из результатов работы [27]. Условия $(1')$–$(3')$ обеспечивают принадлежность оператора U классу вполне непрерывных операторов Гильберта — Шмидта [26, с. 141]. □

В случае ограниченного оператора $\mathcal{A}$ необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения Ляпунова приведено в [28]. Оно состоит в требовании $\lambda + \mu \neq 0$ для любых λ, $\mu \in \sigma(\mathcal{A})$. Обоснование этого результата для неограниченных операторов связано с техническими трудностями [29, с. 639; 30]. В работе [31] его справедливость доказана для операторов W специального вида.

Учитывая представления операторов в уравнении Ляпунова (1.2), можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда матричнозначная функция K, определяющая решение уравнения Ляпунова* (1.2)*, удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \hat{K}^\top(s, \vartheta)}{\partial s} = M(\vartheta, s), \quad \vartheta, s \in [-r, 0), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, 0)}{\partial \vartheta} - \hat{K}^\top(-0, \vartheta) = M(\vartheta, 0), \quad \vartheta \in [-r, 0), \tag{1.5}$$

$$\hat{K}(-0, 0) + \hat{K}^\top(-0, 0) + M(0, 0) = 0, \tag{1.6}$$

$$\hat{K}(-r,s)+\eta^\top(-r)K(0,s)=0,\quad s\in[-r,0],\tag{1.7}$$

где $\hat{K}(\vartheta,s)=K(\vartheta,s)-\eta^\top(\vartheta)K(0,s)$, $\vartheta\in[-r,0)$, $s\in[-r,0]$, *а также для* $s=0$ *и почти всех* $s\in[-r,0)$ *отображения* $\hat{K}(\cdot,s)\in\mathbb{W}_2^1([-r,0),\mathbb{R}^{n\times n})$.

Доказательство. Пусть $y(\vartheta)=(Ux(\cdot))(\vartheta)=K(\vartheta,0)x(0)+\int_{-r}^0 K(\vartheta,s)x(s)\,ds$, $\vartheta\in[-r,0)$. Тогда имеем $\hat{y}(\vartheta)=y(\vartheta)-\eta^\top(\vartheta)y(0)=\hat{K}(\vartheta,0)x(0)+\int_{-r}^0\hat{K}(\vartheta,s)x(s)\,ds$, $\vartheta\in[-r,0)$. Учитывая требование принадлежности области значений оператора U области определения оператора $\mathcal{A}^*$, получим (1.7). Тогда операторы $\mathcal{A}^*U$ и $U\mathcal{A}$ являются ограниченными в пространстве $\mathbb{H}$ и определяются формулами

$$(\mathcal{A}^*Ux(\cdot))(0)=\hat{y}(-0)=\hat{K}(-0,0)x(0)+\int\limits_{-r}^{0}\hat{K}(-0,s)x(s)\,ds,$$

$$(\mathcal{A}^*Ux(\cdot))(\vartheta)=-\frac{d\hat{y}(\vartheta)}{d\vartheta}=-\frac{\partial\hat{K}(\vartheta,0)}{\partial\vartheta}x(0)-\int\limits_{-r}^{0}\frac{\partial\hat{K}(\vartheta,s)}{\partial\vartheta}x(s)\,ds,\quad\vartheta\in[-r,0),$$

$$(U\mathcal{A}x(\cdot))(\vartheta)=\hat{K}^\top(-0,\vartheta)x(0)-\int\limits_{-r}^{0}\frac{\partial\hat{K}^\top(s,\vartheta)}{\partial\vartheta}x(s)\,ds,\quad\vartheta\in[-r,0].$$

Указанная в теореме определяющая система уравнений получена из тождества, в которое превращается уравнение Ляпунова после подстановки представлений операторов $U\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*U$ и W. □

В работе Г.Н. Мильштейна [24] получена определяющая система уравнений, которая незначительно отличается от системы (1.4)–(1.7).

2. Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения

Используя методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, сведем краевую задачу для матричного уравнения с частными производными к краевой задаче для матричного функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta}=\int\limits_{-r}^{\vartheta}\big(X(\tau)[d\eta(\tau-\vartheta)]+[d\eta^\top(\tau)]X^\top(\tau-\vartheta)\big)\,d\tau$$

$$+X(-r)\eta(-r-\vartheta)+\int\limits_{-r}^{\vartheta}M(\tau,\tau-\vartheta)\,d\tau+M(\vartheta,0),\tag{2.1}$$

$$X(0)+X^\top(0)+M(0,0)=0,\tag{2.2}$$

$$X(-r)\eta(-r)=\eta^\top(-r)X^\top(-r).\tag{2.3}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда матричнозначная функция* K, *определяющая решение* (1.3) *уравнения Ляпунова* (1.2), *задается формулами*

$$K(0,0)=-\eta^{\top-1}(-r)X(-r),\quad K(\vartheta,0)=X(\vartheta)-\eta^\top(\vartheta)X^\top(-r)\eta^{-1}(-r),\quad\vartheta\in[-r,0),\tag{2.4}$$

$$K(\vartheta,s)=\Phi(\vartheta,s)+X(\vartheta)\eta(s)+\eta^\top(\vartheta)X^\top(s)-\eta^\top(\vartheta)\eta^{\top-1}(-r)X(-r)\eta(s),\tag{2.5}$$

$$\Phi^\top(\vartheta,s)=\Phi(s,\vartheta),\quad\vartheta,s\in[-r,0),\tag{2.6}$$

$$\Phi(\vartheta,s)=-X(\vartheta-s-r)\eta(-r)+\int\limits_{-r}^{s}\left(M(\tau+\vartheta-s,\tau)-\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau+\vartheta-s}\eta(\tau)\right.$$
$$\left.-\eta^\top(\tau+\vartheta-s)\frac{dX^\top(\tau)}{d\tau}\right)d\tau,\quad -r\le s\le\vartheta<0,\tag{2.7}$$

где X — решение краевой задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство. Введем матричнозначную функцию

$$\Phi(\vartheta,s)=\hat K(\vartheta,s)-\hat K(\vartheta,0)\eta(s),\quad \vartheta,s\in[-r,0).\tag{2.8}$$

Учитывая определение функции $\hat K$, имеем

$$\Phi(\vartheta,s)=K(\vartheta,s)-K(\vartheta,0)\eta(s)-\eta^\top(\vartheta)K(0,s)+\eta^\top(\vartheta)K(0,0)\eta(s),\quad \vartheta,s\in[-r,0).$$

Из последнего равенства и свойств ($2'$), ($3'$) функции K следует, что матричнозначная функция Φ удовлетворяет равенству (2.6). Из определения функции $\hat K$ следует, что при почти всех $s\in[-r,0)$ отображение $\Phi(\cdot,s)\in\mathbb{W}_2^1([-r,0),\mathbb{R}^{n\times n})$, а из (2.6) вытекает, что при почти всех $\vartheta\in[-r,0)$ отображение $\Phi(\vartheta,\cdot)\in\mathbb{W}_2^1([-r,0),\mathbb{R}^{n\times n})$.

Используя формулу (2.8), уравнение (1.4) преобразуем к виду

$$\frac{\partial\Phi(\vartheta,s)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\Phi(\vartheta,s)}{\partial s}+\frac{\partial\hat K(\vartheta,0)}{\partial\vartheta}\eta(s)+\eta^\top(\vartheta)\frac{\partial\hat K^\top(s,0)}{\partial s}=M(\vartheta,s),\quad \vartheta,s\in[-r,0).\tag{2.9}$$

Это матричное уравнение распадается на независимые скалярные уравнения в частных производных первого порядка, определяющие элементы матричнозначной функции Φ. Учитывая условие (2.6), решение уравнения (2.9) можно искать в области $-r\le s\le\vartheta<0$. Используя методы интегрирования скалярных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [32, § 53], находим

$$\Phi(\vartheta,s)=\int\limits_{-r}^{s}\left(M(\tau+\vartheta-s,\tau)-\frac{\partial\hat K(\tau+\vartheta-s,0)}{\partial\tau}\eta(\tau)-\eta^\top(\tau+\vartheta-s)\frac{\partial\hat K^\top(\tau,0)}{\partial\tau}\right)d\tau$$
$$+\Psi(\vartheta-s),\quad -r\le s\le\vartheta<0,\tag{2.10}$$

где $\Psi(\cdot)\in\mathbb{W}_2^1([0,r),\mathbb{R}^{n\times n})$. Учитывая предыдущую формулу, определения функций Φ, $\hat K$ и условие (1.7), получаем

$$\Psi(\vartheta+r)=\Phi(\vartheta,-r)=\Big(\hat K(-r,\vartheta)-\hat K(-r,0)\eta(\vartheta)\Big)^\top$$
$$=-\left(K(0,\vartheta)-K(0,0)\eta(\vartheta)\right)^\top\eta(-r)-\hat K(\vartheta,0)\eta(-r),\quad \vartheta\in[-r,0).$$

В результате имеем

$$\Psi(\vartheta-s)=-\hat K(\vartheta-s-r,0)\eta(-r),\quad -r\le s\le\vartheta<0.\tag{2.11}$$

Введем обозначение $X(\vartheta)=\hat K(\vartheta,0)$, $\vartheta\in[-r,0)$, $X(0)=X(-0)$. Тогда из (1.5) получим (2.2). При заданной функции M, удовлетворяющей условиям (1)–(3), и функции $X\in\mathbb{W}_2^1([-r,0],\mathbb{R}^{n\times n})$, из формул (2.10), (2.11) следует, что решение уравнения (2.9) определяется формулой (2.7). Используя определения функций Φ, $\hat K$ и условие (1.7), убеждаемся в справедливости формулы (2.5).

Покажем, что функция X удовлетворяет уравнению (2.1). Из формул (2.7), (2.8) находим

$$\Phi(-0,\vartheta)=\hat K(-0,\vartheta)-\hat K(-0,0)\eta(\vartheta)=-X(-\vartheta-r)\eta(-r)$$

$$+\int_{-r}^{\vartheta}\left(M(\tau-\vartheta,\tau)-\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}\eta(\tau)-\eta^{\top}(\tau-\vartheta)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau,\quad \vartheta\in[-r,0).$$

Из полученного равенства следует, что

$$\hat{K}(-0,\vartheta)=-X(-\vartheta-r)\eta(-r)+X(0)\eta(\vartheta)$$

$$+\int_{-r}^{\vartheta}\left(M(\tau-\vartheta,\tau)-\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}\eta(\tau)-\eta^{\top}(\tau-\vartheta)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau,\quad \vartheta\in[-r,0).$$

Подставляя найденное выражение в (1.5) и учитывая определение функции X, имеем

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta}=-\eta^{\top}(-r)X^{\top}(-\vartheta-r)+\eta^{\top}(\vartheta)X^{\top}(0)$$

$$+\int_{-r}^{\vartheta}\left(M(\tau,\tau-\vartheta)-\eta^{\top}(\tau)\frac{dX^{\top}(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}-\frac{dX(\tau)}{d\tau}\eta(\tau-\vartheta)\right)d\tau+M(\vartheta,0),\quad \vartheta\in[-r,0).$$

Используя формулу интегрирования по частям, преобразуем последнее уравнение к виду (2.1). Учитывая определение функции $\hat{K}$ и условие (1.7), получим формулы (2.4) и краевое условие (2.3). □

Мы показали, что проблема аналитической разрешимости уравнения Ляпунова (1.2) связана с задачей нахождения аналитического решения матричного функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{dX(\vartheta)}{[d\vartheta}=\int_{-r}^{\vartheta}\Big(X(\tau)[d_{\tau}\eta(\tau-\vartheta)]+[d\eta^{\top}(\tau)]X^{\top}(\tau-\vartheta)\Big)\,d\tau+X(-r)\eta(-r-\vartheta)+f(\vartheta),\quad \vartheta\in[-r,0],\tag{2.12}$$

где $f(\vartheta)=\displaystyle\int_{-r}^{\vartheta}M(\tau,\tau-\vartheta)\,d\tau+M(\vartheta,0)$, $\vartheta\in[-r,0]$.

В следующих разделах описаны классы автономных систем дифференциальных уравнений с последействием, для которых задачу интегрирования матричного функционально-дифференциального уравнения (2.12) можно заменить задачей интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

3. Системы дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями

Рассматривается система дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt}=\sum_{k=0}^{m}A_kx(t-r_k),\tag{3.1}$$

где $r_k=N_k\Delta$, $N_k\in\mathbb{N}$, $k=\overline{1,m}$; $\Delta>0$, $r_0=N_0\Delta$, $0=N_0<N_1<\ldots<N_m$. Здесь ядро Стилтьеса определяется формулами $\eta(0)=0$; $\eta(\vartheta)=-A_0$, $-r_1<\vartheta<0$; $\eta(\vartheta)=-\sum_{j=0}^{k-1}A_j$, $-r_k<\vartheta\le -r_{k-1}$, $k=\overline{2,m}$; $\eta(-r)=-\sum_{j=0}^{m}A_j$, $r_m=r$.

Для системы (3.1) функционально-дифференциальное уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta}=\sum_{k=0}^{m}\Big(1(\vartheta+r-r_k)X(\vartheta-r_k)A_k+1(\vartheta+r_k)A_k^{\top}X^{\top}(-\vartheta-r_k)\Big)$$

$$+ X(-r)\eta(-r-\vartheta) + f(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{3.2}$$

где $1(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Введем обозначения $f_j(s) = f(s - j\Delta)$, $X_j(s) = X(s - j\Delta)$, $s \in [0, \Delta]$, $j = \overline{1, N_m}$. Функции X_j, $j = \overline{1, N_m}$, должны удовлетворять краевым условиям

$$X_j(0) = X_{j+1}(\Delta), \quad j = \overline{1, N_m - 1}. \tag{3.3}$$

Полагая в уравнении (3.2) $\vartheta = s - j\Delta$, $s \in [0, \Delta]$, $j = \overline{1, N_m}$, заменяем его эквивалентной системой дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dX_j(s)}{ds} &= \sum_{N_m - N_k \geq j} X_{N_k+j}(s)A_k + \sum_{N_k \geq j} A_k^\top X_{N_k-j+1}^\top(\Delta - s) \\ &+ X_{N_m}(0)\eta(-(N_m - j)\Delta - s) + f_j(s), \quad s \in [0, \Delta], \quad j = \overline{1, N_m}.\end{aligned}$$

с краевыми условиями (3.3).

Введем новые функции $Y_j(s) = X_j^\top(\Delta - s)$, $s \in [0, \Delta/2]$, с краевыми условиями $Y_j(\Delta/2) = X_j^\top(\Delta/2)$, $j = \overline{1, N_m}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для системы* (3.1) *краевая задача* (2.1)–(2.3) *эквивалентна системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned}\frac{dX_j}{ds} &= \sum_{N_m - N_k \geq j} X_{N_k+j}A_k + \sum_{N_k \geq j} A_k^\top Y_{N_k-j+1} + X_{N_m}(0)\eta(-(N_m - j)\Delta - s) + f_j(s), \\ \frac{dY_j}{ds} &= -\sum_{N_k \geq j} X_{N_k-j+1}A_k - \sum_{N_m - N_k \geq j} A_k^\top Y_{N_k+j} - \eta^\top(-(N_m - j + 1)\Delta + s)X_{N_m}^\top(0) - f_j^\top(\Delta - s),\end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered}X_j(0) = Y_{j+1}^\top(0), \quad j = \overline{1, N_m - 1}, \\ Y_j\Big(\frac{\Delta}{2}\Big) = X_j^\top\Big(\frac{\Delta}{2}\Big), \quad j = \overline{1, N_m}, \\ Y_1(0) + Y_1^\top(0) + M(0,0) = 0, \\ X_{N_m}(0)\eta(-N_m\Delta) = \eta^\top(-N_m\Delta)X_{N_m}^\top(0).\end{gathered}$$

□

П р и м е р 1. Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - r), \quad |b| \neq |a|, \quad b \neq 0. \tag{3.4}$$

Решение краевой задачи (2.1)–(2.3) определяется формулами

$$X(\vartheta) = X_1(\vartheta + r), \quad \vartheta \in \Big[-r, -\frac{r}{2}\Big), \quad X(\vartheta) = Y_1(-\vartheta), \quad \vartheta \in \Big[-\frac{r}{2}, 0\Big].$$

Здесь $X_1(\cdot)$, $Y_1(\cdot)$ — компоненты решения краевой задачи из теоремы 3, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dX_1}{ds} = aX_1 + bY_1 - aX_1(0) + f_1(s), \quad \frac{dY_1}{ds} = -bX_1 - aY_1 + aX_1(0) - f_1(r - s), \tag{3.5}$$

$$X_1\Big(\frac{r}{2}\Big) = Y_1\Big(\frac{r}{2}\Big), \quad 2\,Y_1(0) + M(0,0) = 0, \tag{3.6}$$

где $f_1(s) = \displaystyle\int_{-r}^{s-r} M(\tau - s + r, \tau)\,d\tau + M(s - r, 0)$, $s \in [0, r]$.

Общее решение линейной неоднородной системы (3.5) определяется формулами

$$X_1(s)=\Big(\cosh(\lambda s)+\frac{a}{\lambda}\sinh(\lambda s)\Big)C_1+\frac{b}{\lambda}\sinh(\lambda s)C_2+X_1^p(s),$$

$$Y_1(s)=-\frac{b}{\lambda}\sinh(\lambda s)C_1+\Big(\cosh(\lambda s)-\frac{a}{\lambda}\sinh(\lambda s)\Big)C_2+Y_1^p(s),\quad s\in\Big[0,\frac{r}{2}\Big],$$

где $\lambda=\sqrt{a^2-b^2}$, частное решение X_1^p, Y_1^p этой системы удовлетворяет условиям $X_1^p(0)=0$, $Y_1^p(0)=0$ и определяется формулами

$$X_1^p(s)=\frac{a}{\lambda^2}\big[(b-a)(\cosh(\lambda s)-1)-\lambda\sinh(\lambda s)\big]C_1$$

$$+\int\limits_0^s\bigg[\Big(\cosh(\lambda(s-\tau))+\frac{a}{\lambda}\sinh(\lambda(s-\tau))\Big)f_1(\tau)-\frac{b}{\lambda}\sinh(\lambda s)f_1(r-\tau)\bigg]d\tau,$$

$$Y_1^p(s)=\frac{a}{\lambda^2}\big[(b-a)(\cosh(\lambda s)-1)+\lambda\sinh(\lambda s)\big]C_1$$

$$-\int\limits_0^s\bigg[\Big(\cosh(\lambda(s-\tau))-\frac{a}{\lambda}\sinh(\lambda(s-\tau))\Big)f_1(r-\tau)+\frac{b}{\lambda}\sinh(\lambda s)f_1(\tau)\bigg]d\tau,\quad s\in\Big[0,\frac{r}{2}\Big].$$

Краевые условия (3.6) определяют линейные неоднородные алгебраические уравнения для постоянных C_1 и C_2. При выполнении условия

$$\cosh\Big(\frac{\lambda r}{2}\Big)+\frac{b-a}{\lambda}\sinh\Big(\frac{\lambda r}{2}\Big)\neq 0 \tag{3.7}$$

решение алгебраических уравнений определяется формулами

$$C_2=-\frac{1}{2}M(0,0),$$

$$\bigg(\cosh\Big(\frac{\lambda r}{2}\Big)+\frac{b-a}{\lambda}\sinh\Big(\frac{\lambda r}{2}\Big)\bigg)C_1=\frac{1}{2}\bigg(\frac{b+a}{\lambda}\sinh\Big(\frac{\lambda r}{2}\Big)+\cosh\Big(\frac{\lambda r}{2}\Big)\bigg)M(0,0)$$

$$+\int\limits_0^{r/2}\bigg[\cosh\Big(\lambda\Big(\frac{r}{2}-\tau\Big)\Big)-\frac{b+a}{\lambda}\sinh\Big(\lambda\Big(\frac{r}{2}-\tau\Big)\Big)\bigg]f_1(\tau)\,d\tau$$

$$-\int\limits_{r/2}^{r}\bigg[\cosh\Big(\lambda\Big(\frac{r}{2}-\tau\Big)\Big)+\frac{a-b}{\lambda}\sinh\Big(\lambda\Big(\frac{r}{2}-\tau\Big)\Big)\bigg]f_1(\tau)\,d\tau.$$

Можно показать, что для уравнения (3.4) условие (3.7) эквивалентно требованию $\lambda+\mu\neq 0$ для любых $\lambda,\mu\in\sigma(\mathcal{A})$.

4. Системы дифференциальных уравнений, ядра Стилтьеса которых являются квазиполиномами

Рассматривается система с последействием (0.1) с ядром Стилтьеса, определяемым формулами

$$\eta(\tau)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{K}a_{mk}e^{\alpha_m\tau}\tau^k,\quad \tau\in[-r,0),\quad \eta(0)=0, \tag{4.1}$$

где $a_{mk}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha_m\in\mathbb{R}$, $k=\overline{0,K}$, $m=\overline{0,M}$. В этом случае матричное функционально-дифференциальное уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta}=\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{K}\bigg(\tilde a_{mk}^\top\int\limits_{-r-\vartheta}^{0}(\tau+\vartheta)^k e^{\alpha_m(\tau+\vartheta)}X^\top(\tau)\,d\tau+\int\limits_{-r}^{\vartheta}(\tau-\vartheta)^k e^{\alpha_m(\tau-\vartheta)}X(\tau)\,d\tau\,\tilde a_{mk}\bigg)$$

$$-\sum_{m=0}^{M} a_{m0}X(\vartheta) + X(-r)\eta(-r-\vartheta) + f(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{4.2}$$

где $\tilde{a}_{mk} = \alpha_m a_{mk} + (k+1)a_{mk+1}$, $k = \overline{0, K-1}$, $\tilde{a}_{mK} = \alpha_m a_{mK}$, $m = \overline{0, M}$.

Введем множество $\mathcal{I} = \big\{(m,k)\colon \tilde{a}_{mk} \neq 0,\ 0 \le k \le K,\ 0 \le m \le M\big\}$ и матричные функции

$$X_{mk}(\vartheta) = \int\limits_{-r-\vartheta}^{0} (\tau+\vartheta)^k e^{\alpha_m(\tau+\vartheta)} X^\top(\tau)\, d\tau,$$

$$Y_{mk}(\vartheta) = \int\limits_{-r}^{\vartheta} (\tau-\vartheta)^k e^{\alpha_m(\tau-\vartheta)} X(\tau)\, d\tau, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad (m,k) \in \mathcal{I}.$$

При заданной матричнозначной функции X они являются решениями следующих краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_{mj}}{d\vartheta} = jX_{mj-1} + \alpha_m X_{mj} + (-r)^j e^{-\alpha_m r} X^\top(-r-\vartheta), \quad j = \overline{1, k},$$

$$\frac{dX_{m0}}{d\vartheta} = \alpha_m X_{m0} + e^{-\alpha_m r} X^\top(-r-\vartheta),$$

$$\frac{dY_{mj}}{d\vartheta} = -jY_{mj-1} - \alpha_m Y_{mj}, \quad j = \overline{1, k},$$

$$\frac{dY_{m0}}{d\vartheta} = -\alpha_m Y_{m0} + X(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{4.3}$$

$$X_{mj}(-r) = 0, \quad Y_{mj}(-r) = 0, \quad j = \overline{0, k}, \quad (m,k) \in \mathcal{I}. \tag{4.4}$$

Используя уравнение (4.2), замыкаем систему (4.3), (4.4) следующим обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dX}{d\vartheta} = -\sum_{m=0}^{M} a_{m0}X_0 + \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \big(X_{mk}\tilde{a}_{mk} + \tilde{a}_{mk}^\top X_{mk}\big) + X(-r)\eta(-r-\vartheta)Y(-r) + f(\vartheta),$$
$$\vartheta \in [-r, 0], \quad (m,k) \in \mathcal{I}.$$

Вводя новые матричнозначные функции

$$X_0(\vartheta) = X(\vartheta), \quad \tilde{X}_0(\vartheta) = X^\top(-r-\vartheta), \quad \tilde{X}_{mj}(\vartheta) = X_{mj}^\top(-r-\vartheta),$$

$$\tilde{Y}_{mj}(\vartheta) = Y_{mj}^\top(-r-\vartheta), \quad \vartheta \in \Big[-\frac{r}{2}, 0\Big],$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\tilde{X}_0\Big(-\frac{r}{2}\Big) = X_0^\top\Big(-\frac{r}{2}\Big), \quad \tilde{X}_{mj}\Big(-\frac{r}{2}\Big) = X_{mj}^\top\Big(-\frac{r}{2}\Big), \quad \tilde{Y}_{mj}\Big(-\frac{r}{2}\Big) = Y_{mj}^\top\Big(-\frac{r}{2}\Big),$$

$$j = \overline{0, k}, \quad (m,k) \in \mathcal{I},$$

заканчиваем обоснование утверждения, приведенного ниже.

Теорема 4. *Для системы* (0.1) *с ядром Стилтьеса, определяемым формулой* (4.1), *краевая задача* (2.1)–(2.3) *эквивалентна системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dX_0}{d\vartheta} = -\sum_{m=0}^{M} a_{m0}X_0 + \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \big(Y_{mk}\tilde{a}_{mk} + \tilde{a}_{mk}^\top X_{mk}\big) + \tilde{X}_0^\top(0)\eta(-r-\vartheta) + f(\vartheta),$$

$$\frac{d\tilde X_0}{d\vartheta}=\sum_{m=0}^{M}a_{m0}\tilde X_0-\sum_{(m,k)\in\mathcal{I}}\big(\tilde X_{mk}\tilde a_{mk}+\tilde a_{mk}^{\top}\tilde Y_{mk}\big)-\eta^{\top}(\vartheta)\tilde X_0(0)-f^{\top}(-r-\vartheta),$$

$$\frac{dX_{mj}}{d\vartheta}=jX_{mj-1}+\alpha_mX_{mj}+(-r)^je^{-\alpha_m r}\tilde X_0,$$

$$\frac{d\tilde X_{mj}}{d\vartheta}=-j\tilde X_{mj-1}-\alpha_m\tilde X_{mj}-(-r)^je^{-\alpha_m r}X_0,$$

$$\frac{dY_{mj}}{d\vartheta}=-jY_{mj-1}-\alpha_mY_{mj},\quad \frac{d\tilde Y_{mj}}{d\vartheta}=j\tilde Y_{mj-1}+\alpha_m\tilde Y_{mj},\quad j=\overline{1,k},$$

$$\frac{dX_{m0}}{d\vartheta}=\alpha_mX_{m0}+e^{-\alpha_m r}\tilde X_0,\quad \frac{d\tilde X_{m0}}{d\vartheta}=-\alpha_m\tilde X_{m0}-e^{-\alpha_m r}X_0,$$

$$\frac{dY_{m0}}{d\vartheta}=-\alpha_mY_{m0}+X_0,\quad \frac{d\tilde Y_{m0}}{d\vartheta}=\alpha_m\tilde Y_{m0}-\tilde X_0,\quad (m,k)\in\mathcal{I},$$

с краевыми условиями

$$X_0(0)+X_0^{\top}(0)+M(0,0)=0,\quad \tilde X_0^{\top}(0))\eta(-r)=\eta^{\top}(-r)\tilde X_0(0),\quad \tilde X_0\Big(-\frac{r}{2}\Big)=X_0^{\top}\Big(-\frac{r}{2}\Big),$$

$$\tilde X_{mj}\Big(-\frac{r}{2}\Big)=X_{mj}^{\top}\Big(-\frac{r}{2}\Big),\quad \tilde Y_{mj}\Big(-\frac{r}{2}\Big)=Y_{mj}^{\top}\Big(-\frac{r}{2}\Big),$$

$$\tilde X_{mj}(0)=\tilde Y_{mj}(0)=0,\quad j=\overline{0,k},\quad (m,k)\in\mathcal{I}.\qquad\square$$

П р и м е р 2. Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с распределенным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt}=a\int_{-r}^{0}x(t+\vartheta)\,d\vartheta,\quad a\neq 0.$$

Решение краевой задачи (2.1)–(2.3) определяется формулами

$$X(\vartheta)=\tilde X_0(-r-\vartheta),\quad \vartheta\in\Big[-r,-\frac{r}{2}\Big),\quad X(\vartheta)=X_0(\vartheta),\quad \vartheta\in\Big[-\frac{r}{2},0\Big].$$

Здесь $X_0(\cdot)$, $\tilde X_0(\cdot)$ — компоненты решения краевой задачи из теоремы 4, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dX_0}{d\vartheta}=a\,(X_{00}+Y_{00})-a(r+\vartheta)\tilde X_0(0)+f(\vartheta),$$

$$\frac{d\tilde X_0}{d\vartheta}=-a\left(\tilde X_{00}+\tilde Y_{00}\right)-a\vartheta\tilde X_0(0)-f(-r-\vartheta),$$

$$\frac{dX_{00}}{d\vartheta}=\tilde X_0,\quad \frac{d\tilde X_{00}}{d\vartheta}=-X_0,\quad \frac{dY_{00}}{d\vartheta}=X_0,\quad \frac{d\tilde Y_{00}}{d\vartheta}=-\tilde X_0,$$

$$2\,X_0(0)+M(0,0)=0,\quad \tilde X_0\Big(-\frac{r}{2}\Big)=X_0\Big(-\frac{r}{2}\Big),$$

$$\tilde X_{00}\Big(-\frac{r}{2}\Big)=X_{00}\Big(-\frac{r}{2}\Big),\quad \tilde Y_{00}\Big(-\frac{r}{2}\Big)=Y_{00}\Big(-\frac{r}{2}\Big),\quad \tilde X_{00}(0)=\tilde Y_{00}(0)=0.$$

Используя зависимости $\tilde X_{00}(\vartheta)=Y_{00}(0)-Y_{00}(\vartheta)$, $\tilde Y_{00}(\vartheta)=X_{00}(0)-X_{00}(\vartheta)$, $\vartheta\in[-r/2,0]$, преобразуем краевую задачу к следующей форме:

$$\frac{dX_0}{d\vartheta}=a\,(X_{00}+Y_{00})-a(r+\vartheta)\tilde X_0(0)+f(\vartheta),$$

$$\frac{d\tilde X_0}{d\vartheta}=a\,(X_{00}+Y_{00})-a\vartheta\tilde X_0(0)-a\,(X_{00}(0)+Y_{00}(0))-f(-r-\vartheta),$$

$$\frac{dX_{00}}{d\vartheta}=\tilde X_0,\quad \frac{dY_{00}}{d\vartheta}=X_0,$$

$$2\,X_0(0)+M(0,0)=0,\quad \tilde{X}_0\Big(-\frac{r}{2}\Big)=X_0\Big(-\frac{r}{2}\Big),$$

$$X_{00}\Big(-\frac{r}{2}\Big)+Y_{00}\Big(-\frac{r}{2}\Big)=X_{00}(0),\quad X_{00}(0)=Y_{00}(0).$$

Вводя вспомогательные переменные $Z_0=X_0+\tilde{X}_0$, $Z_{00}=X_{00}+Y_{00}$, переходим к новой форме краевой задачи:

$$\frac{dZ_0}{d\vartheta}=2\,aZ_{00}-a(r+2\,\vartheta)\tilde{X}_0(0)-aZ_{00}(0)+f(\vartheta)-f(-r-\vartheta),$$

$$\frac{d\tilde{X}_0}{d\vartheta}=aZ_{00}-a\vartheta\tilde{X}_0(0)-aZ_{00}(0)-f(-r-\vartheta),\quad \frac{dX_{00}}{d\vartheta}=\tilde{X}_0,\quad \frac{dZ_{00}}{d\vartheta}=Z_0,$$

$$2\,(Z_0(0)-\tilde{X}_0(0))+M(0,0)=0,\quad 2\,\tilde{X}_0\Big(-\frac{r}{2}\Big)=Z_0\Big(-\frac{r}{2}\Big),$$

$$Z_{00}\Big(-\frac{r}{2}\Big)=X_{00}(0),\quad 2\,X_{00}(0)=Z_{00}(0).$$

Компоненты решения, отвечающие вспомогательным переменным, определяются формулами

$$Z_0(\vartheta)=\cosh(\nu\vartheta)Z_0(0)+\nu\sinh(\nu\vartheta)Z_{00}(0)+Z_0^p(\vartheta),$$

$$Z_{00}(\vartheta)=\frac{1}{\nu}\sinh(\nu\vartheta)Z_0(0)+\cosh(\nu\vartheta)Z_{00}(0)+Z_{00}^p(\vartheta),$$

где $\nu=\sqrt{2a}$, $\vartheta\in[-r/2,0]$,

$$Z_0^p(\vartheta)=\int\limits_0^{\vartheta}\cosh(\nu(\vartheta-s))\big(-a(r+2s)\tilde{X}_0(0)-aZ_{00}(0)+f(s)-f(-r-s)\big)ds,$$

$$Z_{00}^p(\vartheta)=\frac{1}{\nu}\int\limits_0^{\vartheta}\sinh(\nu(\vartheta-s))\big(-a(r+2s)\tilde{X}_0(0)-aZ_{00}(0)+f(s)-f(-r-s)\big)ds.$$

Компоненты решения $\tilde{X}_0$ и X_{00} находятся простым интегрированием. Краевые условия определяют линейную неоднородную систему алгебраических уравнений для нахождении постоянных $Z_0(0)$, $\tilde{X}_0(0)$, $X_{00}(0)$ и $Z_{00}(0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
2. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 3. С. 39–51.
3. **Царьков Е.Ф., Энгельсон Л.Е.** О статистических решениях линейных систем дифференциально-функциональных уравнений // Топологические пространства и их отображения. Рига: Латв. гос. ун-та, 1983. С. 117–136.
4. **Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
5. **Ким А.В.** i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1996. 234 с.
6. **Infante E.F., Castelan W.B.** A Lyapunov functional for a matrix difference-differential equation // J. Differential Equations. 1978. Vol. 29, no. 3. P. 439–451.
7. **de Oliveira J.C.F., Carvalho L.A.V.** A Lyapunov functional for a retarded differential equation // SIAM. J. Math. Anal. 1985. Vol. 16, no. 6. P. 1295–1305.
8. **Castelan W.B.** A Lyapunov functional for a matrix retarded difference-differential equation with several delay // Lect. Notes in Math. Berlin: Springer, 1980. Vol. 799. P. 82–118.
9. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88.

10. **Datko R.** Extending a theorem of A.M. Liapunov to Hilbert space // J. Math. Appl. 1970. Vol. 32, no. 3. P. 610–616.
11. **Burton T.A.** Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. Orlando: Acad. Press, 1985. 342 p.
12. **Шиманов С.Н.** Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 3. С. 467–480.
13. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
14. **Маркушин Е.М., Шиманов С.Н.** Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для уравнения с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 8. С. 1018–1026.
15. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
16. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
17. **Datko R.** A linear control problem in an abstract hilbert space // J. Differential Equations. 1971. Vol. 9, no. 2. P. 346–359.
18. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 52. P. 95–135.
19. **Маркушин Е.М.** О вычислении квадратичных функционалов для систем с запаздыванием времени // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 2. С. 369–370.
20. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
21. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
22. **Репин Ю.М.** Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 564–566.
23. **Долгий Ю.Ф.** Характеристическое уравнение в задаче устойчивости периодических систем с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. С. 34–43 (Математика и механика; вып. 1.)
24. **Мильштейн Г.Н.** Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 6. С. 984–993.
25. **Ахиезер Н.И., Глазман И.М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 544 с.
26. **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 403 с.
27. **Долгий Ю.Ф.** Квадратичные функционалы Ляпунова — Красовского для линейных автономных систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 48–56.
28. **Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.
29. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
30. **Баскаков А.Г., Воробьев А.А., Романова М.Ю.** Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова // Мат. заметки. 2011. Т. 89, вып. 2. С. 190–203.
31. **Wenzhang H.** Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // J. Math. Anal. Appl. 1989. Vol. 142. P. 83–94.
32. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 232 с.

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Yurii.Dolgii@usu.ru

Поступила 10.02.2013

Том 19 № 4 2013

УДК 517.929

АСИМПТОТИКА РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АВТОНОМНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ[1]

Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков

Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями найдены асимптотические формулы, определяющие аналитические зависимости регуляризованных решений этой системы от параметра регуляризации. Задача решена при требовании достаточной гладкости начальной функции, но при нарушении условий, обеспечивающих непрерывное продолжение решений в сторону убывания времени.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, некорректная задача, асимптотические методы.

Yu. F. Dolgii, P. G. Surkov. Asymptotics of regularized solutions of an ill-posed Cauchy problem for an autonomous linear system of differential equations with commensurable delays.

For an autonomous linear system of differential equations with commensurable delays, asymptotic formulas are found that describe the analytic dependences of regularized solutions of the system on the regularization parameter. The problem is solved under the requirement that the initial function is sufficiently smooth but with the violation of the conditions that guarantee the continuous extension of solution in the direction of decreasing time.

Keywords: differential equations with delay, ill-posed problem, asymptotic methods.

Введение

Рассматривается автономная линейная система дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - j\tau), \tag{0.1}$$

где $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, A_j, $j = [0:m]$, — постоянные матрицы размера $n \times n$, $\tau > 0$, $m \geqslant 2$.

Задача нахождения решения задачи Коши для системы (0.1) на любом отрезке положительной полуоси является корректной для начальной функции $\varphi \in C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $r = m\tau$ [1, с. 189; 2, с. 17; 3, с. 55]. При нахождении ее решения $x(\cdot, \varphi)$ на положительной полуоси можно использовать пошаговую процедуру, которая в функциональном пространстве состояний C [4, с. 182] описывается формулами

$$x_k = Ux_{k-1}, \quad k \geqslant 1, \quad x_0 = \varphi, \quad x_k(\cdot) = x(\cdot + kr). \tag{0.2}$$

Здесь $U\colon C \to C$ — линейный вполне непрерывный оператор, определяемый формулой

$$(U\varphi)(\theta) = V(r+\theta)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{j\tau} V(r+\theta-s) A_j \varphi(s - j\tau)\, ds, \quad \theta \in [-r, 0], \tag{0.3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Урало-Сибирского междисциплинарного проекта, гранта РФФИ (проект 13-01-00094) и проекта УрО РАН М-УрО-2013-2.

где V — матрица Коши уравнения (0.1). Последняя формула является следствием [5, формула (2.1)] в случае автономной системы и $\omega = r$, см. также [3; 6]. Последовательные итерации определяют отрезки решения системы (0.1) на положительной полуоси с помощью формул $x(kr+\theta,\varphi) = x_k(\theta)$, $\theta \in [-r,0]$, $k \geqslant 1$.

При определении решения задачи Коши $x(\cdot,\varphi)$ на отрицательной полуоси используем пошаговую процедуру (0.2) для отрицательных значений индекса k. При ее реализации последовательные итерации определяются формулами

$$x_{k,\alpha} = R(x_{k+1,\alpha},\alpha), \quad k \leqslant -1, \quad x_{0,\alpha} = \varphi,$$

где R — регуляризирующий оператор уравнения

$$Ux = \varphi, \tag{0.4}$$

и α — параметр регуляризации. Регуляризованное решение задачи Коши $x(\cdot,\varphi)$ на отрицательной полуоси будем определять формулами $x(kr+\theta,\varphi) = x_{k,\alpha}(\theta)$, $k \leqslant -1$, $\theta \in (-r,0]$.

Оператор (0.3) допускает непрерывное расширение на сепарабельное гильбертово пространство $H = L_2([-r,0),\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\varphi,\psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-r}^{0} \psi^\top(s)\varphi(s)\,ds$. При расширении сохраняется вполне непрерывность оператора U.

Для нахождения решения некорректной задачи (0.4) используем метод регуляризации А.Н. Тихонова [7, с. 65] со стабилизирующим функционалом следующего вида:

$$\Omega[x] = x^\top(0)x(0) + \int_{-r}^{0} (x^\top(s)x(s) + x'^\top(s)x'(s))\,ds, \quad x \in W_2^1([-r,0],\mathbb{R}^n). \tag{0.5}$$

В случае интегрального оператора U в пространстве $L_2([-r,0],\mathbb{R}^n)$ некорректная задача (0.4) со стабилизирующим функционалом (0.5) имеет единственное решение, которое удовлетворяет краевой задаче для интегродифференциального уравнения [8]. Аналогичный результат можно обосновать для оператора (0.3) в пространстве H.

Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с одним запаздыванием в [9] установлена эквивалентность краевой задачи для интегродифференциального уравнения краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и построена асимптотика регуляризованных решений некорректной задачи Коши для гладких начальных функций. Полученные в [9] результаты обобщены на неавтономные линейные дифференциальные уравнения с одним запаздыванием [10], а также на нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием, описывающее изменение численности популяции [11], а в настоящей работе — на автономные линейные системы дифференциальных уравнений с соизмеримыми запаздываниями.

1. Краевая задача для регуляризованного решения уравнения (0.4)

При нахождении регуляризованного решения уравнения (0.4) для фиксированного значения параметра регуляризации α требуется определить элемент $x_\alpha \in H$, минимизирующий функционал

$$M^\alpha[\varphi,x] = (Ux-\varphi, Ux-\varphi) + \alpha\Omega[x].$$

Этот элемент удовлетворяет краевой задаче для интегродифференциального уравнения [9]

$$\begin{aligned} &(U^*(Ux-\varphi))(\vartheta) + \alpha\big(x(\vartheta) - x''(\vartheta)\big) = 0, \quad \vartheta \in [-r,0), \\ &(U^*(Ux-\varphi))(0) + \alpha\big(x(0) + x'(0)\big) = 0, \quad x'(-r) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Покажем, что для автономной линейной системы с последействием общего вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-r}^{0} [d\eta(s)]\, x(t+s), \tag{1.2}$$

где $\eta\colon [-r,0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — функция с ограниченной вариацией, краевую задачу (1.1) можно заменить эквивалентной задачей для системы функционально-дифференциальных уравнений.

Утверждение 1. *Пусть* $\det A_m \neq 0$ *и* $\varphi \in H$. *Тогда регуляризованное решение уравнения* (1.2) *совпадает с компонентой* x *решения системы функционально-дифференциальных уравнений*

$$\alpha\frac{d^2x(\theta)}{d\theta^2} = \alpha x(\theta) + \frac{d}{d\theta}\int\limits_{-r}^{\theta} \Big(\eta^\top(\theta-t-r) - \eta^\top(-r)\Big)\left(\hat\chi(t) - \hat z(t)\right)\, dt, \tag{1.3}$$

$$\frac{d\hat\chi(\theta)}{d\theta} = \int\limits_{\theta}^{0} [d_t\eta^\top(\theta-t)]\, \hat\chi(t) - \chi(\theta), \tag{1.4}$$

$$\frac{d\hat z(\theta)}{d\theta} = \int\limits_{\theta}^{0} [d_t\eta^\top(\theta-t)]\, \hat z(t) - \varphi(\theta), \tag{1.5}$$

$$\frac{d\chi(\theta)}{d\theta} = \int\limits_{-r-\theta}^{0} [d\eta(t)]\, \chi(\theta+t) + \int\limits_{\theta}^{0} [d_t\eta(t-\theta-r)]\, x(t) \tag{1.6}$$

с краевыми условиями

$$\alpha(x(0)+x'(0)) + \hat\chi(-r) + \hat z(-r) = 0, \tag{1.7}$$

$$\hat\chi(0) = \chi(0), \quad \hat z(0) = \varphi(0), \tag{1.8}$$

$$\chi(-r) = x(0), \quad x'(-r) = 0. \tag{1.9}$$

Здесь положительное число α *является параметром регуляризации некорректной задачи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для системы (1.2) оператор U определяется формулой

$$(Ux)(\theta) = V(\theta+r)x(0) + \int\limits_{-r}^{-0} \frac{\partial}{\partial s}\bigg(\int\limits_{-r}^{\theta} V(\theta-z)\eta(s-z-r)\, dz\bigg) x(s)\, ds, \quad \theta\in[-r,0],$$

где V — матрица Коши уравнения (1.2) [5]. Сопряженный оператор $U^*\colon H \to H$ определяется формулами

$$(U^*y)(0) = V^\top(r)y(0) + \int\limits_{-r}^{0} V^\top(s+r)y(s)\, ds,$$

$$(U^*y)(\theta) = \frac{d}{d\theta}\bigg(\int\limits_{-r}^{0} \eta^\top(\theta-z-r)V^\top(-z)\, dz\bigg) y(0)$$

$$+ \int\limits_{-r}^{0} \frac{d}{d\theta}\bigg(\int\limits_{-r}^{s} \eta^\top(\theta-z-r)V^\top(s-z)\, dz\bigg) y(s)\, ds, \quad \theta\in[-r,0].$$

Введем вспомогательные функции χ, $\hat{\chi}$ и $\hat{z}$:

$$\chi(\vartheta)=(Ux)(\vartheta),\quad \hat{\chi}(\vartheta)=(U_1^*\chi)(\vartheta),\quad \hat{z}(\vartheta)=(U_1^*\varphi)(\vartheta),\quad \vartheta\in[-r,0),$$
$$\chi(0)=\chi(-0),\quad \hat{\chi}(0)=(U_1^*\chi)(-0),\quad \hat{z}(0)=(U_1^*\varphi)(-0),$$

где оператор $U_1^*\colon H\to H^1=W_2^1([-r,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ определяется формулами

$$(U_1^*y)(\theta)=V^\top(-\theta)y(0)+\int\limits_\theta^0 V^\top(s-\theta)y(s)\,ds,\quad \theta\in[-r,0),\quad (U_1^*y)(0)=0.$$

Тогда краевую задачу можно записать в виде

$$(U_2^*(\hat{\chi}-\hat{z}))(\vartheta)+\alpha\big(x(\vartheta)-x''(\vartheta)\big)=0,\quad \vartheta\in[-r,0),\tag{1.10}$$
$$(U^*(\chi-\varphi))(0)+\alpha\big(x(0)+x'(0)\big)=0,\quad x'(-r)=0,\tag{1.11}$$

где оператор $U_2^*\colon H^1\to H$ определяется формулами

$$(U_2^*y)(\theta)=\frac{d}{d\theta}\int\limits_{-r}^{\theta}\big(\eta(\theta-s-r)-\eta(-r)\big)^\top y(s)\,ds,\quad \theta\in[-r,0),\quad (U_2^*y)(0)=0.$$

Учитывая определение оператора U_2^*, уравнение (1.10) приводится к виду (1.3).

Используя определения оператора U_1^* и матрицы Коши V, интегральную зависимость между переменными $\hat{\chi}$ и χ заменяем краевой задачей

$$\frac{d\hat{\chi}(\theta)}{d\theta}=\frac{\partial V^\top(-\theta)}{\partial\theta}\chi(0)-\chi(\theta)+\int\limits_\theta^0\frac{\partial V^\top(s-\theta)}{\partial\theta}\chi(s)\,ds,\quad \theta\in[-r,0),\quad \hat{\chi}(-0)=\chi(0).$$

Тогда, учитывая свойства функции V [3, с. 175], имеем

$$\frac{\partial V^\top(-\theta)}{\partial\theta}\chi(0)+\int\limits_\theta^0\frac{\partial V^\top(s-\theta)}{\partial\theta}\chi(s)\,ds=\int\limits_\theta^0[d_\alpha\eta^\top(\theta-\alpha)]\left(\int\limits_\alpha^0 V^\top(s-\alpha)\chi(s)\,ds+V^\top(-\alpha)\chi(0)\right)$$
$$=\int\limits_\theta^0[d_\alpha\eta^\top(\theta-\alpha)]\,\hat{\chi}(\alpha),\quad \theta\in[-r,0).$$

В результате получаем уравнение (1.4) и первое условие (1.8).

Применяя аналогичные вычисления, зависимость между переменными $\hat{z}$ и φ так же преобразуем к краевой задаче — дифференциальному уравнению (1.5) и второму краевому условию (1.8).

Используя определения оператора U и матрицы Коши V, интегральную зависимость между переменными χ и x заменяем краевой задачей (1.6) с первым краевым условием (1.9).

Преобразуя первое слагаемое краевого условия (1.11), имеем

$$U^*(\chi-\varphi)(0)=V^\top(-r)(\chi(0)-\varphi(0))+\int\limits_{-r}^0 V^\top(s+r)(\chi(s)-\varphi(s))\,ds$$
$$=U_1^*(\chi-\varphi)(-r)=\hat{\chi}(-r)-\hat{z}(-r).$$

Следовательно, краевое условие (1.11) совпадает с краевым условием (1.7). □

Преобразуем краевую задачу (1.3)–(1.9), используя специальный вид функции η для системы (0.1):

$$\eta(0)=0,\quad \eta(s)=-\sum_{j=0}^{k}A_j,\quad -(k+1)\tau<s<-k\tau,\quad 0\leqslant k\leqslant m-1,\quad \eta(-m\tau)=-\sum_{j=0}^{m}A_j,$$

а также специальные обозначения:

$$\hat{x}_j(s)=x(s-(j-1)\tau),\quad \hat{\chi}_j(s)=\hat{\chi}(s-(j-1)\tau),\quad \hat{z}_j(s)=\hat{z}(s-(j-1)\tau),$$
$$\chi_j(s)=\chi(s-(j-1)\tau),\quad \varphi_j(s)=\varphi(s-(1-j)\tau),\quad s\in[-\tau,0],\quad j=[1:m].$$

Теорема 1. *Пусть* $\det A_m\neq 0$ *и* $\varphi\in H$. *Тогда с помощью формул* $x(\theta)=\hat{x}_j(\theta+(j-1)\tau)$, $\theta\in[-j\tau,-(j-1)\tau]$, $j=[1:m]$, *определяется регуляризованное решение уравнения* (0.4). *Здесь функции* $\hat{x}_j$, $j=[1:m]$, *являются компонентами решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\alpha\hat{x}_j''=\alpha\hat{x}_j+\sum_{i=j}^{m}A_{m+j-i}^{\top}(\hat{\chi}_i-\hat{z}_i),\tag{1.12}$$

$$\hat{\chi}_j'=-\sum_{k=1}^{j}A_{j-k}^{\top}\hat{\chi}_k-\chi_j,\tag{1.13}$$

$$\hat{z}_j'=-\sum_{k=1}^{j}A_{j-k}^{\top}\hat{z}_k-\varphi_j,\tag{1.14}$$

$$\chi_j'=\sum_{k=j}^{m}A_{k-j}\chi_k+\sum_{k=1}^{j}A_{m+k-j}\hat{x}_k,\quad j=[1:m],\tag{1.15}$$

с краевыми условиями

$$\hat{x}_j(-\tau)=\hat{x}_{j+1}(0),\quad \hat{x}_j'(-\tau)=\hat{x}_{j+1}'(0),\quad j=[1:m-1],\quad \hat{x}_m'(-\tau)=0,\tag{1.16}$$
$$\alpha(\hat{x}_1(0)+\hat{x}_1'(0))+\hat{\chi}_m(-\tau)-\hat{z}_m(-\tau)=0,\tag{1.17}$$
$$\hat{\chi}_j(-\tau)=\hat{\chi}_{j+1}(0),\quad \hat{z}_j(-\tau)=\hat{z}_{j+1}(0),\quad j=[1:m-1],\tag{1.18}$$
$$\hat{\chi}_1(0)=\chi_1(0),\quad \hat{z}_1(0)=\varphi_1(0),\tag{1.19}$$
$$\chi_j(-\tau)=\chi_{j+1}(0),\quad j=[1:m-1],\quad \chi_m(-\tau)=x_1(0).\tag{1.20}$$

Доказательство. Из краевых условий (1.7)–(1.9) и непрерывности решений системы функционально-дифференциальных уравнений (1.3)–(1.6) следует справедливость краевых условий (1.16)–(1.20). Полагая $\theta=s-(j-1)\tau$, $s\in[-\tau,0]$, $j=[1:m]$, преобразуем систему уравнений (1.3)–(1.6) к виду

$$\alpha\hat{x}_j''(s)=\alpha\hat{x}_j(s)$$
$$+\frac{d}{ds}\int\limits_{-m\tau}^{s-(j-1)\tau}\Big(\eta^{\top}(t)-\eta^{\top}(-m\tau)\Big)\left(\hat{\chi}(s-(m+j-1)\tau-t)-\hat{z}(s-(m+j-1)\tau-t)\right)dt,$$

$$\hat{\chi}_j'(s)=-\int\limits_{s-(j-1)\tau}^{0}[d\eta^{\top}(t)]\,\hat{\chi}(s-(j-1)\tau-t)-\chi_j(s),$$

$$\hat{z}_j'(s)=-\int\limits_{s-(j-1)\tau}^{0}[d\eta^{\top}(t)]\,\hat{z}(s-(j-1)\tau-t)-\varphi_j(s),$$

$$\chi_j'(s) = \int\limits_{-(m-j+1)\tau-s}^{0} [d\eta(t)]\,\chi(s+t-(j-1)\tau) + \int\limits_{-m\tau}^{-(m-j+1)\tau-s} [d\eta(t)]\,x(s+t-(m+j-1)\tau),$$
$$s\in[-\tau,0],\quad j=[1:m].$$

В полученных уравнениях преобразуя интегральные слагаемые, имеем

$$\frac{d}{ds}\int\limits_{-m\tau}^{s-(j-1)\tau}\Big(\eta^\top(t)-\eta^\top(-m\tau)\Big)\,(\hat\chi(s-(m+j-1)\tau-t)-\hat z(s-(m+j-1)\tau-t))\,dt$$

$$=\frac{d}{ds}\sum_{i=j}^{m}A_i^\top\int\limits_{-j\tau}^{s-(j-1)\tau}(\hat\chi(s-(m+j-1)\tau-t)-\hat z(s-(m+j-1)\tau-t))\,dt$$

$$+\frac{d}{ds}\sum_{k=j}^{m-1}\sum_{i=k+1}^{m}A_i^\top\int\limits_{-(k+1)\tau}^{-k\tau}(\hat\chi(s-(m+j-1)\tau-t)-\hat z(s-(m+j-1)\tau-t))\,dt$$

$$=\sum_{k=j}^{m-1}\sum_{i=k+1}^{m}A_i^\top(\hat\chi_{m+j-k-1}(s)-\hat z_{m+j-k-1}(s)-\hat\chi_{m+j-k}(s)+\hat z_{m+j-k}(s))$$

$$+\sum_{i=j}^{m}A_i^\top(\hat\chi_m(s)-\hat z_m(s))=\sum_{i=j}^{m}A_i^\top(\hat\chi_{m+j-i}(s)-\hat z_{m+j-i}(s))=\sum_{i=j}^{m}A_{m+j-i}^\top(\hat\chi_i(s)-\hat z_i(s)),$$

$$\int\limits_{s-(j-1)\tau}^{0}[d\eta^\top(t)]\,\hat\chi(s-(j-1)\tau-t)=\sum_{k=1}^{j}A_{j-k}^\top\hat\chi_k(s),$$
$$\int\limits_{s-(j-1)\tau}^{0}[d\eta^\top(t)]\,\hat z(s-(j-1)\tau-t)=\sum_{k=1}^{j}A_{j-k}^\top\hat z_k(s),$$
$$\int\limits_{-(m-j+1)\tau-s}^{0}[d\eta(t)]\,\chi(s+t-(j-1)\tau)=\sum_{k=j}^{m}A_{k-j}\chi_k(s),$$
$$\int\limits_{-m\tau}^{-(m-j+1)\tau-s}[d\eta(t)]\,x(s+t-(m+j-1)\tau)=\sum_{k=1}^{j}A_{m+k-j}\hat x_k(s),$$
$$s\in[-\tau,0],\quad j=[1:m].$$

Из полученных равенств следует справедливость утверждения теоремы. □

При решении некорректной задачи (0.4) параметр регуляризации α может принимать сколь угодно малые положительные значения. Поэтому краевая задача (1.12)–(1.20) является сингулярной. Ставится задача: найти зависимость от параметра регуляризации α компонент $\hat x_j$, $j=[1:m]$, решения краевой задачи (1.12)–(1.20) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с одним запаздыванием указанная задача решена в работе [9].

2. Преобразование краевой задачи (1.12)–(1.20)

При решении поставленной в предыдущем разделе задачи мы преобразуем краевую задачу (1.12)–(1.20), исключая переменные $\hat{\chi}_j$, $\hat{z}_j$ и χ_j, $j=[1:m]$.

Теорема 2. *Пусть* $\det A_m \neq 0$ *и* $\varphi \in W_2^1([-r,0],\mathbb{R}^n)$. *Тогда с помощью формул* $x(\theta) = \hat{x}_j(\theta+(j-1)\tau)$, $\theta \in [-j\tau, -(j-1)\tau]$, $j=[1:m]$, *определяется регуляризованное решение уравнения* (0.4). *Здесь функции* $\hat{x}_j$, $j=[1:m]$, *являются компонентами решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\hat{x}_j^{IV} - \hat{x}_j'' + \sum_{q=1}^{m} P_{jq}(\hat{x}_q''' - \hat{x}_q') - \sum_{q=1}^{m} Q_{jq}(\hat{x}_q'' - \hat{x}_q) + \alpha^{-1}\sum_{q=1}^{m} B_{jq}\hat{x}_q = \alpha^{-1} f_j(s), \tag{2.1}$$
$$s \in [-\tau, 0], j=[1:m],$$

с краевыми условиями

$$\hat{x}_j(-\tau) = \hat{x}_{j+1}(0), \quad \hat{x}_j'(-\tau) = \hat{x}_{j+1}'(0), \quad j=[1:m-1], \quad \hat{x}_m'(-\tau) = 0, \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{m} C_{k-1}(\hat{x}_k'''(0) - \hat{x}_k'(0)) + (I + A_0^\top)\sum_{k=1}^{m} C_{k-1}(\hat{x}_k''(0) - \hat{x}_k(0)) = 0, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\hat{x}_j''(-\tau) - \hat{x}_{j+1}''(0) + A_j^\top(\hat{x}_1(0) + \hat{x}_1'(0)) = 0, \quad j=[1:m-1],\\ &\hat{x}_m''(-\tau) - x_m(-\tau) + A_m^\top(\hat{x}_1(0) + \hat{x}_1'(0)) = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &\hat{x}_j'''(-\tau) - \hat{x}_{j+1}'''(0) + A_j^\top \sum_{k=1}^{m} A_{m-k}^\top \sum_{q=k}^{m} C_{q-k}(\hat{x}_q''(-\tau) - \hat{x}_q(-\tau))\\ &\qquad + \alpha^{-1}A_j^\top(\hat{x}_1(0) - \varphi_m(-\tau)) = 0, \quad j=[1:m-1],\\ &\hat{x}_m'''(-\tau) - \hat{x}_m'(-\tau) + A_m^\top \sum_{k=1}^{m} A_{m-k}^\top \sum_{q=k}^{m} C_{q-k}(\hat{x}_q''(-\tau) - \hat{x}_q(-\tau))\\ &\qquad + \alpha^{-1}A_m^\top(\hat{x}_1(0) - \varphi_m(-\tau)) = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $f_j(s) = \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^\top\big(\varphi_i'(s) - \sum_{k=i}^{m} A_{k-i}\varphi_k(s)\big)$, $s \in [-\tau, 0]$, $j=[1:m]$, *а матричные коэффициенты системы уравнений* (2.1) *определяются формулами*

$$\sum_{q=1}^{m} B_{jq}\hat{x}_q = \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^\top \sum_{q=1}^{i} A_{m+q-i}\hat{x}_q, \tag{2.6}$$

$$\sum_{q=1}^{m} Q_{jq}\hat{x}_q = \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^\top \sum_{k=i}^{m} A_{k-i} \sum_{p=1}^{k} A_{k-p}^\top \sum_{q=p}^{m} C_{q-p}\hat{x}_q,$$

$$\sum_{q=1}^{m} P_{jq}\hat{x}_q = \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^\top \sum_{k=1}^{i} A_{i-k} \sum_{q=k}^{m} C_{q-k}\hat{x}_q - \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^\top \sum_{k=i}^{m} A_{k-i} \sum_{q=k}^{m} C_{q-k}\hat{x}_q, \quad j=[1:m],$$

где матрицы C_i, $i=[0:m-1]$, *однозначно определяются формулами*

$$C_0 = A_m^{-1\top}, \quad \sum_{i=0}^{p} A_{m+i-p}^\top C_i = 0, \quad p=[1:m-1].$$

Доказательство. Вводя новые переменные $y_j = \hat{\chi}_j - \hat{z}_j$, $j = [1:m]$, заменяем краевую задачу (1.12)–(1.20) следующей задачей:

$$\alpha \hat{x}_j'' = \alpha \hat{x}_j + \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^{\top} y_i, \tag{2.7}$$

$$y_j' = -\sum_{k=1}^{j} A_{j-k}^{\top} y_k - \chi_j + \varphi_j, \tag{2.8}$$

$$\chi_j' = \sum_{k=j}^{m} A_{k-j} \chi_k + \sum_{k=1}^{j} A_{m+k-j} \hat{x}_k, \quad j = [1:m], \tag{2.9}$$

с краевыми условиями

$$\hat{x}_j(-\tau) = \hat{x}_{j+1}(0), \quad \hat{x}_j'(-\tau) = \hat{x}_{j+1}'(0), \quad j = [1:m-1], \quad \hat{x}_m'(-\tau) = 0, \tag{2.10}$$

$$y_1(0) = \chi_1(0) - \varphi_1(0), \tag{2.11}$$

$$y_j(-\tau) = y_{j+1}(0), \quad j = [1:m-1], \quad \alpha(\hat{x}_1(0) + \hat{x}_1'(0)) + y_m(-\tau) = 0, \tag{2.12}$$

$$\chi_j(-\tau) = \chi_{j+1}(0), \quad j = [1:m-1], \quad \chi_m(-\tau) = \hat{x}_1(0). \tag{2.13}$$

Из (2.7) и (2.8) находим

$$\chi_j = -y_j' - \sum_{k=1}^{j} A_{j-k}^{\top} y_k + \varphi_j, \tag{2.14}$$

$$y_j = \alpha \sum_{k=j}^{m} C_{k-j} (\hat{x}_k'' - \hat{x}_k), \quad j = [1:m]. \tag{2.15}$$

Так как $\varphi_j \in W_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, то в силу (2.8) $y_j \in W_2^2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$; тогда, принимая во внимание (2.7), получаем $\hat{x}_j \in W_2^4([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Далее, подставляя (2.15) в (2.14), имеем

$$\chi_j = -\alpha \sum_{k=j}^{m} C_{k-j} (\hat{x}_k''' - \hat{x}_k') - \alpha \sum_{k=1}^{j} A_{j-k}^{\top} \sum_{q=k}^{m} C_{q-k} (\hat{x}_q'' - \hat{x}_q) + \varphi_j, \quad j = [1:m]. \tag{2.16}$$

Отсюда, учитывая уравнения (2.9), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{k=j}^{m} C_{k-j} (\hat{x}_k^{IV} - \hat{x}_k'') + \alpha \sum_{k=1}^{j} A_{j-k}^{\top} \sum_{q=k}^{m} C_{q-k} (\hat{x}_q''' - \hat{x}_q') - \alpha \sum_{k=j}^{m} A_{k-j} \sum_{q=k}^{m} C_{q-k} (\hat{x}_q''' - \hat{x}_q') \\ - \alpha \sum_{k=j}^{m} A_{k-j} \sum_{p=1}^{k} A_{k-p}^{\top} \sum_{q=p}^{m} C_{q-p} (\hat{x}_q'' - \hat{x}_q) + \sum_{k=1}^{j} A_{m+k-j} \hat{x}_k \\ = \varphi_j'(s) - \sum_{k=j}^{m} A_{k-j} \varphi_k(s), \quad j = [1:m], \quad s \in [-\tau, 0]. \end{aligned}$$

Используя определения матриц C_i, $i = [0:m-1]$, последнюю систему преобразуем к следующей форме:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j^{IV} - \hat{x}_j'' + \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^{\top} \sum_{k=1}^{i} A_{i-k}^{\top} \sum_{q=k}^{m} C_{q-k} (\hat{x}_q''' - \hat{x}_q') - \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^{\top} \sum_{k=i}^{m} A_{k-i} \sum_{q=k}^{m} C_{q-k} (\hat{x}_q''' - \hat{x}_q') \\ - \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^{\top} \sum_{k=i}^{m} A_{k-i} \sum_{p=1}^{k} A_{k-p}^{\top} \sum_{q=p}^{m} C_{q-p} (\hat{x}_q'' - \hat{x}_q) + \alpha^{-1} \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^{\top} \sum_{q=1}^{i} A_{m+q-i} \hat{x}_q \\ = \alpha^{-1} \sum_{i=j}^{m} A_{m+j-i}^{\top} \Big(\varphi_i'(s) - \sum_{k=i}^{m} A_{k-i} \varphi_k(s)\Big), \quad j = [1:m], \quad s \in [-\tau, 0], \end{aligned}$$

которая совпадает с формой системы уравнений (2.1). Краевые условия (2.10) совпадают с (2.2). Применяя формулы (2.15) и (2.16) в (2.11), получим краевое условие (2.3). Используя формулы (2.15), краевые условия (2.12) заменим следующими:

$$\begin{gathered}\sum_{k=j}^{m} C_{k-j}(\hat{x}_k''(-\tau)-\hat{x}_k(-\tau))=\sum_{k=j}^{m-1} C_{k-j}(\hat{x}_{k+1}''(0)-\hat{x}_{k+1}(0)), \quad j=[1:m-1],\\ C_0(\hat{x}_m''(-\tau)-\hat{x}_m(-\tau))+\hat{x}_1(0)+\hat{x}_1'(0)=0.\end{gathered} \tag{2.17}$$

С учетом последних равенств, краевые условия (2.13) принимают вид

$$\begin{gathered}\sum_{k=j}^{m} C_{k-j}(\hat{x}_k'''(-\tau)-\hat{x}_k'(-\tau))=\sum_{k=j}^{m-1} C_{k-j}(\hat{x}_{k+1}'''(0)-\hat{x}_{k+1}'(0)), \quad j=[1:m-1],\\ C_0(\hat{x}_m'''(-\tau)-\hat{x}_m'(-\tau))+\sum_{k=1}^{m} A_{m-k}^{\top}\sum_{q=k}^{m} C_{q-k}(\hat{x}_q''(-\tau)-\hat{x}_q(-\tau))\\ +\alpha^{-1}(\hat{x}_1(0)-\varphi_m(-\tau))=0.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Используя равенства (2.2) в краевых условиях (2.17) и (2.18), имеем

$$\sum_{k=j}^{m-1} C_{k-j}(\hat{x}_k''(-\tau)-\hat{x}_{k+1}''(0))+C_{m-j}(\hat{x}_m''(-\tau)-\hat{x}_m(-\tau))=0, \quad j=[1:m-1],$$

$$C_0(\hat{x}_m''(-\tau)-\hat{x}_m(-\tau))+\hat{x}_1(0)+\hat{x}_1(0)=0,$$

$$\sum_{k=j}^{m-1} C_{k-j}(\hat{x}_k'''(-\tau)-\hat{x}_{k+1}'''(0))+C_{m-j}(\hat{x}_m'''(-\tau)-\hat{x}_m'(-\tau))=0, \quad j=[1:m-1],$$

$$C_0(\hat{x}_m'''(-\tau)-\hat{x}_m'(-\tau))+\sum_{k=1}^{m} A_{m-k}^{\top}\sum_{q=k}^{m} C_{q-k}(\hat{x}_q''(-\tau)-\hat{x}_q(-\tau))+\alpha^{-1}(\hat{x}_1(0)-\varphi_m(-\tau))=0.$$

Учитывая определение матриц C_i, $i=[0:m-1]$, последние краевые условия преобразуем к форме (2.4) и (2.5). □

Лемма. *Пусть* $\det A_m \neq 0$. *Тогда матрица* $B=\|B_{jq}\|_{j,q=1}^{m}$ *является симметрической положительно определенной.*

Доказательство. Используя формулы (2.6), определяющие элементы матрицы B, находим

$$B_{ji}=\sum_{k=j}^{m} A_{m+j-k}^{\top}A_{m+i-k} \quad \text{при} \quad 1\leqslant i<j\leqslant m,$$

$$B_{jj}=\sum_{k=j}^{m} A_{m+j-k}^{\top}A_{m+j-k} \quad \text{при} \quad 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$B_{ji}=\sum_{k=i}^{m} A_{m+j-k}^{\top}A_{m+i-k} \quad \text{при} \quad 1\leqslant j<i\leqslant m.$$

Отсюда следует, что $B_{ij}^{\top}=B_{ji}$ при $1\leqslant i<j\leqslant m$ и $B_{jj}^{\top}=B_{jj}$ при $1\leqslant j\leqslant m$.

Покажем, что квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{m} x_j^{\top}B_{ij}x_i$ является положительно определенной. Имеем

$$\sum_{i,j=1}^{m} x_j^{\top}B_{ij}x_i=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=j}^{m} x_j^{\top}A_{m+j-k}^{\top}\sum_{i=1}^{k} A_{m+i-k}x_i=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_j^{\top}A_{m+j-k}^{\top}\sum_{i=1}^{k} A_{m+i-k}x_i=\sum_{k=1}^{m} u_k^{\top}u_k,$$

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} A_{m+i-k} x_i, \quad k = [1:m].$$

Если существует $u_k \neq 0$, $k = [1:m]$, то $x_k \neq 0$. Действительно, выбирая наименьшее из этих k, при $k = 1$ имеем $x_1 = A_m^{-1} u_1 \neq 0$, а при $1 < k \leqslant m$ имеем $u_j = 0$ и $x_j = 0$, $1 \leqslant j < k$, $x_k = A_m^{-1} u_k \neq 0$. Следовательно, квадратичная форма положительно определена. □

3. Асимптотика регуляризованных решений

При нахождении асимптотического представления общего решения системы уравнений (2.1) используются методы асимптотического интегрирования сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений [12, с. 48; 13, с. 223] и результаты работы [9].

Согласно лемме собственные числа матрицы B вещественные и положительные [14]. Тогда неособым ортогональным преобразованием, определяемым матрицей T, матрица B приводится к жордановой форме, т. е. $B = T^\top J T$, где $J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{nm})$; здесь λ_k, $k = [1:nm]$, — собственные числа матрицы B.

Утверждение 2 [9, лемма 2]. *Пусть* $\varphi \in W_2^2([-r,0], \mathbb{R}^n)$, $\det A_m \neq 0$ *и собственные числа матрицы* B *простые. Тогда общее решение системы дифференциальных уравнений* (2.1) *определяется асимптотической формулой*

$$\hat{x}(s,\varphi,\alpha) = T^\top \sum_{j=1}^{4} K_j(\alpha)\Big(\exp(J_j(\alpha)(s-s_j))D_j + \alpha^{-1/4} J_j^{-1}(\alpha)(-G_j(\alpha)f(s)$$
$$+ \int_{s_j}^{s} \exp(J_j(\alpha)(s-t))G_j(\alpha)f'(t)\,dt)\Big), \quad s \in [-\tau, 0], \tag{3.1}$$

где D_j *— произвольные элементы* $\mathbb{C}^{nm}$;

$$J_j(\alpha) = \operatorname{diag}(\lambda_{1j}(\alpha), \ldots, \lambda_{nmj}(\alpha)),$$

$$\lambda_{kj}(\alpha) = \alpha^{-1/4}(\lambda_k^{1/4} e_j + O(\alpha^{1/4}; k, j)), \quad k = [1:nm]; \quad s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = s_4 = -\tau;$$
$$e = (1+i)/\sqrt{2}, \quad e_1 = \bar{e}, \quad e_2 = e, \quad e_3 = -\bar{e}, \quad e_4 = -e; \quad K_j(\alpha) = I_{nm} + \mathbb{O}(\alpha^{1/4}; j);$$
$$G_j(\alpha) = -1/4\, e_j J^{-3/4} + \mathbb{O}(\alpha^{3/4}; j), \quad j = [1:4].$$

Формула (3.1) используется при нахождении асимптотического решения краевой задачи (2.1)–(2.5). Из (3.1) следует справедливость следующих асимптотических формул:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}(-\tau,\varphi,\alpha) = B^{-1}T^\top f(-\tau) + \widetilde{D}_3 + \widetilde{D}_4 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),\\
&\hat{x}(0,\varphi,\alpha) = B^{-1}T^\top f(0) + \widetilde{D}_1 + \widetilde{D}_2 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),\\
&\alpha^{1/4}\hat{x}'(-\tau,\varphi,\alpha) = e_3 B^{1/4}\widetilde{D}_3 + e_4 B^{1/4}\widetilde{D}_4 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),\\
&\alpha^{1/4}\hat{x}'(0,\varphi,\alpha) = e_1 B^{1/4}; \widetilde{D}_1 + e_2 B^{1/4}\widetilde{D}_2 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),\\
&\alpha^{1/2}\hat{x}''(-\tau,\varphi,\alpha) = e_3^2 B^{1/2}\widetilde{D}_3 + e_4^2 B^{1/2}\widetilde{D}_4 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),\\
&\alpha^{1/2}\hat{x}''(0,\varphi,\alpha) = e_1^2 B^{1/2}\widetilde{D}_1 + e_2^2 B^{1/2}\widetilde{D}_2 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),\\
&\alpha^{3/4}\hat{x}'''(-\tau,\varphi,\alpha) = e_3^3 B^{3/4}\widetilde{D}_3 + e_4^3 B^{3/4}\widetilde{D}_4 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),\\
&\alpha^{3/4}\hat{x}'''(0,\varphi,\alpha) = e_1^3 B^{3/4}\widetilde{D}_1 + e_2^3 B^{3/4}\widetilde{D}_2 + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \widetilde{D}) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4}; \varphi),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\widetilde{D}_k = T^\top D_k$, $k = [1:4]$, $\widetilde{D} = \|\widetilde{D}_k\|_{k=1}^4$. Здесь $\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\cdot)\colon \mathbb{C}^{4nm} \to \mathbb{C}^n$ и $\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\cdot)\colon H^2 \to \mathbb{C}^n$ — линейные непрерывные отображения.

Учитывая последние формулы, краевые условия (2.3)–(2.5) преобразуем к виду

$$
\begin{gathered}
\alpha^{3/4}\sum_{k=1}^{m} C_{k-1}\hat{x}_k'''(0,\varphi,\alpha)+\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\widetilde{D})=\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\varphi),\\
\alpha^{1/2}(\hat{x}_j''(-\tau,\varphi,\alpha)-\hat{x}_{j+1}''(0,\varphi,\alpha))+\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\widetilde{D})=\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\varphi),\quad j=[1:m-1],\\
\alpha^{1/2}\hat{x}_m''(-\tau,\varphi,\alpha)+\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\widetilde{D})=\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\varphi),\\
\alpha^{3/4}(\hat{x}_j'''(-\tau,\varphi,\alpha)-\hat{x}_{j+1}'''(0,\varphi,\alpha))+\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\widetilde{D})=\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\varphi),\quad j=[1:m-1],\\
A_m^\top(\hat{x}_1(0)-\varphi_m(-\tau))+\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\widetilde{D})=\mathcal{O}(\alpha^{1/4};\varphi).
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Подставляя в (3.3) значения функций $\hat{x}_k(\cdot,\varphi,\alpha)$, $k=[1:m]$, и их производных, определяемых асимптотическими формулами (3.2), получим линейную неоднородную систему алгебраических уравнений для нахождения $\widetilde{D}_1,\ldots,\widetilde{D}_4$. Коэффициенты этой системы непрерывно зависят от α, и при $\alpha=0$ она имеет вид

$$
\begin{gathered}
(E_2+e_1^3S_mCB^{3/4})\widetilde{D}_1+(E_2+e_2^3S_mCB^{3/4})\widetilde{D}_2-E_1(\widetilde{D}_3+\widetilde{D}_4)\\
=B^{-1}T^\top f(-\tau)-E_2B^{-1}T^\top f(0),\\
B^{-1/4}E_2B^{1/4}(e_1\widetilde{D}_1+e_2\widetilde{D}_2)-e_3\widetilde{D}_3-e_4\widetilde{D}_4=0,\\
B^{-1/2}E_2B^{1/2}(e_1^2\widetilde{D}_1+e_2^2\widetilde{D}_2)-e_3^2\widetilde{D}_3-e_4^2\widetilde{D}_4=0,\\
(S_mA_m^\top S_1+e_1^3E_2B^{3/4})\widetilde{D}_1+(S_mA_m^\top S_1+e_2^3E_2B^{3/4})\widetilde{D}_2-e_3^3E_1B^{3/4}\widetilde{D}_3-e_4^3E_1B^{3/4}\widetilde{D}_4\\
=S_mA_m^\top(S_m\varphi_m(-\tau)-S_1B^{-1}T^\top f(0)).
\end{gathered}
$$

Из второго и третьего уравнения последней системы находим

$$
\begin{gathered}
\widetilde{D}_3^0(\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}F_1-eF_2)\widetilde{D}_1^0(\varphi)-\frac{1}{\sqrt{2}}(eF_1-eF_2)\widetilde{D}_2^0(\varphi),\\
\widetilde{D}_4^0(\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}F_1+\bar{e}F_2)\widetilde{D}_1^0(\varphi)-\frac{1}{\sqrt{2}}(eF_1-\bar{e}F_2)\widetilde{D}_2^0(\varphi),
\end{gathered}
$$

где $F_1=B^{-1/4}E_2B^{1/4}$, $F_2=B^{-1/2}E_2B^{1/2}$, $E_2=\begin{pmatrix}0_{n(m-1)\times n} & I_{n(m-1)\times n(m-1)}\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n(m-1)}\end{pmatrix}$, а $\widetilde{D}_1^0(\varphi)$ и $\widetilde{D}_2^0(\varphi)$ являются решением линейной неоднородной системы

$$
\begin{gathered}
\Big(E_2-eS_mCB^{3/4}+\frac{1}{\sqrt{2}}E_1(2\bar{e}F_1-(e-\bar{e})F_2)\Big)\widetilde{D}_1+\Big(E_2-\bar{e}S_mCB^{3/4}\\
+\frac{1}{\sqrt{2}}E_1(2eF_1-(e-\bar{e})F_2)\Big)\widetilde{D}_2=B^{-1}T^\top f(-\tau)-E_2B^{-1}T^\top f(0),\\
\Big(S_mA_m^\top S_1-eE_2B^{3/4}-\frac{1}{\sqrt{2}}E_1((1-i)F_1-2iF_2)\Big)\widetilde{D}_1+\Big(S_mA_m^\top S_1-\bar{e}E_2B^{3/4}\\
+\frac{1}{\sqrt{2}}E_1B^{3/4}((1+i)F_1+2iF_2)\Big)\widetilde{D}_2=S_mA_m^\top(S_m\varphi_m(-\tau)-S_1B^{-1}T^\top f(0)).
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Здесь

$$
E_1=\begin{pmatrix}I_{n(m-1)\times n(m-1)} & 0_{n(m-1)\times n}\\ 0_{n\times n(m-1)} & 0_{n\times n}\end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix}I_{n\times n}\\ 0_{n(m-1)\times n}\end{pmatrix},
$$

$$
S_m=\begin{pmatrix}0_{n(m-1)\times n}\\ I_{n\times n}\end{pmatrix},\quad C=(C_0,\ldots,C_{m-1}).
$$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W_2^2([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $\det A_m \neq 0$, *собственные числа матрицы* B *простые и определитель системы* (3.4) *отличен от нуля. Тогда решение краевой задачи* (2.1)–(2.5) *определяется асимптотической формулой*

$$\hat{x}(s,\varphi,\alpha) = T^\top \sum_{j=1}^{4} \exp(J_j(\alpha)(s-s_j))T\widetilde{D}_j^0(\varphi) + J^{-1}f(s) + \mathcal{O}(\alpha^{1/4};s,\varphi), \quad s \in [-\tau,0],$$

где $J_j(\alpha)$ *и* s_j, $j=[1:4]$, *определяются в утверждении* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы следует из утверждения 2 и асимптотики решения линейной неоднородной системы (3.3). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беллман Р., Кук К.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. **Мышкис А.Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
3. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.
4. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. **Долгий Ю.Ф.** Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 85–96.
6. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Оптимизация гарантии в функционально-дифференциальных системах с последействием по управлению // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 1. С. 515–525.
7. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
8. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
9. **Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.** Асимптотика регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Проблемы динамического управления: сб. науч. тр. / фак. ВМиК МГУ им. М.В Ломоносова. 2007. Вып. 2. С. 71–99.
10. **Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.** Асимптотика регуляризованных решений линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с опережением // Дифференц. уравнения. 2010. Т.46, № 4. С. 467–485.
11. **Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.** Некорректная задача восстановления численности популяции в математической модели Хатчинсона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 70–84.
12. **Рапопорт И.М.** О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954. 292 с.
13. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
14. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

Долгий Юрий Филиппович

Поступила 31.07.2013

д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Yurii.Dolgii@usu.ru

Сурков Платон Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
науч. сотрудник
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: platon.surkov@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.95

АСИМПТОТИКА ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА НА МНОГООБРАЗИИ, ДИФФЕОМОРФНОМ СФЕРЕ[1]

С. В. Захаров

Рассматривается стационарная система уравнений Навье — Стокса на римановом многообразии, диффеоморфном двумерной сфере. Такая задача представляет интерес в качестве модели метеорологических процессов в атмосферах планет. При ограничении на число Рейнольдса, гарантирующем существование и единственность решения, построен асимптотический ряд по параметру вязкости для обобщенного решения. Доказано, что частичные суммы найденного ряда приближают точное решение по норме, эквивалентной норме соболевского пространства.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, обобщенное решение, риманово многообразие.

S. V. Zakharov. Asymptotics of a generalized solution of the stationary Navier–Stokes system on a manifold diffeomorphic to a sphere.

A stationary system of Navier–Stokes equations is considered on a Riemannian manifold diffeomorphic to a two-dimensional sphere. This problem can be used as a model for meteorological processes in planetary atmospheres. An asymptotic series in the viscosity parameter is constructed for a generalized solution under a constraint on the Reynolds number that guarantees the existence and uniqueness of the solution. We prove that partial sums of the series approximate the exact solution in a norm equivalent to the norm of the Sobolev space.

Keywords: Navier–Stokes system, generalized solution, Riemannian manifold.

1. Введение

В настоящей работе изучается асимптотика обобщенного решения стационарной системы уравнений Навье — Стокса на замкнутом гладком римановом многообразии $\mathbb{M}$, вложенном в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ и диффеоморфном двумерной сфере $\mathbb{S}^2$:

$$\nabla_v v - \varepsilon \triangle v = -\mathrm{grad}\, p + f, \quad \mathrm{div}\, v = 0, \tag{1.1}$$

где f — заданное касательное к $\mathbb{M}$ поле внешних сил; v — искомое касательное поле; $\varepsilon > 0$, ∇_v — ковариантная производная по v; $\triangle$ — оператор Лапласа — де Рама:

$$\nabla_v v = \frac{1}{2}\nabla v^2 - v \times \mathbf{rot}\, v, \quad \triangle v = \nabla \mathrm{div}\, v - \mathrm{rot}\, \mathbf{rot}\, v.$$

Здесь $\mathbf{rot}\, v$ — нормальная к многообразию $\mathbb{M}$ составляющая обычного ротора $\mathrm{rot}\, v$ в $\mathbb{R}^3$ и считается, что вся потенциальная составляющая внешних сил уже содержится в градиенте давления p, а соленоидальная составляющая такова, что интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{M}} f\Phi\, d\mu$ определяет ограниченный функционал над Φ в соболевском пространстве $H^1(T\mathbb{M})$, где $T\mathbb{M}$ — касательное многообразие. Кроме того, предполагается, что поле f ограничено по норме пространства $H^{-1}(T\mathbb{M})$ и регулярным образом зависит от ε.

Прикладное значение системы (1.1) связано с моделированием метеорологических процессов в атмосфере [1]. Требование диффеоморфности многообразия сфере связано именно с

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00679) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

наибольшим прикладным интересом этого случая, а также с тем, что ортогональное разложение пространства векторных полей на сфере имеет наиболее простой вид (тот же, что и для области в $\mathbb{R}^n$, т. е. на градиенты и соленоидальные поля).

2. Существование и единственность решения

В данной работе используется гильбертово пространство $V(T\mathbb{M})$ со скалярным произведением и нормой

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{M}} (\mathbf{rot}\, u, \mathbf{rot}\, v)\, d\mu \quad \text{и} \quad \|v\|_{V(T\mathbb{M})} = \left(\int\limits_{\mathbb{M}} (\mathbf{rot}\, v, \mathbf{rot}\, v)\, d\mu\right)^{1/2},$$

соответственно, понимаемое как замыкание в $H^1(T\mathbb{M})$ пространства гладких соленоидальных векторных полей $V_0(T\mathbb{M})$.

Для дальнейшего потребуется следующее утверждение (см. [2, лемма 2.1].

Лемма. *Трилинейная форма* $\int\limits_{\mathbb{M}} (u \times \mathbf{rot}\, v, w)\, d\mu$ *непрерывна на* $H^1(T\mathbb{M})$:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{M}} (u \times \mathbf{rot}\, v, w)\, d\mu\right| \leqslant c_1 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1}. \tag{2.1}$$

Если $\operatorname{div} u = 0$*, то*

$$\int\limits_{\mathbb{M}} (u \times \mathbf{rot}\, w, w)\, d\mu = 0, \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{M}} (u \times \mathbf{rot}\, v, w)\, d\mu = -\int\limits_{\mathbb{M}} (u \times \mathbf{rot}\, w, v)\, d\mu. \tag{2.3}$$

Из неравенств (2.1) и $\|u\|_{H^1} \leqslant (1 + \gamma_1^{-1/2})\|u\|_V$ вытекает, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{M}} (u \times \mathbf{rot}\, v, w)\, d\mu\right| \leqslant c \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V, \tag{2.4}$$

где $c = c_1(1+\gamma_1^{-1/2})^3$, γ_1 — наименьшее собственное значение оператора $-\operatorname{div}\operatorname{grad}$ в пространстве функций с нулевым средним на $\mathbb{M}$.

По теореме А. А. Ильина [2, теорема 2.1], являющейся аналогом теоремы О. А. Ладыженской [3], при ограничении на число Рейнольдса

$$\|f\|_{H^{-1}(T\mathbb{M})} < \frac{\varepsilon^2}{c} \tag{2.5}$$

существует единственное обобщенное решение системы (1.1), т. е. такой элемент $v \in V(T\mathbb{M})$, что

$$\langle A_0 v + F - \varepsilon v, \Phi\rangle = 0 \tag{2.6}$$

при всех $\Phi \in V_0(T\mathbb{M})$, где

$$A_0 v \in H^1(T\mathbb{M})\colon \forall\, \Phi \in V_0(T\mathbb{M}) \quad \langle A_0 v, \Phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{M}} (v \times \mathbf{rot}\, v, \Phi)\, d\mu, \tag{2.7}$$

$$F \in H^1(T\mathbb{M})\colon \forall\, \Phi \in V_0(T\mathbb{M}) \quad \langle F, \Phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{M}} (\mathbf{rot}\, f, \mathbf{rot}\, \Phi)\, d\mu, \tag{2.8}$$

а существование $A_0 v$ и F гарантируется теоремой об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве. Причем для этого решения справедлива оценка

$$\|v\|_{V(T\mathbb{M})} \leqslant \frac{\|f\|_{H^{-1}(T\mathbb{M})}}{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Далее часто не уточняется пространство в обозначении нормы в силу эквивалентности норм в $V(T\mathbb{M})$ и $H^1(T\mathbb{M})$.

3. Формальная асимптотика

Будем считать, что для поля внешних сил имеет место асимптотическое разложение

$$f(x,\varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x), \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.1}$$

т. е. $\forall\, N \geqslant 2\ \ \exists M_N > 0\colon\ \|f - \sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n f_n\| \leqslant M_N \varepsilon^{N+1}$, а коэффициенты f_n обладают теми же свойствами интегрируемости, что и f.

При сделанных предположениях построим асимптотический ряд, приближающий точное решение $v(x,\varepsilon)$ по норме пространства $V(T\mathbb{M})$. Для стационарной системы Навье — Стокса в трехмерной области такой ряд был построен и обоснован в работе [4].

Для функции (2.8) из разложения (3.1) получаем ряд

$$F(x,\varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n F_n(x), \tag{3.2}$$

т. е. $\forall\, N \geqslant 2\ \ \exists K_N > 0\colon \|F - \sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n F_n\| \leqslant K_N \varepsilon^{N+1}$, где

$$F_n \in V(T\mathbb{M})\colon \forall\, \Phi \in V_0(T\mathbb{M}) \quad \langle F_n, \Phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{M}} (\mathbf{rot}\, f_n, \mathbf{rot}\, \Phi)\, d\mu,$$

а существование элементов F_n гарантируется теоремой об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Построим асимптотику решения при $\varepsilon \to 0$ в виде ряда

$$v_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n. \tag{3.3}$$

Чтобы найти его коэффициенты, подставим разложения (3.2) и (3.3) в функциональное уравнение $A_0 v + F = \varepsilon v$, вытекающее из (2.6), и воспользуемся формальным тождеством

$$\left\langle A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n, \Phi \right\rangle = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=1}^{n-1} \int\limits_{\mathbb{M}} (v_{n-m} \times \mathbf{rot}\, v_m, \Phi)\, d\mu.$$

В результате приравнивания выражений при одинаковых степенях ε получаем рекуррентную систему уравнений для коэффициентов v_n:

$$A_0 v_1 + F_2 = v_1, \tag{3.4}$$

$$A_1 v_2 + F_3 = v_2, \tag{3.5}$$

....

$$A_1 v_n + \widetilde{F}_{n+1} = v_n, \tag{3.6}$$

где

$$\langle A_1 w, \Phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{M}} (v_1 \times \mathbf{rot}\, w, \Phi)\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{M}} (w \times \mathbf{rot}\, v_1, \Phi)\, d\mu, \tag{3.7}$$

$$\langle \widetilde{F}_{n+1}, \Phi\rangle = \langle F_{n+1}, \Phi\rangle + \sum_{m=2}^{n-1} \int\limits_{\mathbb{M}} (v_{n+1-m} \times \mathbf{rot}\, v_m, \Phi)\, d\mu. \tag{3.8}$$

Теорема 1. *Каждое из уравнений* (3.4)–(3.6) *разрешимо единственным образом в классе* $V(T\mathbb{M})$.

Доказательство. По теореме А. А. Ильина [2] уравнение (3.4) имеет единственное решение, поскольку выполнено достаточное условие

$$\|F_2\|_{H^1(T\mathbb{M})} < c^{-1}, \tag{3.9}$$

вытекающее из предположения (2.5) и соотношения $\|f\|_{H^{-1}(T\mathbb{M})} = \|F\|_{H^1(T\mathbb{M})} = \varepsilon^2\|F_2\|_{H^1(T\mathbb{M})} + O(\varepsilon^3)$ с достаточно малым ε. Кроме того, справедлива оценка

$$\|v_1\| \leqslant \|F_2\|. \tag{3.10}$$

Разрешимость остальных уравнений установим методом Лерэ — Шаудера [5]. Для этого покажем, что оператор A_1 компактен. Рассмотрим последовательность w_r, слабо сходящуюся в $V(T\mathbb{M})$. Применяя неравенство Гёльдера к правой части соотношения

$$\langle A_1 w_r - A_1 w_s, \Phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{M}} (v_1 \times \mathbf{rot}\,(w_r - w_s), \Phi)\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{M}} ((w_r - w_s) \times \mathbf{rot}\, v_1, \Phi)\, d\mu$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{M}} (v_1 \times \mathbf{rot}\,\Phi, (w_r - w_s))\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{M}} ((w_r - w_s) \times \mathbf{rot}\, v_1, \Phi)\, d\mu$$

и пользуясь оценкой $\|v_1\|_{L_4(T\mathbb{M})} \leqslant C_0\|v_1\|$, получаем

$$\big|\langle A_1 w_r - A_1 w_s, \Phi\rangle\big| \leqslant C_1 \|w_r - w_s\|_{L_4(T\mathbb{M})} \cdot \|v_1\| \cdot \|\Phi\|.$$

Полагая $\Phi = A_1 w_r - A_1 w_s$, заключаем $\|A_1 w_r - A_1 w_s\| \leqslant C_2\|w_r - w_s\|_{L_4(T\mathbb{M})} \to 0, \quad r, s \to \infty$. Таким образом, получаем сходимость в $V(T\mathbb{M})$ последовательности $A_1 w_r$, а значит, компактность оператора A_1 и отображения $v \mapsto A_1 v + F_3$.

Следуя методу Лерэ — Шаудера, найдем априорную оценку для решения уравнения

$$\lambda(A_1 v_2 + F_3) = v_2,$$

т. е. покажем ограниченность решений $v_2(\lambda)$ при $\lambda \in [0, 1]$ по совокупности. Из предыдущего уравнения вытекает соотношение

$$\|v_2\|^2 = \lambda\langle A_1 v_2, v_2\rangle + \lambda\langle F_3, v_2\rangle.$$

Используя определение (3.7), неравенство (2.4) и формулу (2.2), выводим

$$\Big|\langle A_1 w, w\rangle\Big| \leqslant c\|v_1\| \cdot \|w\|^2 \leqslant c\|F_2\| \cdot \|w\|^2. \tag{3.11}$$

Тогда

$$\|v_2\|^2 \leqslant c\|F_2\| \cdot \|v_2\|^2 + \lambda\|F_3\| \cdot \|v_2\|,$$

$$\|v_2\| \leqslant \frac{\lambda\|F_3\|}{1 - c\|F_2\|} \leqslant \frac{\|F_3\|}{1 - c\|F_2\|},$$

где знаменатель строго больше нуля в силу (3.9). Отсюда по теореме Лерэ — Шаудера вытекает существование решения уравнения (3.5).

Предполагая, что уже найдены решения $v_1,\ v_2, \cdots, v_{n-1}$, докажем разрешимость уравнения (3.6). Из компактности оператора A_1 и формулы (3.8) вытекает компактность отображения $v \mapsto A_1 v + \widetilde{F}_{n+1}$. Допустим, что $\forall\, \lambda \in [0,1]$ существует решение уравнения $\lambda(A_1 v_n + \widetilde{F}_{n+1}) = v_n$. Действуя по той же схеме, получаем

$$\|v_n\|^2 = \lambda\langle A_1 v_n, v_n\rangle + \lambda\langle F_{n+1}, v_n\rangle + \lambda\sum_{m=2}^{n-1}\int\limits_{\mathbb{M}}(v_{n+1-m}\times\mathbf{rot}\, v_m, v_n)\, d\mu.$$

Тогда

$$\|v_n\|^2 \leqslant c\|F_2\|\|v_n\|^2 + \lambda\left(\sum_{m=2}^{n-1}\|v_{n+1-m}\|\|v_m\| + \|F_{n+1}\|\right)\|v_n\|.$$

Следовательно,

$$\|v_n\| \leqslant \frac{\sum_{m=2}^{n-1}\|v_{n+1-m}\|\|v_m\| + \|F_{n+1}\|}{1 - c\|F_2\|}.$$

Отсюда вытекает существование решения уравнения (3.6).

Теперь докажем единственность решений v_n. Допустим, что уравнение (3.6) имеет решения v_n и $\widetilde{v}_n$. Полагая $w = v_n - \widetilde{v}_n$, имеем $A_1 w = w$. Умножая скалярно на w, получаем

$$\|w\|^2 = \int\limits_{\mathbb{M}}(v_1\times\mathbf{rot}\, w, w)\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{M}}(w\times\mathbf{rot}\, v_1, w)\, d\mu.$$

С учетом (2.2) и (2.4) это дает

$$\|w\|^2 \leqslant c\|v_1\|\cdot\|w\|^2, \quad \|v_1\| \geqslant c^{-1},$$

что противоречит неравенствам (3.9) и (3.10).Теорема 1 полностью доказана.

Тем самым доказаны существование и единственность коэффициентов формального асимптотического ряда (3.3).

4. Обоснование асимптотики

Теперь покажем, что построенный ряд (3.3) действительно приближает истинное решение задачи (1.1).

Теорема 2. *Пусть $v \in V(T\mathbb{M})$ — обобщенное решение системы Навье — Стокса* (1.1) *с условиями* (2.5) *и* (3.1) *на замкнутом римановом многообразии $\mathbb{M}$, диффеоморфном двумерной сфере. Тогда для любого $N \geqslant 2$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\left\|v - \sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon^n v_n\right\|_{V(T\mathbb{M})} \leqslant C_N\varepsilon^N, \qquad C_N > 0,$$

где $v_1,\dots,v_n \in V(T\mathbb{M})$ — решения уравнений (3.4)–(3.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим $v = S_N + U_N$, где $S_N = \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n v_n$, в уравнение

$$\langle A_0 v + F - \varepsilon v, \Phi\rangle = 0,$$

учитывая (3.2), (3.4)–(3.6) и соотношения

$$\langle A_0 v, \Phi\rangle = \langle A_0 S_N, \Phi\rangle + \int\limits_{\mathbb{M}}(S_N\times\mathbf{rot}\, U_N, \Phi)\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{M}}(U_N\times\mathbf{rot}\, v, \Phi)\, d\mu,$$

$$\langle A_0 S_N, \Phi\rangle = \sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n \sum_{m=1}^{n-1} \int\limits_{\mathbb{M}} (v_{n-m} \times \mathbf{rot}\, v_m, \Phi)\, d\mu + \varepsilon^{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n \sum_{k+l=N+1+n} \int\limits_{\mathbb{M}} (v_k \times \mathbf{rot}\, v_l, \Phi)\, d\mu.$$

Тогда для остатка U_N получаем

$$\varepsilon\langle U_N, \Phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{M}} (U_N \times \mathbf{rot}\, v, \Phi)\, d\mu + \int\limits_{\mathbb{M}} (S_N \times \mathbf{rot}\, U_N, \Phi)\, d\mu + \varepsilon^{N+1} \langle Q_N^\varepsilon, \Phi\rangle,$$

где

$$Q_N^\varepsilon = F_{N+1} - v_N + \sum_{k+l=N+1} \int\limits_{\mathbb{M}} (v_k \times \mathbf{rot}\, v_l, \Phi)\, d\mu + O(\varepsilon).$$

Полагая $\Phi = U_N$ и учитывая (2.2)–(2.3), приходим к следующей формуле:

$$\varepsilon \|U_N\|^2 = -\int\limits_{\mathbb{M}} (U_N \times \mathbf{rot}\, U_N, v)\, d\mu + \varepsilon^{N+1} \langle Q_N^\varepsilon, U_N\rangle.$$

Отсюда, с помощью неравенства (2.4) выводим

$$\varepsilon \|U_N\|^2 \leqslant c\,\|v\| \|U_N\|^2 + \varepsilon^{N+1} \|Q_N^\varepsilon\| \|U_N\|.$$

Из априорных оценок (2.5) и (2.9) вытекает, что

$$c\,\|v\| \leqslant \frac{c\,\|f\|}{\varepsilon} < \varepsilon, \quad \varepsilon - c\,\|v\| > 0.$$

Следовательно,

$$\|U_N\| \leqslant \frac{\varepsilon^{N+1} \|Q_N^\varepsilon\|}{\varepsilon - c\,\|v\|}.$$

Пользуясь разложениями (3.1), (3.2) и неравенством (3.9), получаем

$$\varepsilon - \frac{c\,\|f\|}{\varepsilon} = \varepsilon(1 - c\,\|F_2\|) + O(\varepsilon^2), \quad \text{где } c\,\|F_2\| < 1.$$

Таким образом, поскольку $\|Q_N^\varepsilon\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, заключаем, что

$$\|v - S_N\| = \|U_N\| \leqslant C_N \varepsilon^N.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.** Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 287 с.
2. **Ильин А.А.** Уравнения Навье — Стокса и Эйлера на двумерных замкнутых многообразиях // Мат. сб. 1990. Т. 181. № 4. С. 521–539.
3. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961. 204 с.
4. **Захаров С.В.** Регулярная асимптотика обобщенного решения стационарной системы Навье — Стокса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 108–113.
5. **Гилбарг Д., Трудингер Н.С.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила 15.05.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕСТАНОВКИ ОДНОТИПНЫХ ОБЪЕКТОВ[1]

Е. Е. Иванко

Рассматривается задача оптимизации перемещений по неоднородной местности в ходе перестановки n однотипных объектов на n новых позиций. В работе обсуждаются возможные приложения данной задачи; получен метод динамического программирования для построения оптимального маршрута, совмещающего сбор и расстановку объектов; проведен вычислительный эксперимент на модельном участке карты.

Ключевые слова: перестановка объектов, динамическое программирование, задача коммивояжера.

E. E. Ivanko. Dynamic programming in a problem of rearranging single-type objects.

We consider the problem of optimizing travels over a nonhomogeneous region in the process of rearranging n single-type objects to n new positions. We discuss possible applications of this problem, obtain a dynamic programming method for the construction of an optimal route combining the collection and placement of objects, and carry out a numerical experiment on a model segment of a map.

Keywords: rearrangement of objects, dynamic programming, traveling salesman problem.

Введение

Большую роль в исследовании удаленных и протяженных технических объектов, а также окружающей среды играют регулярные наблюдения и измерения заданных параметров, осуществляемые, как правило, однотипными автономными измерительными (наблюдательными) устройствами. Для повышения репрезентативности полученных наблюдений во многих задачах подобного рода целесообразно периодически менять положение наблюдательных устройств, переставляя их на новые позиции. Очевидным (но не оптимальным) решением задачи перестановки является двухэтапная процедура: сначала обойти и собрать все используемые в наблюдении датчики, затем, во время второго обхода, расставить собранные датчики на новые позиции. Однако если процесс перемещения при обходе является трудоемким в силу особенностей окружающей среды, а сами перемещения осуществляются достаточно часто, существенную экономическую роль может сыграть объединение двух этапов в рамках одного оптимального маршрута, в ходе перемещения по которому будет осуществляться требуемая перестановка. В исследуемой постановке предполагается существование точки входа, совпадающей с точкой выхода. Содержательно такой точкой может быть, например, местоположение транспортного средства агента, осуществляющего перемещение измерительных устройств.

Близкой по содержанию является работа [1], в которой рассматривается несколько более общая задача, однако не приводится точного решения. На практике подобные постановки могут иметь место в различных геологических задачах (вулканологии, геохимии, сейсмологии): при перемещении измерительных датчиков по поверхности различных пород; в задачах океанологии при перемещении измерительной аппаратуры в водной массе; в области метеорологии при перемещении аэростатов в воздушном пространстве. В будущем, вероятно, подобные проблемы возникнут и при перемещении статических датчиков в космическом пространстве. Ряд задач, требующих периодического перемещения набора независимых измерительных приборов, может быть связан с наблюдением за состоянием и безопасностью протяженных технических объектов (труб, линий электропередач, железнодорожных путей, автомобильных дорог).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-04-00847-а, 13-01-90414-а, 13-08-00643-а, 13-01-96022-р_урал_а, 13-01-90414-Укр_ф_а).

Наконец, оптимизация перемещения измерительных датчиков может играть решающую роль при осуществлении контроля за объектами в агрессивной внешней среде, например, в зоне повышенной радиоактивности, химического заражения или пожароопасной зоне.

