РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 19, № 3 2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 19 № 3 2013

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 19, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. 330 с.

ISSN 0134–4889

Том 19 № 3 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Том 19 № 3 2013

(Продолжение)

Том 19 № 3 2013

МАХНЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСЕЕВИЧ

(*К шестидесятилетнему юбилею*)

А. А. Махнев родился 7 мая 1953 г. в Свердловске. В 1975 г. он окончил с отличием математико-механический факультет Уральского государственного университета им. А. М. Горького по специальности "Математика". После окончания университета Александр Алексеевич работает в Институте математики и механики УрО РАН (ИММ УрО РАН) в отделе алгебры и топологии: инженером (с 1975 г.), младшим научным сотрудником (с 1977 г.), старшим научным сотрудником (с 1984 г.).

В 1978 г. А. А. Махнев защитил кандидатскую диссертацию "Классы инволюций и самоцентрализующиеся подгруппы в конечных группах", в 1986 г. — докторскую диссертацию "Классы инволюций и локальные подгруппы в конечных группах". Ученое звание профессора было присвоено ему в 1991 г.

С 1985 по 1997 г. А. А. Махнев возглавлял большую кафедру вычислительных методов и уравнений математической физики на радиотехническом факультете УГТУ-УПИ, а с 1992 г. является профессором кафедры алгебры и дискретной математики Уральского государственного (ныне федерального) университета. Он прочитал целый ряд общих математических курсов, а также специальных курсов по алгебре и дискретной математике, подготовил как автор или соавтор ряд учебных пособий (см. список основных научных трудов).

Продолжая дело своего учителя Альберта Ивановича Старостина, с 1994 г. А. А. Махнев возглавляет отдел алгебры и топологии ИММ УрО РАН.

В 2003 г. А. А. Махнев был избран членом-корреспондентом РАН, в 2004 г. — действительным членом Академии инженерных наук РФ.

А. А. Махнев — один из ведущих специалистов по теории групп и ее приложений к комбинаторике и теории графов, признанный в России и за рубежом, автор более 400 научных работ, в том числе двух обзоров: "Конечные группы" (в соавторстве с А. С. Кондратьевым и А. И. Старостиным) и "Частичные геометрии и их расширения". В частности, ему принадлежит 16 статей в энциклопедии "Дискретная математика" (2004).

Научные интересы А. А. Махнева формировались под влиянием его научного руководителя, А. И. Старостина, основателя уральской научной школы по теории конечных групп. В составе этой школы он активно участвовал в разработке современного арсенала исследования конечных (особенно неразрешимых) групп, получив ряд ярких результатов. Цикл его трудов, посвященный изучению плотно вложенных подгрупп в конечных группах, является существенным вкладом в ревизию классификации конечных простых групп и удостоен почетного диплома АН СССР (1986). С конца 1980-х гг. А. А. Махнев активно работает в области теории графов и конечных геометрий. Им сформировано новое научное направление — приложение теоретико-групповых результатов и методов в комбинаторике и теории графов, в рамках которого им и его учениками был получен целый ряд важных результатов. К наиболее значимым относятся следующие: изучены локально $GQ(s,t)$-графы для малых значений s; определены допустимые параметры сильно регулярных расширений квазиклассических обобщенных четырехугольников, для некоторых наборов параметров доказаны теоремы существования и единственности соответствующих графов; найдены порядки автоморфизмов и подграфы их неподвижных точек некоторых дистанционно регулярных графов; получены характеризации ряда классов дистанционно регулярных графов довольно общими условиями регулярности или запрещенными подграфами; положительно решена проблема регулярности в классе графов Тервиллигера; разработана и реализована программа изучения вполне регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 2.

Его результаты неоднократно входили в число лучших по Академии наук. В 2012 г. за цикл работ "Конечные группы и их приложения к теории графов" Александру Алексеевичу была присуждена премия имени А. И. Мальцева РАН.

А. А. Махнев является руководителем ряда научных проектов РФФИ, РАН и УрО РАН, а также международных проектов с НАН Беларуси и ГФЕН Китая. Он руководил двумя хоздоговорными работами, выполняемыми по координационным планам АН СССР и постановлениям Правительства (1986–1991), двумя грантами Госкомитета РФ но высшему образованию и рядом грантов Российского фонда фундаментальных исследований (1994–2013), с 2009 г. руководит работами в рамках программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

А. А. Махнев возглавляет известную академическую школу алгебраистов г. Екатеринбурга. В течение многих лет он руководит научно-исследовательским алгебраическим семинаром в ИММ УрО РАН, активно участвует в подготовке научных кадров не только в Екатеринбурге, но и в Орске, Нальчике и Владикавказе. Под его руководством защищены 14 кандидатских диссертаций; А. А. Махнев являлся научным консультантом по докторским диссертациям В. В. Кабанова, Д. В. Падучих и А. Л. Гаврилюка.