1. Формальная постановка задачи

Пусть задано $2n$-элементное множество $X = \{1, \ldots, 2n\}$ и точка старта 0 (являющаяся также точкой финиша). Пусть $X_0 \triangleq X \cup \{0\}$. Содержательно $\{1, \ldots, n\} \subset X$ есть подмножество перемещаемых объектов, а $\{n+1, \ldots, 2n\} \subset X$ есть позиции, на которые данные объекты следует переместить. На элементах множества X_0 задана функция стоимости перемещения $d\colon X_0^2 \to \mathbb{R}^+$. Отметим, что на данную функцию не накладывается никаких дополнительных ограничений.

Пусть функция $f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{N}$ показывает число объектов, находящихся в наличии у осуществляющего перестановку агента, после того как, стартуя из точки $x_0 \triangleq 0$, агент посетил некоторый смешанный набор $K \subseteq X_0$ объектов и позиций:

$$f(K) \triangleq \sum_{j \in K} I(j); \qquad I(i) = \begin{cases} -1, & \text{если } i \in \overline{n+1, 2n}; \\ 0, & \text{если } i = 0; \\ 1, & \text{если } i \in \overline{1, n}. \end{cases}$$

Здесь функция I определяет, что а) изначально агент не имел объектов; б) при посещении каждого объекта происходит его изъятие, при этом число объектов у агента увеличивается на 1; в) при посещении каждой позиции происходит установка объекта на позицию, при этом число объектов у агента уменьшается на 1.

При $k \in \overline{1, 2n+2}$ *допустимым* будем называть всякий кортеж $(x_1, \ldots, x_k) \in X_0^k$, для которого справедливо условие

$$\forall j \in \overline{1, k} \quad f(\{x_1, \ldots, x_j\}) \geq 0.$$

Очевидно для всякого $k \in \overline{1, 2n}$ допустимость кортежа $(x_0, x_1, \ldots, x_k, x_0)$ эквивалентна допустимости кортежа $(x_1, \ldots, x_k)$.

Требуется найти перестановку $\gamma^0\colon \overline{1, 2n} \leftrightarrow \overline{1, 2n}$, на которой достигается

$$\min_{\gamma \in G} \left\{ d(0, \gamma(1)) + \left(\sum_{i=1}^{2n-1} d(\gamma(i), \gamma(i+1)) \right) + d(\gamma(2n), 0) \right\}, \tag{1.1}$$

где

$$G \triangleq \left\{ \gamma\colon \overline{1, 2n} \leftrightarrow \overline{1, 2n} \mid (\gamma(1), \ldots, \gamma(2n)) \text{ — допустим} \right\}. \tag{1.2}$$

Здесь условие (1.1) обеспечивает минимальность “трудоемкости” выбираемой очередности посещения объектов и позиций в смысле заданной функции d, а условие (1.2) гарантирует недопустимость ситуации, в которой агент прибыл на позицию для размещения объекта с пустым набором размещаемых объектов.

2. Метод динамического программирования

2.1. Насчитывание значений функции Беллмана

Для решения поставленной задачи будем использовать следующую вариацию метода динамического программирования (оригинальный метод изложен впервые в [2], некоторые более сложные вариации подробно рассматриваются в [3; 4]):

$$\forall x \in X \quad v(x, \varnothing) = \begin{cases} d(0, x), & \text{если } I(x) = 1; \\ H, & \text{иначе;} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\forall K \subset X\colon 1 \le |K| < |X|, \quad \forall x \in X \setminus K$$

$$v(x,K) = \begin{cases} \min\limits_{y \in K} \bigl\{ d(y,x) + v(y, K \setminus \{y\}) \bigr\}, & \text{если } f(K \cup \{x\}) \ge 0; \\ H, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{2.4}$$

$$v(0,X) = \min_{y \in X} \bigl\{ d(y,0) + v(y, X \setminus \{y\}) \bigr\}. \tag{2.5}$$

Здесь H некоторое достаточно большое число, например $H = 2 \sum\limits_{x,y \in X_0} d(x,y)$.

2.2. Процедура восстановления очередности

Рекурсивная процедура (2.3)–(2.5) допускает восстановление очередности посещения элементов X. Для такого восстановления будем использовать следующий обычный для динамического программирования алгоритм, действующий “в обратном порядке”:

1) пусть $z_{2n} \in X$ такой, что при $y = z_{2n}$ выражение (2.5) достигает своего минимума;
2) при $x \triangleq z_{2n},\ K \triangleq X \setminus \{z_{2n}\}$ выберем $z_{2n-1} \in K$ так, чтобы при $y = z_{2n-1}$ выражение (2.4) достигало своего минимума;
3) при $x \triangleq z_{2n-1},\ K \triangleq X \setminus \{z_{2n}, z_{2n-1}\}$ выберем $z_{2n-2} \in K$ так, чтобы z_{2n-2} минимизировал выражение (2.4);
...
2n) при $x \triangleq z_2,\ K \triangleq X \setminus \{z_{2n}, \ldots, z_2\}$ выберем $z_1 \in K$ единственным образом.

В результате применения описанной процедуры восстановления получим кортеж

$$(0, z_1, \ldots, z_{2n}, 0), \tag{*}$$

где элементы множества $\{z_1, \ldots, z_{2n}\}$ попарно различны. Очевидно данному кортежу взаимно-однозначно соответствует некоторая перестановка $\gamma^*\colon \overline{1,2n} \leftrightarrow \overline{1,2n}$, где $\gamma^*(i) \triangleq z_i$. Покажем, что γ^* является решением исходной задачи, а именно γ^* минимизирует выражение (1.1) и $\gamma^* \in G$.

3. Доказательство оптимальности

Всякий кортеж попарно различных элементов множества X_0 будем называть *маршрутом.* Всякому маршруту $\alpha = (x_1, \ldots, x_{2n})$, где $\forall i \in \overline{1,2n}\ \ x_i \in X$, взаимно-однозначно соответствует кортеж $\beta = (0, x_1, \ldots, x_{2n}, 0)$, который далее будем называть *замкнутым маршрутом.* Как отмечалось выше, допустимость α эквивалентна допустимости β. Стоимостью $D(\alpha)$ маршрута (или замкнутого маршрута) $\alpha = (x_1, \ldots, x_m) \in X_0^m$ при $m \in \overline{1, 2n+2}$ будем называть величину $\sum_{i=1}^{m-1} d(x_i, x_{i+1})$.

Утверждение 1. *Замкнутый маршрут* (*) *является допустимым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем для начала, что $v(0,X) < H$. Заметим, что в силу определения функции I маршрут $(1, 2, \ldots, 2n)$ является допустимым. Используем этот маршрут для оценки $v(0,X)$:

$$v(0,X) = \min_{y \in X} \bigl\{ d(y,0) + v(y, X \setminus \{y\}) \bigr\} \le d(2n,0) + v(2n, X \setminus \{2n\})$$

$$\overset{f(X) \ge 0}{=} d(2n,0) + \min_{y \in X \setminus \{2n\}} \bigl\{ d(y,2n) + v(y, X \setminus \{2n, y\}) \bigr\} \le d(2n,0) + d(2n-1,2n)$$

$$+ v(2n-1, X \setminus \{2n, 2n-1\}) \overset{f(X \setminus \{2n\}) \ge 0}{\le} \ldots \le d(2n,0) + \sum_{i=1}^{2n} d(i-1,i) < H.$$

Рассмотрим теперь маршрут $(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})$. По определению функции I очевидно $f(X) \geq 0$. В силу доказанного выше $v(0, X) < H$, а значит и $\forall i \in \overline{1, 2n} \quad v(z_i, X \setminus \{z_{2n}, \ldots, z_i\}) < H$. Если бы это неравенство не выполнялось, то нарушалось бы и показанное выше неравенство $v(0, X) < H$, поскольку в силу построений (2.4), (2.5) и неотрицательности значений функции v для всякого $i \in \overline{1, 2n}$ справедливо $v(0, X) \geq v(z_i, X \setminus \{z_{2n}, \ldots, z_i\})$.

Возвращаясь к построениям схемы (2.4), имеем

$$\forall i \in \overline{1, 2n-1} \ \ (v(z_i, X \setminus \{z_{2n}, \ldots, z_i\}) < H \Rightarrow f(X \setminus \{z_{2n}, \ldots, z_{i+1}\}) \geq 0),$$

что и означает допустимость маршрута $(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})$. □

Утверждение 2. *Для произвольных* $K \subset \overline{1, 2n}$, $x \in \overline{1, 2n} \backslash K$ *рекурсивно вычислим* $v(x, K)$ *по схеме* (2.3), (2.4), *после чего восстановим маршрут* $\alpha \triangleq (0, x_1, \ldots, x_{|K|}, x)$, *используя неполный вариант схемы подразд.* 2.2. *Если маршрут* α *является допустимым, то он обладает наименьшей стоимостью среди всех допустимых маршрутов обхода* K *с началом в* 0 *и концом в* x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассуждать по индукции на $|K|$.

База индукции: при $|K| = 0$ утверждение очевидно.

Шаг индукции: пусть утверждение справедливо для всякого $K\colon |K| < k$, покажем справедливость утверждения для $|K| = k$. Будем рассуждать от противного: пусть существует допустимый маршрут $\beta \triangleq (0, q_1, \ldots, q_{|K|}, x)$ обхода множества K с началом в 0 и концом в x такой, что $D(\beta) < D(\alpha)$, тогда, обозначая $\widetilde{\beta} \triangleq (0, q_1, \ldots, q_{|K|})$ (очевидно $\widetilde{\beta}$ допустим), имеем оценку

$$D(\beta) = d(q_{|K|}, x) + D(\widetilde{\beta}) \overset{\text{по инд.}}{\geq} d(q_{|K|}, x) + v(q_{|K|}, K \setminus \{q_{|K|}\})$$
$$\geq \min_{y \in K}\{d(y, x) + v(y, K \setminus \{y\})\} = (\text{так как } \alpha \text{ допустим}) = D(\alpha).$$

Полученное противоречие доказывает утверждение. □

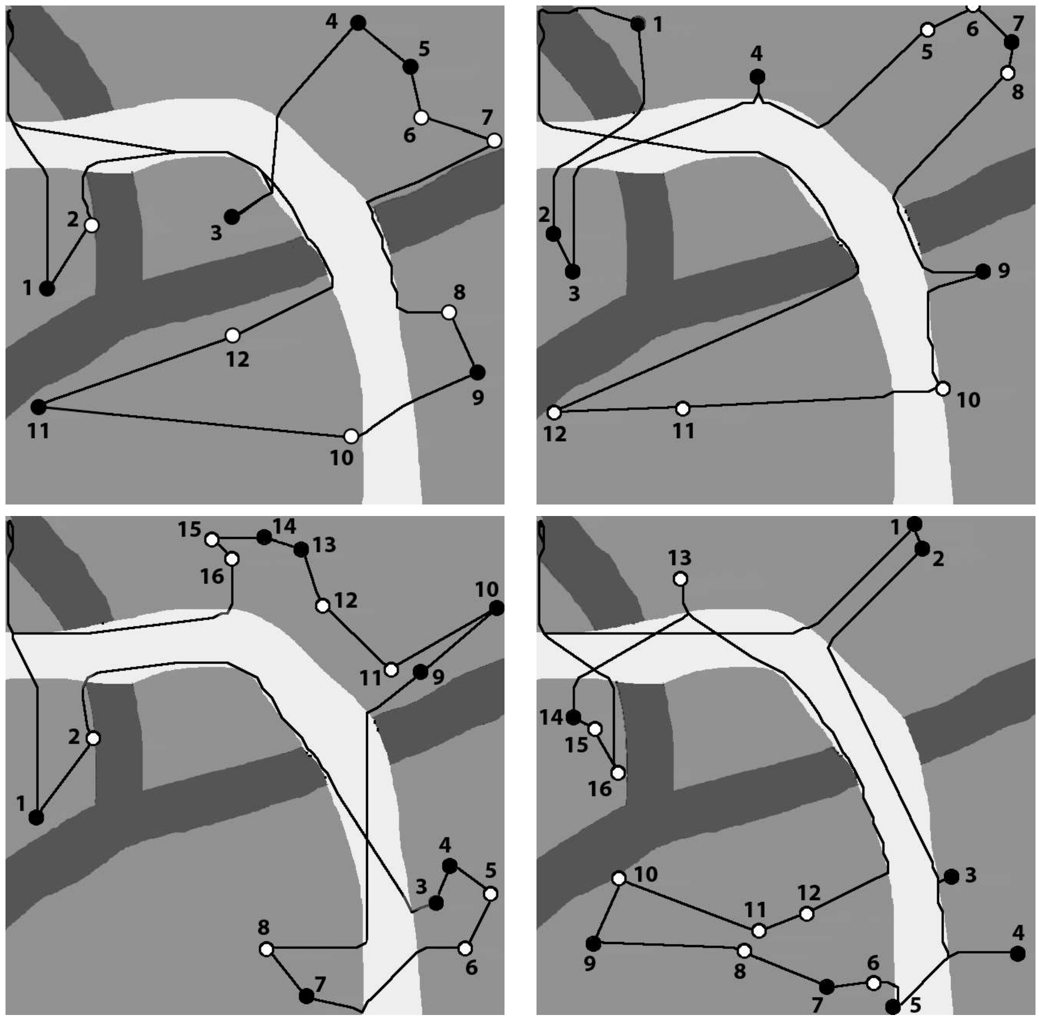
Следствие. *Замкнутый маршрут* (*) *является оптимальным допустимым замкнутым маршрутом обхода* X_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим замкнутый маршрут (*) как α_0. Будем рассуждать от противного. Пусть существует допустимый замкнутый маршрут $\beta = (0, x_1, \ldots, x_{2n}, 0)$ такой, что $D(\beta) < D(\alpha_0)$. Пусть $\widetilde{\beta} \triangleq (0, x_1, \ldots, x_{2n})$, тогда очевидно $\widetilde{\beta}$ допустим и

$$D(\beta) = d(x_{2n}, 0) + D(\widetilde{\beta}) \overset{\text{Утв. 2}}{\geq} d(x_{2n}, 0) + v(x_{2n}, X \setminus \{x_{2n}\})$$
$$\geq \min_{y \in X}\{d(y, 0) + v(y, X \setminus \{y\})\} = D(\alpha_0).$$

4. Эксперимент и обсуждение

В рассматриваемых экспериментах строится оптимальный маршрут перемещения 6 или 8 объектов (обозначены на рисунке темными кружками) на 6 или 8 новых заданных позиций (обозначены выколотыми кружками). Место точки старта во всех экспериментах точка совпадает с левой верхней точкой изображения. Исходные объекты и новые позиции расположены в узлах решетки 100×100 на растровой карте, введенной вручную в графическом редакторе. Попарные расстояния между позициями рассчитывались с помощью алгоритма поиска в ширину в графе (решетке 100×100) с учетом особенностей местности (оттенка фона, на котором располагается тот или иной узел решетки). При переходе из соседнего узла в узел решетки, находящийся в наиболее светлой области (дорога) стоимость перемещения составляла 10 единиц;



Примеры решения задачи восстановления оптимального порядка и траектории движения в ходе перестановки набора точек (темные кружки) на плоскости с неоднородным рельефом на заданные позиции (выколотые кружки). Точка старта и финиша каждого маршрута расположена в левом верхнем углу.

в области промежуточного тона (пересеченная местность) — 100 единиц и в области наиболее темного тона (река) — 1000 единиц. Цифры на рисунке показывают порядок посещения вершин, а темно-серая линия — оптимальную траекторию движения по узлам решетки. Данная траектория построена автоматически на основе процедуры восстановления кратчайшего пути в графе и умышленно оставлена на рисунке в исходном растровом виде.

Вычисления проводились на компьютере AMD Phenom II X6 1055T 2.8 GHz, 6Гб ОЗУ с использованием свободно распространяемого языка программирования Perl. Время предварительного подсчета попарных “расстояний” между заданными 16 узлами решетки, содержащими исходные объекты и целевые позиции, с учетом неоднородности карты (иными словами, подготовка функции d) составило ≈ 6 мин. Время расчета оптимального маршрута для задачи на 16 узлах решетки с использованием метода динамического программирования, описанного в разд. 2, составило ≈ 3 мин.

Выражение (2.4) отличается от соответствующего шага в классическом методе динамического программирования необходимостью расчета значения функции $f(K \cup \{x\})$, однако, поскольку множество K подготовлено заранее (оно требуется для расчета “основного” минимума в (2.4)), вычисление $f(K \cup \{x\})$ сводится к суммированию $I(j)$ по всем $j \in K \cup \{x\}$, требуя, очевидно, линейного от размера множества K числа операций. Сказанное позволяет утверждать, что асимптотическая оценка трудоемкости предложенного метода динамического программирования эквивалентна оценке трудоемкости классического метода динамического программирования [5] и может быть записана в виде $O(n^2 2^n)$.

Отметим, что поскольку трудоемкость метода динамического программирования в задаче коммивояжера экспоненциально зависит от размера входных данных, постановки, в которых требуется переставить более 10 объектов, уже представляют сложность для решения предложенным методом на ПЭВМ. Между тем, конкретная прикладная задача по перестановке измерительных устройств, стоящая перед одним агентом, нередко укладывается в данные ограничения, поскольку при росте количества переставляемых измерительных устройств увеличивается обыкновенно и число агентов, осуществляющих перестановку. В этой связи интересным развитием данной работы было бы рассмотрение задачи оптимального перемещения N агентов, осуществляющих одновременную перестановку $n > N$ объектов (похожие постановки без учета допустимости маршрутов рассматривались, например, в [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бронштейн Е.М., Гиндуллин Р.В.** Об одном классе задач маршрутизации // Мат. моделирование. 2011. Т. 23, № 6. С. 123–132.
2. **Bellman R.** Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem // J. Assoc. Comput. Mach. 1962. No. 9. P. 61–63.
3. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–33.
4. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2008. 240 с.
5. **Held M., Karp R.M.** A dynamic programming approach to sequencing problems // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1962. Vol. 10, no. 1. P. 196–210.

Поступила 05.08.2013

Иванко Евгений Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: viatore@ya.ru

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ[1]

Ю. Н. Киселёв, С. Н. Аввакумов

Рассматривается двумерная гамильтонова система, гамильтонианом которой служит опорная функция плоского гладкого выпуклого компакта, содержащего нуль в качестве внутренней точки. Замкнутые траектории этой системы подобны полярным кривым исходного выпуклого компакта (линиям уровня опорной функции). Двумерная задача Коши введением обобщенных полярных координат сводится к одномерной, решение которой в определенных случаях допускает представление в аналитической форме. Интерес к этой теме связан с анализом обобщенной задачи Чаплыгина. В статье используется техника опорных функций, эффективность которой при решении задач оптимального управления отмечалась в ряде публикаций авторов. Примеры проиллюстрированы графиками.

Ключевые слова: выпуклые множества, опорные и дистанционные функции, гамильтонова система, принцип максимума Понтрягина.

Yu. N. Kiselev, S. N. Avvakumov. Construction of analytic solutions of the Cauchy problem for a two-dimensional Hamiltonian system.

We consider a two-dimensional Hamiltonian system whose Hamiltonian is the support function of a flat smooth convex compact set that contains the origin in its interior. Closed trajectories of this system are similar to polar curves of the original convex compact set (level lines of the support function). The introduction of generalized polar coordinates reduces the two-dimensional Cauchy problem to a one-dimensional problem, and its solution in some cases can be presented in analytic form. The interest in this topic is connected with the analysis of Chaplygin's generalized problem. We use the technique of support functions; its efficiency in optimal control problems was noted in a number of the authors' papers. Examples are illustrated by graphs.

Keywords: convex sets, support and distance functions, hamiltonian system, Pontryagin maximum principle.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную гамильтонову систему [7]

$$\dot p_1 = -c'_{p_2}(p_1,p_2), \quad \dot p_2 = c'_{p_1}(p_1,p_2), \tag{1.1}$$

гамильтониан которой

$$c(p) \equiv \max_{u\in U}\,(u,p), \quad p\in\mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

является опорной функцией гладкого выпуклого компакта $U\in\Gamma(\mathbb{R}^2)$, см. [1; 2]:

1° $0\in \operatorname{int} U \;\Leftrightarrow\; c(\psi)>0$ для любых $\psi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$;

2° градиент $c'(\psi)$ и гессиан $c''(\psi)$ определены и непрерывны для любых $\psi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$;

3° ранг матрицы $c''(\psi)$ равен 1 при любом $\psi\neq 0$ (условие максимальности ранга).

В формуле (1.2) символом (u,p) обозначается скалярное произведение векторов u и p.

Векторная запись системы (1.1)

$$\frac{dp}{dt}\equiv \dot p = A^*c'(p), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

содержит кососимметричную матрицу $A^*=-A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. К уравнению (1.3) присоединяем начальное условие

$$p\big|_{t=0}=p^0\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}. \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00175) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6512.2012.1).

Решение задачи Коши (1.3), (1.4) будем обозначать $p(t, p^0)$. Для построения этого решения привлекаются описанные ниже обобщенные полярные координаты r, φ, позволяющие понизить порядок задачи до 1 и вычислить период решения $p(t, p^0)$.

2. Технические вопросы

2.1. Поляра. Некоторые полезные соотношения

Рассмотрим двумерное множество

$$\tilde{U} = \big\{q \in \mathbb{R}^2 \colon c(q) \leqslant 1\big\}$$

— множество единичного подуровня опорной функции (1.2) множества U. Множество $\tilde{U}$ будем называть *полярой* множества U; можно показать, что $\tilde{U}$ является гладким выпуклым компактом: $\tilde{U} \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$, $0 \in \operatorname{int} \tilde{U}$. Рассмотрим опорную функцию множества $\tilde{U}$:

$$d(u) = \max_{q \in \tilde{U}} \, (q, u), \quad u \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

Множество $\tilde{\tilde{U}} = \big\{u \in \mathbb{R}^2 \colon d(u) \leqslant 1\big\}$ (*биполяра* — поляра множества $\tilde{U}$) совпадает с исходным множеством U: $\tilde{\tilde{U}} = U$. Функцию (2.1) будем называть *дистанционной функцией* множества U.

Границы ∂U, $\partial \tilde{U}$ множеств U, $\tilde{U}$ соответственно допускают следующее описание:

$$\partial U = \bigcup_{\|q\|=1} \Big\{c'(q)\Big\} = \bigcup_{\|u\|=1} \Big\{\frac{u}{d(u)}\Big\} = \Big\{u \in \mathbb{R}^2 \colon d(u) = 1\Big\}, \tag{2.2}$$

$$\partial \tilde{U} = \bigcup_{\|u\|=1} \Big\{d'(u)\Big\} = \bigcup_{\|q\|=1} \Big\{\frac{q}{c(q)}\Big\} = \Big\{q \in \mathbb{R}^2 \colon c(q) = 1\Big\}. \tag{2.3}$$

Геометрическую интерпретацию дистанционной функции $d(u)$ дает формула

$$d(u) = \frac{\|u\|}{r(u)}\,, \quad u \neq 0,$$

где $r(u) = r\Big(\dfrac{u}{\|u\|}\Big) > 0$ — расстояние от точки 0 до границы ∂U вдоль луча

$$l(u) = \Big\{\lambda \,\frac{u}{|u\|}, \ \ \lambda > 0\Big\}.$$

Для опорной и дистанционной функций, их градиентов и гессианов имеют место следующие соотношения:

$$\big(q, c'(q)\big) = c(q), \quad \big(u, d'(u)\big) = d(u), \tag{2.4}$$

$$c''(q)\, q = 0, \quad d''(u)\, u = 0, \tag{2.5}$$

$$c\big(d'(u)\big) = 1, \quad d\big(c'(q)\big) = 1, \tag{2.6}$$

$$c'\big(d'(u)\big) = \frac{u}{d(u)}, \quad d'\big(c'(q)\big) = \frac{q}{c(q)}, \tag{2.7}$$

где q, u — любые ненулевые векторы. Соотношения (2.4) — теорема Эйлера для положительно однородных функций измерения 1, (2.5) — следствие из (2.4). Геометрическую иллюстрацию некоторых свойств (2.2), (2.3) дают рис. 1, 2. В силу ограниченности объема статьи технические вопросы данного раздела излагаются без доказательства. Обоснование этих утверждений, в значительной степени связанных с теоремой о градиенте опорной функции [2], можно найти в цитированных источниках, см. также публикации [3–5].

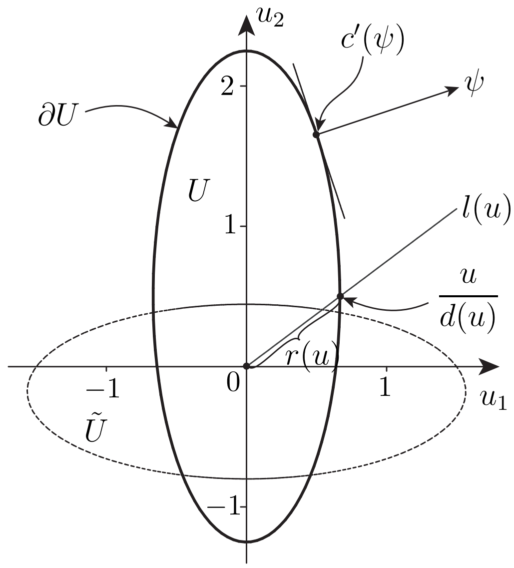


Рис. 1. Множество U.

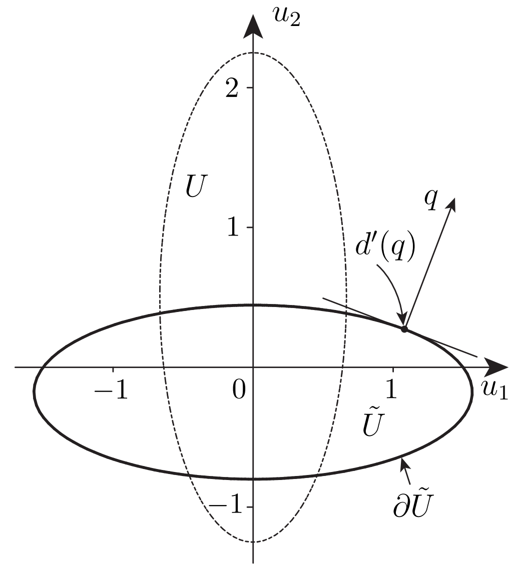


Рис. 2. Множество $\tilde U$.

2.2. Обобщенные полярные координаты, порождаемые парой множеств U и $\tilde U$

Обобщенные полярные координаты r, φ точки $u \in \mathbb{R}^2$ вводим, полагая

$$u = rd'\big(q(\varphi)\big), \tag{2.8}$$

где $r \geqslant 0$ — обобщенный полярный радиус ($r = 0$ только при $u = 0$), φ — угловой параметр, $d'(\cdot)$ — градиент дистанционной функции $d(\cdot)$, $q(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ — единичный вектор. Отметим, что

$$A^* q(\varphi) = q'(\varphi), \quad A^* q'(\varphi) = -q(\varphi). \tag{2.9}$$

Уравнением $r = 1$ определяется полярная кривая $\partial\tilde U$, при этом угол φ дает параметризацию точек кривой $\partial\tilde U$.

В случае $U = \{\|u\| \leqslant 1\}$ (круг радиуса 1 с центром в 0) имеем $\tilde U = U$, $d(u) = c(u) = \|u\|$, $d'(u) = c'(u) = \|u\|/\|u\|$, и соотношение (2.8) принимает вид

$$u = rq(\varphi) \quad \text{или} \quad \{u_1 = r\cos\varphi,\ u_2 = r\sin\varphi\},$$

а переменные r, φ — обычные полярные координаты точки u.

Для полярного радиуса r точки (2.8) имеет место равенство $r = c(u)$. Действительно,

$$c(u) \overset{(2.8)}{=} c\left(rd'(q(\varphi))\right) = rc\left(d'(q(\varphi))\right) \overset{(2.6)}{=} r \cdot 1 = r.$$

Угловой параметр φ точки (2.8) определяется из соотношения

$$q(\varphi) = \frac{c'(u)}{\|c'(u)\|}.$$

В частности, для начальной точки $p^0 = r_0 d'\big(q'(\varphi_0)\big)$ из (1.4) имеем

$$r_0 = c(p^0), \quad q(\varphi_0) = \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|}. \tag{2.10}$$

Последним равенством угол φ_0 определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; можно считать $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ или $\varphi_0 \in [-\pi, \pi)$.

Введение обобщенных полярных координат соотношением (2.8) нацелено на решение задачи Коши (1.3), (1.4).

3. Построение решения задачи Коши (1.3), (1.4). Основные результаты

Система (1.3) имеет первый интеграл $c(p) = \text{const}$, так как производная функции $c(p)$ в силу системы (1.3) определяется как

$$\dot{c}(p)_{(1.3)} \equiv \big(c'(p), A^*c'(p)\big) = 0$$

вследствие кососимметричности матрицы $A = -A^*$. Поэтому траекториями двумерного векторного уравнения (1.3) являются замкнутые кривые, подобные полярной кривой $\partial\tilde{U}$.

Решение задачи Коши (1.3), (1.4) ищем в форме

$$p = rd'\big(q(\varphi)\big), \quad r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t). \tag{3.1}$$

На этом пути достигается эффект разделения переменных. Действительно, дифференцирование (3.1) по времени t дает

$$\dot{p} = \dot{r}d'\big(q(\varphi)\big) + rd''\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)\dot{\varphi}. \tag{3.2}$$

Правая часть дифференциального уравнения (1.3) представима в форме

$$A^*c'(p) = \frac{q'(\varphi)}{d_0(\varphi)}, \tag{3.3}$$

где функция

$$d_0(\varphi) \equiv d\big(q(\varphi)\big) \equiv d(\cos\varphi, \sin\varphi) > 0, \tag{3.4}$$

— сужение дистанционной функции $d(\cdot)$ на единичную окружность. Действительно,

$$A^*c'(p) \overset{(3.1)}{=} A^*c'\Big(r \cdot d'\big(q(\varphi)\big)\Big) = A^*c'\Big(1 \cdot d'\big(q(\varphi)\big)\Big) \overset{(2.7)}{=} A^*\frac{q(\varphi)}{d\big(q(\varphi)\big)} \underset{(3.4)}{\overset{(2.9)}{=}} \frac{q'(\varphi)}{d_0(\varphi)}.$$

Из (3.2), (3.3) следует уравнение

$$\dot{r}d'\big(q(\varphi)\big) + rd''\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi)\dot{\varphi} = \frac{q'(\varphi)}{d_0(\varphi)}, \tag{3.5}$$

которое можно разрешить относительно производных $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ и получить

$$\dot{r} = 0, \tag{3.6}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{rd_0(\varphi)\mu_0(\varphi)}, \tag{3.7}$$

где функция

$$\mu_0(\varphi) \equiv q'(\varphi)d''\big(q(\varphi)\big)q'(\varphi) = d_0(\varphi) + d_0''(\varphi) > 0 \tag{3.8}$$

описывает радиус кривизны полярной кривой $\partial\tilde{U}$ (см. [2]). Начальные условия для функций $r(t)$, $\varphi(t)$ известны (см. (2.10)). Уравнение (3.6) получаем почленным умножением уравнения (3.5) на единичный вектор $q(\varphi)$ с привлечением (2.5), (3.4) и равенства $\big(q(\varphi), q'(\varphi)\big) = 0$. Уравнение (3.7) получаем почленным умножением на единичный вектор $q'(\varphi)$ с привлечением соотношений (3.6), (3.8). Таким образом,

$$r(t) \equiv r_0,$$

а функция $\varphi(t)$ является решением одномерной задачи Коши

$$d_0(\varphi)\mu_0(\varphi)\dot{\varphi} = \frac{1}{r_0}, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \tag{3.9}$$

Решение $\varphi(t)$ задачи Коши (3.9) определяется неявным уравнением

$$F\bigl(\varphi(t)\bigr) \equiv \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d_0(\beta)\mu_0(\beta)\,d\beta = \frac{t}{r_0}. \tag{3.10}$$

Для нахождения периода $T > 0$ периодической функции $\varphi(t)$ полагаем в (3.10) $t = T$, что влечет формулу

$$T = r_0 \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d_0(\beta)\mu_0(\beta)\,d\beta$$

для периода, или, в силу 2π-периодичности подынтегральной функции,

$$T = r_0 \int\limits_0^{2\pi} d_0(\beta)\mu_0(\beta)\,d\beta. \tag{3.11}$$

Формулу (3.11) для периода T можно переписать в следующей компактной форме:

$$T = 2Sr_0,$$

где S — площадь поляры $\tilde{U}$, см. [2, с. 210]. Отметим, что

$$2S = \int\limits_0^{2\pi} d_0(\beta)\mu_0(\beta)\,d\beta = \int\limits_0^{2\pi} \bigl[d_0^2(\beta) - d_0'^2(\beta)\bigr]\,d\beta.$$

В силу неравенств (3.4), (3.8), $r_0 > 0$ из (3.9) следует важное неравенство $\dot{\varphi}(t) > 0$.

Подведем итог. Доказана

Теорема. *Решение двумерной задачи Коши* (1.3), (1.4) *представимо в виде*

$$p(t, p^0) = r_0\, d'\bigl(q(\varphi)\bigr)\big|_{\varphi=\varphi(t)}, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{3.12}$$

где

$$r_0 = c(p^0), \quad q(\varphi_0) = \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|}.$$

Функция $\varphi(t)$ — решение одномерной задачи Коши

$$r_0 d_0(\varphi)\mu_0(\varphi)\dot{\varphi} = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \tag{3.13}$$

определяется неявным уравнением (3.10). *Период $T > 0$ функции $\varphi(t)$ определяется формулой*

$$T = 2Sr_0,$$

где $S > 0$ — площадь поляры $\tilde{U}$. Точка траектории (3.12) *движется по кривой $r_0\partial\tilde{U}$, совершая однократный обход этой кривой в положительном направлении (движение против часовой стрелки при возрастании времени t) за время T.*

З а м е ч а н и е 1. Задача построения периодического решения задачи Коши (1.3), (1.4) заданного периода $T > 0$ с заданным параметром φ_0 может быть решена с помощью формулы (3.12), где

$$r_0 = \frac{T}{2S},$$

а функция $\varphi(t)$ — решение задачи Коши (3.13). Это утверждение играет существенную роль при решении обобщенной задачи Чаплыгина [8].

Постановка обобщенной задачи Чаплыгина имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}^2; \quad u \in U; \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ x(0) = x(T) = a, \quad \dfrac{\dot{x}(0)}{\|\dot{x}(0)\|} = q(\alpha_0), \\ L \equiv \displaystyle\int_0^T (A^* x, u)\, dt \longrightarrow \max_{u(\cdot)}, \end{cases} \tag{3.14}$$

где точка $a \in \mathbb{R}^2$, число $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ и параметр $T > 0$ считаются заданными. Анализ краевой задачи принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления (3.14) приводит к поиску решения вспомогательной задачи, представленной в замечании 1 и решаемой с помощью сформулированной теоремы. Подробное изложение решения задачи оптимального управления (3.14) выходит за рамки данной статьи. Оригинальная задача Чаплыгина о наибольшей площади облета содержится в [6, с. 109–111].

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу Коши (1.3), (1.4) в случае $U = S_1(0)$ (единичный круг с центром 0). Решение этой задачи находится в аналитической форме. Пусть $p^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Имеем $c(p) = \|p\|$, $c'(p) = p/\|p\|$; система (1.3) принимает вид

$$\dot{p} = A^* c'(p) \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{p_2}{\|p\|}, \\ \dot{p}_2 = \dfrac{p_1}{\|p\|}, \end{cases} \tag{3.15}$$

а начальное условие

$$p(0) = p^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p_1(0) = 7, \\ p_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Привлекая теорему, запишем решение задачи Коши (3.15), (3.16) в виде

$$p(t) = r_0 d'\big(q(\varphi)\big)\Big|_{\varphi=\varphi(t)}, \quad r_0 = c'(p^0) = 7, \tag{3.17}$$

где функция $\varphi(t)$ является решением задачи Коши

$$r_0 d_0(\varphi)\big[d_0(\varphi) + d_0''(\varphi)\big]\dot{\varphi} = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \tag{3.18}$$

В данном примере $\tilde{U} = U$, $d(u) = \|u\|$, $d'(u) = u/\|u\|$, $d_0(\varphi) = d\big(q(\varphi)\big) = 1$, $d_0''(\varphi) = 0$, и соотношения (3.17), (3.18) принимают вид

$$\begin{cases} p(t) = r_0 \dfrac{q(\varphi)}{\|q(\varphi)\|}\Big|_{\varphi=\varphi(t)} = r_0 q\big(\varphi(t)\big), \\ r_0 \dot{\varphi} = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \dfrac{t}{7}, \end{cases} \tag{3.19}$$

так как $r_0 = 7$, а параметр $\varphi_0 = 0$ находится из условия

$$q(\varphi_0) = \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(выбор φ_0 в форме $\varphi_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не влияет на окончательный результат). Итак, на основании (3.19) решение изучаемой задачи имеет вид

$$p(t) = 7 \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{t}{7}\right) \\ \sin\left(\dfrac{t}{7}\right) \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p_1(t) = 7\cos\left(\dfrac{t}{7}\right), \\ p_2(t) = 7\sin\left(\dfrac{t}{7}\right). \end{cases} \tag{3.20}$$

Формула $T = 2Sr_0$ для периода дает $T = 14\pi$, так как $r_0 = 7$, и площадь круга $\tilde{U}$ равна π.

Непосредственная проверка показывает, что функции (3.20) образуют решение задачи Коши (3.15), (3.16), имеющее (наименьший) период $T = 14\pi$.

З а м е ч а н и е 2. При $U = S_1(0)$ обобщенные полярные координаты совпадают с обычными полярными координатами. Полагая $p_1 = r\cos\varphi$, $p_2 = r\sin\varphi$, приходим известным образом к решению (3.20) задачи (3.15), (3.16).

П р и м е р 2 (см. замечание 1). Найдем решение системы (3.15) с периодом $T = 4\pi$ при дополнительном условии $\varphi_0 = 0$. Сейчас начальное условие p^0 не задано, но оно однозначно определяется параметрами задачи. Действительно,

$$r_0 = \frac{T}{2S} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2, \quad p^0 = r_0 d'\big(q(\varphi_0)\big) = 2q(\varphi_0) = 2q(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\dot{\varphi} = 1/r_0 = 1/2$, $\varphi(t) = t/2$, и искомое решение имеет вид

$$p(t) = 2q\big(\varphi(t)\big) \iff \begin{cases} p_1(t) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right), & p_1(0) = 2, \\ p_2(t) = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right), & p_2(0) = 0. \end{cases}$$

Если же $\varphi_0 = \pi/2$, то $\varphi(t) = \pi/2 + t/2$ и искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned} &p(t) = 2q\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}\Big) = 2\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{pmatrix}, \\ &p(0) = 2q\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ &p_1(t) = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right), \quad p_2(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

П р и м е р 3. Пусть

$$p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Кривая ∂U — эллипс с центром $(0, 0)$ и полуосями $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Имеем

$$\tilde{U} = \big\{\psi \in \mathbb{R}^2 \colon c(\psi) \leqslant 1\big\}.$$

Опорная и дистанционная функции множества U имеют вид

$$c(\psi) = \sqrt{a_1^2\psi_1^2 + a_2^2\psi_2^2}, \quad d(x) = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}}, \tag{3.21}$$

граница $\partial\tilde{U} = \big\{\psi \in \mathbb{R}^2 \colon c(\psi) = 1\big\}$ — эллипс с центром $(0, 0)$ и полуосями $1/a_1$, $1/a_2$. Градиенты функций (3.21) определяются формулами

$$c'(\psi) = \frac{1}{c(\psi)}\begin{pmatrix} a_1^2\psi_1 \\ a_2^2\psi_2 \end{pmatrix}, \quad d'(x) = \frac{1}{d(x)}\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{a_1^2} \\ \dfrac{x_2}{a_2^2} \end{pmatrix}.$$

Для выбранной начальной точки $p^0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ имеем

$$r_0 = c(p^0) = 1, \quad c'(p^0) = \frac{1}{c(p^0)}\begin{pmatrix}a_1^2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1^2\\0\end{pmatrix},$$

$$q(\varphi_0) = \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \varphi_0 = 0,$$

$$d_0(\varphi) = d\big(q(\varphi)\big) = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{a_2^2}}.$$

После выполнения определенных вычислений для функции

$$F'(\varphi) \equiv d_0(\varphi)\mu_0(\varphi) \equiv d_0(\varphi)\big[d_0(\varphi) + d''(\varphi)\big]$$

могут быть получены следующие выражения:

$$F'(\varphi) = \frac{1}{a_1^2 a_2^2}\,\frac{1}{d_0^2(\varphi)} = \frac{1}{a_2^2\cos^2\varphi + a_1^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2)\cos^2\varphi + a_1^2} > 0.$$

При $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ имеем

$$F(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{3\cos^2\alpha + 1}\,.$$

Неопределенный интеграл

$$\int \frac{d\alpha}{3\cos^2\alpha + 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg}\alpha)}{3 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \int \frac{d(\operatorname{tg}\alpha)}{4 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\Big) + \mathrm{const}$$

позволяет вычислить функцию $F(\varphi) = \displaystyle\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{3\cos^2\alpha + 1}$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$:

$$F(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\Big), & \varphi \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big),\\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(2\operatorname{tg}(\varphi - \dfrac{\pi}{2})\Big), & \varphi \in \Big(\dfrac{\pi}{2}, \pi\Big),\\ \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\varphi - \pi)\Big), & \varphi \in \Big(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\Big),\\ \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(2\operatorname{tg}(\varphi - \dfrac{3\pi}{2})\Big), & \varphi \in \Big(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\Big), \end{cases}$$

причем

$$F(0) = 0, \quad F\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{4}, \quad F(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad F\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = \frac{3\pi}{4}, \quad F(2\pi) = \pi \Rightarrow (T = \pi \text{ — период}).$$

Неявное уравнение

$$F\Big(\varphi(t)\Big) = \frac{t}{r_0} \quad (r_0 = 1)$$

позволяет найти функцию $\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T = \pi$, в следующей форме:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\Big(2\operatorname{tg}(2t)\Big), & t \in \Big(0, \dfrac{\pi}{4}\Big),\\ \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\Big(2(t - \dfrac{\pi}{4})\Big)\Big), & t \in \Big(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\Big),\\ \pi + \operatorname{arctg}\Big(2\operatorname{tg}\Big(2(t - \dfrac{\pi}{2})\Big)\Big), & t \in \Big(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\Big),\\ \dfrac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\Big(2(t - \dfrac{3\pi}{4})\Big)\Big), & t \in \Big(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\Big), \end{cases}$$

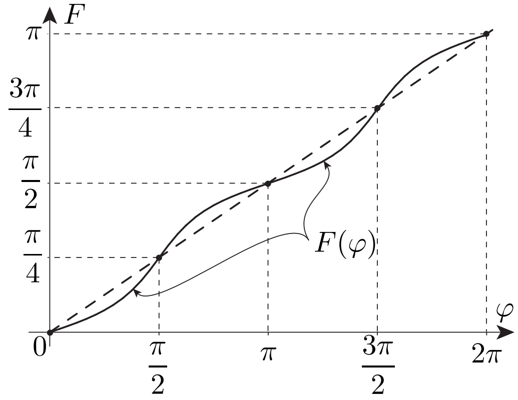


Рис. 3. График функции $F(\varphi)$ (пример 3).

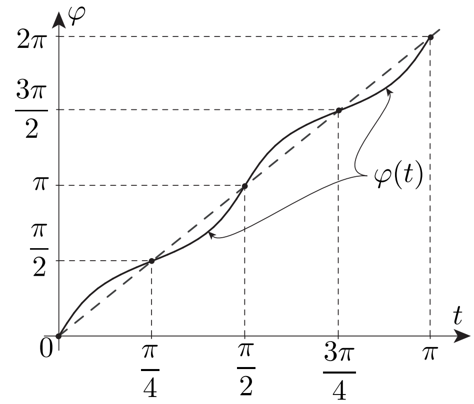


Рис. 4. График функции $\varphi(t)$ (пример 3).

причем

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi\Big(\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\pi}{2},\quad \varphi\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=\pi,\quad \varphi\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)=\frac{3\pi}{2},\quad \varphi(\pi)=2\pi.$$

На рис. 3, 4 показаны графики функций $F(\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi]$ и $\varphi(t)$, $t\in[0,\pi]$ при $a_1=1$, $a_2=2$.

Решение задачи Коши (1.3), (1.4)

$$p(t,p^0)=r_0 d'\big(q(\varphi)\big)\Big|_{\varphi=\varphi(t)},\quad r_0=1,$$

принимает вид

$$p(t,p^0)=\frac{1}{d_0\big(\varphi(t)\big)}\begin{pmatrix}\dfrac{\cos\varphi(t)}{a_1^2}\\ \dfrac{\sin\varphi(t)}{a_2^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{d_0\big(\varphi(t)\big)}\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \dfrac{1}{4}\sin\varphi(t)\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

или, в координатной форме,

$$\left\{ p_1(t,p^0)=\frac{\cos\varphi(t)}{d_0\big(\varphi(t)\big)}\equiv\cos(2t), p_2(t,p^0)=\frac{\sin\varphi(t)}{4d_0\big(\varphi(t)\big)}\equiv\frac{1}{2}\sin(2t),\quad 0\leqslant t\leqslant\pi.\right.$$

На рис. 5 показана траектория, совпадающая с кривой $r_0\partial\tilde U=\partial\tilde U$. Можно проверить, что для функций

$$p_1(t,p^0)=\frac{\cos\varphi(t)}{d_0\big(\varphi(t)\big)},\quad p_2(t,p^0)=\frac{\sin\varphi(t)}{4d_0\big(\varphi(t)\big)},$$

см. (3.22), невязки $n_1(t)=\dfrac{d}{dt}p_1+c'_{p_2}(p)$, $n_2(t)=\dfrac{d}{dt}p_2-c'_{p_1}(p)$ равны нулю. Для этого используются соотношения

$$c^2\big(p(t,p^0)\big)=p_1^2(t,p^0)+4p_2^2(t,p^0)\equiv 1,\quad \dot\varphi=\frac{1}{F'(\varphi)}=3\cos^2\varphi+1=4d_0^2(\varphi),$$

$$d_0(\varphi)=\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\sin^2(\varphi)}=\frac{\sqrt{3\cos^2\varphi+1}}{2},\quad d_0'(\varphi)=-\frac{3}{4}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{d_0(\varphi)\varphi}.$$

Далее имеем

$$\frac{d}{dt}p_1=\frac{d}{dt}\Big(\frac{\cos\varphi}{d_0(\varphi)}\Big)=\Big(\frac{\cos\varphi}{d_0(\varphi)}\Big)'_{\varphi}\dot\varphi=\Big[\frac{-\sin\varphi}{d_0(\varphi)}-\frac{\cos\varphi}{d_0^2(\varphi)}d_0'(\varphi)\Big]\dot\varphi$$

$$=4d_0^2(\varphi)\frac{-\sin\varphi d_0^2(\varphi)-\cos\varphi\Big(-\dfrac{3}{4}\sin\varphi\cos\varphi\Big)}{d_0^3(\varphi)}=4\frac{-\sin\varphi\cdot\dfrac{1}{4}(3\cos^2\varphi+1)+\dfrac{3}{4}\sin\varphi\cos^2\varphi}{d_0(\varphi)}$$

$$=4\frac{-\dfrac{1}{4}\sin\varphi}{d_0(\varphi)}=-4p_2=-\frac{4p_2}{c(p)}=-c'_{p_2}(p),$$

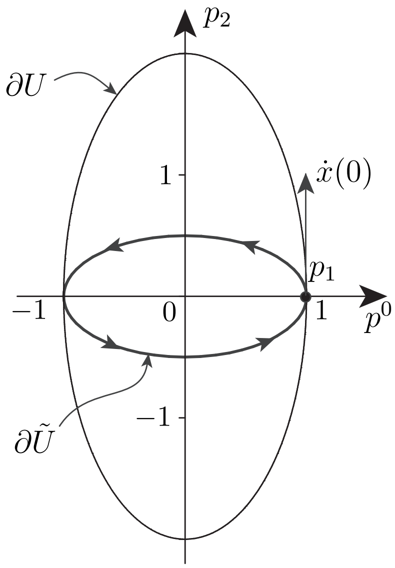


Рис. 5. Траектория (пример 3).

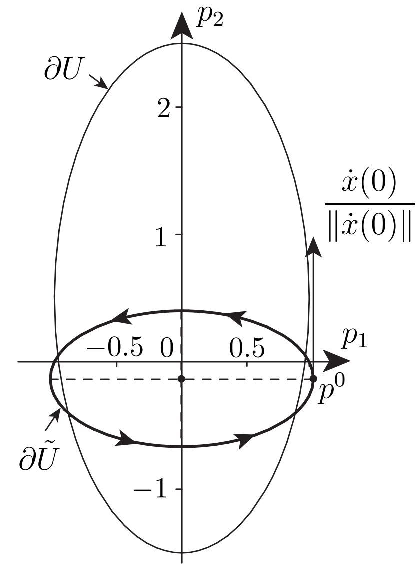


Рис. 6. Траектория (пример 4).

что влечет обращение в нуль невязки $n_1(t)$. Аналогичная проверка выполняется и для второй невязки.

Пример 4. Пусть

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{4}{\sqrt{15}}, \quad \tilde{a}_2 = \frac{8}{15}, \quad p^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{15}} \\ -\dfrac{2}{15} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.033 \\ -0.133 \end{pmatrix},$$

$$\partial U = \Big\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{(x_2-\varepsilon)^2}{a_2^2} = 1 \Big\}, \qquad c(p) = \frac{1}{2}p_2 + \sqrt{p_1^2 + 4p_2^2},$$

$$\partial\tilde{U} = \Big\{ \frac{p_1^2}{\tilde{a}_1^2} + \frac{(p_2 + 2/15)^2}{\tilde{a}_2^2} = 1 \Big\}, \quad d(x) = \frac{2}{15}\Big(-x_2 + \sqrt{15x_1^2 + 4x_2^2} \Big).$$

Вид кривых ∂U, $\partial\tilde{U}$ показан на рис. 6. Имеем $r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $T = 64\pi/(15\sqrt{15})$. Искомая траектория совпадает с полярной кривой $\partial\tilde{U}$. В данном примере построить функцию $\varphi(t)$ в аналитической форме не удается; эта функция определяется неявным уравнением (3.9) с интегрантом

$$d_0(\beta)\mu_0(\beta) = \frac{32}{15}\Big(\frac{-\sin\beta + 2\sqrt{11\cos^2\beta + 4}}{(11\cos^2\beta + 4)^{3/2}} \Big),$$

или как решение задачи Коши (3.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.** Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 3–31.
2. **Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.** Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М.: МАКС Пресс, 2007. 270 с.
3. **Киселёв Ю.Н.** Управляемые системы с интегральным инвариантом // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 4. С. 44–51.
4. **Киселёв Ю.Н.** Построение точных решений для нелинейных задач быстродействия специального вида // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, № 3. С. 847–868.
5. **Киселёв Ю.Н.** Методы решения гладкой линейной задачи быстродействия // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 106–115.
6. **Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.** Курс вариационного исчисления. М.; Л.: ГОНТИ-НКТИ, 1938. 192 с.

7. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1961. 311 с.
8. **Kiselev Yu.N.** Generalized Chaplygin's problem // Proc. of the Tenth Crimean Autumn Math. School. 2000. Vol. 10. P. 160–163.

Киселёв Юрий Николаевич
канд. физ.-мат. наук
доцент
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: kiselev@cs.msu.su

Поступила 10.03.2013

Аввакумов Сергей Николаевич
старший преподаватель
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: asn@cs.msu.su

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ АЛГОРИТМА РЕКОНСТРУКЦИИ-УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЙ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ[1]

В. И. Максимов

Рассматривается задача управления эколого-экономической моделью Нордхауса. Суть задачи состоит в построении алгоритма устойчивого формирования управляющих характеристик, обеспечивающего заданное качество процесса в условиях, когда измеряется часть фазовых координат, а на систему воздействуют неконтролируемые возмущения. На основе метода управления по принципу обратной связи строится алгоритм решения (контроллер реконструкции-управления), состоящий из двух блоков — блока он-лайн реконструкции и блока позиционного управления, основанных на подходящих модификациях метода экстремального сдвига Н. Н. Красовского.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, метод вспомогательных моделей.

V. I. Maksimov. On designing a reconstruction–control algorithm for an ecological–economic model.

A control problem for the Nordhaus ecological-economic model is considered. The problem consists in constructing an algorithm for the stable generation of control characteristics that provide a given quality of the process in the case when only a part of the phase coordinates are measured and uncontrolled disturbances act on the system. We design such an algorithm (a reconstruction–control controller) using the feedback control method. The algortihm consists of two blocks, the online reconstruction and positional control, which are based on appropriate modifications of N. N. Krasovskii's extremal shift method.

Keywords: dynamic reconstruction, method of auxiliary models.

1. Введение. Постановка задачи

Динамическая модель, связывающая основные экономические и климатические индексы, была предложена в [1]. Модель ориентирована на разработку экономической стратегии, направленной на замедление глобального потепления, содержит три типа параметров.

◦ Постоянные параметры (они перечислены в [1, в табл. 2.3 и 2.4, с. 21]).

◦ Функции, которые считаются внешними (экзогенными) по отношению к модели, заданы априори.

◦ Внутренние функции, которые связаны между собой и с внешними параметрами посредством некоторых алгебраических или дифференциальных уравнений. Эти функции перечислены в табл. 2.3., уравнения модели приведены в табл. 2.2 (см. [1]).

Приведем основные функции: $\mu(t)$ — скорость снижения эмиссии по отношению к неконтролируемой эмиссии, $E(t)$ — эмиссия парниковых газов (только CO_2 и хлорфторуглеродов), $M_1(t) = (M(t) - 590)$ — избыток массы парниковых газов в атмосфере по сравнению с доиндустриальным периодом, $T(t)$ — средняя температура атмосферы (на поверхности Земли), $T_1(t)$ — средняя температура в глубине океана, $I(t)$ — глобальные инвестиции, $K(t)$ — запас капитала, $F(t)$ — воздействие атмосферной радиации (оно определяется содержанием в атмосфере парниковых газов), $O(t)$ — воздействие экзогенных газов (т. е. газов, которые рассматриваются как неуправляемые. Это все газы, кроме CO_2 и хлорфторуглеродов), $A(t)$ – уровень техники, $\sigma(t)$ — отношение эмиссии парниковых газов к общему выходу, $L(t)$ — народонаселение в момент t, $Q(t)$ — объем мирового продукта.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00110-а, 13-01-12446-офи-м2), РГНФ (проект 13-02-00264а) и программы Президиума РАН 38П (проект 12-П-1-1038).

Если от дискретной модели, предлагаемой авторами, перейти к “непрерывной”, то уравнения модели Σ примут вид

$$\begin{aligned}
\dot T(t) &= c_1T(t) + c_2T_1(t) + c_3F(t), \quad t \in [0, \vartheta],\\
\dot T_1(t) &= c_4(T(t) - T_1(t)),\\
\dot M_1(t) &= \beta E(t) - \delta_M M_1(t),\\
\dot K(t) &= -\delta_K K(t) + I(t),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где t —время, ϑ— конечный момент времени,

$$F(t) = 4.1 \log_2\Big(1 + \frac{M_1(t)}{590}\Big) + O(t), \quad E(t) = (1 - \mu(t))\sigma(t)Q(t),$$

$$Q(t) = \frac{1 - b_1\mu(t)^{b_2}}{1 + \theta_1 T(t)^{\theta_2}} A(t)K(t)^\gamma L(t)^{1-\gamma}.$$

Начальное состояние Σ — $\{T(0), T_1(0), M_1(0), K(0)\}$, предполагается известным и заданным априори. Функции $\mu(t)$ и $I(t)$ рассматриваются в качестве управляющих параметров, определяющих стратегию глобального управления климатом и экономикой. Численный анализ модели приведен в [1]. При этом решается прямая задача: задаются возможные законы формирования $\mu(t)$ и $I(t)$ и просчитывается динамика системы. Также проводится анализ чувствительности результатов по отношению к некоторым параметрам модели. Пренебрегая малыми величинами ($b_1 = 0.0686$, $\vartheta_1 = 0.00144$), преобразуем систему (1.1) к виду

$$\begin{aligned}
\dot T(t) &= c_1T(t) + c_2T_1(t) + c_5 \log_2\Big(1 + \frac{M_1(t)}{590}\Big) + c_3O(t),\\
\dot T_1(t) &= c_4(T(t) - T_1(t)),\\
\dot M_1(t) &= E_1(t)(1 - \mu(t)) - \delta_M M_1(t),\\
\dot K(t) &= -\delta_K K(t) + I(t), \quad t \in [0, \vartheta],
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $E_1(t) = \beta\sigma(t)A(t)K(t)^\gamma L(t)^{1-\gamma}$. В дальнейшем будем рассматривать систему Σ в виде (1.2). В настоящей работе, в отличие от [1], мы остановимся на задаче управления по принципу обратной связи системой (1.2), состоящей в следующем. Величины μ и I, следуя [1], будем трактовать как управления и обозначать символом u, т. е. полагать $u = \{\mu, I\}$, а μ_2 и I_2 — как возмущения и обозначать символом $v = \{\mu_2, I_2\}$.

Предположим, что каждая из функций $\mu(t)$ и $I(t)$ в системе (1.2) представима в следующем виде:

$$\mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t), \quad I(t) = I_1(t) - I_2(t). \tag{1.3}$$

При этом $\mu_2(t)$ и $I_2(t)$ — неизвестные функции, стесненные ограничениями

$$\mu_2(t) \in Q_1 = [A_1, A_2], \quad I_2(t) \in Q_2 = [B_1, B_2]. \tag{1.4}$$

В свою очередь, подлежащие определению функции $\mu_1(t)$ и $I_1(t)$ удовлетворяют ограничениям

$$\mu_1(t) \in P_1 = [f_-, f_+], \quad I_1(t) \in P_2 = [I_-, I_+], \tag{1.5}$$

где

$$0 < f_- \le A_1 < A_2 \le f_+ < +\infty, \quad 0 < I_- \le B_1 < B_2 \le I_+ < +\infty.$$

Задача состоит в построении закона формирования управления $u = \{\mu_1, I_1\}$ по принципу обратной связи такого, что, каковы бы ни были измеримые по Лебегу функции $\mu_2(t)$ и $I_2(t)$, удовлетворяющие (1.4), т. е. каково бы ни было возмущение $v = \{\mu_2(\cdot), I_2(\cdot)\}$, решение системы (1.2) в заданный момент ϑ принимает значения из фиксированного множества $M \subset \mathbb{R}^4$.

В дальнейшем символом $\mathcal{U}$ обозначим множество допустимых управлений, т. е. множество измеримых (по Лебегу) функций $u(\cdot) = \{\mu_1(\cdot), I_1(\cdot)\}$, удовлетворяющих (1.5), а символом $\mathcal{V}$ — множество допустимых возмущений, т. е. множество измеримых (по Лебегу) функций, $v(\cdot) = \{\mu_2(\cdot), I_2(\cdot)\}$, удовлетворяющих (1.4).

Уточним постановку задачи. Будем предполагать, что в достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta,$$

замеряются с некоторой ошибкой величины $T(\tau_i)$, $T_1(\tau_i)$ и $K(\tau_i)$. Результаты этих неточных измерений (векторы $\xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_{2i}^h, \xi_{3i}^h\} \in \mathbb{R}^3$) удовлетворяют неравенствам

$$|T(\tau_i) - \xi_{1i}^h|^2 + |T_1(\tau_i) - \xi_{2i}^h|^2 + |K(\tau_i) - \xi_{3i}^h|^2 \le h^2, \quad i \in [0 : m-1], \tag{1.6}$$

где $h \in (0,1)$ — параметр точности. Задано некоторое множество $M \subset \mathbb{R}^4$. Необходимо указать алгоритм формирования (по принципу обратной связи) управления $u = u^h(t) = u(\tau_i; x^h(\cdot), \xi^h(\cdot))$, $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, обладающий следующим свойством. Каковы бы ни были $\{\mu_2(\cdot), I_2(\cdot)\} \in \mathcal{V}$, расстояние между $x^h(t)$ и M в момент времени $t = \vartheta$ не должно превышать величины ε, если величины h и δ достаточно малы, т. е. $x^h(\vartheta) \in M^\varepsilon$. Здесь символом M^ε обозначена ε-окрестность множества M, а символом

$$x^h(\cdot) = x(\cdot; x(0), u^h(\cdot), v(\cdot)) = \{T_0^h(\cdot), T_1^h(\cdot), M_1^h(\cdot), K^h(\cdot)\}$$

— траектория системы, т. е. решение системы (1.2) с функциями $\mu(\cdot)$ и $I(\cdot)$ вида (1.3), порожденная управлением

$$\begin{aligned} u(t) = u(\tau_i; \xi^h(\cdot)) = \big\{\mu_1^h(\tau_i) = \mu_1(\tau_i; \xi^h(\cdot)),\ I_1^h(\tau_i) = I(\tau_i; \xi^h(\cdot))\big\} \\ \subset [f_-, f_+] \times [I_-, I_+] \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i \end{aligned} \tag{1.7}$$

и возмущением $v(\cdot) = \{\mu_2(\cdot), I_2(\cdot)\}$. Таким образом, $x^h(\cdot)$ — решение системы (1.2) с управлениями $\mu_1(\cdot) = \mu_1^h(\cdot)$ и $I_1(\cdot) = I_1^h(\cdot)$, формируемыми по правилу (1.7).

2. Метод решения задачи

Один из подходов к решению подобного типа задач для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, был развит в исследованиях [2–5]. Следует отметить, что в цитированных выше работах рассматривался случай измерения всех фазовых координат. В настоящей работе мы рассмотрим задачу управления по принципу обратной связи при измерении части координат (см. также [6–10], где рассматривались подобные задачи с позиций подхода [2–5]). При этом мы воспользуемся методом стабильных дорожек из [2].

Для построения управления u, решающего описанную выше задачу, наряду с поступающей информацией об изменении координат T_0, T_1 и K системы (1.2) необходима дополнительная информация о координате M_1. С целью получения такой информации по ходу процесса функционирования системы (1.2) естественно воспользоваться подходом из [8; 11]. В таком случае следует ввести вспомогательную систему M (называемую моделью), описываемую подходящим дифференциальным уравнением. Последнее имеет выход $w^h(t)$ и вход $v^h(t)$. Входом $v^h(\cdot)$ является некоторое вспомогательное управление; оно формируется по принципу обратной связи таким образом, чтобы $v^h(\cdot)$ приближало неизвестную координату $M_1(\cdot)$.

Прежде чем описать алгоритм решения рассматриваемой задачи, приведем некоторые вспомогательные построения. Рассмотрим множества

$$H_1 = \bigcap_{v \in Q_1} \bigcup_{u \in P_1} \{u - v\}, \quad H_2 = \bigcap_{v \in Q_2} \bigcup_{u \in P_2} \{u - v\},$$

т. е. $H_1 = [f_- - A_1, f_+ - A_2]$, $H_2 = [I_- - B_1, I_+ - B_2]$. Пусть $H(\cdot) = \{\{\mu(\cdot), I(\cdot)\}\colon \mu(t) \in H_1, I(t) \in H_2$ при п.в. $t \in T\}$. Каждой паре функций $\{\mu(\cdot), I(\cdot)\} \in H(\cdot)$ отвечает единственное решение системы (1.2) — $x(\cdot) = x(\cdot; x(0), u(\cdot))$. Всякое такое решение согласно [2] является u-стабильной дорожкой. В дальнейшем считаем выполненным следующее условие.

У с л о в и е 1. Существует пара $u_*(\cdot) = \{\mu_*(\cdot), I_*(\cdot)\} \in H(\cdot)$ такая, что отвечающая ей u-стабильная дорожка $x_*(\cdot) = x(\cdot; x(0), u_*(\cdot))$, обладает свойством $x_*(\vartheta) \in M$.

Таким образом, функции $x_*(\cdot) = \{T_{0*}(\cdot), T_{1*}(\cdot), K_*(\cdot), M_{1*}(\cdot)\}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{T}_{0*}(t) &= c_1 T_{0*}(t) + c_2 T_{1*}(t) + 4.1\, c_3 \log_2 \left(1 + \frac{M_{1*}(t)}{590}\right) + c_3 O(t), \quad t \in [0, \vartheta],\\
\dot{T}_{1*}(t) &= c_4 (T_{0*}(t) - T_{1*}(t)),\\
\dot{M}_{1*}(t) &= E_{1*}(t, K_*)(1 - \mu_*(t)) - \delta_M M_{1*}(t),\\
\dot{K}_*(t) &= -\delta_K K_*(t) + I_*(t).
\end{aligned}$$

В дальнейшем дорожку $x_*(\cdot)$ мы зафиксируем.

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи. В самом начале, еще до работы алгоритма, вводится вспомогательная система M. Модель функционирует синхронно с системой (1.2) на промежутке времени $[0, \vartheta]$. До начала работы алгоритма фиксируются величина h, а также разбиение Δ с шагом δ. После этого организуется процесс синхронного управления системой (1.2), а также моделью M. Этот процесс разбивается на $(m - 1)$ однотипных шагов. Во время i-го шага, выполняемого на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, осуществляются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, согласно правилам V и U вычисляются функции

$$v^h(t) = v_i^h \in V(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)), \quad t \in \delta_i, \tag{2.1}$$
$$u^h(t) = u_i^h \in U(\tau_i, v_i^h, \xi_i^h, x_*(\tau_i)). \tag{2.2}$$

Затем (до момента τ_{i+1}) управление $u = u^h(t)$, $\tau_i \le t < \tau_{i+1}$, подается на вход системы (1.2), а управление $v = v^h(t)$, $\tau_i \le t < \tau_{i+1}$, подается на вход модели M. Величины ξ_{i+1}^h и $w^h(\tau_{i+1})$ являются результатам работы алгоритма на i-м шаге. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Фиксируем семейство разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \quad \tau_{0,h} = 0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta$$

отрезка $[0, \vartheta]$. Пусть символ $X(\cdot)$ означает пучок решений системы (1.2) при $\mu(\cdot)$ и $I(\cdot)$ вида (1.3), т. е.

$$X(\cdot) = \{x(\cdot)\colon x(\cdot) = x(\cdot; x(0), u(\cdot), v(\cdot)) = \{T_0(\cdot), T_1(\cdot), M_1(\cdot), K(\cdot)\}, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}\}.$$

Всюду ниже предполагаем выполненным следующее условие.

У с л о в и е 2.

$$d_* = \inf \left\{ \min_{t \in [0, \vartheta]} \left(1 + \frac{M_1(t)}{590}\right)\colon x(\cdot) = \{T_0(\cdot), T_1(\cdot), M_1(\cdot), K(\cdot)\} \in X(\cdot) \right\} > 1.$$

Будем также считать далее $\sigma(t)$, $A(t)$, $L(t)$ и $O(t)$ известными непрерывными функциями.

3. Вспомогательные построения

Сначала укажем алгоритм восстановления $M_1(\cdot)$, который будет использоваться при решении рассматриваемой задачи. При обосновании этого алгоритма мы воспользуемся идеями работ [11; 12].

Введем обозначения:

$$T(t)=\{T_0(t),T_1(t)\},\quad f(t,T(t))=c_1T_0(t)+c_2T_1(t)+c_3O(t),\quad \tilde u(t)=\log_2\Big(1+\frac{M_1(t)}{590}\Big).$$

Здесь $x(\cdot)=\{T_0(\cdot),T_1(\cdot),M_1(\cdot),K(\cdot)\}$ — произвольный элемент множества $X(\cdot)$, т. е. $x(\cdot)$ — траектория системы (1.2), порожденная некоторыми $\mu(\cdot)$ и $I(\cdot)$ вида (1.3). В таком случае первое уравнение системы (1.2) перепишется в виде

$$\dot T_0(t)=f(t,T(t))+4.1\,c_3\tilde u(t).$$

Заметим, что можно указать число $M_*>0$, для которого верны неравенства

$$\|\dot T(t)\|\le M_*\quad \text{при п.в.}\quad t\in[0,\vartheta], \tag{3.1}$$

$$|f(t,T(t))-f(\tau_i,\xi_i^h)|\le M_*(\delta+h+\omega(\delta))\quad \text{при}\quad t\in\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1}), \tag{3.2}$$

где $\tau_i=\tau_{i,h}$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $t\to O(t)$, $t\in[0,\vartheta]$, т. е. $\omega(\delta)=\sup\{|O(t)-O(t-\delta)|\colon t\in[\delta,\vartheta]\}$. Неравенство (3.2) является следствием (1.6), а также (3.1).

Фиксируем семейство Δ_h разбиений отрезка $[0,\vartheta]$, а также некоторую вспомогательную функцию $\alpha(h)\colon(0,1)\to(0,1)$. В качестве модели M возьмем линейную систему, описываемую скалярным дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\dot w^h(t)=f(\tau_i,\xi_i^h)+4{,}1c_3v^h(t)\quad \text{при п.в.}\quad t\in\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1}), \tag{3.3}$$

$i\in[0:m-1]$, $\tau_i=\tau_{i,h}$, $m=m_h$, с начальным условием

$$w^h(0)=T_0(0).$$

Пусть

$$v^h(t)=v_i^h\in V(\tau_i,\xi_i^h,w^h(\tau_i))=-\frac{1}{\alpha}\,4.1\,c_3[w^h(\tau_i)-\xi_{1i}^h]\quad \text{при}\quad t\in\delta_i. \tag{3.4}$$

В уравнении (3.3) управление $v^h(t)$ зададим по формуле (3.4). Таким образом, управление в модели определяется по принципу обратной связи (см. (2.1)). Следовательно, уравнение (3.3) примет вид

$$\dot w^h(t)=f(\tau_i,\xi_i^h)-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[w^h(\tau_i)-\xi_{1i}^h]\quad \text{при п.в.}\quad t\in\delta_i. \tag{3.5}$$

Опишем алгоритм восстановления в темпе реального времени неизмеряемой координаты $M_1(\cdot)$. До начала работы алгоритма фиксируем величину $h\in(0,1)$ и разбиение Δ_h. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $\tau_i=\tau_{i,h}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляется управление $v^h(t)$ по формуле (3.4), которое подается на вход модели (3.3) в течение промежутка $[\tau_i,\tau_{i+1})$. Под действием этого управления модель переходит из состояния $w^h(\tau_i)$ в состояние $w^h(\tau_{i+1})=w^h(\tau_{i+1};\tau_i,w^h(\tau_i),v_i^h)$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия*

$$\alpha(h)\to 0,\quad \delta(h)\to 0,\quad \delta(h)\alpha^{-1}(h)\to 0,\quad h\alpha^{-1}(h)\to 0\quad \textit{при}\quad h\to 0. \tag{3.6}$$

Тогда равномерно по всем $x(\cdot)\in X(\cdot)$, $h\in(0,1)$, $i\in[0:m_h-1]$ верны неравенства

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\dot w^h(s)|\,ds\le C\delta, \tag{3.7}$$

где $C=\mathrm{const}>0$, $\delta=\delta(h)$, $\tau_i=\tau_{i,h}$.

Доказательство. Учитывая (3.5), заключаем, что справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}[w^h(t) - T_0(t)] = f(\tau_i, \xi_i^h) - \frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[w^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h] - f(t, T(t)) - 4,1c_3\tilde{u}(t)$$

$$= -\frac{1}{\alpha}(4,1c_3)^2[w^h(t) - T_0(t)] + \Psi_h^{(t)}(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in \delta_i$$

и

$$w^h(0) = T_0(0),$$

где

$$\Psi_h^{(1)}(s) = \Psi_h(s) + \frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[w^h(s) - w^h(\tau_i)],$$

$$\Psi_h(s) = -\frac{1}{\alpha}(4.1c_3)^2[T_0(s) - \xi_{1i}^h] + [f(\tau_i, \xi_i^h) - f(s, T(s))] - 4.1c_3\tilde{u}(s), \quad s \in \delta_i.$$

Здесь ввиду (1.6), (3.1), (3.2) и (3.6) семейство функций $\Psi_h(\cdot)$ ограничено:

$$|\Psi_h(s)| \le M^{(1)} \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, \vartheta] \tag{3.8}$$

равномерно по всем $h \in (0, 1)$. Далее имеем

$$w^h(t) - T_0(t) = \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\Psi_h^{(1)}(s)\,ds, \quad t \in [0, \vartheta]. \tag{3.9}$$

Введем обозначения

$$\mu(t) = \max_{0 \le \tau \le t} |w^h(\tau) - T_0(\tau)|, \quad f_h(t) = f(\tau_i, \xi_i^h) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i.$$

Верны оценки

$$\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|\,ds \le \frac{K_0}{\alpha} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big| f_h(s) - \frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[w^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h] \Big|\,ds$$

$$\le K_1\frac{\delta}{\alpha} + K_2\frac{\delta}{\alpha^2}(\mu(\tau_i) + h), \quad \mu(\tau_i) \le \mu(\tau_{i+1}). \tag{3.10}$$

Заметим, что

$$|\Psi_h^{(1)}(t)| \le |\Psi_h(t)| + \frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|\,ds \quad \text{при} \quad t \in \delta_i. \tag{3.11}$$

Таким образом, учитывая (3.9)–(3.11), получаем

$$\mu(t) \le K_3\Big(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2}\mu(\tau_i) + \frac{\delta h}{\alpha^2}\Big) \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\,ds + \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}|\Psi_h(s)|\,ds, \quad t \in \delta_i. \tag{3.12}$$

Воспользовавшись (3.8), выводим

$$\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}|\Psi_h(s)|\,ds \le K_4 \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\,ds. \tag{3.13}$$

Далее справедливы соотношения

$$\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\,ds = \frac{\alpha}{(4.1\,c_3)^2}\,e^{-\frac{(4.1\,c_3)^2}{\alpha}(t-s)}\Big|_0^t = \frac{\alpha}{(4.1\,c_3)^2}\Big(1 - e^{-\frac{(4.1\,c_3)^2}{\alpha}t}\Big) \le K_5\alpha. \tag{3.14}$$

Таким образом из (3.13) и (3.14) получаем

$$\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}|\Psi_h(s)|\,ds \le K_6\alpha. \tag{3.15}$$

В свою очередь из (3.12) выводим, считая $t=\tau_i$ и учитывая (3.8), (3.15),

$$\Big(1-\frac{K_3K_5\delta}{\alpha}\Big)\mu(\tau_i) \le K_7\Big(\alpha+\delta+\frac{\delta h}{\alpha}\Big).$$

Поэтому при достаточно малых h (например таких, что $1-K_3K_5\delta/\alpha\le 1/2$) в силу (3.6) имеем

$$\mu(\tau_i) \le K_8\Big(\alpha+\delta+\frac{\delta h}{\alpha}\Big) \le K_9(\alpha+\delta).$$

Аналогично (3.10) получаем

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot w^h(s)|\,ds \le K_{10}\Big\{\delta+\frac{\delta}{\alpha}(\mu(\tau_i)+h)\Big\}.$$

Кроме того, снова воспользовавшись (3.6), имеем

$$\delta+\frac{\delta}{\alpha}(\mu(\tau_i)+h) \le \delta+K_9\frac{\delta}{\alpha}\Big(\alpha+\delta+\frac{\delta h}{\alpha}\Big) \le K_{11}\delta.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot w^h(s)|\,ds \le K_{12}\delta.$$

Неравенство (3.7) установлено. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (3.6) *и* $\delta^\gamma(h)\alpha^{-1}(h) \to +\infty$ (*при некотором* $\gamma\in(0,1)$), *если* $h\to 0$. *Пусть*

$$u_e^h(t) = \begin{cases} \tilde u(0), & t\in[0,\delta^\gamma), \\ v^h(t), & t\in[\delta^\gamma,\vartheta]. \end{cases}$$

Тогда верно неравенство

$$\sup_{t\in[0,\vartheta]} |u_e^h(t)-\tilde u(t)| \le d_1^0\alpha(h)+d_2^0(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h)+d_3^0\omega(\delta(h))+d_4^0\alpha(h)\delta^{-\gamma}(h)+d_5^0\delta^\gamma(h),$$

где постоянные d_j^0, $j\in[1:5]$, *не зависят от* $h\in(0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[w^h(t)-T_0(t)] = \int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\Big)\Psi_h^{(1)}(s)\,ds$$

$$= -\int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\Big)4.1\,c_3\tilde u(s)\,ds + \sum_{j=1}^3\int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\Big)\gamma_\delta^{(j)}(s)\,ds, \tag{3.16}$$

где

$$\gamma_\delta^{(1)}(s) = \frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[w^h(s) - w^h(\tau_i)],$$

$$\gamma_\delta^{(2)}(s) = -\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[T_0(s) - \xi_{1i}^h],$$

$$\gamma_\delta^{(3)}(s) = f(\tau_i, \xi_i^h) - f(s, T(s)) \quad \text{при п.в.} \quad s \in \delta_i.$$

В силу (3.7) заключаем

$$|\gamma_\delta^{(1)}(s)| \le C_1 \frac{\delta}{\alpha}, \quad s \in [0, \vartheta]. \tag{3.17}$$

В свою очередь, воспользовавшись (1.6) и (3.1), будем иметь

$$|\gamma_\delta^{(2)}(s)| \le C_2 \frac{\delta + h}{\alpha}, \quad s \in [0, \vartheta]. \tag{3.18}$$

Кроме того (см. (3.2)), верна оценка

$$|\gamma_\delta^{(3)}(s)| \le M_*(\delta + h + \omega(\delta)), \quad s \in [0, \vartheta]. \tag{3.19}$$

В таком случае из (3.17)–(3.19), учитывая (3.14) и (3.15), выводим

$$\Bigl|\sum_{j=1}^{3} \int_0^t \Bigl(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\Bigr)\gamma_\delta^{(j)}(s)\,ds\Bigr| \le \varrho(h, \alpha, \delta) = C_3\Bigl(\delta + h + \omega(\delta) + \frac{\delta + h}{\alpha}\Bigr). \tag{3.20}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части равенства (3.16), получим

$$-\int_0^t \Bigl(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)}\Bigr) 4.1\,c_3 \tilde{u}(s)\,ds = e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2 t} 4.1\,c_3 \tilde{u}(0) - 4.1\,c_3 \tilde{u}(t)$$

$$+ \int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)} 4.1\,c_3 \dot{\tilde{u}}(s)\,ds. \tag{3.21}$$

Далее, в силу (1.6), (3.1), (3.2) (см. лемму 1) имеем при $t \in \delta_i$

$$\Bigl|\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2\{[w^h(t) - T_0(t)] - [w^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h]\}\Bigr| \le \frac{C_4}{\alpha}\Bigl\{\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|\,ds + h + \delta\Bigr\} \le C_5 \frac{h + \delta}{\alpha}. \tag{3.22}$$

В силу ограниченности $\dot{\tilde{u}}(\cdot)$ ($\dot{\tilde{u}}(\cdot) \in L_\infty([0, \vartheta]; R)$, см. условие 1, учитывая (3.15), выводим неравенство

$$\Bigl|\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2(t-s)} 4.1\,c_3 \dot{\tilde{u}}(s)\,ds\Bigr| \le C_6 \alpha.$$

Воспользовавшись последним неравенством, а также (3.16), (3.20)–(3.22) и (3.6), получаем при $t \in \delta_i$

$$\Bigl|\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2[w^h(\tau_i) - T_0(\tau_i)] - (4.1\,c_3)\tilde{u}(t)\Bigr| \le \varrho(h, \delta, \alpha) + C_5 \frac{h + \delta}{\alpha}$$

$$+ C_6 \alpha + |e^{-\frac{1}{\alpha}(4.1\,c_3)^2 t}(4.1\,c_3)\tilde{u}(0)|. \tag{3.23}$$

Заметим, что

$$e^{-c_* \frac{\delta^\gamma}{\alpha}} \le \frac{\alpha}{c_* \delta^\gamma} \quad \text{при} \quad c_* > 0.$$

Справедливость леммы следует из (3.23), ибо в силу ограниченности $M_1(\cdot)$ верны неравенства

$$|\tilde{u}(t) - u_e^h(t)| \le c\delta^\gamma \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, \delta^\gamma),$$

$$|\tilde{u}(t) - u_e^h(t)| \le d_1^0\alpha + d_2^0\frac{h+\delta}{\alpha} + d_3^0\omega(\delta) + d_4^0\frac{\alpha}{\delta^\gamma} \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\delta^\gamma, \vartheta].$$

Лемма доказана. □

Введем обозначение

$$\tilde{u}_*^h(t) = 590\,(2^{u_e^h(t)} - 1).$$

Лемма 3. *При выполнении условий леммы 2 верно неравенство*

$$\sup_{t\in[0,\vartheta]} |\tilde{u}_*^h(t) - M_1(t)| \le \nu(h, \delta(h), \alpha(h)) = d_1\alpha(h) + d_2(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h)$$

$$+ d_3\omega(\delta(h)) + d_4\alpha(h)\delta^{-\gamma}(h) + d_5\delta^\gamma(h).$$

Здесь постоянные d_j, $j \in [1:5]$, не зависят от $h \in (0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость леммы вытекает из утверждения леммы 2 и неравенства

$$|\tilde{u}_*^h(t) - M_1(t)| \le 590\,|2^{u_e^h(t)} - 2^{\tilde{u}(t)}|.$$ □

4. Алгоритм решения

Перейдем к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи. Из описанного выше следует, что необходимо указать модель, а также правила V (2.1) и U (2.2) формирования соответствующих управлений.

Фиксируем семейство Δ_h разбиений отрезка $[0,\vartheta]$, а также некоторую функцию $\alpha(h)\colon (0,1) \to (0,1)$. Пусть семейство Δ_h и функция $\alpha(h)$ таковы, что выполнено

У с л о в и е 3. Имеют место сходимости

$$\alpha(h) \to 0, \quad \delta(h) \to 0, \quad \delta(h)\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad h\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad \alpha^{-1}(h)\delta^\gamma(h) \to +\infty$$

(при некотором $\gamma \in (0,1)$), если $h \to 0$.

Будем полагать, что модель описывается уравнением (3.3), т. е.

$$\dot{w}^h(t) = f(\tau_i, \xi_i^h) + 4.1\,c_3 v^h(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{4.1}$$

$i \in [0:m-1]$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, $m = m_h$, с начальным условием

$$w^h(0) = T_0(0).$$

Пусть правила U (2.2) и V (2.1) формирования управлений u_i^h и v_i^h задаются соотношениями:

$$v_i^h = V(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = -\frac{1}{\alpha}4.1\,c_3[w^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h], \tag{4.2}$$

$$u_i^h = \{\mu_1^h(\tau_i), I_1^h(\tau_i)\} = U(\tau_i, v_i^h, \xi_i^h, x_*(\tau_i)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i.$$

Здесь

$$I_1^h(\tau_i) = \arg\min\{(\xi_{3i}^h - K_*(\tau_i))I\colon I \in [I_-, I_+]\}, \tag{4.3}$$

$$\mu_1^h(\tau_i) = \arg\min\{E_1(\tau_i, K_*)(M_{1*}(\tau_i) - \tilde{u}_*^h(\tau_i))\mu\colon \mu \in [f_-, f_+]\}, \tag{4.4}$$

$$\tilde{u}_*^h(\tau_i) = 590\,\big(2^{u_\varepsilon^h(\tau_i)} - 1\big),$$

$$u_\varepsilon^h(\tau_i) = \begin{cases} \log_2\Big(1 + \dfrac{M_1(0)}{590}\Big), & \text{если} \quad \tau_i \le \delta^\gamma(h), \\ v_i^h, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем

У с л о в и е 4. Справедливы неравенства:

$$0 < C^{(1)} < K_*(t) < C^{(2)} < +\infty \quad \text{при} \quad t \in [0, \vartheta].$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1–4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $h_*(\varepsilon) \in (0,1)$ *такое, что при всех* $h \in (0, h_*(\varepsilon))$, $\delta(h) \in (0, \delta(h_*(\varepsilon)))$ *имеет место включение* $x^h(\vartheta) \in M^\varepsilon$, *если модель* M *задается уравнением* (4.1), *а правила выбора управлений* V *и* U *— в виде* (2.1), (2.2), (4.2)–(4.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала оценим изменение величины

$$\varepsilon_1(t) = |K_*(t) - K^h(t)|^2, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Нетрудно видеть, что при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо неравенство

$$\varepsilon_1(t) \le \varepsilon_1(\tau_i) + \delta(h) \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot K_*(\tau) - \dot K^h(\tau)|^2 \, d\tau + \int\limits_{\tau_i}^{t} \nu_i(\tau)\, d\tau, \tag{4.5}$$

где

$$\nu_i(\tau) = 2\,(K_*(\tau_i) - K^h(\tau_i))(\dot K_*(\tau) - \dot K^h(\tau)), \quad \tau \in \delta_i.$$

Рассмотрим величину $\nu_i(t)$. Имеем при п.в. $t \in \delta_i$

$$\nu_i(t) = \sum_{j=1}^{4} \nu_{ji}(t), \quad t \in \delta_i, \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned} \nu_{1i}(t) &= 2\,\beta_i^{(1)} \delta_K \left(K_*(\tau_i) - K_*(t)\right), \\ \nu_{2i}(t) &= 2\,\beta_i^{(1)} \delta_K \big(K^h(t) - K^h(\tau_i)\big), \\ \nu_{3i}(t) &= 2\,\delta_K \varepsilon_1(\tau_i), \\ \nu_{4i}(t) &= 2\,\beta_i^{(1)} \delta_K \big(I_*(t) - I_1^h(\tau_i) + I_2(\tau_i)\big), \\ \beta_i^{(1)} &= K_*(\tau_i) - K^h(\tau_i). \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части равенства (4.6). Из (1.2)–(1.5) следует

$$\nu_{1i}(t) \le C_1\delta, \quad \nu_{2i}(t) \le C_1\delta, \quad t \in \delta_i. \tag{4.7}$$

Учитывая неравенство

$$|K^h(\tau_i) - \xi_{3i}^h| \le h,$$

вытекающее из (1.6), а также правило выбора управления $I_1^h(\cdot)$ (4.3), при п.в. $t \in \delta_i$ имеем

$$\nu_{4i}(t) \le C_2 h, \quad C_2 = 2\,\delta_K\{|I_+| + |B_2|\}. \tag{4.8}$$

Из (4.6)–(4.8) получаем при п.в. $t \in \delta_i$

$$\nu_i(t) \le 2\,C_1\delta + C_2 h + C_3\varepsilon_1(\tau_i). \tag{4.9}$$

Следовательно, в силу (4.5) и (4.9) выводим при $i \in [0 : m-1]$ оценку

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \le (1 + C_3\delta)\varepsilon_1(\tau_i) + C_4\delta(\delta + h). \tag{4.10}$$

Из (4.10) аналогично [2] получаем (при всех $i \in [0 : m-1]$) неравенства

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \le \varepsilon_1(0) + C_5(\delta + h).$$

В таком случае

$$\varepsilon_1(t) \le C_*(\delta + h). \tag{4.11}$$

Здесь постоянная C_* не зависит от h, δ и может быть выписана в явном виде. Оценим изменение величины

$$\varepsilon_2(t) = |M_{*1}(t) - M_1^h(t)|^2, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Легко видеть, что при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ имеет место неравенство

$$\varepsilon_2(t) \le \varepsilon_2(\tau_i) + \delta(h) \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot{M}_{*1}(\tau) - M_1^h(\tau)|^2 \, d\tau + \int\limits_{\tau_i}^{t} \mu_i^{(1)}(\tau) \, d\tau, \tag{4.12}$$

$$\mu_i^{(1)}(t) = 2(M_{*1}(\tau_i) - M_1^h(\tau_i))(\dot{M}_{*1}(t) - \dot{M}_1^h(t)), \quad t \in \delta_i.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\dot{M}_{*1}(t) = E_1(t, K_*)(1 - \mu_*(t)) - \delta_M M_{*1}(t), \\ &\dot{M}_1^h(t) = E_1(t, K^h)(1 - \mu_1^h(t) + \mu_2(t)) - \delta_M M_1^h(t), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$|\dot{K}^h(t)| \le C_0 \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, \vartheta]. \tag{4.14}$$

Рассмотрим величину $\mu_i(t)$. В силу (4.13) имеем при $t \in \delta_i$

$$\mu_i(t) = \sum_{j=1}^{6} \lambda_{ji}(t), \quad t \in \delta_i, \tag{4.15}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1i}(t) &= 2\,\beta_i^{(2)}\,(E_1(\tau_i, K_*) - E_1(t, K_*))\,\mu_*(t), \\ \lambda_{2i}(t) &= 2\,\beta_i^{(2)}\big(E_1(t, K_*) - E_1(t, K^h)\big), \\ \lambda_{3i}(t) &= 2\,\beta_i^{(2)}\big(E_1(t, K^h) - E_1(\tau_i, K^h)\big)(\mu_1^h(t) - \mu_2(t)), \\ \lambda_{4i}(t) &= 2\,\delta_M \beta_i^{(2)}\big(M_1^h(t) - M_{*1}(t)\big), \\ \lambda_{5i}(t) &= 2\,\beta_i^{(2)} E_1(\tau_i, K_*)\big(\mu_1^h(t) - \mu_*(t) + \mu_2(t)\big), \\ \lambda_{6i}(t) &= 2\,\beta_i^{(2)}(E_1(\tau_i, K^h) - E_1(\tau_i, K_*))(\mu_1^h(t) - \mu_2(t)), \\ \beta_i^{(2)} &= M_{*1}(\tau_i) - M_1^h(\tau_i). \end{aligned}$$

Теперь оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (4.15). Из (1.2) и (4.14) выводим

$$\lambda_{1i}(t) \le C_6(\delta + \omega_\varrho(\delta)), \quad \lambda_{3i}(t) \le C_7(\delta + \omega_\varrho(\delta)), \quad t \in \delta_i, \tag{4.16}$$

$$|E_1(t, K_*) - E_1(t, K^h)| \le \varrho(t)|K_*^\gamma(t) - (K^h)^\gamma(t)|, \quad t \in [0, \vartheta], \tag{4.17}$$

где

$$\varrho(t) = \beta\sigma(t)A(t)L^{1-\gamma}(t),$$

$\omega_\varrho(\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varrho(t)$, т. е.

$$\omega_\varrho(\delta) = \sup\{|\varrho(t) - \varrho(t+\delta)| \colon t, t+\delta \in [0, \vartheta]\}.$$

Ввиду условия 4 справедливо неравенство

$$|K_*^\gamma(t) - (K^h)^\gamma(t)| \le K_*^\gamma(t)|1 - (K^h(t)/K_*(t))^\gamma| \le (C^{(2)})^\gamma |1 - (1 + \psi^h(t))^\gamma|,$$

где

$$\psi^h(t) = \frac{K^h(t) - K_*(t)}{K_*(t)}.$$

Учитывая (4.11), заключаем, что верна оценка

$$|\psi^h(t)| \le \frac{\varepsilon_1^{1/2}(t)}{C^{(1)}} \le \frac{C_*^{1/2}(h+\delta)^{1/2}}{C^{(1)}}.$$

Выберем $\delta_* \in (0,1)$ и $h_* \in (0,1)$ таким образом, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{C_*^{1/2}}{C^{(1)}}(h_*^{1/2} + \delta_*^{1/2}) < 1.$$

Тогда при $h \in (0, h_*)$ и $\delta \in (0, \delta_*)$ имеем

$$\sup_{t\in[0,\vartheta]} |K_*^\gamma(t) - (K^h)^\gamma(t)| \le C_8(h^{1/2} + \delta^{1/2}), \tag{4.18}$$

где постоянная C_8 не зависит от h и δ. Из (4.17), (4.18) получаем при $\delta \in (0, \delta_*)$ и $h \in (0, h_*)$

$$\lambda_{2i}(t) \le C_9(h^{1/2} + \delta^{1/2}), \quad \lambda_{6i}(t) \le C_{10}(h^{1/2} + \delta^{1/2}), \quad t \in \delta_i. \tag{4.19}$$

Кроме того,

$$\lambda_{4i}(t) \le C_{11}\varepsilon_2(\tau_i) + C_{12}\delta, \quad t \in \delta_i, \tag{4.20}$$

$$\lambda_{5i}(t) \le \lambda_i^{(1)}(t) + \lambda_i^{(2)}(t). \tag{4.21}$$

Здесь

$$\lambda_i^{(1)}(t) = 2\,(\tilde{u}_*^h(\tau_i) - M_{1*}(\tau_i))E_1(\tau_i, K_*)(\mu_*(t) - \mu_1^h(\tau_i) + \mu_2(\tau_i)),$$

$$\lambda_i^{(2)}(t) = 4\,|E_1(\tau_i, K_*)||M_1^h(\tau_i) - \tilde{u}_*^h(\tau_i)|f, \quad t \in \delta_i, \quad f = \{|f_+| + |A_2|\}.$$

Учитывая правило определения управления $\mu_1^h(\cdot)$ (см. (4.4)), устанавливаем неравенство

$$\lambda_i^{(1)}(t) \le 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i. \tag{4.22}$$

В свою очередь, из леммы 3 получаем

$$\lambda_i^{(2)}(t) \le C_{13}\nu(h, \delta(h), \alpha(h)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i. \tag{4.23}$$

Объединив (4.12), (4.15), (4.16), (4.19)–(4.23), будем иметь при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\varepsilon_2(t) \le \varepsilon_2(\tau_i)(1 + C_{14}\delta) + C_{15}(h^{1/2} + \delta^{1/2})\delta + C_{16}\nu(h, \delta(h), \alpha(h))\delta.$$

Аналогично [2] получаем при $i \in [0 : m]$

$$\varepsilon_2(\tau_i) \le \varepsilon_2(0) + C_{17}(h^{1/2} + \delta^{1/2} + \nu(h, \delta(h), \alpha(h))).$$

Отсюда выводим

$$\varepsilon_2(t) \le C_{18}(h^{1/2} + \delta^{1/2} + \nu(h, \delta(h), \alpha(h))), \quad t \in [0, \vartheta]. \tag{4.24}$$

Справедливость теоремы следует из неравенств (4.11) и (4.24). Теорема доказана. □

Как следует из теоремы, если фиксированная точность измерения h достаточно мала, то описанный выше алгоритм формирования управления $u(\cdot)$ в системе (1.2) обеспечивает "отслеживание" (в равномерной метрике) решением этой системы $x^h(\cdot)$ решения $x_*(\cdot)$. Таким образом, алгоритм решает рассматриваемую задачу управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nordhaus W.D.** Managing the global commons. The economics of climate change. Cambridge: The MIT Press, 1994. 223 p.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
3. **Ченцов А.Г., Субботин А.И.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференцированной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
5. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх: препринт / Ин-т математики и механики УрО РАН. 2004. 80 с.
6. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
7. **Кряжимский А.В.** Числовая кодировка дискретизованных управлений и аппроксимационный метрический критерий разрешимости игровой задачи наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 105–124.
8. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
9. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одной задаче управления при неполной информации // Автоматика и телемеханика. 2006. № 3. С. 131–142.
10. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** О сочетании процессов реконструкции и гарантирующего управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 13–25.
11. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
12. **Близорукова М.С., Максимов В.И., Пандолфи Л.** Динамическая реконструкция входа в нелинейной системе с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С. 3–14.

Максимов Вячеслав Иванович
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 10.02.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 512.542

О НЕАБЕЛЕВЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, МИНИМАЛЬНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТОГО СПЕКТРА[1]

Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Пусть L — конечная группа, $\pi(L)$ — множество простых делителей порядка $|L|$ и $\mathfrak{Y}$ — класс конечных групп G таких, $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной подгруппы H из G. Группы из класса $\mathfrak{Y}$ будем называть минимальными относительно простого спектра. Многие, но не все, конечные простые группы являются минимальными относительно простого спектра. Для конечных простых групп, не принадлежащих классу $\mathfrak{Y}$, интересен вопрос их изоморфизма неабелевым композиционным факторам групп из класса $\mathfrak{Y}$. В настоящей работе описаны некоторые конечные простые группы, не изоморфные неабелевым композиционным факторам групп из класса $\mathfrak{Y}$. Построен пример конечной группы из класса $\mathfrak{Y}$, имеющей в качестве композиционного факторы конечную простую спорадическую группу Маклафлина McL, не принадлежащую классу $\mathfrak{Y}$.

Ключевые слова: конечная группа, простой спектр, минимальная группа, максимальная подгруппа, композиционный фактор.

N. V. Maslova, D. O. Revin. On nonabelian composition factors of a finite group that is prime spectrum minimal.

Suppose that L is a finite group, $\pi(L)$ is the set of prime divisors of the order $|L|$, and $\mathfrak{Y}$ is the class of finite groups G such that $\pi(G) \neq \pi(H)$ for any proper subgroup H of G. Groups from the class $\mathfrak{Y}$ will be called prime spectrum minimal. Many but not all finite simple groups are prime spectrum minimal. For finite simple groups not from the class $\mathfrak{Y}$, the question whether they are isomorphic to nonabelian composition factors of groups from the class $\mathfrak{Y}$ is interesting. We describe some finite simple groups that are not isomorphic to nonabelian composition factors of groups from the class $\mathfrak{Y}$ and construct an example of a finite group from $\mathfrak{Y}$ that has as its composition factor a finite simple sporadic McLaughlin group McL not from the class $\mathfrak{Y}$.

Keywords: finite group, prime spectrum, minimal group, maximal subgroup, composition factor.

1. Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин "группа" в значении "конечная группа".

Пусть G — группа. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ порядков всех ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в спектр группы G, будем называть *простым спектром группы* G и обозначать через $\pi(G)$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' будем обозначать множество тех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество всех его простых делителей. Заметим, что в этих обозначениях для конечной группы G множество $\pi(|G|)$ — это в точности простой спектр $\pi(G)$ группы G. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой.*

Подгруппа H конечной группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества простых чисел π.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00469 и 13-01-00505), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), Совета по грантам Президента РФ (проект МК-3395.2012.1), программы поддержки молодежных научных проектов ИММ УрО РАН и целевой программы СО РАН на 2012–2014 гг. (интеграционный проект № 14).

П. Шумяцкий записал в “Коуровскую тетрадь” следующую гипотезу [6, проблема 17.125]:

Гипотеза 1. *В конечной группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$.*

Группу G назовем *минимальной относительно простого спектра*, если $\pi(H) \neq \pi(G)$ для любой собственной (эквивалентно, для любой максимальной) подгруппы H в G. Класс всех групп, минимальных относительно простого спектра, будем обозначать через $\mathfrak{Y}$.

Можно показать (см. [4, лемма 5]), что гипотеза 1 эквивалентна следующей гипотезе:

Гипотеза 2. *Любая группа из класса $\mathfrak{Y}$ порождается двумя сопряженными элементами.*

В [4] авторами было получено частичное подтверждение гипотезы 2. Более точно, наряду с классом $\mathfrak{Y}$ был рассмотен класс $\mathfrak{V}$ всех конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа является холловой. Класс $\mathfrak{V}$ является собственным подклассом класса $\mathfrak{Y}$, и любая разрешимая группа принадлежит классу $\mathfrak{Y}$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\mathfrak{V}$ [4, лемма 6]. В [4] было показано, что любая группа из класса $\mathfrak{V}$ порождается парой сопряженных элементов. Отметим, что доказать справедливость гипотезы 2 для групп из класса $\mathfrak{V}$ удалось благодаря тому, что в работах [2; 7] были найдены композиционные факторы таких групп, а в работе [3] получено полное описание нормального строения групп из класса $\mathfrak{V}$. Поэтому представляется естественной и интересной следующая открытая

Проблема 1. *Каковы неабелевы композиционные факторы группы из класса $\mathfrak{Y}$?*

Ввиду классификации конечных простых групп, проблему 1 удобно рассматривать в следующей формулировке.

Проблема 1$'$. *Для каждой неабелевой простой группы S выяснить, будет ли S изоморфна композиционному фактору некоторой группы из класса $\mathfrak{Y}$?*

Класс $\mathfrak{Y}$ значительно шире, чем класс $\mathfrak{V}$. Так, из основного результата работы [3] следует, что класс $\mathfrak{V}$ не содержит почти простых групп, которые не являются простыми, а неразрешимая группа из $\mathfrak{V}$ имеет ровно один неабелев композиционный фактор, который (см. [7]) сам является группой из класса $\mathfrak{V}$. Однако, используя [11], легко показать, что группы $Aut(PSL_2(32))$ и $PSL_2(13) \times PSL_2(19)$ лежат в классе $\mathfrak{Y}$.

Кроме того, из основного результата [2] следует, что неабелевы композиционные факторы группы из класса $\mathfrak{V}$ с точностью до изоморфизма исчерпываются группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$. Однако основной массив конечных простых групп входит в класс $\mathfrak{Y}$, как это вытекает из следующего результата М. Либека, Ч. Прэгер и Я. Саксла [15].

Предложение 1 [15, следствие 5, табл. 10.7]. *Пусть q — натуральная степень простого числа и G — конечная простая группа. Тогда $G \in \mathfrak{Y}$ за исключением следующих случаев*:

(i) $G \cong A_n$, *где n — непростое число*;

(ii) $G \cong PSp_{2m}(q)$, *где m и q четны*;

(iii) $G \cong PSp_4(q)$, *где q нечетно*;

(iv) $G \cong P\Omega_{2m+1}(q)$, *где m четно и q нечетно*;

(v) $G \cong P\Omega^+_{2m}(q)$, *где m четно*;

(vi) *G изоморфна одной из групп $PSL_6(2)$, $PSU_3(3)$, $PSU_3(5)$, $PSU_4(2)$, $PSU_4(3)$, $PSU_5(2)$, $PSU_6(2)$, $PSp_6(2)$, $G_2(3)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11}, M_{12}, M_{24}, HS, McL, Co_2, Co_3.*

Очевидно положительное решение проблемы 1$'$ для всех конечных простых групп, принадлежащих классу $\mathfrak{Y}$. Однако a priori для оставшихся простых групп (т. е. для всех групп, которые перечислены в пунктах (i)–(vi) предложения 1) не исключена ситуация, когда данная группа может быть изоморфна композиционному фактору некоторой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Одним из основных результатов данной статьи является

Теорема 1. *Среди неабелевых композиционных факторов группы из класса $\mathfrak{Y}$ нет групп, изоморфных следующим конечным простым группам*:

(1) *спорадические группы M_{11}, M_{12}, M_{24}, HS, Co_3, Co_2 и группа Титса ${}^2F_4(2)'$*;

(2) *знакопеременные группы* A_n *при непростом* n;

(3) *группы* $PSp_4(q)$, *где* q *нечетно*;

(4) *группы* $PSp_{2m}(q)$, *где* $m \geq 4$ *и* q *четны*;

(5) *группы* $P\Omega_{2m+1}(q)$, *где* $m \geq 4$ *четно и* q *нечетно*;

(6) *конечные простые группы лиева типа* $PSU_3(3)$, $PSU_4(2)$, $PSU_5(2)$, $PSp_6(2)$, $PSL_6(2)$, $G_2(3)$.

Отметим, что для всех групп из теоремы 1, за исключением группы A_6, отрицательное решение проблемы $1'$ получено на основании предложения 2 (см. ниже), дающего достаточное условие того, что для данной конечной простой группы S проблема $1'$ решается отрицательно.

Вместе с тем, встречаются конечные простые группы, которые не принадлежат классу $\mathfrak{Y}$ и не удовлетворяют условию предложения 2. К таким группам относятся, например, знакопеременная группа A_6 и спорадическая группа Маклафлина McL. С такими "нерегулярными" группами приходится работать индивидуально, и решение проблемы $1'$ может оказаться как отрицательным (что мы можем наблюдать для группы A_6, см. выше теорему 1), так и положительным. Оказывается (см. разд. 4), существует группа из класса $\mathfrak{Y}$, обладающая композиционными факторами, изоморфными McL. В данной статье мы не только докажем существование такой группы, но и уточним возможное ее строение.

Теорема 2. *Спорадическая группа Маклафлина* McL *не принадлежит классу* $\mathfrak{Y}$, *но изоморфна композиционному фактору подходящей группы из класса* $\mathfrak{Y}$. *При этом любая группа* $G \in \mathfrak{Y}$, *имеющая композиционный фактор* $S \cong McL$, *обладает нормальным рядом*

$$G \geq Y > Z \geq 1$$

таким, что

а) *группы* G/Y *и* Z *не имеют композиционных факторов, изоморфных* McL;

б) *факторгруппа* Y/Z *является главным фактором группы* G *и изоморфна прямому произведению нескольких изоморфных копий группы* McL;

в) *факторгруппа* G/Y *неразрешима, ее порядок не делится на числа* 7 *и* 11, *а ее неабелевы композиционные факторы с точностью до изоморфизма принадлежит списку*: $PSL_2(q)$, $PSL_3(q)$, $PSL_4(q)$, $PSL_5(q)$, $PSU_3(q)$, $PSU_4(q)$, $PSU_5(q)$, $PSp_4(2^m)$, ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$, J_3.

З а м е ч а н и е. Для не принадлежащих классу $\mathfrak{Y}$ конечных простых групп $P\Omega^+_{4k}(q)$, $PSp_4(2^w)$, $PSU_3(5)$, $PSU_4(3)$ и $PSU_6(2)$ проблема $1'$ остается открытой.

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [1;8;11;13].

Наибольшая целая степень простого числа p, делящая натуральное число j, называется p-частью числа j и обозначается через j_p.

Через $\Phi(G)$ обозначается подгруппа Фраттини группы G (пересечение всех ее максимальных подгрупп), а через $Soc(G)$ — цоколь группы G, т.е. подгруппа, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами.

Пусть q — натуральная степень простого числа и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетных n и q и $P\Omega^\varepsilon_n(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+,-\}$. Будем обозначать через V векторное пространство размерности n над полем F с определенной на нем соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega^\varepsilon_n(q)$ для четного n параметр ε

называется знаком этой группы и соответствующего ей векторного пространства V и обозначается через $\mathrm{sign}(V)$. Для каждого невырожденного подпространства U четной размерности из V определяется также знак $v = \mathrm{sign}(U)$ [14, гл. 2].

На основе классификации конечных простых групп М. Ашбахер в [9] описал большое семейство естественных геометрически определенных подгрупп конечных простых классических групп, которое было разбито им на восемь классов C_i ($1 \le i \le 8$), называемых теперь классами Ашбахера. Подгруппы из классов Ашбахера конечных простых классических групп подробно изучены в [14], мы используем эти результаты.

Лемма 1 [4, лемма 8]. *Класс $\mathfrak{Y}$ замкнут относительно взятия факторгрупп.*

Пусть G — конечная группа, $A = L_1 \times \ldots \times L_n$ — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа в G, $L_i \cong S$ и $X \le S$. Группа G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{L_1, \ldots, L_n\}$. Можно считать, что $L_1 = S$. Так как G действует транзитивно на Ω, имеем $n = |G : N_G(S)|$. Зафиксируем некоторую полную систему $\mathbf{B} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ представителей правых смежных классов группы G по подгруппе $N_G(S)$. Тогда подгруппы S^{g_i} попарно различны, и мы, не уменьшая общности, можем считать, что $L_i = S^{g_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Для любой подгруппы $X \le S$ положим $X_i = X^{g_i}$ и $Y(G, A, S, X, \mathbf{B}) = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$.

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, $A = L_1 \times \ldots \times L_n$ — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа в G, $L_1 = S$ — конечная простая неабелева группа, $X \le S$ и подгруппа $Y = Y(G, A, S, X, \mathbf{B})$ определена так же, как перед леммой. Если класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно $Aut(S)$, то $Y^G = Y^A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из доказательства [2, предложение 1].

Предложение 2. *Пусть S — конечная простая неабелева группа, обладающая подгруппой X такой, что*

(1) *класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно $Aut(S)$;*

(2) *$\pi(X) = \pi(S)$.*

Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что заключение предложения не верно. Среди групп из класса $\mathfrak{Y}$, обладающих композиционным фактором, изоморфным S, выберем группу G наименьшего возможного порядка. Ввиду леммы 1 наибольшая нормальная подгруппа группы G, у которой нет композиционных факторов, изоморфных S, тривиальна.

Пусть A — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду [8, предложение 8.2]

$$A = L_1 \times \cdots \times L_n,$$

где $L_1, \ldots, L_n$ — сопряженные в G простые подгруппы. Так как $L_1, \ldots, L_n$ сопряжены и A имеет композиционный фактор, изоморфный S, получаем, что $L_i \simeq S$ для любого $i = 1, \ldots, n$. В частности, группа A неразрешима и G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{S_1, \ldots, S_n\}$. Можно считать, что $S = L_1$. Так как G действует транзитивно на Ω, имеем $n = |G : N_G(S)|$. Пусть подгруппа $Y = Y(G, A, S, X, \mathbf{B})$ определена так же, как перед леммой 2.

По лемме 2 имеем $Y^G = Y^A$. Ввиду аргумента Фраттини, $G = AN_G(Y)$. С использованием соответствующей теоремы о гомоморфизме получаем, что $|G : N_G(Y)| = |A : A \cap N_G(Y)|$. Если p — простой делитель индекса $|G : N_G(Y)|$, то p делит $|A| = |S|^n$. Поскольку $\pi(S) = \pi(X)$, получаем, что p делит $|X|$. Таким образом, p делит $|N_G(Y)|$, так как $X_1 \le Y \le N_G(Y)$. Но тогда $\pi(G) = \pi(N_G(Y))$ и $N_G(Y) < G$. Противоречие с тем, что $G \in \mathfrak{Y}$.

Предложение доказано.

Лемма 3. *Пусть S — конечная простая неабелева группа такая, что $\pi(S) = \pi(Aut(S))$, G — конечная группа из класса $\mathfrak{Y}$ такая, что $A = L_1 \times \ldots \times L_n$ — минимальная неединичная нормальная подгруппа в G, где $L_i \cong S$ для всех i. Если факторгруппа G/A разрешима, то она тривиальна.*

Доказательство. Следует из доказательства [3, лемма 21].

Лемма 4. *Пусть S — конечная простая неабелева группа, содержащая подгруппу X такую, что класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $Aut(S)$ и существует простое число $r \in \pi(S)$ такое, что $\pi(|S : X|) \subseteq \pi(|X|) \cup \{r\}$, и пусть G — конечная группа из класса $\mathfrak{Y}$ такая, что $A = L_1 \times \ldots \times L_n$ — минимальная неединичная нормальная подгруппа в G, где $L_1 = S$. Тогда индекс $|G : A|$ не делится на r.*

Доказательство. Пусть индекс $|G : A|$ делится на r. Группа G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\Omega = \{L_1, \ldots, L_n\}$, следовательно, $n = |G : N_G(L_1)|$. Пусть подгруппа $Y = Y(G, A, S, X, \mathbf{B})$ определена так же, как перед леммой 2. Из леммы 2 следует, что $Y^A = Y^G$. Ввиду аргумента Фраттини, $G = AN_G(Y)$. Заметим, что $N_G(Y)$ — собственная подгруппа в G. Докажем, что $\pi(N_G(Y)) = \pi(G)$. С использованием соответствующей теоремы о гомоморфизме получаем, что $|G : N_G(Y)| = |A : A \cap N_G(Y)|$. Индекс $|A : A \cap N_G(Y)|$ делит индекс $|A : Y| = |S : X|^n$. Если p — простой делитель индекса $|G : N_G(Y)|$, то $p \in \pi(|X|) \cup \{r\}$. Легко понять, что $|N_G(Y)|$ делится на все числа из $\pi(|X|)$. Теперь $|G|_r = |A|_r \cdot |G : A|_r > |A|_r$. Из доказанного выше следует, что $|G : N_G(Y)|_r \leq |A|_r$, поэтому $|N_G(Y)|$ делится на r, т.е. $\pi(N_K(Y)) = \pi(G)$. Получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G и H — неединичные группы, причем группа G транзитивно и точно действует на множестве Ω. Обозначим через X подстановочное сплетение $H \wr_\Omega G$, ассоциированное с этим действием. Пусть V — база сплетения, состоящая из всех функций*

$$f : \Omega \to H.$$

Как известно, $V \trianglelefteq X$, $X = VG$ и действие группы G на V определяется правилом $(i)f^g = (i^g)f$ для всех $f \in V$, $g \in G$ и $i \in \Omega$. Тогда $Z(X) \leq V$ и

$$Z(X) = \{f \in V \mid f(\Omega) = \{z\}, \quad z \in Z(H)\} \cong Z(H).$$

Доказательство. Данное утверждение хорошо известно и проверяется непосредственно.

Лемма 6. *Пусть V — двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_q$ и Ω — множество одномерных подпространств пространства V. Пусть $L = PSL(V) \cong PSL_2(q)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Группа L естественным образом точно действует на Ω, причем это действие дважды транзитивно и, в частности, примитивно, и степень действия $|\Omega|$ равна $q + 1$.*

(2) *Ассоциируем с действием из (1) группы L подстановочное сплетение $G = \mathbb{Z}_2 \wr_\Omega L$. Тогда группа G содержит подгруппу, изоморфную $SL(V)$, если и только если $q \not\equiv 1 \pmod 4$.*

Доказательство. Утверждение (1) хорошо известно [12, с. 245]. Утверждение (2) для нечетных q доказано в [17, теорема 1]. В случае, когда q — степень двойки, утверждение (2) очевидно, поскольку $PSL_2(2) \cong SL_2(q)$.

Лемма 7. *В группе $L = PSL_2(103)$ порядка $2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 103$ порядок любой собственной подгруппы не делится на одно из чисел 13 или 17. В частности, $L \in \mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Максимальные подгруппы групп $PSL_2(q)$ известны (см., например, [10, табл. 8.1]). Выполнение заключения леммы проверяется непосредственно.

Лемма 8. *Если H — собственная подгруппа группы McL такая, что класс сопряженности подгруппы H является $Aut(McL)$-инвариантным, то $\pi(H)$ не содержит одно из чисел 7 или 11, и, в частности, $\pi(H) \neq \pi(McL)$.*

Доказательство. Допустим, $7, 11 \in \pi(H)$. Тогда из [11] следует, что H содержится в максимальной подгруппе, изоморфной M_{22}. Так как ввиду [11] группа M_{22} принадлежит классу $\mathfrak{Y}$, получаем $H \cong M_{22}$ и, в частности, H максимальна в McL. Но группа McL содержит ровно два класса сопряженности максимальных подгрупп, изоморфных M_{22}, и эти классы переставляются внешним автоморфизмом группы McL [11], вопреки тому, что класс сопряженности подгруппы H является $Aut(McL)$-инвариантным.

Лемма доказана.

Как известно, любой главный фактор конечной группы является прямым произведением изоморфных простых групп. Мы скажем, что главный фактор K/L конечной группы имеет *композиционный тип* S, если группа K/L изоморфна прямому произведению нескольких изоморфных копий простой группы S.

Лемма 9. *Любая группа $G \in \mathfrak{Y}$ имеет не более одного неабелева главного фактора с данным композиционным типом.*

Доказательство. Допустим, что лемма не верна, и группа $G \in \mathfrak{Y}$ обладает главным рядом
$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = 1$$
таким, что композиционные типы его двух различных неабелевых факторов G_{i-1}/G_i и G_{j-1}/G_j, где $i < j$, совпадают. Ввиду леммы 1 можно считать, что $G_j = 1$, т. е. $j = n$. Пусть для краткости $X = G_{i-1}$, $Y = G_i$ и $H = G_{j-1}$. Тогда H — минимальная нормальная подгруппа в группе G и H неабелева. Заметим, что $\pi(G) = \pi(G/H)$, так как $\pi(H) = \pi(X/Y) \subseteq \pi(G/H)$. Возьмем в H силовскую p-подгруппу P для некоторого $p \in \pi(H)$ и рассмотрим ее нормализатор $N_G(P)$. Ввиду аргумента Фраттини $G = HN_G(P)$, откуда
$$\pi(G) = \pi(G/H) = \pi(HN_G(P)/H) = \pi(N_G(P)/N_H(P)) \subseteq \pi(N_G(P))$$
и, следовательно, $N_G(P) = G$, т. е. $1 \neq P \trianglelefteq G$. Но $P \neq H$ так как H — прямое произведение неабелевых простых групп. Противоречие с тем, что H — минимальная нормальная подгруппа в G.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Предложение 3. *Пусть S — одна из конечных простых спорадических групп M_{11}, M_{12}, J_2, HS, M_{24}, Co_3 или Co_2; группа Титса ${}^2F_4(2)'$, конечная простая группа исключительного лиева типа $G_2(3)$ или одна из конечных простых классических групп $PSU_3(3)$, $PSU_4(2)$, $PSU_5(2)$, $PSp_6(2)$. Тогда S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Ввиду [11] имеем, что если S удовлетворяет условию предложения 3, то в S есть максимальная подгруппа X такая, что класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $Aut(S)$ и $\pi(S) = \pi(X)$ (см. таблицу). Поэтому ввиду предложения 2 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть $S = A_n$, где $n \geq 6$ — непростое число. Тогда S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.*

Конечные простые группы, которые не могут являться неабелевыми композиционными факторами групп из класса $\mathfrak{Y}$

Группа S	Подгруппа X	$\|S\|$	$\|S:X\|$
M_{11}	$PSL_2(11)$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	$2^2 \cdot 3$
M_{12}	$PSL_2(11)$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	$2^4 \cdot 3^2$
HS	M_{22}	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$2^2 \cdot 5$
M_{24}	M_{23}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$2^3 \cdot 3$
Co_3	M_{23}	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$
Co_2	M_{23}	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5^2$
${}^2F_4(2)'$	$PSL_2(25)$	$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$	$2^8 \cdot 3^2$
$G_2(3)$	$PSL_2(13)$	$2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13$	$2^4 \cdot 3^5$
$PSU_3(3)$	$PSL_2(7)$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	$2^2 \cdot 3^2$
$PSU_4(2)$	$2^4 : A_5$	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	3^3
$PSU_5(2)$	$PSL_2(11)$	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 11$	$2^8 \cdot 3^4$
$PSp_6(2)$	S_8	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^2 \cdot 3^2$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что предложение справедливо для группы A_6. Предположим, что это не так, и группа A_6 изоморфна композиционному фактору группы $K \in \mathfrak{Y}$ наименьшего возможного порядка, и пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы K. Тогда по [8, предложение 8.2] $L = L_1 \times \ldots \times L_m$, где L_i — попарно изоморфные простые группы. Ввиду леммы 1 так же, как и при доказательстве предложения 2, получаем, что $L_i \cong A_6$.

Пусть $\overline{K} = K/L$. Рассмотрим сначала случай, когда группа $\overline{K}$ разрешима. Поскольку $\pi(A_6) = \pi(Aut(A_6))$, ввиду леммы 3 имеем $\overline{K} = 1$. Следовательно, $m = 1$. Поскольку $A_6 \notin \mathfrak{Y}$, получаем противоречие. Значит, группа $\overline{K}$ неразрешима.

Поскольку порядок любой простой группы делится на 6 или на 10, порядок группы $\overline{K}$ также делится на 6 или на 10. Однако это невозможно.

В самом деле, ввиду [11] в группе A_6 есть максимальная подгруппа $X \cong 3^2 : 4$, класс сопряженности которой инвариантен относительно $Aut(A_6)$, и при этом $\pi(|A_6 : X|) = \pi(X) \cup \{5\}$. Согласно лемме 4 порядок группы $\overline{K}$ не делится на 5.

Также ввиду [11] в A_6 есть максимальная подгруппа $X \cong D_{10}$, класс сопряженности которой инвариантен относительно $Aut(A_6)$, и $\pi(|A_6 : X|) = \pi(X) \cup \{3\}$. Как и выше, заключаем, что порядок группы $\overline{K}$ не делится на 3.

Получаем противоречие. Таким образом, для группы A_6 предложение справедливо.

Пусть n — непростое число, не равное 6, и $S = A_n$. Поскольку $n \neq 6$, имеем $Aut(S) \cong S_n$. Будем считать, что $S < S_n$. Пусть T — стабилизатор точки при естественном подстановочном действии группы S_n. Тогда $T \cong S_{n-1}$ и $X = T \cap S \cong A_{n-1}$. Поэтому $|T : X| = 2$, и, следовательно, $X^S = X^{S_n}$ и $|S : X| = n$. Поскольку n — непростое число и $n \geq 5$, легко понять, что $\pi(S) = \pi(X)$. Значит, ввиду предложения 2 для группы S предложение справедливо.

Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть $S = PSL_6(2)$. Тогда S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств U и W пространства V таких, что $\dim(U) = 1$, $\dim(W) = 5$ и $V = U \oplus W$. Ввиду [14, предложение 4.1.4], класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $Aut(S)$ и X имеет нормальное строение $[a^+_{1,5}].PSL_5(2).[b^+_{1,5}]$, где константы $a^+_{1,5}$ и $b^+_{1,5}$ определены в [14] перед предложением 4.1.4. Заметим, что $\pi(PSL_5(2)) = \pi(PSL_6(2))$, следовательно, $\pi(X) = \pi(S)$. Поэтому ввиду предложения 2 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть $S = PSp_4(q)$, где q нечетно. Тогда S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Пусть $X \cong PSL_2(q^2).2$ — подгруппа из класса Ашбахера C_3 группы S. Ввиду [14, предложение 4.3.10], класс сопряженности X^S инвариантен относительно $Aut(S)$. Заметим, что $\pi(PSL_2(q^2)) = \pi(PSp_4(q))$, поэтому $\pi(X) = \pi(S)$. Следовательно, ввиду предложения 2 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть $S = PSp_{2m}(q)$, где $m \geq 4$ и q четны. Тогда S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Пусть $X \cong SO^-_{2m}(q)$ — подгруппа из класса Ашбахера C_8 группы S. Ввиду [14, предложение 4.8.6], класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $Aut(S)$. Заметим, что при четном q имеет место равенство $\pi(SO^-_{2m}(q)) = \pi(PSp_{2m}(q))$. Поэтому ввиду предложения 2 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Предложение доказано.

Предложение 8. *Пусть $S = P\Omega_{2m+1}(q)$, где $m \geq 4$ четно и q нечетно. Тогда S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Пусть X — стабилизатор в S ортогонального разложения $V = U \oplus W$ в прямую сумму невырожденных подпространств U и W пространства V таких, что $\dim(U) = 1$, $\dim(W) = 2m$ и $\mathrm{sign}(W) = -$. Ввиду [14, предложение 4.1.6] класс сопряженности X^S является инвариантным относительно $Aut(S)$ и $X \cong P\Omega^-_{2m}(q).2$. Заметим, что $\pi(P\Omega_{2m+1}(q)) = \pi(P\Omega^-_{2m}(q))$, поэтому $\pi(X) = \pi(S)$. Следовательно, ввиду предложения 2 группа S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Предложение доказано.

Теорема 1 следует из предложений 3–8.

4. Пример группы, минимальной относительно простого спектра и имеющей композиционный фактор, изоморфный группе McL

В настоящем разделе мы построим пример группы из класса $\mathfrak{Y}$, имеющей группу McL в качестве композиционного фактора. Этот пример был предложен нам в начале февраля 2013 г. В. И. Трофимовым во время беседы, происходившей на Международной молодежной школе-конференции “Современные проблемы математики” в городе Екатеринбурге. Мы приводим собственное доказательство корректности предложенного В. И. Трофимовым примера.

Для начала зафиксируем некоторые обозначения, которые будут действовать до конца настоящего раздела. Пусть $L = PSL_2(103)$, $S = McL$, $G = Aut(S) = Inn(S)\langle\tau\rangle$, где τ — инволюция из $Aut(S) \setminus Inn(S)$. Ввиду леммы 6 группа L имеет точное 2-транзитивное подстановочное представление

$$\varphi : L \to Sym(\Omega),$$

где $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ и $n = 104$, эквивалентное действию группы L на множестве одномерных подпространств естественного $SL_2(103)$-модуля. Рассмотрим подстановочное сплетение $X^* = G \wr_\Omega L$, ассоциированное с представлением φ. Обозначим через Y^* базу этого сплетения, которую мы отождествим с прямым произведением n изоморфных копий $G_1, \dots, G_n$ группы G: $Y^* = G_1 \times \dots \times G_n$. Пусть также для каждого i отображение

$$\rho_i : Y^* \to G_i$$

определяется как отображение координатной проекции группы Y^* на G_i. Заметим, что

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker \rho_i = 1.$$

Далее, положим

$$Y = Soc(X^*) = Soc(Y^*) = S_1 \times \dots \times S_n,$$

где $S_i = Soc(G_i) \cong McL$ для всех $i = 1, \dots, n$. Пусть $\overline{} : X^* \to X^*/Y$ — естественный эпиморфизм. Тогда группа $\overline{X^*}$ изоморфна подстановочному сплетению $\mathbb{Z}_2 \wr_\Omega L$, ассоциированному с представлением φ группы L. По утверждению (2) леммы 6 группа $\overline{X^*}$ содержит подгруппу, изоморфную группе $SL_2(103)$, и мы обозначим через X ее полный прообраз в X^*. Обозначим через Z полный прообраз в X^* группы $Z(\overline{X}) = \Phi(\overline{X})$ порядка 2. Из определения группы X следует, что $Z = X \cap Y^*$ и $X^* = XY^*$.

Предложение 9. *Во введенных обозначениях группа X содержит группу McL в качестве композиционного фактора и $X \in \mathfrak{Y}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наличие у группы X композиционного фактора, изоморфного группе McL, очевидно. Требуется доказать, что $X \in \mathfrak{Y}$. Нам понадобится следующий факт.

Лемма 10. *Во введенных обозначениях, если $z \in Z$, то $S_i^z = S_i$ для любого $i = 1, \dots, n$. Если, кроме того, $z \in Z \setminus Y$, то $z^{\rho_i} \in G_i \setminus S_i$, т.е. элемент z индуцирует на S_i внешний автоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, $Z \leq Y^*$, поэтому $S_i^z = S_i$, если $z \in Z$. Если, кроме того, $z \in Z \setminus Y$, то из определения следует, что образ элемента z в фактор-группе $X^*/Y \cong \mathbb{Z}_2 \wr_\Omega L$ является нетривиальным центральным элементом, и по лемме 5 координатная проекция этого образа (совпадающая с образом элемента z^{ρ_i} для соответствующего i) на каждый из прямых сомножителей, составляющих базу сплетения, нетривиальна.

Лемма доказана.

Из определения группы X получаем, что $\pi(X) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 103\}$. Возьмем произвольную максимальную подгруппу M в группе X. Для доказательства предложения 9 достаточно установить, что $\pi(M) \neq \pi(X)$.

Если $Y \leq M$, то $\overline{M}$ — максимальная подгруппа в группе $\overline{X} \cong SL_2(103)$, поэтому, ввиду леммы 7 $|M|$ не делится на одно из чисел 13 или 17 и, следовательно, $\pi(M) \neq \pi(X)$.

Таким образом, можно считать, что $Y \nleq M$.

Зафиксируем некоторые дополнительные обозначения. Пусть $N = M \cap Y$, $\sigma_i = \rho_i|_N$. Ввиду максимальности подгруппы M в X и равенства $X^* = XY^*$ имеем $X = MY$ и $X^* = MY^*$. Обозначим через $\delta : X^* \to Sym(\Delta)$ действие группы X^* сопряжениями на множестве $\Delta = \{S_1, \dots, S_n\}$. Ядро этого действия совпадает с Y^*, а индуцированное действие факторгруппы $X^*/Y^* \cong PSL_2(103)$ эквивалентно действию φ группы $L = PSL_2(103)$ на множестве Ω и, в частности, примитивно. Как следствие, действия $\delta|_X$ и $\delta|_M$ сопряжениями групп X и M на Δ также примитивны. Кроме того, группа M действует сопряжениями на множестве $\Gamma = \{N^{\sigma_i} \mid i = 1, \dots, n\}$, причем это действие $\gamma : M \to Sym(\Gamma)$ эквивалентно действию $\delta|_M$, поскольку для любого $x \in M$ из того, что $S_i^x = S_j$, следует $(N^{\sigma_i})^x = (N^x)^{\sigma_j} = N^{\sigma_j}$. В частности, действие γ примитивно. Кроме того, $M \cap Y^* \leq \ker \gamma$, и действие группы

$$M/(M \cap Y^*) \cong X^*/Y^* \cong PSL_2(103),$$

индуцированное действием γ группы M, эквивалентно действию φ. Таким образом, мы можем определить примитивное действие ω группы M на Ω, эквивалентное действию γ.

Положим $D = \langle N^{\sigma_i} \mid i = 1, \ldots, n\rangle$. Из сказанного выше следует, что подгруппа D является M-инвариантной.

Допустим, $D \nleq M$. Ввиду максимальности подгруппы M имеем $X = MD$. Отсюда следует, что $D \trianglelefteq X$ и, более того, $D = Y$, так как Y — минимальная нормальная подгруппа в X. Это означает, что каждое из отображений σ_i сюръективно. Таким образом, группа N оказывается подпрямым произведением n экземпляров простой неабелевой группы McL и, следовательно, по теореме Ремака [16, гл. 3] является прямым произведением $m \leq n$ экземпляров группы McL:

$$N \cong \underbrace{McL \times \cdots \times McL}_{m \text{ раз}}.$$

Как следствие, поскольку $N/\ker\sigma_i \cong N^{\sigma_i} = S_i \cong McL$, имеем

$$\ker\sigma_i \cong \underbrace{McL \times \cdots \times McL}_{m-1 \text{ раз}}.$$

В группе N содержится ровно m нормальных подгрупп с таким строением.

Введем на множестве Ω отношение эквивалентности $\sim$ по правилу

$$i \sim j, \text{ если } \ker\sigma_i = \ker\sigma_j \ (i, j \in \Omega).$$

Из определения следует, что отношение $\sim$ является инвариантным относительно действия ω группы M на Ω. В частности, разбиение множества Ω на классы эквивалентности будет системой импримитивности для этого действия. Поскольку действие примитивно, получаем, что либо все ядра $\ker\sigma_i$ попарно различны (и тогда $m = n$ и $N = Y$, вопреки тому, что $Y \nleq M$), либо все совпадают. Но в последнем случае

$$\ker\sigma_i = \bigcap_{j=1}^{n} \ker\sigma_j \leq \bigcap_{j=1}^{n} \ker\rho_i = 1.$$

Значит, каждое из ядер $\ker\sigma_i$ тривиально и отображения σ_i являются изоморфизмами. В частности, $N \cong McL$, а $M/N \cong \overline{X} \cong SL_2(103)$.

Рассмотрим подгруппу $C = C_M(N) \trianglelefteq M$. Так как $N \cap C = 1$, группа C изоморфна подгруппе группы $M/N \cong SL_2(103)$. С другой стороны, M/C изоморфна подгруппе группы $Aut(McL)$. Более того, M/C изоморфна полной группе автоморфизмов группы McL, поскольку группа M содержит элемент z такой, что $\overline{z} \in \overline{Z}$ и $z \notin Y$, и индуцирующий внешний автоморфизм на каждом из прямых сомножителей S_i группы Y, а следовательно и на N. Значит, M/NC имеет порядок 2 и $|C| = |PSL_2(103)|$. Но $SL_2(103)$ не содержит подгрупп такого порядка, противоречие.

Итак, мы доказали включение $D \leq M$. Это означает, что $D = N$ и $N^{\sigma_i} = N \cap S_i = M \cap S_i$. Следовательно, $N^{\sigma_i} < S_i$ для любого i (в противном случае $S_i = N^{\sigma_i} \leq M$, и, ввиду транзитивности действия $\delta|_M$ группы M на множестве $\Delta = \{S_1, \ldots, S_n\}$, получим $Y \leq M$ и $X = M$). Кроме того, ввиду транзитивности действия γ группы M на множестве Γ, получаем, что все подгруппы $N^{\sigma_i} = M \cap S_i$ сопряжены и, в частности, изоморфны. Класс сопряженности подгруппы N^{σ_i} в S_i инвариантен относительно элемента $z \in M \setminus Y$ такого, что $\overline{z} \in \overline{Z}$. В силу леммы 10 элемент z индуцирует на S_i внешний автоморфизм, поэтому класс сопряженности $(N^{\sigma_i})^{S_i}$ является инвариантным относительно группы $Aut(S_i) \cong Aut(McL)$. Из леммы 8 следует, что $\pi(N^{\sigma_i})$ не содержит одно из чисел 7 или 11. Теперь видно, что число

$$|M| = |M/N||N| = |\overline{X}| \prod_{i=1}^{n} |N^{\sigma_i}|$$

не делится на одно из чисел 7 или 11 и, следовательно, $\pi(M) \neq \pi(X)$.

5. Доказательство теоремы 2

В предыдущем разделе нами было доказано существование конечной группы из класса $\mathfrak{Y}$, содержащей группу Маклафлина McL в качестве композиционного фактора. Далее мы исследуем строение нормального ряда любой такой группы.

Предложение 10. *Пусть K — конечная группа из класса $\mathfrak{Y}$, $L = L_1 \times \ldots \times L_n$ — минимальная нееединичная нормальная подгруппа в K, где $L_i \cong McL$ для всех i. Тогда факторгруппа K/L неразрешима и индекс $|K : L|$ не делится на числа 7 и 11.*

Доказательство. Пусть $K \in \mathfrak{Y}$, и L — минимальная нормальная подгруппа группы K такая, что $L = L_1 \times \ldots \times L_n$, где L_i — простые группы, изоморфные McL. Положим $\overline{K} = K/L$. Поскольку $\pi(McL) = \pi(Aut(McL))$, ввиду леммы 3 получаем неразрешимость факторгруппы $\overline{K}$.

Согласно [11] группа McL содержит максимальную подгруппу $X \cong PSU_4(3)$, класс сопряженности которой в McL инвариантен относительно $Aut(McL)$, при этом $\pi(|McL : PSU_4(3)|) = \{5, 11\} \subset \pi(|PSU_4(3)|) \cup \{11\}$. По лемме 4 индекс $|K : L|$ не делится на 11.

Кроме того, согласно [11] группа McL содержит максимальную подгруппу $X \cong M_{11}$, класс сопряженности которой в McL инвариантен относительно $Aut(McL)$, и $\pi(|McL : M_{11}|) = \{2, 3, 5, 7\} \subset \pi(|M_{11}|) \cup \{7\}$. Ввиду леммы 4 индекс $|K : L|$ не делится на 7.

Предложение доказано.

Следствие. *Пусть K — конечная группа из класса $\mathfrak{Y}$, $L = L_1 \times \ldots \times L_n$ — минимальная нееединичная нормальная подгруппа в G, где $L_i \cong McL$ для всех i. Тогда неабелевы композиционные факторы факторгруппы G/L изоморфны группам из списка: $PSL_2(q)$, $PSL_3(q)$, $PSL_4(q)$, $PSL_5(q)$, $PSU_3(q)$, $PSU_4(q)$, $PSU_5(q)$, $PSp_4(2^m)$,$^2B_2(2^{2m+1})$, $^2F_4(2^{2m+1})$, J_3.*

Доказательство. Порядки известных конечных простых групп можно найти, например, в [11].

Из предложения 10 следует, что порядки неабелевых композиционных факторов факторгруппы G/L не могут делиться на числа 7 и 11.

Единственной конечной простой спорадической группой, порядок которой не делится на эти числа, является группа J_3. Порядок знакопеременной группы A_n также делится на 7 при $n \geq 7$, при этом $A_5 \cong PSL_2(5)$, а группа A_6 не изоморфна никакому неабелеву композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$.

Ввиду малой теоремы Ферма, если S — конечная простая группа лиева типа, отличная от групп $PSL_2(q)$, $PSL_3(q)$, $PSL_4(q)$, $PSL_5(q)$, $PSU_3(q)$, $PSU_4(q)$, $PSU_5(q)$, $PSp_4(q)$, $^2B_2(2^{2m+1})$, $^2G_2(3^{2m+1})$, $^2F_4(2^{2m+1})$, то $|S|$ делится на 7. Легко понять, что порядок группы $^2G_2(3^{2m+1})$ также делится на 7 при любом m. Кроме того, ввиду предложения 6 группа $PSp_4(q)$ при нечетном q не может быть изоморфна никакому неабелеву композиционному фактору никакой группы из класса $\mathfrak{Y}$. Далее применяем классификацию конечных простых групп.

Следствие доказано.

Теперь применение леммы 9 завершает доказательство теоремы 2.

Авторы выражают глубокую признательность В. И. Трофимову, построившему пример группы, минимальной относительно простого спектра и имеющей спорадическую группу Маклафлина в качестве композиционного фактора. Также авторы искренне благодарны А. В. Заварницину, написавшему по их просьбе статью [17]. Наконец, авторы благодарят А. С. Кондратьева за ряд полезных консультаций, а также за замечания, позволившие улучшить первоначальный текст работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2009. 310 с.
2. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
3. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, в которых все максимальные подгруппы холловы // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.
4. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Порождаемость конечной группы с холловыми максимальными подгруппами парой сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 199–206.
5. **Монахов В.С.** Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/17kt.pdf .
7. **Тихоненко Т.В., Тютянов В.Н.** Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. Т. 50, № 5. С. 198–206.
8. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
9. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
10. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
11. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
12. **Dixon J.D., Mortimer B.** Permutation groups. N. Y.: Springer-Verlag, 1996. 353 p.
13. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Chelsea Publishing Company, 1968. 519 p.
14. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.
15. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** Transitive subgroups of primitive permutation groups // J. Algebra. 2000. Vol. 234, no. 2. P. 291–361.
16. **Robinson D.** A course in the theory of groups. N. Y.: Springer-Verlag, 1996. 499 p.
17. **Zavernitsine A.V.** Subextensions for a permutation $PSL_2(q)$-module // Siber. Electron. Math. Rep. 2013. Vol. 10. P. 551–557.

Поступила 25.03.2013

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: revin@math.nsc.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 519.17

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 3[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Сильно регулярный граф Γ с собственным значением $m-1$ назовем исключительным, если он не принадлежит следующему списку: (1) объединение изолированных m-клик; (2) псевдогеометрический граф для $pG_t(t+m-1,t)$; (3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_m(s,m-1)$; (4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1,2\mu,\mu-1,\mu)$, $\sqrt{4\mu+1}=m-1$. В данной работе найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 3.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, собственное значение графа.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Exceptional strongly regular graphs with eigenvalue 3.

A strongly regular graph Γ with eigenvalue $m-1$ is called exceptional if it does not belong to the following list: (1) the union of isolated m-cliques, (2) a pseudogeometric graph for $pG_t(t+m-1,t)$, (3) the completion to a pseudogeometric graph for $pG_m(s,m-1)$, (4) a graph in the half case with parameters $(4\mu+1,2\mu,\mu-1,\mu)$, $\sqrt{4\mu+1}=m-1$. We find parameters of exceptional strongly regular graphs with nonleading eigenvalue 3.

Keywords: strongly regular graph, eigenvalue of a graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a графа Γ, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a]\cap[b]$ содержит точно μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a,l)\in(P,\mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$ или pG_α). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s,t)$. *Точечный граф* геометрии определяется на множестве точек P, где две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α,s,t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Дж. Кулен [1] предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением $\leq t$ для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае(т. е. граф с параметрами $(4\mu+1,2\mu,\mu-1,\mu)$),

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155),программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена может быть решена пошагово для $t = 1, 2, \ldots$.

В работе [2] (независимо в [1]) получено описание дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением 1.

Недавно [3] была завершена программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением 2. В [4] начато решение задачи Кулена для $t = 3$, а именно получена редукция задачи к изучению дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются исключительными сильно регулярными графами с неглавным собственным значением 3.

Сильно регулярный граф Γ с собственным значением $m-1$ назовем *исключительным*, если он не принадлежит следующему списку:

(1) объединение изолированных m-клик;

(2) псевдогеометрический граф для $pG_t(t+m-1, t)$;

(3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_m(s, m-1)$;

(4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, $m-1 = (\sqrt{4\mu+1}-1)/2$.

В данной работе найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 3 (аналогичная задача для графов с неглавным собственным значением 2 решена в [5]).

Теорема 1. *Пусть* Γ *— исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением* 3*. Тогда его параметры лежат в одном из следующих списков*:

(1) *графы без треугольников*: $(162, 21, 0, 3)$, $(176, 25, 0, 4)$, $(210, 33, 0, 6)$, $(266, 45, 0, 9)$; *графы с* $\lambda = 1$: $(99, 14, 1, 2)$, $(115, 18, 1, 3)$; *графы с* $\lambda = 2$: $(96, 19, 2, 4)$, $(196, 39, 2, 9)$; *графы с* $\lambda = 3$: $(45, 12, 3, 3)$, $(85, 20, 3, 5)$, $(125, 28, 3, 7)$, $(165, 36, 3, 9)$, $(225, 48, 3, 12)$, $(245, 52, 3, 13)$, $(325, 68, 3, 17)$; *графы с* $3 < \lambda \le 6$: $(196, 45, 4, 12)$, $(21, 10, 5, 4)$, $(111, 30, 5, 9)$, $(169, 42, 5, 12)$, $(88, 27, 6, 9)$, $(144, 39, 6, 12)$;

(2) $(35, 18, 9, 9)$, $(36, 21, 12, 12)$, $(40, 27, 18, 18)$, $(50, 28, 15, 16)$, $(56, 45, 36, 36)$, $(64, 27, 10, 12)$, $(81, 30, 9, 12)$, $(85, 54, 33, 36)$, $(96, 75, 58, 60)$, $(96, 35, 10, 14)$, $(99, 84, 71, 72)$, $(100, 33, 8, 12)$, $(119, 54, 21, 27)$, $(120, 63, 30, 36)$, $(120, 51, 18, 24)$, $(121, 36, 7, 12)$, $(126, 45, 12, 18)$, $(133, 108, 87, 90)$, $(136, 105, 80, 84)$, $(147, 66, 25, 33)$, $(148, 77, 36, 44)$, $(148, 63, 22, 30)$;

(3) $(162, 138, 117, 120)$, $(171, 60, 15, 24)$, $(175, 108, 63, 72)$, $(176, 135, 102, 108)$, $(205, 108, 51, 63)$, $(205, 68, 15, 26)$, $(208, 81, 24, 36)$, $(216, 129, 72, 84)$, $(216, 75, 18, 30)$, $(220, 135, 78, 90)$, $(236, 180, 135, 144)$, $(243, 66, 9, 21)$, $(245, 108, 39, 54)$, $(246, 126, 57, 72)$, $(246, 105, 36, 51)$, $(246, 85, 20, 34)$, $(250, 153, 88, 102)$, $(276, 165, 92, 108)$, $(276, 75, 10, 24)$, $(280, 243, 210, 216)$;

(4) $(287, 126, 45, 63)$, $(288, 147, 66, 84)$, $(288, 123, 42, 60)$, $(297, 168, 87, 105)$, $(300, 273, 248, 252)$, $(301, 150, 65, 84)$, $(301, 108, 27, 45)$, $(320, 99, 18, 36)$, $(343, 150, 53, 75)$, $(344, 175, 78, 100)$, $(344, 147, 50, 72)$, $(351, 300, 255, 264)$, $(352, 243, 162, 180)$, $(364, 297, 240, 252)$, $(375, 198, 93, 117)$, $(392, 255, 158, 180)$, $(392, 115, 18, 40)$, $(396, 135, 30, 54)$, $(400, 378, 357, 360)$, $(400, 243, 138, 162)$;

(5) $(416, 315, 234, 252)$, $(430, 390, 353, 360)$, $(441, 264, 147, 174)$, $(441, 220, 95, 124)$, $(456, 315, 210, 234)$, $(460, 243, 114, 144)$, $(460, 153, 32, 60)$, $(490, 297, 168, 198)$, $(495, 234, 93, 126)$, $(495, 190, 53, 85)$, $(507, 276, 135, 168)$, $(507, 198, 57, 90)$, $(536, 405, 300, 324)$, $(539, 234, 81, 117)$, $(540, 462, 393, 408)$, $(540, 363, 234, 264)$, $(540, 273, 120, 156)$, $(540, 231, 78, 114)$, $(616, 410, 261, 296)$, $(621, 300, 123, 165)$;

(6) $(625, 378, 213, 252)$, $(640, 243, 66, 108)$, $(651, 468, 327, 360)$, $(672, 451, 290, 328)$, $(676, 315, 122, 168)$, $(689, 432, 255, 297)$, $(690, 318, 121, 168)$, $(690, 273, 80, 126)$, $(726, 300, 95, 144)$, $(729, 408, 207, 255)$, $(735, 318, 109, 159)$, $(736, 675, 618, 630)$, $(736, 555, 410, 444)$, $(736, 371, 162, 212)$, $(736, 315, 106, 156)$, $(768, 531, 354, 396)$, $(784, 435, 218, 270)$, $(800, 423, 198, 252)$, $(845, 588, 395, 441)$, $(850, 513, 288, 342)$;

(7) $(891, 570, 345, 399)$, $(896, 675, 498, 540)$, $(936, 561, 312, 372)$, $(976, 675, 450, 504)$, $(980, 801, 648, 684)$, $(1058, 693, 432, 495)$, $(1065, 798, 585, 636)$, $(1081, 486, 177, 252)$, $(1128, 567, 246, 324)$,

$(1136, 855, 630, 684)$, $(1156, 819, 562, 624)$, $(1156, 615, 290, 369)$, $(1176, 675, 354, 432)$, $(1197, 780, 483, 555)$, $(1275, 938, 673, 737)$, $(1275, 728, 379, 464)$, $(1288, 1053, 852, 900)$, $(1296, 1110, 945, 984)$, $(1300, 783, 438, 522)$, $(1331, 1026, 777, 837)$;

(8) $(1331, 850, 513, 595)$, $(1344, 948, 647, 720)$, $(1408, 1323, 1242, 1260)$, $(1470, 1053, 732, 810)$, $(1519, 1242, 1005, 1062)$, $(1536, 1155, 850, 924)$, $(1596, 1485, 1380, 1404)$, $(1625, 1368, 1143, 1197)$, $(1666, 1620, 1575, 1584)$, $(1701, 1380, 1107, 1173)$, $(1711, 1134, 717, 819)$, $(1716, 1323, 1002, 1080)$, $(1716, 1225, 848, 940)$, $(1818, 1518, 1257, 1320)$, $(1825, 1368, 1003, 1092)$, $(1863, 1596, 1359, 1416)$, $(1944, 1407, 990, 1092)$, $(1961, 1890, 1821, 1836)$, $(2080, 1683, 1346, 1428)$, $(2160, 1683, 1290, 1386)$;

(9) $(2300, 2178, 2061, 2088)$, $(2336, 1755, 1290, 1404)$, $(2527, 1998, 1557, 1665)$, $(3060, 2415, 1878, 2010)$, $(3136, 2565, 2076, 2196)$, $(3186, 2730, 2325, 2424)$, $(3250, 3078, 2913, 2952)$, $(3304, 2835, 2418, 2520)$, $(3381, 2740, 2195, 2329)$, $(3520, 2907, 2378, 2508)$, $(3741, 2970, 2325, 2484)$, $(3872, 3171, 2570, 2718)$, $(4000, 3483, 3018, 3132)$, $(4131, 3540, 3015, 3144)$, $(4992, 4163, 3442, 3620)$, $(5240, 4563, 3954, 4104)$, $(5376, 4875, 4410, 4524)$, $(5500, 4953, 4448, 4572)$, $(5618, 4932, 4311, 4464)$, $(5832, 4998, 4257, 4440)$;

(10) $(6480, 5673, 4944, 5124)$, $(6776, 6075, 5430, 5589)$, $(7514, 6633, 5832, 6030)$, $(8576, 7875, 7218, 7380)$, $(8625, 7728, 6903, 7107)$, $(9472, 8883, 8322, 8460)$, $(9504, 8385, 7368, 7620)$, $(10051, 9180, 8367, 8568)$, $(10580, 9387, 8298, 8568)$, $(11616, 10695, 9830, 10044)$, $(12750, 12078, 11433, 11592)$, $(14848, 13923, 13042, 13260)$, $(14848, 13635, 12498, 12780)$, $(15456, 14355, 13314, 13572)$, $(16225, 14688, 13263, 13617)$, $(17500, 16578, 15693, 15912)$, $(19965, 18538, 17189, 17524)$, $(23276, 21945, 20672, 20988)$, $(24696, 22935, 21270, 21684)$, $(25025, 23598, 22233, 22572)$, $(27455, 25758, 24141, 24543)$, $(33664, 31563, 29562, 30060)$, $(38875, 36828, 34863, 35352)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — исключительные графы с неглавным собственным значением* 3. *Тогда параметры этих графов не принадлежат пп.* (7–10) *из заключения теоремы* 1.

Пусть Γ — сильно регулярный граф, дополнительный к графу с собственным значением 3. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n-4, -4$. Из [6, теорема 5.1] следует, что Γ является одним из следующих графов:

а) полный многодольный граф с s долями порядка 4;

б) псевдогеометрический граф для $pG_3(s, 3)$;

в) псевдогеометрический граф для $pG_4(s, 3)$;

г) графы из некоторого конечного множества.

Графы из п. а) имеют $n = 4$, $\mu = 4(s-1)$ и существуют для любого $s \geq 2$.

Графы из п. б) имеют $\mu = 4 \cdot 3$ и для достаточно большого s являются геометрическими.

Графы из п. в) имеют $\mu = 4 \cdot 4$, существуют для $n(n+1)$, кратного 4, и для достаточно большого n являются геометрическими.

Для графа из п. г) имеем $\mu \notin \{12, 16\}$ и $n > 4$.

Для вычисления параметров достаточно значений n, μ: $k = \mu + 4(n-4)$, $\lambda = \mu + n - 8$, $v = 1 + k + k(k - \lambda - 1)/\mu$, $\bar{k} = v - k - 1$, $\bar{\mu} = v - 2k + \lambda$, $\bar{\lambda} = v - 2k - 2 + \mu$, кратность собственного значения $n - 4$ равна $f = 3k(k+4)/((n-8)\mu)$.

Множество параметров назовем *исключительным*, если выполнены:

(1) условие Крейна $\mu(n-12) \leq 3(n-4)(n+12)$;

(2) абсолютная граница $v \leq f(f+3)/2$ ($v \leq f(f+1)/2$, если $\mu(n-12) \neq 3(n-4)(n+12)$);

(3) μ-граница $\mu \leq 4^3 \cdot 5$ (в случае равенства имеем $n = 12 \cdot 7$);

(4) граница для числа 3-лап $n \leq 6(\mu + 1) + 3$.

Теорема 1 доказывается с помощью компьютерных вычислений. Задается максимальное значение $\mu = 320$. Ему отвечает $n = 84$. Проверяется допустимость полученных параметров.

Шаг алгоритма. Если $\mu = 1$, то останавливаем работу, в противном случае уменьшаем значение μ на 1. Находим максимальное $n = 6(\mu+1) + 3$. Ищем допустимые параметры. Если $\mu + n - 8 \geq 0$, то уменьшаем n на 1, в противном случае переходим к следующему шагу.

Замечание. Пусть Γ — граф из заключения теоремы 1. Если окрестность Δ вершины графа Γ — граф из заключения теоремы 1, то Γ имеет параметры $(126,45,12,18)$, $(246,85,20,34)$, $(287,126,45,63)$, $(288,147,66,84)$, $(392,115,18,40)$, $(490,297,168,198)$, $(640,243,66,109)$, $(1331,850,513,595)$.

Лемма 1 [6, лемма 3.1]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда либо $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ и кратность $n-m$ равна $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu=\lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\quad n=m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Лемма 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) и неглавными собственными значениями $\theta_1=3$ и θ_2, Δ — регулярный подграф из Γ степени μ на w вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu-3)v/(k-3)\le w\le(\mu-\theta_2)v/(k-\theta_2)$;

(2) *если X_i — множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i=|X_i|$, то $x_0\cdot w\le(v-x_0)(v-w)(3-\theta_2)^2/(2k-3-\theta_2)^2$;*

(3) *если $x_0=w$, то $w\le v(3-\theta_2)/(2k-2\theta_2)$.*

Доказательство. Имеем $\theta_2\le\mu-(k-\mu)w/(v-w)\le 3$, поэтому $(\mu-3)(v-w)\le(k-\mu)w\le(\mu-\theta_2)(v-w)$. Отсюда $(\mu-3)v/(k-3)\le w\le(\mu-\theta_2)v/(k-\theta_2)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i=|X_i|$. По [7, предложение 4.6.1] $x_0\cdot w\le(v-x_0)(v-w)(3-\theta_2)^2/(2k-3-\theta_2)^2$.

Если $\mu=w$, то $\mu(2k-3-\theta_2)\le(v-\mu)(3-\theta_2)$ и $\mu\le v(3-\theta_2)/(2k-2\theta_2)$. Лемма доказана.

До конца работы предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ), в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v',k',λ',μ') и неглавными собственными значениями $3,\theta_2$.

Лемма 3. *Пусть u,w — вершины из Γ с $d(u,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu'-3)v'/(k'-3)\le\mu\le(\mu'-\theta_2)v'/(k'-\theta_2)$;

(2) *если X_i — множество вершин из $[w]-[u]$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[w]$, $x_i=|X_i|$, то $x_0\cdot\mu\le(v'-x_0)(v'-\mu)(3-\theta_2)^2/(2k'-3-\theta_2)^2$;*

(3) *если $x_0=\mu$, то $\mu\le v'(3-\theta_2)/(2k'-2\theta_2)$.*

Доказательство. Все утверждения следуют из леммы 2, примененной к подграфу $\Delta=[u]\cap[w]$ из $[w]$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть Γ является вполне регулярным графом диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v',k',λ',μ'), $\mu'>0$. Тогда для любых вершин $u,z\in\Gamma$ с $d(u,z)=3$ имеем $c_3(u,z)\ge\mu+\mu'+1$, или Γ — граф Тервиллигера.*

Доказательство. Пусть $d(u,z)=3$. Положим $\Delta=[z]\cap\Gamma_2(u)$. Если $[u]\cap\Gamma_2(z)$ содержит две несмежные вершины w,w', то степень u в графе $[w]\cap[w']$ равна μ', Δ содержит не более $\mu-\mu'-1$ вершин из $[w]\cap[w']$ и не менее $\mu'+1$ вершин в каждом из подграфов $[w]-[w']$, $[w']-[w]$. Поэтому $|\Delta|\ge\mu+\mu'+1$.

Пусть теперь подграф $[u]\cap\Gamma_2(z)$ является кликой. Тогда для любой вершины $y\in\Delta$ подграф $[u]\cap[y]$ является кликой порядка $\mu=\mu'+1$, и поскольку все μ-подграфы регулярны степени μ', то Γ — граф Тервиллигера. Лемма доказана.

Лемма 5. *Параметры* (v', k', λ', μ') *не принадлежат п.* (10) *заключения теоремы* 1.

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 2$ и Γ имеет неглавные собственные значение $n - m, -m$, то по лемме 1 число $m-1$ делит $v'-k'-1$. Далее, $n-m \geq 3$, поэтому $m-1 \leq (v'-k'-1)/4$. А если $d(\Gamma) \geq 3$, то $\mu \leq b_1 = v' - k' - 1$ и $2\mu' + 2 \leq v'$ ввиду леммы 4.

Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (10) заключения теоремы 1, то $\mu' > v'-k'-1$, поэтому $d(\Gamma) = 2$.

В случае параметров $(6480, 5673, 4944, 5124)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 183$, $v' - k' - 1 = 806$ и $m - 1 \leq 403/2$; противоречие. В случае параметров $(8625, 7728, 6903, 7107)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 207$, $v' - k' - 1 = 894$ и $m - 1 \leq 447/2$; противоречие. В случае параметров $(7514, 6633, 5832, 6030)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 245$, $v' - k' - 1 = 880$, $m - 1 \leq 220$; противоречие.

В случае параметров $(6776, 6075, 5430, 5589)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 162$, $v' - k' - 1 = 700$, $m - 1 = 175$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(8576, 7875, 7218, 7380)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 165$, $v' - k' - 1 = 700$, $m - 1 = 175$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(9472, 8883, 8322, 8460)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 141$, $v' - k' - 1 = 588$, $m - 1 = 147$ и $n - m = 3$. В любом случае имеем противоречие с замечанием.

В случае параметров $(9504, 8385, 7368, 7620)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 255$, $v' - k' - 1 = 1118$ и $m - 1 \leq 559/2$; противоречие. В случае параметров $(10051, 9180, 8367, 8568)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 204$, $v' - k' - 1 = 870$ и $m - 1 \leq 435/2$; противоречие. В случае параметров $(12750, 12078, 11433, 11592)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 162$, $v' - k' - 1 = 671$, $m - 1 \leq 671/4$; противоречие.

В случае параметров $(10580, 9387, 8298, 8568)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 273$, $v' - k' - 1 = 1192$, $m - 1 = 298$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(11616, 10695, 9830, 10044)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 217$, $v' - k' - 1 = 920$, $m - 1 = 230$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(14848, 13923, 13042, 13260)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 221$, $v' - k' - 1 = 924$, $m - 1 = 231$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(14848, 13635, 12498, 12780)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 285$, $v' - k' - 1 = 1212$, $m - 1 = 303$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(15456, 14355, 13314, 13572)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 261$, $v' - k' - 1 = 1100$, $m - 1 = 275$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(16225, 14688, 13263, 13617)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 357$, $v' - k' - 1 = 1536$, $m - 1 = 382$ и $n - m = 3$. В любом случае имеем противоречие с замечанием.

В случае параметров $(17500, 16578, 15693, 15912)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 308$, $v' - k' - 1 = 921$, $m - 1 \leq 921/4$; противоречие. В случае параметров $(19965, 18538, 17189, 17524)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 338$, $v' - k' - 1 = 1426$, $m - 1 \leq 713/2$; противоречие. В случае параметров $(23276, 21945, 20672, 20988)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 319$, $v' - k' - 1 = 1330$, $m - 1 \leq 665/2$; противоречие. В случае параметров $(25025, 23598, 22233, 22572)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 342$, $v' - k' - 1 = 1426$, $m - 1 \leq 713/2$; противоречие. В случае параметров $(38875, 36828, 34863, 35352)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 492$, $v' - k' - 1 = 2046$, $m - 1 = 1023/2$; противоречие.

В случае параметров $(24696, 22935, 21270, 21684)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 417$, $v' - k' - 1 = 1760$, $m - 1 = 440$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(27455, 25758, 24141, 24543)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 405$, $v' - k' - 1 = 1696$, $m - 1 = 424$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(33664, 31563, 29562, 30060)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 501$, $v' - k' - 1 = 2100$, $m - 1 = 525$ и $n - m = 3$. В любом случае имеем противоречие с замечанием. Лемма доказана.

Лемма 6. *Параметры* (v', k', λ', μ') *не принадлежат п.* (9) *заключения теоремы* 1.

Доказательство. Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (9) заключения теоремы 1, то $\mu' > v' - k' - 1$, поэтому $d(\Gamma) = 2$, Γ имеет наименьшее собственное значение $-m$ и $m - 1 \leq (v' - k' - 1)/4$.

В случае параметров $(2300, 2178, 2061, 2088)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 30$, $v' - k' - 1 = 121$, $m - 1 \leq 121/4$; противоречие. В случае параметров $(3136, 2565, 2076, 2196)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 123$, $v' - k' - 1 = 570$, $m - 1 \leq 285/2$; противоречие. В случае параметров $(3186, 2730, 2325, 2424)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 102$, $v' - k' - 1 = 455$, $m - 1 \leq 455/4$; противоречие. В случае параметров $(3250, 3078, 2913, 2952)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 42$, $v' - k' - 1 = 171$, $m - 1 \leq 171/4$; противоречие.

В случае параметров $(2336, 1755, 1290, 1404)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 117$, $v' - k' - 1 = 580$, $m - 1 = 145$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(2527, 1998, 1557, 1665)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 111$,

$v'-k'-1=528$, $m-1=132$ и $n-m=3$. В случае параметров $(3060,2415,1878,2010)$ имеем $m\geq-\theta_2=135$, $v'-k'-1=644$, $m-1=161$ и $n-m=3$. В случае параметров $(3304,2835,2418,2520)$ имеем $m\geq-\theta_2=105$, $v'-k'-1=468$, $m-1=117$ и $n-m=3$. В случае параметров $(3381,2740,2195,2329)$ имеем $m\geq-\theta_2=137$, $v'-k'-1=640$, $m-1=160$ и $n-m=3$. В случае параметров $(3520,2907,2378,2508)$ имеем $m\geq-\theta_2=133$, $v'-k'-1=612$, $m-1=153$ и $n-m=3$. В любом случае имеем противоречие с замечанием.

В случае параметров $(3741,2970,2325,2484)$ имеем $m\geq-\theta_2=162$, $v'-k'-1=770$, $m-1\leq 385/2$; противоречие. В случае параметров $(4131,3540,3015,3144)$ имеем $m\geq-\theta_2=132$, $v'-k'-1=590$, $m-1\leq 295/2$; противоречие. В случае параметров $(5500,4953,4448,4572)$ имеем $m\geq-\theta_2=127$, $v'-k'-1=546$, $m-1\leq 273/2$; противоречие. В случае параметров $(5618,4932,4311,4464)$ имеем $m\geq-\theta_2=156$, $v'-k'-1=685$, $m-1\leq 685/4$; противоречие. В случае параметров $(5832,4998,4257,4440)$ имеем $m\geq-\theta_2=186$, $v'-k'-1=833$, $m-1\leq 833/4$; противоречие.

В случае параметров $(3872,3171,2570,2718)$ имеем $m\geq-\theta_2=151$, $v'-k'-1=700$, $m-1=175$ и $n-m=3$. В случае параметров $(4000,3483,3018,3132)$ имеем $m\geq-\theta_2=117$, $v'-k'-1=516$, $m-1=129$ и $n-m=3$. В случае параметров $(4992,4163,3442,3620)$ имеем $m\geq-\theta_2=181$, $v'-k'-1=828$, $m-1=207$ и $n-m=3$. В случае параметров $(5240,4563,3954,4104)$ имеем $m\geq-\theta_2=153$, $v'-k'-1=676$, $m-1=169$ и $n-m=3$. В случае параметров $(5376,4875,4410,4524)$ имеем $m\geq-\theta_2=117$, $v'-k'-1=500$, $m-1=125$ и $n-m=3$. В любом случае имеем противоречие с замечанием. Лемма доказана.

Лемма 7. *Параметры* (v',k',λ',μ') *не принадлежат п.* (8) *заключения теоремы* 1.

Доказательство. Если параметры (v',k',λ',μ') принадлежат п. (8) заключения теоремы 1, то $\mu'>v'-k'-1$, поэтому $d(\Gamma)=2$, Γ имеет наименьшее собственное значение $-m$ и $m-1\leq(v'-k'-1)/4$.

В случае параметров $(1331,850,513,595)$ имеем $m\geq-\theta_2=63$, $v'-k'-1=480$, $m-1\in\{80,96,120\}$. Если $m-1=120$, то $n-m=3$; противоречие с замечанием. Если $m-1=96$, то $n-m=4$, $\mu=852+96-5=943$ не делит $1331\cdot 480$; противоречие. Если $m-1=80$, то $n-m=5$, $\mu=852+80-6=926$ не делит $1331\cdot 480$; противоречие.

В случае параметров $(1344,948,647,720)$ имеем $m\geq-\theta_2=76$, $v'-k'-1=395$, $m-1=79$, $n-m=4$ и $\mu=950+79-5=1024$ не делит $1344\cdot 395$; противоречие.

В случае параметров $(1408,1323,1242,1260)$ имеем $m\geq-\theta_2=21$, $v'-k'-1=84$, $m-1=21$ и $n-m=3$. В случае параметров $(1470,1053,732,810)$ имеем $m\geq-\theta_2=81$, $v'-k'-1=416$, $m-1=104$ и $n-m=3$. В обоих случаях имеем противоречие с замечанием.

В случае параметров $(1519,1242,1005,1062)$ имеем $m\geq-\theta_2=60$, $v'-k'-1=277$, $m-1\leq 277/4$; противоречие.

В случае параметров $(1536,1155,850,924)$ имеем $m\geq-\theta_2=77$, $v'-k'-1=380$, $m-1=76$, $n-m=4$ и $\mu=1157+76-5=1228$ не делит $1536\cdot 380$; противоречие.

В случае параметров $(1596,1485,1380,1404)$ имеем $m\geq-\theta_2=27$, $v'-k'-1=110$, $m-1\leq 55/2$; противоречие. В случае параметров $(1666,1620,1575,1584)$ имеем $m\geq-\theta_2=12$, $v'-k'-1=45$, $m-1\leq 45/4$; противоречие. В случае параметров $(1818,1518,1257,1320)$ имеем $m\geq-\theta_2=66$, $v'-k'-1=299$, $m-1\leq 299/4$; противоречие. В случае параметров $(1863,1596,1359,1416)$ имеем $m\geq-\theta_2=60$, $v'-k'-1=266$, $m-1\leq 133/2$; противоречие. В случае параметров $(1961,1890,1821,1836)$ имеем $m\geq-\theta_2=18$, $v'-k'-1=70$, $m-1\leq 35/2$; противоречие.

В случае параметров $(1716,1225,848,940)$ имеем $m\geq-\theta_2=95$, $v'-k'-1=490$, $m-1=98$, $n-m=4$, $\mu=1227+98-5=1320$ и кратность 4 равна $98\cdot 1716\cdot 1815/(103\cdot 1320)$; противоречие.

В случае параметров $(1625,1368,1143,1197)$ имеем $m\geq-\theta_2=57$, $v'-k'-1=256$, $m-1=64$ и $n-m=3$. В случае параметров $(1701,1380,1107,1173)$ имеем $m\geq-\theta_2=69$, $v'-k'-1=320$, $m-1=80$ и $n-m=3$. В случае параметров $(1711,1134,717,819)$ имеем $m\geq-\theta_2=105$, $v'-k'-1=576$, $m-1=144$ и $n-m=3$. В случае параметров $(1716,1323,1002,1080)$ имеем

$m \geq -\theta_2 = 81$, $v' - k' - 1 = 392$, $m - 1 = 98$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(1825, 1368, 1003, 1092)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 92$, $v' - k' - 1 = 456$, $m - 1 = 114$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(1944, 1407, 990, 1092)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 105$, $v' - k' - 1 = 536$, $m - 1 = 134$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(2080, 1683, 1346, 1428)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 85$, $v' - k' - 1 = 396$, $m - 1 = 99$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(2160, 1683, 1290, 1386)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 99$, $v' - k' - 1 = 476$, $m - 1 = 119$ и $n - m = 3$. В любом случае имеем противоречие с замечанием. Лемма доказана.

Лемма 8. *Параметры (v', k', λ', μ') не принадлежат п. (7) заключения теоремы 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если параметры (v', k', λ', μ') принадлежат п. (7) заключения теоремы 1 и $\mu' \leq v' - k' - 1$, то эти параметры равны $(936, 561, 312, 372)$, $(1081, 486, 177, 252)$, $(1128, 567, 246, 324)$, $(1156, 615, 290, 369)$, $(1176, 675, 354, 432)$ или $(1275, 728, 379, 464)$.

В случае параметров $(936, 561, 312, 372)$ имеем $\theta_2 = -63$, $v' - k' - 1 = 374$ и $\mu \leq 374$; противоречие с тем, что по лемме 3 имеем $369 \cdot 936/578 \leq \mu \leq 435 \cdot 936/624$.

В случае параметров $(1081, 486, 177, 252)$ имеем $\theta_2 = -78$, $v' - k' - 1 = 594$ и $\mu \leq 594$; противоречие с тем, что $249 \cdot 1081/483 \leq \mu$.

В случае параметров $(1128, 567, 246, 324)$ имеем $\theta_2 = -81$, $v' - k' - 1 = 560$ и $\mu \leq 560$; противоречие с тем, что $321 \cdot 1128/564 \leq \mu$.

В случае параметров $(1156, 615, 290, 369)$ имеем $\theta_2 = -82$, $v' - k' - 1 = 540$ и $\mu \leq 540$; противоречие с тем, что $366 \cdot 1156/612 \leq \mu$.

В случае параметров $(1176, 675, 354, 432)$ имеем $\theta_2 = -81$, $v' - k' - 1 = 500$ и $\mu \leq 500$; противоречие с тем, что $429 \cdot 1176/725 \leq \mu$.

В случае параметров $(1275, 728, 379, 464)$ имеем $\theta_2 = -88$, $v' - k' - 1 = 546$ и $\mu \leq 546$; противоречие с тем, что $461 \cdot 1275/725 \leq \mu$.

Пусть $d(\Gamma) = 2$, Γ имеет собственные значения $n - m, -m$ и $m - 1 \leq (v' - k' - 1)/4$.

В случае параметров $(891, 570, 345, 399)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 57$, $v' - k' - 1 = 320$, $m - 1 \in \{64, 80\}$. Если $m - 1 = 80$, то $n - m = 3$; противоречие с замечанием. Если $m - 1 = 64$, то $n - m = 4$, $\mu = 572 + 64 - 5 = 631$ не делит $891 \cdot 320$; противоречие.

В случае параметров $(896, 675, 498, 540)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 45$, $v' - k' - 1 = 220$, $m - 1 = 55$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(1058, 693, 432, 495)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 66$, $v' - k' - 1 = 364$, $m - 1 = 91$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(1156, 819, 562, 624)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 65$, $v' - k' - 1 = 336$, $m - 1 = 84$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(1197, 780, 483, 555)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 75$, $v' - k' - 1 = 416$, $m - 1 = 104$ и $n - m = 3$. В случае параметров $(1331, 1026, 777, 837)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 63$, $v' - k' - 1 = 304$, $m - 1 = 76$ и $n - m = 3$. В любом случае имеем противоречие с замечанием.

В случае параметров $(936, 561, 312, 372)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 63$, $v' - k' - 1 = 374$, $m - 1 \leq 187/2$; противоречие. В случае параметров $(980, 801, 648, 684)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 39$, $v' - k' - 1 = 178$, $m - 1 \leq 89/2$; противоречие. В случае параметров $(1065, 798, 585, 636)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 54$, $v' - k' - 1 = 266$, $m - 1 \leq 133/2$; противоречие.

В случае параметров $(976, 675, 450, 504)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 57$, $v' - k' - 1 = 300$, $m - 1 \in \{60, 75\}$. Если $m - 1 = 75$, то $n - m = 3$; противоречие с замечанием. Если $m - 1 = 60$, то $n - m = 4$, $\mu = 677 + 60 - 5 = 732$ и кратность 4 равна $60 \cdot 976 \cdot 1037/(65 \cdot 732)$; противоречие.

В случае параметров $(1081, 486, 177, 252)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 78$, $v' - k' - 1 = 594$, $m - 1 = 99$, $n - m = 5$, $\mu = 488 + 99 - 6 = 581$ не делит $1081 \cdot 594$; противоречие.

В случае параметров $(1128, 567, 246, 324)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 81$, $v' - k' - 1 = 560$, $m - 1 \in \{112, 140\}$. Если $m - 1 = 140$, то $n - m = 3$; противоречие с замечанием. Если $m - 1 = 112$, то $n - m = 4$, $\mu = 569 + 112 - 5 = 676$ не делит $1128 \cdot 560$; противоречие.

В случае параметров $(1136, 855, 630, 684)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 57$, $v' - k' - 1 = 280$, $m - 1 \in \{56, 70\}$. Если $m - 1 = 70$, то $n - m = 3$; противоречие с замечанием. Если $m - 1 = 56$, то $n - m = 4$, $\mu = 857 + 56 - 5 = 908$ не делит $1136 \cdot 280$; противоречие.

В случае параметров $(1156, 615, 290, 369)$ имеем $m \geq -\theta_2 = 82$, $v' - k' - 1 = 540$, $m - 1 \in \{90, 108, 135\}$. Если $m - 1 = 135$, то $n - m = 3$; противоречие с замечанием. Если $m - 1 = 108$, то

$n-m=4$, $\mu=617+108-5=720$ и кратность 4 равна $108\cdot 1156\cdot 1265/(113\cdot 720)$; противоречие. Если $m-1=90$, то $n-m=5$, $\mu=617+90-6=701$ не делит $1156\cdot 540$; противоречие.

В случае параметров $(1176,675,354,432)$ имеем $m\geq -\theta_2=81$, $v'-k'-1=500$, $m-1\in\{100,125\}$. Если $m-1=125$, то $n-m=3$; противоречие с замечанием. Если $m-1=100$, то $n-m=4$, $\mu=677+100-5=772$ не делит $1176\cdot 500$; противоречие.

В случае параметров $(1275,938,673,737)$ имеем $m\geq -\theta_2=67$, $v'-k'-1=337$, $m-1\leq 337/4$; противоречие.

В случае параметров $(1275,728,379,464)$ имеем $m\geq -\theta_2=88$, $v'-k'-1=546$, $m-1=91$, $n-m=5$, $\mu=730+91-6=815$ не делит $1275\cdot 546$; противоречие. В случае параметров $(1288,1053,852,900)$ имеем $m\geq -\theta_2=51$, $v'-k'-1=234$, $m-1\leq 117/2$; противоречие. В случае параметров $(1296,1110,945,984)$ имеем $m\geq -\theta_2=42$, $v'-k'-1=185$, $m-1\leq 185/4$; противоречие.

В случае параметров $(1300,783,438,522)$ имеем $m\geq -\theta_2=87$, $v'-k'-1=516$, $m-1\in\{86,129\}$. Если $m-1=129$, то $n-m=3$; противоречие с замечанием. Если $m-1=86$, то $n-m=5$, $\mu=785+86-6=865$ не делит $1300\cdot 516$; противоречие. Лемма доказана.

Теорема 2 следует из лемм 5–8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Koolen J., Yu H.** The distance-regular graphs such that all of its second largest local eigenvalues are at most one // Linear Algebra Appl. 2011. Vol. 435, no. 10. P. 2507–2579.
2. **Карданова М.Л., Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин являются графами, дополнительными к графу Зейделя // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 4. С. 447–449.
3. **Белоусов И.Н., Махнев А.А., Нирова М.С.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 2 // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 5. С. 475–478.
4. **Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 475–478.
5. **Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В.** // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 105–116.
6. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33, no. 4. P. 392–400.
7. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 3, № 3. С. 71–83.
8. **Brouwer A. E., Haemers W. H.** Spectra of graphs. N.Y. etc: Springer-Verlag, 2011. 250 p.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 17.06.2013

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.956.6

ОДНА МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ, СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПО РАЗМЕРАМ[1]

М. С. Никольский

Рассматривается линейная модель динамики популяций, структурированных по размерам. Она описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных — уравнением переноса. Для нее строится в конструктивной форме решение при нелинейном глобальном краевом условии, имеющем биологический смысл. Рассматриваемая модель представляет интерес для биологических приложений, в частности, в лесной тематике. Полученные результаты позволяют, например, изучать качественное поведение решений рассматриваемой нестандартной краевой задачи с глобальным краевым условием.

Ключевые слова: уравнение переноса, интегральное уравнение типа Вольтерра, метод последовательных приближений.

M. S. Nikol'skii. One model of size-structured population dynamics.

A linear model of size-structured population dynamics is considered. It is described by a linear partial differential equation, namely, by the transport equation. A solution in a constructive form is built for this model under a nonlinear global boundary condition, which has a biological meaning. The model is of interest for biological applications, in particular, in forestry. The results make it possible, for example, to study the qualitative behavior of solutions of the formulated nonstandard boundary value problem with a global boundary condition.

Keywords: transport equation, integral equation of Volterra type, method of successive approximations.

Обозначим через $x(t,l)$ плотность некоторой популяции и будем описывать динамику этой величины следующим (см., например, [1, с. 2331–2334; 2, с. 63–67; 3, с. 860–863; 4, с. 68–77; 5, с. 122–127]) упрощенным уравнением переноса (в западной литературе иногда используют термин transport equation)

$$\frac{\partial x(t,l)}{\partial t} + b\frac{\partial x(t,l)}{\partial l} = cx(t,l), \tag{1}$$

где b, c — константы, причем $b > 0$. Величина $x(t,l)$ описывает плотность биомассы популяции в момент времени $t \geqslant 0$, структурированной по размерам $l \in [0, L]$, где $L > 0$. В качестве l иногда выступает возраст. В лесной тематике при моделировании роста леса l обозначает высоту деревьев.

Фиксируются начальное условие

$$x(0,l) = \varphi_0(l), \quad l \in [0, L], \tag{2}$$

и граничное условие, имеющее биологический смысл,

$$x(t,0) = \int\limits_0^L f(t,l,x(t,l))\,dl + p(t), \tag{3}$$

где $t > 0$. Если потребовать, чтобы условие (3) соблюдалось и при $t = 0$, то мы получаем условие согласования

$$\varphi_0(0) = \int\limits_0^L f(0,l,\varphi_0(l))\,dl + p(0). \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-12112-офи-м-2011, 12-01-00175-а, 12-01-00506, 13-01-00685).

В (2) функция $\varphi_0(l)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(-\delta, L+\delta)$, где константа $\delta > 0$ и $\varphi_0(l)$ неотрицательна на $[0, L]$. В (3) функция $f(t, l, x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных на множестве $t > -\delta$, $l \in (-\delta, L+\delta)$, $x > -\delta$, а также неотрицательной при $t \geqslant 0$, $l \in [0, L]$, $x \geqslant 0$. Функция $p(t)$ в (3) предполагается непрерывно дифференцируемой и неотрицательной при $t \geqslant 0$. В (3) интеграл понимается в смысле Римана. Наложим также на функцию $f(t, l, x)$ следующее условие подлинейного роста: при $t \geqslant 0$, $l \in [0, L]$, $x \geqslant 0$ имеет место оценка

$$f(t, l, x) \leqslant a(t)(1+x), \tag{5}$$

где $a(t)$ неотрицательная и непрерывная функция при $t \geqslant 0$.

Основными результатами работы являются доказательство разрешимости задачи (1)–(3) и выяснение качественных особенностей полученного решения.

Мы будем использовать для построения решения краевой задачи (1)–(3) известный метод характеристик (см., например, [6, гл. 5]), продолжая функцию $\varphi_0(l)$ при $l < 0$ так, что для продолженной функции $\varphi(l)$, $l \leqslant L$, где $\varphi(l) = \varphi_0(l)$ при $l \in [0, L]$, выполняются условия:

1) она неотрицательна и непрерывна при $l < 0$, а также имеет предел слева в точке $l = 0$ (он может отличаться от значения $\varphi(0) = \varphi_0(0)$);

2) она непрерывно дифференцируема при всех $l < 0$ за исключением, быть может, точки $l = -L$;

3) при $t > 0$, $l \leqslant L$ для функции

$$y(t, l) = e^{ct}\varphi(l - bt) \tag{6}$$

выполняется краевое условие (3).

Нетрудно проверить, что при $t > 0$, $l \leqslant L$, $l - bt \neq 0$ и $l - bt \neq -L$ функция $y(t, l)$ вида (6), где для продолженной функции $\varphi(l)$ выполняются условия 1)–3), удовлетворяет уравнению (1). Отметим также, что функция $y(t, l)$ удовлетворяет начальному условию (3).

После построения функции φ при $l \leqslant L$, предлагается взять в качестве искомого решения краевой задачи (1)–(3) функцию $y(t, l)$ вида (6). При поиске нужного нам продолжения функции $\varphi_0(l)$ при $l < 0$ мы воспользуемся соображениями работы [5] с очевидными усложнениями. Отметим, что при выполнении условия согласования (4) функция φ, которую мы построим, будет непрерывной при $l \leqslant L$, т.е. аналитические свойства функции $y(t, l)$ (см.(6)) улучшаются.

Для нахождения нужного продолжения $\varphi(l)$ функции $\varphi_0(l)$ при $l < 0$ подставим функцию $y(t, l)$ вида (6) в равенство (3) вместо функции $x(t, l)$. Тогда при $t > 0$ получим равенство

$$\varphi(-bt) = e^{-ct}\int\limits_0^L f(t, l, e^{ct}\varphi(l - bt))\, dl + p_1(t), \tag{7}$$

где

$$p_1(t) = e^{-ct}p(t), \quad t \geqslant 0.$$

Обозначим в (7) $\tau = -bt$ и сделаем в интеграле в (7) замену переменного $r = l + \tau$. Тогда равенство (7) при $\tau < 0$ переписывается в виде

$$\varphi(\tau) = \int\limits_{\tau}^{L+\tau} g(\tau, r, \varphi(r))\, dr + p_2(\tau), \tag{8}$$

где

$$g(\tau, r, y) = e^{\frac{c}{b}\tau} f\left(-\frac{\tau}{b}, r-\tau, e^{-\frac{c}{b}\tau} y\right), \tag{9}$$

$$y \geqslant 0,$$

$$p_2(\tau) = p_1\left(-\frac{\tau}{b}\right).$$

Будем решать интегральное уравнение (8) при $\tau < 0$ относительно неизвестной функции $\varphi(\tau)$, считая, что при $\tau \in [0, L]$ $\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau)$ (см. начальное условие (2)). Перепишем равенство (8) при $\tau \in [-L, 0)$ в следующем виде:

$$\varphi(\tau) = \int\limits_{\tau}^{0} g(\tau, r, \varphi(r))\, dr + f_1(\tau), \tag{10}$$

где

$$f_1(\tau) = \int\limits_{0}^{L+\tau} g(\tau, r, \varphi_0(r))\, dr + p_2(\tau) \tag{11}$$

— известная при $\tau \in [-L, 0]$ функция. Положим в (10) $\tau = -s$ и сделаем замену переменного $r = -\nu$ в первом интегральном члене справа в формуле (10). Далее, обозначим $\psi_1(s) = \varphi(-s)$ и получим с помощью (10),(11) при $s \in (0, L]$ нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$\psi_1(s) = \int\limits_{0}^{s} g(-s, -\nu, \psi_1(\nu))\, d\nu + f_1(-s). \tag{12}$$

Это уравнение при $s \in [0, L]$ будем решать методом последовательных приближений (см., например, [6, гл. 2; 7, гл. IV]). Для этого рассмотрим на $[0, L]$ рекуррентную последовательность функций

$$\psi^0(s) = f_1(-s), \quad \psi^{k+1}(s) = \int\limits_{0}^{s} g(-s, -\nu, \psi^k(\nu))\, d\nu + f_1(-s), \tag{13}$$

где $k = 0, 1, \ldots$. Отметим, что при сделанных предположениях функции $\psi^k(s)$, $k = 0, 1, \ldots$, неотрицательны и непрерывны на $[0, L]$. Из формул (5), (9) вытекает, что при $s \in [0, L]$, $\nu \in [0, L]$, $z \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$0 \leqslant g(-s, -\nu, z) \leqslant a(1 + z), \tag{14}$$

где $a > 0$ — достаточно большая константа. Из (11), (13), (14) при $s \in [0, L]$, $k = 0, 1, \ldots$ получаем неравенства

$$0 \leqslant \psi^0(s) \leqslant b,$$

$$0 \leqslant \psi^{k+1}(s) \leqslant b + b\int\limits_{0}^{s} \psi^k(r)\, dr, \tag{15}$$

где $b > 0$ — достаточно большая константа. С помощью (15) получаем при $s \in [0, L]$ неравенства

$$0 \leqslant \psi^1(s) \leqslant b + b^2 s,$$

$$0 \leqslant \psi^2(s) \leqslant b + bs + b^3 \frac{s^2}{2}$$

и так далее. Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \psi^k(s) \leqslant b\Big(1 + \ldots + b^k \frac{s^k}{k!}\Big),$$

где $k = 0, 1, \ldots$. Поэтому при $s \in [0, L]$, $k = 0, 1, \ldots$ имеем неравенства

$$0 \leqslant \psi^k(s) \leqslant be^{bs} \leqslant c, \tag{16}$$

где $c = be^{bL}$. Из сделанных предположений вытекает, что (см. (9), (12), (16)) функция $g(-s, -\nu, y)$ при $s \in [0, L]$, $\nu \in [0, L]$, $y \in [0, c]$ удовлетворяет условию Липшица по y вида

$$\big|g(-s, -\nu, y') - g(-s, -\nu, y'')\big| \leqslant \alpha |y' - y''|, \tag{17}$$

где $\alpha > 0$ — достаточно большая константа, а числа y', y'' принадлежат $[0, c]$. Из (13), (17) при $s \in [0, L]$, $k = 1, \ldots$ вытекают неравенства

$$\Big|\psi^{k+1}(s) - \psi^k(s)\Big| \leqslant \alpha \int\limits_0^s |\psi^k(\nu) - \psi^{k-1}(\nu)|\, d\nu.$$

Отсюда последовательно получаем при $s \in [0, L]$ неравенства

$$\begin{gathered} |\psi^2(s) - \psi^1(s)| \leqslant \alpha\beta s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |\psi^{k+1}(s) - \psi^k(s)| \leqslant \beta \tfrac{(\alpha s)^k}{k!}, \end{gathered} \tag{18}$$

где $\beta = \max\limits_{s \in [0, L]} |\psi^1(s) - \psi^0(s)|$, $k = 1, 2, \ldots$.

Из классического математического анализа известно, что числовой ряд с общим членом вида

$$\beta \frac{(\alpha L)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

является сходящимся. Поэтому из (18) вытекает, что последовательность неотрицательных и непрерывных на $[0, L]$ функций $\psi^k(s)$, $k = 0, 1, \ldots$, сходится равномерно на $[0, L]$ к некоторой неотрицательной и непрерывной функции $\psi^*(s)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению (12). Таким образом, искомое решение $\psi_1(s) = \psi^*(s)$ интегрального уравнения (12) конструктивно построено на $[0, L]$ методом последовательных приближений.

При $\tau \in [-L, 0)$ положим $\varphi(\tau) = \psi_1(-\tau)$. Отметим, что при $\tau = 0$ функция $\varphi(\tau)$ будет иметь конечный предел слева, совпадающий со значением $\psi_1(0)$. Но, вообще говоря, $\psi_1(0) \neq \varphi_0(0)$. Однако при выполнении условия согласования (4) $\varphi(0) = \psi_1(0) = \varphi_0(0)$.

Далее рассмотрим интегральное уравнение (8) на отрезке $[-2L, -L]$. Перепишем его в виде

$$\varphi(\tau) = \int\limits_\tau^{-L} g(\tau, r, \varphi(r))\, dr + f_2(\tau), \tag{19}$$

где

$$f_2(\tau) = \int\limits_{-L}^{L+\tau} g(\tau, r, \varphi(r))\, dr + p_2(\tau).$$

Функция $\varphi(\tau)$ при $\tau \in [-L, 0)$ уже построена. Доопределим ее при $\tau = 0$ по непрерывности слева. Тогда функция $f_2(\tau)$ при $\tau \in [-2L, -L]$ известна. Обозначим в (19) $\tau = -s$, $r = -\nu$, $\varphi(-s) = \psi_2(s)$ и рассмотрим при $s \in [L, 2L]$ получающееся интегральное уравнение (ср. с (12))

$$\psi_2(s) = \int\limits_L^s g(-s, -\nu, \psi_2(\nu))\, d\nu + f_2(-s). \tag{20}$$

Применим для его решения на $[L, 2L]$ метод последовательных приближений. Обоснование сходимости этого метода проводится по аналогии с обоснованием сходимости метода последовательных приближений для интегрального уравнения (12). В результате будет получена непрерывная и неотрицательная на $[L, 2L]$ функция $\psi^*(s)$, которая удовлетворяет на $[L, 2L]$ уравнению (20). Положим теперь при $s \in [L, 2L]$ $\varphi(-s) = \psi_2(s) = \psi^*(s)$. Далее рассматриваются отрезки $[-(k+1)L, -kL]$, $k = 2, \ldots$, и на них аналогичным образом строится непрерывное и неотрицательное решение интегрального уравнения (8). В результате этого процесса мы получаем искомое непрерывное и неотрицательное решение $\varphi(\tau)$ интегрального уравнения (8) при всех $\tau < 0$. Для построенной функции $\varphi(\tau)$ из (8) следует, что при $\tau < 0$ и $\tau \neq -L$

$$\dot{\varphi}(\tau) = g(\tau, L+\tau, \varphi(L+\tau)) - g(\tau, \tau, \varphi(\tau)) + \int\limits_{\tau}^{L+\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(g(\tau, r, \varphi(r)\right) dr + \dot{p}_2(\tau).$$

При $\tau = -L$ можно обосновать наличие правой производной $\dot{\varphi}_{\text{прав}}(-L)$ и левой производной $\dot{\varphi}_{\text{лев}}(-L)$, причем

$$\dot{\varphi}_{\text{прав}}(-L) - \dot{\varphi}_{\text{лев}}(-L) = g(-L, 0, \varphi_0(0)) - g(-L, 0, \varphi_{\text{лев}}(0)),$$

где $\varphi_{\text{лев}}(0)$ означает левый предел функции $\varphi(\tau)$ в точке 0. Если выполнено условие согласования (4), то функция $\varphi(\tau)$ оказывается непрерывной при всех $\tau \leqslant L$, причем функция $\dot{\varphi}(\tau)$ существует и непрерывна при $\tau < 0$ и $\tau \in (0, L]$, а при $\tau = 0$ у нее существуют пределы слева и справа.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *При выполнении указанных выше условий краевая задача* (1)–(3) *имеет решение вида* (6).

При этом если выполнено условие согласования (4), *то это решение непрерывно на всей рассматриваемой области и может иметь разрывы производных на прямой* $l = bt$. □

З а м е ч а н и е. В [5, с. 121–127] помимо уравнения (1) также рассматривалось более общее уравнение вида

$$\frac{\partial x(t,l)}{\partial t} + b\frac{\partial x(t,l)}{\partial l} = h(t,l)x(t,l), \tag{21}$$

где константа $b > 0$, функция $h(t,l)$ непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial h(t,l)}{\partial l}$ при $t \geqslant 0$, $l \in \mathbb{R}^1$ (символ $\mathbb{R}^1$ обозначает действительную числовую ось). Для этого случая можно рассмотреть краевую задачу (21), (2), (3) при тех же требованиях относительно функций $\varphi_0(l)$ и $f(t,l,x)$, что и в рассмотренном выше случае. Отметим, что согласно [8, п. 1.3.4] общее решение уравнения (21) может быть записано в виде

$$y(t,l) = \exp\left[\int\limits_0^t h(s, l - bt + bs)\, ds\right]\varphi(l - bt), \tag{22}$$

где $\exp(a)$ обозначает для $a \in \mathbb{R}^1$ величину e^a. Можно положить в (22) $\varphi(l) = \varphi_0(l)$ при $l \in [0, L]$ и строить $\varphi(l)$ в (22) при $l < 0$ по схеме, которая была применена для решения краевой задачи (1)–(3). В результате этого процесса возникает функция $\varphi(l)$, $l \leqslant L$, где $\varphi(l) = \varphi_0(l)$ при $l \in [0, L]$, для которой выполняются следующие условия:

1) она неотрицательна и непрерывна при $l < 0$, а также имеет предел слева в точке $l = 0$ (он может отличаться от значения $\varphi(0) = \varphi_0(0)$);

2) она непрерывно дифференцируема при всех $l < 0$ за исключением, быть может, точки $l = -L$;

3) при $t > 0$, $l \leqslant L$ для функции $y(t,l)$ (см. (22)) выполняется краевое условие (3).

Отметим также, что при выполнении условия согласования (4) возникающая функция $\varphi(l)$ будет непрерывно дифференцируемой и при $l = -L$. После построения функции $\varphi(l)$ при $l \leqslant L$ предлагается взять функцию $y(t, l)$ (см. (22)) в качестве искомого решения уравнения (21) при $t \geqslant 0$, $l \leqslant L$.

Отмечу, что тематика этой статьи связана с исследованиями А.В. Кряжимского, Е.А. Ровенской и А.А. Давыдова, проводимыми в Международном институте по системному и прикладному анализу (г. Лаксенбург, Австрия) по моделированию роста леса. Приношу благодарность А.В. Кряжимскому, Е.А. Ровенской и А.А. Давыдову за внимание к моей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A bang-bang regime in optimal harvesting of size-structured populations / N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, R. Goetz, A. Xabadia // Nonlinear Anal. 2009. Vol. 71. P. 2331–2336.
2. **Xabadia A., Goetz R.** The optimal selective logging regime and the Faustman formula // J. Forest Economy. 2010. Vol. 16. P. 63–82.
3. **Davydov A.A., Platov A.S.** Optimization of stationary solution of a model of size-structured population exploitation // J. Math. Sci. 2011. Vol. 176, no. 6. P. 860–869.
4. **Ровенская Е.А., Груничев П.В.** Задача гармонизации экономической прибыли и экологического ущерба от вырубки леса в стационарном случае // Проблемы динамического управления: сб. тр. фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. 2012. № 6. С. 68–77.
5. **Никольский М.С.** Изучение некоторых динамических моделей популяций, структурированных по размерам // Проблемы динамического управления: сб. тр. фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. 2012. № 6. С. 122–127.
6. **Федорюк М.В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352 с.
7. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 332 с.
8. **Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Moussiaux A.** Handbook of first order partial differential equations. London: Taylor and Francis, 2002. 500 p. (Differential and Integral Equations and Their Applications).

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 06.05. 2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

СТРУКТУРА КОНЕЧНЫХ МОНОИДОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЮ $\mathscr{R} = \mathscr{H}$

Т. В. Первухина

Доказывается, что каждый конечный моноид S, на котором совпадают отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$, делит моноид всех верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц над конечной группой. Доказательство конструктивно — группа и размер матриц эффективно вычисляются по моноиду S. Полученный результат используется для того, чтобы идентифицировать псевдомногообразие, порожденное всеми конечными моноидами, на которых $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, с полупрямым произведением псевдомногообразия всех конечных групп на псевдомногообразие всех конечных $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов.

Ключевые слова: конечные моноиды, отношения Грина, представление моноидов, псевдомногообразие моноидов, (верхне)треугольные матрицы.

T. V. Pervukhina. The structure of finite monoids satisfying the relation $\mathscr{R} = \mathscr{H}$.

It is shown that any finite monoid S on which Green's relations $\mathscr{R}$ and $\mathscr{H}$ coincide divides the monoid of all upper-triangular row-monomial matrices over a finite group. The proof is constructive; given the monoid S, the corresponding group and the order of matrices can be effectively found. The obtained result is used to identify the pseudovariety generated by all finite monoids satisfying $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ with the semidirect product of the pseudovariety of all finite groups and the pseudovariety of all finite $\mathscr{R}$–trivial monoids.

Keywords: finite monoids, Green's relations, monoid representation, monoid pseudovariety, upper-triangular matrices.

Введение

Изучение моноидов, удовлетворяющих некоторым ограничениям на отношения Грина, имеет существенное значение как с точки зрения общей теории полугрупп, так и с точки зрения приложения к теории формальных языков. Классическим результатом первого типа является теорема Г. Страубинга [8] о том, что конечный моноид является $\mathscr{J}$-тривиальным тогда и только тогда, когда он делит моноид всех рефлексивных бинарных отношений на множестве из n элементов для некоторого натурального n или, что эквивалентно, некоторый моноид монотонных направленных преобразований частично упорядоченного множества (более того, цепи из n элементов, как было уточнено Ж.-Э. Пэном [3]). Другим классическим результатом в этом направлении (см. [3]) является утверждение о том, что всякий конечный $\mathscr{R}$-тривиальный моноид изоморфно вкладывается в моноид $\mathscr{E}_n$ всех направленных преобразований на множестве $\{1, \ldots, n\}$ для некоторого n. Связь с формальными языками иллюстрируют хорошо известные теоремы: теорема М. Шютценберже [5] о соответствии между апериодическими языками и $\mathscr{H}$-тривиальными моноидами и теорема И. Саймона [6] о $\mathscr{J}$-тривиальных моноидах и кусочно-тестируемых языках.

Ограничения типа равенства и их приложения также изучались довольно интенсивно. Так, в [2] М.В. Волков и Ф. Пастэйн охарактеризовали многообразия, полугруппы которых удовлетворяют одному из соотношений $\mathscr{D} = \mathscr{H}$, $\mathscr{D} = \mathscr{L}$, $\mathscr{D} = \mathscr{R}$ или $\mathscr{D} = \mathscr{J}$. В работе [1] показано соответствие между определенным классом конечных моноидов, удовлетворяющих соотношению $\mathscr{D} = \mathscr{R}$, и конечными префиксными кодами.

В дальнейшем мы предполагаем конечность всех рассматриваемых объектов. В данной работе исследуются моноиды, на которых выполнено соотношение $\mathscr{R} = \mathscr{H}$.

Конечную группу G с присоединенным нулем 0 обозначим через G^0. Назовем матрицу порядка n над G^0 *мономиальной по строкам*, если каждая строка содержит в точности один ненулевой элемент. Для всех элементов $g \in G^0$ положим дополнительно $g + 0 = 0$. Обозначим через $TM_n(G)$ моноид всех верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц порядка n над G^0. Умножение двух мономиальных матриц из $TM_n(G)$ с учетом дополнительного условия осуществляется по правилам обычного матричного умножения. Напомним, что моноид S *делит* моноид T, если S является гомоморфным образом некоторого подмоноида T. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Всякий конечный моноид, удовлетворяющий соотношению $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, делит моноид $TM_n(G)$ для подходящей группы G и подходящего натурального n.*

Доказательство теоремы конструктивно — группа G и число n эффективно вычисляются по данному конечному моноиду.

На основании теоремы получено описание псевдомногообразия **RH**, порожденного всевозможными конечными моноидами, на которых совпадают отношения $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$, в виде полупрямого произведения псевдомногообразия всех конечных групп **G** и псевдомногообразия всех конечных $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов **R**.

1. Предварительные сведения

Воспользуемся определениями и обозначениями из монографии [11]. Полугруппа S с присоединенной единицей далее обозначается S^1. Отношения Грина $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{H}$ на полугруппе S определяются формулами

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1, \quad a\mathscr{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b, \quad a\mathscr{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1, \quad \mathscr{D} = \mathscr{R} \vee \mathscr{L}, \quad \mathscr{H} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}.$$

В конечных полугруппах $\mathscr{D}$ совпадает с $\mathscr{J}$. Непосредственно из определения отношений Грина вытекает, что $a\mathscr{R}b$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $c, b \in S^1$, что $ac = b$ и $bd = a$; $a\mathscr{L}b$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $c, d \in S^1$, что $ca = b$ и $db = a$, и т. д. Определим также следующее отношение на S:

$$a \leq_{\mathscr{R}} b \Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1.$$

Полугруппа называется *$\mathscr{R}$-тривиальной*, если $a\mathscr{R}b$ влечет $a = b$. В этом случае отношение $\leq_{\mathscr{R}}$ будет частичным порядком на S.

Пусть H — произвольный $\mathscr{H}$-класс полугруппы S. Множество $St_r(H) = \{x \in S^1 \mid Hx = H\}$ называется *правым стабилизатором класса* H и является подмоноидом в S^1. На $St_r(H)$ определим отношение $\sim$, положив $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $hx = hy$ для некоторого (а значит, для любого) $h \in H$. Это отношение является конгруэнцией на $St_r(H)$. Обозначим через δ канонический моноидный гомоморфизм $St_r(H)$ на $\Gamma_r(H) = St_r(H)/\sim$ и назовем $\Gamma_r(H)$ моноидом переходов класса H. Моноид переходов $\Gamma_r(H)$ является просто транзитивной группой подстановок на H. Если $\mathscr{H}$-классы H_1 и H_2 содержатся в одном $\mathscr{D}$-классе, то группы подстановок $\Gamma_r(H_1)$ и $\Gamma_r(H_2)$ изоморфны.

Абстрактная группа $\Gamma_r(H)$ называется *группой $\mathscr{D}$-класса D, содержащего H*, или *группой Шютценберже класса D*.

Правый стабилизатор $St_r(L)$ $\mathscr{L}$-класса L определяется равенством $St_r(L) = \{x \in S^1 \mid Lx \subseteq L\}$ или, что то же самое, $St_r(L) = \{x \in S^1 \mid Lx \cap L \neq \varnothing\}$. Тогда $St_r(H)$ есть подмоноид моноида $St_r(L)$. По аналогии обозначим через $St_r(K) = \{x\colon Kx \subseteq K\}$ правый стабилизатор произвольного подмножества $K \subseteq S$

Использованное для определения $\Gamma_r(H)$ отношение $\sim$ на $St_r(H)$ естественным образом продолжается на $St_r(L)$. А именно для $x, y \in St_r(L)$ положим $x \sim y$, если и только если $lx = ly$ для некоторого (а значит и для любого) $l \in L$. Это отношение, как и раньше, является конгруэнцией на $St_r(L)$. Канонический гомоморфизм из $St_r(L)$ на $St_r(L)/\sim$ обозначим снова через δ, а фактор-моноид $\Sigma_r(L) = St_r(L)/\sim$ назовем *моноидом переходов класса* L. Группа Шютценберже $\Gamma_r(H)$ произвольного $\mathscr{H}$-класса $H \subseteq L$ служит группой обратимых элементов в $\Sigma_r(L)$. Как следует из [11, предложение 3.7], в конечных полугруппах выполнено $\Sigma_r(L) = \Gamma_r(H)$.

2. Вспомогательные утверждения

Предложение 1. *Каждый моноид $TM_n(G)$ удовлетворяет соотношению $\mathscr{R} = \mathscr{H}$.*

Доказательство. Для произвольной матрицы $a \in TM_n(G)$ будем обозначать ее элементы через a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Столбцы матрицы a будем обозначать через a_j, $1 \leq j \leq n$. Также свяжем с матрицей a следующий набор чисел $l(a, j), 1 \leq j \leq n$.

$$l(a, j) = \begin{cases} \max\{i \,|\, a_{ij} \neq 0\}, & \text{если столбец } a_j \text{ ненулевой}, \\ \quad 0, & \text{если столбец } a_j \text{ нулевой}. \end{cases}$$

Другими словами, $l(a, j)$ — это номер строки самого нижнего ненулевого элемента в столбце a_j, и 0, если столбец a_j нулевой.

Охарактеризуем отношение $\mathscr{L}$ на $TM_n(G)$. Покажем, что для произвольных матриц $a, b \in TM_n(G)$ соотношение $a\mathscr{L}b$ равносильно тому, что $l(a, j) = l(b, j)$ для всех $1 \leq j \leq n$.

Предположим, что $a\mathscr{L}b$. Тогда найдутся такие матрицы $x, y \in TM_n(G)$, что $xa = b$ и $yb = a$. Отсюда видно, что если столбец a_j нулевой для некоторого номера j, то и столбец b_j будет нулевым, и наоборот. Значит, $l(a, j) = 0$ тогда и только тогда, когда $l(b, j) = 0$, и остается рассмотреть случай, когда столбцы a_j и b_j ненулевые. Рассуждая от противного, предположим, что найдется номер j, $i \leq j \leq n$, для которого $l(a, j) < l(b, j)$. Положим $p = l(a, j)$, $q = l(b, j)$, тогда $p < q$. Поскольку $xa = b$, найдется такое число k, $1 \leq k \leq n$, что $x_{qk}a_{kj} = b_{qj}$, где $x_{qk}, a_{kj}, b_{qj} \in G$. Тогда $q \leq k$ в силу верхнетреугольности матриц, а поскольку $p < q$, то $l(a, j) < k$, что противоречит определению $l(a, j)$. Таким образом, $l(a, j) \geq l(b, j)$. Аналогичные рассуждения для равенства $yb = a$ приводят к неравенству $l(b, j) \geq l(a, j)$, откуда $l(a, j) = l(b, j)$, $1 \leq j \leq n$.

Покажем теперь обратную импликацию. Имеем $l(a, j) = l(b, j)$, $1 \leq j \leq n$. Построим матрицу $x \in TM_n(G)$ со свойством $xa = b$, матрица y для $ya = b$ будет строиться аналогично. В силу вышесказанного для нулевых столбцов предположим, что элемент $b_{ij} \neq 0$. Тогда $i \leq l(b, j) = l(a, j)$, следовательно, найдется элемент $a_{kj} \neq 0$, причем $k > j$. Тогда полагаем $x_{ik} = b_{ij}a_{kj}^{-1}$, что корректно, поскольку $i \leq k$ и b — мономиальная матрица. В итоге построим верхнетреугольную матрицу x со свойством $xa = b$.

Теперь охарактеризуем отношение $\mathscr{R}$. Для $g \in G$ через a_kg будем далее обозначать столбец, в котором каждый из элементов столбца a_k умножен на g справа. Покажем, что для произвольных матриц $a, b \in TM_n(G)$ соотношение $a\mathscr{R}b$ равносильно тому, что для каждого $1 \leq k \leq n$ найдется такой $g_k \in G$, что $a_kg_k = b_k$ (здесь элементы g_k группы G индексируются номерами соответствующих столбцов a_k).

Предположим, что $a\mathscr{R}b$. Тогда найдутся матрицы $x, y \in TM_n(G)$ со свойством $ax = b$ и $by = a$. Возьмем произвольный элемент $a_{ik} \neq 0$, тогда найдется такой элемент $x_{kj} \neq 0$, что $a_{ik}x_{kj} = b_{ij}, i \leq k \leq j$. Покажем, что $k = j$. Предположим от противного, что $k < j$. Так как $b_{ij} \neq 0$, то $b_{ij}y_{js} = a_{is}$ для соответствующего ненулевого элемента y_{js}. При этом выполнено $i \leq k < j \leq s$, и, значит, a_{is} отличен от a_{ik}, что противоречит мономиальности a. Следовательно, $k = j$, т.е. $a_{ik} \neq 0$ влечет $b_{ik} \neq 0$. Обратное также справедливо. Таким образом, ненулевые элементы матриц a и b расположены одинаково. Кроме того, $a_{ik}x_{kk} = b_{ik}$ выполняется для всех $1 \leq i \leq n$, т.е. $a_kx_{kk} = b_k$.