Александр Алексеевич неоднократно был председателем и членом оргкомитетов и программных комитетов, а также участником многочисленных математических конференций разного уровня. Так, он являлся председателем Оргкомитета международных семинаров, посвященных 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина (Екатеринбург, 2001), 85-летию и 90-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Пермь, 1977; Екатеринбург, 2002), Международной конференции по алгебре и геометрии, посвященной 80-летию со дня рождения А. И. Старостина (Екатеринбург, 2011), Международной конференции по алгебре и геометрии, посвященной 100-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Екатеринбург, 2012), председателем Программного комитета Международной школы-конференции, посвященной 75-летию со дня рождения А. И. Старостина (Нальчик, 2006) и Российско-китайского семинара "Алгебра и логика" (Иркутск, 2007), международных школ-конференций, посвященных 60-летию А. С. Кондратьева (Челябинск, 2008) и 75-летию со дня рождения В. А. Белоногова (Нальчик, 2010). С 2009 по 2013 г. А. А. Махнев был председателем Оргкомитета региональных (а затем всероссийских и международных) молодежных школ-конференций. Он участвовал в работе международных математических конгрессов (Варшава, 1983; Берлин, 1998; Пекин, 2002) и Европейского математического конгресса (Будапешт, 1996).

А. А. Махнев — председатель Совета по защитам докторских диссертаций по специальностям "Математическая логика, алгебра и теория чисел" и "Геометрия и топология" в ИММ УрО РАН, член объединенного Ученого совета по математике, механике и информатике УрО РАН, член редколлегии журналов "Труды Института математики и механики УрО РАН" и "Сибирские электронные математические известия".

Александр Алексеевич не только успешный математик, но и весьма разносторонний человек. Например, в качестве штурмана А. И. Старостина он неоднократно участвовал в авторалли, в числе завоеваний кубок Урала, увлекается шахматами (уровнь кандидата в мастера спорта).

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, коллеги, ученики и друзья сердечно поздравляют Александра Алексеевича Махнева с юбилеем и желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов!

СПИСОК ОСНОВНЫХ ТРУДОВ А. А МАХНЕВА

1. О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. УрГУ. 1976. Т. 10, тетр. 1. С. 60–75.
2. Конечные группы с нормальными пересечениями силовских 2-подгрупп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 655–659 (совм. В. В. Кабановым, А. И. Старостиным).
3. О группах с централизатором порядка 6 // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 1. С. 153–159.
4. О конечных группах с централизатором порядка 6 // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 1. С. 432–442.
5. Обобщение теоремы Принса // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 100–107.
6. Классы инволюций и самоцентрализующиеся подгруппы в конечных группах : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06. Новосибирск, 1978. 7 с.
7. Конечные группы с самонормализующейся подгруппой порядка 6 // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 91–102.
8. О порождении конечных групп классами инволюций // Мат. сб. 1980. Т. 111, № 2. С. 266–278.
9. О конечных группах с централизатором порядка 6, II // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 2. С. 214–223.
10. Об элементарных TI-подгруппах в конечных группах // Мат. заметки. 1981. Т. 30, № 2. С. 179–184.
11. On centralizers of TI-subgroups in finite groups // Comm. Algebra. 1981. Vol. 9, no. 12. P. 1307–1322.
12. Конечные группы с неинвариантым четверным ядром // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 2. С. 212–214.
13. О конечных группах с ограниченным централизатором инволюции // Изв. вузов. Математика. 1982. № 10. С. 8–14 (совм. с Б. М. Веретенниковым).
14. О плотно вложенных подгруппах в конечных группах // Мат. сб. 1983. Т. 121, № 4. С. 523–532.
15. Конечные группы с самонормализующейся подгруппой порядка 6, II // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 518–525.
16. Характеризация простой группы Титса // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1984. Т. 4. С. 28–49.
17. О конечных группах с малым 2-рангом централизаторов 3-элементов // Исслед. по теории групп. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984. С. 113–119.
18. Конечные простые группы со стандартной подгруппой типа $L(3,4)$ // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 1. С. 7–12.
19. Четвертая школа по теории конечных групп // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 241–243 (совм. с А. С. Кондратьевым, А. И. Старостиным).
20. TI-подгруппы в группах типа характеристики 2 // Мат. сб. 1985. Т. 127, № 2. С. 239–244.
21. 3-характеризации конечных групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 2. С. 173–180.
22. Конечные группы с централизатором порядка 6 // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 6. С. 1312–1313.
23. О конечных группах, содержащих тонкие 2-локальные подгруппы // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 5. С. 99–110.
24. Классы инволюций и локальные подгруппы в конечных группах: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06. Новосибирск, 1985. 18 с.
25. О TI-подгруппах конечных групп // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1986. Т. 50, № 1. С. 22–36.
26. 3-характеризация сбалансированных групп // Структ. вопр. теории групп: сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 85–93.
27. Некоторые характеризации конечных простых групп // Структ. вопр. теории групп: сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 94–100.
28. Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Т. 24. М., 1986. С. 3–120 (совм. с А. С. Кондратьевым, А. И. Старостиным).
29. О группах с треугольными классами инволюций // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 2. С. 204–205.
30. О конечных группах 2-локального 3-ранга 1 // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 6. С. 100–110.
31. О сильно регулярных графах с $\lambda = 1$ // Мат. заметки. 1988. Т. 44, № 5. С. 667–672.
32. Конечные группы с циклическими 2-подгруппами в централизаторах 3-элементов // Подгрупповая структура групп: сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 85–112.
33. О графах с $\lambda = 1$ и обобщенном четырехугольнике с параметрами (3,6) // Вопр. алгебры. Минск: изд-во “Университетское”, 1989. № 4. С. 123–129.
34. Конечные группы с малыми централизаторами 3-элементов // Теоретико-групповые исследования: сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. С. 43–53.