Обратно, пусть матрицы $a, b \in TM_n(G)$ удовлетворяют необходимому условию: для каждого $1 \leq k \leq n$ найдется такой $g_k \in G$, что $a_kg_k = b_k$. Положим $x_{kk} = g_k$ и определим тем самым матрицу $x \in TM_n(G)$ со свойством $ax = b$. Матрица y со свойством $by = a$ строится аналогично, и в итоге имеем $a\mathscr{R}b$.

Из описания отношения $\mathscr{R}$ непосредственно вытекает, что если $a\mathscr{R}b$ для матриц $a, b \in TM_n(G)$, то $l(a,k) = l(b,k)$ для всех $1 \leq k \leq n$. Следовательно, $a\mathscr{R}b$ влечет $a\mathscr{L}b$, и $TM_n(G)$ удовлетворяет соотношению $\mathscr{R} = \mathscr{H}$. Предложение доказано. □

Здесь и далее S — конечный моноид, на котором выполнено равенство $\mathscr{R} = \mathscr{H}$.

Предложение 2. *Наименьшая конгруэнция на S, содержащая отношение $\mathscr{R}$, содержится в $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Конгруэнция $\mathscr{R}^\sharp$, порожденная отношением $\mathscr{R}$, устроена следующим образом: $a\mathscr{R}^\sharp b$ в том и только том случае, когда найдутся такие $a_0, a_1, \dots a_n \in S$, что $a = a_0, b = a_n$, и для любого $0 \leq i \leq n-1$ выполнено $a_i = s_i x_i t_i, a_{i+1} = s_i y_i t_i$, где $x_i \mathscr{R} y_i$ и $s_i, t_i \in S$. Поскольку $x_i \mathscr{R} y_i$, получаем $s_i x_i \mathscr{R} s_i y_i$, так как $\mathscr{R}$ — левая конгруэнция. Но тогда $s_i x_i \mathscr{L} s_i y_i$, так как $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{L}$. Отсюда $s_i x_i t_i \mathscr{L} s_i y_i t_i$, поскольку $\mathscr{L}$ — правая конгруэнция. Значит, $a_i \mathscr{L} a_{i+1}$ для всех $0 \leq i \leq n-1$, что влечет $a\mathscr{L}b$. В итоге имеем $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}^\sharp \subseteq \mathscr{L}$. Предложение доказано. □

Сохраняя далее обозначение $\mathscr{R}^\sharp$ за конгруэнцией, порожденной $\mathscr{R}$, изучим отношение $\mathscr{R}$ на фактор-моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$.

Предложение 3. *Фактор-моноид $S/\mathscr{R}^\sharp$ является $\mathscr{R}$-тривиальным.*

Доказательство. Обозначим правое отношение Грина на моноиде $S/\mathscr{R}^\sharp$ через $\bar{\mathscr{R}}$, а $\mathscr{R}^\sharp$-класс элемента $a \in S$ — через $\bar{a}$. Пусть $\bar{a}\bar{\mathscr{R}}\bar{b}$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда найдутся такие элементы $x, y \in S$, что $\bar{a} = \bar{b}\bar{x}$ и $\bar{b} = \bar{a}\bar{y}$. Поднимаясь в моноид S, имеем $a\mathscr{R}^\sharp bx$ и $b\mathscr{R}^\sharp ay$. Отсюда, учитывая, что $\mathscr{R}^\sharp$ — конгруэнция, заключаем, что $a\mathscr{R}^\sharp ayx$. По предложению 2 $\mathscr{R}^\sharp \subseteq \mathscr{L}$, откуда $a\mathscr{L}ayx$. Поскольку ясно, что $ayx \leq_{\mathscr{R}} a$, можно воспользоваться следствием 2.3.11 из [11], в силу которого $a\mathscr{R}ayx$. Но тогда $a\mathscr{R}ay\mathscr{R}^\sharp b$, откуда $a\mathscr{R}^\sharp b$, т. е. $\bar{a} = \bar{b}$. Предложение доказано. □

Из предложения 3 следует, что отношение $\leq_{\bar{\mathscr{R}}}$ будет отношением частичного порядка на $S/\mathscr{R}^\sharp$. В соответствии с [3, предложение 0.1] существует такой линейный порядок $\leq$ на $S/\mathscr{R}^\sharp$, что для $u, v \in S/\mathscr{R}^\sharp$ соотношение $u \leq_{\bar{\mathscr{R}}} v$ влечет $v \leq u$. Пронумеруем $\mathscr{R}^\sharp$-классы моноида S по возрастанию в соответствии с порядком $\leq$ и зафиксируем эту нумерацию. Очевидно, классу, содержащему единицу моноида S, можно присвоить номер 1. Поскольку для любых элементов $x, u \in S/\mathscr{R}^\sharp$ выполнено $ux \leq_{\bar{\mathscr{R}}} u$, то $u \leq ux$, т. е. с каждым элементом моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ связано направленное действие на $S/\mathscr{R}^\sharp$ относительно порядка $\leq$.

Отметим важное свойство элементов, стабилизирующих фиксированный $\mathscr{L}$-класс моноида S. Как мы уже упоминали [11, предложение 3.7], для конечных полугрупп моноид переходов $\Sigma_r(L)$ произвольного $\mathscr{L}$-класса L совпадает с группой Шютценберже $\Gamma_r(H)$ произвольного $\mathscr{H}$-класса $H \subseteq L$. В этом случае если $x \in St_r(L)$, то $x \in St_r(H)$ для произвольного $\mathscr{H}$-класса $H \subseteq L$. В самом деле, предположим, что $H_1, H_2 \subseteq L$ — некоторые не совпадающие $\mathscr{H}$-классы, и элементы $h_1 \in H_1$ и $h_2 \in H_2$ таковы, что $h_1 x = h_2$. В силу того что $\Gamma_r(H)$ — группа, действие элемента x обратимо, т. е. существует такой элемент $y \in ST_r(L)$, что $h_2 y = h_1$. Но тогда имеем $h_1 \mathscr{R} h_2$, что противоречит условию $H_1 \neq H_2$. Значит, $x \in St_r(H)$ для любого $\mathscr{H}$-класса $H \subseteq L$. Отсюда имеем, что если $x \in St_r(L)$, то $x \in St_r(K)$ для любого класса K по конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$, поскольку всякий такой класс есть объединение $\mathscr{H}$-классов.

Определение 1. Назовем классы K_i и K_j *соседними относительно порядка* $\leq$ *и действия класса* K, если $K_i \leq K_j$, $K_i K \subseteq K_j$, и для любых $\mathscr{R}^\sharp$-классов P и Q таких, что $PQ \subseteq K$, выполнено в точности одно из двух условий:

1) $K_i P \subseteq K_i$ и $K_i Q \subseteq K_j$;

2) $K_i P \subseteq K_j$ и $K_j Q \subseteq K_j$.

Рассмотрим теперь классы K_i и K_j по конгруэнции $\mathscr{R}^\sharp$, соседние относительно порядка $\leq$ и действия класса K. Имеем $K_i K \subseteq K_j$. В следующем предложении мы опишем действие каждого элемента класса K из K_i в K_j. Для этого зафиксируем произвольный элемент $a \in K$.

Предложение 4. *Для любого элемента* $b \in K$ *найдутся такие элементы* $x \in St_r(K_i)$ *и* $y \in St_r(K_j)$, *что действие элемента* b *на класс* K_i *совпадает с действием элемента* xay *на класс* K_i.

Доказательство. Зафиксируем произвольный $\mathscr{H}$-класс $H \subseteq K_i$ и рассмотрим минимальное по включению объединение $\mathscr{H}$-классов $T_a = \cup_k H_k$, покрывающее множество $Ha \subseteq K_j$. Пусть $T_b = \cup_l H_l$ — аналогичное объединение для множества Hb.

Покажем равенство $T_a = T_b$. Поскольку $a, b \in K$, то, как отмечалось ранее, найдется такая последовательность элементов $a_0, a_1 \dots a_{n-1}, a_n \in S$, что $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i = p_i x_i$ и $a_{i+1} = q_i x_i$, где $p_i \mathscr{R} q_i$, $p_i, q_i \in S$.

Рассмотрим Ha_0 и $Ha_1 \subseteq K_j$. Имеем $Ha_0 = Hp_0x_0$ и $Ha_1 = Hq_0x_0$. Поскольку $p_0 \mathscr{R} q_0$, а K_i и K_j — соседние классы относительно порядка $\leq$ и действия класса K, имеем две возможности:

1) $K_i p_0, K_i q_0 \subseteq K_i$, тогда $p_0, q_0 \in St_r(K)$, что влечет $p_0, q_0 \in St_r(H)$. Следовательно, $Ha_0 = Hp_0x_0 = Hx_0 = Hq_0x_0 = Ha_1$, и получаем $T_{a_0} = T_{a_1}$.

2)$K_i p_0, K_i q_0 \subseteq K_j$. Так как $p_0 \mathscr{R} q_0$, то для любого элемента $h \in H$ имеем $hp_0 \mathscr{R} hq_0$, и, значит, $T_{p_0} = T_{q_0}$. Далее, в этом случае $x_0 \in St_r(K_j)$, что влечет $T_{p_0x_0} = T_{p_0}x_0 = T_{q_0}x_0 = T_{q_0x_0}$. Вновь получаем $T_{a_0} = T_{a_1}$.

Теперь, рассуждая по индукции, получаем $T_a = T_b$, что и требовалось.

Возьмем теперь некоторый $h \in H$, и пусть $ha = s$, $hb = t$. Поскольку $T_a = T_b$, найдется элемент $h_1 \in H$ со свойством $h_1 a \mathscr{H} t$ и, следовательно, $h_1 a \mathscr{R} t$, так как $\mathscr{R} = \mathscr{H}$. Тогда в силу транзитивности соответствующих групп Шютценберже существуют такой элемент $x \in St_r(K)$, что $hx = h_1$, и такой элемент $y \in St_r(K_j)$, что $h_1 ay = t$. Значит, $hb = hxay$. Покажем, что это же свойство выполнено и для произвольного $h \in K_i$. Действительно, пусть $h_2 \in K_i$, тогда существует такой элемент $l \in S$, что $lh = h_2$, поскольку $h \mathscr{L} h_2$. Тогда $h_2 b = lhb = lhxay = h_2 xay$. Следовательно, для элемента $b \in K$ построены такие элементы $x \in St_r(K_i)$ и $y \in St_r(K_j)$, что для произвольного элемента $h \in K_i$ выполнено $hb = hxay$, что и требовалось. Предложение доказано. □

Изложим результат предложения 4 в терминах групп Шютценберже. При фиксированном отображении между K_i и K_j, которое осуществляется элементом $a \in K$, элементу $b \in K$ мы сопоставляем пару $(\delta(x), \delta(y)) \in \Gamma_r(H_i) \times \Gamma_r(H_j)$, где H_i и H_j — произвольные $\mathscr{H}$-классы из K_i и K_j соответственно.

Заметим, что в общем случае пара $(\delta(x), \delta(y))$ определяется неоднозначно, поскольку зависит от выбора элемента $h_1 \in H$. Действительно, если $h_2 \in H$, $x_2 \in St_r(K_i)$, $y_2 \in St_r(K_j)$ — другие элементы со свойством $hx_2 = h_2$, $h_2 a \mathscr{R} t$ и $hx_2 ay_2 = hb$, то элементы $\delta(x_1)$ и $\delta(x_2)$ группы $\Gamma_r(H)$ будут различны, поскольку по-разному действуют на h. Также мы не можем гарантировать совпадение $\delta(y_1)$ и $\delta(y_2)$. В случае $h_1 a \neq h_2 a$, $h_1 ay_1 = h_2 ay_2$ элементы $\delta(y_1)$ и $\delta(y_2)$ будут различны, так как группа Шютценберже произвольного $\mathscr{H}$-класса является просто транзитивной.

3. Доказательство теоремы

Рассмотрим прямое произведение групп $G_1 \times \ldots \times G_n$, где $G_i = \Gamma_r(H_i)$ для произвольного $\mathscr{H}$-класса $H_i \subseteq K_i$ и $n = card(S/\mathscr{R}^\sharp)$. Нумерация $\mathscr{R}^\sharp$-классов $K_1 \dots K_n$ была введена ранее.

В предложении 4 мы описали действие произвольного элемента b из $\mathscr{R}^\sharp$-класса K в том случае, когда b действует из K_i в K_j, и при этом классы K_i и K_j являются соседними относительно действия класса K. В этом случае при заранее фиксированном элементе $a \in K$ найдутся такие элементы $x \in St_r(K_i)$ и $y \in St_r(K_j)$, что для всякого элемента $h \in K_i$ имеем $hb = hxay$. Теперь охарактеризуем действие элемента $b \in K$ в общем случае, если $\mathscr{R}^\sharp$-классы K_i и K_j не обязательно являются соседними относительно действия класса K.

Определение 2. Пусть элемент b переводит K_i в K_j, т.е. $K_i b = K_j$. Пусть $b = b_1 \dots b_p$ (где $b_1 \dots b_p \in S$), — такое разложение элемента b, а $K_{i_1}, \dots, K_{i_{p+1}}$ (где $K_{i_1} = K_i, K_{i_{p+1}} =$

K_j) — такие $\mathscr{R}^\sharp$-классы, что:

1) $K_{i_l} \neq K_{i_{l+1}}$ и $K_{i_1} b_1 \subseteq K_{i_2}, \ldots, K_{i_p} b_p \subseteq K_{i_{p+1}}$; K_{i_l} и $K_{i_{l+1}}$ — соседние относительно b_l;

2) для любого другого разложения $b = c_1 \ldots c_s$ элемента b (где $c_1 \ldots c_s \in S$) выполнено следующее условие: если $\{K_{i_1} \ldots K_{i_p}\} \subseteq \{K_{j_1} \ldots K_{j_s}\}$, то $\{K_{i_1} \ldots K_{i_p}\} = \{K_{j_1} \ldots K_{j_s}\}$.
Подобное разложение $b = b_1 \ldots b_p$ назовем *плотным*. Оно, очевидно, существует, поскольку частично упорядоченое множество $\mathscr{R}^\sharp$-классов конечно в силу конечности S.

Тогда по предложению 4 каждому из элементов b_l, $1 \leq l \leq p$, ставится в соответствие пара $(g_{i_l}, g^*_{i_{l+1}}) \in G_{i_l} \times G_{i_{l+1}}$, определяющая действие элемента b_l на $\mathscr{R}^\sharp$-класс K_{i_l}.

Поставим в соответствие элементу $b \in K$ элемент $(f_1, \ldots, f_n)$ группы $G_1 \times \ldots \times G_n$ следующим образом:

1) $f_i = e_i$ (единица группы G_i), если $K_i \notin \{K_{i_1} \ldots K_{i_p}\}$;

2) $f_{i_1} = g_{i_1}$, $f_{i_{p+1}} = g^*_{i_{p+1}}$;

3) $f_{i_l} = g^*_{i_{l-1}} g_{i_l}$ для $l = 2, \ldots, p$.

В итоге получаем, что при действии элемента b из K_i в K_j ему сопоставляется набор $f_{ij}(b)$ элементов группы $G_1 \times \ldots \times G_n$, построенных по всевозможным плотным разложениям элемента b. Элементы этого набора, построенные по описанной выше схеме, зависят от выбора $(g_{i_l}, g^*_{i_{l+1}}) \in (G_{i_l}, G_{i_{l+1}})$ для каждого элемента b_l из конкретного разложения и от выбора разложения. Если для пары (i, j) класс K не переводит K_i в K_j, то полагаем $f_{ij}(b) = \varnothing$.

Теперь сопоставим элементу $b \in K$ набор $f(b)$ верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц над группой $G_1 \times \ldots \times G_n$. Расстановка ненулевых элементов каждой матрицы определяется согласно тому, какая матрица соответствует $\mathscr{R}^\sharp$-классу K как элементу $\mathscr{R}$-тривиального моноида $S/\mathscr{R}^\sharp$ при вложении его в моноид частичных направленных преобразований. Эта расстановка, стало быть, будет одинакова для всех элементов $b \in K$.

Рассмотрев действие элемента b на каждый класс K_i, $1 \leq i \leq n$, и зафиксировав одно плотное разложение при каждом действии, мы, таким образом, полностью определим матрицу $B \in f(b)$. Полагаем

$$B_{ij} = \begin{cases} (f_1, \ldots, f_n) \in f_{ij}(b), & \text{если } f_{ij}(b) \text{ непусто}, \\ 0, & \text{если } f_{ij}(b) \text{ пусто}; \end{cases}$$

т. е. все матрицы в $f(b)$ получаются, когда ненулевые элементы B_{ij} каждой матрицы $B \in f(b)$ независимо друг от друга пробегают элементы соответствующих наборов $f_{ij}(b)$.

Рассмотрим множество $f(S) = \{f(z) \mid z \in S\}$. Определим отображение $\varphi\colon f(S) \to S$ следующим образом: $\varphi(Z) = z$ для каждой матрицы $Z \in f(z)$.

Покажем корректность определения. Пусть $a, b \in S$ — произвольные элементы полугруппы, и $a \neq b$. Тогда докажем, что $f(a) \cap f(b) = \varnothing$.

Рассмотрим действие элементов a и b на $\mathscr{R}^\sharp$-класс K_1, содержащий единицу e моноида S. Предположим от противного, что найдется матрица $X \in f(a) \cap f(b)$. Тогда имеем два случая:

1) Пусть $a \in K_i, b \in K_j$ и $K_i \neq K_j$. Тогда, поскольку $K_1 a \subseteq K_i$ и $K_1 b \subseteq K_j$, имеем $X_{1i} \neq 0$ и $X_{1j} \neq 0$ при $i \neq j$, что противоречит мономиальности X.

2) Пусть $a, b \in K_i$ и пусть $X_{1i} = (f_1, \ldots, f_n)$. Тогда этот элемент X_{1i} соответствует некоторым плотным разложениям $a = a_1 \ldots a_p$, $b = b_1 \ldots b_p$ и цепочке $\mathscr{R}^\sharp$-классов $K_1 = K_{i_1}, \ldots, K_{i_{p+1}} = K_i$. Поскольку набор элементов $\{s_{i_l}\}$, определяющих отображения из K_{i_l} в $K_{i_{l+1}}$, $1 \leq l \leq p$, заранее зафиксирован, то имеем $a = ea = ef_{i_1} s_{i_1} f_{i_2} s_{i_2} \ldots s_{i_p} f_{i_{p+1}} = eb = b$, откуда $a = b$, что противоречит предположению (здесь умножение на f_{i_l} понимается как действие элемента соответствующей группы Шютценберже).

Итак, $f(a) \cap f(b) = \varnothing$, и корректность доказана. Осталось показать, что $f(S)$ — моноид и φ — гомоморфизм. Сюръективность φ очевидна из построения. Достаточно показать, что если $A \in f(a), B \in f(b)$, то $AB \in f(ab)$.

Пусть $AB = C$. Если $C_{ij} \neq 0$, то в соответствии с умножением мономиальных матриц для некоторого l имеем $A_{il}, B_{lj} \neq 0$ и $A_{il} B_{lj} = C_{ij}$. Элемент $A_{ik} \in f_{ik}(a)$ матрицы A соответствует некоторому плотному разложению $a_1 \ldots a_p$ и набору классов $\{K_{i_1}, \ldots, K_{i_p}\}$ при действии $K_i a$.

Обозначим $A_{ik} = (f_1(a), \ldots, f_n(a))$. Аналогично элемент $B_{kj} \in f_{kj}(b)$ матрицы B соответствует некоторому плотному разложению $b = b_1 \ldots b_s$ и набору классов $\{K_{i_p} \ldots K_{i_{p+s-1}}\}$.

Пусть $B_{kj} = (f_1(b) \ldots f_n(b))$. Имеем $C_{ij} = (f_1(a)f_1(b), \ldots, f_n(a)f_n(b))$. Тогда

$$f_i(a)f_i(b) = \begin{cases} e_ie_i = e_i, & \text{для } i \notin \{i_1 \ldots i_{p+s-1}\}, \\ f_i(a)e_i = f_i(a), & \text{для } i \in \{i_1 \ldots i_{p-1}\}, \\ f_{i_p}(a)f_{i_p}(b), & \text{для } i = i_p, \\ e_if_i(b) = f_i(b), & \text{для } i \notin \{i_{p+1} \ldots i_{p+s-1}\}. \end{cases}$$

С другой стороны, имеем $K_ia \subseteq K_l$, $K_lb \subseteq K_j$. Значит, $K_ic = K_iab \subseteq K_j$. Теперь заметим, что для $c = ab$ разложение $c = a_1 \ldots a_pb_1 \ldots b_s$ — плотное, поскольку иначе $a = a_1 \ldots a_p$ или $b = b_1 \ldots b_s$ можно было бы уплотнить, а это не так. При действии $K_ic \subseteq K_j$ этому разложению соответствует в точности элемент C_{ij}.

Так как рассуждение проводилось для произвольного $C_{ij} \neq 0$, имеем $C \in f(c) = f(ab)$. Следовательно, множество $f(S) = \{f(z) \mid z \in S\}$ образует подмоноид в $TM_n(G)$, поскольку единице моноида S соответствует единичная матрица E_n. Отображение $\varphi\colon f(S) \to S$, определяемое правилом $\varphi(Z) = z$ для каждой матрицы $Z \in f(z)$, является гомоморфизмом $f(S)$ на S. Таким образом, S делит $TM_n(G)$. Теорема доказана. □

4. Пример

В [10] была построена серия полугрупп S_r, удовлетворяющих соотношению $\mathscr{L} = \mathscr{H}$. Приведем аналогичное построение для полугрупп, обладающих свойством $\mathscr{R} = \mathscr{H}$ и применим к ним результаты работы. Эти полугруппы также будем обозначать S_r.

Пусть p — фиксированное простое число. Порождающие элементы $g, f_1, \ldots, f_r$ полугруппы S_r удовлетворяют следующим соотношениям:

$$g^{p+1} = g; \quad f_1g = f_1g^p; \quad f_1gf_r = 0;$$

$${f_i}^2 = f_i \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, r;$$

$$f_jf_i = 0 \quad \text{для всех } i \neq j, j-1;$$

$$f_ig = 0 \quad \text{для } i = 2, \ldots, r; \quad gf_i = 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, r-1.$$

Легко вычисляется [10], что S_r состоит из следующих $\dfrac{r(r+3)}{2} + (r+2)p + 1$ элементов:

$$0, g, g^2, \ldots, g^p = e;$$

$$f_jf_{j-1} \cdots f_i = f_{j,i}, \quad \text{где } 1 \leq i \leq j \leq r;$$

$$f_{j,1}e, \; g^mf_{r,i}, \quad \text{где } 1 \leq i, j \leq r, \quad 1 \leq m \leq p;$$

$$g^mf_{r,1}e, \quad \text{где } 1 \leq m \leq p,$$

и ненулевые произведения в S_r исчерпываются следующими элементами:

$$g^m \cdot g^n = g^{m+n (\operatorname{mod} p)};$$

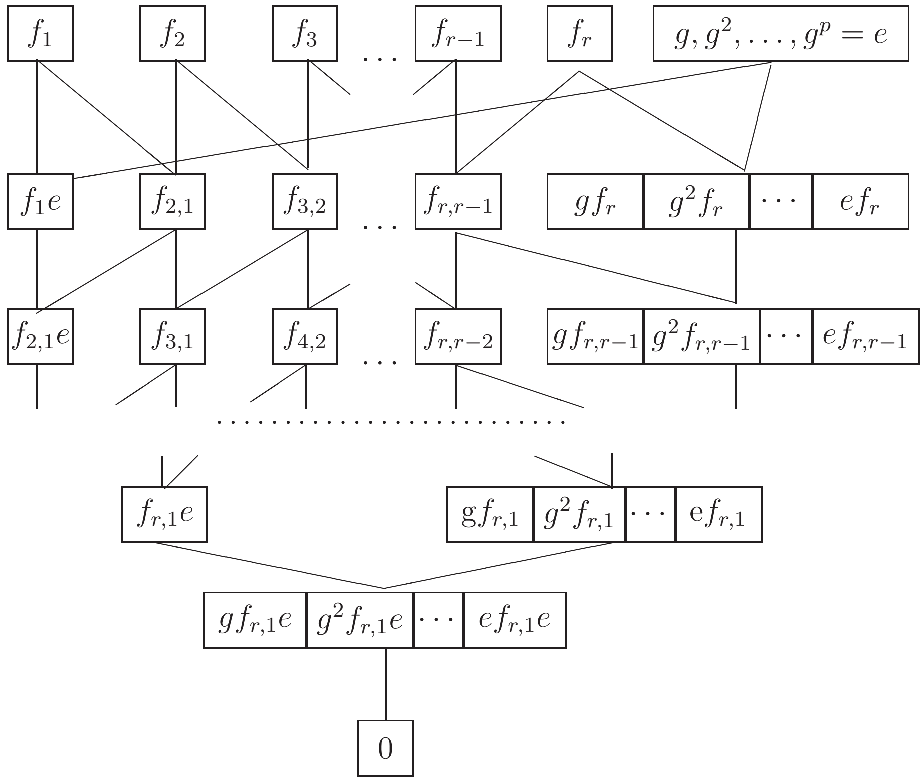
$$f_{k,j} \cdot f_{j,i} = f_{k,j+1}f_{j,i} = f_{k,i};$$

$$f_{j,1} \cdot g^m = f_{j,1}e \cdot g^m = f_{j,1}e;$$

$$g^m \cdot f_{r,i} = g^mf_{r,i}, \quad g^n \cdot g^mf_{r,i} = g^{m+n (\operatorname{mod} p)}f_{i,r};$$

$$g^nf_{r,1} \cdot g^m = g^nf_{r,1}e \cdot g^m = g^nf_{r,1}e;$$

$$g^m \cdot f_{r,1}e = g^mf_{r,1}e, \quad g^n \cdot g^mf_{r,1}e = g^{m+n (\operatorname{mod} p) f_{r,1}e}.$$



$\mathscr{J}$-структура полугруппы S_r.

На рисунке изображена $\mathscr{J}$-структура полугруппы S_r. Клетками обозначены $\mathscr{H}$-классы. Смежными по горизонтали клетками принято обозначать $\mathscr{H}$-классы одного $\mathscr{R}$-класса. Однако в данном случае, чтобы сделать рисунок более компактным, мы используем это обозначение для $\mathscr{H}$-классов одного $\mathscr{L}$-класса (или, что эквивалентно, $\mathscr{J}$-класса).

$\mathscr{H}$-класс элемента g обозначим через H_g. Построим фактор-полугруппу $S_r/\mathscr{R}^\sharp$. Очевидно, одноэлементные $\mathscr{L}$-классы и H_g будут также и $\mathscr{R}^\#$-классами. Поскольку $\mathscr{L}$-классы вида $\{g^if_r\}_{i=1}^p$ и $\{g^if_{r,r-1}\}_{i=1}^p \dots \{g^if_{r,1}\}_{i=1}^p$ являются произведением $\mathscr{R}$-классов $H_g\{f_r\}, \dots, H_g\{f_{r,1}\}$ соответственно, то все эти $\mathscr{L}$-классы также будут $\mathscr{R}^\sharp$-классами. $\mathscr{L}$-класс $\{g^if_{r,1}e\}_{i=1}^p$ является произведением $\mathscr{R}$-классов $H_g\{f_{r,1}e\}$, поэтому он также будет $\mathscr{R}^\sharp$-классом.

В итоге каждый $\mathscr{L}$-класс является $\mathscr{R}^\sharp$-классом. Классу H_g без ограничения общности присвоим номер 1. Очевидно, что $\Gamma_r(H_g) \cong H_g$, а группы Шютценберже остальных $\mathscr{H}$-классов единичны. Поэтому любому элементу при действии на $\mathscr{R}^\sharp$-класс, отличный от H_g, сопоставится элемент $(e_1, \dots, e_n)$ вне зависимости от разложения, где $e_1 \dots e_n$ — единицы групп Шютценберже, $n = card(S/\mathscr{R}^\sharp)$.

При действии на H_g лишь $\mathscr{R}^\sharp$-классы $\{g^if_r\}_{i=1}^p, \dots, \{g^if_{r,1}\}_{i=1}^p$ и H_g не переводят его в 0. В качестве фиксированного отображения из H_g в $\{g^if_r\}$ мы возьмем умножение на f_r (т. е. $g^i \to g^if_r$). Единственным плотным разложением любого элемента вида g^ix при $x \in \{f_{r,r-1}, \dots, f_{r,1}\}$, очевидно, как раз будет $g^if_rf_{r-1}\dots f_k$ для соответствующего k. Каждый из элементов g^if_r сразу представлен в виде своего единственного плотного разложения. Каждый из элементов $g^if_{r,1}e$ имеет плотное разложение вида $\{g^if_rf_{r-1}\dots f_1g^l\}_{l=1}^p$, но действия всех g^l на $\{g^if_rf_{r-1}\dots f_1\}$ совпадают.

Таким образом, элементам вида g^ix, где $x \in \{f_r, f_{r,r-1}, \dots, f_{r,1}, f_{r,1}e\}$, всегда будет соответствовать элемент $(g^i, e_2 \dots e_n)$, и мы получаем, что каждому g^ix сопоставляется единственная матрица. Остальные элементы образуют единичные $\mathscr{R}^\sharp$-классы, и, как было показано выше, каждому из них также будет соответствовать единственная матрица с ненулевыми элементами, равными $(e_1, \dots, e_n)$.

Имеем вложение S_r в $TM_n(G)$, где $G \cong H_g \times \{e_2\} \times \ldots \times \{e_n\} \cong H_g$. Значит, мы можем отождествить элемент $(e_1, \ldots, e_n)$ с единицей $e_1 = e$ группы H_g, отождествить элементы $(g^i, e_2 \ldots, e_n)$ с g^i и ставить e и g^i в соответствующих клетках матриц. Все ненулевые элементы матриц получившейся подполугруппы, таким образом, равны e, кроме элементов A_{1k} матриц, соответствующих элементам полугруппы S_r вида $g^i x, x \in \{f_r, f_{r,r-1}, \ldots, f_{r,1}\}$.

5. Построение псевдомногообразия RH

Приведем несколько необходимых определений (все их можно найти, например, в [9]).

Пусть V и W — конечные моноиды, $v, v_1, v_2 \in V$ и $w, w_1, w_2 \in W$. *Полупрямое произведение* $V * W$ — это множество $V \times W$, где W действует на V слева в соответствии с правилами $w(v_1 v_2) = w(v_1)w(v_2)$ и $w_1(w_2(v)) = (w_1 w_2)(v)$, а произведение пар определяется следующим образом:

$$(v_1, w_1)(v_1, w_2) = (v_1 w_1(v_2), w_1 w_2).$$

Сплетение $V \circ W$ — это множество $V^W \times W$, снабженное произведением

$$(v_1, w_1)(v_2, w_2) = (s, w_1 w_2),$$

$$s\colon W \to V,\ s(w) = v_1(w) v_2(w w_1).$$

Псевдомногообразием моноидов называется класс моноидов, замкнутый относительно взятия подмоноидов, гомоморфных образов и формирования конечных декартовых произведений.

Пусть $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ — псевдомногообразия моноидов. Через $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ далее будем обозначать *полупрямое произведение* $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. Моноид S содержится в $\mathbf{V} * \mathbf{W}$, если S делит некоторое полупрямое произведение $V * W$ для некоторых $V \in \mathbf{V}, W \in \mathbf{W}$. Определим также *сплетение* $\mathbf{V} \circ \mathbf{W}$ псевдомногообразий $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. Моноид S содержится в $\mathbf{V} \circ \mathbf{W}$, если S делит сплетение $V \circ W$ для некоторых $V \in \mathbf{V}, W \in \mathbf{W}$.

Несложно показать, что класс моноидов, удовлетворяющих $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, не образует псевдомногообразие, т. е. утверждение, обратное к теореме, неверно: не всякий моноид, делящий $TM_n(G)$ или даже являющийся подмоноидом $TM_n(G)$, будет удовлетворять соотношению $\mathscr{R} = \mathscr{H}$. Рассмотрим следующий пример. Пусть H — группа, состоящая из единицы 1 и инволюции q. Пусть T — подмоноид моноида $TM_3(H)$, порожденный матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = BA = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц также выполнено соотношение $B = CA$, что влечет $B\mathscr{R}C$ в T. Однако уравнение $XB = C$ не разрешимо в T, так как необходимо, чтобы элемент X_{11} был равен q, что, очевидно, не выполнено ни для одной матрицы в T. Таким образом $B\mathscr{R}C$ не влечет $B\mathscr{L}C$, следовательно, отношения $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$ не совпадают в T.

Опишем псевдомногообразие $\mathbf{RH}$, порожденное всевозможными конечными моноидами, на которых $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, в виде полупрямого произведения псевдомногообразия всех конечных групп $\mathbf{G}$ и псевдомногообразия всех конечных $\mathscr{R}$-тривиальных моноидов $\mathbf{R}$.

Предложение 5. $\mathbf{RH} = \mathbf{G} * \mathbf{R}$.

Доказательство. Хорошо известно, что моноид $TM_n(G)$ представляет собой особое полупрямое произведение декартовой степени G^n и моноида $\mathscr{E}_n$ всех направленных преобразований на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Для удобства дальнейшего изложения напомним подробнее эту конструкцию. Каждую матрицу z из $TM_n(G)$ можно представить в виде пары (g, r), где $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ с элементами g_i, занумерованными строками матрицы, и $r \in \mathscr{E}_n$ — преобразование множества $\{1, \ldots, n\}$, представимое матрицей над множеством $\{0, 1\}$ с той же расстановкой ненулевых элементов, что у матрицы z. Исходя из матричного умножения, произведение пар будет определяться следующим образом:

$$(g, r_1)(h, r_2) = (s, r_1 r_2),$$

$$s_k = g_k h_{r_1(k)}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

что соответствует операции полупрямого произведения. Таким образом, поскольку каждый моноид, удовлетворяющий равенству $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, делит $TM_n(G) = G^n * \mathscr{E}_n$, мы имеем $\mathbf{RH} \subseteq \mathbf{G} * \mathbf{R}$.

Рассмотрим теперь сплетение псевдомногообразий $\mathbf{G} \circ \mathbf{R}$. Пусть моноид S содержится в $\mathbf{G} \circ \mathbf{R}$, т. е. S делит сплетение $G \circ T$ для некоторых $G \in \mathbf{G}, T \in \mathbf{R}$. Напомним, что сплетение $G \circ T$ — это множество $G^T \times T$, снабженное произведением

$$(g, t_1)(h, t_2) = (s, t_1 t_2),$$

$$s\colon T \to G, \quad s(t) = g(t) h(t t_1).$$

Если теперь рассмотреть моноид T как индексное множество, упорядоченное линейным порядком $\leq$, где $t_1 \leq t_2$ влечет $t_2 \leq_{\mathscr{R}} t_1$ в T, то умножение на t_1 соответствует направленному преобразованию на этом множестве, так как $tt_1 \leq_{\mathscr{R}} t$. Значит, моноид $G \circ T$ изоморфен моноиду $G^{|T|} * T$ с операцией полупрямого произведения, определенной выше. Тем самым $G \circ T$ является подмоноидом в $G^{|T|} * \mathscr{E}_{|T|}$. Зафиксируем выбранную индексацию элементов моноида T.

Покажем, что в произвольном моноиде $G \circ T$ совпадают отношения $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$. Пусть $a, b \in G \circ T$. Если $a \mathscr{R} b$ в $G \circ T$, то $a \mathscr{R} b$ и в $TM_{|T|}(G) = G^{|T|} * \mathscr{E}_{|T|}$, т. е. a и b, как минимум, имеют одинаковую расстановку ненулевых элементов по предложению 1.

Поскольку единица e моноида T индуцирует тождественное преобразование на нем, то подмоноид $G^T \times e$ моноида $G \circ T$ будет состоять из диагональных матриц со всевозможными расстановками элементов группы G на диагонали. Исходя из этого, определим диагональные матрицы x и y из $G^T \times e$ по следующему правилу:

$$x_{ii} = b_{ij} a_{ij}^{-1}, \ 1 \leq j \leq |T|,$$

$$y_{ii} = a_{ij} b_{ij}^{-1}, \ 1 \leq j \leq |T|.$$

Тогда $xa = b$ и $yb = a$, что означает $a \mathscr{L} b$. Таким образом, $a \mathscr{R} b$ влечет $a \mathscr{L} b$ в $G \circ T$, что и требовалось. Отсюда получаем, что $\mathbf{G} \circ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{RH}$.

Как показал Тилсон в [9, приложение A], для псевдомногообразий моноидов имеет место равенство $\mathbf{V} * \mathbf{W} = \mathbf{V} \circ \mathbf{W}$, если только $\mathbf{W}$ не является расширенным псевдомногообразием групп. Поскольку $\mathbf{R}$ не является таковым, а $\mathbf{G}$ также является псевдомногообразием моноидов, имеем $\mathbf{RH} \subseteq \mathbf{G} * \mathbf{R} = \mathbf{G} \circ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{RH}$, т. е. $\mathbf{RH} = \mathbf{G} * \mathbf{R}$. Предложение доказано. □

Из предложения 5 и доказательства теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если все группы Шютценберже моноида S, удовлетворяющего равенству $\mathscr{R} = \mathscr{H}$, принадлежат псевдомногообразию групп $\mathbf{H}$, то $S \in \mathbf{H} * \mathbf{R}$.*

З а м е ч а н и е. Отметим, что полученное описание псевдомногообразия $\mathbf{RH}$ коррелирует с результатами П. Стиффлера [7], согласно которым $\mathbf{G} * \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} * \mathbf{G} = \mathbf{ER}$, где через $\mathbf{ER}$ обозначается псевдомногообразие, состоящее из моноидов, идемпотенты которых порождают $\mathscr{R}$-тривиальный подмоноид. Как несложно видеть, любой из моноидов $TM_n(G)$ удовлетворяет этому свойству. Из результатов второго раздела вытекает, что идемпотентами в $TM_n(G)$ являются в точности те матрицы, ненулевые столбцы которых содержат единицу группы на главной диагонали. При перемножении идемпотентов ненулевыми элементами группы на диагонали по-прежнему остаются единицы. Пусть M — подмоноид $TM_n(G)$, порожденный всеми идемпотентами, и пусть $a, b \in M$. Если $a \mathscr{R} b$ в M, то существует такой элемент $x \in M$, что $ax = b$. Помимо этого $a \mathscr{R} b$ имеет место также и в $TM_n(G)$, и в соответствии с доказательством предложения 1 для каждого номера k, $1 \leq k \leq n$, получаем равенство $a_k x_{kk} = b_k$ для соответствующих столбцов a_k и b_k матриц a и b. Поскольку все элементы x_{kk} матрицы x равны единице либо нулю, имеем $a = b$, и подмоноид M является $\mathscr{R}$-тривиальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lallement G.** Regular semigroups with $\mathscr{D} = \mathscr{R}$ as syntactic monoids of finite prefix codes // Theoretical Computer Science. 1997. Vol. 3. P. 35–49.
2. **Pastijn F., Volkov M.V.** $\mathscr{D}$-compatible semigroup varieties // J. Alg. 2006. Vol. 299. P. 62–93.
3. **Pin J.-E.** Varieties of formal languages. London: North Oxford Academic Publishers, 1986. 148 p.
4. **Rhodes J., Steinberg B.** The q-theory of finite semigroups. Boston: Springer, 2009. 666 p.
5. **Schützenberger M.P.** On finite monoids having only trivial subgroups // Inf. Control. 1965. Vol. 8. P. 190–194.
6. **Simon I.** Piecewise testable events // Lect. Notes in Comput. Sci (Proc. 2nd GI Conf.) 1975. Vol. 33. P. 214–222.
7. **Stiffler P.** Extension of the fundamental theorem of finite semigroups // Advances in Math. 1973. Vol. 11. P. 159–209.
8. **Straubing H.** On finite $\mathscr{J}$-trivial monoids // Semigroup Forum. 1980. Vol. 19. P. 107–110.
9. **Tilson B.** Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids // J. Pure and Applied Alg. 1987. Vol. 48. P. 83–198.
10. **Trotter P.G., Volkov M.V.** The finite basis problem in the pseudovariety joins of aperiodic semigroups with groups // Semigroup Forum. 1996. Vol. 52. P. 83–91.
11. **Лаллеман Ж.** Полугруппы и комбинаторные приложения. Москва: Мир, 1985. 440 с.

Поступила 22.02. 2013

Первухина Татьяна Вячеславовна
младший науч. сотрудник
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: cristofory@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.956.37

ЗАДАЧИ ДВУСТОРОННЕГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ДОКРИТИЧЕСКИХ ПРОМЕЖУТКАХ В КЛАССАХ СИЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ[1]

М. М. Потапов, Д. А. Иванов

Для волнового уравнения с переменными коэффициентами рассмотрены задачи с двусторонними граничными управлениями трех основных типов. В классах сильных обобщенных решений на промежутках докритической длины получены конструктивные неравенства ограниченной обратимости оператора управления с известными (вычислимыми) значениями оценочных констант. Полученные оценки позволяют с помощью вариационного метода находить устойчивые численные решения рассматриваемых задач на временных промежутках любой докритической, а также и в точности критической длины.

Ключевые слова: волновое уравнение, граничное управление, докритический промежуток, неравенство непрерывной обратимости, вариационный метод.

M. M. Potapov, D. A. Ivanov. Problems of two-sided boundary control for the wave equation on subcritical intervals in classes of strong generalized solutions.

Problems with two-sided boundary controls of three main types are considered for the wave equation with variables coefficients. Constructive inequalities for the bounded invertibility of the control operator with known (computable) values of estimate constants are obtained in classes of strong generalized solutions on intervals of subcritical length. The obtained estimates make it possible to use the variational method for finding stable numerical solutions to the problems under consideration on time intervals of any subcritical or exactly critical length.

Keywords: wave equation, boundary control, subcritical interval, bounded invertibility inequality, variational method.

1. Введение

В работе для волнового уравнения с переменными коэффициентами исследуются задачи граничного управления вида

$$\rho(x)\, y_{tt} = (k(x)\, y_x)_x - q(x)\, y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \tag{1.1}$$

$$-\beta_0 k y_x + \sigma_0 y\,|_{\,x=0} = u_0(t), \quad \beta_1 k y_x + \sigma_1 y\,|_{\,x=l} = u_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{1.2}$$

$$y\,|_{\,t=0} = 0, \quad y_t\,|_{\,t=0} = 0, \quad 0 < x < l. \tag{1.3}$$

Требуется найти пару граничных управлений $u = (u_0(t), u_1(t))$, переводящих систему (1.1)–(1.3) в заданное конечное состояние

$$y\,|_{\,t=T} = f^0(x), \quad y_t\,|_{\,t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l. \tag{1.4}$$

Задача управления (1.1)–(1.4) рассматривается при следующих предположениях:

$$\begin{gathered}\rho(x),\ k(x) \in C^2[0,l], \quad q(x) \in C[0,l], \quad \rho(x) \geqslant \rho_* > 0, \quad k(x) \geqslant k_* > 0, \quad q(x) \geqslant 0,\\ \beta_i = 0 \vee 1, \quad \sigma_i \geqslant 0, \quad \beta_i + \sigma_i > 0, \quad \text{а если} \quad \beta_i = 0, \quad \text{то} \quad \sigma_i = 1, \quad i = 0, 1.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Указанные в (1.5) значения граничных коэффициентов β_i, σ_i позволяют охватить различные сочетания всех трех типов классических граничных условий: Дирихле, Неймана и Робена.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 8208).

Характерной особенностью волнового уравнения является наличие критического (порогового) момента управляемости $T_* > 0$. Известно, что при согласованном выборе пространств управлений и целевых состояний на докритических промежутках $T < T_*$ задача управления разрешима не для произвольных целей, на сверхкритических интервалах $T > T_*$ имеется свойство полной управляемости, а при $T = T_*$ факт достижимости произвольных целей существенным образом зависит от рассматриваемых пространств. Для задач (1.1)–(1.4) с двусторонними граничными управлениями критический момент определяется как

$$T_* = \int\limits_0^l \sqrt{\frac{\rho(x)}{k(x)}}\, dx\,. \tag{1.6}$$

В случае сверхкритических времен $T > T_*$ задачи граничного управления рассматривались в работах многих авторов. Для уравнений с постоянными коэффициентами в работах [1; 2] были выписаны аналитические решения; в [3; 4] для уравнений более общего вида исследовались проблемы управляемости и наблюдаемости; в [5] при $T > T_*$, а в [6] при $T \geqslant T_*$ получены конструктивные априорные оценки, позволяющие строить устойчивые приближенные решения рассматриваемых задач с помощью вариационного метода [7]. В случае докритических времен $T < T_*$ работ, посвященных данным задачам, значительно меньше, причем рассматривались только уравнения с постоянными коэффициентами. В классах сильных обобщенных решений в [8; 9] были найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления и аналитический вид ее единственного решения, а в [10; 11] аналитически решена задача о нахождении граничного управления, которое минимизирует расстояние до принципиально недостижимого целевого состояния. В классе слабых обобщенных решений уравнений с постоянными коэффициентами на критических интервалах $T = T_*$ задачи граничного управления аналитически решены в [12]. В данной статье для уравнения (1.1) с переменными коэффициентами в классах сильных обобщенных решений выводятся конструктивные оценки, пригодные для организации устойчивых вычислений по схеме [7] при $T \leqslant T_*$.

Для краткого изложения полученных результатов запишем задачу управления (1.1)–(1.4) в операторной форме:

$$\mathcal{A}u = f, \quad \mathcal{A}u = (y(T,x), y_t(T,x)), \; u = (u_0(t), u_1(t)), \; f = (f^0(x), f^1(x)), \; \mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F), \tag{1.7}$$

где H и F — некоторые вполне определенные гильбертовы пространства управлений $u \in H$ и целевых состояний $f \in F$, которые мы уточним ниже и которым будут соответствовать сильные обобщенные решения $y = y(t,x)$ дифференциальной задачи (1.1)–(1.3). На рассматриваемых здесь докритических промежутках достижимы не все цели $f \in F$, поэтому, как и в [10; 11], целесообразно ставить задачу управления в форме задачи минимизации невязки

$$J(u) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 \to \inf, \quad u \in H, \tag{1.8}$$

или в эквивалентной (1.8) форме симметризованного операторного уравнения

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}u = \mathcal{A}^* f. \tag{1.9}$$

Устойчивые приближенные решения операторного уравнения (1.9) могут быть построены с помощью вариационного метода [7], для обоснованного применения которого требуются априорная информация об истокопредставимости искомого точного решения и оценка нормы источника. На сверхкритических промежутках $T > T_*$ такая информация обычно извлекается из конструктивных оценок вида (см., например, [5; 6; 13])

$$\|\mathcal{A}^* v\|_{H^*}^2 \geqslant \mu \|v\|_{F^*}^2 \quad \forall v \in F^* \tag{1.10}$$

для сопряженного оператора наблюдения $\mathcal{A}^*$, в которых значения оценочной константы $\mu > 0$ должны быть известны и которые называются *неравенствами наблюдаемости*.

В данной работе на докритических промежутках $T \leqslant T_*$ в классах сильных обобщенных решений дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) получены двойственные к (1.10) конструктивные оценки для оператора управления

$$\|\mathcal{A}u\|_F^2 \geqslant \nu \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H. \tag{1.11}$$

В оценках (1.11) значения постоянной ν будут явно выражены через параметры задачи и могут быть использованы для устойчивых вычислений приближенных решений задач (1.8) или (1.9) с помощью вариационного метода [7; 13] точно так же, как значения постоянной μ из неравенств наблюдаемости (1.10) использовались в [5; 13] для приближенного решения задач управления $\mathcal{A}u = f$ на сверхкритических промежутках $T > T_*$.

2. Уточнение постановки задачи и формулировка основного результата

В выбранных нами классах сильных обобщенных решений техника вывода искомой оценки (1.11) незначительно зависит от типов граничных условий (1.2), содержащих управляющие воздействия, поэтому с целью унификации как формулировок результатов, так и некоторых этапов их доказательств введем следующие полезные, на наш взгляд, обозначения. Прежде всего введем классы H_0 и H_1 левосторонних и правосторонних управлений

$$u_0(t) \in H_0, \quad u_1(t) \in H_1, \quad u = (u_0, u_1) \in H = H_0 \times H_1. \tag{2.1}$$

Каждое из пространств H_0 и H_1 будет зависеть только от типа соответствующего граничного условия, а точнее, от значений коэффициентов β_0 и β_1:

$$H_i = H^1(\overset{\circ}{0}, T) \quad \text{при} \quad \beta_i = 0, \quad H_i = L^2(0, T) \;\; \text{при} \;\; \beta_i = 1, \quad i = 0, 1. \tag{2.2}$$

Здесь $L^2(0,T)$ — пространство Лебега, а $H^1(\overset{\circ}{0},T) = \{f(t) \in H^1(0,T) \mid f(0) = 0\}$ — пространство Соболева, выбранное с учетом нулевого начального условия (1.3). Скалярные произведения в этих пространствах вводятся по правилам

$$\langle f,\, g\rangle_{L^2(0,T)} = \int_0^T f(t)\, g(t)\, dt \;\; \text{и} \;\; \langle f,\, g\rangle_{H^1(\overset{\circ}{0},T)} = \int_0^T f'(t)\, g'(t)\, dt. \tag{2.3}$$

Таким образом, граничные управления типа Дирихле ($\beta_i = 0$) будут выбираться из соболевского класса $H^1(\overset{\circ}{0},T)$, а управления типа Неймана или Робена ($\beta_i = 1$) — из пространства Лебега $L^2(0,T)$. Обобщенные решения $y = y(t,x)$ дифференциальной задачи (1.1)–(1.3), отвечающие таким управлениям, принадлежат классу В. А. Ильина $\widehat{W}_2^1(Q)$ [8;9] на прямоугольнике $Q = (0,T) \times (0,l)$ и обладают дополнительным запасом гладкости [14]:

$$y(t,\cdot) \in C([0,T]; H^1(0,l)), \quad y_t(t,\cdot) \in C([0,T]; L^2(0,l)),$$
$$y(\cdot,x) \in C([0,l]; H^1(\overset{\circ}{0},T)), \quad y_x(\cdot,x) \in C([0,l]; L^2(0,T)),$$

обеспечивающим ограниченность введенного в (1.7) оператора управления, действующего из определенного в (2.1), (2.2) гильбертова пространства H в гильбертово пространство F целевых состояний и скоростей:

$$f = (f^0(x), f^1(x)) \in F = H^1(0,l) \times L^2(0,l), \quad \|f\|_F^2 = \|f^0\|_{H^1(0,l)}^2 + \|f^1\|_{L^2(0,l)}^2. \tag{2.4}$$

В пространстве Лебега $L^2(0,l)$ введем норму с весом $\rho(x)$, а выбор нормировки в пространстве Соболева $H^1(0,l)$ подсказан конфигурацией полученных в работе итоговых оценок:

$$\|f\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l \rho(x) f^2(x) dx, \quad \|f\|_{H^1(0,l)}^2 = \|f\|_{L^2(0,l)}^2 + \int_0^l \left|\frac{d}{dx}\Big((k(x)\,\rho(x))^{1/4}\, f(x)\Big)\right|^2 \sqrt{\frac{k(x)}{\rho(x)}}\, dx. \tag{2.5}$$

Учитывая (2.2), (2.3), норму в пространстве управлений формально можно записать в виде

$$\|u\|_H^2 = \|u_0\|_{H_0}^2 + \|u_1\|_{H_1}^2, \quad \|w\|_{H_i}^2 = \beta_i \int\limits_0^T w^2(t)\,dt + (1-\beta_i)\int\limits_0^T |w'(t)|^2\,dt, \quad i = 0, 1. \tag{2.6}$$

В следующей теореме сформулирован основной результат данной работы.

Теорема. *Пусть коэффициенты дифференциальной задачи* (1.1)–(1.3) *удовлетворяют условиям* (1.5), *а граничные управляющие воздействия* $u = (u_0, u_1)$ *выбираются из класса* (2.1)–(2.3). *Тогда при всех* $T \leqslant T_*$, *где значение порогового момента* T_* *определено в* (1.6), *для сильного обобщенного решения* $y(t,x)$ *системы* (1.1)–(1.3) *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{A}u\|_F^2 \geqslant \nu \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H \quad (\nu = \mathrm{const} > 0), \tag{2.7}$$

в которой действие оператора $\mathcal{A}$ *определено в* (1.7), *пространство* F *описано в* (2.5), (2.6). *Значение оценочной константы* ν *в* (2.7) *явно выражается через* T, l *и коэффициенты* $\rho(x)$, $k(x)$, $q(x)$, β_0, β_1, σ_0, σ_1, *а именно при* $T \leqslant l_*/2$ *оно равно* $\nu = \mathcal{N}^{-1}$, *при* $l_*/2 < T \leqslant l_*$ $\nu = (2\mathcal{N})^{-1}$, *а конструкция постоянной* $\mathcal{N}$ *описана ниже в* (3.35).

Доказательство теоремы будет приведено в следующем разделе, а здесь поясним, как именно значение постоянной ν из оценки (2.7) можно использовать для численного решения поставленной задачи управления с помощью вариационного метода [7;13]. Этот метод был предложен для устойчивого приближенного решения линейных операторных уравнений $Au = f$, разрешимых в классическом смысле, при наличии априорной информации об истокопредставимости нормального решения u_* и величине нормы его источника v_*:

$$u_* = A^* v_*, \quad v_* \in F, \quad \|v_*\|_F \leqslant r. \tag{2.8}$$

Основная вычислительная процедура вариационного метода заключается в переходе от уравнения $Au = f$ к задаче квадратичной минимизации на шаре того самого радиуса r, который фигурирует в априорной оценке (2.8). Как уже отмечалось выше, в приложениях к задачам управления типа (1.1)–(1.4) на временных промежутках сверхкритической длины $T > T_*$ априорная информация вида (2.8) обычно извлекалась из конструктивных неравенств наблюдаемости (1.10), в частности по значению постоянной $\mu > 0$ из (1.10) оценивался и диапазон допустимых значений радиуса r в (2.8): $r \geqslant \|f\|/\mu$ (см., например, [5;6;13]). На докритических интервалах, на которых будет получена оценка (2.7), приближенное решение уравнения (1.9) можно построить в два этапа. На первом этапе вариационным методом на шаре радиуса $r \geqslant \|\mathcal{A}^* f\|/\nu$ находится истокопредставимое решение $w \in R(\mathcal{A})$ уравнения $\mathcal{A}^* w = \mathcal{A}^* f$, являющееся проекцией целевой функции f на область значений $R(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$. На втором этапе тем же вариационным методом на шаре радиуса $r \geqslant \|w\|/\nu$ находится истокопредставимое решение $u \in R(\mathcal{A}^*)$ уравнения $\mathcal{A}u = w$.

3. Доказательство теоремы

План доказательства будет следующим. Сначала с помощью известных замен пространственной переменной x и функции y, которые использовались, в частности, в [6] для вывода конструктивного неравенства наблюдаемости (1.10) на сверхкритических промежутках, дифференциальное уравнение (1.1) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами при старших производных. Пространственная переменная меняется на s:

$$s = s(x) = \int\limits_0^x \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{k(\xi)}}\,d\xi, \quad x \in [0, l], \quad s \in [0, l_*], \quad l_* = \int\limits_0^l \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{k(\xi)}}\,d\xi \overset{(1.6)}{=} T_*\,.$$

Функция $y = y(t,x)$ заменяется функцией $z = z(t,s)$:

$$z(t,s) = \sqrt{a(x(s))}\,y(t,x(s)), \quad (t,s) \in Q_*, \quad a(x) = \sqrt{\rho(x)k(x)}, \quad Q_* = (0,T) \times (0,l_*),$$

где $x = x(s),\ s \in [0,l_*]$, — функция, обратная к $s = s(x)$, и вводятся обозначения

$$\alpha(s) = a(x(s)), \quad \theta(s) = \zeta'(s) + \zeta^2(s) + \frac{q(x(s))}{\rho(x(s))}, \quad \zeta(s) = \frac{\alpha'(s)}{2\alpha(s)}.$$

В терминах z исходная задача управления (1.1)–(1.4) записывается в виде

$$z_{tt} = z_{ss} - \theta(s)\,z, \quad 0 < t < T, \quad 0 < s < l_*, \tag{3.1}$$

$$-\beta_0 z_s + \Big(\frac{\sigma_0}{\alpha} + \beta_0\zeta\Big) z\,\Big|_{s=0} = \frac{u_0(t)}{\sqrt{\alpha(0)}}, \quad \beta_1 z_s + \Big(\frac{\sigma_1}{\alpha} - \beta_1\zeta\Big) z\,\Big|_{s=l_*} = \frac{u_1(t)}{\sqrt{\alpha(l_*)}}, \quad 0 < t < T, \tag{3.2}$$

$$z\,|_{t=0} = 0, \quad z_t\,|_{t=0} = 0, \quad 0 < s < l_*, \tag{3.3}$$

$$z\,|_{t=T} = \sqrt{\alpha(s)}\,f^0(x(s)), \quad z_t\,|_{t=T} = \sqrt{\alpha(s)}\,f^1(x(s)), \quad 0 < s < l_*. \tag{3.4}$$

Неравенство (2.7) будем доказывать, оценивая сверху нормы управлений $\|u\|_H$ через нормы $\|\mathcal{A}u\|_F$ соответствующих им значений (1.7) оператора $\mathcal{A}$. Учитывая указанные в (1.5) значения граничных коэффициентов, нормировку (2.6) в пространстве H и вид граничных условий (3.2), оценим сверху нормы управлений через граничные значения функции $z(t,s)$ и ее первых производных:

$$\|u\|_H^2 \leqslant 2\beta_0\alpha(0)\int_0^T \Big(z_s^2(t,0) + \delta_0 z^2(t,0)\Big)dt$$

$$+\frac{(1-\beta_0)}{\alpha(0)}\int_0^T z_t^2(t,0)\,dt + \frac{(1-\beta_1)}{\alpha(l_*)}\int_0^T z_t^2(t,l_*)\,dt + 2\beta_1\alpha(l_*)\int_0^T \Big(z_s^2(t,l_*) + \delta_1 z^2(t,l_*)\Big)dt, \tag{3.5}$$

где $\delta_0 = \Big(\dfrac{\sigma_0}{\alpha(0)} + \zeta(0)\Big)^2$, $\delta_1 = \Big(\dfrac{\sigma_1}{\alpha(l_*)} - \zeta(l_*)\Big)^2$. Далее, с помощью формулы Даламбера граничные интегралы (3.5) будут оценены сверху через значения решения $z(t,l_*/2)$ и его первой производной $z_s(t,l_*/2)$ на среднем сечении $s = l_*/2$ промежутка $s \in [0,l_*]$, а затем, опять же с помощью формулы Даламбера, мы оценим эти значения $z(t,l_*/2)$ и $z_s(t,l_*/2)$ через нулевые начальные состояния (3.3), а также финальные состояния (3.4), напрямую связанные со значениями (1.7) оператора $\mathcal{A}$.

Формула Даламбера позволяет продолжить функцию $z(t,s)$, удовлетворяющую условиям (3.1)–(3.4), за пределы прямоугольника Q_* через его границы $t = 0$ и $t = T$ в примыкающие к нему треугольники

$$0 \leqslant s \leqslant l_*, \quad |s - l_*/2| - l_*/2 \leqslant t \leqslant 0 \ \text{ и } \ 0 \leqslant s \leqslant l_*\,, \quad T \leqslant t \leqslant T + l_*/2 - |s - l_*/2|\,.$$

Введем обозначения для продолженного решения и его производной по s на сечении $s = l_*/2$:

$$z(t,l_*/2) = \varphi(t), \quad z_s(t,l_*/2) = \psi(t), \quad -l_*/2 \leqslant t \leqslant T + l_*/2\,, \tag{3.6}$$

и посмотрим на функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ как на данные типа Коши при $s = l_*/2$ для волнового уравнения (3.1). В расширенной области значения $z(t,s)$ выражаются через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ по формуле Даламбера, в которой мы поменяли местами пространственную переменную и время:

$$z(t,s) = \frac12\big(\varphi(t-s+l_*/2)+\varphi(t+s-l_*/2)\big) + \frac12\int_{t-s+l_*/2}^{t+s-l_*/2}\psi(\tau)\,d\tau + \frac12\int_{l_*/2}^{s}d\xi\int_{t-s+\xi}^{t+s-\xi}\theta(\xi)z(\tau,\xi)\,d\tau. \tag{3.7}$$

Из представления (3.7) с помощью технических приемов, аналогичных использованным в [6], выводятся оценки для каждого из присутствующих в (3.5) граничных интегралов. Начнем с оценки интеграла от $z^2(t,0)$. Фиксируя произвольное $t_0 \in (0,T)$, рассмотрим соответствующий этому t_0 характеристический треугольник

$$\triangle(t_0) = \{\, 0 \leqslant s \leqslant l_*/2,\ t_0 - s \leqslant t \leqslant t_0 + s \,\} \tag{3.8}$$

и введем вспомогательную функцию

$$w(s) = \int\limits_{t_0-s}^{t_0+s} |\theta(s) z(t,s)|\, dt, \quad 0 \leqslant s \leqslant l_*/2. \tag{3.9}$$

Из равенства (3.7) с учетом того, что $\varphi(t) = 0,\ \psi(t) = 0,\ t \in [-l_*/2,\, l_*/2]$, следует оценка

$$w(s) \leqslant |\theta(s)|\, i_\varphi + s\,|\theta(s)|\, i_\psi + s\,|\theta(s)| \int\limits_s^{l_*/2} w(\xi)\, d\xi, \quad s \in [0, l_*/2], \quad i_g = \int\limits_{l_*/2}^{t_0+l_*/2} |g(\tau)|\, d\tau. \tag{3.10}$$

Для вывода из (3.10) оценки функции w через φ и ψ, как и при доказательстве леммы Гронуолла — Беллмана, подберем подходящий интегрирующий множитель:

$$\begin{gathered} \int\limits_s^{l_*/2} w(\xi)\, d\xi \leqslant c_1(s)\, i_\varphi + d_1(s)\, i_\psi, \\ c_1(s) = \int\limits_s^{l_*/2} |\theta(\xi)| \exp\left(\int\limits_s^{\xi} \eta\, |\theta(\eta)| d\eta \right) d\xi, \quad d_1(s) = \int\limits_s^{l_*/2} \xi\, |\theta(\xi)| \exp\left(\int\limits_s^{\xi} \eta\, |\theta(\eta)| d\eta \right) d\xi. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Подставим в (3.7) $t = t_0,\ s = 0$, возведем обе части в квадрат и воспользуемся оценкой (3.11):

$$z^2(t_0,0) \leqslant \frac{1}{2}\left(|\varphi(t_0 + l_*/2)| + c_1(0)\, i_\varphi\right)^2 + \frac{(1 + d_1(0))^2}{2}\, i_\psi^2\,. \tag{3.12}$$

После интегрирования обеих частей (3.12) по t_0 от 0 до T придем к неравенству

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T z^2(t_0,0)\, dt_0 \leqslant \frac{2 + 2c_1(0)T + c_1^2(0)T^2}{4}\, \|\varphi\|_*^2 + \frac{(1 + d_1(0))^2 T^2}{4}\, \|\psi\|_*^2\,, \\ \|g\|_*^2 = \int\limits_{l_*/2}^{T+l_*/2} g^2(\tau)\, d\tau\,. \end{gathered} \tag{3.13}$$

На правом конце отрезка совершенно аналогично выводится оценка

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T z^2(t_0,l_*)\, dt_0 \leqslant \frac{2 + 2c_2(l_*)T + c_2^2(l_*)T^2}{4}\, \|\varphi\|_*^2 + \frac{(1 + d_2(l_*))^2 T^2}{4}\, \|\psi\|_*^2\,, \quad l_*/2 \leqslant s \leqslant l_*\,, \\ c_2(s) = \int\limits_{l_*/2}^{s} |\theta(\xi)| \exp\left(\int\limits_{\xi}^{s} (l_* - \eta)\, |\theta(\eta)|\, d\eta \right) d\xi, \\ d_2(s) = \int\limits_{l_*/2}^{s} (l_* - \xi)\, |\theta(\xi)| \exp\left(\int\limits_{\xi}^{s} (l_* - \eta)\, |\theta(\eta)|\, d\eta \right) d\xi\,. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Для оценивания граничных значений производных $z_t(t,0)$ сначала продифференцируем обе части соотношения (3.7) по t:

$$z_t(t,s) = \frac{1}{2}\big(\varphi'(t-s+l_*/2) + \varphi'(t+s-l_*/2)\big)$$
$$+ \frac{1}{2}\big(\psi(t+s-l_*/2) - \psi(t-s+l_*/2)\big) + \frac{1}{2}\int\limits_{l_*/2}^{s} d\xi \int\limits_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} \theta(\xi) z_t(\tau,\xi)\, d\tau. \tag{3.15}$$

Затем в характеристическом треугольнике (3.8) введем аналогичную (3.9) функцию

$$w_1(s) = \int\limits_{t_0-s}^{t_0+s} |\theta(s) z_t(t,s)|\, dt, \quad 0 \leqslant s \leqslant l_*/2, \tag{3.16}$$

и из (3.15) получим для нее оценку, подобную (3.10):

$$w_1(s) \leqslant |\theta(s)|\,(i_{\varphi'} + i_\psi) + s\,|\theta(s)| \int\limits_{s}^{l_*/2} w_1(\xi)\, d\xi\,, \quad s \in [0, l_*/2]. \tag{3.17}$$

Далее извлечем из (3.17) следствие, аналогичное (3.11), с тем же самым, что и в (3.11), значением коэффициента $c_1(s)$:

$$\int\limits_{s}^{l_*/2} w_1(\xi)\, d\xi \leqslant c_1(s)\,(i_{\varphi'} + i_\psi), \quad s \in [0, l_*/2]. \tag{3.18}$$

Из (3.15), (3.16) и (3.18) получим искомую оценку при $s = 0$:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T z_t^2(t_0,0)\, dt_0 \leqslant \frac{1}{2}\,\|\varphi'\|_*^2 - \langle \varphi', \psi\rangle_* + \frac{1}{2}\,\|\psi\|_*^2 + \frac{c_1^2(0)T^2}{2}\,(\|\varphi'\|_*^2 + \|\psi\|_*^2), \\ \langle f, g\rangle_* = \int\limits_{l_*/2}^{T+l_*/2} f(\tau)\, g(\tau)\, d\tau. \end{gathered} \tag{3.19}$$

На правом конце отрезка в точке $s = l_*$ выполняется неравенство, подобное (3.19):

$$\int\limits_0^T z_t^2(t_0,l_*)\, dt_0 \leqslant \frac{1}{2}\,\|\varphi'\|_*^2 + \langle \varphi', \psi\rangle_* + \frac{1}{2}\,\|\psi\|_*^2 + \frac{c_2^2(l_*)T^2}{2}\,(\|\varphi'\|_*^2 + \|\psi\|_*^2)\,. \tag{3.20}$$

Присутствующее в (3.20) значение функции $c_2(s)$ вычисляется по правилу (3.14).

Оценивание граничных интегралов от производной z_s проведем по похожей схеме. Сначала из (3.7) выразим значения производной при $t = t_0,\ s = 0$:

$$z_s(t_0,0) = \frac{1}{2}\big(-\varphi'(t_0+l_*/2) + \psi(t_0+l_*/2)\big) + \frac{1}{2}\int\limits_{l_*/2}^{0} \theta(\xi)\big(z(t_0-\xi,\xi) + z(t_0+\xi,\xi)\big)\, d\xi. \tag{3.21}$$

Возведем обе части (3.21) в квадрат и проинтегрируем по t_0 от 0 до T:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T z_s^2(t_0,0)\, dt_0 \leqslant \frac{1}{2}\,\|\varphi'\|_*^2 - \langle \varphi', \psi\rangle_* + \frac{1}{2}\,\|\psi\|_*^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^T b^2(t_0)\, dt_0, \\ b(t_0) = \int\limits_0^{l_*/2} |\theta(\xi)|\,|z(t_0-\xi,\xi) + z(t_0+\xi,\xi)|\, d\xi. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
i_{1\,\theta} = \int\limits_0^{l_*/2} |\theta(\xi)|\,d\xi, \quad j_{1\,\theta} = \int\limits_0^{l_*/2} \theta^2(\xi)\,d\xi, \quad c_{1\,\theta} = \int\limits_0^{l_*/2} c_1(\xi)\,|\theta(\xi)|\,d\xi, \\
d_{1\,\theta} = \int\limits_0^{l_*/2} (1+d_1(\xi))\,|\theta(\xi)|\,d\xi, \quad j_\varphi = \int\limits_{l_*/2}^{t_0+l_*/2} \varphi^2(\tau)\,d\tau, \quad j_\psi = \int\limits_{l_*/2}^{t_0+l_*/2} \psi^2(\tau)\,d\tau.
\end{gathered} \tag{3.23}$$

Учитывая (3.7) и (3.9), (3.11), оценим значение $b^2(t_0)$ в терминах (3.23):

$$b^2(t_0) \leqslant i_{1\theta}^2\,\varphi^2(t_0+l_*/2) + 2\,(j_{1\,\theta} + 2\,t_0\,c_{1\theta}^2)\,j_\varphi + 4\,t_0\,d_{1\theta}^2\,j_\psi. \tag{3.24}$$

Остается проинтегрировать (3.24) по t_0 и подставить полученный результат в (3.22):

$$\int\limits_0^T z_s^2(t_0,0)\,dt_0 \leqslant \frac{1}{2}\,\|\varphi'\|_*^2 - \langle\varphi',\psi\rangle_* + \frac{1}{2}\,\|\psi\|_*^2 + \Big(\frac{i_{1\theta}^2}{2} + j_{1\,\theta}\,T + c_{1\theta}^2\,T^2\Big)\|\varphi\|_*^2 + d_{1\theta}^2\,T^2\,\|\psi\|_*^2. \tag{3.25}$$

Для правого граничного интеграла справедлива аналогичная оценка

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^T z_s^2(t_0,l_*)\,dt_0 \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi'\|_*^2 + \langle\varphi',\psi\rangle_* + \frac{1}{2}\|\psi\|_*^2 + \Big(\frac{i_{2\theta}^2}{2} + j_{2\,\theta}T + c_{2\theta}^2T^2\Big)\|\varphi\|_*^2 + d_{2\theta}^2T^2\|\psi\|_*^2, \\
i_{2\theta} = \int\limits_{l_*/2}^{l_*} |\theta(\xi)|\,d\xi, \;\; j_{2\theta} = \int\limits_{l_*/2}^{l_*} \theta^2(\xi)\,d\xi, \;\; c_{2\theta} = \int\limits_{l_*/2}^{l_*} c_2(\xi)|\theta(\xi)|\,d\xi, \;\; d_{2\theta} = \int\limits_{l_*/2}^{l_*} (1+d_2(\xi))|\theta(\xi)|\,d\xi.
\end{gathered} \tag{3.26}$$

Первый этап доказательства теоремы завершается оценкой, сформированной из (3.5), (3.13), (3.14), (3.19), (3.20), (3.25), (3.26):

$$\|u\|_H^2 \leqslant K\left(\|\varphi'\|_*^2 + \|\psi\|_*^2\right) + K_\varphi\|\varphi\|_*^2 + K_\psi\|\psi\|_*^2\,. \tag{3.27}$$

Слагаемые $\|\varphi'\|_*^2$ и $\|\psi\|_*^2$ в (3.27) сгруппированы сознательно во избежание излишних загрублений на втором этапе доказательства. Присутствующая в (3.27) норма $\|\cdot\|_*$ определена в (3.13), а оценочные константы явно выражаются через исходные данные задачи:

$$\begin{gathered}
K = \beta_0\alpha(0) + \beta_1\alpha(l_*) + \frac{1-\beta_0}{2\alpha(0)}\big(1+c_1^2(0)T^2\big) + \frac{1-\beta_1}{2\alpha(l_*)}\big(1+c_2^2(l_*)T^2\big) \\
+ \Big| -\beta_0\alpha(0) - \frac{1-\beta_0}{2\alpha(0)} + \beta_1\alpha(l_*) + \frac{1-\beta_1}{2\alpha(l_*)}\Big|; \\
K_\varphi = \beta_0\alpha(0)\Big(\delta_0\Big(1 + c_1(0)T + \frac{c_1^2(0)\,T^2}{2}\Big) + i_{1\theta}^2 + 2\,j_{1\,\theta}\,T + 2\,c_{1\theta}^2\,T^2\Big) \\
+ \beta_1\alpha(l_*)\Big(\delta_1\Big(1 + c_2(l_*)T + \frac{c_2^2(l_*)\,T^2}{2}\Big) + i_{2\theta}^2 + 2\,j_{2\,\theta}\,T + 2\,c_{2\theta}^2\,T^2\Big); \\
K_\psi = \beta_0\alpha(0)\big(\delta_0\,\big(1+d_1(0)\big)^2 + 4\,d_{1\theta}^2\big)\frac{T^2}{2} + \beta_1\alpha(l_*)\big(\delta_1\,\big(1+d_2(l_*)\big)^2 + 4\,d_{2\theta}^2\big)\frac{T^2}{2}.
\end{gathered}$$

Приступим ко второму этапу доказательства, на котором правая часть (3.27) будет оцениваться сверху через нормы финального состояния и скорости (3.4). Для удобства введем сокращенные обозначения:

$$f_0(s) = \sqrt{\alpha(s)}\,f^0(x(s)), \quad f_1(s) = \sqrt{\alpha(s)}\,f^1(x(s)), \quad 0 < s < l_*. \tag{3.28}$$

На втором этапе техника оценивания будет мало отличаться от той, с помощью которой была получена оценка (3.27), поэтому дальнейшее изложение будет не столь детальным. В основе рассуждений снова будет находиться интегральное представление решения $z(t,s)$ задачи (3.1)–(3.4) формулой Даламбера

$$z(t,s) = \frac{1}{2}\big(f_0(s-t+T) + f_0(s+t-T)\big)$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{s-t+T}^{s+t-T} f_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_{T}^{t} d\tau \int\limits_{s-t+\tau}^{s+t-\tau} \theta(\xi)\,z(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (s,t)\in\Delta = \Delta_u\cup\Delta_d, \tag{3.29}$$

но на этот раз — в зоне Δ влияния данных типа Коши (3.4), (3.28), состоящей из двух характеристических треугольников $\Delta_u = \{0 \leqslant s \leqslant l_*,\, T \leqslant t \leqslant T + l_*/2 - |s - l_*/2|\}$ и $\Delta_d = \{0 \leqslant s \leqslant l_*,\, T - l_*/2 + |s - l_*/2| \leqslant t \leqslant T\}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $T \leqslant l_*/2$ и все интересующие нас значения $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $t \in [l_*/2,\, T + l_*/2]$, функций (3.6) принимаются в точках, не выходящих за пределы треугольника Δ_u. Для функции $\varphi(t) = z(t, l_*/2)$ справедлива оценка

$$\|\varphi\|_*^2 \leqslant M_0\,\|f_0\|^2_{L^2(0,l_*)} + M_1\,\|f_1\|^2_{L^2(0,l_*)}, \quad \|g\|^2_{L^2(0,l_*)} = \int\limits_0^{l_*} g^2(s)\,ds,$$
$$M_0 = 1 + \int\limits_T^{T+l_*/2} c_3^2(t)\,dt, \quad M_1 = l_*\int\limits_T^{T+l_*/2} (1 + d_3(t))^2\,dt,$$
$$c_3(t) = \int\limits_T^t \sqrt{\Theta_2(\tau)}\,\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_\tau^t \Theta_1(\eta)\,d\eta\right)d\tau, \quad d_3(t) = \frac{1}{2}\int\limits_T^t \Theta_1(\tau)\,\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_\tau^t \Theta_1(\eta)\,d\eta\right)d\tau,$$
$$\Theta_1(t) = \int\limits_{t-T}^{l_*-t+T} |\theta(s)|\,ds, \quad \Theta_2(t) = \int\limits_{t-T}^{l_*-t+T} \theta^2(s)\,ds, \quad t \in [T,\, T + l_*/2]. \tag{3.30}$$

Сумму норм $\|\varphi'\|_*^2 + \|\psi\|_*^2$ оценим следующим образом:

$$\begin{gathered}\|\varphi'\|_*^2 + \|\psi\|_*^2 \leqslant \frac{3}{2}\left(\|f_0'\|^2_{L^2(0,l_*)} + N_0\,\|f_0\|^2_{L^2(0,l_*)} + N_1\,\|f_1\|^2_{L^2(0,l_*)}\right),\\ N_0 = J_\theta\left(\frac{3\,l_*}{4} + \int\limits_T^{T+l_*/2} dt \int\limits_T^t c_3^2(\tau)\,d\tau\right),\\ N_1 = 1 + J_\theta\, l_* \int\limits_T^{T+l_*/2} dt \int\limits_T^t \big(1 + d_3(\tau)\big)^2\,d\tau, \quad J_\theta = j_{1\,\theta} + j_{2\,\theta}.\end{gathered} \tag{3.31}$$

При оценивании нормы $\|\psi\|_*$ отдельно от $\|\varphi'\|_*$ нам не удалось добиться сколько-нибудь заметных уточнений, поэтому довольствуемся прямым следствием из (3.31):

$$\|\psi\|_*^2 \leqslant \frac{3}{2}\left(\|f_0'\|^2_{L^2(0,l_*)} + N_0\,\|f_0\|^2_{L^2(0,l_*)} + N_1\,\|f_1\|^2_{L^2(0,l_*)}\right). \tag{3.32}$$

Из (3.27), (3.30)–(3.32) извлекаем следующий результат:

$$\|u\|_H^2 \leqslant K'\,\|f_0'\|^2_{L^2} + (K'\,N_0 + K_\varphi M_0)\,\|f_0\|^2_{L^2} + (K'N_1 + K_\varphi M_1)\|f_1\|^2_{L^2}, \quad K' = \frac{3}{2}(K + K_\psi). \tag{3.33}$$

При переходе к исходным нормировкам (2.4), (2.5) учтем, что для функций $G(s) = \sqrt{\alpha(s)}\, g(x(s))$, связанных условием вида (3.28), выполняются соотношения

$$\begin{gathered}
\|G\|^2_{L^2(0,l_*)} = \int\limits_0^{l_*} \alpha(s)\, g^2(x(s))\, ds = \int\limits_0^{l} \rho(x)\, g^2(x)\, dx, \\
\|G'\|^2_{L^2(0,l_*)} = \int\limits_0^{l} \Big| \frac{d}{dx}\Big((k(x)\,\rho(x))^{1/4}\, g(x) \Big) \Big|^2 \sqrt{\frac{k(x)}{\rho(x)}}\, dx.
\end{gathered} \tag{3.34}$$

Из (3.33), (3.34) и (2.4), (2.5) выводится итоговая оценка на коротких временных промежутках $T \leqslant l_*/2$:

$$\|u\|^2_H \leqslant \mathcal{N}\, \|f\|^2_F, \quad \mathcal{N} = \max\{\, K',\ K'\, N_0 + K_\varphi\, M_0,\ K' N_1 + K_\varphi\, M_1\}. \tag{3.35}$$

Таким образом, при $T \leqslant l_*/2$ справедливость утверждения (2.7) теоремы установлена со значением оценочной константы $\nu = 1/\mathcal{N}$.

В случае $T > l_*/2$ в дополнение к (3.29)–(3.32) проводится аналогичное оценивание и в треугольнике Δ_d, симметричном треугольнику Δ_u (см. (3.29)), а затем обе оценки суммируются. При этом в (3.35) произойдет удвоение значения итоговой оценочной константы $\mathcal{N}$.

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Как видно из доказательства, значение постоянной ν явно выражается через исходные данные задачи управления. Для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $\rho(x) = 1,\ k(x) = 1,\ q(x) = 0$ имеем $l_* = l = T_*$, и конструкция ν заметно упрощается, особенно в случае комбинаций граничных управлений типа Дирихле и Неймана в любом сочетании, когда

$$\nu^{-1} = \mathcal{N} = \frac{3}{2}\Big(1 + \frac{\beta_0+\beta_1}{2} + \Big|\frac{\beta_0-\beta_1}{2}\Big|\Big) \ \text{при}\ \ 0 \leqslant T \leqslant \frac{l}{2}, \quad \nu^{-1} = 2\mathcal{N} \ \ \text{при}\ \ \frac{l}{2} < T \leqslant l.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин В.А., Моисеев Е.И.** Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 6. С. 89–114.
2. **Никитин А.А.** Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1773–1782.
3. **Lions J.-L.** Exact controllability, stabilization and pertubations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. Vol. 30, № 1. P. 1–68.
4. **Komornik V.** Exact controllability and stabilization. The multiplier method. Chichester: John Wiley and Sons; Paris: Masson, 1994. 156 c.
5. **Потапов М.М.** Приближенное решение задач Дирихле-управления для волнового уравнения в классах Соболева и двойственных к ним задач наблюдения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2191–2208.
6. **Потапов М.М., Дряженков А.А** Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Тр. МИАН. 2012. Т. 227. С. 215–229.
7. **Потапов М.М.** Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Докл. АН. 1999. Т. 365, № 5. С. 596–598.
8. **Ильин В.А.** Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1513–1528.
9. **Ильин В.А.** Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1670–1686.
10. **Чабакаури Г.Д.** Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 12. С. 1655–1663.

11. **Чабакаури Г.Д.** Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в случае ограниченной энергии // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 2. С. 277–284.
12. **Знаменская Л.Н.** Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
13. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения / Ф.П. Васильев, М.А. Куржанский, М.М. Потапов, А.В. Разгулин. М.: Издат. отд. фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2010. 384 с.
14. **Lasiecka I., Lions J.L., Triggian R.** Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators // J. Math. Pures Appl. (9). 1986. Vol. 65, no. 2. P. 149–192.

Потапов Михаил Михайлович
д-р физ.-мат. наук, доцент
фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mpotapov@tochka.ru

Поступила 22.01.2013

Иванов Денис Александрович
студент
фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: deniaru91@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.958, 515.168

ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ, ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ДРУГИХ[1]

М. Ф. Прохорова

В статье исследуются уравнения вида $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ для неизвестной функции $u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$, где $D_t u = a_0(u,t) + \sum_{k=1}^{r} a_k(t,u)\partial_t^k u$; Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии X; ξ — гладкое векторное поле на X. А именно исследуются морфизмы из этого уравнения в рамках определенной ранее автором категории $\mathcal{PDE}$ дифференциальных уравнений в частных производных. Мы ограничиваемся морфизмами специального вида, так называемыми геометрическими морфизмами, задаваемыми отображениями X в другие гладкие многообразия (той же или меньшей размерности).

Показано, что отображение $f\colon X \to Y$ задает морфизм из уравнения $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ тогда и только тогда, когда для некоторых векторного поля Ξ и метрики на Y равенство $(\Delta + \xi\nabla)f^*v = f^*(\Delta + \Xi\nabla)v$ выполняется для любой гладкой функции $v\colon Y \to \mathbb{R}$. При этом фактор-уравнением будет $D_t v = \Delta v + \Xi\nabla v$ для неизвестной функции $v(t,y)$, $y \in Y$.

Также показано, что если отображение $f\colon X \to Y$ является локально тривиальным расслоением, то f задает морфизм из уравнения $D_t u = \Delta u$ тогда и только тогда, когда слои f параллельны и для любой кривой γ на Y коэффициент расширения слоя при переносе вдоль горизонтального поднятия γ на X зависит только от γ.

Ключевые слова: категория дифференциальных уравнений в частных производных; уравнение реакции-диффузии; уравнение теплопроводности; волновое уравнение.

M. F. Prokhorova. Factorization of the reaction–diffusion equation, the wave equation, and other equations.

We investigate equations of the form $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ for an unknown function $u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$, where $D_t u = a_0(u,t) + \sum_{k=1}^{r} a_k(t,u)\partial_t^k u$, Δ is the Laplace–Beltrami operator on a Riemannian manifold X, and ξ is a smooth vector field on X. More exactly, we study morphisms from this equation within the category $\mathcal{PDE}$ of partial differential equations, which was introduced by the author earlier. We restrict ourselves to morphisms of a special form — the so-called *geometric morphisms*, which are given by mappings of X to other smooth manifolds (of the same or smaller dimension).

It is shown that a mapping $f\colon X \to Y$ defines a morphism from the equation $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ if and only if, for some vector field Ξ and a metric on Y, the equality $(\Delta + \xi\nabla)f^*v = f^*(\Delta + \Xi\nabla)v$ holds for any smooth function $v\colon Y \to \mathbb{R}$. In this case, the quotient equation is $D_t v = \Delta v + \Xi\nabla v$ for the unknown function $v(t,y)$, $y \in Y$.

It is also shown that, if a mapping $f\colon X \to Y$ is a locally trivial fiber bundle, then f defines a morphism from the equation $D_t u = \Delta u$ if and only if fibers of f are parallel and, for any path γ on Y, the expansion factor of a fiber transferred along the horizontal lift γ on X depends on γ only.

Keywords: category of partial differential equations, reaction–diffusion equation, heat equation, wave equation.

Введение

В статье [1] автором была определена категория $\mathcal{PDE}$ дифференциальных уравнений в частных производных. В разд. 1 будет дано строгое определение этой категории; наивно говоря, ее объектами являются дифференциальные уравнения в частных производных, а морфизмами из уравнения E в уравнение E' — такие отображения из пространства N зависимых и независимых переменных E в пространство N' зависимых и независимых переменных E', что подмногообразие $\Gamma \subset N'$ является графиком решения E' тогда и только тогда, когда его прообраз $F^{-1}(\Gamma)$ является графиком решения E. Такое уравнение E' мы будем называть *фактор-уравнением* для E.

[1]Работа выполнена при поддержке программы отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003).

Частным случаем морфизма из E является факторизация по группе симметрий уравнения E. А именно если G — группа преобразований N, оставляющая инвариантным уравнение E, и фактор-отображение $N \to N/G$ является локально тривиальным расслоением, то это отображение задает морфизм из E в уравнение E/G, которое описывает решения E, инвариантные относительно G. Группы симметрий дифференциальных уравнений широко используются для построения частных решений, известных как инвариантные и частично инвариантные решения. Однако запас морфизмов в категории $\mathcal{PDE}$ в общем случае существенно богаче запаса факторизаций по группам симметрий [1;2], что позволяет использовать эти морфизмы для нахождения либо качественного исследования новых классов решений дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, при исследовании внутренней структуры конкретных подкатегорий $\mathcal{PDE}$ возникает естественная классификация уравнений данной подкатегории (см., например, классификацию параболических уравнений второго порядка в [1]).

В данной статье исследуются морфизмы категории $\mathcal{PDE}$ из уравнений вида

$$D_t u = \Delta u + L_\xi u, \tag{0.1}$$

а также более узкого класса уравнений вида

$$D_t u = \Delta u, \tag{0.2}$$

где D_t — дифференциальный оператор

$$D_t u = a_0(t,u) + \sum_{k=1}^{r} a_k(t,u)\partial_t^k u;$$

$r \geq 0$ (при $r = 0$ мы полагаем $D_t u = a_0(t,u)$); $a_k(t,u)$ — непрерывные вещественнозначные функции такие, что для любой пары (t,u) по крайней мере один из коэффициентов $a_k(t,u)$ не обращается в ноль. Здесь Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии X: $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, ξ — гладкое векторное поле на X, $L_\xi u$ — производная функции u вдоль ξ.

Частными случаями уравнения (0.1) являются уравнение реакции-диффузии $u_t = a(u)(\Delta u + L_\xi u) + b(u)$, нелинейное уравнение теплопроводности $u_t = a(u)\Delta u$, волновое уравнение $u_{tt} = a(u)\Delta u$, эллиптическое уравнение $\Delta u = b(u)$ и мн. др.

Вообще говоря, морфизмы из уравнения (0.1) задаются отображениями $F\colon N \to N'$ (где $N = \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}$, а N' — произвольное гладкое многообразие), удовлетворяющими дополнительным условиям (определению морфизма). Но в данной статье мы ограничимся рассмотрением более узкого класса отображений, а именно морфизмов вида

$$F = (\mathrm{id}, f, \mathrm{id})\colon (t,x,u) \mapsto (t, f(x), u), \tag{0.3}$$

задаваемых гладким отображением $f\colon X \to Y$, где Y — произвольное гладкое многообразие, а $N' = \mathbb{R} \times Y \times \mathbb{R}$. Для краткости морфизмы категории $\mathcal{PDE}$ из уравнений (0.1) и (0.2), удовлетворяющие условию (0.3), мы будем в данной статье называть *геометрическими морфизмами*. Заметим, что по определению морфизма в категории $\mathcal{PDE}$ f должно быть сюръективной субмерсией.

Далее будет показано, в частности, что для каждого геометрического морфизма из уравнения (0.1) соответствующее фактор-уравнение (для неизвестной функции $v\colon \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$) имеет вид

$$D_t v = \Delta_Y v + L_\Xi v \tag{0.4}$$

с тем же самым оператором D_t, где Δ_Y — оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии Y, Ξ — гладкое векторное поле на Y. По определению морфизма в категории $\mathcal{PDE}$ каждому решению $v(t,y)$ уравнения (0.4) соответствует решение $u(t,x) = v(t, f(x))$ уравнения (0.1), и наоборот, если решение уравнения (0.1) может быть представлено в виде $u(t,x) = v(t, f(x))$ для некоторой функции $v(t,y)$, то $v(t,y)$ является решением уравнения (0.4).

Полученное в данной статье общее описание геометрических морфизмов из уравнения (0.1) позволяет проводить их дальнейшее, более детальное, исследование, что будет сделано в следующей статье.

В оправдание ограничения (0.3) можно сказать следующее. С одной стороны, этот класс морфизмов — достаточно большой, и для многих целей достаточно ограничиться его рассмотрением. В частности, на его примере можно хорошо увидеть взаимоотношения между морфизмами в $\mathcal{PDE}$ и факторизациями исходного уравнения по группам симметрий. С другой стороны, в [3] показано, что для коэффициента $a(u)$ достаточно общего вида любой морфизм из уравнения $u_t = a(u)(\Delta u + L_\xi u) + b(u)$ в рамках определенной там категории $\mathcal{PE}$ параболических уравнений может быть приведен к виду (0.3) биективной заменой переменных в фактор-уравнении.

1. Категория $\mathcal{PDE}$

Напомним вначале некоторые определения. Пусть N — гладкое многообразие, d, s — натуральные числа, $s < \dim N$. *Расслоением d-струй* (подмногообразий коразмерности s) $\pi^d\colon J^d_s(N) \to N$ называется расслоение со слоем $J^d_s(N)\big|_x$ над точкой $x \in N$, где $J^d_s(N)\big|_x$ — множество классов эквивалентности гладких подмногообразий L коразмерности s в N, проходящих через x, с отношением эквивалентности — касанием d-го порядка в точке x. По определению *d-струя* гладкого подмногообразия $L \subset N$ в точке $x \in L$ — это класс эквивалентности из $J^d_s(N)\big|_x$, представленный L. Отображение *продолжения* $j^d_L\colon L \to J^d_s(N)$ переводит точку $x \in L$ в d-струю L в x. Под *дифференциальным уравнением d-го порядка* мы будем понимать произвольное подмножество E пространства струй $J^d_s(N)$. Гладкое подмногообразие L коразмерности s в N называется *решением* E, если образ $j^d_L(L)$ его d-го продолжения содержится в E.

Данное здесь определение дифференциального уравнения является очень общим; в большинстве приложений возникают уравнения “классического” вида, когда E является замкнутым подмножеством (или даже подмногообразием) пространства $J^d(M;S)$ d-струй гладких отображений из M в S. Если $E \subset J^d(M;S)$ — такое классическое дифференциальное уравнение, то его *расширенной версией* называется замыкание E в $J^d_s(M \times S)$, $s = \dim S$ [4]. Здесь $J^d(M;S)$ отождествлено с открытым подмножеством в $J^d_s(M \times S)$, состоящим из d-струй графиков всевозможных гладких отображений из M в S. Очевидно, гладкое отображение $u\colon M \to S$ является решением классического уравнения E тогда и только тогда, когда его график является решением расширенной версии E. Однако расширенная версия E допускает также и многозначные решения, и решения с бесконечными производными (подробности см. в [4]). Далее, когда мы будем говорить о морфизмах из конкретного уравнения классического вида (например, уравнения (0.1) или (0.2)), это всегда будет подразумевать морфизмы из его расширенной версии, т. е. замыкания соответствующего множества $E \subset J^d(M;S)$ в $J^d_s(M \times S)$.

Теперь мы можем сформулировать определение категории $\mathcal{PDE}$, данное в [1].

Для произвольного отображения $F\colon N \to N'$ подмножество $L \subset N$ назовем *F-проектируемым*, если $L = F^{-1}(F(L))$.

Пусть N, N' — гладкие подмногообразия, $F\colon N \to N'$ — сюръективная субмерсия. *Расслоением F-проектируемых струй* $J^d_{s,F}(N)$ называется подмногообразие $J^d_s(N)$, состоящее из d-струй всевозможных F-проектируемых подмногообразий N коразмерности s, с индуцированной структурой расслоения над N.

Имеется естественный изоморфизм расслоений $J^d_{s,F}(N)$ и $F^*J^d_s(N')$, где $F^*J^d_s(N') = J^d_s(N') \times_{N'} N$ — пуллбэк $J^d_s(N')$ вдоль отображения F. Поэтому можно поднять F до отображения $F^d\colon J^d_{s,F}(N) \to J^d_s(N')$, являющегося изоморфизмом на слоях, следующим естественным образом (рис. 1). Пусть $\vartheta \in J^d_{s,F}(N)$.

1. Возьмем произвольное F-проектируемое многообразие $L \subset N$ такое, что его d-е продолжение L проходит через ϑ (иначе говоря, d-струя L в точке $\pi^d(\vartheta)$ есть ϑ).

$$\begin{tikzcd}
J^d_{s,F}(N) \arrow[r, "F^d"] \arrow[d, two heads, "\pi^d"] & J^d_s(N') \arrow[d, two heads, "\pi'^d"] \\
N \arrow[r, "F"] & N'
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, hook] & E \cap J^d_{s,F}(N) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & E' \arrow[d, hook] \\
J^d_s(N) \arrow[d, two heads, "\pi^d"] & J^d_{s,F}(N) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "F^d"] \arrow[d, two heads] & J^d_s(N') \arrow[d, two heads, "\pi'^d"] \\
N \arrow[r, equal] & N \arrow[r, two heads, "F"] & N'
\end{tikzcd}$$

Рис. 2. Допустимые отображения.

2. Сопоставим ϑ точку $\vartheta' \in J^d_s(N')$, где ϑ' — d-струя подмногообразия $L' = F(L) \subset N'$ в точке $F \circ \pi^d(\vartheta)$. (Для F-проектируемого гладкого подмногообразия $L \subset N$ его образ $F(L)$ всегда является гладким подмногообразием N'.)

О п р е д е л е н и е 1 [1, определение 1]. Пусть $F\colon N \to N'$ — гладкая сюръективная субмерсия. Подмножество $E \subset J^d_s(N)$ *допускает* F, если $E \cap J^d_{s,F}(N)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_{s,F}(N)$ (рис. 2). Эквивалентно $E \cap J^d_{s,F}(N)$ является прообразом $\left(F^d\right)^{-1}(E')$ некоторого подмножества $E' \subset J^d_s(N')$; это подмножество E' называется *F-проекцией E*.

О п р е д е л е н и е 2 [1, определение 2]. *Категорией дифференциальных уравнений в частных производных $\mathcal{PDE}$* называется категория, объектами которой являются пары (N, E), где N — гладкое многообразие, E — подмножество $J^d_s(N)$ для некоторых натуральных $d, s \geq 1$; морфизмами из (N, E) в (N', E') являются сюръективные субмерсии $F\colon N \to N'$, допускаемые E, такие, что E' является F-проекцией E. Композиция морфизмов определяется как композиция соответствующих отображений.

Заметим, что определенная здесь категория $\mathcal{PDE}$ принципиально отличается от категории нелинейных дифференциальных уравнений DE, определяемой в [5; 6], что следует иметь в виду во избежание путаницы. В упрощенном виде общее определение DE из [5; 6] может быть сформулировано следующим образом [7]: объектами DE являются бесконечномерные многообразия, снабженные вполне интегрируемым конечномерным распределением (в частности, бесконечно продолженные дифференциальные уравнения), а морфизмами — гладкие отображения, для которых образ распределения содержится в распределении на образе. Несколько упрощая, фактор-объектом в такой категории является уравнение в факторпространстве, описывающее образы (при проектировании в факторпространство) произвольных решений исходного уравнения; при этом подходе из каждого фактор-объекта мы получаем часть информации обо всех решениях исходного уравнения. В противоположность этому фактор-объект в категории $\mathcal{PDE}$ — это такое уравнение, что прообразы всех его решений являются решениями исходного; при этом из каждого фактор-объекта мы получаем полную информацию о некотором классе решений исходного уравнения.

2. Геометрические морфизмы

Теорема 1. *Пусть* X — *гладкое риманово многообразие,* Y — *гладкое многообразие,* $f\colon X \to Y$ — *сюръективная субмерсия,* ξ — *гладкое векторное поле на* X, $a_k(t,u)$ — *непрерывные функции такие, что для любой пары* (t,u) *по крайней мере один из коэффициентов* $a_k(t,u)$ *не обращается в ноль. Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1. *Отображение* (0.3) *является морфизмом категории* $\mathcal{PDE}$ *из уравнения* (0.1).

2. *Существуют такие векторное поле* Ξ *и риманова метрика на* Y, *что следующая диаграмма является коммутативной* (*рис.* 3):

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(Y) & \xrightarrow{v\mapsto \Delta v + L_\Xi v} & C^\infty(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^*} \\ C^\infty(X) & \xrightarrow{u\mapsto \Delta u + L_\xi u} & C^\infty(X) \end{array}$$

Рис. 3

При этом фактор-уравнение (*для неизвестной функции* $v\colon \mathbb{R}\times Y \to \mathbb{R}$) *будет иметь вид* (0.4)

$$D_t v = \Delta v + L_\Xi v$$

с тем же самым оператором D_t.

Здесь той же самой буквой $\Delta = \Delta_Y$ обозначен оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии Y.

З а м е ч а н и е. Если Y односвязно, то дифференциальная форма, двойственная векторному полю Ξ на римановом многообразии Y, точна, и фактор-уравнение (0.4) можно записать в виде

$$D_t v = \varphi^{-1}\operatorname{div}(\varphi\nabla v)$$

для некоторой гладкой функции $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}_+$ (см. также следствие 2).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующий общий факт. Пусть M, M', S — гладкие многообразия, $s = \dim S$, $N = M\times S$, $N' = M'\times S$, $\varphi\colon M \to M'$ — гладкая сюръективная субмерсия, $F = \varphi\times \mathrm{id}\colon N \to N'$. Напомним, что пространство $J^d(M;S)$ d-струй отображений из M в S отождествляется с открытым подмножеством в $J^d_s(N)$, состоящим из d-струй графиков всевозможных гладких отображений из M в S. Обозначим $J^d_F(M;S) = J^d(M;S)\cap J^d_{s,F}(N)$ множество d-струй F-проектируемых графиков отображений из M в S.

Лемма 1. *Пусть* E — *замкнутое подмножество* $J^d(M;S)$, $\overline{E}$ — *замыкание* E *в* $J^d_s(N)$. *Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1. $E\cap J^d_F(M;S)$ *является* F^d*-проектируемым подмножеством* $J^d_F(M;S)$.
2. $\overline{E}\cap J^d_{s,F}(N)$ *является* F^d*-проектируемым подмножеством* $J^d_{s,F}(N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения формул в пределах данного доказательства мы будем сокращенно записывать J вместо J^d_s и J^d, а также J_F вместо $J^d_{s,F}$ и J^d_F.

Заметим вначале, что $J_F(N)\cong F^*J(N')$, $J_F(M;S)\cong F^*J(M';S)$ как расслоения над N.

Обозначим $E_F = E\cap J_F(M;S) = E\cap J_F(N)$, $\overline{E}_F = \overline{E}\cap J_F(N)$. Подмножество $J_F(N)$ замкнуто в $J(N)$, поэтому $\overline{E}_F$ совпадает с замыканием E_F в $J_F(N)$.

Обозначим через Z_y слой $J(N')$ над точкой $y\in N'$, через U_y — слой $J(M';S)$ над y. Если на левой диаграмме рис. 4 сделать замену базу посредством включения $\{y\}\hookrightarrow N'$, мы получим правую диаграмму рис. 4, где $N_y = F^{-1}(y)$, $\overline{E}_{F,y} = \overline{E}_F\cap (F^d)^{-1}(Z_y)$, $E_{F,y} = E_F\cap (F^d)^{-1}(U_y)$.

$$
\begin{tikzcd}
E_F \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & J_F(M;S) \arrow[r] \arrow[d, hook] & J(M';S) \arrow[d, hook] \\
\overline{E}_F \arrow[r, hook] & J_F(N) \arrow[r, "F^d"] \arrow[d, "\pi^d"] & J(N') \arrow[d, "\pi'^d"] \\
& N \arrow[r, "F"] & N'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_{F,y} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & N_y \times U_y \arrow[r] \arrow[d, hook] & U_y \arrow[d, hook] \\
\overline{E}_{F,y} \arrow[r, hook] & N_y \times Z_y \arrow[r] \arrow[d] & Z_y \arrow[d] \\
& N_y \arrow[r] & \{y\}
\end{tikzcd}
$$

Рис. 4. Замена базы.

Z_y замкнут в $J(N')$, так что его прообраз $(F^d)^{-1}(Z_y)$ замкнут в $(F^d)^{-1}(J(N')) = J_F(N)$ и $\overline{E}_{F,y}$ совпадает с замыканием $E_{F,y}$ в $(F^d)^{-1}(Z_y) \cong N_y \times Z_y$. Таким образом, достаточно доказать, что для любой точки $y \in N'$ следующие два условия эквивалентны:

(1) $E_{F,y}$ имеет вид $N_y \times A$ для некоторого подмножества $A \subset U_y$;

(2) замыкание $E_{F,y}$ в $N_y \times Z_y$ имеет вид $N_y \times B$ для некоторого подмножества $B \subset Z_y$.

Предположим, что $E_{F,y} = N_y \times A$; тогда, очевидно, $\overline{E}_{F,y} = N_y \times B$, где B — замыкание A в Z_y. Пусть, наоборот, $\overline{E}_{F,y} = N_y \times B$. Тогда $E_{F,y} = (N_y \times U_y) \cap \overline{E}_{F,y} = N_y \times (B \cap U_y)$, так как $E_{F,y}$ замкнуто в $N_y \times U_y$ (поскольку E замкнуто в $J(M;S)$ по условию леммы). Таким образом, условия (1) и (2) эквивалентны, что завершает доказательство леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. В нашей ситуации $M = \mathbb{R} \times X$, $M' = \mathbb{R} \times Y$, $\varphi = \mathrm{id} \times f$, $S = \mathbb{R}$, $d = \max(2, r)$, уравнение (0.1) задает замкнутое подмножество E в $J^d(M;\mathbb{R})$. По определению отображение (0.3) задает морфизм категории $\mathcal{PDE}$ из “классического” уравнения E, если $\overline{E} \cap J^d_{s,F}(N)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_{s,F}(N)$. По лемме 1 это условие эквивалентно тому, что $E \cap J^d_F(M;S)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_F(M;S)$.