35. Элементы общей алгебры. Методические указания к решению задач. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 1991. 40 с. (совм. с Б. М. Веретенниковым).
36. Сильно регулярные графы с расщепляемыми окрестностями // Комбинаторика и оптимизация: межвуз. сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во УПИ, 1991. Вып. 1. С. 10–15 (совм. В. В. Кабановым).
37. О графе с параметрами (76,21,2,7) // Комбинаторика и оптимизация: межвуз. сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во УПИ, 1991. Вып. 1. С. 15–19.
38. Теорема редукции для TI-подгрупп // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1991. Т. 55, № 2. С. 303–317.
39. Плотно вложенные подгруппы с абелевым слиянием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 9–26 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).
40. О сильно регулярных локально решетчатых графах // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 145–150 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).
41. О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 12. С. 123–132.
42. Конечные локально $GQ(3,3)$-графы // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1314–1324.
43. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: текст лекций: уч. пособие. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 1994. 129 с. (совм. с А. С. Кондратьевым).
44. Элементы дискретной математики: уч. пособие. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 1994. 100 с. (совм. с Л. П. Алесенко, Л. И. Тягуновым).
45. TI-subgroups of finite groups // Groups-Korea'94. Berlin: de Gruyter, 1995. P. 227–229.
46. Циклические TI-под-группы порядка 4 в исключительных группах Шевалле // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 41–49 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).
47. О регулярных графах, в которых каждое ребро лежит в большом числе треугольников // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 42–53.
48. О сильно регулярном графе с параметрами (64,18,2,6) // Дискрет. математика. 1995. Т. 7, № 3. С. 121–128.
49. О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
50. О некоторых комбинаторно симметричных графах // Актуал. пробл. соврем. математики: сб. науч. тр. Новосибирск: Изд-во НИИ МИОО НГУ, 1996. Т. 2. С. 104–109.
51. Кореберно регулярные графы без 3-лап // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 4. С. 495–503 (совм. с В. В. Кабановым).
52. On extensions of partial geometries // Algebra. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 165–169.
53. О псевдогеометрических графах частичных геометрий $pG_2(4,t)$ // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 7. С. 97–112.
54. Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 73–86 (совм. с В. В. Кабановым).
55. О регулярных графах Тервиллигера с $\mu = 2$ // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1132–1134.
56. О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников с короткими прямыми // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, № 3. С. 31–39.
57. Характеризация одного класса реберно регулярных графов // Изв. вузов. Математика. 1997. № 1. С. 22–27.
58. Расширения $GQ(4,2)$, описание гиперовалов // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, № 3. С. 101–116.
59. О 2-локально графах Зейделя // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 4. С. 67–80 (совм. с Д. В. Падучих).
60. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Методические указания к курсу "Высшая математика". Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 1997. 43 с. (совм. с В. А. Табуевой).
61. Системы дифференциальных уравнений. Методические указания к решению задач. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 1997. 24 с. (совм. с И. А. Селивановой, В. А. Табуевой).
62. О псевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомел. ун-та, 1997. Вып. 11. С. 60–67.
63. Элементы теории кодирования. Методические указания к решению задач. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 1998. 32 с.
64. Об одном классе графов без 3-лап // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 407–413.
65. Графы без 3-лап с равномощными μ-подграфами // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. С. 44–68 (совм. с В. В. Кабановым).

66. О $K_{1,3}$-свободных графах // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. С. 176. (совм. с В. В. Кабановым).
67. О структуре связных локально $GQ(3,9)$ графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 2. С. 61–77 (совм. с Д. В. Падучих).
68. Локально Шрикханде графы и их автоморфизмы // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1085–1097 (совм. с Д. В. Падучих).
69. Локально $GQ(3,5)$-графы и геометрии с короткими прямыми // Дискрет. математика. 1998. Т. 10, № 2. С. 72–86.
70. Международная конференция по теории групп, посвященная памяти С. Н. Черникова // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып. 4. С. 223 (совм. с А. С. Кондратьевым, Я. Д. Половицким).
71. О структуре связных локально $GQ(3,9)$-графах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 2. С. 61–77 (совм. с Д. В. Падучих).
72. Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 21–72.
73. Псевдогеометрические графы частичных геометрий $pG_2(4,t)$ // Дискрет. математика. 2000. Т. 12, № 1. С. 113–134.
74. Расширения GQ(4,2), сильно регулярный случай // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 124-130.
75. О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 89–104.
76. Partial geometries, their extensions, and related graphs // J. Math. Sci. 2000. Vol. 102, № 3. P. 4009–4017.
77. Аффинные овоиды и расширения обобщенных четырехугольников // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 266–271.
78. Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомел. гос. ун-та. Вопросы алгебры. 2000. Т. 3. С. 145–154 (совм. с И. М. Минаковой).
79. Определенные и несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра и ряды: уч. пособие. Екатеринбург: изд-во “Риэлтерский инф. центр”, 2000. Ч. 1–2. 204 с. (совм. с Н. В. Мельниковой, Ю. Б. Мельниковым).
80. О сильно регулярных графах с параметрами (75,32,10,16) и (95,40,12,20) // Фундам. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 1. С. 179–193.
81. Псевдодвойственные решетки и расширения обобщенных четырехугольников // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1119–1126.
82. Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 125–134 (совм. с Д. В. Падучих).
83. Расширения $GQ(4,2)$, вполне регулярный случай // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 91–109 (совм. с Д. В. Падучих).
84. О графах с μ-подграфами, изоморфными $K_{u\times 2}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 215–224.
85. Дискретная математика. Рабочая тетрадь для студентов дистанционного обучения радиотехнического факультета. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2001. 104 с. (совм. с Ю. В. Нагребецкой).
86. О сильно регулярных графах с $k = 2\mu$ и их расширениях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 609–619.
87. О несуществовании сильно регулярных графов с параметрами (486,165,36,66) // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 941–949.
88. Международный семинар по теории групп, посвященный 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. С. 185–187 (Сер. Математика и механика; вып.4) (совм. с А. С. Кондратьевым).
89. О псевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий // Фундам. и прикл. математика. 2002. Т. 8, № 1. С. 117–127.
90. Реберно регулярные графы диаметра 2 с $\lambda \geq 2k/3 - 2$ // Тр. Укр. мат. конгресса. Киев, 2001. Секц. 1: Алгебра и теория чисел. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2003. С. 46–61 (совм. с С. Р. Зариповым, И. П. Яблонко).
91. О хороших парах в реберно регулярных графах // Дискрет. математика. 2003. Т. 15, № 1. С. 77–97 (совм. с А. А. Веденевым, А. Н. Кузнецовым, В. В. Носовым).
92. Овоиды и двудольные подграфы в обобщенных четырехугольниках // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 6. С. 878–885 (совм. с А. А. Махневым (мл.)).
93. О графах без корон с регулярными μ-подграфами, II // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 396–406 (совм. с В. В. Кабановым, Д. В. Падучих).

94. О вполне регулярных локально $GQ(s,t)$ графах с $\mu = 2t+6$ // Изв. Гомел. гос. ун-та. 2003. № 4. С. 68–81 (совм. с В. Е. Протопоповой).
95. О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, № 1. С. 159–182.
96. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 0$, $\mu = 2$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 3. С. 47–68 (совм. с В. В. Носовым).
97. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами $\lambda = 1$, $\mu = 2$ // Дискрет. математика. 2004. Т. 16, № 1. С. 95–104 (совм. с И. М. Минаковой).
98. Международный семинар по алгебре и линейной оптимизации, посвященный 90-летию со дня рождения С. Н. Черникова // Изв. Урал. гос. ун-та. 2004. № 30. С. 183–184 (Сер. Математика и механика; вып. 6) (совм. с И. И. Ереминым).
99. О локально $GQ(s,t)$ графах с сильно регулярными μ-подграфами // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 3. С. 93–106 (совм. с В. И. Казариной).
100. Об автоморфизмах сильно регулярных графов Крейна без треугольников // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 3. С. 335–354 (совм. с В. В. Носовым).
101. О почти хороших парах вершин в реберно регулярных графах // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 35–48 (Сер. Математика и механика; вып. 7) (совм. с И. Н. Белоусовым).
102. О графах Крейна без треугольников // Докл. АН. 2005. Т. 403, № 6. С. 727–730 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
103. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 2$ и $\mu = 3$ // Вест. Урал. гос. техн. ун-та-УПИ. 2005. № 17. С. 174–194 (Сер. радиотехническая: информ. системы и технологии в радиотехн., связи, автоматике и упр.) (совм. с В. И. Казариной).
104. Графы, геометрии и автоморфизмы // Мат. системы. 2005. Красноярск: Изд-во Красноярского гос. аграрного ун-та, 2005. № 3. С. 39–52.
105. Об одном классе кореберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 6. С. 95–114 (совм. с Д. В. Падучих).
106. Международный форум алгебраистов в Екатеринбурге // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 38. С. 177–179 (Математика и механика; вып. 8) (совм. с В. А. Баранским).
107. Вполне регулярные графы и блок-схемы // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 753–768 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
108. О вполне регулярных графах с $b_1 = 4$ // Изв. Гомел. гос. ун-та. 2006. № 3. С. 101–108 (совм. с С. А. Васильевым).
109. О реберно регулярных графах с $k \geq 3b_1 - 3$ // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18, № 4. С. 10–38 (совм. с И. Н. Белоусовым).
110. Узкие частичные четырехугольники и их автоморфизмы // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 5. С. 603–619 (совм. с М. С. Нировой).
111. О сильно регулярных графах с $\mu = 1$ и их автоморфизмах // Докл. АН. 2006. Т. 410, № 2. С. 151–155 (совм. с И. Н. Белоусовым).
112. Характеризации некоторых дистанционно регулярных графов запрещенными подграфами // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 5. С. 583–586 (совм. с В. В. Кабановым, Д. В. Падучих).
113. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8,7,5;1,1,4\}$ и его автоморфизмы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 44–56 (совм. с И. Н. Белоусовым).
114. Об однородных расширениях частичных геометрий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 148–157 (совм. с М. С. Нировой).
115. Графы Тервиллигера с $\mu \leq 3$ // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 14–26 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
116. О локально грассмановых графах // Докл. АН. 2007. Т. 415, № 4. С. 450–454 (совм. с Д. В. Падучих).
117. О графах, в которых окрестности вершин являются кликовыми расширениями решеток // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 5. С. 735–739 (совм. с Н. Д. Зюляркиной, Д. В. Падучих).
118. Новая оценка для числа вершин реберно регулярных графов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 817–832 (совм. с Д. В. Падучих).
119. О проблеме регулярности в графах Тервиллигера // Докл. АН. 2007. Т. 417, № 2. С. 151–155 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
120. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 41–53 (совм. с А. Л. Гаврилюком).