Импликация $1 \Rightarrow 2$. Пусть ϑ — произвольная точка из $E \cap J^d_F(M;\mathbb{R})$, $\pi_d(\vartheta) = (t,x,u)$, $f(x) = y$. Возьмем функцию $\tilde{v}\colon M' \to \mathbb{R}$, d-струя которой в точке (t,y) совпадает с $F^d(\vartheta) \in J^d(M';\mathbb{R})$; тогда d-струя функции $\tilde{u} = \varphi^*\tilde{v}$ в точке (t,x) совпадает с ϑ. Так как ϑ лежит в E, то значение выражения

$$D_t\tilde{u} - \Delta\tilde{u} - L_\xi\tilde{u} \tag{2.1}$$

в точке (t,x) обращается в ноль.

Пусть V — карта Y, содержащая точку y, (y^i) — локальные координаты на V, отображение f в этих координатах записывается как $f(x) = \bigl(f^1(x), \dots, f^m(x)\bigr)$ для $x \in f^{-1}(V)$, $m = \dim Y$. Выражая значение (2.1) в точке (t,x) через d-струю $\tilde{v}$ в точке (t,y), получаем в координатной записи

$$a_0(t,u) + \sum_{k=1}^{r} a_k(t,u) v_{\underbrace{t..t}_{k}} - \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(x) v_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \zeta^i(x) v_i = 0, \tag{2.2}$$

где

$$v_i = \partial_i\tilde{v}(t,y), \quad v_{ij} = \partial_i\partial_j\tilde{v}(t,y), \quad v_{\underbrace{t..t}_{k}} = \partial_t^k\tilde{v}(t,y)$$

обозначают компоненты d-струи функции $\tilde{v}$ в точке (t,y), ∂_i — частная производная по y^i, а функции $g^{ij}, \zeta^i\colon f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ определены формулами $g^{ij} = \langle \mathrm{d}f^i, \mathrm{d}f^j \rangle$, $\zeta^i = \Delta f^i + L_\xi f^i$.

При фиксированных t, x, u уравнение (2.2) задает подмножество $Q(t,x,u)$ слоя $J^d(\mathbb{R}\times V;\mathbb{R})$ над (t,y,u). По определению F^d-проектируемость $E \cap J^d_F(\mathbb{R} \times f^{-1}(V);\mathbb{R})$ эквивалентна тому, что для всех $y \in V$, $t, u \in \mathbb{R}$ множество $Q(t,x,u) = E' \cap J^d(\mathbb{R} \times V;\mathbb{R})_{(t,y,u)}$ не зависит от выбора точки $x \in f^{-1}(y)$. Так как по условию теоремы хотя бы одно из значений $a_k(t,u)$ не обращается в ноль, последнее условие эквивалентно f-проектируемости с $f^{-1}(V)$ на V функций g^{ij} и ζ^i для всех $i,j=1\dots m$. Иначе говоря,

$$\begin{cases} \left\langle \mathrm{d}f^i, \mathrm{d}f^j \right\rangle_x = g^{ij}(f(x)), \\ \left(\Delta f^i + L_\xi f^i\right)_x = \zeta^i(f(x)), \end{cases} \tag{2.3}$$

для некоторых функций g^{ij}, ζ^i на V (для удобства мы оставили прежние обозначения для этих новых функций). Форма g^{ij} положительно определена, так что она задает риманову метрику на V. Отсюда и из (2.3) для произвольной функции $w\colon V \to \mathbb{R}$ получаем

$$\Delta(f^*w) + L_\xi(f^*w) = f^*\left(\sum_{i,j=1}^m g^{ij}w_{ij} + \sum_{i=1}^m \zeta^i w_i\right) = f^*\left(\Delta w + L_\Xi w\right), \tag{2.4}$$

где оператор Лапласа — Бельтрами на V берется относительно римановой метрики $g=(g^{ij})$, а векторное поле Ξ на V определяется формулой

$$\Xi^i = \zeta^i - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\right), \quad |g| = |\det(g_{ij})|.$$

Выберем покрытие Y картами, диффеоморфными $\mathbb{R}^m$. При замене координат $\Xi^i(y)$ и $g^{ij}(y)$ ведут себя как сечения TY и симметричного квадрата TY соответственно, так что глобально при склейке карт они задают векторное поле Ξ и риманову метрику g на Y. В силу (2.4) для произвольной функции $w\colon Y\to\mathbb{R}$ тождество $\Delta(f^*w)+L_\xi(f^*w) = f^*\left(\Delta w + L_\Xi w\right)$ выполняется на каждой карте, так что оно выполняется и глобально на Y. Это доказывает импликацию $(1 \Rightarrow 2)$ в условии теоремы 1.

Для доказательства импликации $(2 \Rightarrow 1)$ достаточно повторить рассуждения в обратном направлении. $\square$

3. Факторизация с понижением размерности

Пусть X — гладкое риманово многообразие, Y — гладкое многообразие, $f\colon X\to Y$ — сюръективная субмерсия. Положим $n=\dim X$, $m=\dim Y$, $k=n-m$. Вообще говоря, $n\geq m$; мы будем рассматривать, начиная с этого места, случай, когда $n>m$. Тогда слои f (прообразы $f^{-1}(y)$, $y\in Y$) являются гладкими подмногообразиями X размерности $k>0$ [8].

1-форму на X будем называть горизонтальной, если она имеет нулевое ограничение на любой слой. Эквивалентно 1-форма называется горизонтальной, если она лежит в подрасслоении f^*T^*Y расслоения T^*X. Аналогично s-форму на X назовем горизонтальной, если она лежит в подрасслоении $f^*\Lambda^sT^*Y$ расслоения Λ^sT^*X. Здесь Λ^sT^*X — расслоение дифференциальных s-форм над X.

Касательное расслоение TX расщепляется в прямую сумму $TX = T_vX + T_hX$, где вертикальное расслоение $T_vX = \{\eta\in TX\colon f_*\eta = 0\}$ состоит из векторов, касательных к слоям, а горизонтальное расслоение T_hX — из векторов, ортогональных слоям. Для произвольного векторного поля η на Y обозначим $f^h\eta$ его горизонтальное поднятие на X (т. е. векторное поле на X, ортогональное слоям f и проектирующееся в η).

Рассмотрим одномерное векторное расслоение $\det T_vX = \Lambda^kT_vX$. Оно является подрасслоением расслоения Λ^kTX, так что для сечения V расслоения $\det T_vX$ определена производная Ли $L_\zeta V$ в направлении произвольного векторного поля ζ на X. Риманова структура на X индуцирует риманову структуру (скалярное произведение в слоях) на расслоениях Λ^iTX, и в частности риманову структуру на $\det T_vX$.

Лемма 2. *Существует и единственна горизонтальная 1-форма α на X такая, что*

$$L_{\eta'}V = (\alpha,\eta')V \tag{3.1}$$

для произвольного векторного поля η на Y, его горизонтального поднятия $\eta' = f^h\eta$ и для (локального) сечения V расслоения $\det T_vX$ такого, что $\langle V, V\rangle = 1$.

Мы будем называть форму α *коэффициентом расширения слоя при переносе в горизонтальном направлении.*

Доказательство. Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов X, порождаемая векторным полем η', переводит слои в слои. Поэтому при фиксированных сечениях η и V имеется однозначно определенная вещественнозначная функция $c\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $L_{\eta'}V = c(x)V$. Этот коэффициент пропорциональности $c(x)$ не зависит от V, так как локально поле V определено однозначно с точностью до знака, а при смене знака у V обе стороны последнего равенства меняют знак. Таким образом, функция $c(x)$ зависит как от параметра только от векторного поля η, $c = c(x;\eta)$, причем значение c в точке x зависит только от 1-струи η' в x, т. е. от 1-струи η в точке $f(x)$.

Зафиксируем теперь точку $y \in Y$ и ограничим $c(x;\eta)$ на слой $Z = f^{-1}(y) \subset X$. Мы получим $\mathbb{R}$-линейное отображение $c_y\colon T_yY \otimes_{\mathbb{R}} (O_y/\mathfrak{m}^2O_y) \to C^\infty(Z)$, сопоставляющее 1-струе поля η в точке y вещественнозначную функцию на Z. Здесь O_y — локальное кольцо ростков гладких функций на Y в точке y, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца O_y, состоящий из ростков функций, обращающихся в ноль в y.

Если $\eta(y) = 0$, то η' обращается в 0 на всем слое Z, поток вдоль η' оставляет этот слой неподвижным, так что $L_{\eta'}V\big|_x = 0$, и $c(x;\eta) = 0$ для всех $x \in Z$. Значит, ограничение c_y на $T_yY \otimes_{\mathbb{R}} (\mathfrak{m}O_y/\mathfrak{m}^2O_y)$ обращается в ноль. Это означает, что c_y пропускается через $T_yY \otimes_{\mathbb{R}} (O_y/\mathfrak{m}O_y) = T_yY \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = T_yY$, так что $c_y = h(x)(\beta, \eta(y))$ для некоторой гладкой функции $h\colon Z \to \mathbb{R}$ и $\beta \in T_y^*Y$. Иначе это равенство можно записать как $c_y = (\alpha_y(x), \eta'(x))$, где $\alpha_y = h \cdot f^*\beta$ — однозначно определенная горизонтальная форма над Z, т. е. сечение расслоения $T_h^*X\big|_Z$. Принимая во внимание, что точка y выбрана произвольно, мы получаем, что существует и единственно сечение α расслоения T_h^*X такое, что $c(x,\eta) = (\alpha(x), \eta'(x))$; что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Для сюръективной субмерсии $f : X \to Y$ отображение* (0.3) *является морфизмом из уравнения* (0.1) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия* (*для векторного поля Ξ и метрики на Y, определенных как в теореме* 1):

(*а*) $\langle f^*\omega, f^*\omega'\rangle = f^*\langle\omega,\omega'\rangle$ *для любых* $\omega, \omega' \in T^*Y$;

(*б*) $L_{\eta'}V = (-1)^k\left(\langle\xi,\eta'\rangle - \langle\Xi,\eta\rangle\right)V$ *для произвольного векторного поля η на Y, его горизонтального поднятия $\eta' = f^h\eta$ и для* (*локального*) *сечения V расслоения $\det T_vX$ такого, что $\langle V,V\rangle = 1$.*

Доказательство. Напомним, что евклидово скалярное произведение на конечномерном векторном пространстве U индуцирует скалярное произведение на внешних степенях Λ^iU, а также на U^* и Λ^iU^*, что, в свою очередь, определяет канонический изоморфизм между Λ^iU и Λ^iU^*. Мы будем обозначать этот изоморфизм волной над буквой, обозначающей поливектор/поликовектор, так что для любых $u \in \Lambda^iU$, $v \in \Lambda^iU^*$ выполняется $v(u) = \langle\widetilde{u}, v\rangle = \langle u, \widetilde{v}\rangle$, $\widetilde{v} \in \Lambda^iU$, $\widetilde{u} \in \Lambda^iU^*$. Если на U есть еще и ориентация, то определен оператор Ходжа $*\colon \Lambda^iU \to \Lambda^{\dim U - i}U$, причем для всех $u, v \in \Lambda^iU$ выполняется $\langle u,v\rangle = *(u \wedge *v)$.

Импликация $1 \Rightarrow 2$. Пусть $f : X \to Y$ задает морфизм из (0.1) в (0.4). По теореме 1 для любой функции $v\colon Y \to \mathbb{R}$ и $u = f^*v$ выполняется равенство

$$\Delta u + L_\xi u = f^*(\Delta v + L_\Xi v). \tag{3.2}$$

(*а*) Для $x \in X$, $y = f(x)$ и произвольной формы $\omega \in T^*Y$ рассмотрим функцию $q\colon Y \to \mathbb{R}$ такую, что $q|_y = 0$, $\mathrm{d}q|_y = \omega|_y$, и положим $v = q^2/2$. Тогда

$$\Delta v + L_\Xi v|_y = \langle\omega,\omega\rangle_y, \quad \Delta f^*v + L_\xi f^*v|_x = \langle f^*\omega, f^*\omega\rangle_x.$$

Так как точка x выбрана произвольно, из (3.2) получаем

$$\forall\omega\in T^*Y\quad f^*\langle\omega,\omega\rangle\equiv\langle f^*\omega,f^*\omega\rangle\,. \tag{3.3}$$

Переходя от квадратичных форм к их поляризациям, получаем условие (a) теоремы.

З а м е ч а н и е. В общем случае для дифференциальных операторов D на X и D' на Y тождество $Df^*=f^*D'$ влечет тождество $\sigma'=f_*\sigma$ для главных символов σ, σ' операторов D, D' соответственно (здесь $f_*\sigma$ определяется формулой $(f_*\sigma)(\omega)=\sigma(f^*\omega)$ для $\omega\in T^*Y$). В нашей ситуации $\sigma'(\omega)=\|\omega\|^2$, $\sigma(\omega')=\|\omega'\|^2$, и мы получаем равенство (3.3).

($б$) Рассмотрим вначале случай, когда оба многообразия X, Y ориентированы. Тогда оператор Лапласа — Бельтрами на функциях задается формулой $\Delta=*\mathrm{d}*\mathrm{d}$ [9].

Обозначим через $\rho=*1\in\Lambda^n(T^*X)$, $\sigma=*1\in\Lambda^m(T^*Y)$ формы объема на X, Y соответственно. Положим $\sigma'=f^*\sigma$, $\chi=*\sigma'$. В силу (3.3) $\langle\chi,\chi\rangle=\langle\sigma',\sigma'\rangle=1$, ограничение χ на каждый слой $f^{-1}(y)$ является формой объема на слое, и $\sigma'\wedge\chi=\rho$.

Применим к обеим сторонам тождества (3.2) оператор Ходжа и распишем подробно левую и правую стороны полученного равенства, учитывая, что для любой дифференциальной формы ω на Y выполняется равенство $*(f^*\omega)=f^*(*\omega)\wedge\chi$:

$$*\mathrm{d}u=*(f^*\mathrm{d}v)=f^*(*\mathrm{d}v)\wedge\chi,$$

$$*\left(\Delta u+L_\xi u\right)=\mathrm{d}*\mathrm{d}u+\tilde\xi\wedge*\mathrm{d}u=f^*(\mathrm{d}*\mathrm{d}v)\wedge\chi+(-1)^{m-1}f^*(*\mathrm{d}v)\wedge\mathrm{d}\chi+\tilde\xi\wedge f^*(*\mathrm{d}v)\wedge\chi,$$

$$*f^*\left(\Delta v+L_\Xi v\right)=f^*\left(*\Delta v+*(L_\Xi v)\right)\wedge\chi=f^*\left(\mathrm{d}*\mathrm{d}v+\tilde\Xi\wedge*\mathrm{d}v\right)\wedge\chi.$$

Приравнивая последние два выражения, находим, что форма

$$\omega=\mathrm{d}\chi+\left(\tilde\xi-f^*\tilde\Xi\right)\wedge\chi$$

удовлетворяет условию

$$\forall v\in C^\infty(Y)\quad f^*(*\mathrm{d}v)\wedge\omega=0.$$

Так как значение в фиксированной точке $x\in X$ произвольной горизонтальной $(m-1)$-формы может быть записано как значение в той же точке формы $f^*(*\mathrm{d}v)$ для подходящей функции $v\colon Y\to\mathbb{R}$, то внешнее произведение ω на любую горизонтальную $(m-1)$-форму на X равно нулю. Последнее условие можно также записать в следующем виде:

$$i_{\tilde\chi}\omega=0$$

для вертикального поливекторного поля $\tilde\chi\in\Lambda^k(T_vX)$, двойственного к χ.

Пусть теперь η — произвольное векторное поле на Y, η' — его поднятие до горизонтального векторного поля на X. В силу (3.1) единичный элемент объема слоя $V=\tilde\chi$ в точке $x\in X$ при сдвиге в направлении поля η' расширяется со скоростью (α,η'), т. е. $L_{\eta'}\tilde\chi=(\alpha,\eta')\tilde\chi$. Учитывая, что $(\chi,\tilde\chi)=1$, получаем $(\alpha,\eta')=\left(\chi,L_{\eta'}\tilde\chi\right)=-\left(L_{\eta'}\chi,\tilde\chi\right)=-\left(\mathrm{d}\left(i_{\eta'}\chi\right)+i_{\eta'}\mathrm{d}\chi,\tilde\chi\right)$. Но η' — горизонтальное векторное поле, а χ — вертикальная форма, так что $i_{\eta'}\chi=0$. Таким образом,

$$(\alpha,\eta')=-i_{\tilde\chi}i_{\eta'}\mathrm{d}\chi=(-1)^{k+1}i_{\eta'}i_{\tilde\chi}\mathrm{d}\chi=(-1)^k i_{\eta'}\left(\tilde\xi-f^*\tilde\Xi\right)=(-1)^k\left(\langle\xi,\eta'\rangle-\langle\Xi,\eta\rangle\right),$$

что завершает доказательство п. ($б$) в ориентируемом случае.

Вернемся теперь к общему случаю, когда X, Y не обязательно ориентируемы. Заметим, что как тождество (3.2), так и условие ($б$) теоремы локальны и не зависят от локального выбора ориентации. Отсюда следует, что условие ($б$) теоремы выполняется независимо от наличия ориентации на X, Y.

И м п л и к а ц и я (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что выполняются условия (a), ($б$) теоремы. Повторяя выкладки первой части доказательства теоремы в обратном направлении, мы получаем (3.2). По теореме 1 отсюда следует, что f задает морфизм из уравнения (0.1) в уравнение (0.4). $\square$

В случае, когда $\xi=0$, предыдущая теорема принимает следующий вид.

Теорема 3. *Для сюръективной субмерсии $f : X \to Y$ отображение* (0.3) *является морфизмом из уравнения* (0.2) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(*а*) $\langle f^*\omega, f^*\omega' \rangle = f^* \langle \omega, \omega' \rangle$ *для любых* $\omega, \omega' \in T^*Y$;

(*б*) $\alpha = f^*\beta$ *для некоторой* 1*-формы* β *на* Y, *т. е. коэффициент расширения слоя в направлении векторного поля* η' *не зависит от точки слоя.*

В этом случае фактор-уравнение будет иметь вид (0.4), *причем* $\tilde{\Xi} = (-1)^{k+1}\beta$.

4. Локально тривиальные расслоения

Далее мы дополнительно ограничим класс рассматриваемых морфизмов следующим условием:

проекция $f\colon X \to Y$ является локально тривиальным расслоением.

Тогда каждый кусочно-гладкий путь $\gamma\colon [0,1] \to Y$ задает диффеоморфизм Φ_γ слоя над началом пути $\gamma(0)$ в слой над концом пути $\gamma(1)$: точке $x \in f^{-1}(\gamma(0))$ ставится в соответствие конец горизонтальной кривой, проектирующейся в γ и начинающейся в x. Будем называть этот диффеоморфизм *переносом слоя вдоль* γ.

Пусть A, B — два замкнутых подмножества X. Будем говорить, что A и B параллельны, если $d(x, B)$ не зависит от выбора точки $x \in A$ и $d(y, A)$ не зависит от выбора точки $y \in B$. Здесь $d(x, B)$ определяется как точная нижняя грань расстояний $d(x, y)$ от x до $y \in B$. Если A, B параллельны, то хаусдорфово расстояние $d(A, B) = d(x, B) = d(y, A)$ для любых $x \in A$, $y \in B$.

Теорема 4. *Локально тривиальное расслоение* $f : X \to Y$ *задает морфизм из уравнения* (0.2) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(*а*) *любые два слоя расслоения* f *параллельны*;

(*б*) *переносы вдоль кусочно-гладких путей на* Y *пропорционально изменяют объем на слое* (*т. е. коэффициент расширения зависит лишь от пути и не зависит от выбора точки слоя*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что для локально тривиального расслоения f условия (*а*), (*б*) данной теоремы эквивалентны условиям (*а*), (*б*) теоремы 3.

Предположим, что f удовлетворяет условиям (*а*), (*б*) теоремы 3. Зафиксируем произвольные $y_0, y_1 \in Y$ и обозначим $Z_i = f^{-1}(y_i)$. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to Y$ — кусочно гладкая кривая в Y, соединяющая точки y_0 и y_1. Ее можно поднять до кусочно гладкой горизонтальной кривой $\gamma'\colon [0,1] \to X$ с началом в произвольной точке $x_0 \in Z_0$ и концом в Z_1. Из условия (*а*) теоремы 3 получаем

$$d(x_0, Z_1) \le l(\gamma') = \int\limits_0^1 \left|\gamma'_s\right| \mathrm{d}s = \int_0^1 |\gamma_s| \,\mathrm{d}s = l(\gamma).$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким кривым γ, получаем $d(x_0, Z_1) \le d(y_0, y_1)$. С другой стороны, для любой точки $x_1 \in Z_1$ и кусочно гладкой кривой $\beta\colon [0,1] \to X$, соединяюшей x_0 с x_1, выполняется

$$l(\beta) = \int_0^1 |\beta_s| \,\mathrm{d}s \ge \int\limits_0^1 |f_*\beta_s| \,\mathrm{d}s = l(f\beta) \ge d(y_0, y_1).$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким кривым β, получаем $d(x_0, x_1) \ge d(y_0, y_1)$. Таким образом, $d(x_0, Z_1) = d(y_0, y_1)$. Аналогично $d(x_1, Z_0) = d(y_1, y_0)$ для любой точки $x_1 \in Z_1$. Это доказывает параллельность слоев $Z_0 = f^{-1}(y_0)$ и $Z_1 = f^{-1}(y_1)$ для любых $y_0, y_1 \in Y$.

Интегрируя условие (*б*) теоремы 3, получаем, что перенос $\Phi_\gamma\colon Z_0 \to Z_1$ вдоль произвольной кусочно-гладкой кривой $\gamma\colon [0,1] \to Y$, $Z_i = f^{-1}(\gamma(i))$ изменяет все объемы в одно и то же количество раз:

$$\mathrm{volume}(\Phi_\gamma U) = \exp\left((-1)^{k+1}\int\limits_\gamma \tilde{\Xi}\right)\mathrm{volume}(U) \tag{4.1}$$

для любого измеримого $U \subset Z_0$.

Обратная импликация (от условий данной теоремы к условиям (*а*), (*б*) теоремы 3) достаточно очевидна. □

Следствие 1. *Пусть локальное расслоение* $f : X \to Y$ *задает геометрический морфизм из уравнения* (0.2) *в уравнение* (0.4). *Группа голономий расслоения* f *(для связности на* X*, задаваемой плоскостями, ортогональными слоям) сохраняет объем на слое тогда и только тогда, когда форма* $\tilde{\Xi}$ *точна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из тождества (4.1) следует, что группа голономий f сохраняет объем на слое тогда и только тогда, когда интеграл формы $\tilde{\Xi}$ по любой замкнутой кривой обращается в ноль. Последнее условие эквивалентно точности $\tilde{\Xi}$. □

Следствие 2. *Пусть локальное расслоение* $f : X \to Y$ *задает геометрический морфизм из уравнения* (0.2). *Если слой* f *имеет конечный объем (в частности, если слой компактен), то фактор-уравнение имеет вид* $D_t v = \varphi^{-1}\,\mathrm{div}(\varphi\nabla v)$ *для некоторой гладкой функции* $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если слой f имеет конечный объем, то переносы вдоль замкнутых путей на Y должны сохранять этот объем. По следствию 1 это означает, что $\tilde{\Xi} = \mathrm{d}\psi$ для некоторой гладкой функции $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$. Положим $\varphi = \exp(\psi)$; тогда $\Delta v + L_\Xi v = \varphi^{-1}\left(\varphi\Delta v + (\mathrm{d}\varphi, \nabla v)\right) = \varphi^{-1}\,\mathrm{div}(\varphi\nabla v)$ и уравнение (0.4) принимает нужный вид. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прохорова М.Ф.** Факторизация дифференциальных уравнений в частных производных: структура категории параболических уравнений [Препринт 10/2005]. СПб: ПОМИ, 2005. 24 с.
2. **Прохорова М.Ф.** Моделирование уравнения теплопроводности и задачи Стефана / ИММ УрО РАН. Деп. ВИНИТИ 11.02.00, № 347-В00. 66 с.
3. **Prokhorova M.F.** The structure of the category of parabolic equations. 2009. arXiv:math/0512094v5 [math.AP]. 33 p. URL: http://arxiv.org/pdf/math/0512094v5.pdf.
4. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Л.: Мир, 1989. 637 с.
5. **Виноградов А.М.** Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1980. Vol. 11. С. 89–134.
6. **Vinogradov A.M.** Category of nonlinear differential equations // Global Analysis — Studies and Applications I / eds. Yurii G. Borisovich, Yurii E. Gliklikh, A. M. Vershik. Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 77–102 (Lecture Notes in Math.; vol. 1108).
7. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов [и др.]. М.: Факториал, 1997. 464 с.
8. **Хирш М.** Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
9. **Уорнер Ф.** Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987. 302 с.

Прохорова Марина Файвушевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: pmf@imm.uran.ru

Поступила 26.05.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

ЗАДАЧА РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ: СЛУЧАЙ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ[1]

В. Л. Розенберг

Задача восстановления неизвестного детерминированного возмущения, характеризующего уровень случайных помех, в линейном стохастическом дифференциальном уравнении второго порядка исследуется с позиций подхода теории динамического обращения. Восстановление проводится на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций одной координаты случайного процесса. Рассматриваемая задача сводится к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют элементы ковариационной матрицы исходного процесса. Предлагается конечношаговый разрешающий алгоритм, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей. Получена оценка его точности относительно количества доступных измерению реализаций.

Ключевые слова: реконструкция возмущения, стохастическое дифференциальное уравнение, неполная входная информация.

V. L. Rozenberg. Problem of reconstructing a disturbance in a linear stochastic equation: the case of incomplete information.

The problem of reconstructing an unknown deterministic disturbance characterizing the level of random noise in a linear stochastic second-order equation is investigated based on the approach of dynamic inversion theory. The reconstruction is performed with the use of discrete information on a number of realizations of one coordinate of the stochastic process. The problem under consideration is reduced to an inverse problem for a system of ordinary differential equations describing the covariance matrix of the original process. A finite-step solving algorithm based on the method of auxiliary controlled models is suggested. Its convergence rate estimate with respect to the number of measured realizations is obtained.

Keywords: reconstruction of disturbance, stochastic differential equation, incomplete input information.

Введение

Задачи реконструкции неизвестных параметров управляемых систем в реальном времени возникают во многих научных и прикладных разработках (в механике полета и теории наведения, в финансовой и актуарной математике, при создании технологических и производственных процессов, в экологии, медицине и т.д.). Такие задачи, вкладывающиеся в проблематику обратных задач динамики управляемых систем, как правило, являются некорректными (в силу неединственности искомой характеристики и/или разрывности обратного оператора) и требуют применения регуляризирующих процедур. В настоящей статье используется подход, предложенный в работах Ю. С. Осипова и его коллег (см. [1–4] и библиографию в них) и получивший название метода динамического обращения. Он основан на сочетании принципов теории позиционного управления [5] и идей теории некорректных задач [6]. Фактически задача реконструкции сводится к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой, часто называемой моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени приближает неизвестный вход. Регуляризация рассматриваемой задачи осуществляется локально на этапе

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00110-а), программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” (проект 12-П-1-1019) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6512.2012.1).

выбора в каждый момент времени позиционного модельного управления. Метод динамического обращения был реализован для ряда задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциально-функциональными уравнениями, а также уравнениями и вариационными неравенствами с распределенными параметрами. При этом восстанавливались различные характеристики систем, а именно неизвестные точечные и распределенные возмущения, начальные и граничные данные, коэффициенты эллиптического оператора и т. д. Были созданы устойчивые алгоритмы, работающие для некоторых классов частично наблюдаемых систем.

Данная работа посвящена исследованию задачи реконструкции неизвестного детерминированного возмущения, характеризующего уровень случайных помех, в системе линейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций одной координаты случайного процесса. Подобные задачи возникают в практических ситуациях, когда по каким-либо причинам невозможно измерение всего фазового вектора. Отметим, что аналогичные обратные задачи для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных, системами с последействием были сформулированы и решены, например, в [7–9]. Что касается приложения теории динамического обращения к стохастическим объектам, то впервые задача позиционного моделирования стохастического управления в системе, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, была рассмотрена в [10]. Задача динамического восстановления неизвестной функции, входящей в детерминированный член нелинейного стохастического дифференциального уравнения Ито, при измерении всех координат состояния была рассмотрена в [11], а в условиях неполной информации — в [12]. Настоящая работа фактически продолжает исследования [13], где для линейного стохастического дифференциального уравнения решалась задача динамического восстановления возмущения, входящего в интеграл Ито, на основе измерения реализаций всего фазового вектора. Новизна состоит именно в неполноте входной информации.

1. Постановка задачи

Рассматривается система линейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$dX(t,\omega) = A(t)X(t,\omega)dt + B(t)d\xi(t,\omega) + f(t)dt, \quad X(0,\omega) = X_0. \tag{1.1}$$

Здесь $t \in T = [0,\vartheta]$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; X_0 — известный детерминированный или случайный (распределенный по нормальному закону) вектор начальных условий; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство [14]; $\xi(t,\omega)$ — стандартный винеровский процесс (т.е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{2\times 2}$)); $f(t)$ — непрерывная вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^2$; матричные функции $A(t)$ и $B(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^{2\times 2}$ имеют вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} u(t) & 0 \\ 0 & u(t) \end{pmatrix},$$

причем предполагается, что элементы $A(t)$ удовлетворяют условию Липшица, а функция $u(t)$, характеризующая диффузию процесса (амплитуду случайных помех) и играющая роль неизвестного входного воздействия, суммируема с квадратом, т.е. $u(\cdot) \in L_2(T)$, имеет ограниченную вариацию на T и принимает значения из заданного отрезка $S_u \in \mathbb{R}$.

Уравнение (1.1) является символической записью следующего интегрального тождества:

$$X(t,\omega) = X_0 + \int\limits_0^t \big(A(s)X(s,\omega) + f(s)\big)\,ds + \int\limits_0^t B(s)\,d\xi(s,\omega). \tag{1.2}$$

Последний интеграл в правой части равенства (1.2) является стохастическим и понимается в смысле Ито. Для любого $\omega \in \Omega$ сформулированная задача Коши имеет единственное решение и определяет соответствующую реализацию случайного процесса $X(t, \omega)$, $t \in T$. Решение уравнения (1.1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий интегральному тождеству (1.2) при любом t с вероятностью 1. При сделанных выше предположениях существует единственное решение, которое является нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [15].

Обсуждаемая задача состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые, моменты времени

$$\tau_i \in T, \quad \tau_i = i\delta, \quad \delta = \vartheta/l, \quad i \in [0:l],$$

поступает информация о некотором количестве N реализаций случайного процесса $X(\tau_i)$ (будем опускать символ ω в случаях, если речь идет о процессе, а не о его реализации), причем измерению доступна только одна координата, а именно x_1. Полагаем, что $l = l(N)$ и существует оценка d_{1i}^N дисперсии первой координаты $d_1(t) = M(x_1(t) - m_1(t))^2$ (где $m_1(t) = Mx_1(t)$, M — математическое ожидание) такая, что выполняется соотношение

$$P\left(\forall i \in [0:l(N)]\ \left|d_{1i}^N - d_1(\tau_i)\right| \le h(N)\right) = 1 - g(N), \tag{1.3}$$

причем $h(N) \to 0$, $g(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Стандартная процедура построения оценки d_{1i}^N допускает модификацию, обеспечивающую выполнение соотношения (1.3) и указанных сходимостей [13].

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестного входного воздействия $u(t)$, порождающего случайный процесс $X(t)$, по неточной дискретной информации о дисперсии первой координаты $x_1(t)$, причем отклонение приближения от $u(t)$ должно быть сколь угодно мало в метрике пространства $L_2(T)$ при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$. Отметим, что рассматриваемая задача является некорректной ввиду отсутствия непрерывности соответствующего обратного оператора [1].

Уравнения типа (1.1), (1.2) описывают простейшие линейные модели, например изменения численности двухвидовой биологической популяции в стохастической среде или динамики цен на нефтегазовых рынках при влиянии случайных факторов. Сформулированную обратную задачу можно трактовать как восстановление амплитуды случайных помех в условиях неполной информации, когда измерению доступна только одна координата процесса из двух.

2. Редукция задачи

Сведем задачу восстановления неизвестной функции в стохастическом уравнении к задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем обозначения для математического ожидания и ковариационной матрицы процесса: $m(t) = MX(t)$, $m_0 = MX_0$, $D(t) = M(X(t) - m(t))(X(t) - m(t))'$, $D_0 = M(X_0 - m_0)(X_0 - m_0)'$ (штрих означает транспонирование). Отметим, что в силу линейности исходной системы математическое ожидание $m(t)$ не зависит от неизвестной функции $u(t)$ и может быть найдено из уравнения $\dot{m}(t) = A(t)m(t) + f(t)$, $m(0) = m_0$, которое следует из (1.2) с учетом равенства нулю математического ожидания интеграла Ито. Тогда $m(t) = Z(t,0)m_0 + \int_0^t Z(t,s)f(s)ds$, где $Z(t,s)$ — матрица Коши уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Уравнение для вычисления ковариационной матрицы $D(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (так называемое уравнение метода моментов [16; 17]) записывается следующим образом:

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t) + D(t)A'(t) + B(t)B'(t), \quad D(0) = D_0. \tag{2.1}$$

В рассматриваемом случае с учетом симметричности матриц $D(t)$ и $B(t)B'(t)$, структуры матриц $A(t)$ и $B(t)$ уравнение (2.1) может быть переписано в виде системы трех (по количеству различных элементов в симметричных матрицах) уравнений следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{d}_1(t) = 2a_{11}(t)d_1(t) + 2a_{12}(t)d_2(t) + v(t),\\
&\dot{d}_2(t) = a_{21}(t)d_1(t) + \big(a_{11}(t) + a_{22}(t)\big)d_2(t) + a_{12}(t)d_3(t),\\
&\dot{d}_3(t) = 2a_{21}(t)d_2(t) + 2a_{22}(t)d_3(t) + v(t),\\
&d_1(0) = d_{10}, \quad d_2(0) = d_{20}, \quad d_3(0) = d_{30}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь элементы d_{11}, $d_{12} = d_{21}$ и d_{22} матрицы D обозначены соответственно через d_1, d_2 и d_3; функция $v(t) = u^2(t)$, очевидно, имеет ограниченную вариацию на T и принимает значения из некоторого отрезка $S_v \in \mathbb{R}_+$. В общем случае будем восстанавливать именно функцию $v(t)$. При дополнительных, достаточно естественных, ограничениях на реальную функцию $u(t)$ возможна и ее реконструкция. Решение системы (2.2) понимается в смысле Каратеодори.

Теперь для системы (2.2) можно переформулировать исходную задачу восстановления. По ходу развития процесса в дискретные моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l(N)$, $i \in [0 : l(N)]$, поступает информация, позволяющая оценить координату $d_1(\tau_i)$ в смысле (1.3). Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестной функции $v(t)$ по информации вида (1.3), причем отклонение приближения от $v(t)$ должно быть сколь угодно мало в метрике пространства $L_2(T)$ при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$. В такой формулировке задача соответствует задаче, рассмотренной, например, в [7;8]. В данной работе показано, что конечношаговый разрешающий алгоритм, предложенный в [2] для случая измерения всех координат фазового вектора в обыкновенном дифференциальном уравнении и распространенный в [7] на случай измерения части координат, применим к решению рассматриваемой задачи, поскольку допускает конструктивное согласование своих параметров с количеством доступных измерению реализаций исходного случайного процесса.

3. Алгоритм восстановления возмущения

Фактически приведенный ниже алгоритм является приложением вычислительной процедуры из [7] к системе (2.2). В начальный момент $\tau_0 = 0$ фиксируем значение N, определяем величины $l^N = l(N)$, $h^N = h(N)$ и $g^N = g(N)$ (см. (1.3)) и строим равномерное разбиение промежутка T с шагом $\delta^N = \vartheta/l^N$: $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta^N$, $i \in [0 : l^N]$. Динамика управляемой системы-модели определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
&\dot{w}_1(t) = \bar{v}_i^N,\\
&\dot{w}_2(t) = a_{21}(\tau_i)d_{1i}^N + \big(a_{11}(\tau_i) + a_{22}(\tau_i)\big)w_2(\tau_i) + a_{12}(\tau_i)w_3(\tau_i),\\
&\dot{w}_3(t) = -2a_{11}(\tau_i)d_{1i}^N + 2\big(a_{21}(\tau_i) - a_{12}(\tau_i)\big)w_2(\tau_i) + 2a_{22}(\tau_i)w_3(\tau_i) + \bar{v}_i^N,\\
&\dot{w}_4(t) = 2a_{11}(\tau_i)d_{1i}^N + 2a_{12}(\tau_i)w_2(\tau_i) + \hat{v}_i^N, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1],\\
&w_1(\tau_0) = d_{10}, \quad w_2(\tau_0) = d_{20}, \quad w_3(\tau_0) = d_{30}, \quad w_4(\tau_0) = d_{10}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Такая динамика выбирается из следующих соображений. Движение вспомогательной компоненты $w_1(t)$ при подходящем выборе первого модельного управления

$$\bar{v}^N(t) = \bar{v}_i^N, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1],$$

обеспечивает аппроксимацию координаты $d_1(t)$. Тогда, пользуясь неравенством (1.3) и формальным выражением $v(t)$ из первого уравнения системы (2.2) с заменой $\dot{d}_1(t)$ на $\bar{v}_i^N$ и соответствующей заменой аргументов, ожидаем близость $w_2(t)$ к $d_2(t)$ и $w_3(t)$ к $d_3(t)$, что, в свою очередь, делает возможным отслеживание компонентой $w_4(t)$ координаты $d_1(t)$ и выбор второго модельного управления

$$\hat{v}^N(t) = \hat{v}_i^N, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1], \tag{3.2}$$

приближающего в нужном смысле функцию $v(t)$. Очевидно, нетрудно записать дискретный аналог модели (3.1).

Работа алгоритма разбивается на l^N однотипных шагов. На i-м шаге, который выполняется на интервале $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, исходными данными для вычислений служат оценка d_{1i}^N и сформированные к этому моменту значения модельных переменных $w_j(\tau_i)$, $j \in [1 : 4]$.

Первое модельное управление находим из соотношения

$$\bar{v}_i^N = -\bar{K}\,\mathrm{sign}(w_1(\tau_i) - d_{1i}^N),$$

где $\bar{K}$ — константа, ограничивающая правую часть первого уравнения системы (2.2) (ее существование очевидно).

Второе управление в модели определяется следующим образом: $\hat{v}_i^N$ есть единственное решение экстремальной задачи

$$\min\left\{2(w_4(\tau_i) - d_{1i}^N)v + \alpha^N v^2 \colon v \in S_v\right\}, \tag{3.3}$$

где $\alpha^N = \alpha(h^N)$ — параметр регуляризации. В нашем случае управление (3.3) очевидным образом находится явно.

После вычисления $\bar{v}_i^N$ и $\hat{v}_i^N$ пересчитывается согласно дискретному аналогу (3.1) состояние модели $w_j(\tau_{i+1})$, $j \in [1 : 4]$. Процесс заканчивается в конечный момент времени ϑ.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполняются условия согласования параметров*

$$h^N \to 0, \quad g^N \to 0, \quad \delta^N \to 0, \quad \alpha^N \to 0, \quad \frac{\delta^N + h^N}{\alpha^N} \to 0 \quad \textit{при} \quad N \to \infty. \tag{3.4}$$

Тогда для модельного управления $\hat{v}^N(\cdot)$ (3.2), *формируемого согласно* (3.3), *имеет место сходимость*

$$P\left(\|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T)} \to 0\right) \to 1 \quad \textit{при} \quad N \to \infty. \tag{3.5}$$

При дополнительных предположениях выводится следующая оценка точности алгоритма относительно количества реализаций процесса, доступных измерению:

$$P\Big(\|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T)} \le C_1\Big(\frac{1}{N}\Big)^{2/13}\Big) = 1 - C_2\Big(\frac{1}{N}\Big)^{2/13}, \tag{3.6}$$

где C_1 *и* C_2 *— некоторые константы, не зависящие от* N *и* $v(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сходимость (3.5) непосредственно следует из приложения результатов работы [7] к системе (2.2) и из соотношения (1.3). Для вывода оценки (3.6) используем оценки, полученные для неизмеряемых координат исходной системы [7, с. 39]. В рассматриваемом случае они переписываются следующим образом:

$$P\left(\forall i \in [0 : l^N]\ |w_j(\tau_i) - d_j(\tau_i)| \le \bar{C}_1(h^N + \delta^N)\right) = 1 - g^N, \quad j = 2, 3. \tag{3.7}$$

Здесь и ниже через $\bar{C}_i$ будем обозначать вспомогательные константы, которые не зависят от оцениваемых величин и могут быть выписаны явно.

Соотношения (3.7) дают возможность считать, что с вероятностью $1 - g^N$ неточно измеряются (восстанавливаются) все координаты системы (2.2). Отсюда, переписывая полученную в [18] оценку скорости сходимости алгоритма восстановления для случая измерения всех координат фазового вектора в виде

$$\|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T)} \le \bar{C}_2\Big(\frac{(h^N + \delta^N)^2}{(\alpha^N)^2} + \alpha^N\Big)^{1/2}$$

и полагая $\delta^N \le \bar C_3 h^N$ и $\alpha^N = \bar C_4 (h^N)^{2/3}$ (см. [18, с. 76]), имеем
$$P\Big(\forall i \in [0:l^N]\ \|\hat v^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T)} \le \bar C_5 (h^N)^{1/3}\Big) = 1 - g^N. \tag{3.8}$$

В работе [13] было показано, что стандартная оценка d_{1i}^N дисперсии $d_1(\tau_i)$, построенная по N реализациям $x_1^1(\tau_i)$, $x_1^2(\tau_i)$, …, $x_1^N(\tau_i)$ нормально распределенной случайной величины $x_1(\tau_i)$ с математическим ожиданием $m_1(\tau_i)$ по правилу [19]
$$d_{1i}^N = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\big(x_1^r(\tau_i) - m_1(\tau_i)\big)^2,$$
обеспечивает выполнение свойства (1.3), причем соотношения, связывающие параметры (3.4), определяющие алгоритм восстановления и количество доступных измерению реализаций процесса N, получены в явном виде:
$$h^N = \bar C_6 \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta^N = \bar C_7 \left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha(1/2+3\epsilon)}, \quad g^N = \bar C_8 \left(\frac{1}{N}\right)^{(1-\alpha)(1/2+3\epsilon)}, \tag{3.9}$$
$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \ \text{ при } \ 0 < \alpha < 1.$$
Очевидно, что $h^N \to 0$, $\delta^N \to 0$, $g^N \to 0$ при $N \to \infty$.

Для выполнения неравенства $\delta^N \le \bar C_3 h^N$ достаточно положить
$$\frac{1}{2} - \epsilon = \alpha\Big(\frac{1}{2} + 3\epsilon\Big),$$
откуда
$$\epsilon = \frac{1-\alpha}{2(3\alpha+1)},$$
$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \ \text{ при } \ 0 < \alpha < 1.$$
Для найденного ϵ показатель степени величины $\dfrac{1}{N}$ в соотношениях (3.9) равен $\dfrac{2\alpha}{3\alpha+1}$ для h^N и δ^N, $\dfrac{2(1-\alpha)}{3\alpha+1}$ для g^N. Для получения оценки (3.6), учитывая формулу (3.8), полагаем
$$\frac{2\alpha}{3(3\alpha+1)} = \frac{2(1-\alpha)}{3\alpha+1},$$
откуда $\alpha = \dfrac{3}{4}$ и, следовательно, показатели степени величины $\dfrac{1}{N}$ в (3.6) равны $\dfrac{2}{13}$.

Теорема доказана.

Утверждение. *В случае, когда множество S_u отделено от нуля положительным числом, т. е. $\forall t \in T\ u(t) \ge \gamma > 0$, алгоритм* (3.1)–(3.3) *восстанавливает саму функцию $u(\cdot)$.*
Действительно, из сходимости (3.5) выводим
$$P\bigg(\int\limits_T \big(\hat v^N(s) - u^2(s)\big)^2\, ds \to 0\bigg) \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$
$$P\bigg(\int\limits_T \Big(\sqrt{\hat v^N(s)} - u(s)\Big)^2 \Big(\sqrt{\hat v^N(s)} + u(s)\Big)^2\, ds \to 0\bigg) \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$
$$P\bigg(\int\limits_T \Big(\sqrt{\hat v^N(s)} - u(s)\Big)^2\, ds \to 0\bigg) \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$
Из последнего соотношения следует, что возмущение $u(\cdot)$ аппроксимируется функцией $\sqrt{\hat v^N(\cdot)}$. Очевидно, порядок оценки точности алгоритма относительно величины $\dfrac{1}{N}$ (см. (3.6)) сохраняется.

4. Модельный пример

Рассмотрим систему, описывающую случайный процесс, который можно трактовать как модифицированный средне-возвратный процесс Орнштейна — Уленбека [15]:

$$\begin{gathered} dx_1(t) = \lambda\big(m_1 - x_1(t)\big)dt + \mu x_2(t)dt + u(t)d\xi_1(t), \\ dx_2(t) = \lambda\big(m_2 - x_2(t)\big)dt + \mu x_1(t)dt + u(t)d\xi_2(t), \\ t \in T = [0,\vartheta], \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь λ, m_1, m_2, μ, x_{10}, $x_{20} \in \mathbb{R}$ — заданные числовые параметры; $u(t)$ — неизвестное возмущение, $\forall t \in T$ $0 < \gamma_1 \le u(t) \le \gamma_2$; $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — стандартные скалярные винеровские процессы. Уравнения типа (4.1) используются, в частности, в некоторых простейших моделях, описывающих динамику цен на товарных рынках [20]. В таком случае величины x_1 и x_2 представляют текущие цены на два вида продукции; параметр $0 < \lambda \le 1$ обеспечивает выполнение условия ограниченности; параметры m_1 и m_2 определяют некоторые средние номинальные цены, стремление вернуться к которым "подсознательно" присутствует у рынка (например, $m_i = M\bar{x}_i(t)$, $\bar{x}_i(t)$ — предыстория процесса); коэффициент μ, $|\mu| \ll 1$, отражает влияние цены второго товара; неизвестная функция $u(t)$ описывает амплитуду случайных колебаний рыночных цен. Измерению доступны реализации компоненты $x_1(t)$. Отметим, что для уравнения (4.1) предложенный алгоритм восстанавливает саму функцию $u(t)$.

В вычислительном эксперименте были выбраны следующие значения параметров:

$$\lambda = 1, \quad m_1 = 10, \quad m_2 = 5, \quad \mu = 0.01, \quad x_{10} = 5, \quad x_{20} = 10, \quad T = [0,2],$$

$$u(t) = 2 + \sin 13t, \quad 0.5 \le u(t) \le 3.5.$$

Результаты восстановления функции $u(t)$ для различных наборов параметров алгоритма (3.1)–(3.3) согласуются с основным утверждением статьи (см. рис. 1, 2, где функция $u(t)$ изображена сплошной линией, а результат ее восстановления — пунктирной).

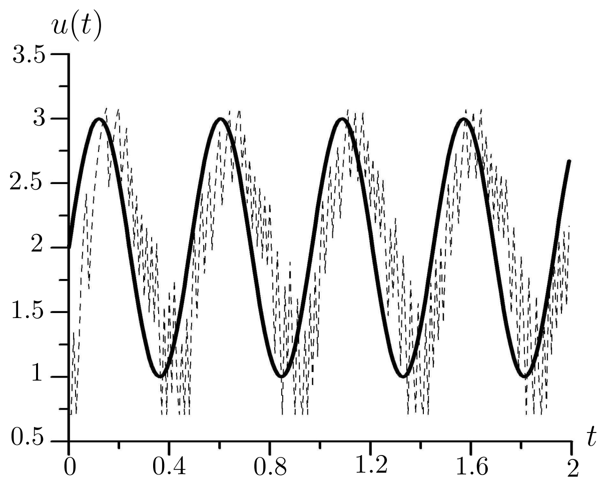


Рис. 1. $N = 1000$ (тогда h^N порядка 0.03), $\delta^N = 0.01$, $\alpha^N = 0.25$.

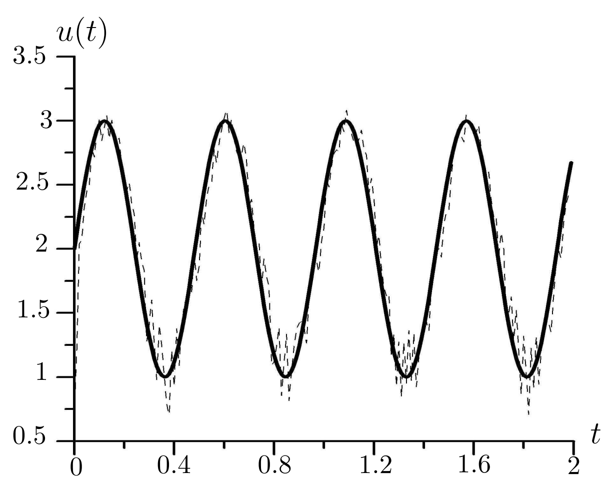


Рис. 2. $N = 100000$ (тогда h^N порядка 0.003), $\delta^N = 0.001$, $\alpha^N = 0.025$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.

3. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Наука, 1999. 238 с.
4. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.
6. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 142 с.
7. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некоторые задачи управления и устойчивости. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1989. С. 33–47.
8. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Некоторые алгоритмы восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
9. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 109–122.
10. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** Позиционное моделирование стохастического управления в динамических системах // Докл. Междунар. конф. по стохастической оптимизации. Киев, 1984. С. 43–45.
11. **Розенберг В.Л.** К задаче динамической реконструкции возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 10. С. 1806–1815.
12. **Розенберг В.Л.** Об одной задаче восстановления возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 91–106.
13. **Розенберг В.Л.** Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 76–87.
14. **Ширяев А.Н.** Вероятность, статистика, случайные процессы. Ч. I, II. М.: Изд-во МГУ, 1974. 628 с.
15. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
16. **Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.** Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978. 272 с.
17. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 642 с.
18. **Вдовин А.Ю.** К задаче восстановления возмущения в динамической системе: дис.... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1989. 117 с.
19. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк [и др.] М.: Наука, 1985. 640 с.
20. **Выгон Г.В.** Методы оценки нефтяных компаний в условиях неопределенности: дис.... канд. экон. наук. Москва, 2000. 114 с.

Розенберг Валерий Львович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: rozen@imm.uran.ru

Поступила 31.05.2013

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

О НЕУЛУЧШАЕМОСТИ СТРАТЕГИЙ С ПОЛНОЙ ПАМЯТЬЮ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА[1]

Д. А. Серков

В работе на основе методов теории гарантирующего позиционного управления исследуется задача минимизации риска — задача оптимального управления при наличии динамических помех в формализации на основе критерия Сэвиджа. Рассматриваемая управляемая система, описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Значения управляющих воздействий и помехи в каждый момент времени лежат в известных компактных множествах. Реализации помехи, кроме того, стеснены некоторым неизвестным функциональным ограничением из заданного семейства функциональных ограничений. Реализации управления формируются позиционными стратегиями с полной памятью. Показатель качества, определенный на движениях управляемой системы, предполагается непрерывным на соответствующем пространстве непрерывных функций. В работе приводятся новые условия, обеспечивающие свойство неулучшаемости класса позиционных стратегий с полной памятью при программных и при L_2-компактных ограничениях на действующую помеху.

Ключевые слова: стратегия с полной памятью, критерий Сэвиджа, функциональные ограничения на помеху.

D. A. Serkov. On the unimprovability of full memory strategies in the risk minimization problem.

Methods from the theory of guaranteeing positional control are used to study the risk minimization problem, i.e., the problem of optimal control under dynamic disturbances in a formalization based on the Savage criterion. A control system described by an ordinary differential equation is considered. The values of control actions and disturbance at each moment lie in known compact sets. Realizations of the disturbance are also subject to an unknown functional constraint from a given set of functional constraints. Realizations of the control are formed by full memory positional strategies. The quality functional, which is defined on motions of the control system, is assumed to be continuous on the corresponding space of continuous functions. New conditions that provide the unimprovability of the class of full memory positional strategies under program constraints and L_2-compact constraints on the disturbance are presented.

Keywords: full memory strategy, Savage criterion, functionally limited disturbance.

Введение

Работа примыкает к исследованиям по теории гарантирующего позиционного управления, проведенным в школе Н.Н Красовского (см. [1–3] и библ. в этих работах) и посвящена задаче управления с “нейтральной” помехой, т. е. с помехой, не связанной в своих проявлениях с действиями управляющей стороны и состоянием управляемой системы. В постановке задачи это свойство помехи выражается теми или иными дополнительными функциональными ограничениями.

Задачи управления при функциональных ограничениях на входную динамическую помеху имеют многочисленные содержательные интерпретации и исследовались в различных формализациях. Так в работах Н. Н. Красовского конструкция программного максимина (стохастического программного максимина) [2; 4] использует программные помехи (стохастические программные помехи) для нахождения оптимального гарантированного результата и оптимальных позиционных стратегий в задаче с “произвольными” помехами. В работах Н. Н. Барабановой и А. И. Субботина [5;6] проведено сравнение свойств линейных управляемых систем в случаях программных помех, помех, формируемых с помощью непрерывных позиционных

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), а также при поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00290).

стратегий, и помех, реализуемых посредством полунепрерывных сверху многозначных позиционных стратегий. В работе А. В. Кряжимского [7], в предположении, что помехи содержатся в заранее не определенном L_2-компакте, было установлено равенство оптимальных гарантированных результатов, достигаемых в классах позиционных стратегий с полной памятью и квазистратегий — неупреждающих программных откликов на реализации помех (см. [3, с. 24]). Для обозначения этого свойства позиционных стратегий с полной памятью в [7] был введен термин "неулучшаемость". В работе [13] продолжено изучение задачи в постановке [7] и получены новые условия неулучшаемости.

В данной работе при рассмотрении задачи управления за основу формализации был принят критерий Ниханса — Сэвиджа [8; 9]. Применение этого критерия наряду с использованием функционально ограниченных помех является еще одним из подходов к решению задач управления с "нейтральной" помехой. Показатель качества, заданный на траекториях управляемой системы, предполагается непрерывным в равномерной норме пространства непрерывных функций. С опорой на методы и результаты, которые представлены в отмеченных выше публикациях, а также на методы обратных задач динамики [10; 11] в работе показано, что для достаточно широкого семейства управляемых систем величина оптимального риска в классе стратегий с полной памятью совпадает с величиной оптимального риска в классе квазистратегий; полученный результат усиливает результаты [12], существенно расширяя класс управляемых систем, в которых имеет место неулучшаемость стратегий с полной памятью при данном критерии качества. В частности, при терминальном показателе качества этот класс теперь включает собственно линейные системы (см. [1]).

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T := [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

и начальным условием $x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n$, где ":=" означает "равно по определению". Реализации управления $u(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$ предполагаются измеримыми по Лебегу функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям

$$u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p, \quad v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q, \quad \tau \in T.$$

Множества $G_0, \mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ предполагаются компактными в соответствующих евклидовых пространствах. Через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обозначим, соответственно, множества всех таких реализаций управления и помехи.

В отношении функции $f(\cdot)$ будем предполагать, что она

— определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$;

— локально липшицева по второй переменной:

$$\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leqslant L_f(S)\|x_1 - x_2\|, \quad (\tau, x_1), (\tau, x_2) \in S, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q},$$

где S — любое ограниченное подмножество из $\mathbb{R}^{n+1}$;

— удовлетворяет условию подлинейного роста:

$$\|f(\tau, x, u, v)\| \leqslant K(1 + \|x\|), \quad (\tau, x, u, v) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}, \quad K \geqslant 0.$$

При указанных условиях решение в смысле Каратеодори задачи Коши (1.1) существует на всем интервале $[t_0, \vartheta]$ для любых реализациях управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ [14, гл. 2]. Для всех $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим $x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))$ решение в смысле Каратеодори задачи (1.1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$.

Выделим компактное в $\mathbb{R}^{n+1}$ подмножество G состояний системы (1.1), содержащее все движения, начинающиеся из G_0:

$$G := \mathbf{cl}_{T\times\mathbb{R}^n}\Big\{(\tau,x)\ \in\ T\times\mathbb{R}^n\ \mid\ x\ =\ x(\tau,t_0,z_0,u(\cdot),v(\cdot)), z_0\ \in\ G_0, u(\cdot)\ \in\ \mathcal{U}, v(\cdot)\ \in\ \mathcal{V}\Big\},$$

где для топологического пространства X запись $\mathbf{cl}_X\,Z$ обозначает замыкание множества $Z\subseteq X$ в топологии пространства X.

Для произвольных $(t_*,z_*)\in G$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ и $u(\cdot)\in\mathcal{U}$ введем следующие обозначения:

$$X(t_*,z_*,\mathcal{U},v(\cdot)) := \mathbf{cl}_{C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)}\big\{x(\cdot,t_*,z_*,u(\cdot),v(\cdot))\mid u(\cdot)\in\mathcal{U}\big\},$$

$$X(z_0,\mathcal{U},v(\cdot)) := X(t_0,z_0,\mathcal{U},v(\cdot)),\quad X(G_0) := \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\bigcup_{\substack{z_0\in G_0\\ v(\cdot)\in\mathcal{V}}} X(z_0,\mathcal{U},v(\cdot)),$$

где $C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ — множество всех непрерывных функций из $[t_*,\vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой равномерной сходимости.

Множество $\Delta := (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$, $\tau_0=t_0$, $\tau_{i-1}<\tau_i$, $\tau_{n_\Delta}=\vartheta$ назовем разбиением интервала T. Множество всех таких разбиений обозначим Δ_T. Для любых Δ и $t\in T$ определим $\mathbf{d}(\Delta) := \max\{\tau_i-\tau_{i-1}\mid i\in 1..n_\Delta\}$ и $i_t := \max\{i\in 0..n_\Delta\mid \tau_i\leqslant t\}$; таким образом, выполняется включение $t\in[\tau_{i_t},\tau_{i_t+1})$.

Следуя [7], назовем *обратной связью с полной памятью* на разбиении $\Delta=(\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ и обозначим $\mathbf{U}^\Delta := (\mathbf{U}_i^\Delta)_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ набор операторов вида $\mathbf{U}_i^\Delta\colon C([t_0,\tau_i],\mathbb{R}^n)\mapsto \mathcal{U}|_{[\tau_i,\tau_{i+1})}$, $i\in 0..(n_\Delta-1)$; здесь $\mathcal{U}|_{[\tau_i,\tau_{i+1})}$ обозначено множество сужений элементов из $\mathcal{U}$ на интервал $[\tau_i,\tau_{i+1})$. Назовем позиционной *стратегией управления с полной памятью* и обозначим $\mathbb{U}$ всякое семейство $(\mathbf{U}^\Delta)_{\Delta\in\Delta_T}$ обратных связей с полной памятью, заданных на всех разбиениях $\Delta\in\Delta_T$. Множество всех стратегий (управления) с полной памятью обозначим $\mathbf{S}$.

Определим *пошаговое движение* $x(\cdot) := x(\cdot,z_0,\mathbf{U}^\Delta,v(\cdot))\in X(z_0,\mathcal{U},v(\cdot))$ и *реализацию управления* $u(\cdot) := u(\cdot,z_0,\mathbf{U}^\Delta,v(\cdot))\in\mathcal{U}$, порожденные обратной связью $\mathbf{U}^\Delta=(\mathbf{U}_i^\Delta)_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ при помехе $v(\cdot)\in\mathcal{V}$ из начального состояния $z_0\in G_0$:

$$x(\cdot)=x(\cdot,t_0,z_0,u(\cdot),v(\cdot)),\quad u(t)=\mathbf{U}_i^\Delta(x(\cdot)|_{[t_0,\tau_i]}),\qquad t\in[\tau_i,\tau_{i+1}),\ i\in 0..(n_\Delta-1).$$

Пусть имеются $z_0\in G_0$, $\mathbb{U}\in\mathbf{S}$ и $\mathbf{V}\subseteq\mathcal{V}$. Определим пучок движений $X(z_0,\mathbb{U},\mathbf{V})$ как множество всех элементов $x(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности

$$\big\{(z_{0k},v_k(\cdot),\Delta_k,\mathbf{U}^{\Delta_k})\in G_0\times\mathbf{V}\times\Delta_T\times\mathbb{U}\mid k\in\mathbb{N}\big\},$$

удовлетворяющие условиям $\lim_{k\to\infty} z_{0k}=z_0$, $\lim_{k\to\infty}\mathbf{d}(\Delta_k)=0$,

$$\lim_{k\to\infty}\|x(\cdot)-x(\cdot,z_{0k},\mathbf{U}^{\Delta_k},v_k(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)}=0. \tag{1.2}$$

Определим пучок движений $X^+(z_0,\mathbb{U},\mathbf{V})$ как множество всех элементов $x(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности вида

$$\big\{(z_{0k},v_k(\cdot),\Delta_k,\mathbf{U}^{\Delta_k})\in G_0\times\mathcal{V}\times\Delta_T\times\mathbb{U}\mid k\in\mathbb{N}\big\},$$

удовлетворяющие условиям (1.2) и при некотором $v(\cdot)\in\mathbf{V}$ условию

$$\lim_{k\to\infty}\|v(\cdot)-v_k(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)}=0.$$

Качество движения будем оценивать функционалом $\gamma(\cdot)\colon C(T;\mathbb{R}^n)\mapsto\mathbb{R}$, непрерывным в равномерной норме пространства $C(T;\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим две формализации задачи управления на основе критерия Ниханса — Сэвиджа [8; 9] — при программных и при L_2-компактных ограничениях на помеху. Пусть заданы начальное состояние $z_0 \in G_0$, помеха $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и движение $x(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}^n)$. Этими данными определены величина $\rho(z_0, v(\cdot))$ *оптимального результата* при помехе $v(\cdot)$:

$$\rho(z_0, v(\cdot)) := \inf_{x'(\cdot)\in X(z_0,\mathcal{U},v(\cdot))} \gamma(x'(\cdot)), \tag{1.3}$$

и величина *сожаления при реализации движения* $x(\cdot)$ *и помехи* $v(\cdot)$:

$$\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) := \gamma(x(\cdot)) - \rho(x(t_0), v(\cdot)).$$

Исходя из величины сожаления при выборе стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и реализации помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$

$$\sup_{x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)),$$

определим значения *риска* $\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U})$ *стратегии* $\mathbb{U}$ *при программных ограничениях на помеху* и *оптимального риска* $\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0)$ *при программных ограничениях на помеху* для начального состояния z_0, соответственно:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \quad \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}).$$

Аналогично определим величины *риска* $\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U})$ *стратегии* $\mathbb{U}$ и *оптимального риска* $\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0)$ *при* L_2*-компактных ограничениях на помеху* для начального состояния z_0:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}) := \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X^{+}(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \quad \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0) := \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}).$$

Следуя [3, с.24], назовем *квазистратегией* всякое отображение $\alpha(\cdot)\colon \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}$, для которого при любых $\tau \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ таких, что $v(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = v'(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$ выполняется $\alpha(v(\cdot))|_{[t_0,\tau]} = \alpha(v'(\cdot))|_{[t_0,\tau]}$.

Обозначим $\mathbf{Q}$ — множество всех квазистратегий и определим риск квазистратегии $\alpha(\cdot)$ и оптимальный риск в классе $\mathbf{Q}$, соответственно, выражениями

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot)) := \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)), v(\cdot)), \quad \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) := \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathbf{Q}} \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot)).$$

З а м е ч а н и е 1. Проверяется, что определение оптимального риска в классе квазистратегий при L_2-компактных ограничениях на помехи приведет к той же величине: квазистратегии с точки зрения оптимального риска нечувствительны к функциональным ограничениям на помехи.

Утверждение [13, теорема 3.1]. *Для каждого* $z_0 \in G_0$ *справедливы соотношения*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0). \tag{1.4}$$

2. Оптимальная по риску стратегия

Поскольку наименьшая из записанных в (1.4) величин — это оптимальный риск в классе квазистратегий, особый интерес представляют те функциональные ограничения на помехи и те условия, при которых соответствующий оптимальный риск в классе позиционных стратегий с полной памятью совпадает с оптимальным риском в классе квазистратегий.

Далее определяется семейство стратегий $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ($\mathbb{U}_\varepsilon \in \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$) и приводятся условия на управляемую систему (1.1), при которых риск стратегий $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ при L_2-компактных ограничениях на помеху аппроксимирует величину оптимального риска в классе квазистратегий при $\varepsilon \to 0$.

В процессе формирования управления стратегия $\mathbb{U}_\varepsilon$ симулирует движение вспомогательной управляемой системы — y-модели. Для выбора помехи, действующей в y-модели, на малом завершающем участке предыдущего интервала разбиения в управлении исходной системы (1.1) используется специально выбранная серия тестовых управляющих воздействий. По наблюдениям за соответствующими реакциями управляемой системы решается обратная задача динамики [10; 11] — строится аппроксимация помехи, реально действующей в управляемой системе (1.1). Эта аппроксимация принимается в качестве помехи в y-модели. Управление в y-модели определяется как контруправление (см. [1]), экстремальное к некоторому множеству оптимальных траекторий системы, порожденному квазистратегиями. Выбранное таким образом управление используется и в "реальной" управляемой системе (1.1) на всем интервале разбиения, за исключением завершающего "тестового" участка. При подходящим образом согласованном уменьшении шага разбиения и меры "тестовых" участков движения y-модели будут сходиться в $C(T;\mathbb{R}^n)$ к оптимальным движениям, а движения исходной системы — к соответствующим движениям y-модели. Такая сходимость обеспечивает близкие к оптимальным значения критерия Сэвиджа на движениях управляемой системы и, как следствие, искомые свойства семейства стратегий $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Дадим формальное определение стратегии $\mathbb{U}_\varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Определим "целевые" множества $\mathcal{W}(z,\bar v(\cdot)) \subseteq C(T;\mathbb{R}^n)$, полученные из траекторий, порождаемых "почти оптимальными" квазистратегиями, и проекции $w(\cdot|\tau, y(\cdot), \bar v(\cdot))$ элементов $y(\cdot) \in C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)$ на эти множества: для всех $z \in G_0$, $\tau \in T$, $y(\cdot) \in C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)$ и $\bar v(\cdot) \in \mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{W}(z,\bar v(\cdot)) := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\Big\{ \bigcup_{\substack{\mathbf{r}_Q(z,\alpha(\cdot))\\ \leqslant \mathbf{r}_Q(z)+\varepsilon}} x(\cdot,t_0,z,\alpha(\bar v(\cdot)),\bar v(\cdot))\Big\}, \tag{2.5}$$

$$w(\cdot|\tau,y(\cdot),\bar v(\cdot)) \in \underset{\substack{w(\cdot)\in\\ \mathcal{W}(y(t_0),\bar v_{[t_0,\tau]}(\cdot))|_{[t_0,\tau]}}}{\operatorname{argmin}} \|w(\cdot)-y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}, \quad \bar v_{[t_0,\tau]}(t) := \begin{cases} \bar v(t), & t\in[t_0,\tau],\\ \bar v(\tau), & t\in[\tau,\vartheta]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Выберем и зафиксируем значение параметра "точности" ε из интервала $(0,1)$.

Пусть $\Delta := (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta} \in \Delta_T$. Обозначим $(u_j^\varepsilon)_{j\in 1..n_\varepsilon}$ некоторую ε-сеть в компакте $\mathcal{P}$ — произвольное конечное подмножество из $\mathcal{P}$ такое, что $\sup_{u\in\mathcal{P}} \min_{j\in 1..n_\varepsilon} \|u-u_j^\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$.

Проведем все рассмотрения для разбиений с постоянным шагом (построения и доказательства в общем случае отличаются несложными техническими деталями). Обозначим $\tau_i' := \tau_i - \varepsilon(\tau_{i+1}-\tau_i)$, $i \in 1..(n_\Delta-1)$, зададим дополнительные моменты разбиения интервала T

$$\tau_{ij}' := \tau_i' + \frac{j(\tau_i-\tau_i')}{n_\varepsilon}, \quad j\in 0..n_\varepsilon, \quad i\in 1..(n_\Delta-1),$$

и для произвольного $x(\cdot) \in C(T;\mathbb{R}^n)$ — величины

$$d_{ij}(x(\cdot)) := \frac{x(\tau_{ij}') - x(\tau_{i(j-1)}')}{\tau_{ij}' - \tau_{i(j-1)}'}, \quad j\in 1..n_\varepsilon, \quad i\in 1..(n_\Delta-1).$$

Зафиксируем некоторые $u_* \in \mathcal{P}$, $v_* \in \mathcal{Q}$ и определим обратную связь $\mathbf{U}_\varepsilon^\Delta = (\mathbf{U}_{\varepsilon i}^\Delta)_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ на разбиении Δ. На первом шаге для всех $x_0(\cdot) \in C([t_0,\tau_0],\mathbb{R}^n)$ положим

$$y_0(\tau_0) = x_0(\tau_0), \quad \bar v_0 := v_*, \quad u_0 := u_*, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{U}_{\varepsilon 0}^\Delta(x_0(\cdot))(t) := \begin{cases} u_0, & t\in[\tau_0,\tau_1'),\\ u_j^\varepsilon, & t\in[\tau_{1(j-1)}',\tau_{1j}'), j\in 1..n_\varepsilon. \end{cases}$$

На последующих шагах для любого $x_i(\cdot) \in C([t_0,\tau_i],\mathbb{R}^n)$ положим

$$y_i(\tau) = y_{i-1}(\tau_{i-1}) + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau} f(t, y_i(t), u_{i-1}, \bar{v}_{i-1})dt, \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \tag{2.8}$$

$$\bar{v}_i \in \operatorname*{argmin}_{v\in\mathcal{Q}} \max_{j\in 1..n_\varepsilon} \|d_{ij}(x_i(\cdot)) - f(\tau_i, x_i(\tau_i), u^\varepsilon_j, v)\|, \tag{2.9}$$

$$u_i \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{P}} \big\langle y_i(\tau_i) - w(\tau_i \mid \tau_i, y_i(\cdot), \bar{v}_{[t_0,\tau_i]}(\cdot)), f(\tau_i, y_i(\tau_i), u, \bar{v}_i)\big\rangle, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{U}^\Delta_{\varepsilon i}(x_i(\cdot))(t) := \begin{cases} u_i, & t \in [\tau_i, \tau'_{i+1}), \\ u^\varepsilon_j, & t \in [\tau'_{(i+1)(j-1)}, \tau'_{(i+1)j}), j \in 1..n_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.11}$$

Здесь $\bar{v}(t) := \bar{v}_{i_t}$, $t \in T$. Обратная связь с полной памятью $\mathbf{U}^\Delta_\varepsilon$ на разбиении $\Delta \in \Delta_T$ определена. Тем самым определена и стратегия $\mathbb{U}_\varepsilon := (\mathbf{U}^\Delta_\varepsilon)_{\Delta\in\Delta_T}$.

Для $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{P}$ введем в рассмотрение фактор-множество $\mathcal{Q}_{txu}$ множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\underset{txu}{\sim}$:

$$(v_1 \underset{txu}{\sim} v_2) \Leftrightarrow (f(t,x,u,v_1) = f(t,x,u,v_2)), \quad v_1, v_2 \in \mathcal{Q}.$$

Теорема. *Пусть фактор-множества $\mathcal{Q}_{txu}$ не зависят от x: $\mathcal{Q}_{txu} = \mathcal{Q}_{tx'u}$ для всех $u \in \mathcal{P}$, $(t,x),(t,x') \in G$. Тогда при всех $z_0 \in G_0$ выполнены равенства*

$$\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0), \quad z_0 \in G_0, \tag{2.12}$$

а стратегии $(\mathbb{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, заданные выражениями (2.7)–(2.11)*, удовлетворяют соотношениям*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon) = \mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0), \quad z_0 \in G_0. \tag{2.13}$$

Замечание 2. Первая часть теоремы в терминах работы [7] говорит о том, что при указанных условиях в данной задаче оптимизации риска класс стратегий **S** является неулучшаемым при программных и при L_2-компактных ограничениях на помеху.

Замечание 3. Теорема усиливает результат [12, теорема 4.1], в котором для выполнения равенств (2.12) требуется чтобы фактор-множества $\mathcal{Q}_{txu}$ не зависели от x и от u. Это существенно расширяет круг задач, в которых данная теорема применима. В частности, в равенствах (2.12) выполняются для задач управления собственно-линейными системами (см. [1]) при непрерывном терминальном показателе качества. Вместе с тем стратегии с полной памятью, участвующие в этой теореме, имеют меньше шансов на численную реализацию по сравнению с построениями из указанной теоремы 4.1.

3. Схема доказательства теоремы

Первая часть теоремы в силу неравенств (1.4) следует из второй части. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить (2.13).

1. Выберем и зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, $z_0 \in G_0$, $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$ и движение $x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon, \{v_0(\cdot)\})$. По определению имеется последовательность вида $\{(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}^{\Delta_k}_\varepsilon) \in G_0 \times \mathcal{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U}_\varepsilon \mid k \in \mathbb{N}\}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0$, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - x_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \quad x_k(\cdot) := x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}^{\Delta_k}_\varepsilon, v_k(\cdot)) \tag{3.14}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|v_0(\cdot) - v_k(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3.15}$$

Для всех $k \in \mathbb{N}$ обозначим $u_k(\cdot) := u(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_\varepsilon^{\Delta_k}, v_k(\cdot))$. В соответствии с (2.8) определим движения y-модели:

$$y_k(t) = z_{0k} + \int_{t_0}^{t} f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))\, ds, \quad \bar{v}_k(t) := \bar{v}_{ki_t}, \quad \bar{u}_k(t) := u_{ki_t}, \quad t \in T, \quad k \in \mathbb{N},$$

где величины $\bar{v}_{ki_t}$, u_{ki_t} заданы выражениями (2.9), (2.10) для разбиения Δ_k.

2. Не сложно установить[12], что множества $\mathcal{W}(x_k(t_0), (\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))|_{[t_0,\tau_{ki}]}$ непусты, компактны в $C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)$ и не зависят от значений $\bar{v}_k(\tau)$ при $\tau \in [\tau_{ki}, \vartheta]$. Таким образом, определения (2.6) корректны.

3. Проверяется, что для всех $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in T$ справедливо неравенство

$$\|y_k(\tau) - x_k(\tau)\| \leqslant \Psi_{\varepsilon k}\big(1 + (\vartheta - t_0)L_f(G)\exp((\vartheta - t_0)L_f(G))\big), \tag{3.16}$$

где

$$\Psi_{\varepsilon k} := \int_T \Big[\mu_v\big(\mathbf{d}^{\text{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar{v}_k(s)\}, q_s^\varepsilon)\big) + \mu_v(\|v_k(s) - v_0(s)\|)\Big]\, ds + 2(\vartheta - t_0)[\mu_u(\varepsilon) + \varkappa(G)\varepsilon].$$

Здесь $\mu_u(\cdot)$, $\mu_v(\cdot)$ — модули непрерывности $f(\cdot)$ по третьему и четвертому аргументу, соответственно:

$$\mu_u(\delta) := \max_{\substack{|u-u'|\leqslant\delta \\ (\tau,x)\in G \\ v\in\mathcal{Q}, u,u'\in\mathcal{P}}} \|f(\tau, x, u, v) - f(\tau, x, u', v)\|, \quad \lim_{\delta\to+0} \mu_u(\delta) = 0,$$

$$\mu_v(\delta) := \max_{\substack{|v-v'|\leqslant\delta \\ (\tau,x)\in G \\ u\in\mathcal{P}, v,v'\in\mathcal{Q}}} \|f(\tau, x, u, v) - f(\tau, x, u, v')\|, \quad \lim_{\delta\to+0} \mu_v(\delta) = 0;$$

символами $\mathbf{d}^{\text{H}}_{\mathrm{X}}(A, B)$ обозначена полуметрика Хаусдорфа в пространстве X:

$$\mathbf{d}^{\text{H}}_{\mathrm{X}}(A, B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|_X.$$

В силу условия (3.15) и известного утверждения о сходимости по мере измеримых функций, при необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать выполненными равенства

$$\lim_{k\to\infty} v_k(\tau) = v_0(\tau) \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \tag{3.17}$$

Для $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ введем в рассмотрение фактор-множество $\mathcal{Q}/\underset{tx\varepsilon}{\sim}$ множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\underset{tx\varepsilon}{\sim}$:

$$(v_1 \underset{tx\varepsilon}{\sim} v_2) \Leftrightarrow \big((\forall j \in 1..n_\varepsilon) f(t, x, u_j^\varepsilon, v_1) = f(t, x, u_j^\varepsilon, v_2)\big),$$

и для каждого $t \in T$ обозначим $q_t^\varepsilon \in \mathcal{Q}/\underset{tx_0(t)\varepsilon}{\sim}$ класс эквивалентности, содержащий элемент $v_0(t)$. Можно проверить, что тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ будут выполнены соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\text{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar{v}_k(\tau)\}, q_\tau^\varepsilon) = 0 \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \tag{3.18}$$

Из (3.17), (3.18) и неравенства (3.16) получим оценку

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k(\tau) - x_k(\tau)\|_{C(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant \Psi_\varepsilon, \tag{3.19}$$

$$\Psi_\varepsilon := 2(\vartheta - t_0)\big[1 + (\vartheta - t_0)L_f(G)\exp((\vartheta - t_0)L_f(G))\big](\mu_u(\varepsilon) + \varkappa(G)\varepsilon).$$

4. Если для движений y-модели будет также выполнено неравенство

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma(y_k(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) + \Phi_\varepsilon, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \Phi_\varepsilon = 0, \tag{3.20}$$

то с учетом (3.14), (3.19) и непрерывности в $C(T, \mathbb{R}^n)$ показателя качества $\gamma(\cdot)$ получим оценку

$$\gamma(x_0(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) + \Psi_\varepsilon + \Phi_\varepsilon. \tag{3.21}$$

Так как в оценке (3.21) элементы $v_0(\cdot)$, $x_0(\cdot)$ были выбраны произвольно, то будут выполнены и соотношения

$$\sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X^+(z_0,\mathbb{U}_\varepsilon,\{v(\cdot)\})}} \{\gamma(x(\cdot)) - \rho(z_0, v(\cdot))\} := \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_\varepsilon) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) + \Psi_\varepsilon + \Phi_\varepsilon,$$

которые в совокупности с неравенствами (1.4) эквивалентны искомому равенству (2.13), что завершает доказательство.

5. Проверим выполнение (3.20). Для всех $k \in \mathbb{N}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим

$$x_0^u(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v_0(\cdot)), \quad x_k^u(\cdot) := x(\cdot, t_0, z_{0k}, u(\cdot), \bar{v}_k(\cdot))$$

и воспользуемся неравенством

$$\|x_k^u(\cdot) - x_0^u(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \Phi_{\varepsilon k}\big(1 + (\vartheta - t_0)L_f(G)\exp((\vartheta - t_0)L_f(G))\big),$$

$$\Phi_{\varepsilon k} := \|z_{0k} - z_0\| + \int\limits_T \mu_v(\mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{R}^{\mathrm{q}}}(\{\bar{v}_k(s)\}, q_s^\varepsilon)ds + 2(\vartheta - t_0)\mu_u(\varepsilon),$$

из которого следует оценка

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \big\|x(\cdot, t_0, z_{0k}, u(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)) - x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v_0(\cdot))\big\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \leqslant \Phi'_\varepsilon,$$

$$\Phi'_\varepsilon := 2(\vartheta - t_0)\mu_u(\varepsilon)\big(1 + (\vartheta - t_0)L_f(G)\exp((\vartheta - t_0)L_f(G))\big).$$

Эта оценка даст следующее неравенство для значений оптимального результата (1.3):

$$\limsup_{k\to\infty} \rho(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \mu_\gamma(\Phi'_\varepsilon) := \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \Phi_\varepsilon. \tag{3.22}$$

Здесь $\mu_\gamma(\cdot)$ — модуль непрерывности функционала γ на компакте $X(G_0)$:

$$\mu_\gamma(\delta) := \max_{\substack{\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)}\leqslant\delta \\ x(\cdot),y(\cdot)\in X(G_0)}} |\gamma(x(\cdot)) - \gamma(y(\cdot))|.$$

6. Из определений (2.10), (2.6) управления в y-модели можно получить сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}\big(\{y_k(\cdot)\}, \mathcal{W}(x_k(t_0), \bar{v}_k(\cdot))\big) = 0. \tag{3.23}$$

Обоснование соотношения (3.23) следует схеме рассуждений из [2, лемма 96.1] с той разницей, что нам не надо заботиться об u-стабильности множеств $\mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$: в силу определения (2.5) каждое движение $w(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{w}(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, w(\tau), \bar{v}_{ki}) \quad \text{для п.в. } \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}]; \tag{3.24}$$

значит, любое продолжение $w(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$ элемента $w_{ki}(\cdot) := w(\tau_{ki} \mid \tau_{ki}, y_k(\cdot), (\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))$ будет удовлетворять включению (3.24) с начальным условием $w(\tau_{ki}) = w_{ki}(\tau_{ki})$. Таким образом, свойство, необходимое в рассуждениях, в данном случае сводится к непустоте множества $\mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$ при всех нужных значениях аргументов.

7. Справедливы соотношения

$$\lim_{k\to+\infty} \gamma_{\mathbf{s}}(y_k(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)) \leqslant \lim_{k\to+\infty} \max_{w(\cdot)\in\mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))} \gamma_{\mathbf{s}}(w(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)) \leqslant \lim_{k\to+\infty} \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_{0k}) = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0), \qquad (3.25)$$

из которых с учетом (3.22) получим искомое неравенство (3.20). В (3.25) первое неравенство следует из (3.23) и непрерывности $\gamma(\cdot)$, второе неравенство — из определения множеств $\mathcal{W}(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot))$, последнее равенство — из непрерывности функции $\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(\cdot)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений М.: Наука, 1970. 420 с.
5. **Барабанова Н.Н., Субботин А.И.** // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 796–803.
6. **Барабанова Н.Н., Субботин А.И.** // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 3. С. 385–392.
7. **Kryazhimskii A.V.** The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An International Tribute / edt. T. M. Rassias. Teaneck; N. J.: World Sci. Publ, 1991. Vol. I, II. P. 636–675.
8. **Niehans J.** Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen // Scbweizerische Zietschrift fur Volkswirtschaft und Statistik. 1948. T. 84, № 5. S. 433–456.
9. **Savage L.J.** The theory of statistical decision // J. Amer. Stat. Association. 1951. No. 46. P. 55–67.
10. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О позиционном моделировании управления в динамических системах // Изв. АН СССР: Техн. кибернетика, 1983. № 2. С. 51–60.
11. **Osipov Yu.S., Krayzhimskii A.V.** Inverse problem of ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
12. **Серков Д.А.** Оптимальное по риску управление при функциональных ограничениях на помеху // Мат. теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 1. С. 74–103.
13. **Серков Д.А.** Оптимизация гарантированного результата при функциональных ограничениях на динамическую помеху // Докл. АН. 2013. Т. 450, № 3. С. 274–278.
14. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Серков Дмитрий Александрович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: serkov@imm.uran.ru

Поступила 24.05.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 519.853.3+517.977

ОБ УСТОЙЧИВОМ СЕКВЕНЦИАЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ ЛАГРАНЖА В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ[1]

М. И. Сумин

Рассматривается задача выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с операторным ограничением — равенством и конечным числом функциональных ограничений — неравенств. Для указанной задачи доказывается устойчивый к ошибкам исходных данных принцип Лагранжа в секвенциальной недифференциальной форме. Обсуждается возможность его применимости при решении неустойчивых оптимизационных и обратных задач.

Ключевые слова: выпуклое программирование, секвенциальная оптимизация, параметрическая задача, принцип Лагранжа в недифференциальной форме, теорема Куна–Таккера, двойственность, регуляризация, метод возмущений, оптимальное управление, обратная задача.

M. I. Sumin. On the stable sequential Lagrange principle in convex programming and its application for solving unstable problems.

The convex programming problem in a Hilbert space with an operator equality constraint and a finite number of functional inequality constraints is considered. The Lagrange principle stable with respect to errors in the initial data is proved for this problem in a sequential nondifferential form. The possibility of its application for solving unstable optimization problems and inverse problems is discussed.

Keywords: convex programming, sequential optimization, parametric problem, Lagrange principle in nondifferential form, Kuhn–Tucker theorem, duality, regularization, perturbation method, optimal control, inverse problem.

Введение

Проблемы, связанные с различными проявлениями некорректности в задачах оптимизации, хорошо известны (см., например, [1]). Они возникают уже в “самых простых” по виду оптимизационных задачах и находят выражение в фактах несуществования классических решений как прямых, так и двойственных задач, неустойчивости этих решений при возмущении исходных данных. Эту неустойчивость наследуют и классические условия оптимальности, что проявляется в выделении ими сколь угодно далеких “возмущенных” оптимальных элементов от их “невозмущенных” аналогов при сколь угодно малых возмущениях исходных данных задач. Примеры такой неустойчивости можно найти, в частности, в [2; 3]. В случае достаточно сложных реальных задач, требующих для своего решения применения приближенных методов и использования ЭВМ, указанные проблемы несуществования и неустойчивости являются центральными и требуют их обязательного учета. Сказанное выше в полной мере относится как к самой рассматриваемой ниже задаче выпуклого программирования с ограничениями типа равенства и неравенства, так и к классическим для нее условиям оптимальности — принципу Лагранжа, который в случае регулярности задачи носит название теоремы Куна — Таккера.

В настоящей работе предлагается преодолевать проблемы некорректности в изучаемой задаче выпуклого программирования на пути применения методов теории двойственности,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты 12-01-00199-а, 13-07-97028-р_поволжье_а, 13-02-12155-офи_м) и Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

регуляризации и одновременного перехода к рассмотрению понятия минимизирующей последовательности допустимых элементов в качестве основного понятия оптимизационной теории, т. е., другими словами, перехода с языка оптимальных элементов на секвенциальный язык минимизирующих последовательностей. Таким образом, данная статья продолжает линию работ [4; 5] по переходу на секвенциальный язык при формулировании условий оптимальности выпуклого программирования в недифференциальной форме. При этом сами классические условия оптимальности (как в недифференциальной, так и, при соответствующих условиях дифференцируемости исходных данных, в дифференциальной форме) следует рассматривать как предельные варианты своих секвенциальных аналогов. В отличие от [4] здесь рассматривается задача выпуклого программирования, в которой функционал цели является лишь выпуклым, а в отличие от [5] — параметрическая задача выпуклого программирования.

Важнейшим отличием обсуждаемого в работе устойчивого секвенциального принципа Лагранжа от своего классического аналога является возможность непосредственного практического решения на его основе широкого класса задач выпуклого программирования (в том числе и неустойчивых) и сводящихся к ним задач оптимального управления сосредоточенными и распределенными системами, а также разнообразных некорректных обратных задач. Таким образом, можно утверждать, что применение идеологии секвенциальной оптимизации в задачах выпуклого программирования в совокупности с идеологией регуляризации (см., например, [1]) способствует существенному расширению области применимости оптимизационной теории, в которой центральную роль играет классическая конструкция функции Лагранжа.

1. Устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа

Основной целью данного раздела является доказательство так называемого устойчивого секвенциального принципа Лагранжа в выпуклом программировании в недифференциальной форме, главным отличием которого от классического аналога служит устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных оптимизационной задачи. Приводимое доказательство опирается на соответствующую версию метода двойственной регуляризации [2–5].

1.1. Постановка параметрической задачи выпуклого программирования

Рассмотрим параметрическую задачу выпуклого программирования

$$(P^\delta_{p,r}) \qquad f^\delta(z) \to \min, \quad A^\delta z = h^\delta + p, \quad g^\delta_i(z) \le r_i, \quad i = 1,\dots,m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z.$$

Здесь $p \in H$, $r = (r_1,\dots,r_m)^* \in \mathbb{R}^m$ — параметры, $f^\delta, g^\delta_i\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$, $i = 1,\dots,m$, — непрерывные выпуклые липшицевы функционалы, $g^\delta(z) \equiv (g^\delta_1(z),\dots,g^\delta_m(z))^*$, $A^\delta\colon Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, h^δ — заданный элемент, $\mathcal{D}$ — ограниченное выпуклое замкнутое множество, Z и H — гильбертовы пространства. Верхний индекс δ в исходных данных задачи $(P^\delta_{p,r})$ означает, что эти данные либо соответствуют ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т. е. задаются с ошибкой, $\delta \in [0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Будем считать, что

$$\begin{gathered} |f^\delta(z) - f^0(z)| \le C\delta, \quad |g^\delta(z) - g^0(z)| \le C\delta \quad \forall\, z \in \mathcal{D}, \\ \|A^\delta z - A^0 z\| \le C\delta(1 + \|z\|) \quad \forall\, z \in Z, \quad \|h^\delta - h^0\| \le C\delta, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $C > 0$ не зависит от δ.

Ниже центральную роль при изучении задачи $(P^0_{p,r})$ будет играть понятие минимизирующего приближенного решения в смысле [6]. Напомним, что под минимизирующим приближенным решением понимается такая последовательность z^i, $i = 1,2,\dots$, для которой справедливы соотношения $f^0(z^i) \le \beta^0(p,r) + \delta^i$, $z^i \in \mathcal{D}^{0\varepsilon^i}_{p,r}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ε^i, $i = 1, 2, \ldots$. Здесь $\beta^0(p,r)$ — обобщенная нижняя грань в задаче $(P^0_{p,r})$, являющаяся выпуклой и полунепрерывной снизу функцией параметров $(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$,

$$\beta^0(p,r) \equiv \beta^0_{+0}(p,r) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta^0_\epsilon(p,r), \quad \beta^0_\epsilon(p,r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^{0\epsilon}_{p,r}} f^0(z), \quad \beta^0_\epsilon(p,r) \equiv +\infty, \quad \text{если} \quad \mathcal{D}^{0\epsilon}_{p,r} = \varnothing,$$

$\mathcal{D}^{0\varepsilon}_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D}\colon \|A^0 z - h^0 - p\| \le \varepsilon, g^0_i(z) \le r_i + \varepsilon, i = 1, \ldots, m\}$, $\mathcal{D}^{00}_{p,r} \equiv \mathcal{D}^0_{p,r}$. Очевидно, в ситуации оптимизационной задачи общего вида $\beta^0(p,r) \le \beta^0_0(p,r)$, где $\beta^0_0(p,r)$ — классическое значение задачи. Но в случае поставленной выше задачи $(P^0_{p,r})$ имеет место равенство $\beta^0(p,r) = \beta^0_0(p,r)$.

Пусть решение задачи $(P^0_{p,r})$ (единственное в случае строгой (сильной) выпуклости f^0) существует. Будем обозначать эти решения через $z^0_{p,r}$, а множество всех таких решений через $Z^0_{p,r} \equiv \{z^* \in \mathcal{D}^0_{p,r}\colon f^0(z^*) = \min_{z \in \mathcal{D}^0_{p,r}} f^0(z)\}$. Введем регулярный функционал Лагранжа при $\delta \ge 0$

$$L^\delta_{p,r}(z,\lambda,\mu) \equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta - p \rangle + \langle \mu, g^\delta(z) - r \rangle, \quad z \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}^m,$$

вогнутый двойственный функционал

$$V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}} L^\delta_{p,r}(z,\lambda,\mu), \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}^m,$$

и соответствующую двойственную задачу

$$V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) \to \sup, \quad (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+. \tag{1.2}$$

В силу ограниченности множества $\mathcal{D}$ двойственный функционал $V^\delta_{p,r}$, очевидно, определен и конечен для любого элемента $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m$. При этом, также очевидно, значение $V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ достигается на элементах из множества

$$Z^\delta[\lambda,\mu] \equiv \operatorname{Argmin}\{L^\delta_{p,r}(z,\lambda,\mu), z \in \mathcal{D}\}$$

при $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $\mathbb{R}^m_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^m\colon x \ge 0\}$. Напомним, что вектором Куна — Таккера задачи $(P^0_{p,r})$ называется пара $(\lambda^*,\mu^*) \in H \times \mathbb{R}^m_+$ такая, что $f^0(z^0_{p,r}) \le L^0_{p,r}(z,\lambda^*,\mu^*)\ \forall\, z \in \mathcal{D}$. Можно показать (см., например, [4]), что каждый такой вектор (λ^*,μ^*) есть решение двойственной задачи (1.2) при $\delta = 0$; в паре с $z^0_{p,r}$ он составляет седловую точку функции Лагранжа $L^0_{p,r}(\cdot,\cdot,\cdot)$, а взятый с противоположным знаком (т. е. вектор $-(\lambda^*,\mu^*)$) является элементом субдифференциала (в смысле выпуклого анализа) $\partial\beta^0(p,r)$; одновременно, вектор $(-(\lambda^*,\mu^*),-1)$ — нормаль к $\operatorname{epi}\beta^0$ в точке $(p,r,\beta^0(p,r))$.

Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha}_{p,r})$ единственную в $H \times \mathbb{R}^m_+$ точку, дающую на этом множестве максимум функционалу $R^{\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha|\mu|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$.

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{1.3}$$

1.2. Двойственная регуляризация в задаче выпуклого программирования

С целью распространения алгоритма двойственной регуляризации [2; 3] на тот случай, когда целевой функционал является лишь выпуклым, приведем, прежде всего, формулу для супердифференциала (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала значений $V^\delta_{p,r}$. При этом под супердифференциалом вогнутого функционала $V^\delta_{p,r}$ понимается, как обычно, субдифференциал с обратным знаком выпуклого функционала $-V^\delta_{p,r}$. Доказательство полностью аналогичной приводимой ниже лемме может быть найдено в [2].

Лемма. *Супердифференциал вогнутого функционала* $V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ *в точке* $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m$ *вычисляется по формуле*

$$\partial V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)=\partial_C V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)=\operatorname{cl}\operatorname{conv}\Bigl\{w-\lim_{i\to\infty}(A^\delta z^i-h^\delta-p,g^\delta(z^i)-r)\colon z^i\in\mathcal{D},$$
$$L^\delta_{p,r}(z^i,\lambda,\mu)\to\inf_{z\in\mathcal{D}}L^\delta_{p,r}(z,\lambda,\mu),i\to\infty\Bigr\},$$

где $\partial_C V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ *— обобщенный градиент Кларка функционала* $V^\delta_{p,r}(\lambda,\mu)$ *в точке* (λ,μ)*, а предел* $w-\lim$ *понимается в смысле слабой сходимости в пространстве* $H\times\mathbb{R}^m$*.*

Далее, с целью обоснования метода двойственной регуляризации в рассматриваемой ситуации можем записать неравенство

$$\Bigl\langle(I_1,I_2)-2\alpha(\delta)(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),(\lambda',\mu')-(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\Bigr\rangle\le 0\quad\forall\,(\lambda',\mu')\in H\times\mathbb{R}^m_+$$

для некоторого элемента $(I_1,I_2)\in\partial V^\delta_{p,r}(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})$, откуда в силу леммы и классического свойства выпуклых замкнутых оболочек [7, с. 210, 217] получаем

$$\Biggl\langle\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s,\delta)}\gamma_i(s,\delta)(w-\lim_{j\to\infty}(A^\delta z^j_{s,i}-h^\delta-p,g^\delta(z^j_{s,i})-r))-2\alpha(\delta)(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),$$
$$(\lambda',\mu')-(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\Biggr\rangle\le 0\quad\forall\,(\lambda',\mu')\in H\times\mathbb{R}^m_+,\tag{1.4}$$
$$\sum_{i=1}^{l(s,\delta)}\gamma_i(s,\delta)=1,\quad\gamma_i(s,\delta)\ge 0,\quad i=1,\dots,l(s,\delta),$$

где $z^j_{s,i}\in\mathcal{D}$, $j=1,2,\dots$ — последовательность такая, что

$$L^\delta_{p,r}(z^j_{s,i},\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\to\min_{z\in\mathcal{D}}L^\delta_{p,r}(z,\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),\quad j\to\infty.$$

Будем без ограничения общности считать, что последовательность $z^j_{s,i}\in\mathcal{D}$, $j=1,2,\dots$, слабо сходится при $j\to\infty$ к элементу $z_{s,i}\in\mathcal{D}$, который, очевидно, принадлежит множеству $Z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$. В силу слабой полунепрерывности снизу непрерывных выпуклых функционалов g^δ_i, $i=1,\dots,m$, и ограниченности $\mathcal{D}$ из (1.4) получаем неравенство

$$\Biggl\langle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s(n),\delta)(A^\delta z_{s(n),i}-h^\delta-p,g^\delta(z_{s(n),i})-r)-2\alpha(\delta)(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),$$
$$(\lambda',\mu')-(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\Biggr\rangle\le 0,$$

где $s(n)$, $n=1,2,\dots$, есть некоторая подпоследовательность последовательности $s=1,2,\dots$. При получении последнего неравенства надо учесть, что в случае $\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r,k}>0$ для некоторого k выполняется предельное соотношение $\lim_{j\to\infty}g^\delta_k(z^j_{s,i})=g^\delta_k(z_{s,i})$, хотя $z^j_{s,i}$, $j=1,2,\dots$, вообще говоря, сходится только слабо к $z_{s,i}$. Последнее объясняется спецификой функции Лагранжа, представляющей собою взвешенную сумму функционалов, и тем, что последовательность $z^j_{s,i}$, $j=1,2,\dots$ является минимизирующей для функционала Лагранжа.

Из этого неравенства вытекают предельные соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s(n),\delta)(A^\delta z_{s(n),i}-h^\delta-p)=2\alpha(\delta)\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\tag{1.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s,\delta)(g_j^\delta(z_{s(n),i})-r_j)=2\alpha(\delta)\mu_{p,r,j}^{\delta,\alpha(\delta)}, \tag{1.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s(n),\delta)(g_j^\delta(z_{s(n),i})-r_j)>0,\quad \text{если}\quad \mu_{p,r,j}^{\delta,\alpha(\delta)}>0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s(n),\delta)(g_j^\delta(z_{s(n),i})-r_j)\le 0,\quad \text{если}\quad \mu_{p,r,j}^{\delta,\alpha(\delta)}=0,\quad j=1,\dots,m. \tag{1.7}$$

Из предельных соотношений (1.5)–(1.7) и ограниченности $\mathcal{D}$, в свою очередь, вытекает предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s(n),\delta)(A^\delta z_{s(n),i}-h^\delta-p,g^\delta(z_{s(n),i})-r),(\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})\right\rangle$$

$$=2\alpha(\delta)(\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2+|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|^2)\ge 0. \tag{1.8}$$

Далее, так как для любого $z_{p,r}^0\in Z_{p,r}^0$

$$L_{p,r}^\delta(z_{s(n),i},\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})\equiv f^\delta(z_{s(n),i})+\langle\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},A^\delta z_{s(n),i}-h^\delta-p\rangle+\langle\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},g^\delta(z_{s(n),i})-r\rangle$$

$$\le L_{p,r}^\delta(z_{p,r}^0,\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)})\equiv f^\delta(z_{p,r}^0)+\langle\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},A^\delta z_{p,r}^0-h^\delta-p\rangle+\langle\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)},g^\delta(z_{p,r}^0)-r\rangle$$

$$\le f^0(z_{p,r}^0)+[f^\delta(z_{p,r}^0)-f^0(z_{p,r}^0)]+\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|\|A^\delta z_{p,r}^0-h^\delta-p\|+|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}||g^\delta(z_{p,r}^0)-g^0(z_{p,r}^0)|,$$

то в силу оценок (1.1) и предельного равенства (1.8) получаем после ряда элементарных преобразований оценку

$$2\alpha(\delta)(\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2+|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|^2)\le C_1\delta\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|+C_1\delta|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|+f^0(z_{p,r}^0)+C_1\delta-\min_{z\in\mathcal{D}}f^\delta(z)$$

$$\le\sqrt{2}C_1\delta\sqrt{\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2+|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|^2}+f^0(z_{p,r}^0)+C_1\delta-\min_{z\in\mathcal{D}}f^\delta(z)$$

или

$$2\alpha(\delta)(\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2+|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|^2)-\sqrt{2}C_1\delta\sqrt{\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2+|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|^2}-f^0(z_{p,r}^0)-C_1\delta+\min_{z\in\mathcal{D}}f^\delta(z)\le 0,$$

где $C_1>0$ — некоторая не зависящая от δ постоянная. Из последней оценки вытекает оценка

$$\sqrt{\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2+|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|^2}\le\frac{\sqrt{2}C_1\delta+\sqrt{2(C_1\delta)^2-8\alpha(\delta)K(\delta)}}{4\alpha(\delta)},$$

где $K(\delta)\equiv\min_{z\in\mathcal{D}}f^\delta(z)-f^0(z_{p,r}^0)-C_1\delta$, следствием которой, в свою очередь, являются предельные соотношения

$$\alpha(\delta)\|\lambda_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}\|\to 0,\quad \alpha(\delta)|\mu_{p,r}^{\delta,\alpha(\delta)}|\to 0,\quad \delta\to 0. \tag{1.9}$$

Из предельных соотношений (1.5)–(1.7), (1.9) выводим

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s(n),\delta)(A^\delta z_{s(n),i}-h^\delta-p)\to 0,\quad \delta\to 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)}\gamma_i(s(n),\delta)(g_j^\delta(z_{s(n),i})-r_j)\le\phi(\delta),\quad \phi(\delta)\to 0,\quad \delta\to 0,\quad j=1,\dots,m.$$

Из этих соотношений выводим, в свою очередь, если через $z_\delta \in Z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$ обозначить любую слабую предельную точку последовательности $\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta) z_{s(n),i}$, $n = 1,2,\ldots$ и учесть неравенство $g^\delta_j(\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta) z_{s(n),i}) \le \sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta) g^\delta_j(z_{s(n),i})$,

$$A^\delta z_\delta - h^\delta - p \to 0, \quad g^\delta_j(z_\delta) - r_j \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta)(g^\delta_j(z_{s(n),i}) - r_j) \le \phi(\delta), \quad \delta \to 0,$$

откуда ввиду ограниченности $\mathcal{D}$ вытекает

$$A^0 z_\delta - h^0 - p \to 0, \quad g^0_j(z_\delta) - r_j \le \bar\phi(\delta), \quad \bar\phi(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Одновременно, так как в силу включения $z_{s,i} \in Z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &f^\delta(z_{s(n),i}) + \langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, A^\delta z_{s(n),i} - h^\delta - p\rangle + \langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, g^\delta(z_{s(n),i}) - r\rangle \\ &\le f^\delta(z) + \langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, A^\delta z - h^\delta - p\rangle + \langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, g^\delta(z) - r\rangle \quad \forall\, z \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

то с учетом предельного соотношения (1.8) можем записать, что для любого $z^0_{p,r} \in Z^0_{p,r}$

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta) f^\delta(z_{s(n),i}) \le f^\delta(z^0_{p,r}) + \langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, A^\delta z^0_{p,r} - h^\delta - p\rangle + \langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, g^\delta(z^0_{p,r}) - r\rangle,$$

откуда, учитывая условие согласования (1.3), оценки (1.1) и ограниченность $\mathcal{D}$, получаем

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta) f^0(z_{s(n),i}) \le f^0(z^0_{p,r}) + \tilde\phi(\delta), \quad \tilde\phi(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0$$

или

$$\begin{aligned} f^0(z_\delta) \le \liminf_{n\to\infty} f^0\Biggl(\sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta) z_{s(n),i} \Biggr) &\le \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l(s(n),\delta)} \gamma_i(s(n),\delta) f^0(z_{s(n),i}) \\ &\le f^0(z^0_{p,r}) + \tilde\phi(\delta), \quad \tilde\phi(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу ограниченности $\mathcal{D}$ и слабой полунепрерывности снизу функционалов f^0, g^0_j, $j = 1,\ldots,m$ построено семейство зависящих от δ элементов $z_\delta \in Z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$ такое, что

$$A^0 z_\delta - h^0 - p \to 0, \quad g^0_j(z_\delta) - r_j \le \bar\phi(\delta), \quad \bar\phi(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0, \quad j = 1,\ldots,m,$$

и одновременно

$$f^0(z_\delta) \to \min_{z\in\mathcal{D}^0_{p,r}} f^0(z), \quad \delta \to 0,$$

причем любая слабая предельная точка любой последовательности z_{δ^k}, $k = 1,2,\ldots$ является, очевидно, решением задачи $(P^0_{p,r})$. Можно показать (см., например, [2–4]), что в случае сильной выпуклости f^δ элементы z_δ, определяемые в этом случае единственным образом, сильно сходятся к единственному же решению $z^0_{p,r}$ задачи $(P^0_{p,r})$ при условии субдифференцируемости f^0.

Можно утверждать, что одновременно для семейства элементов $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})$ в силу оценок (1.1) и условия согласования (1.3) справедливо также и предельное соотношение (см. [2–5])

$$\lim_{\delta\to+0} V^0_{p,r}(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}) = \sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+} V^0_{p,r}(\lambda,\mu) = \min_{z\in\mathcal{D}^0_{p,r}} f^0(z). \tag{1.10}$$

Более того, можно показать, что из этого предельного соотношения в силу оценок (1.1) и условия согласования (1.3) следует и предельное соотношение (см. [2–5])

$$\langle(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),(A^\delta z_\delta-h^\delta-p,g^\delta(z_\delta)-r)\rangle\to 0,\quad \delta\to 0.$$

Таким образом, как результат проведенных выше рассуждений мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Вне зависимости от того, имеется или нет вектор Куна — Таккера в задаче* $(P^0_{p,r})$, *или, другими словами, пуст или не пуст субдифференциал (в смысле выпуклого анализа)* $\partial\beta^0(p,r)$, *существуют элементы* $z_\delta\in Z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}]$ *такие, что*

$$\alpha(\delta)\|(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\|\to 0,\quad f^0(z_\delta)\to\min_{z\in\mathcal{D}^0_{p,r}}f^0(z),\quad\delta\to 0,\tag{1.11}$$

$$A^0z_\delta-h^0-p\to 0,\quad g^0_i(z_\delta)-r_i\le\phi(\delta),\quad i=1,\dots,m,\quad\phi(\delta)\ge 0,\quad\phi(\delta)\to 0,\quad\delta\to 0,$$
$$\langle(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r}),(A^\delta z_\delta-h^\delta-p,g^\delta(z_\delta)-r)\rangle\to 0,\quad \delta\to 0.$$

В случае сильной выпуклости f^δ *и субдифференцируемости* f^0 *элементы* z_δ *определяются единственным образом и сильно сходятся при* $\delta\to 0$ *к единственному же в этом случае* $z^0_{p,r}$. *Более того, одновременно выполняется и предельное соотношение* (1.10)[2].

1.3. Устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа

Теорема 1 открывает возможность сформулировать в терминах классической конструкции функции Лагранжа и доказать следующий устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в задаче $(P^0_{p,r})$. Подчеркнем, что его формулировка за счет применения секвенциального подхода учитывает одновременно как регулярный, так и нерегулярный случаи задачи.

Теорема 2. *Для того чтобы в задаче* $(P^0_{p,r})$ *существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, каждая его слабая предельная точка принадлежала множеству* $Z^0_{p,r}$*), необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\dots,$ *такая, что* $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$, *и выполняются включение*

$$z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{0\epsilon^k}_{p,r},\ \epsilon^k\to 0,\ k\to\infty,\tag{1.12}$$

и предельное соотношение

$$\langle(\lambda^k,\mu^k),(A^{\delta^k}z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]-h^{\delta^k}-p,g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])-r)\rangle\to 0,\quad k\to\infty\tag{1.13}$$

для некоторых элементов $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in Z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$. *Более того, последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\dots,$ *является искомым минимизирующим приближенным решением и каждая его слабая предельная точка есть решение задачи* $(P^0_{p,r})$. *В случае сильной выпуклости* f^{δ^k} *элементы* $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ *определяются единственным образом и при условии субдифференцируемости* f^0 *сильно сходятся при* $k\to\infty$ *к единственному же в этом случае* $z^0_{p,r}$. *Как следствие соотношений* (1.12), (1.13) *выполняется и предельное соотношение*[3]

$$V^0_{p,r}(\lambda^k,\mu^k)\to\sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0_{p,r}(\lambda,\mu).\tag{1.14}$$

---

[2]Можно показать, что если двойственная задача разрешима, то $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r})\to(\lambda^0,\mu^0)$, $\delta\to 0$, где $(\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})\in H\times\mathbb{R}^m_+$ есть ее решение с минимальной нормой.

[3]Легко показать, что одновременно каждая слабая предельная точка последовательности $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\dots,$ является решением двойственной задачи $V^0_{p,r}(\lambda,\mu)\to\max$, $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости, прежде всего, заметим, что задача $(P^0_{p,r})$ разрешима, т.е $Z^0_{p,r} \neq \varnothing$, благодаря условиям на исходные данные и существованию минимизирующего приближенного решения. Теперь включение (1.12) и предельное соотношение (1.13) теоремы вытекают из теоремы 1, если в качестве точек (λ^k, μ^k) и $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ взять соответственно точки $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}_{p,r}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}_{p,r})$ и z_{δ^k}, $k = 1, 2, \ldots$. Далее, благодаря оценкам (1.1) и предельному соотношению $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, можно утверждать, что справедливо предельное соотношение $V^{\delta^k}_{p,r}(\lambda^k, \mu^k) - V^0_{p,r}(\lambda^k, \mu^k) \to 0$, $k \to \infty$. Тогда, принимая во внимание равенство (1.10), предельное соотношение (1.13) и полученное предельное соотношение $f^0(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \to f^0(z^0_{p,r})$, $k \to \infty$ (см. (1.11)), можем записать

$$V^{\delta^k}_{p,r}(\lambda^k, \mu^k) = f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) + \langle(\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] - h^{\delta^k} - p, g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) - r)\rangle \to f^0(z^0_{p,r}),$$

а, следовательно, и предельное соотношение (1.14).

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что множество $Z^0_{p,r} \subset \mathcal{D}^{0\epsilon^k}_{p,r}$ не пусто ввиду включения $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}_{p,r}$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, и условий на исходные данные задачи $(P^0_{p,r})$. Далее, так как точка $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k}_{p,r}(\cdot, \lambda^k, \mu^k)$, можем записать

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) + \langle(\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] - h^{\delta^k} - p, g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) - r)\rangle$$
$$\leq f^{\delta^k}(z) + \langle(\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z - h^{\delta^k} - p, g^{\delta^k}(z) - r)\rangle \quad \forall\, z \in \mathcal{D}.$$

В силу условий теоремы отсюда следует, что

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \leq f^{\delta^k}(z) + \langle(\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z - h^{\delta^k} - p, g^{\delta^k}(z) - r)\rangle + \psi^k \quad \forall\, z \in \mathcal{D}, \quad \psi^k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Положим здесь $z = z^0_{p,r} \in Z^0_{p,r}$ и используем условие согласования $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$. Тогда получаем $f^0(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \leq f^0(z^0_{p,r}) + \widetilde{\psi}^k$, $\widetilde{\psi}^k \to 0$, $k \to \infty$. Так как одновременно мы имеем включение $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}_{p,r}$, то, используя классические свойства слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве, легко получаем, что $f^0(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \to f^0(z^0_{p,r})$, $k \to \infty$, т. е. последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, является минимизирующим приближенным решением в задаче $(P^0_{p,r})$.

2. Применение устойчивого секвенциального принципа Лагранжа

Основной целью данного раздела является иллюстрация того, как устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа может применяться для решения широкого класса неустойчивых задач в гильбертовых пространствах, возникающих как среди обширного класса задач оптимального управления, так и среди разнообразных обратных задач. В качестве чисто иллюстративного примера мы рассматриваем некорректную обратную задачу финального наблюдения для линейного параболического уравнения по восстановлению распределенной правой части уравнения, начального условия и правой части граничного условия на боковой поверхности цилиндрической области задания независимых переменных третьей начально-краевой задачи. Из-за ограниченности объема статьи здесь рассматривается упрощенная постановка задачи. Более общий случай аналогичной задачи можно найти в [8].

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^1$ и $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклые компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x, t)\colon x \in S, t \in (0, T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_\infty(Q_T)\colon u(x, t) \in U$ п.в. на $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega)\colon v(x) \in V$ п.в. на $\Omega\}$, $\mathcal{D}_3 \equiv \{w \in L_\infty(S_T)\colon w(x, t) \in W$ п.в. на $S_T\}$. Рассматриваем обратную задачу по нахождению тройки

$\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{D}$ неизвестных распределенного, начального и граничного коэффициентов в третьей начально-краевой задаче для дивергентного линейного параболического уравнения

$$\begin{gathered} z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t) z_{x_j}) + b_i(x,t) z_{x_i} + a(x,t) z + \langle g^\delta(x,t), u(x,t)\rangle = 0, \\ z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t) z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T, \end{gathered} \tag{2.1}$$

из финального наблюдения с определенной погрешностью его решения $h^0 = z^0(\cdot, T) \in L_2(\Omega)$ в момент времени T. Здесь, как и в [9], $\partial z(x,t)/\partial \mathcal{N} \equiv a_{i,j}(x,t) z_{x_j}(x,t) \cos\alpha_i(x,t)$, где $\alpha_i(x,t)$ — угол между внешней нормалью к S и осью x_i. Величина $\delta \in [0, \delta_0]$ характеризует ошибку исходных данных, $\delta_0 > 0$ — фиксированное число. Решение $z^\delta[\pi]$ начально-краевой задачи (2.1), соответствующее тройке $\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{D}$, понимается как слабое решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ в смысле [9]. В данной постановке это решение может быть не единственным. Поэтому нас будет интересовать нахождение нормального решения данной обратной задачи, т. е. нахождение решения с минимальной нормой $\sqrt{\|u\|^2_{2,Q_T} + \|v\|^2_{2,\Omega} + \|w\|^2_{2,S_T}}$, которое мы обозначим через π^0.

Легко видеть, что поставленная выше обратная задача нахождения нормального решения по финальному наблюдению $h^0 \in L_2(\Omega)$ эквивалентна задаче оптимального управления с фиксированным временем по нахождению тройки π с минимальной нормой с сильно выпуклым целевым функционалом и бесконечномерным (полуфазовым) ограничением типа равенства

$$(P^0_{IP}) \quad f^0(\pi) \to \inf, \quad A^0\pi = h^0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T) \equiv Z, \quad h^0 \in H \equiv L_2(\Omega),$$

где $f^0(\pi) \equiv \|u\|^2_{2,Q_T} + \|v\|^2_{2,\Omega} + \|w\|^2_{2,S_T}$, $A^0\pi \equiv z^0[\pi](\cdot, T)$. Считаем, что исходные данные обратной задачи, а, следовательно, и задачи (P^0_{IP}), удовлетворяют следующим условиям:

a) функции $a_{i,j}, b_i, a \colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^1$, $i, j = 1, \ldots, n$, $g^\delta \colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^m$ являются измеримыми по Лебегу;

b) имеют место оценки

$$\nu|\xi|^2 \le a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2 \quad \text{для п.в.} \quad (x,t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0,$$

$$|b_i(x,t)|,\ |a(x,t)|,\ |g^\delta(x,t)| \le K \quad \text{для п.в.} \quad (x,t) \in Q_T, \quad \sigma(x,t) \le K \quad \text{для п.в.} \quad (x,t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от $\delta \in [0, \delta_0]$;

c) граница S является кусочно-гладкой.

Обозначим через $h^\delta \in L_2(\Omega)$ приближенное финальное наблюдение и предположим, что

$$\|g^\delta - g^0\|_{\infty,Q_T} \le \delta, \quad \|h^\delta - h^0\|_{2,\Omega} \le \delta. \tag{2.2}$$

В силу условий a)–c) из теоремы существования слабого (обобщенного) решения третьей начально-краевой задачи для дивергентного линейного параболического уравнения [9, гл. III, § 5; 10] следует, что прямая задача (2.1) разрешима в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любой тройки $\pi \equiv (u, v, w) \in Z$ и любого $T > 0$, а также справедлива априорная оценка

$$|z^\delta[\pi]|_{Q_T} + \|z^\delta[\pi]\|_{2,S_T} \le C(\|u\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}),$$

в которой постоянная $C > 0$ не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$. Последние обстоятельства в совокупности с оценками (2.2) приводят к соответствующей необходимой оценке отклонения возмущенного линейного оператора $A^\delta \colon Z \to H$, $A^\delta\pi \equiv z^\delta[\pi](\cdot, T)$ от его невозмущенного аналога (детали могут быть найдены в [8]) $\|A^\delta - A^0\| \le C\delta$, в которой постоянная $C > 0$ не зависит от δ. Определим функционал Лагранжа $L^\delta(\pi, \lambda) \equiv f^0(\pi) + \langle \lambda, A^\delta\pi - h^\delta\rangle$, $\pi \in \mathcal{D}$, его единственный минимизирующий элемент (целевой функционал задачи (P^0_{IP}) является сильно выпуклым) $\pi^\delta[\lambda]$ и двойственную задачу $V^\delta(\lambda) \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}} L^\delta(\pi, \lambda) \to \sup$, $\lambda \in H = L_2(\Omega)$. Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}$ единственную в H точку, являющуюся решением на этом множестве задачи

$V^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2 \to \max$, $\lambda \in H$, $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. Применяя в этой ситуации сильной выпуклости f^0 теорему 2, приходим к следующей теореме — устойчивому секвенциальному принципу Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для параболического уравнения. Его формулировка использует классическую конструкцию функции Лагранжа и не зависит от фактов существования или несуществования вектора Куна — Таккера, установление которых в подобных ситуациях представляет самостоятельную сложную задачу.

Теорема 3. *Для того чтобы существовало минимизирующее приближенное решение* π^k, $k = 1, 2, \ldots$, *в задаче* (P^0_{IP}) (*и, следовательно, сильно сходилось к* π^0 *при* $k \to \infty$), *необходимо, чтобы существовала последовательность двойственной переменной* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *такая, что* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются соотношения*

$$\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k} \equiv \{\pi \in \mathcal{D} \colon \|A^0\pi - h^0\| \le \epsilon^k\}, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \langle \lambda^k, A^{\delta^k}\pi^{\delta^k}[\lambda^k] - h^{\delta^k}\rangle \to 0, \tag{2.3}$$

при $k \to \infty$. *Последовательность* $\pi^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$ *есть искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0_{IP}), *т. е.* $\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \to \pi^0$, $k \to \infty$. *Одновременно последовательность* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *является максимизирующей в соответствующей двойственной задаче* $V^0(\lambda) \to \sup$, $\lambda \in H$. *Обратно, для существования минимизирующего приближенного решения в задаче* (P^0_{IP}) *достаточно, чтобы существовала последовательность двойственной переменной* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *такая, что* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются соотношения* (2.3). *Более того, последняя последовательность является искомой применительно к задаче* (P^0_{IP}), *так как* $\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \to \pi^0$, $k \to \infty$, *и максимизирующей в соответствующей двойственной задаче. Одновременно каждая слабая предельная точка* (*если таковые существуют*) *последовательности* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$ *представляет собой решение двойственной задачи* $V^0(\lambda) \to \max$, $\lambda \in H$. *В качестве точек* λ^k, $k = 1, 2, \ldots$, *могут быть выбраны точки* $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, *где* $\delta^k > 0$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2 кн. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
2. **Сумин М.И.** Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
3. **Сумин М.И.** Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2009. 289 с.
4. **Сумин М.И.** Регуляризованная параметрическая теорема Куна — Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
5. **Sumin M.I.** On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications // Appl. Math. 2012. Vol. 3, no. 10A. P. 1334–1350. (Special iss. “Optimization”).
6. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
7. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
8. **Сумин М.И.** Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 2001–2019.
9. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
10. **Плотников В.И.** Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165, № 1. С.33–35.

Сумин Михаил Иосифович

Поступила 10.04.2013

д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: m.sumin@mm.unn.ru; m.sumin@mail.ru

Том 19 № 4 2013

УДК 517.929

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ[1]

П. Г. Сурков

В работе рассматривается модель экономического развития региона, описываемая системой нелинейных дифференциальных уравнений. Ставится задача нахождения оптимального управления, максимизирующего благосостояние региона. Анализ задачи проводится с помощью принципа максимума Понтрягина. Находится численное решение для конкретного региона; полученные результаты сравниваются с данными базового сценария интегрированной оценочной модели MERGE.

Ключевые слова: модель комплексной оценки эффективности мер по снижению выбросов парниковых газов, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

P. G. Surkov. On an optimal control problem for a nonlinear system.

We consider a regional economic growth model described by a system of nonlinear differential equations and pose a problem of finding an optimal control for maximizing the wealth of the region. The problem is analyzed by means of the Pontryagin maximum principle. A numerical solution for a specific region is found, and the results are compared with the basic scenario data of the integrated assessment model MERGE.

Keywords: integrated assessment model for evaluating greenhouse gas reduction policies, optimal control, Pontryagin maximum principle.

Введение

Глобальное изменение климата является достаточно сложным и противоречивым понятием; многие вопросы, связанные с ним, продолжают вызывать оживленные дискуссии. Проводимые до настоящего момента исследования пока не позволили изучить в полной мере характер и особенности данного явления, тем более, что оценка влияния изменения климата на экологические, социальные и экономические системы регионов представляется достаточной сложной задачей. Поэтому для изучения и прогнозирования изменения различных характеристик регионов применяются комплексные оценочные модели; одна из них — модель MERGE, предложенная в работах [1; 2] и модифицированная в работах [3; 4]. Данная модель представляет собой среду для исследования климатических изменений и оценки их влияния на развитие социально-экономических систем, а также для построения сценариев развития регионов. Комплексный характер модели придает объединение различных модулей, таких как климатический модуль, экономико-энергетический модуль и модуль оценки ущерба.

Предлагаемое исследование тесно связано с экономико-энергетическим модулем модели MERGE. Этот модуль предназначен для моделирования общеэкономических показателей регионов на большом временном интервале. Он являет собой полностью интегрированную прикладную модель общего равновесия. В каждый момент времени спрос и предложение уравниваются посредством цен на товары энергетического сектора, а также на условный общий товар, объединяющий все товары, производимые вне энергетического сектора. Каждый регион представлен как единый производитель-потребитель. Решения относительно инвестиций в каждом регионе моделируются таким выбором последовательности уровней потребления,

[1]Работа выполнена при поддержке Урало-Сибирского междисциплинарного проекта, программы Президиума РАН "Перспективы скоординированного социально-экономического развития России и Украины в общеевропейском контексте", проекта 12-П-1-1038, РФФИ (проект 13-01-00110) и проекта УрО РАН М-УрО-2013-2.

чтобы максимизировать сумму дисконтированных полезностей потребления. Представленная модель является дискретной с возможным неравномерным разбиением рассматриваемого промежутка времени. Оптимальные траектории компонент экономико-энергетических систем регионов находятся с использованием межвременной оптимизации из условия максимума суммы дисконтированных полезностей регионального потребления на всем временном интервале. Оптимизационная задача в данном случае является задачей нелинейного программирования, и для ее решения используется метод последовательной совместной максимизации [5].

1. Модель

В настоящей работе рассматривается модель динамики региона, аналогичная используемой в MERGE. Динамика основных характеристик региона описывается системой, полученной с помощью классической производственной функции типа Кобба — Дугласа:

$$\begin{aligned}
\dot{Y}(t) &= -\mu Y(t) + \Big(a u_1^{\rho\alpha}(t) f^{\rho(1-\alpha)}(t) + b u_2^{\rho\beta}(t) u_3^{\rho(1-\beta)}(t)\Big)^{1/\rho},\\
\dot{K}(t) &= -\mu K(t) + u_1(t),\\
\dot{E}(t) &= -\mu E(t) + u_2(t),\\
\dot{N}(t) &= -\mu N(t) + u_3(t),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $Y(t)$ — объем продукции, накопленной к моменту t; $K(t)$ — объем капитала; $E(t)$ — объем произведенной электрической энергии; $N(t)$ — объем произведенной неэлектрической энергии; $f(t)$ — непрерывная функция, описывающая производительность труда; α — оптимальная доля капитала в паре “капитал/труд”; β — оптимальная доля электричества в паре “электрическая/неэлектрическая” энергия; μ — коэффициент амортизации; a и b — масштабирующие множители.

С учетом экономического смысла управляющие параметры не могут превышать определенных значений. В совокупности с тем, что характеристики региона неотрицательны, это приводит к ограничениям следующего вида:

$$0 < a_k \le u_k \le b_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

Функции $u_k(\cdot)$, $k = 1, 2, 3$, удовлетворяющие соотношениям (1.2), будем называть допустимыми управлениями. Введем вектор-функцию $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot), u_3(\cdot))^\top$ и множество допустимых управлений обозначим символом U.

Считаем, что в начальный момент времени t_0 известны параметры региона, которые согласно экономическому смыслу положительны, т. е. задано начальное состояние

$$Y(t_0) = Y^0, \quad E(t_0) = E^0, \quad K(t_0) = K^0, \quad N(t_0) = N^0, \quad Y^0, E^0, K^0, N^0 > 0. \tag{1.3}$$

2. Постановка задачи оптимального управления

В работе рассматривается задача оптимального управления системой (1.1)–(1.3). Далее будет полагать $t_0 = 0$.

З а д а ч а P1. Требуется определить функцию $u^*(\cdot)$, решающую экстремальную задачу

$$\max_{Y,K,E,N,u} J(Y, K, E, N, u), \tag{2.1}$$

$$J(Y, K, E, N, u) = \int\limits_0^T d(t) \log C(t)\, dt, \tag{2.2}$$

удовлетворяющие системе (1.1) и обеспечивающие выполнение ограничений (1.2). Потребление $C(t)$ в момент времени t определим по классической формуле [1]:

$$C(t) = Y(t) - I(t) - F(t) - G(E(t), N(t)). \tag{2.3}$$

Здесь $d(t)$ — коэффициент дисконтирования полезности; $I(t)$ — текущие инвестиции (годовой поток), полагаем $I(t) = u_1(t)$; $F(t)$ — разность между региональным экспортом и импортом товаров народного потребления; $G(E, N)$ — средства, необходимые для возмещения энергетических затрат, определяемые равенством

$$G(E, N) = gE + hN, \tag{2.4}$$

где положительные коэффициенты g и h характеризуют стоимость производства электрической и неэлектрической энергии соответственно. Функции $d(t)$ и $F(t)$ считаются заданными, $d(t) > 0$ при $t \in [0, T]$.

Переменная K не входит явно в определение максимизируемого функционала (2.2) и в уравнения для характеристик $Y(t)$, $E(t)$ и $N(t)$, поэтому оптимальная траектория $K(t)$ диктуется только начальным условием K_0 и оптимальным управлением u_1^*, тогда соответствующее уравнение системы (1.1) можно не учитывать при решении экстремальной задачи (2.1).

Ввиду экономического смысла параметров системы (1.1) наложим ограничения следующего вида:

$$0 < \alpha, \beta < 1, \quad \rho < 0, \quad \mu, a, b > 0. \tag{2.5}$$

Лемма. *Для функций Y, E и N справедливы следующие оценки*:

$$Y(t) \geq Y_m(t_Y), \quad E(t) \leq E_M(t_E), \quad N(t) \leq N_M(t_N), \quad t \in [0, T], \tag{2.6}$$

где

$$\begin{gathered} Y_m(t) = e^{-\mu t} Y_0 + \mu^{-1} \xi (1 - e^{-\mu t}), \\ E_M(t) = e^{-\mu t} E_0 + \mu^{-1} b_2 (1 - e^{-\mu t}), \\ N_M(t) = e^{-\mu t} N_0 + \mu^{-1} b_3 (1 - e^{-\mu t}), \\ \xi = \Big(a a_1^{\rho\alpha} \min_{\tau \in [0, T]} f^{\rho(1-\alpha)}(\tau) + b a_2^{\rho\beta} a_3^{\rho(1-\beta)} \Big)^{1/\rho}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$t_Y = \begin{cases} 0, & \xi \geq \mu Y_0, \\ T, & \xi < \mu Y_0, \end{cases}, \quad t_E = \begin{cases} T, & b_2 \geq \mu E_0, \\ 0, & b_2 < \mu E_0, \end{cases} \quad t_N = \begin{cases} T, & b_3 \geq \mu N_0, \\ 0, & b_3 < \mu N_0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательство. Для уравнений системы (1.1) запишем формулу Коши, тогда получаем

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{-\mu t} Y_0 + \int_0^t e^{\mu(\tau - t)} \Big(a u_1^{\rho\alpha}(\tau) f^{\rho(1-\alpha)}(\tau) + b u_2^{\rho\beta}(\tau) u_3^{\rho(1-\beta)}(\tau) \Big)^{1/\rho} d\tau, \\ E(t) &= e^{-\mu t} E_0 + \int_0^t e^{\mu(\tau - t)} u_2(\tau)\, d\tau, \\ N(t) &= e^{-\mu t} N_0 + \int_0^t e^{\mu(\tau - t)} u_3(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Функции $E(t)$ и $N(t)$ принимают наибольшие значения при $u_2(t) \equiv b_2$ и $u_3(t) \equiv b_3$. В соответствии с ограничениями (2.5) функция $Y(t)$ принимает наименьшее значение при управлениях

$u_1(t) \equiv a_1$, $u_2(t) \equiv a_2$ и $u_3(t) \equiv a_3$. Таким образом, используя формулы (2.9), находим выражения для нижней границы функции $Y(t) \geq Y_m(t)$ и для верхних границ функций $E(t) \leq E_M(t)$ и $N(t) \leq N_M(t)$ в виде (2.7).

Продифференцируем первое уравнение системы (2.7); тогда имеем

$$\dot{Y}_m(t) = e^{-\mu t}(\xi - \mu Y_0).$$

Знак производной определяется соотношениями: если $\xi \geq \mu Y_0$, то $\dot{Y}_m(t) \geq 0$, и если $\xi < \mu Y_0$, то $\dot{Y}_m(t) < 0$. Тогда свое наименьшее значение функция $Y_m(t)$ будет достигать в момент времени t_Y.

Дифференцируя второе и третье уравнения системы (2.7), получаем

$$\dot{E}_M(t) = e^{-\mu t}(b_2 - \mu E_0),$$
$$\dot{N}_M(t) = e^{-\mu t}(b_3 - \mu N_0).$$

Аналогичным образом исследуя знаки производных, имеем, что функции $E_M(t)$ и $N_M(t)$ будут принимать наибольшие значения в моменты времени t_E и t_N соответственно. □

Теорема. *Пусть параметры системы* (1.1) *удовлетворяют условию* (2.5)*, ограничения на управления* (1.2) *и начальные значения* (1.3) *удовлетворяют неравенству*

$$Y_m(t_Y) - b_1 - \max_{\tau \in [0,T]} F(\tau) - gE_M(t_E) - hN_M(t_N) > 0,$$

где Y_m, E_M и N_M определяются формулами (2.7)*, t_Y, t_E и t_N — формулами* (2.8)*; тогда функция потребления принимает только положительные значения*

$$C(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Для функции потребления (2.3), с учетом функции энергозатрат (2.4) справедлива оценка

$$C(t) = Y(t) - u_1(t) - F(t) - gE(t) - hN(t) \geq Y(t) - b_1 - \max_{\tau \in [0,T]} F(\tau) - gE(t) - hN(t).$$

Используя неравенства (2.6) леммы, получаем

$$C(t) \geq Y_m(t_Y) - b_1 - \max_{\tau \in [0,T]} F(\tau) - gE_M(t_E) - hN_M(t_N). \qquad \square$$

Далее предполагаем, что условие теоремы выполнено. Преобразуем систему (1.1), вычтем из первого уравнения третье и четвертое, умноженные на g и h соответственно. Тогда, вводя обозначение $Z = Y - gE - hN$, систему (1.1) перепишем в виде

$$\dot{Z}(t) = -\mu Z(t) + \Big(a u_1^{\rho\alpha}(t) f^{\rho(1-\alpha)}(t) + b u_2^{\rho\beta}(t) u_3^{\rho(1-\beta)}(t)\Big)^{1/\rho} - g u_2(t) - h u_3(t) \tag{2.10}$$

с соответствующим ей краевым условием

$$Z(0) = Z^0 = Y^0 - gE^0 - hN^0. \tag{2.11}$$

В результате получаем следующую задачу оптимального управления.

Задача P2. Требуется определить функцию $u^*(\cdot)$, решающую экстремальную задачу

$$\max_{Z,u} J(Z,u),$$

$$J(Z,u) = \int_0^T \tilde{d}(t) \ln(Z(t) - u_1(t) - F(t))\, dt,$$

где $\tilde{d}(t) = d(t)/\ln 10$, удовлетворяющие уравнению (2.10) с краевым условием (2.11) и обеспечивающие выполнение ограничений (1.2).

3. К решению задачи P2

Для исследования свойств вектор-функции $u(t)$, $0 \le t \le T$, — оптимальной программы управления для задачи P2, используется принцип максимума Понтрягина [6].

Запишем функцию Гамильтона — Понтрягина задачи P2, полагая $\psi_0 = -1$:

$$H(t, Z, \psi, u) = \psi\Big(-\mu Z + (au_1^{\rho\alpha} f^{\rho(1-\alpha)}(t) + bu_2^{\rho\beta} u_3^{\rho(1-\beta)})^{1/\rho} - gu_2 - hu_3\Big)$$
$$+ \tilde{d}(t) \ln\big(Z - u_1 - F(t)\big). \tag{3.1}$$

Найдем частную производную гамильтониана по координате Z:

$$\frac{\partial H}{\partial Z} = -\mu\psi + \frac{\tilde{d}(t)}{Z - u_1 - F(t)}.$$

Тогда сопряженное уравнение $\dot{\psi} = -H'_Z$ принимает вид

$$\dot{\psi} = \mu\psi - \frac{\tilde{d}(t)}{Z - u_1 - F(t)}, \tag{3.2}$$

Правый конец траектории свободен, поэтому сопряженная переменная $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности

$$\psi(T) = 0. \tag{3.3}$$

Используя уравнение (2.10) с условием (2.11), а также (3.2) и (3.3), получаем краевую задачу принципа максимума для задачи P2 в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{Z} = -\mu Z + \Big(au_1^{\rho\alpha} f^{\rho(1-\alpha)}(t) + bu_2^{\rho\beta} u_3^{\rho(1-\beta)}\Big)^{1/\rho} - gu_2 - hu_3, \quad Z(t_0) = Z^0,\\
&\dot{\psi} = \mu\psi - \frac{\tilde{d}(t)}{Z - u_1 - F(t)}, \qquad \psi(T) = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Утверждение. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда частная производная гамильтониана* (3.1) *по управлению* u_1 *отлична от нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем производную гамильтониана (3.1) по управлению u_1:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = a\alpha\psi\Big(au_1^{\rho\alpha} f^{\rho(1-\alpha)}(t) + bu_2^{\rho\beta} u_3^{\rho(1-\beta)}\Big)^{1/\rho - 1} u_1^{\alpha\rho - 1} f^{\rho(1-\alpha)}(t) - \frac{\tilde{d}(t)}{Z - u_1 - F(t)}.$$

Будем доказывать от противного. Пусть $\partial H/\partial u_1 = 0$; тогда, приравнивая к нулю найденную производную, имеем

$$\frac{\tilde{d}(t)}{Z - u_1 - F(t)} = a\alpha\psi\Big(au_1^{\rho\alpha} f^{\rho(1-\alpha)}(t) + bu_2^{\rho\beta} u_3^{\rho(1-\beta)}\Big)^{1/\rho - 1} u_1^{\alpha\rho - 1} f^{\rho(1-\alpha)}(t).$$

Подставим последнее выражение в сопряженную систему краевой задачи (3.4), в этом случае получаем

$$\dot{\psi} = \Big(\mu - a\alpha\Big(au_1^{\rho\alpha} f^{\rho(1-\alpha)}(t) + bu_2^{\rho\beta} u_3^{\rho(1-\beta)}\Big)^{1/\rho - 1} u_1^{\alpha\rho - 1} f^{\rho(1-\alpha)}(t)\Big)\psi, \quad \psi(T) = 0.$$

Решение последней системы определяется формулой

$$\psi = D \exp\bigg(\int_0^t (\mu - a\alpha(au_1^{\rho\alpha}(\tau) f^{\rho(1-\alpha)}(\tau) + bu_2^{\rho\beta}(\tau) u_3^{\rho(1-\beta)}(\tau))^{1/\rho - 1} u_1^{\alpha\rho - 1}(\tau) f^{\rho(1-\alpha)}(\tau))\, d\tau \bigg).$$

Учитывая краевое условие $\psi(T)=0$, находим $D=0$; тогда $\psi(t)\equiv 0$. Последнее равенство дает

$$\frac{\tilde{d}(t)}{Z(t)-u_1(t)-F(t)}\equiv 0,$$

что противоречит условиям положительности $C(t)$ и $d(t)$. □

Из последнего утверждения вытекает два случая: $u_1^*(t)=a_1$ либо $u_1^*(t)=b_1$, $t\in[0,T]$. Найдем производную гамильтониана по управлениям u_2 и u_3:

$$\frac{\partial H}{\partial u_2}=\psi\Big(b\beta\Big(au_1^{*\rho}f^{\rho(1-\alpha)}(t)+bu_2^{\rho\beta}u_3^{\rho(1-\beta)}\Big)^{1/\rho-1}u_2^{\beta\rho-1}u_3^{\rho(1-\beta)}-g\Big),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3}=\psi\Big(b(1-\beta)\Big(au_1^{*\rho}f^{\rho(1-\alpha)}(t)+bu_2^{\rho\beta}u_3^{\rho(1-\beta)}\Big)^{1/\rho-1}u_2^{\beta\rho}u_3^{\rho(1-\beta)-1}-h\Big).$$

Приравнивая производные к нулю, получаем

$$\begin{aligned}
u_2^*(t)&=a^{1/\rho}u_1^*(t)f^{1-\alpha}(t)\bigg(\Big(\frac{g}{b\beta}\Big)^{1/(1-\rho)}\Big(\frac{\beta h}{(1-\beta)g}\Big)^{\rho(1-\beta)/(1-\rho)}-b\Big(\frac{(1-\beta)g}{\beta h}\Big)^{1-\beta}\bigg),\\
u_3^*(t)&=a^{1/\rho}u_1^*(t)f^{1-\alpha}(t)\frac{(1-\beta)g}{\beta h}\bigg(\Big(\frac{g}{b\beta}\Big)^{1/(1-\rho)}\Big(\frac{\beta h}{(1-\beta)g}\Big)^{\rho(1-\beta)/(1-\rho)}-b\Big(\frac{(1-\beta)g}{\beta h}\Big)^{1-\beta}\bigg).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

4. Алгоритм решения задачи P1

Аналитическое решение задачи P1 как задачи оптимального управления осложняется нелинейностью системы (1.1), а также невыпуклостью функционала (2.2). Для решения этой задачи могут быть использованы методы невыпуклой оптимизации [7]. В данном случае будем строить оптимальное управление, исследуя ограничения (1.2).

Пусть t_i, $i=0,\dots,n$, $t_n=T$, — разбиение временного отрезка $[t_0,T]$ с шагом $\delta=(T-t_0)/n$. Полагаем $u_k^{(0)}=0$, $k=1,2,3$. На i-м шаге оптимальное управление $u_1^{(i)}$ согласно лемме 1 может принимать значения либо a_1, либо b_1. Для оптимальных управлений $u_2^{(i)}$ и $u_3^{(i)}$ предполагаем, что они могут принимать значения a_2 или b_2 и a_3 или b_3 соответственно или значения, определяемые формулами (3.5).

Для каждого набора управляющих параметров $u_k^{(1)},\dots,u_k^{(n)}$, $k=1,2,3$, решаем систему дифференциальных уравнений (1.1) с помощью метода Эйлера [8]. Тогда на $(i+1)$-м шаге итерационной процедуры получаем

$$\begin{aligned}
Y^{(i+1)}&=Y^{(i)}+\delta\Big(-\mu Y^{(i)}+\Big(au_1^{(i+1)\alpha\rho}f^{(i)\rho(1-\alpha)}+bu_2^{(i+1)\beta\rho}u_3^{(i+1)\rho(1-\beta)}\Big)^{1/\rho}\Big),\\
K^{(i+1)}&=K^{(i)}+\delta\Big(-\mu K^{(i)}+u_1^{(i+1)}\Big),\\
E^{(i+1)}&=E^{(i)}+\delta\Big(-\mu E^{(i)}+u_2^{(i+1)}\Big),\\
N^{(i+1)}&=N^{(i)}+\delta\Big(-\mu N^{(i)}+u_3^{(i+1)}\Big),\quad i=0,\dots,n-1.
\end{aligned}$$

Используя найденные значения функций $Y^{(1)},\dots,Y^{(n)}$, $K^{(1)},\dots,K^{(n)}$, $E^{(1)},\dots,E^{(n)}$, $N^{(1)},\dots,N^{(n)}$, находим значение функционала J (2.2). Для этого вычисляем интеграл с помощью метода правых прямоугольников [8]:

$$J=\delta\sum_{i=1}^{n}\tilde{d}^{(i)}\ln C^{(i)},$$

где

$$C^{(i)}=Y^{(i)}-u_1^{(i)}-F^{(i)}-G^{(i)}(E^{(i)},N^{(i)}).$$

Среди полученных значений функционала выбираем наибольшее и выделяем соответствующий ему набор управлений, которые и будут оптимальными.

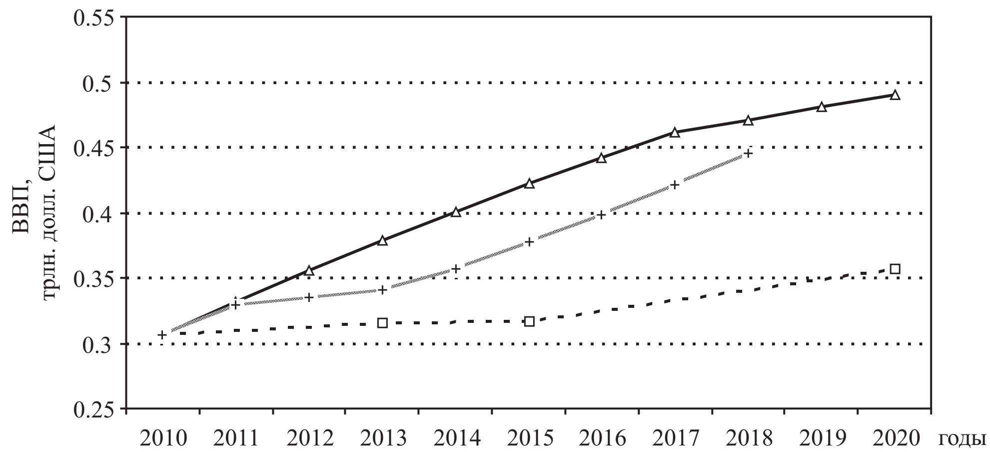


Рис. 1. Реализовавшийся ВВП.

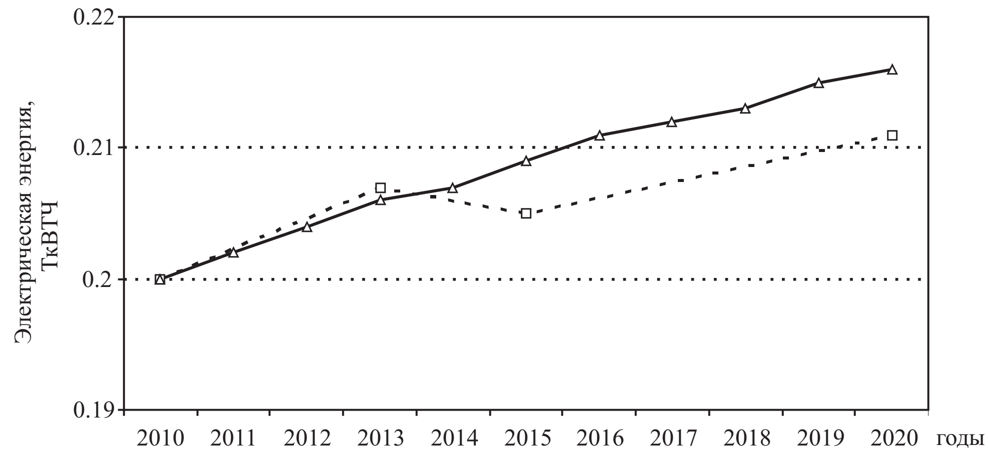


Рис. 2. Производство электрической энергии.

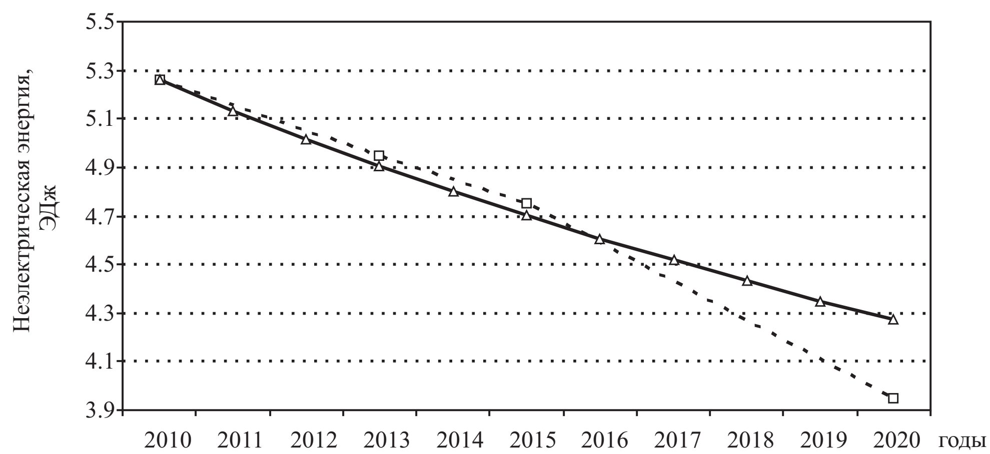


Рис. 3. Производство неэлектрической энергии.

5. Результаты численного моделирования

Используя описанный в предыдущем разделе алгоритм, построим решение задачи P1 для конкретных значений параметров системы (1.1) и ограничений (1.2). В качестве рассматриваемого региона возьмем Украину. Этому региону соответствуют следующие значения параметров: $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.45$, $\mu = 0.05$, $\rho = -1.5$ [1]. Динамику основных характеристик исследуем на промежутке времени от 2010 г. до 2020 г.; начальные состояния — $Y^0 = 0.306$ трлн \$, $K^0 = 0.857$ трлн \$, $E^0 = 0.2$ ТкВтч, $N^0 = 5.258$ ЭДж [9]. Здесь и далее \$ — долл. США 2005 г.

Параметры функции энергозатрат (2.4) определяются равенствами $h = 0.0025$ трлн \$/ЭДж, $g = 0.0563$ трлн \$/ТкВтч [1].

Функцию разности экспорта и импорта $F(t)$ задаем по формуле $F(t) = 0.027$ трлн. \$. Функцию $f(t)$, описывающую производительность труда и измеряемую в условных единицах эффективности, выбираем постоянной: $f(t) = 1$. Коэффициент дисконтирования полезности задаем формулой $d(t) = 1 - 0.01(t - 2010)$. Используя формулы для базовых значений характеристик региона, введенные в работе [1], находим $a = 5.44$ и $b = 0.64$.

В качестве границ на управление u_1 выбираем объемы инвестиций 1996 и 2010 гг., т. е. $a_1 = 0.005$ трлн \$, $b_1 = 0.03$ трлн \$ [9]. Левую границу на управление u_1 выбираем исходя из темпов роста производства электроэнергии в 2005–2010 гг., правую границу — в 1987–1988 гг. [9]. В результате имеем $a_2 = 0.005$ ТкВтч и $b_2 = 0.012$ ТкВтч. Границы на управление u_3 выбираем следующие: $a_3 = 0.01$ ЭДж и $b_3 = 0.15$ ЭДж. Разбиение временного промежутка берем равным одному году, т. е. $n = 10$.

На рис. 1–3 приведены графики основных макроэкономических показателей региона. Сплошной линией черного цвета представлены результаты, полученные с помощью алгоритма решения задачи P1. Пунктирной линией показаны данные базового сценария для модели MERGE. На рис. 1 линией серого цвета представлен прогноз ВВП Украины, данный Международным валютным фондом [10].

Инвестиции, которые были приняты в качестве управляющего параметра u_1, принимают максимальное значение b_1 с 2010 по 2018 гг., потом принимают значение a_1 до 2020 г. В рассматриваемой задаче для данного набора параметров оптимальное управление u_1^* имеет одну точку переключения. Оптимальные управления производством энергии определяются формулами

$$u_2^*(t) = b_2, \quad u_3^*(t) = b_3.$$

Графики электрической энергии и неэлектрической энергии базового сценария модели MERGE и графики, полученные с помощью численного решения задачи P1, демонстрируют схожее поведение. Существенные различия наблюдаются на графике ВВП. Отличия от прогноза МВФ объясняются тем, что в нем используются данные за 2011 и 2012 гг., тогда как в настоящей работе — только данные в начальный момент (2010 г.). При построении сценариев модели MERGE используется метод межвременной оптимизации, а также такая характеристика региона, как потенциальный ВВП на всем временном промежутке, что, вероятно, служит причиной наблюдаемых различий с результатами численного решения задачи P1.

Заключительные замечания

В заключение отметим, что регион рассматривался как отдельная система с заданным внешним воздействием, тогда как в модели MERGE учитывается совокупное влияние регионов друг на друга. Поэтому одно из основных направлений исследования — рассмотрение нескольких взаимодействующих регионов.

Автор выражает благодарность Б.В. Дигасу и В.Л. Розенбергу за предоставленные данные базового сценария для модели MERGE.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Manne A., Mendelson R., Richels R.** MERGE — a Model for evaluating regional and global effects of GHG reduction policies // Energy Policy. 1995. Vol. 23, no. 1. P. 17–34.
2. **Manne A.** Energy, the environment and the economy: hedging our bets // Global Climate Change / ed. J. M. Griffin. Northampton: Edward Elgar. Publ., 2000. P. 187–203. (New Horizons in Environmental Economics series.)
3. **Digas B., Maksimov V., Schrattenholzer L.** On costs and benefits of Russia's participation in the Kyoto protocol. Laxenburg, 2009. 34 p. (Interim Report / IIASA; IR-09-001).
4. **Digas B.V., Rozenberg V.L.** Application of an optimisation model to studying some aspects of Russia's economic development // Int. J. Environmental Policy and Decision Making. 2010. Vol. 1, no. 1. P. 51–63.
5. **Rutherford T.** Sequential joint maximization // Energy and Environmental Policy Modeling / ed. J. P. Weyant. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 139–175. (International Series in Operations Research and Management Science; vol. 18.)
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1983. 393 с.
7. **Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И.** Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987. 280 с.
8. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
9. Государственная служба статистики Украины [сайт]. URL: http://www.ukrstat.gov.ua/ .
10. International Monetary Fund [e-resource]. URL: http://www.imf.org/ .

Сурков Платон Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: platon.surkov@gmail.com

Поступила 20.02.2013

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

ОБ ОЦЕНКЕ ДЕФЕКТА СЛАБОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ МНОЖЕСТВ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

В. Н. Ушаков, А. Н. Котельникова, А. Г. Малёв

Рассматриваются нелинейная управляемая система и отвечающее ей дифференциальное включение на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени. Исследуются вопросы, имеющие отношение к свойству слабой инвариантности множеств относительно дифференциального включения, а также связанные с вычислением и оценкой дефекта слабой инвариантности множеств с кусочно-гладкой границей. Для множества с кусочно-гладкой границей достаточно общего вида и при условиях, обеспечивающих корректность понятия дефекта слабой инвариантности, выводятся формулы для вычисления дефекта слабой инвариантности. Рассматривается модельный пример двумерной управляемой системы.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, управление, слабая инвариантность множества, дефект слабой инвариантности, множество с кусочно-гладкой границей.

V. N. Ushakov, A. N. Kotel'nikova, A. G. Malev. On estimation of the stability defect of the sets with piecewise smooth border.

Nonlinear control system and connected differential inclusion on a finite time interval is considered. A game problem of approaching for a control system with a compact target set is studied. Some questions about weak invariance property of compact target set with respect to differential inclusion are considered. Also questions about estimation and calculation of stability defect of the sets with piecewise smooth border are considered. Formula of a stability defect for the sets with piecewise smooth border common case under conditions proving correct conception of weak invariance defect are obtained. A modeling example of a two dimensions control system is calculated.

Keywords: control system, differential inclusion, control, weak invariance of a set, weak invariance defect, set with piecewise smooth border.

Введение

В настоящей работе изучается задача о сближении нелинейной управляемой системы с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени. Исследуются вопросы, связанные с вычислением и оценкой дефекта слабой инвариантности множеств в пространстве позиций, имеющих кусочно-гладкие границы.

В работе [1] было введено и изучено понятие дефекта слабой инвариантности множества в пространстве позиций относительно дифференциального включения. При определенных условиях на это множество, достаточно слабых, была обоснована корректность введенного понятия дефекта слабой инвариантности. В работе [2], посвященной исследованию дефекта стабильности множеств в дифференциальных играх, были получены формулы для дефекта стабильности в случае, когда граница множества являлась гладкой.

Однако рассмотрение только множеств W в пространстве позиций, имеющих гладкую границу, существенно сужает наши возможности при построении приближенных решений в задачах управления. В связи с этим большой интерес представляют вычисление и оценка дефектов слабой инвариантности и стабильности относительно множеств с кусочно гладкой границей.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00427-а), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-5927.2012.1) и программы президиума РАН “Математические модели и алгоритмы в управляемых системах с нелинейной динамикой” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1012).

Это позволяет привлечь в качестве аппроксимаций множеств разрешимости в различных задачах о сближении множества с кусочно-гладкой границей.

В настоящей работе рассматривается множество W с кусочно-гладкой границей достаточно общего вида при условиях, обеспечивающих корректность понятия дефекта слабой инвариантности. Для этого множества выводятся формулы для вычисления дефекта слабой инвариантности. Рассматривается пример двумерной управляемой системы, на котором иллюстрируется выполнение упомянутых выше условий.

1. Управляемая система и слабая инвариантность

Задана управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$ описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P. \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы, u — вектор управления, P — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$.

Предполагаем, что правая часть уравнения (1.1) удовлетворяет следующим условиям.

Условие A. Функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$, и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\big\|f\big(t, x^{(1)}, u\big) - f\big(t, x^{(2)}, u\big)\big\| \leqslant L\big\|x^{(1)} - x^{(2)}\big\|, \quad \big(t, x^{(i)}, u\big) \in D \times P, \quad i = 1, 2.$$

Здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора f в евклидовом пространстве.

Условие B. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P.$$

Под допустимым управлением $u = u(t)$ системы (1.1) будем полагать измеримую по Лебегу вектор-функцию на промежутке $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющую включению $u(t) \in P$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Принимая во внимание условия A и B на систему (1.1), получаем, что при любых $(t_0, x_0) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и допустимом управлении $u(t)$ существует единственное решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$ уравнения (1.1) — абсолютно непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ вектор-функция, удовлетворяющая равенству

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\,(t, x(t), u(t))$$

почти всюду на $[t_0, \infty)$. Это решение мы и называем движением системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Наряду с управляемой системой (1.1) рассмотрим связанную с ней динамическую систему, в которой управления $u \in P$ как бы нивелированы, а именно введем в рассмотрение дифференциальное включение на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x). \tag{1.2}$$

Здесь $F(t, x) = \operatorname{co}\{f(t, x, u)\colon u \in P\}$, $\operatorname{co} F$ — выпуклая оболочка множества F. Для динамической системы (1.2) можно, так же как и для системы (1.1), определить движение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Сформулируем задачу о сближении системы (1.1) с целевым множеством в фиксированный момент окончания ϑ. Пусть M — компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Требуется построить допустимое управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$ на $[t_0, \vartheta]$ системы (1.1), удовлетворяющее включению $x^*(\vartheta) \in M$.

Вообще говоря, не для любого $\vartheta \in [t_0, \infty)$ задача о сближении имеет решение при заданных (t_0, x_0) и M. Более того, задача о сближении при некоторых (t_0, x_0) и M может не иметь решения ни при каких $\vartheta \in [t_0, \infty)$.

Определяющую роль при решении задачи о сближении для системы (1.1) играет множество $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ всех тех исходных позиций (t_*, x_*), для каждой из которых разрешима задача о сближении системы с целевым множеством в момент ϑ.

Выделение W в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ представляет собой серьезную математическую проблему. Очевидно, что в общем случае эта проблема неразрешима из-за сложности задачи о сближении. Эффективное аналитическое описание W возможно лишь в редких случаях.

При выделении множества W в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ можно использовать одно важное свойство этого множества: W – слабо инвариантно относительно д. в. (1.2) (см. например, [3]).

Далее, в этом разделе представим несколько эквивалентных определений слабой инвариантности относительно д. в. (1.2).

Принимая во внимание условие B, заключаем, что в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ можно указать такую достаточно большую ограниченную и замкнутую область D, которая содержит множество W и все движения $x(t)$ д. в. (1.2), приходящие в некоторую заданную ε-окрестность множества M (т. е. $(t, x(t)) \in D$ при $t \in [t_0, \vartheta]$).

Начиная с этого момента зафиксируем область D.

Приведем известное определение слабо инвариантного множества относительно д.в.

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем слабо инвариантным относительно д. в. (1.2), если для любой точки $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$ существует решение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ д. в. (1.2) такое, что $(t, x(t)) \in \mathcal{W}$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Приведем также инфинитезимальную формулировку свойства слабой инвариантности. Эту формулировку представим в виде теоремы.

Полагаем $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*) = \Big\{d \in \mathbb{R}^n \colon d = \lim\limits_{k\to\infty} (t_k - t_*)^{-1}(w_k - x_*),\ \{(t_k, w_k)\}$ — последовательность в W, $t_k \downarrow t_*$ при $k \to \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} w_k = x_*\Big\}$. $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$ — производное множество многозначного отображения $t \mapsto W(t) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in W\big\}$ в точке $(t_*, x_*) \in W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ (см. [4]).

Теорема 1 [4, определение 2.1, с. 156]. *Множество $\mathcal{W} \subset D$ слабо инвариантно относительно д. в.* (1.2), *если для любых точек $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, справедливо*

$$F(t_*, x_*) \cap \overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) \neq \varnothing. \tag{1.3}$$

Теорема 1 доказывается так же, как доказывалась эквивалентность определений 3.1 и 3.2 в [4, теорема 3.1, с. 162–164].

Инфинитезимальная формулировка свойства слабой инвариантности представляет собой элемент внедрения конструкций производных в теорию управления. Как оказалось, она является весьма полезной при выявлении различных свойств разрешающих конструкций и при формировании новых понятий в теории управления.

2. Дефект слабой инвариантности множеств в пространстве позиций игры

В этом разделе рассмотрим вопросы, относящиеся к свойству слабой инвариантности множеств относительно управляемой системы (1.1) и порожденного ей дифференциального включения (1.2).

Как уже отмечалось, понятие слабой инвариантности — одно из ключевых в теории управления. Его можно эффективно использовать при решении задач этой теории. Использование этого понятия при решении задач управления сопряжено с выделением в пространстве позиций управляемой системы некоторого множества W, слабо инвариантного относительно системы или дифференциального включения.

Основная трудность при решении задач управления заключается при таком подходе в выделении множества W. Выделить это множество (точно) удается, к сожалению, далеко не всегда, а только в относительно простых задачах. Из-за сложности задач управления мы вынуждены конструировать множество W приближенно. В результате такого конструирования получаем множество в пространстве позиций, уже не обладающее свойством слабой инвариантности. Естественно возникает вопрос о том, что за множество (с точки зрения слабой инвариантности) мы сконструировали, т. е. о том, в какой степени сконструированное множество не обладает свойством слабой инвариантности. Для аккуратной постановки вопроса и ответа на него введем здесь, следуя работе [1], некоторую числовую характеристику — дефект слабой инвариантности множества в пространстве позиций. Эта характеристика оценивает степень несогласованности эволюции множества и динамики управляемой системы с точки зрения слабой инвариантности.

Пусть $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — компакт с непустыми сечениями $W(t) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon (t, x) \in W\big\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Исследуем W на предмет слабой инвариантности относительно д. в. (1.2). Не исключено, что W не слабо инвариантно относительно д. в. (1.2). В этом случае введем неотрицательную числовую характеристику множества W, представляющую некоторую меру (слабой) неинвариантности множества W относительно д. в. (1.2).

Пусть в дополнение к условию $W(t) \neq \varnothing$, $t \in [t_0, \vartheta]$ выполнено следующее условие.

Условие С*. При любых $(t_*, t^*) \in \Delta$ справедливо

$$h\big(W(t_*), W(t^*)\big) \leqslant R(t^* - t_*). \tag{2.1}$$

Здесь $\Delta = \big\{(t_*, t^*) \colon t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta\big\} \subset [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta]$, $h(W_*, W^*) = \max\limits_{w_* \in W_*} \min\limits_{w^* \in W^*} \|w_* - w^*\|$ — хаусдорфово отклонение компакта W_* от компакта W^* в $\mathbb{R}^n$.

Из условия С* следует, что W удовлетворяет соотношению

$$B(\mathbf{0}, R) \cap \overrightarrow{D} W(t_*, x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta). \tag{2.2}$$

Здесь $B(\mathbf{0}, R)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в $\mathbf{0}$ радиуса R, $\partial W = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, \partial W(t))$, $\partial W(t)$ — граница множества $W(t)$ в $\mathbb{R}^n$.

Условие (2.2) не слишком ограничительно для W и при этом оно аналогично условию (1.3), сопутствующему слабо инвариантному множеству $\mathcal{W}$. Этому условию удовлетворяют, например, множества W, у которых ∂W есть множество уровня некоторой непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ скалярной функции.

Нам важно выяснить, в какой мере множество W не является слабо инвариантным относительно д. в. (1.2), т. е. в какой мере множество W далеко от удовлетворения определению слабо инвариантного множества.

Для аккуратной формализации этого вопроса и ответа на него введем понятие дефекта слабой инвариантности множества W относительно д. в. (1.2).

А именно сопоставим каждой точке $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, число

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \rho\big(\overrightarrow{D} W(t_*, x_*), F(t_*, x_*)\big) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\rho\big(W_*, W^*\big) = \inf\big\{\|w_* - w^*\| \colon (w_*, w^*) \in W_* \times W^*\big\}$ — расстояние между множествами W_* и W^* в $\mathbb{R}^n$.

Величину $\varepsilon(t_*, x_*) \geqslant 0$ назовем *дефектом слабой инвариантности* множества W в точке $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$.

Множество $\overrightarrow{D} W(t_*, x_*)$ замкнуто и $F(t_*, x_*)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, inf в (2.3) достигается на некоторой паре точек $d_* \in \overrightarrow{D} W(t_*, x_*)$, $f_* \in F(t_*, x_*)$.

Из $F(t_*, x_*) \subset B(\mathbf{0}, R)$ и $B(\mathbf{0}, R) \cap \overrightarrow{D}W(t_*, x_*) \neq \varnothing$ при $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, следует неравенство

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \rho\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)\big) \leqslant 2R,$$

$$(t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta).$$

Далее, полагаем при $t_* \in [t_0, \vartheta)$

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{x_* \in \partial W(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*).$$

Величину $\varepsilon(t_*)$ назовем *дефектом слабой инвариантности* множества W в момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$. В результате получаем функцию $\varepsilon(t) \geqslant 0$ на $[t_0, \vartheta)$, которую доопределим в точке $t = \vartheta$ значением $\varepsilon(\vartheta) = 0$.

Функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ есть числовая характеристика, оценивающая степень (слабой) неинвариантности множества W. Так как $\varepsilon(t_*, x_*) \leqslant 2R$ при $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, то $\varepsilon(t) \leqslant 2R$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Принимая во внимание второй из упомянутых нами вариантов определения слабой инвариантности множеств — инфинитезимальное определение слабой инвариантности, видим, что слабая инвариантность множества W эквивалентна равенству $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$. Естественно, возникает предположение о том, что если функция $\varepsilon(t)$ мала, то множество W можно погрузить в некоторое слабо инвариантное относительно д. в. (1.2) множество $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}(t_0) = W(t_0)$, сечения $\mathcal{W}(t)$ которого монотонно разбухают с ростом времени $t \in [t_0, \vartheta]$ по отношению к сечениям $W(t)$, но не сильно отличаются от $W(t)$ в хаусдорфовой метрике.

Для подтверждения нашего предположения введем еще одно условие.

Условие E. Функция $\varepsilon(t)$ измерима по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$.

Учитывая условие E, введем функцию $\varkappa(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{L(t-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau$, $t \in [t_0, \vartheta]$, и множество $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ определим равенством $W^*(t) = W(t) + B\big(0; \varkappa(t)\big)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Величину $\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \displaystyle\int_{t_0}^{\vartheta} e^{L(\vartheta-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau$ назовем *дефектом слабой инвариантности* множества W.

З а м е ч а н и е. В формуле для дефекта слабой инвариантности ε_W вместо константы Липшица L можно взять функцию $L(\tau)$ ($L(\tau) \leqslant L$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$), где $L(\tau)$ — константа Липшица по переменной x вектор-функции $f(\tau, x, u)$ на множестве $D(\tau) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon (\tau, x) \in D\big\}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$. Считаем при этом, что $L(\tau)$ — интегрируемая функция на $[t_0, \vartheta]$. С учетом этого замечания дефект слабой инвариантности множества W примет вид $\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \displaystyle\int_{t_0}^{\vartheta} e^{L(\tau)(\vartheta-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau$. В ряде случаев подмена в формуле для ε_W константы L функцией $L(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ значительно улучшает величину ε_W.

Однако ниже мы будем проводить рассуждения с дефектом ε_W, определенным через константу L.

Введем множество $\mathcal{W} = W^* \cap D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 [1, теорема, с. 275]. *Пусть управляемая система* (1.1) *и компакт* $W \subset D$, $W(t) \neq \varnothing$ *при* $t \in [t_0, \vartheta]$, *удовлетворяют условиям A, B, C*, E. Тогда множество* $\mathcal{W}$ *слабо инвариантно относительно д. в.* (1.2).

Из теоремы 2 вытекает, что для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in W$ и любого $\varepsilon \in (0, \infty)$ существует движение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, управляемой системы (1.1), удовлетворяющее включению $x(t) \in W(t) + B\,(0, \varkappa(t) + \varepsilon)$ при $t \in [t_0, \vartheta]$.

Пусть перед нами стоит задача о наведении управляемой системы (1.1) в момент ϑ на целевое множество M, которое удовлетворяет равенству $W(\vartheta) = M$ (т. е. стоит задача о сближении системы (1.1) с $W(\vartheta) = M$). С помощью известных процедур управления с поводырем, пристроенных к слабо инвариантному относительно д. в. (1.2) множеству $\mathcal{W}$, мы можем построить управление $u(t)$ на промежутке $[t_0, \vartheta]$ для системы (1.1), которое обеспечивает сколь угодно точное приведение движения $x(t)$, $(t_0, x_0) \in W$ системы (1.1) на ε_W-окрестность множества M. Таким образом, в задаче о наведении системы (1.1) в момент ϑ на множество $M = W(\vartheta)$ дефект ε_W множества W есть та погрешность, которую лицо, управляющее системой (1.1), гарантирует себе, используя $\mathcal{W}$ в качестве базы для процедуры управления.

3. Оценка дефекта слабой инвариантности множества W с кусочно-гладкой границей

Перейдем к рассмотрению множеств $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ определенного вида, обладающих кусочно-гладкой границей ∂W. Выпишем соотношения, определяющие дефект ε_W слабой инвариантности этих множеств W относительно д. в. (1.2).

Пусть задан компакт

$$W = \{(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \colon g(t, x) \leqslant 0\} \subset D, \tag{3.1}$$

$$g(t, x) = \max_{i \in \overline{1, I}} \varphi^{(i)}(t, x); \tag{3.2}$$

здесь функции $\varphi^{(i)}(t, x)$ определены и непрерывны на $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ вместе с $\dfrac{\partial \varphi^{(i)}(t, x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \varphi^{(i)}(t, x)}{\partial x_j}$, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, n}$.

Предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие A1. $W(t) \neq \varnothing$, $t \in [t_0, \vartheta]$ и

$$h^{(i)}(t_*, x_*) = \mathrm{grad_x}\, \varphi^{(i)}(t_*, x_*) \neq \mathbf{0},$$
$$(t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta], \quad i = \overline{1, I}.$$

Для формулировки еще одного условия введем обозначения

$$z_* = (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta);$$
$$B(z_*; \varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|z - z_*\| \leqslant \varepsilon \right\}, \quad U(z_*; \varepsilon) = \mathrm{int}\, B(z_*; \varepsilon);$$
$$H(z_*; \varepsilon) = B(z_*; \varepsilon) \cap \partial W, \quad \varepsilon \in (0, \infty);$$
$$s^{(i)}(z_*) = -\|h^{(i)}(z_*)\|^{-1} h^{(i)}(z_*), \quad i = \overline{1, I};$$
$$I(z_*) = \left\{ i \in \overline{1, I} \colon \varphi^{(i)}(z_*) = 0 \right\}, \quad S = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \colon \|s\| = 1 \right\}.$$

Предполагаем, что выполняется следующее условие.

Условие A2. Для любой точки $z_* \in \partial W$ найдутся такие $\varepsilon_* \in (0, \infty)$, $\gamma_* \in (0, 1]$, $s_* \in S$, что

$$\inf\big(\langle s_*, s^{(i)}(w_*) \rangle \colon w_* \in H(z_*; \varepsilon_*), i \in I(w_*) \big) \geqslant \gamma_*.$$

Набор $\{U(z_*; \varepsilon_*) \colon z_* \in \partial W\}$ составляет открытое покрытие компакта ∂W в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Следовательно, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\big\{U(z_*^{(k)}; \varepsilon_*^{(k)}) \colon k = \overline{1, k_*}\big\}$; здесь $\varepsilon_*^{(k)}$ — число, соответствующее в условии A2 вместе с $\gamma_*^{(k)} \in (0, 1]$ и $s_*^{(k)} \in S$ точке $z_*^{(k)}$.

Обозначим $\varepsilon = \min\limits_{k \in \overline{1, k_*}} \varepsilon_*^{(k)}$, $\gamma = \min\limits_{k \in \overline{1, k_*}} \gamma_*^{(k)}$.

Пусть точка $z_* = (t_*, x_*)$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ выбрана произвольно в ∂W. Тогда $z_* \in U(z_*^{(k)}; \varepsilon_*^{(k)}) \subset B(z_*^{(k)}; \varepsilon_*^{(k)})$ при некотором $k \in \overline{1, k_*}$. Отсюда следует $\min\limits_{i \in I(z_*)} \langle s_*^{(k)}, s^{(i)}(z_*) \rangle \geqslant \gamma_*^{(k)}$.

Из определения чисел ε и γ следует, что z_* удовлетворяет неравенству

$$\min_{i \in I(z_*)} \langle s_*, s^{(i)}(z_*) \rangle \geqslant \gamma, \tag{3.3}$$

при некотором векторе $s_* \in S$, например, при $s_* = s_*^{(k)}$.

Таким образом, для любой точки $z_* \in \partial W$ найдется вектор $s_* \in S$, который вместе с z_* удовлетворяет (3.3).

Далее опишем в рассматриваемом случае конус Булигана $T_W(z_*)$ множества W в точке z_*, производное множество $\overrightarrow{D}W(z_*)$ и, принимая во внимание (3.3), выделим некоторые свойства множества $\overrightarrow{D}W(z_*)$.

Из неравенства (3.3) следует, что

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i \in I(z_*)} \Pi_i(z_*) \Big) \neq \varnothing.$$

Здесь $\Pi_i(z_*) = \big\{ f \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \langle \operatorname{grad} \varphi^{(i)}(z_*), f \rangle \leqslant 0 \big\}$ — полупространство в $\mathbb{R}^{n+1}$ с вектором нормали $\operatorname{grad} \varphi^{(i)}(z_*)$, $i \in I(z_*)$.

Тогда конус $T_W(z_*)$, представим в виде

$$T_W(z_*) = \bigcap_{i \in I(z_*)} \Pi_i(z_*).$$

Конусу $T_W(z_*)$ сопоставим правое производное множество $\overrightarrow{D}W(z_*)$ многозначного отображения $t \mapsto W(t)$ в точке z_*

$$\overrightarrow{D}W(z_*) = \bigcap_{i \in I(z_*)} \Phi_i(z_*). \tag{3.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_i(z_*) = \{ d \in \mathbb{R}^n \colon (1, d) \in \Pi_i(z_*) \} &= \Big\{ d \in \mathbb{R}^n \colon \langle h^{(i)}(z_*), d \rangle \leqslant -\frac{\partial \varphi^{(i)}(z_*)}{\partial t} \Big\} \\ &= \big\{ d \in \mathbb{R}^n \colon \langle s^{(i)}(z_*), d \rangle \geqslant \varkappa^{(i)}(z_*) \big\}, \end{aligned}$$

где $\varkappa^{(i)}(z) = \frac{\partial \varphi^{(i)}(z)}{\partial t} \| h^{(i)}(z) \|^{-1}$, $z = (t, x) \in \partial W$, $i = \overline{1, I}$.

В силу условий, наложенных на функции $\varphi^{(i)}(z)$, $i = \overline{1, I}$, функции $\dfrac{\partial \varphi^{(i)}(z)}{\partial t}$, $\| h^{(i)}(z) \|^{-1}$, $i = \overline{1, I}$, определены и непрерывны на компакте ∂W и, значит, ограничены на ∂W. Тогда найдется $\rho \in (0, \infty)$, при котором справедливо неравенство

$$\max_{z \in \partial W,\ i \in I(z)} \frac{\partial \varphi^{(i)}(z)}{\partial t} \| h^{(i)}(z) \|^{-1} \leqslant \rho. \tag{3.5}$$

Рассмотрим точку $d_* = \dfrac{\rho}{\gamma} s_*$ в $\mathbb{R}^n$, где s_* и γ из (3.3). Покажем, что $d_* \in \Phi_i(z_*)$, $i \in I(z_*)$.

В самом деле, учитывая (3.3) и (3.5), получаем

$$\langle s^{(i)}(z_*), d_* \rangle = \frac{\rho}{\gamma} \langle s^{(i)}(z_*), s_* \rangle \geqslant \rho \geqslant \frac{\partial \varphi^{(i)}(z_*)}{\partial t} \| h^{(i)}(z_*) \|^{-1}, \quad i \in I(z_*). \tag{3.6}$$

Неравенство (3.6) означает, что $d_* \in \Phi_i(z_*)$, $i \in I(z_*)$. Вместе с тем доказано включение $d_* \in \overrightarrow{D}W(z_*)$, из которого следует

$$B\Big(\mathbf{0}; \frac{\rho}{\gamma}\Big) \cap \overrightarrow{D}W(z_*) \neq \varnothing, \quad z_* \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta). \tag{3.7}$$

Далее выберем произвольные моменты $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ из $[t_0,\vartheta]$ $(t^{(1)} < t^{(2)})$ и рассмотрим на промежутке $[t^{(1)},t^{(2)}]$ д. в.

$$\frac{dx}{dt} \in B\Big(\mathbf{0};\frac{\rho}{\gamma}\Big), \quad x(t^{(1)}) = x^{(1)}; \tag{3.8}$$

здесь точка $x^{(1)}$ выбрана произвольно в $\partial W(t^{(1)})$.

Согласно (3.7) множество W слабо инвариантно относительно д. в. (3.8) и, значит, найдется решение $x(t)$, $x(t^{(1)}) = x^{(1)}$ д. в. (3.8) на $[t^{(1)},t^{(2)}]$, удовлетворяющее включению

$$\big(t, x(t)\big) \in W \quad \text{при} \quad t \in [t^{(1)},t^{(2)}]. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует включение $x(t^{(2)}) \in W(t^{(2)})$. Кроме того, из равенства

$$x(t^{(2)}) = x^{(1)} + \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} b(t)\,dt, \quad b(t) \in B\Big(\mathbf{0};\frac{\rho}{\gamma}\Big)$$

выводим наравенство

$$\|x(t^{(2)}) - x^{(1)}\| \leqslant \frac{\rho}{\gamma}(t^{(2)} - t^{(1)}); \tag{3.10}$$

здесь $b(t)$ — абсолютно непрерывная на $[t^{(1)},t^{(2)}]$ функция.

В соответствии с (3.10) для любых t_* и t^*, $(t_*,t^*) \in \Delta$, $t_* \in [t_0,\vartheta)$ и любой точки $x_* \in \partial W(t_*)$ найдется точка $x^* \in W(t^*)$, удовлетворяющая неравенству

$$\|x^* - x_*\| \leqslant R(t^* - t_*), \quad (t_*,t^*) \in \Delta, \quad t_* \in [t_0,\vartheta),$$

где $R = \dfrac{\rho}{\gamma}$.

Вместе с тем мы показали, что для любых t_* и t^*, $(t_*,t^*) \in \Delta$ имеет место

$$h\big(\partial W(t_*), W(t^*)\big) \leqslant R(t^* - t_*).$$

Предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие A3. Множество $W(t)$ регулярно в $\mathbb{R}^n$ при любом $t \in [t_0,\vartheta]$:

$$h\big(\partial W(t_*), W(t^*)\big) = h\big(W(t_*), W(t^*)\big), \quad (t_*,t^*) \in \Delta.$$

Таким образом, для любых t_* и t^*, $(t_*,t^*) \in \Delta$, справедливо неравенство

$$h\big(W(t_*), W(t^*)\big) \leqslant R(t^* - t_*). \tag{3.11}$$

Если выбрать теперь произвольно точку $z^* = (t^*,x^*) \in \partial W$, $t^* \in (t_0,\vartheta]$, и ввести в рассмотрение левое производное множество $\overleftarrow{D}W(z^*)$ отображения $t \mapsto W(t)$ (по аналогии с правым производным множеством), то, используя рассуждения, аналогичные приведенным, получим

$$h\big(W(t^*), W(t_*)\big) \leqslant R(t^* - t_*), \quad (t_*,t^*) \in \Delta. \tag{3.12}$$

Из (3.11), (3.12) следует, что при $R = \dfrac{\rho}{\gamma}$

$$d\big(W(t_*), W(t^*)\big) \leqslant R(t^* - t_*), \quad (t_*,t^*) \in \Delta,$$

т. е. отображение $t \mapsto W(t)$ при выполнении условий A1–A3 липшицево на $[t_0,\vartheta]$.

Скорректируем теперь константу R: будем считать ее настолько большой, что

$$F(t,x) \subset B(\mathbf{0},R), \quad (t,x) \in D(\varepsilon).$$

В дополнение к условиям A1–A3 наложим на W еще два условия A4 и A5 и покажем, что при условиях A1–A5 функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0,\vartheta]$ удовлетворяет условию E.

Условие A4. Существует такое разбиение $\Gamma=\{t_0,t_1,\ldots,t_k,\ldots,t_{k^*}=\vartheta\}$ промежутка $[t_0,\vartheta]$, что для каждого $k\in\overline{0,k^*-1}$ найдется гомотопия

$$h^{(k)}\colon [t_k,t_{k+1}]\times Z^{(k)}\mapsto \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n,$$

$$Z^{(k)}=\partial W\big(t_*^{(k)}\big),\quad t_*^{(k)}\in(t_k,t_{k+1}),$$

такая, что

$$h^{(k)}\big(t,Z^{(k)}\big)=\big(t,\partial W(t)\big),\quad t\in[t_k,t_{k+1}].$$

Обозначим

$$h^{(k)}(t,z)=h_z^{(k)}(t)=\big(t,w_z^{(k)}(t)\big)\in\big(t,\partial W(t)\big),$$

$$(t,z)\in[t_k,t_{k+1}]\times Z^{(k)};$$

$$\|(t_*,w_*)-(t^*,w^*)\|^*=|t_*-t^*|+\|w_*-w^*\|,$$

$$(t_*,w_*)\ \text{ и }\ (t^*,w^*)\ \text{ из }\ \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n.$$

Так как отображение $(t,z)\mapsto h^{(k)}(t,z)=h_z^{(k)}(t)$ непрерывно на компакте $[t_k,t_{k+1}]\times Z^{(k)}$, то оно равномерно непрерывно на нем. Отсюда заключаем, что семейство отображений $\big\{t\mapsto h_z^{(k)}(t), t\in[t_k,t_{k+1}]\colon z\in Z^{(k)}\big\}$ равностепенно непрерывно: для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что из $|t_*-t^*|\leqslant\delta$, t_* и t^* из $[t_k,t_{k+1}]$ следует $\|h_z^{(k)}(t_*)-h_z^{(k)}(t^*)\|^*\leqslant\varepsilon$, $z\in Z^{(k)}$.

Назовем множество $S_z^{(k)}=\big\{h_z^{(k)}(t)\colon t\in[t_k,t_{k+1}]\big\}$ струей на $[t_k,t_{k+1}]$, отвечающей точке $z\in Z^{(k)}$.

Обратимся теперь к рассмотрению многозначного отображения $(t,x)\mapsto F(t,x)$, задающего д. в. $\dfrac{dx}{dt}\in F(t,x)$, $t\in[t_0,\vartheta]$.

Введем многозначное отображение $t\mapsto Q_z^{(k)}=F\big(h_z^{(k)}(t)\big)\subset\mathbb{R}^n$ на $[t_k,t_{k+1}]$, $z\in Z^{(k)}$.

Из равностепенной непрерывности семейства $\big\{t\mapsto h_z(t), t\in[t_k,t_{k+1}]\colon z\in Z^{(k)}\big\}$ получаем при $|t_*-t^*|\leqslant\delta$ (t_* и t^* из $[t_k,t_{k+1}]$), $z\in Z^{(k)}$

$$d\big(Q_z^{(k)}(t_*),Q_z^{(k)}(t^*)\big)\leqslant\omega^*\big(\|h_z^{(k)}(t_*)-h_z^{(k)}(t^*)\|^*\big)\leqslant\omega^*(\varepsilon). \tag{3.13}$$

Наряду с отображением $t\mapsto Q_z^{(k)}(t)$ рассмотрим многозначное отображение $t\mapsto H_z^{(k)}(t)=\overrightarrow{D}^{\nabla}W\big(h_z^{(k)}(t)\big)\subset\mathbb{R}^n$ на $[t_k,t_{k+1}]$, $z\in Z^{(k)}$, где $\overrightarrow{D}^{\nabla}W(t,w)$, $(t,w)\in\partial W$, определено равенством

$$\overrightarrow{D}^{\nabla}W(t,w)=\overrightarrow{D}W(t,w)\cap B(\mathbf{0};3R).$$

Условие A5. Для любого $\varepsilon^*>0$ найдется $\varepsilon>0$ такое, что если при каких-либо t_* и t^* из $[t_k,t_{k+1})$ и $z\in Z^{(k)}$ выполняется $\|h_z^{(k)}(t_*)-h_z^{(k)}(t^*)\|\leqslant\varepsilon$, то

$$d\big(H_z^{(k)}(t_*),H_z^{(k)}(t^*)\big)\leqslant\varepsilon^*.$$

Условие A5 означает, что если на какой-либо струе $S_z^{(k)}$, $z\in Z^{(k)}$, две точки достаточно близки, то отвечающие им производные множества отображения $t\mapsto W(t)$ (стесненные ограничением $B(\mathbf{0};3R)$) будут также близки (рис. 1).

Выберем далее произвольное $\varepsilon^*>0$ и по нему определим согласно условию A5 $\varepsilon>0$, по которому найдем из условия равностепенной непрерывности семейства $\big\{t\mapsto h_z(t), t\in[t_k,t_{k+1}]\colon z\in Z^{(k)}\big\}$ число $\delta>0$.

Пусть t_* и t^* — точки из $[t_k,t_{k+1})$, $|t_*-t^*|\leqslant\delta$. Имеем для этих точек из (3.13)

$$Q_z^{(k)}(t_*)\subset Q_z^{(k)}(t^*)_{\omega^*(\varepsilon)},\quad z\in Z^{(k)}.$$

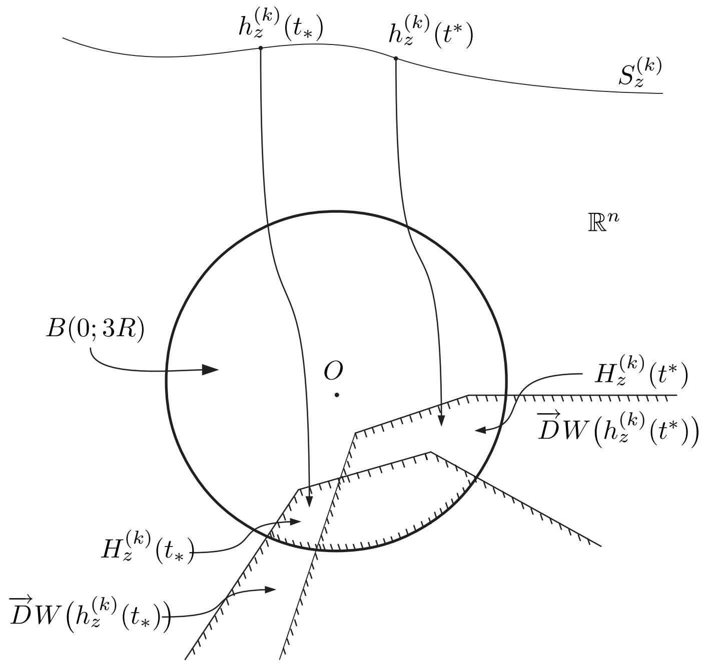


Рис. 1

Так как $\|h_z^{(k)}(t_*) - h_z^{(k)}(t^*)\| \leqslant \varepsilon$ при этих t_* и t^*, то из условия A4 следует

$$H_z^{(k)}(t_*) \subset H_z^{(k)}(t^*)_{\varepsilon^*}, \quad z \in Z^{(k)}.$$

Рассмотрим теперь два числа

$$\varepsilon\big(h_z^{(k)}(t_*)\big) = \varepsilon\big(t_*, w_z^{(k)}(t_*)\big) = \rho\big(Q_z^{(k)}(t_*), H_z^{(k)}(t_*)\big),$$

$$\varepsilon\big(h_z^{(k)}(t^*)\big) = \varepsilon\big(t^*, w_z^{(k)}(t^*)\big) = \rho\big(Q_z^{(k)}(t^*), H_z^{(k)}(t^*)\big)$$

при $z \in Z^{(k)}$.

Для сравнения чисел $\varepsilon\big(h_z^{(k)}(t_*)\big)$ и $\varepsilon\big(h_z^{(k)}(t^*)\big)$ выберем сначала точки $q_* \in Q_z^{(k)}(t_*)$ и $h_* \in H_z^{(k)}(t_*)$, удовлетворяющие равенству $\|q_* - h_*\| = \rho\big(Q_z^{(k)}(t_*), H_z^{(k)}(t_*)\big)$.

По точкам q_* и h_* выберем такие точки $q^* \in Q_z^{(k)}(t^*)$ и $h^* \in H_z^{(k)}(t^*)$, что

$$\|q_* - q^*\| \leqslant \omega^*(\varepsilon), \quad \|h_* - h^*\| \leqslant \varepsilon^*. \tag{3.14}$$

Из (3.14) следует при $z \in Z^{(k)}$

$$\|q^* - h^*\| \leqslant \|q^* - q_*\| + \|q_* - h_*\| + \|h_* - h^*\| \leqslant \rho\big(Q_z^{(k)}(t_*), H_z^{(k)}(t_*)\big) + \omega^*(\varepsilon) + \varepsilon^*.$$

Из этого неравенства и определения q^* и h^* получаем

$$\rho\big(Q_z^{(k)}(t^*), H_z^{(k)}(t^*)\big) \leqslant \rho\big(Q_z^{(k)}(t_*), H_z^{(k)}(t_*)\big) + \omega^*(\varepsilon) + \varepsilon^*. \tag{3.15}$$

Аналогично рассуждая, имеем

$$\rho\big(Q_z^{(k)}(t_*), H_z^{(k)}(t_*)\big) \leqslant \rho\big(Q_z^{(k)}(t^*), H_z^{(k)}(t^*)\big) + \omega^*(\varepsilon) + \varepsilon^*. \tag{3.16}$$

Из (3.15), (3.16) получаем при $z \in Z^{(k)}$: для любого $\varepsilon^* > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $|t_* - t^*| \leqslant \delta$, t_* и t^* из $[t_k, t_{k+1})$ следует $\big|\rho\big(Q_z^{(k)}(t_*), H_z^{(k)}(t_*)\big) - \rho\big(Q_z^{(k)}(t^*), H_z^{(k)}(t^*)\big)\big| \leqslant \omega^*(\varepsilon) + \varepsilon^*$, т. е.

$$\big|\varepsilon\big(h_z^{(k)}(t_*)\big) - \varepsilon\big(h_z^{(k)}(t^*)\big)\big| \leqslant \omega^*(\varepsilon) + \varepsilon^*, \quad z \in Z^{(k)}.$$

Так как $\omega^*(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то число ε в А5 можно считать (и будем считать) удовлетворяющим на $[t_0, \vartheta]$ неравенству $\omega^*(\varepsilon) \leqslant \varepsilon^*$. При таком ε справедливо неравенство

$$\left|\varepsilon\big(h_z^{(k)}(t_*)\big) - \varepsilon\big(h_z^{(k)}(t^*)\big)\right| \leqslant 2\varepsilon^*, \quad z \in Z^{(k)}.$$

Итак, полагаем, что ε в А5 выбрано из условия $\omega^*(\varepsilon) \leqslant \varepsilon^*$ и по нему выбрано соответствующее $\delta > 0$, получаем

$$\left|\varepsilon\big(h_z^{(k)}(t_*)\big) - \varepsilon\big(h_z^{(k)}(t^*)\big)\right| \leqslant 2\varepsilon^* \tag{3.17}$$

при $z \in Z^{(k)}$, $|t_* - t^*| \leqslant \delta$, t_* и t^* из $[t_k, t_{k+1})$.

Из (3.17) и равенства $h^{(k)}\big(t, Z^{(k)}\big) = \big(t, \partial W(t)\big)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, имеем

$$\varepsilon(t) = \max_{w \in \partial W(t)} \varepsilon(t, w) = \max_{z \in Z^{(k)}} \varepsilon\big(t, w_z^{(k)}(t)\big) = \max_{z \in Z^{(k)}} \varepsilon\big(h_z^{(k)}(t)\big), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{3.18}$$

Из (3.17), (3.18) имеем: для любого $\varepsilon^* > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при t_* и t^* из $[t_k, t_{k+1})$, $|t_* - t^*| \leqslant \delta$ справедливо

$$|\varepsilon(t_*) - \varepsilon(t^*)| \leqslant 2\varepsilon^*.$$

Отсюда следует, что функция $\varepsilon(t)$ непрерывна на $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \overline{0, k^* - 1}$, и, значит, кусочно непрерывна на $[t_0, \vartheta]$.

В итоге обосновано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть задан компакт $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, определенный соотношениями* (3.1), (3.2). *Тогда при условиях* А.1–А.5, *наложенных на W, выполняются условия* C* *и* E. □

Из теорем 2 и 3 следует, что для множества W из теоремы 3 корректно определено понятие дефекта стабильности, в том смысле что множество $\mathcal{W}$ слабо инвариантно относительно д. в. (1.2).

Выпишем формулу локального дефекта $\varepsilon(z_*)$ для точек $z_* = (t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, множества W (3.1) с кусочно-гладкой границей в предположении, что W удовлетворяет условиям А1–А5.

В рассматриваемом случае выполняются соотношения

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \rho\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)\big), \quad z_* = (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta),$$

где множество $\overrightarrow{D}W(z_*)$ представимо в виде (3.4), т. е. имеет место пересечение замкнутых полупространств $\Phi_i(z_*) = \big\{d \in \mathbb{R}^n \colon \langle h^{(i)}(z_*), d\rangle \leqslant \varkappa^{(i)}(z_*)\big\}$, $i \in I(z_*)$.

Для каждой точки $z_* = (t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, представляются две возможности:
1. $\varepsilon(z_*) > 0$; 2. $\varepsilon(z_*) = 0$.

Допустим, реализовалась возможность 1. Это означает, что $F(z_*) \cap \overrightarrow{D}W(z_*) = \varnothing$.

В этом случае справедливо

$$\varepsilon(z_*) = \max_{l \in L^0(z_*)} \big\{\rho_{F(z_*)}(l) - h_{\overrightarrow{D}W(z_*)}(l)\big\} > 0.$$

Здесь $L^0(z_*) = S \cap \operatorname{con} \operatorname{co} \big\{h^{(i)}(z_*) \colon i \in I(Z_*)\big\}$ — множество единичных векторов внешних нормалей к $\overrightarrow{D}W(z_*)$, $\rho_{F(z_*)}(s) = \min\limits_{f \in F(z_*)} \langle f, s\rangle$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Заметим, что в ряде случаев величину $\varepsilon(z_*)$ можно достаточно легко вычислить. К таким случаям относится, например, случай, когда управляемая система (1.1) рассматривается в $\mathbb{R}^2$ и при этом множества $F(z_*) = F(t_*, x_*)$, $x_* \in \mathbb{R}^2$, суть многоугольники в $\mathbb{R}^2$. В этом случае $\overrightarrow{D}W(z_*)$ есть многогранное множество в $\mathbb{R}^2$, и здесь существуют достаточно эффективные простые алгоритмы, позволяющие вычислить $\rho\big(F(z_*), \overrightarrow{D}W(z_*)\big)$.

Допустим, реализовалась возможность 2. Это означает, что $\overrightarrow{D}W(z_*) \cap F(z_*) \neq \varnothing$, т. е.

$$\max_{l \in L^0(z_*)} \left\{ \rho_{F(z_*)}(l) - h_{\overrightarrow{D}W(z_*)}(l) \right\} \leqslant 0. \tag{3.19}$$

Обратно, если выполняется (3.19), то $\varepsilon(z_*) = 0$. Таким образом, неравенство (3.19) и равенство $\varepsilon(z_*) = 0$ эквивалентны.

В итоге, проанализировав две возможности относительно $\varepsilon(z_*)$, приходим к равенствам

$$\begin{gathered} \varepsilon(z_*) = \max\{0, \varkappa(z_*)\}, \\ \varkappa(z_*) = \max_{l \in L^0(z_*)} \left\{ \rho_{F(z_*)}(l) - h_{\overrightarrow{D}W(z_*)}(l) \right\}. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Из (3.20) следует, что при $t_* \in [t_0, \vartheta)$ $\varepsilon(t_*) = \max\limits_{x_* \in \partial W(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*) = \max\{0, \psi(t_*)\}$, где $\psi(t_*) = \max\limits_{x_* \in \partial W(t_*)} \varkappa(t_*, x_*)$.

4. Пример множества W с кусочно-гладкой границей, удовлетворяющее условиям A1–A5

Рассмотрим множество $W \subset [0,3] \times \mathbb{R}^2$, которое определяется соотношениями (3.1) и (3.2), где функции $\varphi^{(i)}(t,x)$, $i = 1, 2$ имеют вид

$$\varphi^{(1)}(t,x) = (x_1 - 3 + t)^2 + x_2^2 - 16, \quad \varphi^{(2)}(t,x) = (x_1 + 3 - t)^2 + x_2^2 - 16.$$

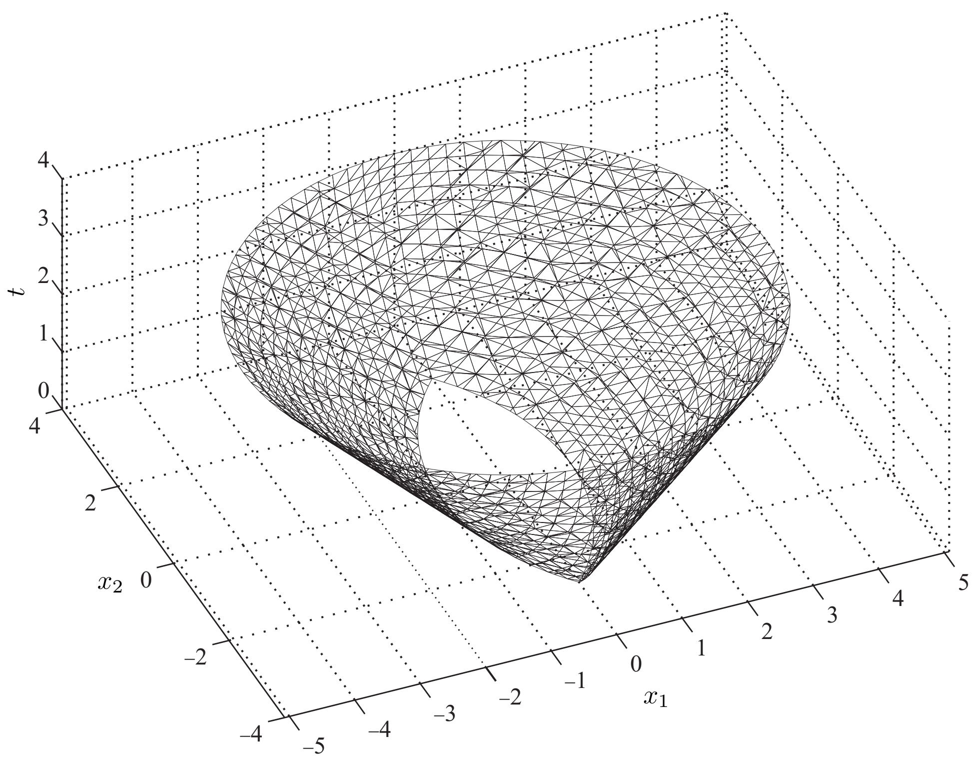


Рис. 2

На рис. 2 изображена граница ∂W.

Покажем справедливость условия A1. Сначала заметим, что $W(t) \neq \varnothing$, $t \in [0,3]$, так как $\mathbf{0} \in W(t)$. Далее оценим $\|h^{(i)}(t_*, x_*)\|$, $i = 1, 2$, при $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [0,3]$, $x_* = (x_{*1}, x_{*2})$:

$$\|h^{(1)}(t_*, x_*)\| = \|\big(2(x_{*1} - 3 + t), 2x_{*2}\big)\| = 2\sqrt{\varphi^{(1)}(t_*, x_*) + 16} = 8,$$
$$\|h^{(2)}(t_*, x_*)\| = \|\big(2(x_{*1} + 3 - t), 2x_{*2}\big)\| = 2\sqrt{\varphi^{(2)}(t_*, x_*) + 16} = 8.$$

Поэтому $h^{(i)}(t_*, x_*) \neq \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [0,3]$. Справедливость условия A1 доказана.

Покажем, что выполнено условие A2. Возьмем произвольную точку $z_* = (t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [0,3]$. В зависимости от выбора z_* возможны два случая: $|I(z_*)| = 1$ или $|I(z_*)| = 2$.

Рассмотрим первый случай. Без ограничения общности будем считать, что $I(z_*) = \{1\}$. Тогда $\varphi^{(1)}(z_*) = 0$ и $\varphi^{(2)}(z_*) < 0$. Более того, для $x_* = (x_{*1}, x_{*2})$ справедливы следующие оценки

$$-4 \leqslant -1 - t_* \leqslant x_{*1} < 0, \quad -\sqrt{16 - (3 - t_*)^2} < x_{*2} < \sqrt{16 - (3 - t_*)^2}. \tag{4.1}$$

Зафиксируем $\varepsilon_* \in (0, \infty)$, $\gamma_* \in (0, 1]$, $s_* \in S$ согласно приведенным ниже соотношениям:

$$\begin{gathered}\varepsilon_* = \Big\{1/2 \min\big\{|x_{*1}|, |x_{*2}|, \sqrt{16 - (3 - t_*)^2} - |x_{*2}|\big\}, \text{ если } x_{*2} \neq 0,\\ 1/2 \min\big\{|x_{*1}|, \sqrt{16 - (3 - t_*)^2}\big\}, \text{ если } x_{*2} = 0\Big\},\\ s_* = s^{(1)}(z_*) = 1/4\big(3 - x_{*1} - t, -x_{*2}\big), \quad \gamma_* = {x_{*1}}^2/32.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Выберем произвольную точку $w_* = (w_{*1}, w_{*2}) \in H(z_*, \varepsilon_*) = B(z_*; \varepsilon_*) \cap \partial W$. Отметим, что $I(w_*) = \{1\}$ в силу выбора ε_*. Кроме того, из (4.1), (4.2) следуют неравенства

$$|w_{*1}| \geqslant |x_{*1} - \varepsilon_*| \geqslant |x_{*1}|/2, \quad w_{*2} x_{*2} \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Теперь оценим величину $\langle s_*, s^{(1)}(w_*)\rangle$:

$$\langle s_*, s^{(1)}(w_*)\rangle = 1/16\big((3 - x_{*1} - t_*)(3 - w_{*1} - t_*) + x_{*2} w_{*2}\big). \tag{4.4}$$

Для первого слагаемого соотношения (4.4) справедлива следующая оценка:

$$(3 - x_{*1} - t_*)(3 - w_{*1} - t_*) \geqslant |x_{*1}|(3 - w_{*1} - t_*) \geqslant |x_{*1}||w_{*1}| \geqslant {x_{*1}}^2/2. \tag{4.5}$$

Принимая во внимание (4.4), (4.5), а также оценки из (4.3), получим

$$\langle s_*, s^{(1)}(w_*)\rangle \geqslant 1/16\big({x_{*1}}^2/2 + x_{*2} w_{*2}\big) \geqslant {x_{*1}}^2/32 \geqslant \gamma_*.$$

Значит, в силу произвольного выбора точки w_* мы доказали, что выполнено условие A2 для первого случая.

Рассмотрим второй случай, когда $I(z_*) = \{1, 2\}$. Тогда $\varphi^{(1)}(z_*) = 0$, $\varphi^{(2)}(z_*) = 0$, а для x_{*1} и x_{*2} справедливы соотношения

$$x_{*1} = 0, \quad x_{*2} = \pm\sqrt{16 - (3 - t_*)^2}. \tag{4.6}$$

Зафиксируем $\varepsilon_* \in (0, \infty)$, $\gamma_* \in (0, 1]$, $s_* \in S$ согласно следующим соотношениям:

$$\varepsilon_* = |x_{*2}|/2, \quad s_* = (0, -\operatorname{sign} x_{*2}), \quad \gamma_* = \sqrt{16 - (3 - t_*)^2}/8. \tag{4.7}$$

Выберем произвольную точку $w_* \in H(z_*, \varepsilon_*)$. Из (4.7) следуют оценки

$$|w_{*2}| \geqslant |x_{*2} - \varepsilon_*| \geqslant |x_{*2}|/2 \geqslant \sqrt{16 - (3 - t_*)^2}/2, \quad \operatorname{sign} w_{*2} = \operatorname{sign} x_{*2}. \tag{4.8}$$

Принимая во внимание (4.8), оценим величины $\langle s_*, s^{(i)}(w_*)\rangle,\ i = 1, 2.$

$$\langle s_*, s^{(i)}(w_*)\rangle = 1/4 w_{*2} \operatorname{sign} x_{*2} = 1/4|w_{*2}| \geqslant \sqrt{16-(3-t_*)^2}/8 \geqslant \gamma_*, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, в силу произвольного выбора точки w_* выполнение условия A2 доказано и для второго случая.

В дополнение оценим величину $R = \dfrac{\rho}{\gamma}$ для рассматриваемого примера. Так как $\dfrac{\partial\varphi^{(i)}(z)}{\partial t} \leqslant 0$, $z \in \partial W$, $i = 1, 2$, то в качестве ρ можно брать любое положительное число. Зафиксируем $\rho = 1$. Для γ справедлива оценка сверху $\gamma < \sqrt{16-(3-t_*)^2}/8 < 1$, которая верна в силу того, что в любом конечном подпокрытии ∂W будут элементы, соответствующие второму рассмотренному случаю. Значит, верна оценка $1 = \rho \leqslant R$.

Далее, справедливость условия A3 вытекает из выпуклости множеств $W(t),\ t \in [0, 3]$ в $\mathbb{R}^2$.

Покажем справедливость условия A4. Заметим, что для рассматриваемого примера нет необходимости в разбиении Γ промежутка $t \in [0, 3]$, так как гомотопию можно построить на всем промежутке $[0, 3]$. В самом деле, рассмотрим следующее преобразование $h = (h_0, h_1, h_2)\colon [0, 3] \times Z \mapsto \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2,\ Z = \partial W(1) \subset [-2, 2] \times [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$

$$h_0(t, z) = t, \quad h_1(t, z) = 0.5(1 + t)z_1,$$

$$h_2(t, z) = \Big\{ \sqrt{0.5(1+t)}z_2, \text{ если } z_1 = \pm 2,$$

$$\frac{\sqrt{16 - \big(0.5(1+t)z_1 - 3 + t\big)^2}}{\sqrt{16-(z_1-2)^2}} z_2, \text{ если } z_1 \in (-2, 0],$$

$$\frac{\sqrt{16 - \big(0.5(1+t)z_1 + 3 - t\big)^2}}{\sqrt{16-(z_1+2)^2}} z_2, \text{ если } z_1 \in (0, 2)\Big\}.$$

Нетрудно убедиться, что h является непрерывным отображением по совокупности переменных на $[0, 3] \times Z$. Более того, $h\,(t, Z) = \big(t, \partial W(t)\big),\ t \in [0, 3]$.