121. О сотрудничестве математиков Сибири и Урала // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 22–27 (совм. с В. И. Бердышевым, В. В. Васиным, Ю. Н. Субботиным).

122. О первом стипендиате А. Гаврилюке // Наука Урала. 2007. № 8. С. 3.

123. О реберно регулярных графах, в которых каждая вершина лежит не более чем в одной хорошей паре // Владикавказ. мат. журн. 2008. Т. 10, № 1. С. 53–67 (совм. с Н. В. Чуксиной).

124. О реберно регулярных графах, не содержащих хороших пар // Изв. Гомел. гос. ун-та. 2008. Т. 47, № 2. С. 117–127 (совм. с А. С. Омельченко)

125. Вполне регулярные графы с $\mu \leq k - 2b_1 + 3$ // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16, № 1. С. 28–39 (совм. с К. С. Ефимовым).

126. О сильно регулярных локально GQ(4,t) графах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 161–182.

127. Графы Тервиллигера, в которых окрестность некоторой вершины изоморфна графу Петерсена // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 4. С. 445–448 (совм. с А. Л. Гаврилюком).

128. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны половинному графу свернутого 10-куба // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 5. С. 596–598 (совм. с Д. В. Падучих).

129. О накрытиях графа Хигмена — Симса и их автоморфизмах // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 1. С. 26–29 (совм. с Д. В. Падучих).

130. Геодезические графы с некоторыми условиями однородности // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 5. С. 589–591 (совм. с А. Л. Гаврилюком).

131. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 6. С. 735–737.

132. Автоморфизмы накрытий сильно регулярного графа с параметрами (81,20,1,6) // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 1. С. 25–28 (совм. с Д. В. Падучих).

133. Об автоморфизмах обобщенного восьмиугольника порядка (2,4) // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 2. С. 151–154 (совм. с И. Н. Белоусовым).

134. О хороших парах вершин в реберно регулярных графах с $k = 3b_1 - 1$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 119–134 (совм. с Н. В. Чуксиной).

135. Графы без 3-корон с некоторыми условиями регулярности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 53–69 (совм. с В. В. Кабановым, Д. В. Падучих).

136. Об автоморфизмах графов Тервиллигера с $\mu = 2$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 584–600 (совм. с А. Л. Гаврилюком, Го Вэнбинем).

137. Об автоморфизмах обобщенного восьмиугольника порядка (2,4) // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 4. С. 516–526 (совм. с И. Н. Белоусовым).

138. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов // Фундам. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 1. С. 69–79.

139. Характеризация графов знакопеременных и квадратичных форм как накрытий локально грассмановых графов // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 1. С. 20–24 (совм. с Д. В. Падучих).

140. Об автоморфизмах 6-накрытия графа Хигмена — Симса // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 3. С. 323–327 (совм. с В. В. Носовым).

141. О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$ // Владикавказ. мат. журн. 2009. Т. 11, № 1. С. 29–42 (совм. с В. И. Казариной).

142. Вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ // Журн. Сиб. Федерал. ун-та. 2009. Т. 2, № 1. С. 63–77 (совм. с К. С. Ефимовым).

143. О группе автоморфизмов графа Ашбахера // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 3. С. 310–313 (совм. с Д. В. Падучих).

144. Автоморфизмы полутреугольных графов, имеющих $\mu = 6$ // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 4. С. 439–442 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).

145. Об автоморфизмах накрытий сильно регулярного графа с параметрами (81,20,1,6) // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 1. С. 22–36 (совм. с Го Вэнбинем, Д. В. Падучих).

146. Об автоморфизмах обобщенного шестиугольника порядка $(3, 27)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 34–44 (совм. с И. Н. Белоусовым).

147. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 143–161.

148. О группе автоморфизмов графа Ашбахера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 162–176 (совм. с Д. В. Падучих).

149. Школы-конференции по теории групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 222–225.

150. Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 157–160 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
151. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 3. С. 300–304 (совм. с А. Л. Гаврилюком, Д. В. Падучих).
152. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 0$ и $\mu = 3$ // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21, № 5. С. 138–154 (совм. с В. В. Носовым).
153. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (95,40,12,20) // Владикавказ. мат. журн. 2009. Т. 11, № 4. С. 44–58 (совм. с Н. В. Чуксиной).
154. О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-2}(s,t)$ // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 3. С. 301–305 (совм. с А. К. Гутновой).
155. О графах, в которых каждый μ-подграф является пятиугольником // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 4. С. 450–453 (совм. с Д. В. Падучих).
156. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 35–47 (совм. с А. Л. Гаврилюком, Д. В. Падучих).
157. О вполне регулярных графах с $k = 10$, $\lambda = 3$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 75–90 (совм. с К. С. Ефимовым, М. С. Нировой).
158. О сильно регулярных графах с собственным значением 2 и их расширениях // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 5. С. 583–586 (совм. с В. В. Кабановым, Д. В. Падучих).
159. Параметры полулинейных графов Хигмена // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 6. С. 727–730 (совм. с И. Н. Белоусовым).
160. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
161. On automorphisms of distance-regular graphs // J. Math. Sci. 2010. Vol. 166, no. 6. P. 733–742.
162. Сильно регулярный граф с параметрами (486,112,36,66) не существует // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 5. С. 604–608 (совм. с А. А. Махневым (мл.)).
163. О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для GQ(3,3) // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 6. С. 727–730 (совм. с А. К. Гутновой).
164. Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 78–87 (совм. с А. Х. Журтовым, М. С. Нировой).
165. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 96–104 (совм. с М. М. Исаковой).
166. О сильно регулярных графах с собственным значением 2 и их расширениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 105–116 (совм. с В. В. Кабановым, Д. В. Падучих).
167. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (76,35,18,14) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 185–194 (совм. с А. А. Токбаевой).
168. О графах, в которых окрестности вершин являются графами, дополнительными к графу Зейделя // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 4. С. 447–449 (совм. с М. Л. Кардановой).
169. О вполне регулярных локально $GQ(4,4)$-графах // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 5. С. 583–586 (совм. с Д. В. Падучих, М. М. Хамгоковой).
170. О вполне регулярных локально $GQ(5,5)$-графах // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 1. С. 18–21 (совм. с Д. В. Падучих).
171. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 3. С. 305–309 (совм. с Д. В. Падучих).
172. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ не является вершинно симметричным // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 4. С. 451–454.
173. О вполне регулярных локально $GQ(5,3)$-графах // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 6. С. 744–747 (совм. с Д. В. Падучих, М. М. Хамгоковой).
174. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54) // Владикавказ. мат. журн. 2010. Т. 12, № 3. С. 30–40 (совм. с М. М. Исаковой).
175. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (243,66,9,21) // Владикавказ. мат. журн. 2010. Т. 12, № 4. С. 49–59 (совм. с А. А. Токбаевой).
176. О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $GQ(3,3)$ // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 1. С. 28–35 (совм. с А. К. Гутновой).
177. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов // Фундам. и прикл. математика. 2010. Т. 15, № 1. С. 65–79.

178. О графах, в которых пересечения окрестностей вершин 3-коклик являются кликами // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 1. С. 7–10 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
179. Графы, в которых граница Хофмана для коклик совпадает с границей Цветковича // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 3. С. 303–307.
180. О графах, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $GQ(3,5)$ // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 5. С. 595–598 (совм. с А. К. Гутновой).
181. О псевдогеометрическом графе для $pG_4(8,175)$ // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 6. С. 738–742.
182. О почти хороших тройках вершин в реберно регулярных графах // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 745–753 (совм. с В. И. Белоусовой).
183. Автоморфизмы полутреугольных графов, имеющих $\mu = 7$ // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 1. С. 21–24 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).
184. О кликах в изорегулярных графах // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 3. С. 304—307.
185. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15,12,6;1,2,10\}$ // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 4. С. 443–447 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).
186. Автоморфизмы полутреугольных графов, имеющих $\mu = 8$ // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 2. С. 155–158 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).
187. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 6. С. 743–746 (совм. с М. С. Нировой).
188. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24,21,3;1,3,18\}$ // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 1. С. 14–18 (совм. с Д. В. Падучих).
189. Об автоморфизмах сильно регулярных локально циклических графов //Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–155 (совм. с В. П. Буриченко).
190. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42,39,1;1,3,42\}$ // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 3. С. 305–309 (совм. с Л. Ю. Циовкиной).
191. О графах Тервиллигера, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 5. С. 673–685 (совм. с А. Л. Гаврилюком).
192. К семидесятипятилетию академика Российской академии наук Юрия Сергеевича Осипова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 5–6 (совм. с Н. Н. Красовским и др.).
193. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хигмена — Симса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 189–198 (совм. с Д. В. Падучих).
194. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (210,95,40,45) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 199–208 (совм. с Н. В. Чуксиной).
195. Международная конференция “Алгебра и геометрия”, посвященная 80-летию со дня рождения А. И. Старостина (Екатеринбург, 22-27 августа 2011 г.) // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 321–324 (совм. с А. С. Кондратьевым).
196. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хигмена — Симса // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 2. С. 163–166 (совм. с М. Л. Кардановой, Д. В. Падучих).
197. О расширениях сильно регулярных графов с собственным значением 2 // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 1. С. 7–10 (совм. с Н. Д. Зюляркиной).
198. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35,32,8;1,2,28\}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 235–241 (совм. с Л. Ю. Циовкиной).
199. О небольших симметричных сильно регулярных графах // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 1. С. 23–27 (совм. с М. С. Нировой).
200. О вполне регулярных локально $GQ(4,6)$-графах // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 2. С. 146–149 (совм. с Д. В. Падучих, М. М. Хамгоковой).
201. О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 2 // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 3. С. 258–261 (совм. с М. С. Нировой).
202. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (88,27,6,9) // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 247–250 (совм. с К. С. Ефимовым).
203. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15,12,1;1,2,15\}$ // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 4. С. 375–379 (совм. с В. П. Буриченко).
204. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (96,45,24,18) // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 1. С. 10–14 (совм. с А. Х. Журтовым, А. М. Кагазежевой).
205. О вполне регулярных локально $GQ(4,8)$-графах // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 2. С. 127–130 (совм. с Д. В. Падучих).