Таким образом, справедливость условия A4 доказана. Следует отметить еще одно важное свойство построенной гомотопии h:

$$I\big(h_z(t)\big) = I(z), \quad z \in Z, \quad t \in [0, 3]. \tag{4.9}$$

Покажем теперь, что выполнено условие A5. Возьмем произвольные $\varepsilon^* > 0$, t_* и $t^* \in [0, 3)$, $z \in Z = \partial W(1)$. Построим такое $\varepsilon > 0$, что при $\|h_z(t_*) - h_z(t^*)\| \leqslant \varepsilon$ выполняется

$$d\big(H_z(t_*), H_z(t^*)\big) \leqslant \varepsilon^*,$$

где $H_z(t) = \overrightarrow{D}^\nabla W\big(h_z(t)\big) = \overrightarrow{D} W\big(h_z(t)\big) \cap B(0; 3R) \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим $z_* = (t_*, x_*) = h_z(t_*) \in \partial W(t_*)$, $z^* = (t^*, x^*) = h_z(t^*) \in \partial W(t^*)$. Согласно (4.9) имеем $I(z) = I(z_*) = I(z^*)$.

В зависимости от выбора z возможны два случая: $|I(z)| = 1$ или $|I(z)| = 2$.

Рассмотрим первый случай. Без ограничения общности будем считать, что $I(z) = \{1\}$. Тогда $I(z_*) = I(z^*) = \{1\}$. Обозначим $h_* = h^{(1)}(t_*, x_*)$ и $h^* = h^{(1)}(t^*, x^*)$.

Выпишем формулы для $\overrightarrow{D} W(z_*)$ и $\overrightarrow{D} W(z^*)$:

$$\overrightarrow{D} W(z_*) = \Big\{ d_* \in \mathbb{R}^2 \colon \langle h_*, d_*\rangle + \frac{\partial\varphi^{(1)}(t_*, x_*)}{\partial t} \leqslant 0 \Big\},$$

$$\overrightarrow{D} W(z^*) = \Big\{ d^* \in \mathbb{R}^2 \colon \langle h^*, d^*\rangle + \frac{\partial\varphi^{(1)}(t^*, x^*)}{\partial t} \leqslant 0 \Big\}.$$

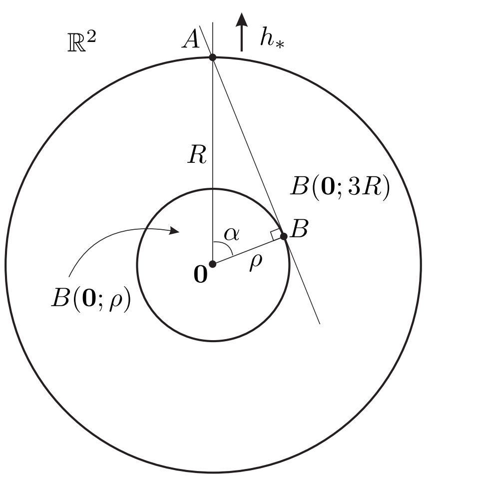


Рис. 3

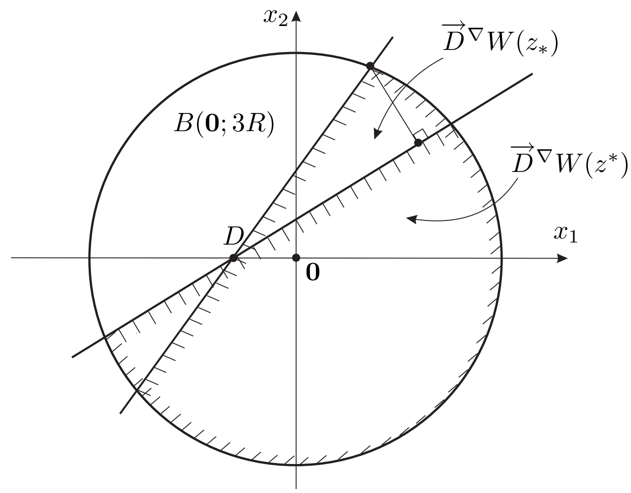


Рис. 4

Для x_* и x^* выполняются оценки (4.1), поэтому $\dfrac{\partial\varphi^{(1)}(t_*,x_*)}{\partial t}\leqslant 0$ и $\dfrac{\partial\varphi^{(1)}(t^*,x^*)}{\partial t}\leqslant 0$. Значит, $\mathbf{0}\in\overrightarrow{D}^{\nabla}W(z_*)$ и $\mathbf{0}\in\overrightarrow{D}^{\nabla}W(z^*)$.

Обозначим $r_*=\rho\big(\mathbf{0},\overrightarrow{D}W(z_*)\big)$ и $r^*=\rho\big(\mathbf{0},\overrightarrow{D}W(z^*)\big)$. Для r_* и r^* справедливы следующие соотношения:

$$r_*=\left|\frac{\partial\varphi^{(1)}(t_*,x_*)}{\partial t}\right|\|h_*\|^{-1}\leqslant\rho\leqslant R,\quad r^*=\left|\frac{\partial\varphi^{(1)}(t^*,x^*)}{\partial t}\right|\|h^*\|^{-1}\leqslant\rho\leqslant R.$$

Рассмотрим круги $B(\mathbf{0};\rho)$ и $B(\mathbf{0};3R)$ в $\mathbb{R}^2$ (рис. 3, рис. 4). Пусть h_* направлен вертикально вверх. Обозначим через A точку на окружности $S(\mathbf{0};3R)$, лежащую в пересечении окружности $S(\mathbf{0};3R)$ и направления $\Lambda_{h_*}=\big\{\lambda h_*\colon\lambda\geqslant 0\big\}$. Проведем из A какую-либо касательную прямую Λ к кругу $B(\mathbf{0};\rho)$. Обозначим через B точку касания прямой Λ и круга $B(\mathbf{0};\rho)$. В результате получим прямоугольный треугольник $A\mathbf{0}B$ с прямым углом при вершине B. Пусть α — угол между гипотенузой $\mathbf{0}A$ и катетом $\mathbf{0}B$ треугольника $A\mathbf{0}B$. Очевидно, что $\cos\alpha=\rho/3R\leqslant 1/3$ (см. рис. 3).

Выберем некоторое число $\xi\in(0,\min\{\alpha,\varepsilon^*/6R\})$. Тогда получим, что для любого вектора h^* такого, что $(\widehat{h_*,h^*})\leqslant\xi$, множество $\overrightarrow{D}^{\nabla}W(z^*)$ не содержит точку A (см. рис. 4), где символ $\widehat{(a,b)}$ означает угол между векторами a и b из $\mathbb{R}^2$.

Поскольку $h^{(1)}(t,x)$ линейно зависит от (t,x) и $\|h_*\|=\|h^*\|=8$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что при $\|z_*-z^*\|\leqslant\varepsilon$ выполняется $(\widehat{h_*,h^*})\leqslant\xi$.

Введем в рассмотрение следующие множества в $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma^{\nabla}_{h_*}(t_*,x_*)=B(\mathbf{0};3R)\cap\Gamma_{h_*}(t_*,x_*),\quad \Gamma^{\nabla}_{h^*}(t^*,x^*)=B(\mathbf{0};3R)\cap\Gamma_{h^*}(t^*,x^*),$$

где обозначено $\Gamma_h(t,x)=\Big\{f\in\mathbb{R}^2\colon\langle h,f\rangle+\dfrac{\partial\varphi^{(1)}(t,x)}{\partial t}=0\Big\}=\partial\overrightarrow{D}W(t,x)$.

Из того факта, что векторы h_* и h^* удовлетворяют неравенству $(\widehat{h_*,h^*})\leqslant\xi$, следует

$$h\big(\overrightarrow{D}^{\nabla}W(z^*),\overrightarrow{D}^{\nabla}W(z_*)\big)\leqslant h\big(\Gamma^{\nabla}_{h_*}(t_*,x_*),\Gamma^{\nabla}_{h^*}(t^*,x^*)\big).\tag{4.10}$$

Заметим, что существует точка D пересечения множеств $\Gamma^{\nabla}_{h_*}(t_*,x_*)$ и $\Gamma^{\nabla}_{h^*}(t^*,x^*)$, и она имеет координаты $(-1,0)$, а значит лежит внутри круга $B(\mathbf{0};3R)$. Поэтому справедлива оценка

$$h\big(\Gamma^{\nabla}_{h_*}(t_*,x_*),\Gamma^{\nabla}_{h^*}(t^*,x^*)\big)\leqslant 6R\sin(\widehat{h_*,h^*})\leqslant 6R\xi\leqslant\varepsilon^*.\tag{4.11}$$

Из (4.10), (4.11), принимая во внимание определение $H_z(t)$, следует соотношение

$$h\big(H_z(t_*),H_z(t^*)\big)\leqslant\varepsilon^*.$$

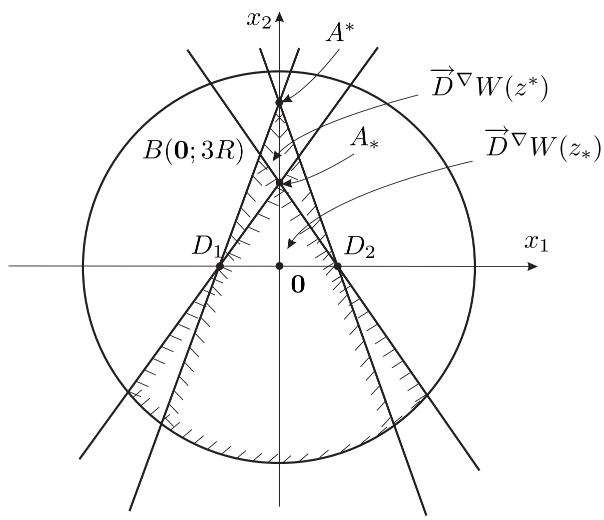


Рис. 5

Вместе с тем мы доказали справедливость условия A5 для первого случая.

Рассмотрим второй случай, когда $I(z)=\{1,2\}$. Тогда для $x=(x_1,x_2)$, $t=1$, выполняются соотношения (4.6), т. е. $x_1=0$, $x_2=\pm\sqrt{12}$. Без ограничения общности будем полагать, что $x_2=\sqrt{12}$. В таком случае для $x_*=(x_{*1},x_{*2})$ и $x^*=({x^*}_1,{x^*}_2)$ справедливы соотношения

$$x_{*1}={x^*}_1=0,\quad x_{*2}=\sqrt{16-(3-t_*)^2},\quad {x^*}_2=\sqrt{16-(3-t^*)^2}.$$

Опишем множество $\overrightarrow{D}W(z_*)$ в $\mathbb{R}^2$ (рис. 5). Согласно (3.4) имеем $\overrightarrow{D}W(z_*)=\Phi_1(z_*)\cap\Phi_2(z_*)$, т. е. оно является пересечением двух полуплоскостей, рассмотренных в первом случае. В исследуемом примере $\Phi_1(z_*)$ и $\Phi_2(z_*)$ являются симметричными относительно оси $\mathbf{0}x_2$, при этом вершина A_* — точка пересечения прямых $\partial\Phi_1(z_*)$ и $\partial\Phi_2(z_*)$ — лежит на оси $\mathbf{0}x_2$ и имеет координаты $(0,\sqrt{16-(3-t_*)^2})$. Таким же образом описывается множество $\overrightarrow{D}W(z^*)$. $\overrightarrow{D}W(z^*)=\Phi_1(z^*)\cap\Phi_2(z^*)$, а вершина $A^*\in\partial\Phi_1(z^*)\cap\partial\Phi_2(z^*)$ имеет координаты $(0,\sqrt{16-(3-t^*)^2})$.

Обозначим $\Phi_1^\nabla(z)=B(\mathbf{0};3R)\cap\Phi_1(z)$, $\Phi_2^\nabla(z)=B(\mathbf{0};3R)\cap\Phi_2(z)$, и, по аналогии с первым случаем, $\Gamma_1^\nabla(z)=B(\mathbf{0};3R)\cap\Gamma_1(z)$, $\Gamma_2^\nabla(z)=B(\mathbf{0};3R)\cap\Gamma_2(z)$, где $\Gamma_1(z)=\partial\Phi_1(z)$, $\Gamma_2(z)=\partial\Phi_2(z)$.

Опираясь на доказательство, рассмотренное в первом случае, найдем такие $\varepsilon_1>0$ и $\varepsilon_2>0$, что при $\|z_*-z^*\|\leqslant\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ выполняются оценки

$$d\big(\Phi_1^\nabla(z_*),\Phi_1^\nabla(z^*)\big)\leqslant\varepsilon^*,\quad d\big(\Phi_2^\nabla(z_*),\Phi_2^\nabla(z^*)\big)\leqslant\varepsilon^*. \tag{4.12}$$

Дополнительно отметим, что существует точка пересечения D_1 множеств $\Phi_1^\nabla(z_*)$ и $\Phi_1^\nabla(z^*)$, имеющая координаты $(-1,0)$, а также точка пересечения D_2 множеств $\Phi_2^\nabla(z_*)$ и $\Phi_2^\nabla(z^*)$, имеющая координаты $(1,0)$. Обе точки лежат внутри круга $B(\mathbf{0};3R)$ (см. рис. 5).

Поэтому справедлива оценка

$$d\big(\overrightarrow{D}^\nabla W(z_*),\overrightarrow{D}^\nabla W(z^*)\big)\leqslant\max\big\{d\big(\Phi_1^\nabla(z_*),\Phi_1^\nabla(z^*)\big),\ d\big(\Phi_2^\nabla(z_*),\Phi_2^\nabla(z^*)\big),\ \rho(A_*,A^*)\big\}. \tag{4.13}$$

Теперь оценим $\rho(A_*,A^*)$:

$$\rho(A_*,A^*)\leqslant\Big|\sqrt{16-(3-t^*)^2}-\sqrt{16-(3-t_*)^2}\Big|\leqslant\max_{t\in[0,3]}\frac{3-t}{\sqrt{16-(3-t)^2}}|t^*-t_*|$$
$$\leqslant 3|t^*-t_*|/\sqrt{7}\leqslant 3\varepsilon/\sqrt{7}. \tag{4.14}$$

Выберем $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\sqrt{7}\varepsilon^*/3\}$. Принимая во внимание определение $H_z(t)$ и оценки (4.12)–(4.14), имеем

$$d\big(H_z(t_*),H_z(t^*)\big)\leqslant\varepsilon^*.$$

Таким образом, справедливость условия A5 доказана и для второго случая. Вместе с тем мы показали, что рассматриваемое множество W удовлетворяет всем условиям A1–A5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ушаков В.Н., Зимовец А.А.** К вопросу о слабой инвариантности множеств относительно дифференциального включения, порожденного управляемой системой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 271–285.
2. **Ушаков В.Н., Малёв А.Г.** К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
3. Инвариантность множеств при конструировании решений задачи о сближении в фиксированный момент времени / В.Н. Ушаков, А.Р. Матвийчук, А.В. Ушаков, Г.В. Паршиков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 264–283.
4. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 3. P. 155–167.

Поступила 20.07.2013

Ушаков Владимир Николаевич
чл.-корр. РАН, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Котельникова Анна Николаевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: annk222@rambler.ru

Малёв Алексей Георгиевич
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: malevag@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.95

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

В. Е. Фёдоров, П. Н. Давыдов

С использованием методов теории вырожденных полугрупп операторов доказаны локальное существование и единственность решения задач Коши и Шоуолтера для некоторых новых классов полулинейных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной и нестационарным нелинейным оператором при искомой функции. Полученные общие результаты использованы при исследовании разрешимости начально-краевых задач для класса систем уравнений обобщенного гидродинамического типа, включающего в себя систему уравнений Осколкова динамики вязкоупругой жидкости, а также ее усложненные версии, в том числе с нестационарной нелинейностью, с нелинейной вязкостью, нагруженные системы и др.

Ключевые слова: полулинейное вырожденное эволюционное уравнение, уравнение соболевского типа, система уравнений Осколкова, нелинейная вязкость, нагруженное уравнение.

V. E. Fedorov, P. N. Davydov. Semilinear degenerate evolution equations and nonlinear systems of hydrodynamic type.

Methods from the theory of degenerate semigroups of operators are used to prove the local existence and uniqueness of solutions to the Cauchy and Showalter problems for some new classes of semilinear first-order differential equations in a Banach space with degenerate operator at the derivative and nonstationary nonlinear operator at the required function. The obtained general results are used in the investigation of solvability of initial–boundary value problems for a class of systems of equations of generalized hydrodynamic type including Oskolkov's system of equations for the dynamics of viscoelastic fluid and its complicated versions, for example, with nonstationary nonlinearity, with nonlinear viscosity, weighted systems, etc.

Keywords: semilinear degenerate evolution equation, Sobolev type equation, Oskolkov's system of equations, nonlinear viscosity, weighted equation.

Введение

В рамках начальных задач для эволюционных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых пространствах удобно исследовать многие классы начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных [1–5]. Помимо эволюционных уравнений, разрешенных относительно производной, важное значение имеют также уравнения с вырожденным оператором при производной, к которым редуцируются различные уравнения с вырожденным дифференциальным по пространственным переменным оператором при производной по времени, а также системы уравнений, не содержащие производных по времени от некоторых искомых функций. Такие уравнения и системы встречаются при моделировании некоторых процессов в гидродинамике, теории полупроводников и др. [4–9].

Объектом исследования в данной работе является полулинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t)). \tag{0.1}$$

Здесь $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, $L\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линейный и непрерывный оператор, $M\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линейный, замкнутый оператор с областью определения D_M, плотной в $\mathfrak{U}$, U — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$, $N\colon U \to \mathfrak{F}$ — нелинейный оператор. Не разрешенные относительно производной нелинейные уравнения вида (0.1), часто называемые также уравнениями соболевского типа, и их конкретные реализации в виде уравнений математической физики исследовались многими авторами. Отметим работы А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова и их коллег ([5; 10] и др.), касающиеся вопросов существования и разрушения решений уравнений вида (0.1), вообще говоря, с нелинейным оператором L, работы А.И. Кожанова [11], И.А. Шишмарева с соавторами [12].

В данной работе с использованием методов теории вырожденных полугрупп операторов исследуется локальная однозначная разрешимость задачи Коши и обобщенной задачи Шоуолтера для некоторых классов полулинейных уравнений вида (0.1). Отличительной особенностью полученных результатов является тот факт, что они касаются вырожденного случая $\ker L \neq \{0\}$. Такие уравнения рассматривались также в работах Н.А. Сидорова с соавторами (см. [3] и библиографию там же) при условиях фредгольмовости оператора L и существования обобщенного жорданова набора, в работах Г.А. Свиридюка и Т.Г. Сукачевой (см., например, [13;14]), в которых оператор N не зависит явно от t либо имеет вид $N(t,u) = N_1(u)+f(t)$, а речь идет о существовании и единственности решений, являющихся так называемыми квазистационарными траекториями уравнения. Уравнение (0.1) с нестационарным нелинейным оператором общего вида исследовалось в некоторых работах авторов данной статьи, однако либо при других условиях на линейную часть уравнения (сильная (L,p)-секториальность [15; 16], сильная (L,p)-радиальность оператора M [17; 18]), влекущих необходимость выполнения гораздо более ограничительных условий на нелинейный оператор, либо в частном случае рассматриваемой здесь ситуации — при условии сильной $(L,0)$-ограниченности оператора M [19].

В основной части работы сначала рассмотрена задача Коши для невырожденного полулинейного эволюционного уравнения с непрерывными линейным и нестационарным нелинейным операторами при искомой функции. Найдены минимальные требования на гладкость нелинейного оператора, достаточные для существования локального решения повышенной гладкости. Этот результат использован далее при рассмотрении вырожденного полулинейного эволюционного уравнения (0.1) с (L,p)-ограниченным оператором M. Рассмотрены две ситуации: когда нелинейный оператор не зависит от поточечной проекции искомой функции на ядро разрешающей группы линейной части рассматриваемого уравнения и когда образ нелинейного оператора лежит в образе этой группы. В обоих случаях доказаны теоремы о локальном существовании и единственности решения обобщенной задачи Шоуолтера и задачи Коши для уравнения (0.1). При этом показано, что в отличие от обобщенной задачи Шоуолтера задача Коши является переопределенной — ее разрешимость требует выполнения дополнительного условия согласования данных задачи. В этом проявляется известное свойство вырожденных эволюционных уравнений, заключающееся в отсутствии разрешимости задачи Коши для них при произвольных начальных данных [3; 4].

С помощью полученных в данной работе общих результатов исследована разрешимость класса нелинейных систем уравнений обобщенного гидродинамического типа, включающего в себя систему уравнений Осколкова динамики жидкости Кельвина — Фойгта, а также ее различные усложненные версии, в том числе с нестационарной нелинейностью, с нелинейной вязкостью, нагруженную систему уравнений и др.

1. Решение повышенной гладкости полулинейного невырожденного эволюционного уравнения с непрерывными операторами

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ (линейный и непрерывный на $\mathfrak{X}$ оператор), $x_0 \in \mathfrak{X}$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, оператор $B\colon U \to \mathfrak{X}$, вообще говоря, нелинейный. Рассмотрим задачу Коши

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

для полулинейного уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t, x(t)). \tag{1.2}$$

Решением задачи (1.1), (1.2) называется функция $x \in C^1([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$, для которой выполняется условие (1.1), для $t \in [t_0, t_1]$ пара $(t, x(t)) \in U$ и выполняется равенство (1.2).

Для $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $t \in \mathbb{R}$ обозначим $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$.

Лемма. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $B \in C(U;\mathfrak{X})$, $x_0 \in \mathfrak{X}$. *Тогда функция* $x \in C([t_0,t_1];\mathfrak{X})$ *является решением задачи* (1.1), (1.2) *в том и только в том случае, когда*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s,x(s))ds, \quad t \in [t_0,t_1]. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x — решение задачи (1.1), (1.2), тогда $x \in C^1([t_0,t_1];\mathfrak{X})$. Поэтому отображение $t \to B(t,x(t))$ непрерывно действует в $\mathfrak{X}$, и x в силу равенства (1.2) удовлетворяет интегральному уравнению (1.3).

Пусть выполняется (1.3), тогда $x(t_0) = x_0$. В силу непрерывности x правая часть равенства (1.3) непрерывно дифференцируема, при этом

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{A(t-t_0)}x_0 + B(t,x(t)) + \int_{t_0}^{t} Ae^{A(t-s)}B(s,x(s))\,ds = Ax(t) + B(t,x(t)). \qquad \square$$

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, $S_\delta(x_0) = \{x \in \mathfrak{X}\colon \|x - x_0\|_{\mathfrak{X}} \le \delta\}$. Функцию $B \in C(U;\mathfrak{X})$ будем называть *локально липшицевой по* x, если для любой точки $(t_0,x_0) \in U$ найдется такое $\delta > 0$, что $[t_0-\delta,t_0+\delta] \times S_\delta(x_0) \subset U$, и такое $l > 0$, что при всех (t,x), $(t,y) \in [t_0-\delta,t_0+\delta] \times S_\delta(x_0)$ выполняется $\|B(t,x) - B(t,y)\|_{\mathfrak{X}} \le l\|x-y\|_{\mathfrak{X}}$.

Теорема 1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, U — *открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, $n \in \mathbb{N}$, *отображение* $B \in C^{n-1}(U;\mathfrak{X})$ *локально липшицево по* x. *Тогда для любого* $(t_0,x_0) \in U$ *существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $x \in C^1([t_0,t_1];\mathfrak{X})$. *При этом* $x \in C^n([t_0,t_1];\mathfrak{X})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы достаточно показать, что интегральное уравнение (1.3) имеет единственное решение $x \in C([t_0,t_1];\mathfrak{X})$ для некоторого $t_1 > t_0$.

Выберем $\tau > 0$ и $\delta > 0$ так, чтобы

$$V = \{(t,x)\colon t \in [t_0,t_0+\tau], \|x - x_0\|_X \le \delta\} \subset U.$$

Это возможно в силу открытости множества U. Обозначим через S множество всех непрерывных функций $y\colon [t_0,t_0+\tau] \to \mathfrak{X}$ таких, что $\|y(t) - x_0\|_{\mathfrak{X}} \le \delta$ при $t \in [t_0,t_0+\tau]$. Зададим на S метрику с помощью нормы $\|y\|_\tau = \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|y(t)\|_{\mathfrak{X}}$. Определим оператор

$$G(y)(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s,y(s))\,ds, \quad t \in [t_0,t_0+\tau],$$

и покажем что G при достаточно малом $\tau > 0$ отображает S в себя и является в нем строгим сжатием. Действительно, пусть $K = \max_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|B(t,x_0)\|_{\mathfrak{X}}$, тогда

$$\|G(y)(t) - x_0\|_{\mathfrak{X}} \le \|(e^{A(t-t_0)} - I)x_0\|_{\mathfrak{X}}$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}\left(\|B(s,y(s)) - B(s,x_0)\|_{\mathfrak{X}} + \|B(s,x_0)\|_{\mathfrak{X}}\right)\,ds$$
$$\le \frac{\delta}{2} + e^{\tau\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\left(l\|y(s) - x_0\|_{\mathfrak{X}} + K\right)\,ds \le \frac{\delta}{2} + (l\delta + K)\tau e^{\tau\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}} \le \delta, \quad t \in [t_0,t_0+\tau],$$

при достаточно малом τ. Очевидно, что $G(y) \in C([t_0,t_0+\tau];\mathfrak{X})$, поэтому $G\colon S \to S$.

Кроме того, при малом τ и $t \in [t_0, t_0+\tau]$

$$\|G(y)(t) - G(z)(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \|e^{A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}\|B(s,y(s)) - B(s,z(s))\|_{\mathfrak{X}}\, ds$$

$$\leq \tau e^{\tau\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}} l\|y-z\|_\tau \leq \frac{1}{2}\|y-z\|_\tau \quad \forall y,z \in S.$$

Следовательно, существует единственная неподвижная точка оператора G в метрическом пространстве S. Она и является единственным решением задачи (1.1), (1.2) на отрезке $[t_0, t_1]$, где $t_1 = t_0 + \tau$.

Принадлежность решения классу $C^n([t_0,t_1];\mathfrak{X})$ следует из равенства

$$x^{(n)}(t) = A^n e^{A(t-t_0)} x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A^n e^{A(t-s)} B(s,x(s))\, ds + \sum_{k=0}^{n-1} A^k D_t^{n-k-1} B(t,x(t)),$$

которое нетрудно получить по индукции из равенства (1.3). Здесь $D_t^m B(t,x(t))$ — полная производная по t порядка m отображения $t \to B(t,x(t))$. □

2. Вырожденное эволюционное уравнение с нестационарной нелинейностью

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$. Множество линейных замкнутых операторов, действующих в $\mathfrak{F}$, с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Множество операторов $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$ обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

Рассмотрим полулинейное эволюционное уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t,u(t)) \tag{2.1}$$

с операторами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, нелинейным оператором $N\colon U \to \mathfrak{F}$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, такие эволюционные уравнения будем называть *вырожденными*.

Введем обозначение $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C}\colon (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})\}$. Следуя [4, с. 89], оператор M будем называть (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Теорема 2 [4, теорема 4.1.1]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) *операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R} (\mu L - M)^{-1} L\, d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R} L(\mu L - M)^{-1}\, d\mu, \quad R > a,$$

являются проекторами на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно;

(ii) *имеет место действие операторов $L\colon \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $M\colon D_M \cap \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 0,1$, где $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}\, Q$*;

(iii) *существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$*;

(iv) *$M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$.*

В утверждениях (iii), (iv) использованы обозначения $L_k = L|_{\mathfrak{U}^k}$, $M_k = M|_{D_{M_k}}$, $D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. Обозначим также $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, а оператор H нильпотентен степени p.

З а м е ч а н и е 1. Известно [4, §4.3], что оператор M $(L,0)$-ограничен, т. е. $H = 0$, тогда и только тогда, когда для любого $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ не существует $\varphi_1 \notin \ker L$, при котором выполнялось бы равенство $L\varphi_1 = M\varphi_0$.

Для уравнения (2.1) с (L,σ)-ограниченным оператором M рассмотрим обобщенную задачу Шоуолтера

$$Pu(t_0) = u_0, \tag{2.2}$$

в случае вырожденных эволюционных уравнений часто являющуюся более естественной, чем задача Коши $u(t_0) = u_0$ (см. следующий раздел). Понятно, что для задачи (2.2) должно выполняться включение $u_0 \in \operatorname{im} P = \mathfrak{U}^1$.

Решением задачи (2.1), (2.2) на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем такую функцию $u \in C^1([t_0,t_1];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую условию (2.2), что при всех $t \in [t_0,t_1]$ пара $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in D_M$ и справедливо равенство (2.1).

Обозначим $V = U \cap (\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1)$.

Теорема 3. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, множество U открыто в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$, V открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1$, для всех $(t,u) \in U$, таких, что $(t, Pu) \in U$, выполняется $N(t,u) = N(t,Pu)$, $N \in C^p(V;\mathfrak{F})$, $(I-Q)N \in C^{p+1}(V;\mathfrak{F})$, отображение $QN\colon V \to \mathfrak{F}$ локально липшицево по u. Тогда для любой пары $(t_0,u_0) \in V$ существует такое $t_1 > t_0$, что задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное решение $u \in C^1([t_0,t_1];\mathfrak{U})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагается, что топология на U определяется нормой на $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$, например нормой $\|(t,u)\|_{\mathbb{R}\times\mathfrak{U}} = |t| + \|u\|_{\mathfrak{U}}$. Возьмем окрестность

$$O_\delta(t_0,u_0) = \{(t,u) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{U}\colon |t-t_0| + \|u-u_0\|_{\mathfrak{U}} < \delta\},$$

лежащую в U. Так как P — нетривиальный проектор, то $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \geq 1$. Тогда для любой пары $(t,u) \in O_{\delta\|P\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}}(t_0,u_0) \subset U$ имеем

$$|t-t_0| + \|Pu-u_0\|_{\mathfrak{U}} = |t-t_0| + \|Pu-Pu_0\|_{\mathfrak{U}} \leq |t-t_0| + \|P\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|u-u_0\|_{\mathfrak{U}} < \delta,$$

и поэтому $(t,Pu) \in O_\delta(t_0,u_0) \subset U$. Следовательно, существует такая окрестность в U точки $(t_0,u_0) \in V$, что для всякого ее элемента (t,u) выполняется $(t,Pu) \in U$.

Поочередно домножим уравнение (2.1) слева на операторы $L_1^{-1}Q$ и $M_0^{-1}(I-Q)$ и с учетом условий на оператор N и проведенных рассуждений получим задачу

$$\dot v(t) = Av(t) + L_1^{-1}QN(t,v), \quad v(t_0) = Pu_0, \tag{2.3}$$

$$H\dot w(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)N(t,v) \tag{2.4}$$

для пары функций $v(t) = Pu(t)$, $w(t) = (I-P)u(t)$. Здесь использовано обозначение $A = L_1^{-1}M_1$. Задача (2.3) в силу теоремы 1 имеет единственное решение $v \in C^{p+1}([t_0,t_1];\mathfrak{U}^1)$ при некотором $t_1 > t_0$, поскольку множество V открыто, оператор A ограничен по теореме 2, а оператор $L_1^{-1}QN \in C^p(V;\mathfrak{U})$ локально липшицев по u. Зная v и используя нильпотентность оператора H, из (2.4) найдем [4, с. 121]

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} D_t^k (I-Q)N(t,v(t)), \tag{2.5}$$

где $D_t^k(I-Q)N(t,v(t))$ — полная производная по переменной t k-го порядка отображения $t\to(I-Q)N(t,v(t))$. Таким образом, существует решение исходной задачи

$$u=v+w\in C^1([t_0,t_1];\mathfrak{U}).\qquad\square$$

Аналогичным образом можно исследовать задачу Коши

$$u(0)=u_0,\tag{2.6}$$

которая требует выполнения условия согласования данных.

Теорема 4. *Пусть $p\in\mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, множество U открыто в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$, V открыто в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}^1$, для всех $(t,u)\in U$, таких, что $(t,Pu)\in U$, выполняется равенство $N(t,u)=N(t,Pu)$, $N\in C^p(V;\mathfrak{F})$, $(I-Q)N\in C^{p+1}(V;\mathfrak{F})$, отображение $QN\colon V\to\mathfrak{F}$ локально липшицево по u. Тогда для любой пары $(t_0,u_0)\in U$, для которой $(t_0,Pu_0)\in U$, существует такое $t_1>t_0$, что задача* (2.3) *имеет единственное решение $v\in C^{p+1}([t_0,t_1];\mathfrak{U})$. Если выполняется равенство*

$$(I-P)u_0=-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}D_t^k|_{t=t_0}(I-Q)N(t,v(t)),\tag{2.7}$$

то задача (2.1), (2.6) *имеет единственное решение класса $C^1([t_0,t_1];\mathfrak{U})$.*

Доказательство. Поскольку (t_0,u_0) и (t_0,Pu_0) принадлежат открытому множеству U, а оператор P непрерывен, то для (t,u) из достаточно малой окрестности точки (t_0,u_0) пары (t,Pu) будут принадлежать U. Поэтому из равенств (2.1), (2.6) следуют соотношения (2.3), (2.4), а также начальное условие $w(t_0)=(I-P)u_0$. Чтобы оно выполнялось для решения (2.5), должно выполняться условие (2.7). $\square$

В предыдущих двух теоремах добавление в уравнение (2.5) слагаемого $f(t)$ не изменит ситуацию, поскольку новый нелинейный оператор $N(t,u(t))+f(t)$ будет удовлетворять всем условиям этих теорем при достаточно гладкой функции f, если им удовлетворял оператор N. В рассматриваемой далее ситуации это не так, поскольку используется условие $\operatorname{im}N\subset\mathfrak{F}^1$. В этом случае имеет смысл рассмотреть уравнение

$$L\dot{u}(t)=Mu(t)+N(t,u(t))+f(t).\tag{2.8}$$

Теорема 5. *Пусть $p\in\mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, множество U открыто в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$, V открыто в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}^1$, отображение $N\in C(U;\mathfrak{F})$ локально липшицево по u, $\operatorname{im}N\subset\mathfrak{F}^1$, $f\in C(\mathbb{R};\mathfrak{F})$, $(I-Q)f\in C^{p+1}(\mathbb{R};\mathfrak{F})$. Тогда для любой пары $(t_0,u_0)\in V$ существует такое $t_1>t_0$, что задача* (2.2), (2.8) *имеет единственное решение $u\in C^1([t_0,t_1];\mathfrak{U})$.*

Доказательство. Если $\operatorname{im}N\subset\mathfrak{F}^1$, то $(I-Q)N\equiv0$, $QN\equiv N$. В этом случае уравнение (2.8) после действия на обе его части оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ принимает вид $H\dot{w}=w+M_0^{-1}(I-Q)f$. В силу нильпотентности оператора H это уравнение имеет единственное решение

$$w(t)=-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)$$

(см. [4, с. 121]). Остается с помощью теоремы 1 показать однозначную разрешимость задачи

$$\dot{v}(t)=Av(t)+L_1^{-1}N\biggl(t,v(t)-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)\biggr)+L_1^{-1}Qf(t),\quad v(t_0)=Pu_0,$$

получаемой из задачи (2.2), (2.8) с помощью действия оператора $L_1^{-1}Q$. При этом учитывается, что в правой части уравнения нелинейный оператор

$$B(t,v(t)) = L_1^{-1}N\left(t, v(t) - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)\right) + L_1^{-1}Qf(t)$$

непрерывен по t и липшицев по v в силу условий доказываемой теоремы. □

Теорема 6. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, множество U открыто в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$, V открыто в $\mathbb{R}\times\mathfrak{U}^1$, отображение $N \in C(U;\mathfrak{F})$ локально липшицево по u, $\operatorname{im} N \subset \mathfrak{F}^1$, $f \in C(\mathbb{R};\mathfrak{F})$, $(I-Q)f \in C^{p+1}(\mathbb{R};\mathfrak{F})$. Тогда для любой пары $(t_0,u_0) \in U$, удовлетворяющей условию*

$$(I-P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t_0), \tag{2.9}$$

задача (2.6), (2.8) имеет единственное решение класса $C^1([t_0,t_1];\mathfrak{U})$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. При проводимых в доказательстве предыдущей теоремы рассуждениях для рассматриваемой в данном случае задачи Коши появится дополнительное условие $w(t_0) = (I-P)u_0$, которое и принимает вид (2.9). □

3. Системы уравнений обобщенного гидродинамического типа

При математическом моделировании в гидродинамике часто встречаются системы уравнений, содержащие уравнение несжимаемости $\nabla\cdot v = 0$ и векторные уравнения, частью которых является сумма $(v\cdot\nabla)v = \sum_{i=1}^{n} v_i v_{x_i}$, где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Такие системы уравнений будем называть системами гидродинамического типа. В данном параграфе с помощью результатов предыдущего параграфа исследуем на однозначную локальную разрешимость начально-краевые задачи для одного класса систем уравнений, которые назовем системами обобщенного гидродинамического типа. Введем обозначения

$$\underset{1}{v} = (v_{x_1}, v_{x_2}, \ldots, v_{x_n}), \quad \underset{2}{v} = (v_{x_1x_1}, v_{x_1x_2}, \ldots, v_{x_nx_n}).$$

Через J обозначим некоторый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку t_0. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$(1-\chi\Delta)v_t = \nu\Delta v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v + G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v$$

$$+\sum_{i=1}^{n} G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j} - r, \quad (x,t)\in\Omega\times J, \tag{3.1}$$

$$\nabla\cdot v = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times J, \tag{3.2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times J, \tag{3.3}$$

$$v(x,t_0) = v_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{3.4}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n\le 4$. Системы уравнений вида (3.1), (3.2) встречаются в динамике неньютоновских жидкостей [7; 9; 14]. Параметр $\chi\in\mathbb{R}$, как правило, характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu\in\mathbb{R}$ — ее вязкие свойства. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Заданы вектор-функция $q = (q^1, \ldots, q^n)$ и функционалы G, G^i, G^{ij}, i, $j = 1, \ldots, n$, зависящие от t, v и от производных функций $v_1, \ldots, v_n$ по переменным

$x_1, \dots, x_n$ первого и второго порядков, G, G^i, $G^{ij}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{L}_2^{n+n^2+n^3}\to\mathbb{R}$, где через $\mathbb{L}_2^m$ обозначена m-я декартова степень пространства $\mathbb{L}_2=(L_2(\Omega))^n$. Например, G, G^i, G^{ij} могут быть функциями от интегралов по области Ω или ее подобластям от функции v и ее частных производных по пространственным переменным первого и второго порядков, функцией от значений v в фиксированных точках области и т. п.

Замечание 2. Понятно, что при $q(t,x,v)\equiv v$ система (3.1), (3.2) является системой гидродинамического типа.

Введем обозначения $\mathbb{L}_2=(L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1=(W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2=(W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L}=\{v\in(C_0^\infty(\Omega))^n\colon \nabla\cdot v=0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2=\mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma\colon\mathbb{L}_2\to\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi=I-\Sigma$ — соответствующие этим подпространствам ортопроекторы.

В пространстве $\mathfrak{L}$ рассмотрим оператор $A=\Sigma\Delta$. Как известно, оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, которая, как известно, образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$ [6].

Учитывая уравнение несжимаемости (3.2), положим

$$\mathfrak{U}=\mathbb{H}_\sigma^2\times\mathbb{H}_\pi,\quad \mathfrak{F}=\mathbb{L}_2=\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{H}_\pi. \tag{3.5}$$

Таким образом, элемент $u\in\mathfrak{U}$ имеет вид $u=(v,r)$, а $f\in\mathfrak{F}$ — вид $f=(\Sigma f,\Pi f)$. Тогда формулами

$$L=\begin{pmatrix} I-\chi A & \mathbb{O}\\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O}\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}\nu A & \mathbb{O}\\ \nu\Pi\Delta & -I\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

определяются операторы $L,M\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Теорема 7. *Пусть пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ определены в (3.5), а операторы L и M заданы формулами (3.6), $\chi\neq0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $\nu\in\mathbb{R}$. Тогда оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Доказательство. Для любого $v\in\mathbb{H}_\sigma$ имеем

$$\|(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma^2}=\|(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma}+\|A(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma}$$

$$=\sum_{k=1}^\infty\frac{(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|1-\chi\lambda_k|^2}\le C_1\sum_{k=1}^\infty|\langle v,\varphi_k\rangle|^2=C_1\|v\|_{\mathbb{H}_\sigma},$$

поэтому $(I-\chi A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}_\sigma^2)$. Следовательно,

$$\|\Delta(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{L}_2}\le C_2\|(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma^2}\le C_3\|v\|_{\mathbb{H}_\sigma}$$

и $\Delta(I-\chi A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{L}_2)$.

Таким образом, обратный оператор

$$(\mu(I-\chi A)-\nu A)^{-1}=\frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Big(I-\frac{\nu}{\mu}A(I-\chi A)^{-1}\Big)^{-1}$$

существует и непрерывно действует из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{H}_\sigma^2$ при $|\mu|>|\nu|\|A(I-\chi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}$. При таких $\mu\in\mathbb{C}$ имеем

$$\mu L-M=\begin{pmatrix}\mu(I-\chi A)-\nu A & \mathbb{O}\\ -\mu\chi\Pi\Delta-\nu\Pi\Delta & I\end{pmatrix},$$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu(I-\chi A)-\nu A)^{-1} & \mathbb{O} \\ (\mu\chi\Pi\Delta + \nu\Pi\Delta)(\mu(I-\chi A)-\nu A)^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Непрерывность оператора $\Delta(I-\chi A)^{-1}$ из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$ доказана выше. Следовательно, оператор

$$(\mu\chi\Pi\Delta + \nu\Pi\Delta)(\mu(I-\chi A)-\nu A)^{-1} = \left(\chi\Pi\Delta + \frac{\nu}{\mu}\Pi\Delta\right)(I-\chi A)^{-1}\left(I - \frac{\nu}{\mu}A(I-\chi A)^{-1}\right)^{-1}$$

непрерывно действует из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{H}_\pi$. Из этого следует, что при достаточно больших $|\mu|$ оператор $(\mu L - M)^{-1} \colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$ непрерывен, что означает (L,σ)-ограниченность оператора M.

Нетрудно убедиться, что в силу замечания 1 оператор M $(L,0)$-ограничен. $\square$

Теорема 8. *Пусть* $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $q \in C^1(J \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $G \in C^1(J \times \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{L}_2^{n^2+n^3}; \mathbb{R})$, $G^i \in C^1(J \times \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{L}_2^{n^2+n^3}; \mathbb{R})$, $G^{ij} \in C^1(J \times \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{L}_2^{n^2+n^3}; \mathbb{R})$, $i,j = 1,\ldots,n$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. *Тогда при некотором* $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, *существует единственное решение* $v \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $r \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ *задачи* (3.1)–(3.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулой

$$(N(t,v,r))(x) = (q(t,x,v)\cdot\nabla)v(x) + G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v + \sum_{i=1}^{n} G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j}$$

задается нелинейный оператор N. При $n \leq 4$ имеет место вложение $\mathbb{H}^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, поэтому

$$\|(q(t,\cdot,v)\cdot\nabla)v\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_1 \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in\overline{\Omega}} |q^i(t,x,v(x))| \|v\|_{\mathbb{H}^2_\sigma},$$

$$\left\|G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v\right\|_{\mathbb{L}_2} \leq \left|G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})\right| \|v\|_{\mathbb{H}^2_\sigma},$$

$$\left\|G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i}\right\|_{\mathbb{L}_2} \leq \left|G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})\right| \|v\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\left\|G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j}\right\|_{\mathbb{L}_2} \leq \left|G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})\right| \|v\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Следовательно, оператор N действует из $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$ в пространство $\mathbb{L}_2$.

Имеем согласно вычислениям, произведенным при доказательстве предыдущей теоремы,

$$(\mu L - M)^{-1}L = \begin{pmatrix} \left(\mu - \nu(I-\chi A)^{-1}A\right)^{-1} & \mathbb{O} \\ \left(\chi\Pi\Delta + \frac{\nu}{\mu}\Pi\Delta\right)\left(I - \frac{\nu}{\mu}(I-\chi A)^{-1}A\right)^{-1} - \chi\Pi\Delta & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\mu - \nu(I-\chi A)^{-1}A\right)^{-1} & \mathbb{O} \\ \frac{\nu}{\mu}\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1}\left(I - \frac{\nu}{\mu}(I-\chi A)^{-1}A\right)^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R} (\mu L - M)^{-1}L\,d\mu = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\Delta(I-\chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

где $R > |\nu|\|A(I-\chi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}$. Отсюда видно, что $N(t,u) = N(t,Pu)$ для всех $u = (v,r) \in \mathfrak{U}$, так как N не зависит от r. Кроме того, из вида проектора P следует, что условие (3.4) для данной системы уравнений эквивалентно условию Шоуолтера.

Проверим непрерывную дифференцируемость оператора $N^1(t,v,r)=(q(t,\cdot,v)\cdot\nabla)v$. Пусть $N^1_{(t_1,v_1,r_1)}$ — производная Фреше от N^1 в точке $(t_1,v_1,r_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi$, вектор приращения $h=(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi$. Имеем

$$(N^1_{(t_1,v_1,r_1)}-N^1_{(t_2,v_2,r_1)})h=[(q_t(t_1,\cdot,v_1)\cdot\nabla)v_1-(q_t(t_2,\cdot,v_2)\cdot\nabla)v_2]h_1$$

$$+(q_v(t_1,\cdot,v_1)h_2\cdot\nabla)v_1-(q_v(t_2,\cdot,v_2)h_2\cdot\nabla)v_2+(q(t_1,\cdot,v_1)\cdot\nabla)h_2-(q(t_2,\cdot,v_2)\cdot\nabla)h_2.$$

В силу непрерывности функций v и h_2

$$\|N^1_{(t_1,v_1,r_1)}-N^1_{(t_2,v_2,r_2)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi;\mathbb{L}_2)}\le\sum_{i=1}^n\max_{x\in\overline{\Omega}}|q^i_t(t_1,x,v_1(x))|\|v_1-v_2\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}$$

$$+\sum_{i=1}^n\max_{x\in\overline{\Omega}}|q^i_t(t_1,x,v_1(x))-q^i_t(t_2,x,v_2(x))|\|v_2\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}+c_2\sum_{i=1}^n\max_{x\in\overline{\Omega}}|q^i_v(t_1,x,v_1(x))|\|v_1-v_2\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}$$

$$+c_2\sum_{i=1}^n\max_{x\in\overline{\Omega}}|q^i_v(t_1,x,v_1(x))-q^i_v(t_2,x,v_2(x))|\|v_2\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}+\sum_{i=1}^n\max_{x\in\overline{\Omega}}|q^i(t_1,x,v_1(x))-q^i(t_2,x,v_2(x))|.$$

Выражение в правой части неравенства стремится к нулю при $(t_1,v_1,r_1)\to(t_2,v_2,r_2)$ в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi$ в силу непрерывного вложения $\mathbb{H}^2_\sigma$ в $C(\overline{\Omega})$ и достаточной гладкости функций q^i, $i=1,2,\dots,n$.

Обозначим через $G_{(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})}(s,h,\underset{1}{h},\underset{2}{h})$ значение производной Фреше функционала G в точке $(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})$ на векторе приращения $(s,h,\underset{1}{h},\underset{2}{h})$ из пространства $\mathbb{X}\equiv\mathbb{R}\times\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{L}_2^{n^2+n^3}$. Тогда

$$\Big\|G_{(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})}(s,h,\underset{1}{h},\underset{2}{h})v-G_{(\tau,w,\underset{1}{w},\underset{2}{w})}(s,h,\underset{1}{h},\underset{2}{h})v+G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})h-G(\tau,w,\underset{1}{w},\underset{2}{w})h\Big\|_{\mathbb{L}_2}$$

$$\le c_3\|v\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\Big\|G_{(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})}-G_{(\tau,w,\underset{1}{w},\underset{2}{w})}\Big\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{X}^*)}\big(|s|+\|h\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\big)$$

$$+c_4\Big|G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})-G(\tau,w,\underset{1}{w},\underset{2}{w})\Big|\,\|h\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}.$$

Поэтому из непрерывной дифференцируемости функционала G следует непрерывная дифференцируемость соответствующего нелинейного оператора $G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v$. Аналогичные рассуждения справедливы и для операторов $G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i}$, $G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j}$. Таким образом, $N\in C^1(U;\mathbb{L}_2)$, где $U=J\times\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{H}_\pi$, и поэтому все условия теоремы 3 выполнены. $\square$

Рассмотрим случай функционалов $G\equiv0$, $G^i\equiv0$, $i=1,2,\dots,n$, $G^{ij}\equiv0$ при $i\ne j$,

$$G^{ii}(\underset{1}{v})\equiv g(\underset{1}{v})=\nu_1\int\limits_\Omega\sum_{j,m=1}^n\big|v^j_{x_m}(x)\big|^2dx,\quad i=1,2,\dots,n,$$

где $\nu_1\in\mathbb{R}$. Тогда для производной Фреше функционала g имеем

$$g_{\underset{1}{v}}(\underset{1}{h})=2\nu_1\int\limits_\Omega\sum_{j,m=1}^n v^j_{x_m}(x)h^j_{x_m}(x)dx,\quad \Big\|g_{\underset{1}{v}}-g_{\underset{1}{w}}\Big\|_{\mathcal{L}\left(\mathbb{L}_2^{n^2};\mathbb{R}\right)}\le2|\nu_1|\|v-w\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}.$$

Отсюда в силу теоремы 8 получим

Следствие 1. *Пусть* $\chi\ne0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $\nu,\nu_1\in\mathbb{R}$, $n\le4$, $q\in C^1(J\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $v_0\in\mathbb{H}_\sigma$, $t_0\in J$. *Тогда при некотором* $t_1\in J$, $t_1>t_0$, *существует единственное решение*

$v \in C^1([t_0,t_1];\mathbb{H}^2_\sigma)$, $r \in C^1([t_0,t_1];\mathbb{H}_\pi)$ *задачи* (3.3), (3.4) *для системы уравнений обобщенного гидродинамического типа с нелинейной вязкостью*

$$(1-\chi\Delta)v_t = \left(\nu + \nu_1 \int\limits_\Omega \sum_{j,m=1}^{n} \left|v^j_{x_m}(y)\right|^2 dy\right)\Delta v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v - r, \quad (x,t)\in\Omega\times J, \tag{3.7}$$

$$\nabla\cdot v = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times J. \tag{3.8}$$

При $\nu_1 = 0$ уравнения (3.7), (3.8) представляют систему уравнений с линейной вязкостью, а при $q(t,x,v)\equiv v$ — систему уравнений Осколкова, моделирующей течение вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвин — Фойгта [9; 14].

Рассуждая аналогичным образом и используя непрерывное вложение $\mathbb{H}^2_\sigma(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$, нетрудно доказать следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $\chi \neq 0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $\nu\in\mathbb{R}$, $n\le 4$, $q\in C^1(J\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $k_0\in\mathbb{N}$, $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{k_0}\in\Omega$, $g\in C^1(J\times\mathbb{R}^{nk_0};\mathbb{R})$, $g^i\in C^1(J\times\mathbb{R}^{nk_0};\mathbb{R})$, $g^{ij}\in C^1(J\times\mathbb{R}^{nk_0};\mathbb{R})$, $i,j=1,2,\dots,n$, $v_0\in\mathbb{H}_\sigma$, $t_0\in J$. *Тогда при некотором* $t_1\in J$, $t_1>t_0$, *существует единственное решение* $v\in C^1([t_0,t_1];\mathbb{H}^2_\sigma)$, $r\in C^1([t_0,t_1];\mathbb{H}_\pi)$ *задачи* (3.3), (3.4) *для нагруженной системы уравнений обобщенного гидродинамического типа*

$$(1-\chi\Delta)v_t = \nu\Delta v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v - r + g\left(t, v(\xi_1), v(\xi_2),\dots, v\left(\xi_{k_0}\right)\right)v$$

$$+\sum_{i=1}^{n} g^i\left(t, v(\xi_1), v(\xi_2),\dots, v\left(\xi_{k_0}\right)\right)v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(t, v(\xi_1), v(\xi_2),\dots, v\left(\xi_{k_0}\right)\right)v_{x_ix_j}, \quad (x,t)\in\Omega\times J,$$

$$\nabla\cdot v = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times J.$$

Доказательство. При доказательстве непрерывной дифференцируемости функционалов вида $G(t,v,r) = g\left(t, v(\xi_1),\dots, v\left(\xi_{k_0}\right)\right)$ используется непрерывность вложения $\mathbb{H}^2_\sigma(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$. □

Замечание 3. Понятно, что в случае одномерной области Ω теорема вложения Соболева позволяет рассматривать нагруженную систему уравнений обобщенного гидродинамического типа с функциями g, g^i, g^{ij}, зависящими не только от значений v в фиксированных точках $\xi_1,\dots,\xi_{k_0}\in\Omega$, но и от значений $\underset{1}{v}$ в этих точках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. N. Y.: Springer-Verlag, 1983. 279 p.
2. **Хенри Д.** Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
3. Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 2002. 568 p.
4. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003. 216 p.
5. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. М.: Физматлит, 2007. 736 с.
6. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. 204 с.
7. **Осколков А.П.** Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С 126–164.
8. **Демиденко Г.В., Успенский С.В.** Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998. 438 с.
9. **Звягин В.Г., Турбин М.В.** Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3–144.

10. **Корпусов М.О.** Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: Либроком, 2010. 240 с.
11. **Кожанов А.И.** Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.
12. **Кайкина Е.И., Наумкин П.И., Шишмарёв И.А.** Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 1. С. 61–114.
13. **Свиридюк Г.А.** Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 4. С. 828–831.
14. **Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.** О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 442–450.
15. **Fedorov V.E.** Local solvability of a class of nonstationary semilinear Sobolev type equations // Nonlinear Evolution Equations and Mathematical Modeling / Research Institute for Mathematical Sciences. Kyoto: Kyoto University, 2008. P. 46–61.
16. **Фёдоров В.Е.** Неквазистационарные траектории одного класса полулинейных уравнений соболевского типа // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: тр. Междунар. науч. конф. Уфа: Гилем, 2008. С. 111–115.
17. **Фёдоров В.Е., Давыдов П.Н.** Глобальная разрешимость некоторых полулинейных уравнений соболевского типа // Вестн. Челяб. гос. ун-та. 2010. № 23 (204). С. 80–87. (Математика. Механика. Информатика; вып. 12.)
18. **Фёдоров В.Е., Давыдов П.Н.** О нелокальных решениях полулинейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 338–347.
19. **Давыдов П.Н., Фёдоров В.Е.** Локальная разрешимость одного класса уравнений соболевского типа // Тр. Воронеж. зим. мат. шк. С.Г. Крейна. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010. С. 47–53.

Поступила 12.03.2013

Фёдоров Владимир Евгеньевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
e-mail: kar@csu.ru

Давыдов Павел Николаевич
аспирант
Челябинский государственный университет
e-mail: davydov@csu.ru

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977.1

О ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ[1]

Е. Н. Хайлов, Э. В. Григорьева

В работе рассматривается продолжимость решений неавтономной квадратичной системы дифференциальных уравнений. Установлены достаточные условия существования решений такой системы на заданном отрезке. Приведены соответствующие примеры уравнения Риккати. Полученные результаты применяются для оценки числа переключений кусочно-постоянных управлений, отвечающих граничным точкам множества достижимости нелинейной управляемой системы, описывающей двухступенчатый процесс биологической очистки сточных вод.

Ключевые слова: неавтономная квадратичная дифференциальная система, продолжимость решений, дифференциальное неравенство, теорема Чаплыгина.

E. N. Khailov, E. V. Grigorieva. On the extensibility of solutions of nonautonomous quadratic differential systems.

The extensibility of solutions of a nonautonomous quadratic differential system is considered. Sufficient conditions are established for the existence of solutions of the system on a given closed interval. Corresponding examples of the Riccati equation are presented. The results are applied for the estimation of the number of switchings of piecewise constant controls corresponding to boundary points of the attainable set of a nonlinear control system that describes a two-stage process of a biological treatment of sewage.

Keywords: nonautonomous quadratic differential system, extensibility of solutions, differential inequality, Chaplygin's theorem.

Введение

Для нелинейной управляемой системы дифференциальных уравнений изучение управлений, определяемых из принципа максимума Понтрягина [1;2], тесно связано с анализом линейной неавтономной дифференциальной системы относительно функции переключений и отвечающих ей вспомогательных функций. Эти функции непосредственно зависят от решений соответствующей сопряженной системы. Считая, что условие максимума почти всюду однозначно определяет такие управления, можно говорить о том, что функция переключений полностью задает вид либо управлений, отвечающих граничным точкам множества достижимости, либо оптимальных управлений [1; 2].

В свою очередь исследование поведения функции переключений связано с определением количества ее нулей на рассматриваемом отрезке. А это напрямую зависит от возможности приведения с помощью некоторых замен переменных матрицы указанной линейной неавтономной дифференциальной системы к почти треугольному виду (оставляются лишь диагональные и наддиагональные элементы, все остальные — обнуляются) [3]. Эта процедура преобразования линейной неавтономной системы называется триангуляцией, а новая линейная неавтономная дифференциальная система — триангулированной системой. Функции, осуществляющие такие замены переменных, удовлетворяют неавтономной квадратичной системе дифференциальных уравнений (НКСДУ), а потому определены лишь локально, в малой окрестности задаваемого дополнительно начального условия. Тогда на этом малом интервале с помощью обобщенной теоремы Ролля [3], примененной к триангулированной системе, находится оценка числа нулей функции переключений. Но получаемая с ее помощью оценка числа нулей уже

[1]Работа выполнена в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6512.2012.1).

на всем рассматриваемом отрезке не является эффективной, так как требует знания длины этого интервала. В случае же, когда решения НКСДУ продолжимы на весь отрезок, найденная оценка числа нулей функции переключений справедлива уже для всего рассматриваемого отрезка. Она не зависит от его длины, а определяется только размерностью фазового пространства исходной нелинейной управляемой системы. Такая оценка позволяет исследовать границу множества достижимости и строить численные алгоритмы решения задач оптимального управления. Поэтому возникает задача о существовании начального условия НКСДУ, для которого соответствующее решение определено на заданном отрезке. Ранее, в частном случае, для уравнения Риккати, связанного с нелинейной управляемой системой на плоскости, такая задача была решена в [4]. Настоящая работа посвящена решению рассматриваемой задачи в общем случае. Полученные в ней результаты демонстрируются на различных примерах уравнения Риккати и применяются для оценки числа переключений кусочно-постоянных управлений, отвечающих граничным точкам множества достижимости нелинейной управляемой системы, описывающей двухступенчатый процесс биологической очистки сточных вод. Ссылки на работы, посвященные квадратичным дифференциальным системам, содержатся в [5; 6].

1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ на заданном отрезке $[0,T]$, $T>0$, неавтономную квадратичную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_k(t) = q^\top(t)A_k(t)q(t) + b_k^\top(t)q(t) + c_k(t), \quad k=\overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $q(\cdot) = (q_1(\cdot), q_2(\cdot), \ldots, q_n(\cdot))^\top \in \mathbb{R}^n$ и знак $^\top$ означает транспонирование. Здесь $A_k(\cdot)$ — симметричные матрицы порядка $n\times n$, $b_k(\cdot)\in\mathbb{R}^n$, $c_k(\cdot)\in\mathbb{R}^1$, $k=\overline{1,n}$.

Считаем, что в дальнейших рассуждениях относительно матриц $A_k(t)$, векторов $b_k(t)$ и величин $c_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ справедливы следующие предположения:

• (Q_1) элементы $a_{ij}^k(t)$, $i,j=\overline{1,n}$ матриц $A_k(t)$, компоненты $b_i^k(t)$, $i=\overline{1,n}$ векторов $b_k(t)$ и величины $c_k(t)$ являются функциями, измеримыми по Лебегу на отрезке $[0,T]$;

• (Q_2) существуют положительные константы Λ_k, B_k, C_k, $k=\overline{1,n}$, такие, что при почти всех $t\in[0,T]$ выполнены неравенства:

$$\|b_k(t)\| \le B_k, \quad |c_k(t)| \le C_k, \quad k=\overline{1,n}, \tag{1.2}$$

а при дополнительном требовании — для любого $q\in\mathbb{R}^n$, $q\neq 0$, имеют место соотношения

$$|q^\top A_k(t)q| \le \Lambda_k\|q\|^2, \quad k=\overline{1,n}, \tag{1.3}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора;

• (Q_3) справедливо неравенство

$$B^2 - 4AC > 0, \tag{1.4}$$

где величины A, B, C определяются равенствами

$$A = \left(\sum_{k=1}^n \Lambda_k^2\right)^{1/2}, \quad B = \left(\sum_{k=1}^n B_k^2\right)^{1/2}, \quad C = \left(\sum_{k=1}^n C_k^2\right)^{1/2} \tag{1.5}$$

и могут зависеть от T.

З а м е ч а н и е 1. Неравенство (1.3) можно получить, если воспользоваться при оценке его левой части при почти всех $t\in[0,T]$ спектральным радиусом $\mu_A^k(t)$ матрицы $A_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ [7].

З а м е ч а н и е 2. При выполнении предположений (Q_1), (Q_2) элементы $a_{ij}^k(t)$, $i,j=\overline{1,n}$ матриц $A_k(t)$, компоненты $b_i^k(t)$, $i=\overline{1,n}$ векторов $b_k(t)$, величины $c_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ являются ограниченными и измеримыми функциями на отрезке $[0,T]$. Тогда, как следует из [2, с. 66, 67; 8, с. 24, 25], для любого начального условия

$$q(0)=q_0, \quad q_0\in\mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

система уравнений (1.1) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $q(t)$, определенное на максимальном полуинтервале $[0,\gamma)$, где γ — либо конечное положительное число, либо число, равное $+\infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При сделанных предположениях* (Q_1)–(Q_3) *система уравнений* (1.1) *имеет решение* $q(t)$*, определенное на всем отрезке* $[0,T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о данного факта проведем от противного. Пусть произвольное решение $q(t)$ системы (1.1) определено на интервале $[0,t_1)$, $t_1\in(0,T]$, который является максимальным полуинтервалом существования этого решения. Тогда для решения $q(t)$ из [8, гл. 2, § 3, следствие 3.1; 9, с. 10] вытекает соотношение

$$\lim_{t\to t_1-0}\|q(t)\|=+\infty. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует существование числа $\rho>0$ и значения $t_0\in[0,t_1)$, для которых справедливо включение $q(t)\in\Omega$ при всех $t\in[t_0,t_1)$. Здесь $\Omega=\{q\in\mathbb{R}^n\colon \|q\|\ge\rho\}$. Значения ρ и t_0 будут определены ниже.

Вычислим почти всюду на интервале $[t_0,t_1)$ производную функции $\|q(t)\|$ в силу системы (1.1). Имеем равенство

$$\frac{d}{dt}\big(\|q(t)\|\big)=\|q(t)\|^{-1}\left[\sum_{i=1}^n q_i(t)q^\top(t)A_i(t)q(t)+\sum_{i=1}^n q_i(t)b_i^\top(t)q(t)+\sum_{i=1}^n q_i(t)c_i(t)\right]. \tag{1.8}$$

Оценим сверху почти всюду на интервале $[t_0,t_1)$ суммы в квадратных скобках, используя неравенства (1.2), (1.3) и формулы (1.5).

Для третьей суммы имеем цепочку неравенств

$$\sum_{i=1}^n q_i(t)c_i(t)\le\left(\sum_{i=1}^n c_i^2(t)\right)^{1/2}\|q(t)\|\le\left(\sum_{i=1}^n C_i^2\right)^{1/2}\|q(t)\|=C\|q(t)\|. \tag{1.9}$$

Для второй суммы находим цепочку соотношений

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n q_i(t)b_i^\top(t)q(t)&\le\|q(t)\|\sum_{i=1}^n|q_i(t)|\|b_i(t)\|\le\|q(t)\|\sum_{i=1}^n B_i|q_i(t)|\\&\le\left(\sum_{i=1}^n B_i^2\right)^{1/2}\|q(t)\|^2=B\|q(t)\|^2.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Наконец, для первой суммы получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n q_i(t)q^\top(t)A_i(t)q(t)&\le\sum_{i=1}^n|q_i(t)|\cdot|q^\top(t)A_i(t)q(t)|\le\|q(t)\|^2\sum_{i=1}^n\Lambda_i|q_i(t)|\\&\le\left(\sum_{i=1}^n\Lambda_i^2\right)^{1/2}\|q(t)\|^3=A\|q(t)\|^3.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Подставляя неравенства (1.9)–(1.11) в формулу (1.8), окончательно имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dt}\big(\|q(t)\|\big) \le A\|q(t)\|^2 + B\|q(t)\| + C, \quad t \in [t_0, t_1) \quad \text{п.в.} \tag{1.12}$$

Теперь рассмотрим квадратное уравнение

$$AK^2 - BK + C = 0. \tag{1.13}$$

В силу предположения (Q_3) его дискриминант $D = B^2 - 4AC$ положителен. Пусть величина K_0 является наибольшим корнем уравнения (1.13). Для нее имеем формулу

$$K_0 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \tag{1.14}$$

Введем теперь функцию $V(q) = \|q\| + K_0$, $x \in \Omega$. Перепишем для нее дифференциальное неравенство (1.12) и учтем в полученном выражении определение величины K_0. Имеем соотношение

$$\frac{d}{dt}\big(V(q(t))\big) \le AV^2(q(t)) - (2AK_0 - B)V(q(t)), \quad t \in [t_0, t_1) \quad \text{п.в.} \tag{1.15}$$

Наконец, рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \dot h(t) = Ah^2(t) - (2AK_0 - B)h(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ h(t_0) = h_0, \quad h_0 \ge K_0 + \rho. \end{cases} \tag{1.16}$$

Здесь для величины h_0 на основании ее определения и формулы (1.14) справедливо неравенство

$$h_0 > 2K_0 - \frac{B}{A}. \tag{1.17}$$

Найдем решение задачи Коши (1.16). Решая соответствующее уравнение Бернулли и удовлетворяя начальному условию, получаем формулу

$$h(t) = \left(\frac{A}{2AK_0 - B} + \left[\frac{1}{h_0} - \frac{A}{2AK_0 - B}\right]\mathrm{e}^{(2AK_0 - B)(t - t_0)}\right)^{-1}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{1.18}$$

В ней мы считаем, что величины ρ и t_0 таковы, что выражение в круглых скобках определено при всех $t \in [t_0, t_1]$. Этого можно добиться, например, выбирая при заданном значении ρ величину t_0 таким образом, чтобы разность $(t_1 - t_0)$ была достаточно мала. Из неравенства (1.17) имеем отрицательный знак у выражения, стоящего в квадратных скобках в формуле (1.18). Значит, функция $h(t)$ является конечной, положительной и возрастающей на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда получаем неравенство

$$h(t) < h(t_1), \quad t \in [t_0, t_1).$$

Поэтому из дифференциального неравенства (1.15), задачи Коши (1.16) и теоремы Чаплыгина [10, теорема 16.2] при условии

$$h_0 = V(q(t_0)) = K_0 + \|q(t_0)\|$$

имеем цепочку неравенств

$$\|q(t)\| < h(t) - K_0 < h(t_1) - K_0, \quad t \in (t_0, t_1),$$

которая приводит к противоречию с соотношением (1.7). Значит, наше предположение неверно и у системы (1.1) существует решение $q(t)$, определенное на всем отрезке $[0, T]$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 3. Применение теоремы 1 для анализа граничных точек множества достижимости и различных задач оптимального управления для нелинейной трехмерной управляемой системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс биологической очистки сточных вод, демонстрируется в работах [11–14].

2. Примеры

Рассмотрим на заданном отрезке $[0,T]$, $T>0$ систему (1.1) для случая $n=1$. Имеем неавтономное дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{q}(t)=a(t)q^2(t)+b(t)q(t)+c(t). \tag{2.1}$$

П р и м е р 1. Пусть функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ определены равенствами

$$a(t)=1,\quad b(t)=-2(t+\sigma)^{-1},\quad c(t)=\frac{1}{4}(t+\sigma)^{-2}, \tag{2.2}$$

где $\sigma>0$ — заданная константа. Легко видеть, что справедливы соотношения

$$|a(t)|=1=A,\quad |b(t)|\le 2\sigma^{-1}=B,\quad |c(t)|\le\frac{1}{4}\sigma^{-2}=C,\quad t\in[0,T],$$

и, значит, условие (1.4) выполнено. Тогда согласно теореме 1 существует начальное условие (1.6), для которого соответствующее решение $q(t)$ уравнения (2.1) с функциями $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ вида (2.2) определено на отрезке $[0,T]$. Убедимся в этом, непосредственно проинтегрировав уравнение (2.1) при ограничениях (2.2) с помощью подстановки $z=(t+\sigma)q$ [15]. Имеем формулу

$$q(t)=\frac{1}{t+\sigma}\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sigma q_0-1}{2-(2\sigma q_0-1)\ln(1+\sigma^{-1}t)}\right). \tag{2.3}$$

Из анализа выражения (2.3) следует, что при $q_0\le 0.5\,\sigma^{-1}$ решение $q(t)$ определено на всем полуинтервале $[0,+\infty)$, а при — $q_0>0.5\,\sigma^{-1}$ только на полуинтервале $[0,t_1^\star)$, где

$$t_1^\star=\sigma\bigl(\mathrm{e}^{2(2\sigma q_0-1)^{-1}}-1\bigr).$$

П р и м е р 2. Пусть функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ заданы равенствами

$$a(t)=\frac{1}{4}(t+\sigma)^{-2},\quad b(t)=2(t+\sigma)^{-1},\quad c(t)=1, \tag{2.4}$$

где снова $\sigma>0$ – заданная константа. Тогда имеем соотношения

$$|a(t)|\le\frac{1}{4}\sigma^{-2}=A,\quad |b(t)|\le 2\sigma^{-1}=B,\quad |c(t)|=1=C,\quad t\in[0,T],$$

и, тем самым, условие (1.4) также выполнено. Как и в примере 1, из теоремы 1 вытекает существование начального условия (1.6), для которого соответствующее решение $q(t)$ уравнения (2.1) с функциями $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ вида (2.4) определено на отрезке $[0,T]$. Снова убедимся в этом, проинтегрировав непосредственно уравнение (2.1) при ограничениях (2.4) с помощью подстановки $q=(t+\sigma)z$ [15]. Получаем формулу

$$q(t)=4(t+\sigma)\left(-\frac{1}{2}+\frac{q_0+2\sigma}{4\sigma-(q_0+2\sigma)\ln(1+\sigma^{-1}t)}\right). \tag{2.5}$$

Из анализа выражения (2.5) находим, что при $q_0\le-2\sigma$ решение $q(t)$ определено на всем полуинтервале $[0,+\infty)$, а при $q_0>-2\sigma$ — только на полуинтервале $[0,t_2^\star)$, где

$$t_2^\star=\sigma\bigl(\mathrm{e}^{4\sigma(q_0+2\sigma)^{-1}}-1\bigr).$$

Таким образом, в примерах 1, 2 существуют начальные условия (1.6), для которых соответствующие решения уравнения (2.1) определены на заданном отрезке $[0,T]$.

3. Модель двухступенчатого процесса биологической очистки сточных вод

Рассмотрим на заданном отрезке $[0,T]$, $T>0$ нелинейную управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t)y(t)z(t) - \beta x(t)w(t)z(t) + u(t)(m - x(t)), \\ \dot{w}(t) = -\alpha x(t)w(t)z(t), \\ \dot{y}(t) = -bx(t)y(t)z(t) + \alpha x(t)w(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = cx(t)y(t)z(t) - \gamma x(t)w(t)z(t) - \lambda z(t), \\ x(0) = x_0 \in (0,m); \quad w(0) = w_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0; \quad w_0, y_0, z_0 > 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

которая описывает двухступенчатый процесс биологической очистки сточных вод. Система (3.1) является обобщением нелинейной управляемой трехмерной дифференциальной системы, подробно изученной в [11–14]. В рассматриваемой системе $x(t)$ — концентрация кислорода; $w(t)$ и $y(t)$ — концентрации "плохорасщепляемых" и "легкорасщепляемых" загрязнений; $z(t)$ — концентрация биомассы; a, b, c и α, β, γ — константы скорости в законе действующих масс [16], используемом для описания зависимости скорости протекающей химической реакции от концентраций участвующих в ней веществ; λ — скорость распада биомассы.

В рассматриваемом процессе биомасса, поглощая кислород, с одной стороны, доводит "плохорасщепляемые" загрязнения до состояния "легкорасщепляемых". С другой стороны, она перерабатывает их вместе с другими "легкорасщепляемыми" загрязнениями до некоторого приемлемого состояния. Величина $u(t)$ задает скорость насыщения биомассы кислородом и одновременно является управлением. Соответственно, множеством допустимых управлений $D(T)$ считаем всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, которые при почти всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют неравенствам: $0 \le u(t) \le u_{\max}$, где $u_{\max}$ — наибольшая скорость насыщения.

С помощью линейных замен фазовых переменных в системе (3.1) можно уменьшить количество параметров и переписать ее в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t)y(t)z(t) - \beta x(t)w(t)z(t) + u(t)(m - x(t)), \quad t \in [0,T], \\ \dot{w}(t) = -\alpha x(t)w(t)z(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t)y(t)z(t) + \alpha x(t)w(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t)z(t) - \gamma x(t)w(t)z(t) - \lambda z(t), \\ x(0) = x_0 \in (0,m); \quad w(0) = w_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0; \quad w_0, y_0, z_0 > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

В этой системе α, β, γ — некоторые положительные константы, для которых считается, что выполнено неравенство $\alpha \neq (1-\alpha)\gamma$.

Из структуры системы (3.2) следует утверждение, описывающее свойства компонент $x(t)$, $w(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ее решений. Обоснование подобного факта для модели одноступенчатого процесса биологической очистки сточных вод приведено в работах [12; 13].

Лемма 1. *Пусть задано произвольное управление $u(\cdot) \in D(T)$. Тогда компоненты $x(t)$, $w(t)$, $y(t)$, $z(t)$ соответствующего решения системы* (3.2) *определены на всем отрезке* $[0,T]$ *и удовлетворяют неравенствам*

$$0 < x(t) < m, \quad 0 < w(t) < w_0, \quad 0 < y(t) < y_{\max}, \quad 0 < z(t) < z_{\max}, \quad t \in [0,T], \tag{3.3}$$

где $y_{\max} = y_0 + \alpha m w_0 z_{\max} T$, $z_{\max} = z_0 + x_0 + m u_{\max} T$.

Рассмотрим для системы (3.2) множество достижимости $X(T) \subset \mathbb{R}^4$ из начальной точки $(x_0, w_0, y_0, z_0)^\top$ в момент времени T, т.е. множество концов $(x(T), w(T), y(T), z(T))^\top$ траекторий $(x(t), w(t), y(t), z(t))^\top$ системы (3.2), отвечающих всевозможным управлениям $u(\cdot) \in D(T)$.

Из леммы 1 и [2, гл. 4, теорема 2] следует, что множество $X(T)$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^4$, расположенным в области

$$\Big\{(x,w,y,z)^\top \in \mathbb{R}^4\colon 0<x<m,\ 0<w<w_0,\ 0<y<y_{\max},\ 0<z<z_{\max}\Big\}.$$

Изучим теперь границу множества достижимости $X(T)$. Для этого применим принцип максимума Понтрягина [2, гл. 4, теорема 3]. Пусть точка $(x,w,y,z)^\top$ является граничной точкой множества $X(T)$. Тогда ей отвечают управление $u(\cdot)\in D(T)$ и траектория $(x(t),w(t),y(t),z(t))^\top$, $t\in[0,T]$ системы (3.2) такие, что

$$x(T)=x,\quad w(T)=w,\quad y(T)=y,\quad z(T)=z.$$

Более того, определено нетривиальное решение $(\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t),\psi_4(t))^\top$ сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot\psi_1(t)=u(t)\psi_1(t)+z(t)\big(y(t)\Phi(t)+w(t)\Psi(t)\big), \quad t\in[0,T],\\ \dot\psi_2(t)=x(t)z(t)\Psi(t),\\ \dot\psi_3(t)=x(t)z(t)\Phi(t),\\ \dot\psi_4(t)=x(t)\big(y(t)\Phi(t)+w(t)\Psi(t)\big)+\lambda\psi_4(t), \end{cases} \tag{3.4}$$

где

$$\Phi(t)=\psi_1(t)+\psi_3(t)-\psi_4(t),\quad \Psi(t)=\beta\psi_1(t)+\alpha\psi_2(t)-\alpha\psi_3(t)+\gamma\psi_4(t).$$

При этом соответствующее управление $u(t)$ задано соотношением

$$u(t)=\begin{cases} u_{\max}, & \text{если}\quad L(t)>0,\\ \forall u\in[0,u_{\max}], & \text{если}\quad L(t)=0,\\ 0, & \text{если}\quad L(t)<0. \end{cases} \tag{3.5}$$

В силу леммы 1 функция $L(t)=\psi_1(t)$ — функция переключений, поскольку, как следует из соотношения (3.5), от ее поведения зависит вид управления $u(t)$.

Для удобства в последующих рассуждениях наряду с функцией $L(t)$ используем вспомогательные функции:

$$G(t)=y(t)\Phi(t)+w(t)\Psi(t),\quad Q(t)=-\big(y(t)-\gamma w(t)\big)\psi_4(t),\quad P(t)=-z(t)\psi_4(t),$$
$$p(t)=y(t)+\beta w(t),\quad \mu(t)=y(t)\big(z(t)-x(t)\big)+w(t)\big(\beta z(t)+\gamma x(t)\big),$$
$$f(t)=x(t)\big(y(t)-\gamma w(t)\big),\quad g(t)=x(t)z(t)-\lambda,\quad s(t)=\big(\alpha+(\alpha-1)\gamma\big)x(t)w(t).$$

Тогда с помощью сопряженной системы (3.4) выпишем для функций $L(t)$, $G(t)$, $Q(t)$, $P(t)$ соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot L(t)=u(t)L(t)+z(t)G(t), \quad t\in[0,T],\\ \dot G(t)=u(t)p(t)L(t)+\mu(t)G(t)+\lambda Q(t),\\ \dot Q(t)=-f(t)G(t)-g(t)Q(t)+s(t)P(t),\\ \dot P(t)=-x(t)z(t)G(t)+x(t)z(t)Q(t). \end{cases} \tag{3.6}$$

Считаем, что в дальнейших рассуждениях выполнено предположение

• (Q_4) для функций $L(t)$, $G(t)$, $Q(t)$, $P(t)$ имеет место неравенство

$$(L(T),G(T),Q(T),P(T))^\top\neq 0.$$

Из анализа системы (3.6) следует справедливость утверждения.

Лемма 2. *Функция переключений $L(t)$ не обращается в нуль тождественно на любом интервале $\Delta \subset [0, T]$.*

З а м е ч а н и е 4. Из соотношения (3.5) и леммы 2 вытекает, что управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $\{0, u_{\max}\}$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Функция переключений $L(t)$ имеет не более трех нулей на отрезке* $[0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполним в системе (3.6) замену переменных

$$r(t) = L(t), \quad v(t) = G(t), \quad \eta(t) = Q(t), \quad \nu(t) = P(t) + q_1(t)L(t) + q_2(t)G(t) + q_3(t)Q(t),$$

где функции $q_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ подчиняются системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = s(t)q_1(t)q_3(t) - u(t)q_1(t) - u(t)p(t)q_2(t), \\ \dot{q}_2(t) = s(t)q_2(t)q_3(t) - z(t)q_1(t) - \mu(t)q_2(t) + f(t)q_3(t) + x(t)z(t), \\ \dot{q}_3(t) = s(t)q_3^2(t) - \lambda q_2(t) + g(t)q_3(t) - x(t)z(t). \end{cases} \tag{3.7}$$

Тогда система (3.6) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = u(t)r(t) + z(t)v(t), \\ \dot{v}(t) = u(t)p(t)r(t) + \mu(t)v(t) + \lambda\eta(t), \\ \dot{\eta}(t) = -s(t)q_1(t)r(t) - \big(f(t) + s(t)q_2(t)\big)v(t) - \big(g(t) + s(t)q_3(t)\big)\eta(t) + s(t)\nu(t), \\ \dot{\nu}(t) = s(t)q_3(t)\nu(t). \end{cases} \tag{3.8}$$

Сделаем в системе (3.8) следующую замену переменных:

$$\widetilde{r}(t) = r(t), \quad \widetilde{v}(t) = v(t), \quad \widetilde{\eta}(t) = \eta(t) + q_4(t)r(t) + q_5(t)v(t), \quad \widetilde{\nu}(t) = \nu(t),$$

где функции $q_i(t)$, $i = 4, 5$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{q}_4(t) = -s(t)q_3(t)q_4(t) + \lambda q_4(t)q_5(t) + s(t)q_1(t) - \big(g(t) + u(t)\big)q_4(t) - u(t)p(t)q_5(t), \\ \dot{q}_5(t) = -s(t)q_3(t)q_5(t) + \lambda q_5^2(t) + s(t)q_2(t) - z(t)q_4(t) - \big(g(t) + \mu(t)\big)q_5(t) + f(t). \end{cases} \tag{3.9}$$

Значит, система (3.8) перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{r}}(t) = u(t)\widetilde{r}(t) + z(t)\widetilde{v}(t), \\ \dot{\widetilde{v}}(t) = \big(u(t)p(t) - \lambda q_4(t)\big)\widetilde{r}(t) + \big(\mu(t) - \lambda q_5(t)\big)\widetilde{v}(t) + \lambda\widetilde{\eta}(t), \\ \dot{\widetilde{\eta}}(t) = -\big(g(t) + s(t)q_3(t) - \lambda q_5(t)\big)\widetilde{\eta}(t) + s(t)\widetilde{\nu}(t), \\ \dot{\widetilde{\nu}}(t) = s(t)q_3(t)\widetilde{\nu}(t). \end{cases} \tag{3.10}$$

Наконец, выполним в системе (3.10) замену переменных

$$\bar{r}(t) = \widetilde{r}(t), \quad \bar{v}(t) = \widetilde{v}(t) + q_6(t)\widetilde{r}(t), \quad \bar{\eta}(t) = \widetilde{\eta}(t), \quad \bar{\nu}(t) = \widetilde{\nu}(t),$$

где функция $q_6(t)$ подчиняется уравнению

$$\dot{q}_6(t) = -\lambda q_5(t)q_6(t) + z(t)q_6^2(t) + \lambda q_4(t) + \big(\mu(t) - u(t)\big)q_6(t) - u(t)p(t). \tag{3.11}$$

Тогда окончательно система (3.10) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}(t) = \big(u(t) - z(t)q_6(t)\big)\bar{r}(t) + z(t)\bar{v}(t), \\ \dot{\bar{v}}(t) = \big(\mu(t) - \lambda q_5(t) + z(t)q_6(t)\big)\bar{v}(t) + \lambda\bar{\eta}(t), \\ \dot{\bar{\eta}}(t) = -\big(g(t) + s(t)q_3(t) - \lambda q_5(t)\big)\bar{\eta}(t) + s(t)\bar{\nu}(t), \\ \dot{\bar{\nu}}(t) = s(t)q_3(t)\bar{\nu}(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

Сведем системы уравнений (3.7),(3.9) и уравнение (3.11) в единую дифференциальную систему вида (1.1), в которой симметричные матрицы $A_k(t)$, вектора $b_k(t)$ и величины $c_k(t)$, $k=\overline{1,6}$ записываются следующим образом:

$$A_1(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5\,s(t) & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5s(t) & 0 & 0 & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\quad A_2(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0.5\,s(t) & 0 \\ 0 & 0.5\,s(t) & 0 & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s(t) & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\quad A_4(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5\,s(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5\,s(t) & 0 & 0.5\,\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

$$A_5(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5\,s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5\,s(t) & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_6(t)=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5\,\lambda \\ \vdots & 0 & -0.5\,\lambda & z(t) \end{pmatrix};$$

$$b_1(t)=\begin{pmatrix} -u(t) \\ -u(t)p(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad b_2(t)=\begin{pmatrix} -z(t) \\ -\mu(t) \\ f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad b_3(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ g(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_4(t)=\begin{pmatrix} s(t) \\ 0 \\ 0 \\ -\Big(g(t)+u(t)\Big) \\ -u(t)p(t) \\ 0 \end{pmatrix},\quad b_5(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ s(t) \\ 0 \\ -z(t) \\ -\Big(g(t)+\mu(t)\Big) \\ 0 \end{pmatrix},\quad b_6(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \mu(t)-u(t) \end{pmatrix}; \tag{3.14}$$

$$c_1(t)=c_4(t)=0,\quad c_2(t)=x(t)z(t),\ c_3(t)=-x(t)z(t),\quad c_5(t)=f(t),\quad c_6(t)=-u(t)p(t). \tag{3.15}$$

Для нахождения оценок (1.2), (1.3) и констант (1.5) используем неравенства (3.3). После громоздких вычислений имеем выражения

$$\begin{aligned} A =&0.5\left(9\,(\alpha+(\alpha-1)\gamma)^2m^2w_0^2+7\,\lambda^2+4\,z_{\max}^2\right)^{1/2},\\ B =&\big(4\,z_{\max}^2+5\,u_{\max}^2+7\,\lambda^2+4\,\beta^2u_{\max}^2w_0^2+4\,u_{\max}^2y_{\max}^2+6\,m^2y_{\max}^2+7\,m^2z_{\max}^2\\ &+8\,y_{\max}^2z_{\max}^2+12\,\beta^2w_0^2z_{\max}^2+13\,\gamma^2m^2w_0^2+9\,(\alpha+(\alpha-1)\gamma)^2m^2w_0^2\big)^{1/2},\\ C =&\big(m^2y_{\max}^2+\gamma^2m^2w_0^2+2\,m^2z_{\max}^2+2\,\beta^2u_{\max}^2w_0^2+2\,u_{\max}^2y_{\max}^2\big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что неравенство (1.4) выполнено. Тогда из теоремы 1 следует, что существует начальное условие (1.6), для которого соответствующее решение $q(t)$ системы (1.1) с ограничениями (3.13)–(3.15) определено на заданном отрезке $[0,T]$.

Значит, система (3.12) также определена на этом отрезке. Применяя к ней обобщенную теорему Ролля [3], заключаем, что функция $L(t)=\bar{r}(t)$ имеет не более трех нулей на отрезке $[0,T]$. Лемма доказана. □

Из соотношения (3.5) и леммы 3 вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. *Пусть точка* $(x, w, y, z)^\top$ *принадлежит границе множества достижимости* $X(T)$ *и для нее выполнено предположение* (Q_4). *Тогда отвечающее этой точке управление* $u(t)$ *является кусочно-постоянной функцией, которая принимает значения* $\{0, u_{\max}\}$ *и имеет не более трех переключений на интервале* $(0, T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
3. **Dmitruk A.V.** A generalized estimate on the number of zeros for solutions of a class of linear differential equations // SIAM J. Control Optim. 1992. Vol. 30, no. 5. P. 1087–1091.
4. **Grigorieva E.V., Khailov E.N.** Attainable set of a nonlinear controlled microeconomic model // J. Dyn. Control Syst. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 157–176.
5. **Барис Я.С., Барис П.Я., Рухлевич Б.** О взрывных решениях неавтономных квадратичных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 3. С. 302–307.
6. **Барис Я., Барис П., Рухлевич Б.** Разрушающиеся решения квадратичных систем дифференциальных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 15. С. 29–35.
7. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
8. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 720 с.
9. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
10. **Szarski J.** Differential inequalities. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1965. 256 p.
11. Three-dimensional nonlinear control model of wastewater biotreatment / E.V. Grigorieva, N.V. Bondarenko, E.N. Khailov, A. Korobeinikov // Neural, Parallel, and Scientific Computations. 2012. Vol. 20, no. 1. P. 23–36.
12. Finite-dimensional methods for optimal control of autothermal thermophilic aerobic digestion / E.V. Grigorieva, N.V. Bondarenko, E.N. Khailov, A. Korobeinikov // Industrial Waste / eds. K.Y. Show and X. Guo. Croatia: InTech, 2012. P. 91–120.
13. **Бондаренко Н.В., Григорьева Э.В., Хайлов Е.Н.** Задачи минимизации загрязнений в математической модели биологической очистки сточных вод // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 4. С. 614–627.
14. **Бондаренко Н.В., Григорьева Э.В., Хайлов Е.Н.** Некоторые задачи оптимального управления процессом биологической очистки сточных вод // Проблемы динамического управления: сб. науч. тр. ф-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2012. № 6. С. 25–44.
15. **Егоров А.И.** Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
16. Физическая химия. Кн. 2: Электрохимия. Химическая кинетика и катализ / К.С. Краснов, Н.К. Воробьев, И.Н. Годнев [и др.]. М.: Высшая школа, 2001. 319 с.

Хайлов Евгений Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: khailov@cs.msu.su

Поступила 13.06.2013

Григорьева Эллина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, профессор
Техасский женский университет, США
e-mail: egrigorieva@mail.twu.edu

Том 19 № 4 2013

УДК 519.6

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ В КОНСТРУКЦИЯХ РАСШИРЕНИЙ[1]

А. Г. Ченцов

Исследуются ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств и возможности их применения в качестве обобщенных элементов при построении множеств притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера. Указан класс измеримых пространств, для которых реализуется конструктивное построение всех ультрафильтров, включая свободные (ультрафильтры с пустым пересечением всех своих множеств).

Ключевые слова: измеримое пространство, множество притяжения, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. On the question of representation of ultrafilters and their application in extension constructions.

We study ultrafilters of widely understood measurable spaces and possibilities of their application as generalized elements in the construction of attraction sets in abstract attainability problems with constraints of asymptotic nature. A class of measurable spaces is specified for which all ultrafilters including free ultrafilters (with empty intersection of all of its sets) are built constructively.

Keywords: measurable space, attraction set, ultrafilter.

1. Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, в/з — вещественнозначная (функция), ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, ОУ — обобщенное управление, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, УП — упорядоченная пара, у/ф — ультрафильтр.

В различных задачах прикладного характера нередко возникает необходимость в построении расширений. Конструируются специальные обобщенные задачи с элементами идеализаций, что отвечает в содержательном отношении идее замыкания возможных действий в классе реализуемых процедур. Построения такого рода находят применение в задачах управления [1;2]; подобные ситуации возникают в задачах математического программирования [3;4]. В [1, гл. III] введены понятия точных, приближенных и обобщенных решений для задач оптимального управления. Обобщенные решения или ОУ(в [1;2] — управления-меры) выбираются в пределах надлежащего компакта, в котором обычные решения образуют всюду плотное множество. Критерий исходной задачи допускает обычно непрерывное продолжение на упомянутый компакт, как и зависимости, участвующие в формировании ограничений. Поэтому результат, достигаемый в классе ОУ, точно соблюдающих ограничения, допускает приближенную реализацию в классе обычных управлений, аппроксимирующих упомянутые ОУ. Естественным образом возникают приближенные решения (в [1] — последовательности), соблюдающие исходную систему ограничений “с нарастающей точностью”. Можно рассматривать эти решения (или управления) как вариант реализации качества, достижимого в классе ОУ, при “исчезающе малом” нарушении ограничений.

Подход [1, гл. III] может быть использован для исследования другого важного класса задач, а именно задач о достижимости. Так, в теории управления и ее приложениях важную

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13–01–90414 укр–ф_а, 12–01–00537_а, 13–04–00847_а) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12-П-1-1012, 12-П-1-1019).

роль играет задача о построении области достижимости в заданный момент времени. Выбор управлений стесняется при этом системой ограничений. Тогда, как и в случае задачи на экстремум, можно (и это представляет практический интерес) рассматривать постановку, в которой допускается приближенное соблюдение ограничений. Строго говоря, данная задача является в общем случае некорректной: малое ослабление условий может приводить к “скачку” области достижимости. Однако данный “скачок” может рассматриваться как полезное явление: ценой малого ослабления условий достигается ощутимый выигрыш качества. Сама степень ослабления условий, однако, зачастую не может быть указана; понятен лишь тип ослабленных ограничений. Возникает ситуация, подобная [1, гл. III] для задач оптимизации; естественный вариант формализации можно снова связать с применением приближенных решений [1] (при несущественной модификации определений). Возникающая при этом задача представляется (объективно) более сложной: речь идет о построении целого множества состояний, достижимых в пределе, т. е. о построении МП. Известно, что конструкции, ориентированные на приближенное соблюдение ограничений и оперирующие при этом с множествами, широко использовались в работах Н. Н. Красовского и его учеников в теории дифференциальных игр; отметим, что при доказательстве фундаментальной теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [5] предполагалось, что фазовые ограничения в виде сечений стабильного моста должны соблюдаться в классе реализуемых пошаговых движений приближенно. Кроме того, отметим широкое использование ОУ в игровых задачах программного управления (см. [1; 5]).

Данная постановка допускает естественные обобщения. Так, например, можно рассматривать вопрос о построении пучка траекторий управляемой системы при точном и приближенном соблюдении ограничений, также привлекая в последнем случае конструкцию на основе МП. Последнее, однако, должно конструироваться уже в функциональном пространстве, оснащаемом той или иной топологией, которая не всегда оказывается метризуемой (неметризуемой в типичных случаях оказывается, например, топология поточечной сходимости). Уже это обстоятельство приводит к тому, что использование только последовательностей в схеме, получаемой вышеупомянутой модификацией конструкции [1, гл. III], может оказаться недостаточным (отметим здесь же замечания в [3; 4], касающиеся применения направленностей). Имеются и другие соображения на этот счет. Дело в том, что при использовании системы ослабленных ограничений мы фактически имеем дело с ограничениями асимптотического характера в виде семейства множеств, каждое из которых должно порождать условие, подлежащее соблюдению с некоторого момента (при использовании соответствующей последовательности или направленности).

Можно, однако, представить ситуацию, когда “асимптотические ограничения” не связаны уже с ослаблением каких-либо стандартных условий. Пример такого рода рассмотрен в [6], где ограничения являются асимптотическими изначально (в задаче импульсного управления исследуются возможности, связанные с использованием “мощных” импульсов управления с исчезающе малой продолжительностью). Поэтому имеет смысл следующая более общая постановка: ограничения сразу задаются в виде семейства множеств и ни к каким традиционным ограничениям уже не привязываются (принцип соблюдения ограничений можно сохранить прежним, подобным на идейном уровне [1, гл. III] для решений-последовательностей). В этом случае мы можем использовать для целей формализации ограничений асимптотического характера “большие” семейства множеств, что также может мотивировать использование более общих конструкций в сравнении с решениями-последовательностями Дж. Варги [7] (в то же время во многих случаях секвенциальный подход оказывается достаточным [8; 9]).

С учетом упомянутых обстоятельств имеет смысл рассмотрение общей задачи о достижимости в ТП при ограничениях асимптотического характера без предположения об использовании только последовательностей обычных решений для формализации вариантов асимптотического поведения. По ряду причин (см. [7; 9]) целесообразно рассматривать в качестве упомянутых вариантов у/ф пространства обычных решений. Это связано с тем, что в классе фильтров, и в частности у/ф, реализуется наиболее общий, по-видимому, способ построения операции предельного перехода (действие направленностей удается при этом истолковать в терминах соответствующего предела по фильтру). При этом для целей построения обобщенных задач удается [9] использовать компактификацию Стоуна — Чеха [10]; роль ОУ играют при этом у/ф пространства обычных решений. Основное затруднение состоит в том, что свободные [10] у/ф, отвечающие за представление эффектов, не сводящихся к действию обычных решений, не обладают конструктивным описанием (существование и свойства таких у/ф устанавливаются с применением леммы Цорна). Поэтому, следуя подходу [11;12], мы рассматриваем у/ф широко понимаемых ИП. Важно установить классы ИП, для которых удается получить исчерпывающее описание множества всех у/ф (данного ИП). Здесь ориентируемся на развитие конструкции [13], привлекая декартовы произведения “хорошо устроенных” ИП. Этим построениям предшествует вводная часть, содержащая общие сведения, касающиеся МП и их представления в терминах у/ф.

2. Общие обозначения и определения

Используем стандартную теоретико-множественную символику: кванторы, пропозициональные связки. Как обычно, $\varnothing$ — пустое множество; def заменяет фразу “по определению”, $\exists!$ — фразу “существует и единственно”. Принимаем аксиому выбора. *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами (разумеется, использование термина “множество” в этом случае также допускается). Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов (см. [14, гл. II]). Тогда для всякого объекта z имеем, что $\{z\} \overset{\triangle}{=} \{z;z\}$ есть одноэлементное множество, содержащее z. Отметим, что множества являются объектами; с учетом этого, следуя [14, гл. II], полагаем для любых двух объектов u и v, что $(u,v) \overset{\triangle}{=} \{\{u\};\{u;v\}\}$, получая УП с первым элементом u и вторым элементом v. Если же h есть УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определяемые равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X; $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$.

Для всяких множеств A и B через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B; если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ множества C при действии f). Для всяких двух множеств A и B, отображения $f \in B^A$ и семейства $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$ рассматриваем $f^1[\mathcal{A}] \overset{\triangle}{=} \{f^1(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ как образ (непустого) семейства $\mathcal{A}$, также являющийся непустым семейством. Если S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$, то $\mathbf{C}_S[\mathcal{S}] \overset{\triangle}{=} \{S \setminus \mathbb{S}\colon \mathbb{S} \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$ есть семейство, двойственное к $\mathcal{S}$. В дальнейшем широко используем индексную форму записи отображений (см. [1]): если A, B — непустые множества и $b_\alpha \in B\ \forall \alpha \in A$, то $(b_a)_{a \in A}$ есть def отображение $f \in B^A$, для которого $f(\mathbf{a}) = b_{\mathbf{a}}\ \forall \mathbf{a} \in A$.

Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$ и при $n \in \mathbb{N}$ $\overline{1,n} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ и $\overrightarrow{n,\infty} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k\}$.

Семейства множеств. Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество I. Тогда $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ — множество всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(I)$,

$$\pi[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\ \&\ (I \in \mathcal{I})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

есть множество всех π-систем [15] п/м I с “нулем” и “единицей”. Следовательно,

$$(\mathrm{top})[I] \overset{\triangle}{=} \Big\{\tau \in \pi[I] \Big| \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\}, \qquad (\mathrm{alg})[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

суть множества всех топологий I и всех алгебр п/м I соответственно. Нам потребуются также полуалгебры множеств. Для того чтобы их ввести, условимся, что при $\mathcal{J} \in \pi[I]$, $M \in \mathcal{P}(I)$

и $n \in \mathbb{N}$ через $\Delta_n(M,\mathcal{J})$ обозначается множество всех кортежей $(J_k)_{k\in\overline{1,n}}\colon \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{J}$, для каждого из которых: 1) M есть объединение всех множеств $J_k,\ k \in \overline{1,n}$; 2) $J_p \cap J_q = \varnothing\ \forall p \in \overline{1,n}\ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}$. Введено множество всех разбиений M в сумму n множеств из $\mathcal{J}$. Тогда $\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(I \setminus L,\mathcal{I}) \neq \varnothing\}$ есть множество всех полуалгебр п/м I; разумеется, $(\mathrm{alg})[I] \subset \Pi[I]$. При $\mathcal{J} \in \Pi[I]$ в виде $\mathbf{a}_I^0(\mathcal{J}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(A,\mathcal{J}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I]$ имеем алгебру п/м I, порожденную полуалгеброй $\mathcal{J}$. Полагаем наконец, что $\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in I \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda)\,\&\,(\Lambda \cap L = \varnothing)\}$ (множество π-систем, различающих точки и “измеримые” множества); $\Pi[I] \subset \tilde{\pi}^0[I]$.

Через $\beta[I]$ (через $\beta_0[I]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))$), для каждого из которых $\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда $\beta_0[I]$ — множество всех БФ I. Через $\mathfrak{F}[I]$ (через $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$) обозначаем множество всех фильтров (всех у/ф) множества I (см. [16, гл. I]). Обозначения соответствуют [11, разд. 3]. Пусть $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[I|\mathcal{J}] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\}\ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $A \in \mathcal{P}(I)$, то через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначаем замыкание A в ТП (I,τ). При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $x \in I$ полагаем, что $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$, а тогда [16, гл. I] $N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N_\tau^0(x)\colon G \subset H\} \in \mathfrak{F}[I]$ (фильтр окрестностей x в ТП (I,τ)). При этом $(I-\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset F\} \in \mathfrak{F}[I]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I]$. С учетом этого определяем, следуя [16, гл. I], сходимость БФ в ТП: если $\tau \in (\mathrm{top})[I],\ \mathcal{B} \in \beta_0[I]$ и $x \in I$, то

$$\big(\mathcal{B} \xRightarrow{\tau} x\big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(N_\tau(x) \subset (I-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big). \tag{2.1}$$

Поскольку $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_0[I]$, в (2.1) определена сходимость фильтров и у/ф.

Ультрафильтры $\boldsymbol{\pi}$-систем. В пределах настоящего пункта фиксируем $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Полагаем, что

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid \\ (\varnothing \notin \mathcal{F})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{I}\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\},\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}, \tag{2.3}$$

$$\beta_{\mathcal{I}}^0[I] \triangleq \{\mathcal{B} \in \beta_0[I] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{I}\}. \tag{2.4}$$

В (2.2) (в (2.3)) имеем множество всех фильтров (всех у/ф) π-системы $\mathcal{I}$, а в (2.4) — множество всех БФ, содержащихся в $\mathcal{I}$. Условимся также именовать пару $(I,\mathcal{I})$ ИП, понимая, конечно, данный термин расширительно. Легко видеть, что

$$(I-\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \triangleq \{L \in \mathcal{I} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \forall \mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[I]. \tag{2.5}$$

Наиболее важен случай, когда операция (2.5) реализует у/ф. В этой связи отметим, что [13]

$$\begin{aligned}\beta_{\mathcal{I}}^{00}[I] &\triangleq \{\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[I] \mid (I-\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\} \\ &= \{\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ (B \cap L \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{B}) \Longrightarrow (\exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset L)\}\end{aligned} \tag{2.6}$$

(в (2.6) приведены необходимые и достаточные условия того, что БФ порождает у/ф). По аналогии с [10, гл. 3] определяем множество всех свободных у/ф π-системы $\mathcal{I}$:

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) \triangleq \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{L\in\mathcal{U}} L = \varnothing\Big\}. \tag{2.7}$$

Обычным способом вводятся тривиальные фильтры π-системы $\mathcal{I}$: $((I,\mathcal{I})-\mathrm{ult})[x] \triangleq \{J \in \mathcal{I} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \forall x \in I$. Всегда

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \setminus \{((I,\mathcal{I})-\mathrm{ult})[x]\colon x \in I\}. \tag{2.8}$$

Вполне очевидно свойство [13]: $(\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]) \Longleftrightarrow (((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\ \forall x \in I)$. Пусть

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\} \quad \forall L \in \mathcal{I}. \tag{2.9}$$

Тогда $(\mathbb{UF})[I;\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(L)\colon L \in \mathcal{I}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$ есть база топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$, определяемой в терминах (2.9) стандартным [10, гл. 1] способом, причем

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]) \tag{2.10}$$

есть T_2-пространство (хаусдорфово ТП), $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \neq \varnothing$. Отметим, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} \mid \mathcal{H}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \Phi_{\mathcal{I}}(H) \quad \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}). \tag{2.11}$$

Из (2.7) и (2.11) следует свойство: если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$, то $\left(\bigcap_{J \in \mathcal{J}} J = \varnothing\right) \Longrightarrow (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} \mid \mathcal{J}) \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}))$.