206. О вполне регулярных графах с $k = 11, \lambda = 4$ // Ученые записки Казан. гос. ун-та. 2012. Т. 154, № 2. С. 83–92 (совм. с К. С. Ефимовым).
207. К столетию со дня рождения Сергея Николаевича Черникова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН 2012. Т. 18, № 3. С. 5–7 (совм. с И. И. Ереминым).
208. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Матье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 155–163 (совм. с Д. В. Падучих).
209. О группе автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 4. С. 476–495 (совм. с Д. В. Падучих).
210. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ and $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ do not exist // Designs, Codes and Cryptography. 2012. Vol. 65, no. 1-2. C. 49–54 (jointly with A. L. Gavrilyuk).
211. Дистанционно-регулярные расширения сильно регулярных графов с собственным значением 2 // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 5. С. 475–478 (совм. с И. Н. Белоусовым, М. С. Нировой).
212. С. Н. Черников. Свердловский период // Алгебра и линейные неравенства. К 100-летию С.Н. Черникова: науч. изд. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2012. С. 43–47.
213. Виктор Михайлович Глушков (Юность и Уральский период) // Алгебра и линейные неравенства. К 100-летию со дня рождения С. Н. Черникова: науч. изд. Екатеринбург: Изд-во УМЦ-УПИ, 2012. С. 220–224 (совм. с Ю. Н. Мухиным).
214. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ // Мат. форум. (Итоги науки. Юг России). Т. 6: Группы и графы. Владикавказ, 2012. С. 122–134. (совм. с М. С. Нировой).
215. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (486,100,22,20) // Мат. форум (Итоги науки. Юг России). Т. 6. Группы и графы, Владикавказ, 2012. С. 131–141 (совм. с Д. В. Падучих).
216. Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda = \mu$ // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 1. С. 22–26 (совм. с Д. В. Падучих, Л. Ю. Циовкиной).
217. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (486,100,22,20) // Докл. АН. 2013. Т. 449, № 4. С. 389–392 (совм. с Д. В. Падучих).
218. Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик: аффинный случай // Докл. АН. 2013. Т. 449, № 6. С. 639–643 (совм. с Д. В. Падучих, Л. Ю. Циовкиной).
219. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (320,99,18,36) // Владикавказ. мат. журн. 2013. Т. 15, № 2. С. 58–68 (совм. с А. М. Кагазежевой).
220. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ // Докл. АН. 2013. Т. 450, № 1. С. 19–23 (совм. с М. С. Нировой).
221. Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda = \mu$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 237–246 (совм. с Д. В. Падучих, Л. Ю. Циовкиной).
222. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами (99,42,21,15) и (99,56,28,36)// Докл. АН. 2013. Т. 451, № 2. С. 132–135 (совм. с К. С. Ефимовым).
223. Обобщенный четырехугольник GQ(4,16) и его расширения // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 4. С. 378–380 (совм. с Д. В. Падучих).
224. О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 501–504.
225. О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (115,18,1,3) // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 6. С. 615–619.
226. О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 207–214 (совм. с Д. В. Падучих).
227. О дистанционно регулярных графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны. Докл. АН. 2013. Т. 452, № 3. С. 247–251 (совм. с А. Г. Гаврилюком, Д. В. Падучих).

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.552.7+512.542.74

МАЛЫЕ РАНГИ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП

Р. Ж. Алеев

В работе доказано, что группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп степеней, больших 38, имеют ранг не менее 11. Приведены таблицы, указывающие ранги всех групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп степеней не более 200. В частности, для каждого $r \in \{0, \ldots, 10\}$ получен полный список всех чисел n, для которых группа центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы степени n имеет ранг r.

Ключевые слова: знакопеременная группа, групповое кольцо, центральная единица, ранг абелевой группы, разбиение.

R. Zh. Aleev. Small ranks of central unit groups of integral group rings of alternating groups.

We prove that the ranks of central unit groups of integral group rings of alternating groups of degrees greater than 38 are at least 11. The presented tables contain ranks of all central unit groups of integral group rings of alternating groups of degrees at most 200. In particular, for every $r \in \{0, \ldots, 10\}$, we obtain the complete list of integers n such that the central unit group of the integral group ring of the alternating group of degree n has rank r.

Keywords: alternating group, group ring, central unit, rank of abelian group, partition.

К юбилеям В. Д. Мазурова и А. А. Махнева

Введение

Фробениус [4] показал, как по разбиению натурального числа n построить неприводимый комплексный характер симметрической группы S_n. Исследуя неприводимые характеры знакопеременных групп, он также связал их с определенными разбиениями и указал все нецелые значения неприводимых характеров. В работе [5] были определены степени знакопеременных групп, группы центральных единиц целочисленных групповых колец которых имеют ранг 0. В работе[1] были определены ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп до степени 36 и доказано, что для любого $n \geq 36$ группа центральных единиц группы A_n имеет ранг не менее 2. Вычисления рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп были проведены А. В. Каргаполовым [2; 3] для степеней, не превосходящих 800.

Основная цель этой работы состоит в том, чтобы найти числа n, для которых ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы степени n не превосходит 10. Мы будем использовать подход, отличный от упомянутых работ.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений и определений.

r_n — ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы степени n.

Разбиение натурального числа $n = a_1 + \ldots + a_k$, где $a_i \in \mathbb{N}$, будем обозначать через $[a_1, \ldots, a_k]$.

Число называется *квадратом* (соответственно, *неквадратом*), если оно является (соответственно, не является) квадратом натурального числа.