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]$, то $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x]\colon x \in I\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}))$, причем $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) = \mathrm{cl}(\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I])$ (свойство плотности) и $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) = \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) \cup \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}))\&(\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) \cap \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) = \varnothing)$. Обозначение $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I})$ используется в дальнейшем только при $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]$.

3. Оператор топологического предела

Напомним некоторые положения [12]. Фиксируем непустое множество E. Для всякого множества Y, отображения $f \in Y^E$ и БФ $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[Y]$ (см. [16, гл. I]). С учетом (2.1) и последнего свойства отметим одно из эквивалентных представлений МП в произвольном ТП: если $(Y, \mathbf{t})$ есть ТП, $f \in Y^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\mathbf{as})[E;Y;\mathbf{t};f;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\mathbf{t}}{\Longrightarrow} y\}; \tag{3.1}$$

если при этом $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то (3.1) совпадает с пересечением всех множеств $\mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \mathbf{t})$, $\Sigma \in \mathcal{E}$.

Фиксируем π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и элементы E рассматриваем как обычные решения задачи о достижимости в фиксированном T_2-пространстве $(\mathbf{H}, \tau)$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$. Операторы из множества $\mathbf{H}^E$ используем в качестве целевых отображений; $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[E]$, а тогда [16, гл. I] $f^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. При $f \in \mathbf{H}^E$, $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $h \in \mathbf{H}$ согласно (2.1)

$$(f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h) \Longleftrightarrow (\forall H \in N_\tau(h)\ \exists U \in \mathcal{U}\colon f^1(U) \subset H).$$

Введем множество $\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau] \overset{\triangle}{=} \left\{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists y \in \mathbf{H}\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y\right\} \in \mathcal{P}'\left(\mathbf{H}^E\right)$ (см. [11; 12]). В силу отделимости $(\mathbf{H}, \tau)$ корректно [11; 12] следующее

О п р е д е л е н и е 3.1. Если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$, то $\varphi_{\lim}[f] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ определяем правилом: $f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U})\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Из определения вытекает, что

$$\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S}) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{S}\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\}\ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]\ \forall \mathbb{S} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

Для нас существенно следствие:

$$\begin{aligned}&\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}))\\ &= \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\} \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).\end{aligned} \tag{3.2}$$

С учетом (3.1) имеем свойство: $\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{U}]\ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Из этого свойства вытекает, что

$$\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})) \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

С учетом отделимости ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ имеем $\forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ $\forall g \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\exists U \in \mathcal{U}\colon f(x) = g(x)\ \forall x \in U) \Longrightarrow (\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) = \varphi_{\lim}[g](\mathcal{U})). \tag{3.3}$$

Далее следуем терминологии [10, разд. 1.5] при определении T_3-пространства: ТП $(X, \mathbf{t})$ есть T_3-пространство, если $(X, \mathbf{t})$ — T_1-пространство и для каждой точки $x \in X$ семейство $N_{\mathbf{t}}(x) \cap \mathbf{C}_X[\mathbf{t}]$ есть локальная база (фундаментальная система окрестностей, понимаемых в смысле [16, гл. I]) $(X, \mathbf{t})$ в точке x (см. [10, 1.5.5]). Используем следующее свойство [11; 12]: если $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_3-пространство, то при всяком выборе $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ отображение $\varphi_{\lim}[f]$ непрерывно в смысле топологий $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \tau$.

Полагаем теперь, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда, как уже отмечалось, $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall x \in E$. С учетом этого получаем оператор $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot] \triangleq (((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E$, для которого, как легко проверить, в общем случае T_2-пространства $(\mathbf{H}, \tau)$ имеем свойство ($\circ$ — символ композиции отображений)

$$\varphi_{\lim}[f] \circ ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot] = f \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]. \tag{3.4}$$

Если, кроме того, $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_3-пространство, то согласно (3.4) при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ имеем в виде $\varphi_{\lim}[f]$ распространение f до непрерывного отображения из ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ (см. (2.10)) в $(\mathbf{H}, \tau)$. Полезно иметь в виду свойство плотности, отмеченное в замечании 2.1.

Полагаем до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ (тогда, в частности, $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$). В этом случае определено (см. замечание 2.1) множество $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}) = \{((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x]\colon x \in E\}$, для которого $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}(\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$, причем (см. [11])

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{3.5}$$

есть непустой компакт, гомеоморфный компакту Стоуна, отвечающему алгебре $\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L}) \in (\mathrm{alg})[E]$. Наконец, из результатов [11; 12] следует, что

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{3.6}$$

Полагаем до конца настоящего раздела, что $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_3-пространство. Из результатов [11;12] имеем теперь (учитываем также (3.4), (3.5) и положения [17]):

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] \\ = \varphi_{\lim}[f]^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}])\ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]\ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Комбинируя (3.2), (3.6) и (3.7), получаем основное положение, касающееся представления МП (см. [11; 12]).

Теорема 3.1. *Если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то справедлива цепочка равенств* $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\}$.

Данную теорему дополняем следующими двумя следствиями (3.3): если $p \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$, $q \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, тогда
1) $(\exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})\ \exists A \in \mathcal{U}\colon p(x) = q(x)\ \forall x \in A) \Longrightarrow ((\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; p; \mathcal{E}] \cap (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; q; \mathcal{E}] \neq \varnothing)$;
2) $(\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})\ \exists A \in \mathcal{U}\colon p(x) = q(x)\ \forall x \in A) \Longrightarrow ((\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; p; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; q; \mathcal{E}])$.

Итак, в терминах множеств $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, можно исследовать целый ряд свойств МП. При этом для расширения возможностей в части выбора семейства $\mathcal{E}$, определяющего ограничения асимптотического характера, может оказаться полезной несущественная [11, предложение 4.1] замена $\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})$.

4. Отображения с ярусными компонентами

В связи с теоремой 3.1 важно указать эффективно проверяемые условия, гарантирующие принадлежность отображения из $\mathbf{H}^E$ множеству $\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$. Имея такую цель, следуем здесь [12], полагая в настоящем разделе, что $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mathbf{H} = \mathbb{R}^\Gamma$, где Γ — непустое множество (более общий вариант задания $\mathbf{H}$ см. в [12]). Итак, $\mathbf{H}$ — множество всех функционалов на Γ. Через $\tau_\mathbb{R}$ обозначаем обычную топологию $\mathbb{R}$, порожденную (полной) метрикой-модулем $\mathbf{d}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty[$, $\mathbf{d}(u,v) \triangleq |u-v|$ $\forall u\in\mathbb{R}$ $\forall v\in\mathbb{R}$. Используем $(\mathbb{R},\mathbf{d})$ в качестве полного метрического пространства $(\mathbb{H},\rho)$ работы [12]. В этом случае множество $B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho)$ этой работы совпадает с $B(E,\mathcal{L})$ [18, гл. 2] (аналог пространства $B(S,\Sigma)$ [19, гл. IV]). Итак, в рассматриваемом случае $B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho) = B(E,\mathcal{L})$, где $B(E,\mathcal{L})$ есть замыкание в топологии равномерной сходимости (пространства ограниченных в/з функций на E) множества $B_0(E,\mathcal{L})$ всевозможных ступенчатых в смысле $(E,\mathcal{L})$ в/з функций на E. Точнее, $B_0(E,\mathcal{L})$ есть линейная оболочка (линейные операции в $\mathbb{R}^E$ определяем поточечно) множества всех индикаторов [20, с. 56] множеств из $\mathcal{L}$. Определяем $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ как топологию тихоновской степени $(\mathbb{R},\tau_\mathbb{R})$ с индексным множеством Γ. Иными словами, предполагается, что τ есть топология поточечной сходимости в $\mathbf{H} = \mathbb{R}^\Gamma$. Тогда $(\mathbf{H},\tau)$ есть T_3-пространство (см. [10, 2.3.11]). Если $f \in \mathbf{H}^E$ и $\gamma\in\Gamma$, то $f(\cdot)(\gamma) \triangleq (f(x)(\gamma))_{x\in E} \in \mathbb{R}^\Gamma$. Полагаем, что

$$B_\otimes[E;\mathcal{L}|\Gamma] \triangleq \{f\in\mathbf{H}^E \mid f(\cdot)(\gamma)\in B(E,\mathcal{L})\ \forall\gamma\in\Gamma\}, \tag{4.1}$$

получая вариант пространства $B_\otimes[E;\mathcal{L};\mathbb{H};\rho \mid \Gamma]$ работы [12], а потому (см. [12])

$$B_\otimes[E;\mathcal{L}|\Gamma] \subset \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]. \tag{4.2}$$

Свойство (4.2) легко проверяется непосредственно с использованием положений [21, §10.8], а также простейших свойств топологии поточечной сходимости (см., например, [10, §2.6]). Из (4.2) следует, что (см. определение 3.1) при $f\in B_\otimes[E;\mathcal{L}|\Gamma]$ определен оператор $\varphi_{\lim}[f]\in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, свойства которого соответствуют [12]. Однако в рассматриваемом случае структура данного оператора определяется проще. Действительно, с учетом [11, (6.1)] имеем при $g\in B(E,\mathcal{L})$ и $\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, что определено единственное число $c\in\mathbb{R}$, для которого $\forall\varepsilon\in\,]0,\infty[$ $\exists U\in\mathcal{U}\colon |g(x)-c|<\varepsilon$ $\forall x\in U$. Иными словами, каждой (ярусной) функции $g\in B(E,\mathcal{L})$ сопоставляется функционал $\lambda[g]\in\mathbb{R}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, для которого

$$g^1[\mathcal{U}] \overset{\tau_\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \lambda[g](\mathcal{U}) \quad \forall\,\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \tag{4.3}$$

(свойство (4.3) следует из [11, (5)]). Как следствие получаем, что [12, (6)] реализуется следующее свойство сходимости: $f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} (\lambda[f(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma}$ $\forall f\in B_\otimes[E;\mathcal{L}|\Gamma]$. Стало быть, $\varphi_{\lim}[f] = (\lambda[f(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma}$ $\forall f\in B_\otimes[E;\mathcal{L}|\Gamma]$. Отметим в этой связи [12, замечание 1]. С учетом сказанного выше для практического использования теоремы 3.1 в случае $f\in B_\otimes[E;\mathcal{L}|\Gamma]$ важно (см. (4.1)) располагать конкретным представлением множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Этому вопросу посвящены последующие разделы статьи.

Сейчас отметим также два простых обстоятельства. Пространство $(E,\mathcal{L})$, рассматриваемое в настоящем разделе, должно “приводить” к достаточно представительному множеству $B(E,\mathcal{L})$. Второй очевидный момент состоит в том, что полуалгебру $\mathcal{L}\in\Pi[E]$ можно заменить алгеброй $\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})$, не изменяя при этом $B(E,\mathcal{L})$ (см. [21, (6.5.3)]). Упомянутая замена может, однако, быть весьма полезной в том отношении, что $\mathcal{P}'(\mathcal{L})\subset\mathcal{P}'(\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L}))$ и, в типичных случаях, $\mathcal{P}'(\mathcal{L})\neq\mathcal{P}'(\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L}))$; таким образом, осуществляя упомянутую замену, мы получаем возможность применять теорему 3.1 для более общего класса семейств $\mathcal{E}$, используемых в качестве ограничений асимптотического характера.

До конца настоящего раздела полагаем $E = E_1\times E_2$, где E_1 и E_2 — непустые множества; фиксируем также $\mathcal{L}_1\in\pi[E_1]$ и $\mathcal{L}_2\in\pi[E_2]$. Таким образом, рассматриваем произведение пространств $(E_1,\mathcal{L}_1)$ и $(E_2,\mathcal{L}_2)$. Основной целью является представление множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, где

$\mathcal{L} \in \pi[E]$ определяется в виде естественным образом понимаемого произведения $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, в терминах $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)$. Если $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)$ будут допускать конструктивное построение (такие примеры приведены в [12; 13; 22]), то таким же свойством будет обладать и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Напомним, что (см. разд. 2) при $z \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ непременно $\mathrm{pr}_1(z) \in \mathcal{L}_1$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathcal{L}_2$. С другой стороны,

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \ \forall \mathcal{H}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_1)) \ \forall \mathcal{H}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_2)). \quad (4.4)$$

В частности, $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \in \pi[E]$. С учетом этого полагаем в настоящем разделе, что $\mathcal{L} \overset{\triangle}{=} \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$, получая ИП $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Кроме того, из (2.4) и (4.4) непосредственно следует, что

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \in \beta_{\mathcal{L}}^0[E] \quad \forall \mathcal{B}_1 \in \beta_{\mathcal{L}_1}^0[E_1] \quad \forall \mathcal{B}_2 \in \beta_{\mathcal{L}_2}^0[E_2]. \quad (4.5)$$

В свою очередь, из (2.6), (4.4) и (4.5) вытекает свойство

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \in \beta_{\mathcal{L}}^{00}[E] \quad \forall \mathcal{B}_1 \in \beta_{\mathcal{L}_1}^{00}[E_1] \quad \forall \mathcal{B}_2 \in \beta_{\mathcal{L}_2}^{00}[E_2]. \quad (4.6)$$

Вместе с тем из (2.2) и (4.4) легко следует, что $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_1) \ \forall \mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_2)$. Как следствие имеем с учетом (4.6), что

$$\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1) \quad \forall \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2). \quad (4.7)$$

Легко видеть также, что $(\mathbf{PR})_1[\mathcal{F}] \overset{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{L}_1 \mid A \times E_2 \in \mathcal{F}\} = \{A \in \mathcal{L}_1 \mid \exists B \in \mathcal{L}_2 \colon A \times B \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_1) \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Очень важен тот факт, что

$$(\mathbf{PR})_1[\mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (4.8)$$

Аналогичные свойства реализуются при “проектировании” $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ на $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}_2)$: $(\mathbf{PR})_2[\mathcal{F}] \overset{\triangle}{=} \{B \in \mathcal{L}_2 \mid E_1 \times B \in \mathcal{F}\} = \{B \in \mathcal{L}_2 \mid \exists A \in \mathcal{L}_1 \colon A \times B \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_2) \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. При этом

$$(\mathbf{PR})_2[\mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (4.9)$$

Из определений легко следует, что $(\mathbf{PR})_1[\mathcal{F}] \otimes (\mathbf{PR})_2[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Таким образом, $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) = \{\mathrm{pr}_1(z) \otimes \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_1) \times \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_2)\}$. С другой стороны, из вышеупомянутого представления фильтров ИП $(E, \mathcal{L})$ следует, в частности, свойство $(\mathbf{PR})_1[\mathcal{U}] \otimes (\mathbf{PR})_2[\mathcal{U}] = \mathcal{U} \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. С учетом (4.7)–(4.9) получаем важное равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathrm{pr}_1(z) \otimes \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1) \times \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)\}; \quad (4.10)$$

(4.10) имеет следующий содержательный смысл: $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \colon \mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1),\ \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)\}$. Полезно отметить еще одно очевидное свойство, вытекающее из (2.5) и (4.5): $\forall \mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_1) \ \forall \mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_2) \ \forall \mathcal{B}_1 \in \beta_{\mathcal{L}_1}^0[E_1] \ \forall \mathcal{B}_2 \in \beta_{\mathcal{L}_2}^0[E_2]$

$$((\mathcal{F}_1 = (E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_1|\mathcal{L}_1]) \,\&\, (\mathcal{F}_2 = (E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_2|\mathcal{L}_2])) \Longrightarrow (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2|\mathcal{L}]).$$

Для наших последующих целей существенно очевидное следствие: $\forall \mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1) \ \forall \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2) \ \forall \mathcal{B}_1 \in \beta_{\mathcal{L}_1}^{00}[E_1] \ \forall \mathcal{B}_2 \in \beta_{\mathcal{L}_2}^{00}[E_2]$

$$((\mathcal{U}_1 = (E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_1|\mathcal{L}_1]) \,\&\, (\mathcal{U}_2 = (E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_2|\mathcal{L}_2])) \Longrightarrow (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2|\mathcal{L}]). \quad (4.11)$$

Свойства (4.10), (4.11) позволяют построить $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, если только нам известно представление каждого из множеств $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)$.

Предложение 4.1. *Если $x \in E_1$ и $y \in E_2$, то справедливо равенство*

$$((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[(x, y)] = ((E_1, \mathcal{L}_1) - \mathrm{ult})[x] \otimes ((E_2, \mathcal{L}_2) - \mathrm{ult})[y]. \quad (4.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ фильтры в левой и правой частях (4.12) соответственно. Пусть $M \in \mathcal{M}$. Тогда $M \in \mathcal{L}$ и $(x, y) \in M$. Имеем по определению $\mathcal{L}$, что $M = M_1 \times M_2$, где $M_1 \in \mathcal{L}_1$ и $M_2 \in \mathcal{L}_2$. Тогда $x \in M_1$ и $y \in M_2$, а потому $M_1 \in ((E_1, \mathcal{L}_1) - \mathrm{ult})[x]$ и $M_2 \in ((E_2, \mathcal{L}_2) - \mathrm{ult})[y]$. Согласно (4.4) $M \in \mathcal{N}$. Итак, $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Пусть теперь $N \in \mathcal{N}$. С учетом (4.4) подберем $N_1 \in ((E_1, \mathcal{L}_1) - \mathrm{ult})[x]$ и $N_2 \in ((E_2, \mathcal{L}_2) - \mathrm{ult})[y]$ так, что $N = N_1 \times N_2$. Тогда $N_1 \in \mathcal{L}_1$, $N_2 \in \mathcal{L}_2$, $x \in N_1$ и $y \in N_2$. При этом по определению $\mathcal{L}$ имеем (см. (4.4)), что $N \in \mathcal{L}$, причем $(x, y) \in N$. В итоге $N \in \mathcal{M}$, чем и завершается проверка вложения $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, а значит, и равенства (4.12).

Предложение доказано.

Предложение 4.2. *Если* $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1)$ *и* $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)$, *то*

$$(\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)) \vee (\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2))).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$. Тогда у/ф $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обладает свойством $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \neq ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[z]$ $\forall z \in E$. Покажем, что $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)$ или $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)$.

Допустим противное. Тогда согласно (2.8) для некоторых $x_* \in E_1$ и $y_* \in E_2$

$$(\mathcal{U}_1 = ((E_1, \mathcal{L}_1) - \mathrm{ult})[x_*]) \,\&\, (\mathcal{U}_2 = ((E_2, \mathcal{L}_2) - \mathrm{ult})[y_*]).$$

Следовательно для $(x_*, y_*) \in E$ имеем в соответствии с предложением 4.1 равенство $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 = ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[(x_*, y_*)]$, что невозможно в силу (2.8) (напомним, что по предположению $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ — свободный у/ф). Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)$ или $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)$. Итак,

$$(\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})) \Longrightarrow ((\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)) \vee (\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2))). \tag{4.13}$$

Пусть $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)$. Тогда согласно (2.7)

$$\bigcap_{L \in \mathcal{U}_1} L = \varnothing. \tag{4.14}$$

Поскольку $\mathcal{U}_2 \neq \varnothing$, выберем и зафиксируем множество $V \in \mathcal{U}_2$, получая согласно (4.4), что $L \times V \in \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ $\forall L \in \mathcal{U}_1$. Тогда (см. (4.14))

$$\bigcap_{\mathbb{L} \in \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2} \mathbb{L} \subset \bigcap_{L \in \mathcal{U}_1} (L \times V) = \Big(\bigcap_{L \in \mathcal{U}_1} L\Big) \times V = \varnothing$$

(учитываем, что $\mathcal{U}_1 \neq \varnothing$), что означает в силу (2.7) справедливость включения $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$. Итак, установлена импликация $(\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)) \Longrightarrow (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}))$. Аналогичными рассуждениями устанавливается импликация $(\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)) \Longrightarrow (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}))$. Таким образом, $((\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)) \vee (\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2))) \Longrightarrow (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}))$; с учетом (4.13) получаем требуемое утверждение.

Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 4.1. Пусть $\mathcal{L}_1 \in \Pi[E_1]$ и $\mathcal{L}_2 \in \Pi[E_2]$ ($(E_1, \mathcal{L}_1)$ и $(E_2, \mathcal{L}_2)$ — суть ИП с полуалгебрами множеств). Тогда [18, предложение 5.2.2] $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, т. е. $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с полуалгеброй множеств. Получили случай, рассматриваемый в разд. 4. Заметим, что [21, (6.5.3)] $B(E, \mathcal{L}) = B(E, \mathbf{a}_E^0(\mathcal{L}))$, где $\mathbf{a}_E^0(\mathcal{L}) \in (\mathrm{alg})[E]$. С учетом этого замена $\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})$, доставляющая ИП $(E, \mathbf{a}_E^0(\mathcal{L}))$ с алгеброй множеств, не дает ничего в смысле обогащения множества $B_\otimes[E; \mathcal{L}|\Gamma]$, так как $B_\otimes[E; \mathcal{L}|\Gamma] = B_\otimes[E; \mathbf{a}_E^0(\mathcal{L})|\Gamma]$ (здесь Γ соответствует разд. 4). Она, однако, может оказаться полезной с точки зрения возможностей в части использования в теореме 3.1 тех или иных семейств $\mathcal{E}$ (см. заключительные замечания в разд. 4, а также (4.2)).

Ограничимся здесь замечаниями относительно пространства $B(E, \mathcal{L})$ в случае $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$. Условимся через $\chi_A^{(1)}$ (через $\chi_B^{(2)}$) обозначать индикатор [20, II.2] множества $A \in \mathcal{P}(E_1)$

(множества $B \in \mathcal{P}(E_2)$), определенный как в/з функция на E_1 (на E_2); если $M \in \mathcal{P}(E)$, то через χ_M обозначаем индикатор M, определенный на E. Тогда $\chi_M(x,y) = \chi_A^{(1)}(x)\chi_B^{(2)}(y)$ при $A \in \mathcal{P}(E_1),\ B \in \mathcal{P}(E_2),\ M = A \times B,\ x \in X,\ y \in Y$. В этой связи условимся о соглашении: если $u \in \mathbb{R}^{E_1}$ и $v \in \mathbb{R}^{E_2}$, то $u \odot v \in \mathbb{R}^E$ определяется условием $(u \odot v)(z) \triangleq u(\mathrm{pr}_1(z))\, v(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in E$. Тогда $\chi_{A\times B} = \chi_A^{(1)} \odot \chi_B^{(2)}\ \forall A \in \mathcal{P}(E_1)\ \forall B \in \mathcal{P}(E_2)$. Из этого легко следует, что $f \odot g \in B_0(E, \mathcal{L})$ при $f \in B_0(E_1, \mathcal{L}_1)$ и $g \in B_0(E_2, \mathcal{L}_2)$ (см. определение $\mathcal{L}$). Как следствие получаем, что

$$f \odot g \in B(E, \mathcal{L}) \quad \forall f \in B(E_1, \mathcal{L}_1) \quad \forall g \in B(E_2, \mathcal{L}_2). \tag{4.15}$$

Разумеется, мы можем рассматривать линейные комбинации в/з функций (4.15) и их равномерные (на E) пределы, получая обширное множество, конструируемое на основе $B(E_1, \mathcal{L}_1)$ и $B(E_2, \mathcal{L}_2)$. Ярусные функции такого типа можно использовать при построении отображений из $B_\otimes[E; \mathcal{L}|\Gamma]$, которые, в свою очередь, могут применяться в теореме 3.1 (см. (4.2)).

5. Произведения ультрафильтров

Рассмотрим естественное обобщение конструкций разд. 4. Фиксируем в настоящем разделе два непустых множества X и Y, первое из которых используется в качестве индексного. Фиксируем также отображение (мультифункцию) $\Sigma \in \mathcal{P}'(Y)^X$; полагаем, что $E_x \triangleq \Sigma(x)\ \forall x \in X$. Рассматриваем случай, когда

$$E \triangleq \prod_{x \in X} E_x = \{g \in Y^X \mid g(s) \in E_s\ \forall s \in X\}. \tag{5.1}$$

По аксиоме выбора $E \neq \varnothing$. Заметим, что $\pi[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))\ \forall x \in X$. Фиксируем с учетом этого обобщенный кортеж π-систем

$$(\mathcal{L}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \pi[E_x]; \tag{5.2}$$

при этом $\mathbf{l} \triangleq (\mathcal{L}_x)_{x \in X}$ есть отображение X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$, для которого $\mathcal{L}_s = \mathbf{l}(s) \in \pi[E_s]\ \forall s \in X$. Определено обобщенное произведение

$$\prod_{x \in X} \mathcal{L}_x = \{(L_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(Y)^X \mid L_s \in \mathcal{L}_s\ \forall s \in X\},$$

элементами которого являются обобщенные кортежи п/м Y. В терминах (5.2) обычным образом конструируется семейство п/м E :

$$\mathcal{L} \triangleq \big\{\mathbb{L} \in \mathcal{P}(E) \,\big| \\ \exists\, (L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x \colon (\mathbb{L} = \prod_{x \in X} L_x)\,\&\,(\exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon L_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K)\big\} \in \pi[E] \tag{5.3}$$

(в настоящем разделе $\mathcal{L}$ понимается только в смысле (5.3)). Рассматриваем $(E, \mathcal{L})$ как (обобщенное) произведение ИП $(E_x, \mathcal{L}_x),\ x \in X$. Нашей главной целью будет представление $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в терминах $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x),\ x \in X$.

Конструкция, применяемая в (5.3), стандартна (см., например, [14; 15]) и может использоваться при построении произведений фильтров. В этой связи заметим, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$ при $x \in X$. Поэтому

$$\prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) = \{(\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))^X \mid \mathcal{F}_s \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_s)\ \forall s \in X\}. \tag{5.4}$$

В (5.4) введено множество, элементами которого являются системы фильтров. Следуя общим определениям [14, гл. IV], имеем при $(\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)$, что

$$\prod_{x\in X} \mathcal{F}_x = \{(F_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X \mid F_s \in \mathcal{F}_s \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)^X) \tag{5.5}$$

(учитываем, что $\mathcal{F}_h \neq \varnothing$ при $h \in X$). В свою очередь обобщенные кортежи из множества (5.5) могут использоваться для построения обобщенных декартовых произведений: если $(F_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{F}_x$, то

$$\prod_{x\in X} F_x = \{f \in Y^X \mid f(s) \in F_s \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}'(Y^X)$$

(учитываем, что $F_h \neq \varnothing$ при $h \in X$). С учетом этого полагаем, что $\forall (\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)$

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{F}_x \triangleq \big\{F \in \mathcal{P}(E) \,\big|$$
$$\exists (F_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{F}_x \colon (F = \prod_{x\in X} F_x) \,\&\, (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon F_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\big\}; \tag{5.6}$$

семейство (5.6) рассматриваем как произведение фильтров $\mathcal{F}_x, \ x \in X$. Из определений (см. (5.3), (5.6)) легко следует, что

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{F}_x \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \forall (\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x). \tag{5.7}$$

Заметим, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$ при $x \in X$. Определено произведение

$$\prod_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) = \{(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))^X \mid \mathcal{U}_s \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_s) \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}'\Big(\prod_{x\in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)\Big)$$

(учитываем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_h) \neq \varnothing$ при $h \in X$). Тогда при $(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$ определен фильтр $\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$.

Предложение 5.1. *Если* $(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$, *то* $\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{U} \triangleq \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x$, тогда (см. (5.7)) $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Введем в рассмотрение семейство $\mathfrak{V} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid L \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathfrak{U}\}$. Для доказательства достаточно установить, что $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ (см. [23, (5.8)]). Пусть $V \in \mathfrak{V}$. Тогда $V \in \mathcal{L}$ и при этом $U \cap V \neq \varnothing \ \forall U \in \mathfrak{U}$. С учетом (5.3) выберем обобщенный кортеж $(V_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$, для которого

$$\Big(V = \prod_{x\in X} V_x\Big) \,\&\, (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon V_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K). \tag{5.8}$$

Тогда $V_x \in \mathcal{L}_x \ \forall x \in X$. Кроме того, $E_x \in \mathcal{U}_x \ \forall x \in X$. Выберем произвольно $p \in X$ и рассмотрим семейство $\mathfrak{W} \triangleq \{L \in \mathcal{L}_p \mid L \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}_p\}$, для которого (см. [23, (5.8)]) $\mathfrak{W} \subset \mathcal{U}_p$.

Отметим, что $V_p \in \mathcal{L}_p$. Пусть $\Phi \in \mathcal{U}_p$. Введем в рассмотрение обобщенный кортеж $(\Psi_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}(Y)^X$, для которого $(\Psi_p \triangleq \Phi) \,\&\, (\Psi_x \triangleq E_x \ \forall x \in X \setminus \{p\})$. При этом (см. (5.5)) $(\Psi_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x$. В соответствии с (5.6) и определением $\mathfrak{U}$:

$$\Psi \triangleq \prod_{x\in X} \Psi_x \in \mathfrak{U}. \tag{5.9}$$

Тогда $V \cap \Psi \neq \varnothing$ (по выбору V). Из (5.8) и (5.9) следует, в частности, что $V_p \cap \Psi_p \neq \varnothing$, а потому $V_p \cap \Phi \neq \varnothing$. Поскольку выбор Φ был произвольным, $V_p \in \mathfrak{W}$ и, как следствие, $V_p \in \mathcal{U}_p$. Итак, установлено, что $V_x \in \mathcal{U}_x$ $\forall x \in X$, откуда в силу (5.6), (5.8) получаем включение $V \in \mathfrak{U}$. Вложение $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ установлено.

Предложение доказано.

Условимся о следующем соглашении: если $s \in X$ и $A \in \mathcal{P}(E_s)$, то полагаем, что отображение (мультифункция) $(A - \mathrm{repl})[s] \in \mathcal{P}(Y)^X$ определяется условиями

$$((A - \mathrm{repl})[s](s) \stackrel{\triangle}{=} A) \,\&\, ((A - \mathrm{repl})[s](h) \stackrel{\triangle}{=} E_h \ \forall h \in X \setminus \{s\}). \tag{5.10}$$

Правило (5.10) можно, в частности, использовать при $A \in \mathcal{L}_s$. Для получающихся мультифункций можно определять (обобщенные) декартовы произведения их сечений: если $s \in X$ и $A \in \mathcal{L}_s$, то

$$\prod_{x \in X} (A - \mathrm{repl})[s](x) = \{f \in Y^X \mid f(h) \in (A - \mathrm{repl})[s](h) \ \forall h \in X\}.$$

С учетом этого введем "проекции" фильтров π-системы $\mathcal{L}$:

$$(s - \mathbb{PR})[\mathcal{F}] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{L \in \mathcal{L}_s \mid \prod_{x \in X} (L - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{F}\Big\} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \quad \forall s \in X. \tag{5.11}$$

Легко видеть, что $(s - \mathbb{PR})[\mathcal{F}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_s)$ $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ $\forall s \in X$. Для наших целей существенно следующее важное

Предложение 5.2. *Если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $s \in X$, то $(s - \mathbb{PR})[\mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_s)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathcal{U}$ есть у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$, то [23, (5.8)] $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U}). \tag{5.12}$$

Полагая для краткости $\mathcal{V} \stackrel{\triangle}{=} (s - \mathbb{PR})[\mathcal{U}]$, имеем, что $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_s)$ и при этом (см. (5.11))

$$\mathcal{V} = \Big\{L \in \mathcal{L}_s \mid \prod_{x \in X} (L - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{U}\Big\}. \tag{5.13}$$

С учетом [23, (5.8)] достаточно установить свойство: $\forall L \in \mathcal{L}_s$

$$(L \cap V \neq \varnothing \ \forall V \in \mathcal{V}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{V}). \tag{5.14}$$

Выберем произвольно $W \in \mathcal{L}_s$ со свойством $W \cap V \neq \varnothing$ $\forall V \in \mathcal{V}$. Рассмотрим мультифункцию $\mathcal{W} \stackrel{\triangle}{=} (W - \mathrm{repl})[s]$. Тогда $\mathcal{W} \colon X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ и $(\mathcal{W}(s) = W) \,\&\, (\mathcal{W}(h) = E_h \ \forall h \in X \setminus \{s\})$. При этом $\mathfrak{W} \stackrel{\triangle}{=} \prod\limits_{x \in X} \mathcal{W}(x) = \prod\limits_{x \in X} (W - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{L}$. В силу (5.12)

$$(\mathfrak{W} \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (\mathfrak{W} \in \mathcal{U}). \tag{5.15}$$

Пусть $\Phi \in \mathcal{U}$. Тогда, в частности, $\Phi \in \mathcal{L}$ и $\Phi \neq \varnothing$. С учетом (5.3) подберем обобщенный кортеж $(\Phi_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x$, для которого

$$\Big(\Phi = \prod_{x \in X} \Phi_x\Big) \,\&\, (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon \Phi_h = E_h \ \forall h \in X \setminus K). \tag{5.16}$$

В частности, $\Phi_s \in \mathcal{L}_s$. Рассмотрим мультифункцию $(\Phi_s - \mathrm{repl})[s] \in \mathcal{P}(Y)^X$ и порождаемое ею множество

$$\tilde{\Phi} \stackrel{\triangle}{=} \prod_{x \in X} (\Phi_s - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{L}.$$

Тогда, поскольку $\Phi \in \mathcal{U}$ и (см. (5.10), (5.16)) $\Phi \subset \tilde{\Phi}$, имеем из (2.2) включение $\tilde{\Phi} \in \mathcal{U}$. Как следствие из (5.13) вытекает, что $\Phi_s \in \mathcal{V}$. Тогда по выбору W имеем свойство $W \cap \Phi_s \neq \varnothing$. Из (5.13) и определения $\mathfrak{W}$ следует, что $\mathfrak{W} \cap \Phi \neq \varnothing$ (учитываем также, что $\Phi_x \neq \varnothing\ \forall x \in X$, что следует из непустоты Φ). Поскольку выбор Φ был произвольным, установлена посылка импликации (5.15). В итоге $\mathfrak{W} \in \mathcal{U}$. Тогда $W \in \mathcal{L}_s$ обладает свойством $\prod\limits_{x\in X}(W - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{U}$. Из (5.13) следует, что $W \in \mathcal{V}$. Итак, $(W \cap V \neq \varnothing\ \forall\, V \in \mathcal{V}) \Longrightarrow (W \in \mathcal{V})$. Поскольку выбор W был произвольным, установлено, что (5.14) имеет место при любом выборе $L \in \mathcal{L}_s$.

Предложение доказано.

Напомним, что при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ согласно (5.4) $((x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}])_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)$ и, как следствие (см. (5.7)), определен фильтр $\bigotimes\limits_{x\in X}(x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$.

Предложение 5.3. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то* $\mathcal{F} = \bigotimes\limits_{x\in X}(x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем для краткости, что $\tilde{\mathcal{F}} \overset{\triangle}{=} \bigotimes\limits_{x\in X}(x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}]$. Тогда согласно (5.7) $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Сравним два непустых семейства $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$.

Пусть $\Phi \in \mathcal{F}$. Тогда, в частности, $\Phi \in \mathcal{L}$. С учетом (5.3) подберем обобщенный кортеж $(\Phi_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}\mathcal{L}_x$, для которого

$$\Big(\Phi = \prod_{x\in X}\Phi_x\Big)\,\&\,(\exists K \in \mathrm{Fin}(X)\colon\, \Phi_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{5.17}$$

При этом $\Phi_x \in \mathcal{L}_x\ \forall x \in X$. Далее, из (5.10) и (5.17) легко следует, что

$$\Phi \subset \prod_{x\in X}(\Phi_s - \mathrm{repl})[s](x) \quad \forall s \in X \tag{5.18}$$

(учитываем, что $\mathcal{L}_x \subset \mathcal{P}(E_x)$ при $x \in X$). При этом согласно (5.3) $\prod\limits_{x\in X}(\Phi_s - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{L}$ $\forall s \in X$. Тогда с учетом (2.2) и (5.18) имеем включения

$$\prod_{x\in X}(\Phi_s - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{F} \quad \forall s \in X. \tag{5.19}$$

Из (5.11) и (5.19) вытекает, что $\Phi_s \in (s - \mathbb{PR})[\mathcal{F}]\ \forall s \in X$. Тогда $(\Phi_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}(x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}]$ согласно (5.5). С учетом (5.6) и (5.17) получаем, что $\Phi \in \tilde{\mathcal{F}}$, чем и завершается проверка вложения $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$.

Выберем произвольное множество $\Psi \in \tilde{\mathcal{F}}$, получая, в частности, что $\Psi \in \mathcal{L}$. С учетом (5.6) подберем обобщенный кортеж

$$(\Psi_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}], \tag{5.20}$$

для которого справедливы следующие два свойства:

$$\Big(\Psi = \prod_{x\in X}\Psi_x\Big)\,\&\,(\exists K \in \mathrm{Fin}(X)\colon\, \Psi_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{5.21}$$

Из (5.5) и (5.20) вытекает, что $\Psi_s \in (s - \mathbb{PR})[\mathcal{F}]\ \forall s \in X$. В частности, из (5.11) имеем, что $\Psi_s \in \mathcal{L}_s\ \forall s \in X$. Кроме того, имеем в силу (5.11) следующее свойство

$$\prod_{x\in X}(\Psi_h - \mathrm{repl})[h](x) \in \mathcal{F} \quad \forall h \in X. \tag{5.22}$$

С учетом (5.21) выберем и зафиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathrm{Fin}(X)$ такое, что $\Psi_s = E_s \ \forall s \in X \setminus \mathbf{K}$. Выберем число $n \in \mathbb{N}$ и биекцию $(v_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \longrightarrow \mathbf{K}$ ($\mathbf{v} \overset{\triangle}{=} (v_i)_{i \in \overline{1,n}}$ есть взаимно однозначное отображение $\overline{1,n}$ на $\mathbf{K}$), получая из (5.22), что

$$\Omega_j \overset{\triangle}{=} \prod_{x \in X} (\Psi_{v_j} - \mathrm{repl})[v_j](x) \in \mathcal{F} \quad \forall j \in \overline{1,n}. \tag{5.23}$$

Поскольку семейство $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений (см. (2.2)), имеем из (5.23), что

$$\Omega \overset{\triangle}{=} \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \in \mathcal{F}. \tag{5.24}$$

Сравним Ψ и множество Ω в левой части (5.24). Пусть $\psi \in \Psi$. Тогда согласно (5.21) $\psi(x) \in \Psi_x \ \forall x \in X$. Разумеется, это означает, что $\psi(x) \in E_x \ \forall x \in X$. С учетом (5.11) получаем, что $\psi \in \prod\limits_{x \in X} (\Psi_h - \mathrm{repl})[h](x) \ \forall h \in X$. В частности (см. (5.23)) $\psi \in \Omega_j \ \forall j \in \overline{1,n}$. Тогда согласно (5.24) $\psi \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения $\Psi \subset \Omega$. Пусть $\omega \in \Omega$. Поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}'(E)$, имеем из (5.24), что $\omega \in E$, а тогда $\omega(x) \in E_x \ \forall x \in X$. Далее, $\omega \in \Omega_j \ \forall j \in \overline{1,n}$. Из (5.23) имеем, что при $j \in \overline{1,n}$ и $x \in X$ непременно $\omega(x) \in (\Psi_{v_j} - \mathrm{repl})[v_j](x)$. С учетом (5.10) имеем, в частности, что $\omega(v_j) \in \Psi_{v_j} \ \forall j \in \overline{1,n}$. Это означает, что $\omega(x) \in \Psi_x \ \forall x \in \mathbf{K}$. Как следствие имеем по выбору $\mathbf{K}$, что $\omega(x) \in \Psi_x \ \forall x \in X$. С учетом (5.21) получаем включение $\omega \in \Psi$. Тем самым вложение $\Omega \subset \Psi$ установлено, а тогда $\Psi = \Omega$ и, с учетом (5.24), $\Psi \in \mathcal{F}$. Поскольку выбор Ψ был произвольным, установлено вложение $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$.

Предложение доказано.

Из предложения 5.3 вытекает, в частности, что

$$\mathcal{U} = \bigotimes_{x \in X} (x - \mathbb{PR})[\mathcal{U}] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.25}$$

Кроме того, в силу (5.7) и предложения 5.3 $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) = \Big\{ \bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{F}_x \colon (\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \Big\}$.

Предложение 5.4. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \Big\{ \bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{U}_x \colon (\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \Big\}$.

Доказательство получаем непосредственной комбинацией предложений 5.1, 5.2 и (5.25). Итак, если мы располагаем (конструктивным) представлением каждого из множеств $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$, $x \in X$, то согласно предложению 5.4 имеем также конструктивное описание множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Здесь ситуация подобна в идейном отношении рассмотренной в разд. 4 (см. (4.10)). Отметим в заключение, что $(\mathcal{L}_x \in \Pi[E_x] \ \forall x \in X) \Longrightarrow (\mathcal{L} \in \Pi[E])$ (данное свойство подобно рассматриваемому в [20, предложение III.3.1]). Отметим тот важный частный случай, когда $E_x = Y \ \forall x \in X$. В этом случае согласно (5.1) имеем равенство $E = Y^X$ и, следовательно, $\mathcal{L} \in \pi[Y^X]$.

6. Примеры

В настоящем разделе рассмотрим два варианта ИП, для которых соответствующее множество у/ф допускает исчерпывающее и достаточно простое описание; эти ИП можно использовать в качестве пространств-сомножителей в конструкциях разд. 4 и 5. Для определенности зафиксируем два числа: $a \in \mathbb{R}$ и $b \in]a, \infty[$ (здесь и ниже для обозначения промежутков $\mathbb{R}$ будем использовать только квадратные скобки). Отдельно рассмотрим случаи, когда $E = [a, b[$ и $E = [a, b]$.

1) Пусть $E = [a, b[$. Рассмотрим пространство-стрелку (см. [22]), полагая в этом пункте, что $\mathfrak{P} \overset{\triangle}{=} \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [a, b] \times [a, b]\}$. Тогда $\mathfrak{P} \in \Pi[E]$. Если $x \in]a, b]$, то полагаем, следуя [22, разд. 6], что $\mathfrak{U}_x^0 \overset{\triangle}{=} \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [a, x[\times [x, b]\}$. Тогда $\mathfrak{U}_x^0 \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathfrak{P})\ \forall x \in]a, b]$. С учетом [22, (6.11)] получаем (см. замечание 2.1) равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{P}) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathfrak{P}) \cup \{\mathfrak{U}_x^0 \colon x \in]a, b]\}$. Имеем ИП с полуалгеброй множеств, для которого $\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{P})$ допускает очень простое описание. Заметим, что в [22, разд. 6] указано также конкретное представление множества $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{a}_E^0(\mathfrak{P}))$.

2) Рассмотрим пример [12, разд. 6], полагая до конца настоящего раздела, что $E = [a, b]$, и получая, что $\mathfrak{I} \overset{\triangle}{=} \{\Lambda \in \mathcal{P}(E) \mid \exists c \in E\ \exists d \in E \colon (]c, d[\subset \Lambda) \,\&\, (\Lambda \subset [c, d])\} \in \Pi[E]$ (полуалгебра промежутков $\mathbb{R}$, каждый из которых содержится в E). Полагаем далее, что $\mathcal{L} \overset{\triangle}{=} \mathbf{a}_E^0(\mathfrak{I})$, получая ИП $(E, \mathcal{L})$ с алгеброй множеств. Напомним представление $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, полученное в [12; 13]. Отметим, что в данном примере для представления $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ оказывается удобным использовать БФ из множества, подобного (2.6). В этой связи отметим, что при $\theta \in E$ непременно $\{\theta\} \in \mathcal{L}$ и $\{\{\theta\}\} \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]$, причем $(E - \mathbf{fi})[\{\{\theta\}\} | \mathcal{L}] = ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\theta]$. Итак, у/ф из $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$ порождаются одноэлементными БФ. Согласно положениям [13]

$$(\mathcal{J}_t^{(-)} \overset{\triangle}{=} \{[c, t[\colon c \in [a, t[\} \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]\ \forall t \in]a, b])\ \&(\mathcal{J}_t^{(+)} \overset{\triangle}{=} \{]t, c] \colon c \in]t, b]\} \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]\ \forall t \in [a, b[). \tag{6.1}$$

Посредством БФ (6.1) полностью определяется множество свободных у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$. Действительно,

$$\begin{gathered}(\mathfrak{A}_t^{(-)} \overset{\triangle}{=} (E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)} | \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\ \forall t \in]a, b])\,\& \\ (\mathfrak{A}_t^{(+)} \overset{\triangle}{=} (E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)} | \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\ \forall t \in [a, b[).\end{gathered} \tag{6.2}$$

При этом [13] $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \{\mathfrak{A}_t^{(-)} \colon t \in]a, b]\} \cup \{\mathfrak{A}_t^{(+)} \colon t \in [a, b[\}$ (напомним замечание 2.1), что позволяет исчерпывающим образом охарактеризовать все множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \cup \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. В [12] показано, как на основе данного описания можно использовать теорему 3.1 для конкретного построения МП, определяя явным образом множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{E})$ при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$.

7. Добавление

В настоящем разделе совсем кратко рассмотрим естественную комбинацию конструкций разд. 4 и 6, фиксируя числа $a_1 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in]a_1, \infty[$, $a_2 \in \mathbb{R}$ и $b_2 \in]a_2, \infty[$. Следуя построениям разд. 6, введем для множеств $E_1 \overset{\triangle}{=} [a_1, b_1]$ и $E_2 \overset{\triangle}{=} [a_2, b_2]$ полуалгебры $\mathfrak{I}_1 \overset{\triangle}{=} \{\Lambda \in \mathcal{P}(E_1) \mid \exists c \in E_1\ \exists d \in E_1 \colon (]c, d[\subset \Lambda) \,\&\, (\Lambda \subset [c, d])\} \in \Pi[E_1]$ и $\mathfrak{I}_2 \overset{\triangle}{=} \{\Lambda \in \mathcal{P}(E_2) \mid \exists c \in E_2\ \exists d \in E_2 \colon (]c, d[\subset \Lambda) \,\&\, (\Lambda \subset [c, d])\} \in \Pi[E_2]$, а также алгебры $\mathcal{L}_1 \overset{\triangle}{=} \mathbf{a}^0_{E_1}(\mathfrak{I}_1) \in (\mathrm{alg})[E_1]$ и $\mathcal{L}_2 \overset{\triangle}{=} \mathbf{a}^0_{E_2}(\mathfrak{I}_2) \in (\mathrm{alg})[E_2]$. Тогда $(E_1, \mathcal{L}_1)$ и $(E_2, \mathcal{L}_2)$ — суть варианты ИП разд. 6, причем (см. замечание 4.1) $\mathcal{L} \overset{\triangle}{=} \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \in \Pi[E]$, где $E \overset{\triangle}{=} E_1 \times E_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — прямоугольник на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Отметим, что свойства (4.5), (4.6), (4.10), (4.11) в нашем случае справедливы, а множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)$ исчерпывающим образом определяются соотношениями разд. 6 при очевидной коррекции обозначений (важно то, что полностью характеризуются множества $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_2)$). Заметим, в частности, что посредством (4.10) мы получаем конструктивное описание множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Однако в данном случае можно поступить проще, обращаясь к построениям на основе баз у/ф. В этой связи напомним, что у/ф из $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}_2)$ порождаются одноэлементными БФ. Итак, мы конкретизируем (6.1) для двух случаев, отвечающих

ИП $(E_1, \mathcal{L}_1)$ и $(E_2, \mathcal{L}_2)$:

$$(\mathcal{J}_{1,t}^{(-)} \triangleq \{[c,t[\colon c \in [a_1,t[\} \in \beta_{\mathcal{L}_1}^{00}[E_1] \ \forall t \in]a_1,b_1])\,\&$$
$$(\mathcal{J}_{1,t}^{(+)} \triangleq \{]t,c] \colon c \in]t,b_1]\} \in \beta_{\mathcal{L}_1}^{00}[E_1] \ \forall t \in [a_1,b_1[)\,\&$$
$$(\mathcal{J}_{2,t}^{(-)} \triangleq \{[c,t[\colon c \in [a_2,t[\} \in \beta_{\mathcal{L}_2}^{00}[E_2] \ \forall t \in]a_2,b_2])\,\&$$
$$(\mathcal{J}_{2,t}^{(+)} \triangleq \{]t,c] \colon c \in]t,b_2]\} \in \beta_{\mathcal{L}_2}^{00}[E_2] \ \forall t \in [a_2,b_2[).$$

В силу свойства, отмеченного в замечании 2.1 (см. также предложение 4.1), для получения исчерпывающего представления $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ достаточно найти такое представление для множества $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$, что достигается применением предложения 4.2. Для более точной формулировки упомянутого представления введем

$$(\mathbf{I}_1 \triangleq \{\mathcal{J}_{1,t}^{(-)} \colon t \in]a_1,b_1]\} \cup \{\mathcal{J}_{1,t}^{(+)} \colon t \in [a_1,b_1[\})\,\&$$
$$(\mathbf{I}_2 \triangleq \{\mathcal{J}_{2,t}^{(-)} \colon t \in]a_2,b_2]\} \cup \{\mathcal{J}_{2,t}^{(+)} \colon t \in [a_2,b_2[\}); \tag{7.1}$$

$\mathbf{I}_1 \subset \beta_{\mathcal{L}_1}^{00}[E_1]$, $\mathbf{I}_2 \subset \beta_{\mathcal{L}_2}^{00}[E_2]$. Кроме того, $\mathbb{T}_1 \triangleq \{\{\{\theta\}\} \colon \theta \in E_1\} \in \mathcal{P}'(\beta_{\mathcal{L}_1}^{00}[E_1])$ и $\mathbb{T}_2 \triangleq \{\{\{\theta\}\} \colon \theta \in E_2\} \in \mathcal{P}'(\beta_{\mathcal{L}_2}^{00}[E_2])$. Тогда (см. разд. 6) имеем, что $((E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}_1] \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_1) \ \forall \mathcal{B} \in \mathbb{T}_1)\,\&\,((E_2 - \mathbf{fi})[\tilde{\mathcal{B}}|\mathcal{L}_2] \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_2) \ \forall \tilde{\mathcal{B}} \in \mathbb{T}_2)$. Далее, из (7.1) вытекает, что (см. (6.2), (7.1))

$$((E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}_1] \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1) \ \forall \mathcal{B} \in \mathbf{I}_1)\,\&\,((E_2 - \mathbf{fi})[\tilde{\mathcal{B}}|\mathcal{L}_2] \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2) \ \forall \tilde{\mathcal{B}} \in \mathbf{I}_2). \tag{7.2}$$

Свойство (7.2) допускает усиление: из положений разд. 6 следует (см. (6.2), (7.1)), что

$$(\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1) = \{(E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}_1] \colon \mathcal{B} \in \mathbf{I}_1\})\,\&\,(\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2) = \{(E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}_2] \colon \mathcal{B} \in \mathbf{I}_2\}). \tag{7.3}$$

Из (4.10) и предложения 4.2 имеем следующее очевидное равенство:

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \{\mathrm{pr}_1(z) \otimes \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1) \times \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)\} \cup \big\{\mathrm{pr}_1(z) \otimes \mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1) \times \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)\big\}. \tag{7.4}$$

Предложение 7.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \{(E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\mu) \otimes \mathrm{pr}_2(\mu)|\mathcal{L}] \colon \mu \in \mathbf{I}_1 \times \mathbb{T}_2\} \cup \{(E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\nu) \otimes \mathrm{pr}_2(\nu)|\mathcal{L}] \colon \nu \in \mathbb{T}_1 \times \mathbf{I}_2\}$$
$$\cup\ \{((E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\eta) \otimes \mathrm{pr}_2(\eta)|\mathcal{L}] \colon \eta \in \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2\}. \tag{7.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим соответственно через Φ_1, Φ_2 и Φ_3 первую, вторую и третью группу множеств в равенстве (7.5), а через Ψ_1 и Ψ_2 обозначим соответственно первое и второе множества в правой части (7.4). Тогда $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \Psi_1 \cup \Psi_2$. Пусть $\mathcal{U}' \in \Psi_1$, $\mathcal{U}_1' \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_1)$ и $\mathcal{U}_2' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)$ реализуют равенство

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}_1' \otimes \mathcal{U}_2'. \tag{7.6}$$

С учетом (7.3) подберем $\mathcal{B}' \in \mathbf{I}_2$ так, что

$$\mathcal{U}_2' = (E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}'|\mathcal{L}_2]. \tag{7.7}$$

С другой стороны, $\mathcal{U}_1' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_1)$ или $\mathcal{U}_1' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)$ согласно замечанию 2.1.

Пусть $\mathcal{U}_1' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_1)$. Тогда для некоторого $\theta' \in E_1$ $\mathcal{U}_1' = ((E_1, \mathcal{L}_1) - \mathrm{ult})[\theta']$, где $\{\{\theta'\}\} \in \mathbb{T}_1$ и

$$\mathcal{U}_1' = (E_1 - \mathbf{fi})[\{\{\theta'\}\}|\mathcal{L}_1]. \tag{7.8}$$

При этом $\nu' \stackrel{\triangle}{=} (\{\{\theta'\}\}, \mathcal{B}') \in \mathbb{T}_1 \times \mathbf{I}_2$ и $(E - \mathbf{fi})[\{\{\theta'\}\} \otimes \mathcal{B}'|\mathcal{L}] = (E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\nu') \otimes \mathrm{pr}_2(\nu')|\mathcal{L}] \in \Phi_2$, причем согласно (4.11), (7.7) и (7.8) справедлива цепочка равенств $(E - \mathbf{fi})[\{\{\theta'\}\} \otimes \mathcal{B}'|\mathcal{L}] = \mathcal{U}_1' \otimes \mathcal{U}_2' = \mathcal{U}'$. В итоге $\mathcal{U}' \in \Phi_2$. Итак, установлена импликация

$$(\mathcal{U}_1' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_1)) \Longrightarrow (\mathcal{U}' \in \Phi_2). \tag{7.9}$$

Пусть теперь $\mathcal{U}_1' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)$. Тогда $\mathcal{U}_1' = (E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_1'|\mathcal{L}_1]$, где $\mathcal{B}_1' \in \mathbf{I}_1$ (см. (7.3)). При этом $\nu_1' \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{B}_1', \mathcal{B}') \in \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$, а потому

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_1' \otimes \mathcal{B}'|\mathcal{L}] = (E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\nu_1') \otimes \mathrm{pr}_2(\nu_1')|\mathcal{L}] \in \Phi_3, \tag{7.10}$$

причем согласно (4.11) $(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_1' \otimes \mathcal{B}'|\mathcal{L}] = \mathcal{U}_1' \otimes \mathcal{U}_2'$, а тогда в силу (7.6) и (7.10) $\mathcal{U}' \in \Phi_3$, чем и завершается проверка импликации

$$(\mathcal{U}_1' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)) \Longrightarrow (\mathcal{U}' \in \Phi_3). \tag{7.11}$$

Из (7.9) и (7.11) следует, что во всех возможных случаях $\mathcal{U}' \in \Phi_2 \cup \Phi_3$. Поскольку выбор $\mathcal{U}'$ был произвольным, установлено, что

$$\Psi_1 \subset \Phi_2 \cup \Phi_3. \tag{7.12}$$

Выберем произвольно $\mathcal{U}'' \in \Psi_2$, после чего подберем $\mathcal{U}_1'' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_1)$ и $\mathcal{U}_2'' \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_2)$, для которых

$$\mathcal{U}'' = \mathcal{U}_1'' \otimes \mathcal{U}_2''. \tag{7.13}$$

С учетом (7.3) подберем $\mathcal{B}'' \in \mathbf{I}_1$, для которого справедливо равенство

$$\mathcal{U}_1'' = (E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}''|\mathcal{L}_1]. \tag{7.14}$$

С учетом замечания 2.1 имеем, что $\mathcal{U}_2'' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_2)$ или $\mathcal{U}_2'' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Пусть сначала $\mathcal{U}_2'' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_2)$, $\theta'' \in E_2$ реализует равенство $\mathcal{U}_2'' = ((E_2, \mathcal{L}_2) - \mathrm{ult})[\theta'']$. При этом $\{\{\theta''\}\} \in \mathbb{T}_2$ и

$$\mathcal{U}_2'' = (E_2 - \mathbf{fi})[\{\{\theta''\}\}|\mathcal{L}_2] \tag{7.15}$$

(см. разд. 6). В этом случае $\gamma \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{B}'', \{\{\theta''\}\}) \in \mathbf{I}_1 \times \mathbb{T}_2$, а потому

$$(E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\gamma) \otimes \mathrm{pr}_2(\gamma)|\mathcal{L}] = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}'' \otimes \{\{\theta''\}\}|\mathcal{L}] \in \Phi_1. \tag{7.16}$$

С другой стороны, из (7.13)–(7.16) следует (см. (4.11)), что $\mathcal{U}'' = (E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\gamma) \otimes \mathrm{pr}_2(\gamma)|\mathcal{L}] \in \Phi_1$. Итак, установлена импликация

$$(\mathcal{U}_2'' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}_2)) \Longrightarrow (\mathcal{U}'' \in \Phi_1). \tag{7.17}$$

Пусть теперь $\mathcal{U}_2'' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)$. Тогда согласно (7.3)

$$\mathcal{U}_2'' = (E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_2''|\mathcal{L}_2], \tag{7.18}$$

где $\mathcal{B}_2'' \in \mathbf{I}_2$. Поэтому $\lambda \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{B}'', \mathcal{B}_2'') \in \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$, а тогда

$$(E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\lambda) \otimes \mathrm{pr}_2(\lambda)|\mathcal{L}] = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}'' \otimes \mathcal{B}_2''|\mathcal{L}] \in \Phi_3. \tag{7.19}$$

Из (4.11), (7.13), (7.14), (7.18) и (7.19) вытекает, что $\mathcal{U}'' = (E - \mathbf{fi})[\mathrm{pr}_1(\lambda) \otimes \mathrm{pr}_2(\lambda)|\mathcal{L}] \in \Phi_3$. Итак, установлена импликация

$$(\mathcal{U}_2'' \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}_2)) \Longrightarrow (\mathcal{U}'' \in \Phi_3). \tag{7.20}$$

Из (7.17), (7.20) вытекает, что во всех возможных случаях $\mathcal{U}'' \in \Phi_1 \cup \Phi_3$. Поскольку выбор $\mathcal{U}''$ был произвольным, установлено, что

$$\Psi_2 \subset \Phi_1 \cup \Phi_3. \tag{7.21}$$

Из (7.4), (7.12) и (7.21) получаем следующее вложение:

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \subset \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3. \tag{7.22}$$

Пусть $\mathcal{M} \in \Phi_1$, $\mu_0 \in \mathbf{I}_1 \times \mathbb{T}_2$ реализует равенство $\mathcal{M} = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}'_0 \otimes \mathcal{B}''_0|\mathcal{L}]$, где $\mathcal{B}'_0 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\mu_0) \in \mathbf{I}_1$ и $\mathcal{B}''_0 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\mu_0) \in \mathbb{T}_2$. Из (7.3) следует

$$\mathcal{M}_1 \stackrel{\triangle}{=} (E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}'_0|\mathcal{L}_1] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_1). \tag{7.23}$$

Поскольку $\mathcal{B}''_0 \in \beta^{00}_{\mathcal{L}_2}[E_2]$, имеем $\mathcal{M}_2 \stackrel{\triangle}{=} (E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}''_0|\mathcal{L}_2] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_2)$, а тогда из предложения 4.2 и (7.23) получаем, что $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. С другой стороны, из (4.11) и определений $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ следует, что $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}'_0 \otimes \mathcal{B}''_0|\mathcal{L}] = \mathcal{M}$, а тогда $\mathcal{M} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. Итак, установлено, что

$$\Phi_1 \subset \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}). \tag{7.24}$$

Пусть $\mathcal{N} \in \Phi_2$, $\nu_0 \in \mathbb{T}_1 \times \mathbf{I}_2$ таково, что $\mathcal{N} = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^0_1 \otimes \mathcal{B}^0_2|\mathcal{L}]$, где $\mathcal{B}^0_1 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\nu_0) \in \mathbb{T}_1$ и $\mathcal{B}^0_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\nu_0) \in \mathbf{I}_2$. Значит, из (7.3) следует, что

$$\mathcal{N}_2 \stackrel{\triangle}{=} (E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^0_2|\mathcal{L}_2] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_2). \tag{7.25}$$

Поскольку $\mathcal{B}^0_1 \in \beta^{00}_{\mathcal{L}_1}[E_1]$, то $\mathcal{N}_1 \stackrel{\triangle}{=} (E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^0_1|\mathcal{L}_1] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_1)$, а тогда из предложения 4.2 и (7.25) получаем, что $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2 \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. С другой стороны, из (4.11) и определений $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ следует, что $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2 = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^0_1 \otimes \mathcal{B}^0_2|\mathcal{L}] = \mathcal{N}$, а тогда $\mathcal{N} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$, чем и завершается проверка вложения

$$\Phi_2 \subset \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}). \tag{7.26}$$

Выберем произвольно $\mathcal{R} \in \Phi_3$, после чего подберем $\eta^* \in \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$ так, что при этом $\mathcal{R} = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^*_1 \otimes \mathcal{B}^*_2|\mathcal{L}]$, где $\mathcal{B}^*_1 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\eta^*) \in \mathbf{I}_1$ и $\mathcal{B}^*_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\eta^*) \in \mathbf{I}_2$. Из (7.2) вытекает, что $(\mathcal{R}_1 \stackrel{\triangle}{=} (E_1 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^*_1|\mathcal{L}_1] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_1))\,\&\,(\mathcal{R}_2 \stackrel{\triangle}{=} (E_2 - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^*_2|\mathcal{L}_2] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_2))$. Тогда согласно предложению 4.2 $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2 \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. С другой стороны, $\mathcal{B}^*_1 \in \beta^{00}_{\mathcal{L}_1}[E_1]$ и $\mathcal{B}^*_2 \in \beta^{00}_{\mathcal{L}_2}[E_2]$, а тогда $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2 = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}^*_1 \otimes \mathcal{B}^*_2|\mathcal{L}] = \mathcal{R}$ и, как следствие, $\mathcal{R} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. Поскольку выбор $\mathcal{R}$ был произвольным, установлено, что $\Phi_3 \subset \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. С учетом (7.24), (7.26) получаем вложение $\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3 \subset \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$, откуда (см. (7.22)) следует требуемое равенство $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$.

Предложение доказано.

Итак, в рассматриваемом случае исчерпывающее описание свободных у/ф реализуется в терминах просто устроенных баз: элементами последних являются “полуоткрытые” прямоугольники и полуинтервалы, рассматриваемые как плоские множества. Более точное описание приведено в начале раздела (см. определения $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$).

Отметим, что вопросы топологической структуры пространства ультрафильтров в произведении измеримых пространств подробно исследовались в [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 230 с.

3. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы. Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностр. лит., 1959. С. 263–267.
4. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Скворцова А.В., Ченцов А.Г.** О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.
7. **Ченцов А.Г.** Ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения: задача соблюдения ограничений асимптотического характера // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1047–1064.
8. **Ченцов А.Г.** О корректности некоторых задач управления материальной точкой // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 3. С. 127–141. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
9. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Соврем. математика и ее приложения / АН Грузии. Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
10. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
11. **Ченцов А.Г.** К вопросу о представлении элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
12. **Ченцов А.Г.** К вопросу о структуре множеств притяжения в топологическом пространстве // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 1(39). С. 147–150.
13. **Ченцов А.Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
14. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
15. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
16. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
17. **Ченцов А.Г.** Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 184–217.
18. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ. 2008. 388 с.
19. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Иностр. лит., 1962. 895 с.
20. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
21. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ. 2010. 541 с.
22. **Ченцов А.Г.** Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 225–239.
23. **Ченцов А.Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
24. **Ченцов А.Г.** К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 307–319.

Ченцов Александр Георгиевич
Поступила 12.04.2013
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.977

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ВЫПУКЛЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

А. А. Чикрий, А. А. Белоусов

Рассматривается задача о сближении траектории линейного конфликтно управляемого процесса с линейным подпространством в случае общих интегральных ограничений на управления игроков. С использованием техники многозначных отображений и выпуклого анализа (надграфик функции, рецессивный конус) получены достаточные условия разрешимости задачи в классе измеримых управлений. Указана связь с двойственным описанием на основе сопряженных функций. Отдельно установлены условия завершения игры с использованием импульсных управлений. Результаты исследований иллюстрируются на модельных примерах с разными типами ограничений на управления игроков.

Ключевые слова: дифференциальная игра, интегральные ограничения, многозначное отображение, рецессивный конус, импульсное управление.

A. A. Chikrii, A. A. Belousov. On linear differential games with convex integral constraints.

We consider the problem of the approach of a trajectory of a linear conflict-controlled process to a linear subspace in the case of general integral constraints on the player's controls. Using the technique of set-valued mappings and convex analysis (epigraph of a function, recession cone), we obtain sufficient conditions for problem solvability in the class of measurable controls. The relation to a dual description based on conjugate functions is specified. Termination conditions for a game with impulse controls are established. The results are exemplified by means of model problems with various types of constraints on the players' controls.

Keywords: differential game, integral constrains, set-valued mapping, recession cone, impulse control.

Введение

В математической теории управления и теории динамических игр наряду с фундаментальными исследованиями [1–3] существует ряд важнейших направлений, существенно продвигающих эту науку. Это, прежде всего, исследования, касающиеся обратных задач теории управления [4; 5], построение вязкостных решений уравнения Айзекса — Беллмана — основного уравнения теории дифференциальных игр [6; 7], изучение свойств стабильных мостов в игровых задачах динамики [8; 9].

Одним из эффективных методов построения стабильных мостов и решения игровых задач динамики является первый прямой метод Л. С. Понтрягина [1]. Этот метод был развит в работах М. С. Никольского [10–12] на случай интегральных ограничений на управления. В этом же направлении проводили свои исследования А. В. Мезенцев, Н. Л. Григоренко, А. Я. Азимов и Ф. В. Гусейнов. Правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [2] нашло свое воплощение для случая интегральных ограничений в работах В. Н. Ушакова [13], Б. Н. Пшеничного и Ю. Н. Онопчука [14]. О других исследованиях дифференциальных игр с интегральными ограничениями кратко упоминается во введении к статье [15].

Указанные исследования сосредотачивались главным образом на одном типе интегральных ограничений на управления игроков, а именно функций-управлений из гильбертова пространства L_2. Однако для практики интерес представляют и более общие типы интегральных ограничений. В этом направлении следует отметить, в первую очередь, статью М.С. Никольского [11], в которой игра обобщается на случай управления преследователя из пространства Орлича.

[1]Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (российско-украинский проект Ф53.1/006).

В данной работе рассматривается линейная дифференциальная игра с интегральным ограничением на управление преследователя, задаваемое выпуклым функционалом самого общего вида. В основе исследования лежит метод разрешающих функций [16], являющийся идейно близким к первому прямому методу Л. С. Понтрягина. Сущность метода состоит в оценке действий преследователя с помощью некоторой скалярной (разрешающей) функции, которая строится по функционалу Минковского вспомогательного многозначного отображения и интеграл от которой определяет гарантированное время сближения. Работа продолжает исследования [15–18].

В статье [18] метод разрешающих функций применяется к дифференциальной игре с интегральным ограничением на управление преследователя, которое определяется выпуклым функционалом, являющимся конечным на всем пространстве вместе с сопряженным. Конечность сопряженного функционала (кофинитность [19]) позволяет ограничить рассмотрение измеримыми управлениями без привлечения импульсных воздействий и аппарата управлений-мер (обобщенных функций), как происходит, например, в случае нормы L_1 [17]. В данной работе показано, что метод разрешающих функций можно применить к интегральным ограничениям, которые не связаны предположениями конечности. В частности, это могут быть характеристические функции геометрических и смешанных ограничений. Оказалось, что возможность построения измеримой разрешающей функции для заданного начального состояния в некий момент времени определяется рецессивным конусом [19] надграфика, ограничивающего управление функционала (теорема 1). Более того, если для заданного начального состояния и момента времени это условие нарушается, то игра может быть закончена в этот момент в классе импульсных управлений (теорема 2).

1. Постановка задачи

Динамика игры задается стационарным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \quad z(0) = z^0, \tag{1.1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^l$.

Управления игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего игрока $v(\cdot)$ являются измеримыми (по Лебегу) функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям:

$$\int\limits_0^\infty \varphi(u(\tau))\,d\tau \le 1, \quad \int\limits_0^\infty \psi(v(\tau))\,d\tau \le 1. \tag{1.2}$$

Эти управления будем называть допустимыми.

Функция φ, $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, предполагается неотрицательной, выпуклой и полунепрерывной снизу [19;20]. Обозначим множество уровня функции φ через $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\gamma) = \{\, u \in \mathbb{R}^m \colon \varphi(u) \le \gamma\}$. Полагаем, что $\varphi(0) = 0$ и множество уровня $\Phi(\gamma)$ ограничено хотя бы для одного неотрицательного γ.

Функция ψ, $\psi\colon V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^l$, предполагается неотрицательной и полунепрерывной сверху на своей области определения V.

Терминальное множество M является s-мерным линейным подпространством $\mathbb{R}^n$. Обозначим через π оператор проектирования из $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение L к M, т. е. $\mathbb{R}^n = M \oplus L$ и $\pi\colon \mathbb{R}^n \to L$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что игра может быть закончена в момент $T = T(z^0)$, если для любого допустимого управления убегающего игрока $v(t)$ существует допустимое управление преследователя $u(t)$, которое гарантирует приведение решения уравнения (1.1) $z(t)$, соответствующего управлениям $(u(t), v(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент T: $z(T) \in M$. Считаем, что при построении своего управления $u(t)$

преследователь в момент t может использовать информацию о реализовавшиемся до этого момента управлении противника $v(\tau)$, $\tau \in [0, t]$.

Введем предположение на параметры игры, которое можно назвать аналогом условия Л.С. Понтрягина [1] для дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Оно фиксирует некое преимущество преследующего игрока над убегающим и обеспечивает возможность решения задачи сближения.

Предположение. *Существует такое число λ, $0 \leq \lambda < 1$, что для всех t, $t \geq 0$, v, $v \in V$, выполняется включение*

$$\pi e^{At} C v \in \pi e^{At} B \Phi(\lambda \psi(v)). \tag{1.3}$$

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *При сделанных предположениях о свойствах функции φ множество уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, является полунепрерывным сверху выпуклозначным и компактозначным многозначным отображением.*

Доказательство. Выпуклость и компактность множества уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, являются следствием полунепрерывности снизу выпуклой функции φ и ограниченности множества $\Phi(\gamma)$ для какого-либо числа γ [19].

Отметим, что множества уровня образуют возрастающую по включению совокупность множеств: $\Phi(\gamma) \subset \Phi(\gamma + \delta)$ для всех неотрицательных γ и δ. Поэтому для доказательства полунепрерывности сверху $\Phi(\gamma)$ достаточно показать, что для любых γ и ε, $\gamma \geq 0$, $\varepsilon > 0$, существует число δ, $\delta > 0$, такое, что $\Phi(\gamma + \delta) \subset \Phi(\gamma) + \varepsilon D_U$, где D_U — единичный шар в $\mathbb{R}^m$, $D_U = \{u \in \mathbb{R}^m \colon \|u\| \leq 1\}$.

Обозначим через Γ границу выпуклого компакта $\Phi(\gamma) + \varepsilon D_U$. Множество Γ является компактом. Рассмотрим множество $G = \Gamma \cap \Phi(\gamma + 1)$. Если это множество пусто, то ясно, что $\Phi(\gamma + 1) \subset \Phi(\gamma) + \varepsilon D_U$, и можно положить $\delta = 1$. Если же $G \neq \varnothing$, то это множество является компактом, и можно положить

$$\delta = \min_{u \in G} \varphi(u) - \gamma.$$

Покажем, что для этого $\delta > 0$ выполняется требуемое включение.

Предположим, существует вектор $w \in \Phi(\gamma + \delta)$ такой, что

$$\rho = \min_{u \in \Phi(\gamma)} \|w - u\| > \varepsilon.$$

Поскольку множество $\Phi(\gamma)$ является выпуклым компактом, то существует единственный вектор p, $p \in \Phi(\gamma)$, такой, что $\rho = \|w - p\|$. Рассмотрим вектор $u = p + \varepsilon(w - p)/\rho \in \Gamma$. Для этого вектора выполняются следующие соотношения:

$$\varphi(u) = \varphi\Big(\frac{\varepsilon}{\rho} w + \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\rho}\Big) p\Big) \leq \frac{\varepsilon}{\rho} \varphi(w) + \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\rho}\Big) \varphi(p) \leq \frac{\varepsilon}{\rho}(\gamma + \delta) + \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\rho}\Big)\gamma = \gamma + \frac{\varepsilon}{\rho}\delta < \gamma + \delta.$$

Эти неравенства противоречат выбору δ, что и завершает доказательство леммы. □

Зафиксируем начальную позицию z^0. Введем обозначения

$$f(t, \tau, v, \gamma) = -\gamma \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} C v, \quad F(\tau, v, \gamma) = \pi e^{A\tau} B \Phi((1 - \lambda)\gamma + \lambda \psi(v)),$$

где $(t, \tau, v, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times V \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию, которую можно назвать разрешающей функцией дифференциальной игры с интегральными ограничениями [16]:

$$\gamma(t,\tau,v)=\sup\Omega(t,\tau,v),\quad \Omega(t,\tau,v)=\{\gamma\geq 0\colon f(t,\tau,v,\gamma)\in F(\tau,v,\gamma)\}\,. \tag{2.1}$$

Исследуем свойства этой функции. Свойство $\gamma\in\Omega(t,\tau,v)$ эквивалентно включению

$$a(t)\gamma+b(\tau,v)\in H(\tau)\operatorname{epi}\varphi, \tag{2.2}$$

где

$$H(\tau)=\begin{pmatrix}\pi e^{A\tau}B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\colon\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to L\times\mathbb{R},\quad a(t)=\begin{pmatrix}-\pi e^{At}z^0\\ 1-\lambda\end{pmatrix},\quad b(\tau,v)=\begin{pmatrix}\pi e^{A\tau}Cv\\ \lambda\psi(v)\end{pmatrix},$$

а $\operatorname{epi}\varphi=\{(u,\mu)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\colon\mu\geq\varphi(u)\}$ — надграфик функции φ.

Предположение (1.3) означает, что включение (2.2) выполняется при $\gamma=0$.

Напомним [19], что рецессивным конусом 0^+W выпуклого множества W, $W\subset\mathbb{R}^k$, называется множество всех векторов a, $a\in\mathbb{R}^k$, для которых выполняется включение $a\gamma+b\in W$ для всех чисел $\gamma\geq 0$ и векторов $b\in W$. Приведенное определение эквивалентно следующему: $0^+W=\left\{a\in\mathbb{R}^k\colon a+W\subset W\right\}$.

При сделанных предположениях о свойствах функции φ надграфик $\operatorname{epi}\varphi$ будет выпуклым и замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$, а рецессивный конус $0^+\operatorname{epi}\varphi$ — выпуклым замкнутым конусом [19]. Введем множество

$$\Delta=\left\{(t,\tau)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\colon a(t)\notin H(\tau)\,0^+\operatorname{epi}\varphi\right\}.$$

Лемма 2. *Для всех $(t,\tau,v)\in\Delta\times V$ функция $\gamma(t,\tau,v)<\infty$ и верхняя грань в определении $\gamma(t,\tau,v)$ (2.1) достигается.*

Доказательство. Множество $\operatorname{epi}\varphi$ выпукло и замкнуто, поэтому выпуклым будет множество $H(\tau)\operatorname{epi}\varphi$. Покажем, что это множество также замкнуто, для чего сопоставим равенства $\ker H(\tau)=\ker(\pi e^{A\tau}B)\times 0\subset\mathbb{R}^m\times 0$ и $0^+\operatorname{epi}\varphi\cap\{\mathbb{R}^m\times 0\}=0\times 0\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$. Откуда получаем, что $\ker H(\tau)\cap 0^+\operatorname{epi}\varphi=0\times 0\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$, а значит [19], множество $H(\tau)\operatorname{epi}\varphi$ — замкнуто и $0^+\{H(\tau)\operatorname{epi}\varphi\}=H(\tau)\,0^+\operatorname{epi}\varphi$.

Из условий леммы и включения (2.2) следует, что вектор $a(t)$ не принадлежит рецессивному конусу $0^+\{H(\tau)\operatorname{epi}\varphi\}$ и поэтому $\gamma(t,\tau,v)<\infty$.

Множество $\Omega(t,\tau,v)$ определяется (2.2) пересечением замкнутого луча в направлении $a(t)$ и выпуклого замкнутого множества $H(\tau)\operatorname{epi}\varphi$. Поэтому $\Omega(t,\tau,v)$ является выпуклым замкнутым множеством, следовательно, верхняя грань в определении $\gamma(t,\tau,v)$ достигается и множество $\Omega(t,\tau,v)=[0,\gamma(t,\tau,v)]$. □

Лемма 3. *Для всех $(t,\tau,v)\in\Delta\times V$ функция $\gamma(t,\tau,v)$ полунепрерывна сверху по совокупности переменных.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $(\bar t,\bar\tau,\bar v)\in\Delta\times V$ и зафиксируем его. Положим $\bar\gamma=\gamma(\bar t,\bar\tau,\bar v)$. Согласно лемме 2 $\bar\gamma<\infty$. По определению величины $\bar\gamma$ (2.1) для любого положительного числа ε вектор $f(\bar t,\bar\tau,\bar v,\bar\gamma+\varepsilon)$ лежит вне выпуклого компакта $F(\bar\tau,\bar v,\bar\gamma+\varepsilon)$. Обозначим расстояние между ними через η, $\eta>0$.

Из леммы 1 и полунепрерывности сверху функции $\psi(v)$ следует, что $F(\tau,v,\gamma)$ является полунепрерывным сверху выпуклозначным и компактозначным многозначным отображением, $(\tau,v,\gamma)\in\mathbb{R}_+\times V\times\mathbb{R}_+$. Значит, существует окрестность O_1 вектора $(\bar\tau,\bar v)$ на множестве $\mathbb{R}_+\times V$ такая, что для всех векторов (τ,v) из этой окрестности выполняется включение

$$F(\tau,v,\bar\gamma+\varepsilon)\subset F(\bar\tau,\bar v,\bar\gamma+\varepsilon)+\frac{1}{3}\eta D_L,\quad D_L=\{x\in L\colon\ \|x\|\leq 1\}\,.$$

Вектор $f(t,\tau,v,\gamma)$ зависит от аргумента $(t,\tau,v,\gamma)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times V\times\mathbb{R}_+$ непрерывным образом. Поэтому можно утверждать, что существует окрестность O_2 вектора $(\bar t,\bar\tau,\bar v)$ на множестве $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times V$ такая, что для всех векторов (t,τ,v) из этой окрестности выполняется включение

$$f(t,\tau,v,\bar\gamma+\varepsilon)\in f(\bar t,\bar\tau,\bar v,\bar\gamma+\varepsilon)+\frac{1}{3}\eta D_L.$$

Значит, для всех (t,τ,v) из окрестности $\{\mathbb{R}_+\times O_1\}\cap O_2$ вектор $f(t,\tau,v,\bar\gamma+\varepsilon)$ лежит вне выпуклого компакта $F(\tau,v,\bar\gamma+\varepsilon)$ и, следовательно, $\gamma(t,\tau,v)\le\gamma(\bar t,\bar\tau,\bar v)+\varepsilon$, что и завершает доказательство леммы. □

3. Основная теорема

Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1.1), (1.2) на терминальное множество M из начального положения z^0.

Теорема 1. *Полагаем, что выполнено условие* (1.3) *на параметры игры* (1.1), (1.2). *Предположим, что существует момент $T=T(z^0)$ такой, что $\{T\}\times[0,T]\subset\Delta$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^T \gamma(T,T-\tau,v(\tau))\,d\tau\ge 1. \tag{3.1}$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы.

Согласно лемме 3 разрешающая функция $\gamma(T,\tau,v)$ является измеримой по Борелю по совокупности переменных (τ,v), $(\tau,v)\in[0,T]\times V$, поэтому измеримым по Борелю будет и вектор $f(T,\tau,v,\gamma(T,\tau,v))$. Из полунепрерывности сверху функции $\psi(v)$, лемм 1 и 3 следует, что полунепрерывным сверху по $(\tau,v)\in[0,T]\times V$ будет выпуклозначное и компактозначное отображение $G(\tau,v)=\Phi((1-\lambda)\gamma(T,\tau,v)+\lambda\psi(v))$. Значит, это многозначное отображение будет измеримым по Борелю по совокупности переменных (τ,v) и выполняется включение (2.1):

$$f(T,\tau,v,\gamma(T,\tau,v))\in\pi e^{A\tau}BG(\tau,v),\quad (\tau,v)\in[0,T]\times V. \tag{3.2}$$

Отметим, что отображение $\pi e^{A\tau}Bu$ является непрерывным по $(\tau,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m$.

Из теоремы об измеримом селекторе Куратовского и Рыль – Нардзевского [21; 22] следует, что у включения (3.2) существует измеримый по Борелю по совокупности переменных (τ,v), $(\tau,v)\in[0,T]\times V$, селектор $w(\tau,v)\in G(\tau,v)$. Таким образом, для этого селектора выполняются тождество и ограничение:

$$\begin{aligned}&\pi e^{A\tau}[Bw(\tau,v)-Cv]=-\gamma(T,\tau,v)\pi e^{AT}z^0,\\ &\quad\varphi(w(\tau,v))\le(1-\lambda)\gamma(T,\tau,v)+\lambda\psi(v),\quad (\tau,v)\in[0,T]\times V.\end{aligned}$$

Из этой же теоремы можно заключить, что существует измеримый по Борелю селектор $\tilde w(\tau,v)\in\Phi(\lambda\psi(v))$ для которого выполняется равенство $f(T,\tau,v,0)=\pi e^{A\tau}B\tilde w(\tau,v)$ при всех $(\tau,v)\in\mathbb{R}_+\times V$, т. е.

$$\begin{aligned}&\pi e^{A\tau}[B\tilde w(\tau,v)-Cv]=0,\\ &\quad\varphi(\tilde w(\tau,v))\le\lambda\psi(v),\quad (\tau,v)\in\mathbb{R}_+\times V.\end{aligned}$$

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0,T]$ произвольное допустимое (1.2) управление $v(\tau)$. По предположению теоремы (3.1) существует такой момент $T^* = T^*(z^0, v(\cdot))$, что

$$\int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau = 1.$$

Тогда управление игрока-преследователя на интервале $[0,T]$ положим равным

$$u(\tau) = \begin{cases} w(T-\tau, v) & \text{при} \quad \tau \in [0, T^*), \\ \tilde{w}(T-\tau, v) & \text{при} \quad \tau \in [T^*, T]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Такой закон выбора управлений преследователя является (по существу) контруправлением с одним переключением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [23]. Поэтому построенное таким образом (3.3) управление $u(\tau)$ — измеримо по Лебегу для произвольного измеримого управления $v(\tau)$.

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (1.1) попадет на терминальное множество в момент T:

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)}[Bu(\tau) - Cv(\tau)]\, d\tau = \pi e^{AT} z^0$$

$$+ \int_0^{T^*} \pi e^{A(T-\tau)}[Bw(T-\tau, v(\tau)) - Cv(\tau)]\, d\tau$$

$$+ \int_{T^*}^T \pi e^{A(T-\tau)}[B\tilde{w}(T-\tau, v(\tau)) - Cv(\tau)]\, d\tau = \pi e^{AT} z^0 - \int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau\, \pi e^{AT} z^0 = 0.$$

Это равенство и доказывает приведение решения на терминальное множество: $z(T) \in M$.

Проверим, что построенное таким образом (3.3) управление $u(\tau)$ удовлетворяет интегральному ограничению (1.2):

$$\int_0^T \varphi(u(\tau))\, d\tau = \int_0^{T^*} \varphi(w(T-\tau, v(\tau)))\, d\tau$$

$$+ \int_{T^*}^T \varphi(\tilde{w}(T-\tau, v(\tau)))\, d\tau \le (1-\lambda) \int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau + \lambda \int_0^T \psi(v(\tau))\, d\tau \le 1.$$

Таким образом, теорема доказана. □

Отметим, что имеется один важный частный случай, когда условия теоремы 1 формально нарушаются, но использованная в доказательстве теоремы техника может быть использована для построения управления преследователя.

Следствие. *Если выполнено условие* (1.3) *на параметры игры* (1.1), (1.2) *и существует момент* $T = T(z^0)$ *такой, что* $\pi e^{AT} z^0 = 0$, *тогда преследователь может закончить игру в момент* T *в классе контруправлений.*

Доказательство. Действительно, при $\pi e^{AT}z^0 = 0$ получаем, что $(T,t) \notin \Delta$ для любого t и условия теоремы 1 не выполняются. Однако из доказательства теоремы видно, что если формально положить $T^* = 0$ и строить управление преследователя из (3.3), то траектория $z(t)$ гарантированно попадет на терминальное множество: $z(T) \in M$. $\square$

Замечание. Обозначим через Φ^+ сечение рецессивного конуса $0^+ \operatorname{epi}\varphi$ гиперплоскостью $\{(u,\mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \colon \mu = 1\}$. Значит, вектор $(u,\mu) \in 0^+ \operatorname{epi}\varphi$, $\mu \geq 0$, тогда и только тогда, когда $u \in \mu\Phi^+$. Известно [19], что при сделанных предположениях о свойствах функции φ надграфик $\operatorname{epi}\varphi$ будет выпуклым и замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $0^+ \operatorname{epi}\varphi$ — выпуклым замкнутым конусом, а множество Φ^+ — выпуклым компактом в $\mathbb{R}^m$, для которого выполняется включение: $0 \in (1-\lambda)\Phi^+ \subset \Phi(1-\lambda)$.

Легко показать, что предположение $\{T\} \times [0,T] \subset \Delta$ из теоремы 1 эквивалентно условию

$$-\pi e^{AT}z^0 \notin (1-\lambda) \bigcup_{0 \leq t \leq T} \pi e^{At} B \Phi^+. \tag{3.4}$$

Если функция φ является кофинитной [19], т. е. надграфик $\operatorname{epi}\varphi$ не содержит невертикальных лучей, то $\Phi^+ = 0$ и условие (3.4) выполняется для всех T и z^0 таких, что $\pi e^{AT}z^0 \neq 0$.

Для построения множества Φ^+ может быть использовано соотношение

$$\Phi^+ = \Big\{u \in \mathbb{R}^m \colon \lim_{\mu \to \infty} \frac{\varphi(\mu u)}{\mu} \leq 1\Big\}.$$

В выпуклом анализе [19; 20] чрезвычайно плодотворной является идея двойственности, когда наряду с функцией $\varphi(u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, рассматривается сопряженная к ней функция

$$\varphi^*(u^*) = \sup_{u \in \mathbb{R}^m} \{\langle u, u^* \rangle - \varphi(u)\}.$$

Тогда многие определения и свойства из выпуклого анализа получают довольно простое двойственное описание. В частности, через эффективную область сопряженной функции $\operatorname{dom}\varphi^*$, $\operatorname{dom}\varphi^* = \{u^* \in \mathbb{R}^m \colon \varphi^*(u^*) < \infty\}$, могут быть выражены такие, упомянутые ранее, свойства и множества:

а) выпуклая функция φ будет кофинитной тогда, когда $\operatorname{dom}\varphi^* = \mathbb{R}^m$;

б) все множества уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, будут ограничены тогда, когда $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi^*)$;

в) множество Φ^+, порождающее рецессивный конус $0^+ \operatorname{epi}\varphi$, является полярой [19;20] множества $\operatorname{dom}\varphi^*$

$$\Phi^+ = \Big\{u \in \mathbb{R}^m \colon \sup_{u^* \in \operatorname{dom}\varphi^*} \langle u, u^* \rangle \leq 1\Big\}.$$

4. Случай импульсных управлений

Если при изучении игры (1.1), (1.2) ограничиться лишь измеримыми (суммируемыми) управлениями, то множество достижимости для системы (1.1) может быть незамкнутым, хотя и ограниченным. Причина этого явления состоит в том, что множество управлений, удовлетворяющих (1.2), не ограничено (по норме) в обычном смысле и содержит функции, которые сколь угодно близки к управлениям типа δ-функций. Общим подходом для замыкания множества управлений в *-слабой топологии является расширение исходной задачи с помощью функций ограниченной вариации или управлений-мер [23; 24].

Для того чтобы исследовать игру (1.1), (1.2) в классе измеримых управлений, в теореме 1 наложено условие вида (3.4). Это условие нарушается, если для некоторого $t \in [0,T]$ выполняется включение

$$-\pi e^{AT}z^0 \in (1-\lambda)\pi e^{At} B \Phi^+.$$

В этом случае разрешающая функция (2.1) может быть приближена функцией, которая принимает сколь угодно большие значения в окрестности t. Соответствующее управление будет близко к управлению типа δ-функции.

Для исследования игровой задачи (1.1), (1.2) привлечем аппарат импульсных управлений. Импульсное воздействие в момент η описывается с помощью обобщенной функции Дирака $\delta(t-\eta)$ [23–25], которая характеризуется свойством

$$\int\limits_a^b h(t)\delta(t-\eta)\,dt = \begin{cases} h(\eta), & \eta \in [a,b], \\ 0, & \eta \notin [a,b] \end{cases}$$

для любой непрерывной функции $h(t)$. В качестве управлений преследователя и убегающего игрока возьмем обобщенные вектор-функции:

$$U(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i\delta(t-\eta_i), \quad V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\delta(t-\theta_j). \tag{4.1}$$

Здесь $0 \le \eta_1 < \ldots < \eta_i < \ldots$, $0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_j < \ldots$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $v(t) \in V$, $b_i \in \mathbb{R}^m$, $c_j \in V$, $u(t)$ и $v(t)$ – измеримые функции; последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ определяют моменты импульсов, векторы b_i и c_j определяют их величины. Полагаем, что последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ не имеют конечных точек сгущения, а значит, на любом ограниченном интервале времени число импульсов конечно. Тогда ограничение (1.2) на управления игроков примет вид [24]

$$\int\limits_0^{\infty} \varphi(\,u(\tau))\,d\tau + \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(b_i) \le 1, \quad \int\limits_0^{\infty} \psi(v(\tau))\,d\tau + \sum_{j=1}^{\infty}\psi(c_j) \le 1. \tag{4.2}$$

Управления вида (4.1), удовлетворяющие условиям (4.2), будем называть допустимыми.

При подстановке управлений (4.1) в уравнение (1.1) получается так называемое дифференциальное уравнение с толчками [25]. Решением этого уравнения является функция $z(t)$, которая абсолютно непрерывна всюду, кроме моментов импульсов, и имеет вид

$$z(t) = e^{At}z^0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\left[Bu(\tau) - Cv(\tau)\right]\,d\tau + \sum_{\eta_i \le t} e^{A(t-\eta_i)}Bb_i - \sum_{\theta_j \le t} e^{A(t-\theta_j)}Cc_j, \tag{4.3}$$

где суммирование осуществляется по всем моментам импульсов не большим t.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что игра (1.1), (1.2) может быть закончена в момент $T = T(z^0)$ в классе импульсных управлений, если для любого допустимого управления убегающего игрока $V(t)$ существует допустимое управление преследователя $U(t)$, которое гарантирует приведение решения уравнения (4.3) $z(t)$, соответствующего управлениям $(U(t), V(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент T: $z(T) \in M$. Считаем, что при построении своего управления $U(t)$ преследователь в момент t может использовать информацию об управлении противника $V(t)$ в тот же момент времени. Таким образом, преследователь строит свое управление как контруправление.

Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1.1), (1.2) на терминальное множество M из начального положения z^0 с помощью импульсных управлений (4.1), (4.2). Напомним, что $\mathrm{co}(W)$ обозначает выпуклую оболочку множества W [19; 20].

Теорема 2. *Полагаем, что выполнено условие* (1.3) *на параметры игры* (1.1), (1.2). *Предположим, что существует момент* $T = T(z^0)$ *такой, что*

$$-\pi e^{AT}z^0 \in \mathrm{co}\left\{\bigcup_{0\le t\le T} \pi e^{At}B\Phi(1-\lambda)\right\}. \tag{4.4}$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T в классе импульсных управлений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы. По теореме Каратеодори о выпуклой оболочке [19; 20] существует не более $n-s+1$ векторов b_k, $b_k \in \Phi(1-\lambda)$, моментов χ_k, $0 \le \chi_1 \le \ldots \le \chi_k \le \ldots \le T$, и неотрицательных чисел β_k, $k = 1, \ldots, n-s+1$, $s = \dim M$ таких, что

$$-\pi e^{AT} z^0 = \sum_{k=1}^{n-s+1} \beta_k \pi e^{A(T-\chi_k)} B b_k, \quad \sum_{k=1}^{n-s+1} \beta_k = 1. \tag{4.5}$$

Из леммы 1, учитывая полунепрерывность сверху функции $\psi(v)$, $v \in V$, следует полунепрерывность сверху многозначного отображения $\Phi(\lambda\psi(v))$.

По теореме об измеримом селекторе Куратовского и Рыль-Нардзевского [21; 22] получаем, что у включения (1.3) существует измеримый по Борелю селектор, т. е. измеримое по Борелю отображение $w(t,v) \in \Phi(\lambda\psi(v))$ такое, что $\pi e^{At} C v = \pi e^{At} B w(t,v)$ для всех $(t,v) \in \mathbb{R}_+ \times V$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0,T]$ произвольное допустимое управление $V(t)$ вида (4.1):

$$V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{N} c_j \delta(t-\theta_j), \quad 0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_j < \ldots < \theta_N \le T,$$

которое удовлетворяет ограничению (4.2).

Тогда управление игрока-преследователя на интервале $[0,T]$ положим

$$U(t) = w(T-t, v(t)) + \sum_{\theta_j \le t} w(T-\theta_j, c_j)\delta(t-\theta_j) + \sum_{k=1}^{n-s+1} \beta_k b_k \delta(t-\chi_k). \tag{4.6}$$

Такой закон выбора управлений преследователя является контруправлением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [23]. Поэтому для любой измеримой функции $v(t)$ функция $w(T-t, v(t))$ в (4.6) будет измерима по Лебегу.

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (4.3) попадет на терминальное множество в момент T:

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int_0^T \pi e^{A(T-t)} \left[B w(T-t, v(t)) - C v(t) \right] dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \pi e^{A(T-\theta_j)} \left[B w(T-\theta_j, c_j) - C c_j \right] + \sum_{k=1}^{n-s+1} \beta_k \pi e^{A(T-\chi_k)} B b_k = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу выбора (4.5) и тождества $\pi e^{At} \left[B w(t,v) - C v \right] = 0$ для всех $(t,v) \in \mathbb{R}_+ \times V$.

Проверим, что управление (4.6) удовлетворяет ограничению (4.2):

$$\int_0^T \varphi(w(T-t, v(t)))\, dt + \sum_{j=1}^{N} \varphi(w(T-\theta_j, c_j)) + \sum_{k=1}^{n-s+1} \varphi(\beta_k b_k)$$

$$\le \lambda \Big[\int_0^T \psi(v(t))\, dt + \sum_{j=1}^{N} \psi(c_j) \Big] + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{n-s+1} \beta_k \le 1,$$

где использовано неравенство

$$\varphi(\beta_k b_k) = \varphi((1-\beta_k)\,0 + \beta_k b_k) \leq (1-\beta_k)\,0 + \beta_k\,\varphi(b_k) \leq \beta_k(1-\lambda).$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Теорема 2 дополняет теорему 1 в смысле условий применимости (3.4). Если для начального положения z^0 и момента T свойство (3.4) не выполняется и поэтому теорема 1 не может быть использована для решения игры (1.1), (1.2) в классе измеримых управлений, то теорема 2 гарантирует, что игра может быть закончена в момент T в классе импульсных управлений.

5. Примеры

В качестве примеров рассмотрим дифференциальные игры с разными типами интегральных ограничений на управления игроков (из пространств измеримых функций L_1 и L_2), с геометрическими ограничениями.

П р и м е р 1 (Контрольный пример Л.С. Понтрягина для интегральных ограничений из пространства L_2). Движение преследователя и убегающего задается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0, \quad \alpha, \rho > 0, \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma v, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad \beta, \sigma > 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Интегральные ограничения имеют вид (1.2) с функциями $\varphi(u) = \|u\|^2$ и $\psi(v) = \|v\|^2$. Преследование считается завершенным, если $x = y$.

Согласно проведенному Л.С. Понтрягиным [1] исследованию, условие на параметры игры

$$\sigma < \rho, \quad \frac{\sigma}{\beta} < \frac{\rho}{\alpha}$$

обеспечивает выполнение неравенства

$$\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma \leq \lambda\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho \quad \text{для всех} \quad t \geq 0,$$

где

$$\lambda = \max\left\{\frac{\sigma}{\rho}, \frac{\sigma\alpha}{\rho\beta}\right\} < 1.$$

В работе [15] показано, что для этого значения λ выполняется предположение (1.3) и построенное в теореме 1 управление гарантирует решение задачи преследования (5.1) из всех начальных положений $(x^0, y^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0)$ за некоторое конечное время T.

Там же указан явный вид управления $u(\tau)$ преследователя на интервале $[0, T]$, решающего задачу сближения.

П р и м е р 2 (Интегральные ограничения из пространства L_1). Движение преследователя и убегающего задается уравнением

$$\ddot{x} = u - \lambda v, \quad x, u, v \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0, \quad 0 \leq \lambda < 1. \tag{5.2}$$

Интегральные ограничения имеют вид (1.2) с функциями $\varphi(u) = \|u\|$ и $\psi(v) = \|v\|$. Терминальное множество $M = \{(x, \dot{x})\colon x = 0\}$.

В работе [17] показано, что для этого значения λ выполняется предположение (1.3). Применяя теорему 2, можно найти условия завершения игры (4.4) в классе импульсных управлений:

$$\left\|x^0 + T\dot{x^0}\right\| \leq (1-\lambda)T, \quad T \geq 0.$$

Значит, игра (5.2) гарантировано может быть завершена за конечное время для всех состояний $(x^0, \dot{x^0})$ таких, что

$$\text{либо} \quad \|\dot{x^0}\| < 1-\lambda, \quad \text{либо} \quad \langle x^0, \dot{x^0}\rangle \le 0 \quad \text{и} \quad \|\dot{x^0}\|^2 < (1-\lambda)^2 + \left\langle \frac{x^0}{\|x^0\|}, \dot{x^0} \right\rangle^2.$$

П р и м е р 3 (Геометрические ограничения). Покажем, что геометрические ограничения на управления игроков в линейной дифференциальной игре с помощью перехода к характеристическим функциям могут быть приведены к интегральным ограничениям. Таким образом, игры с геометрическими ограничениями являются частным случаем игр с интегральными ограничениями и могут быть изучены методами, изложенными в данной работе.

Пусть динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением (1.1).

Управления игрока-преследователя $u(\cdot)$ и убегающего игрока $v(\cdot)$ являются измеримыми (по Лебегу) функциями, которые удовлетворяют геометрическим ограничениям $u \in U$ и $v \in V$, где U и V — выпуклые компакты в соответствующих конечномерных пространствах.

Терминальное множество M является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$.

Введем функции

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0, & u \in U, \\ \infty, & u \notin U, \end{cases} \quad \psi(v) \equiv 0, \quad v \in V,$$

и рассмотрим вместо геометрических ограничений интегральные ограничения вида (1.2). Указанные функции удовлетворяют предположениям относительно функций ограничений, если $0 \in U$. Очевидно, что выпуклая функция φ является кофинитной и $\Phi(\gamma) = U$ для всех $\gamma \ge 0$.

Тогда предположение (1.3) примет вид

$$\pi e^{At} C v \in \pi e^{At} B U \quad \text{для всех} \quad t, v, \quad t \ge 0, \quad v \in V.$$

В таком виде предположение (1.3) совпадает с классическим условием Л.С. Понтрягина [1;16] для дифференциальных игр с геометрическими ограничениями.

Условия теоремы 1 (3.1) совпадают с достаточными условиями завершения игры для геометрических ограничений, которые формулируются в первом прямом методе Л.С. Понтрягина [1] и методе разрешающих функций [16], где разрешающая функция (2.1) принимает вид

$$\gamma(t, \tau, v) = \sup\left\{\gamma \ge 0 \colon -\gamma \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} C v \in \pi e^{A\tau} B U\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach Science Publishers, 1995. 625 p.
5. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
6. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equations and applications to dynamical optimization // J. Math. Sci. 2006. Vol. 135, № 3. P. 2955–3091.
7. **Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.** О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона — Якоби // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 6. С. 69–100.
8. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
9. О совпадении максимальных стабильных мостов в двух задачах о сближении для стационарных управляемых систем / В.Н. Ушаков, Х.Т. Гусейнов, Я.А. Латушкин, П.Д. Лебедев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 219–240.

10. **Никольский М.С.** Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1969. Вып. 2. С. 49–58.
11. **Никольский М.С.** Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 6. С. 964–971.
12. **Никольский М.С.** Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 2. С. 219–223.
13. **Ушаков В.Н.** Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 15–23.
14. **Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н.** Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1968. № 1. С. 13–22.
15. **Чикрий А.А., Белоусов А.А.** О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 290–301.
16. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
17. **Белоусов А.А.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления в норме L_1 // Теория оптимальных решений: сб. науч. тр. / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. Киев, 2011. С. 3–9.
18. **Белоусов А.А.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями общего вида // Теория оптимальных решений: сб. науч. тр. / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. Киев, 2012. С. 30–35.
19. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
20. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 330 с.
21. **Куратовский К.** Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969. 624 с.
22. **Kisielewicz M.** Differential inclusions and optimal control. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. 260 p. (Math. and Its Applications; vol. 44).
23. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
24. **Миллер Б.М., Рубинович Е.Я**. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. 429 с.
25. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. НАН Украины
зав. отделом
Институт кибернетики НАН Украины
e-mail: chik@insyg.kiev.ua

Поступила 20.05.2013

Белоусов Александр Андреевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт кибернетики НАН Украины
e-mail: abelousov@ukr.net

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Н. М. Юркова

TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск П. Г. Сурков

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 15.10.13. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38,4. Уч.-изд. л. 30,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226