1. Предварительные сведения и формулировка основных результатов

Лемма 1 [5, теорема 4.5]. *Ранг* r_n *равен количеству разбиений* $a = [a_1, \dots, a_k]$ *натурального числа* n, *удовлетворяющих следующим свойствам*:

1) a_i *нечетно,* $1 \leqslant i \leqslant k$;

2) $a_i \neq a_j$ *при* $i \neq j$;

3) $n \equiv k \pmod 4$;

4) $\prod_{i=1}^{k} a_i$ *не является квадратом.*

Через F_n обозначим множество всех разбиений натурального числа n, удовлетворяющих условиям 1)–4) леммы 1.

Автором еще около 20 лет назад были найдены ранги r_n для $n \leqslant 200$. Потом это многократно перепроверялось и пересчитывалось моими студентами, однако никогда не публиковалось. Здесь мы приведем таблицу, которую получил А. В. Каргаполов (не опубликована), за что ему автор очень признателен.

Таблица

$n \equiv 1 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
1	0	9	0	17	1	25	1	33	5
41	18	49	45	57	96	65	187	73	324
81	525	89	823	97	1225	105	1787	113	2586
121	3706	129	5335	137	7739	145	11288	153	16572
161	24443	169	36026	177	52947	185	77420	193	112259

$n \equiv 5 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
5	1	13	1	21	1	29	3	37	11
45	31	53	71	61	141	69	255	77	427
85	673	93	1022	101	1507	109	2176	117	3129
125	4489	133	6464	141	9390	149	13744	157	20208
165	29782	173	43849	181	64236	189	93514	197	135007

$n \equiv 2 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
2	0	10	1	18	4	26	5	34	7
42	13	50	24	58	55	66	125	74	249
82	465	90	824	98	1373	106	2176	114	3350
122	4984	130	7242	138	10377	146	14648	154	20510
162	28644	170	39906	178	55644	186	77765	194	108818

$n \equiv 6 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
6	1	14	3	22	5	30	6	38	10
46	18	54	39	62	86	70	178	78	347
86	631	94	1074	102	1745	110	2724	118	4111
126	6046	134	8709	142	12364	150	17381	158	24291
166	33852	174	47186	182	65852	190	92043	198	128899

Т а б л и ц а (продолжение)

$n \equiv 3 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
3	0	11	1	19	5	27	12	35	20
43	33	51	48	59	70	67	113	75	188
83	331	91	595	99	1049	107	1796	115	2990
123	4815	131	7505	139	11426	147	16968	155	24653
163	35237	171	49602	179	68986	187	95106	195	130175

$n \equiv 7 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
7	0	15	3	23	7	31	14	39	26
47	37	55	56	63	89	71	140	79	245
87	441	95	785	103	1367	111	2320	119	3793
127	6018	135	9283	143	13929	151	20462	159	29496
167	41810	175	58516	183	81025	191	111240	199	151855

$n \equiv 4 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
4	0	12	0	20	2	28	9	36	23
44	47	52	84	60	134	68	208	76	307
84	446	92	666	100	1006	108	1553	116	2447
124	3884	132	6139	140	9631	148	14922	156	22710
164	34011	172	50089	180	72543	188	103570	196	145864

$n \equiv 8 \pmod 8$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
8	0	16	1	24	4	32	13	40	32
48	59	56	101	64	164	72	243	80	360
88	536	96	797	104	1225	112	1925	120	3049
128	4846	136	7667	144	11951	152	18366	160	27765
168	41226	176	60243	184	86672	192	122869	200	171988

Крайне важной и полезной является следующая лемма.

Лемма 2 [4, с. 179 и 188]. *Пусть α — некоторое разбиение числа n, удовлетворяющее первым трем утверждениям леммы* 1. *Тогда*

1) *Число элементов разбиения α не превосходит $[\sqrt{n}]$. В частности, если k_n — максимально возможное число элементов таких разбиений α числа n, то*

при $n \equiv 1 \pmod 4$ *имеем* $k_n \geqslant 5 \iff n \geqslant 25$,

при $n \equiv 2 \pmod 4$ *имеем* $k_n \geqslant 6 \iff n \geqslant 38$,

при $n \equiv 3 \pmod 4$ *имеем* $k_n \geqslant 7 \iff n \geqslant 51$,

при $n \equiv 4 \pmod 4$ *имеем* $k_n \geqslant 4 \iff n \geqslant 16$.

2) *Произведение элементов разбиения α сравнимо с* 1 *по модулю* 4.

В данной статье нами доказана

Теорема.

1) *Для* $n \leqslant 38$ *имеем результаты, приведенные в таблице.*
2) *Для* $n \geqslant 39$ *имеем* $r_n \geqslant 11$.

2. Доказательство теоремы

Докажем первое утверждение теоремы.

Так как для $n \leqslant 36$ это было сделано в [1] (приведенная выше таблицы также подтверждает это), то мы рассмотрим только случаи $n = 37$ и $n = 38$.

Приведем все разбиения чисел $n = 37$ и $n = 38$, удовлетворяющие первым трем утверждениям леммы 1. Пусть k_α — количество элементов разбиения α числа $n \in \{37, 38\}$, удовлетворяющего первым трем утверждениям леммы 1. Тогда по лемме 2 имеем $k_\alpha \in \{1, 5\}$ для $n = 37$ и $k_\alpha \in \{2, 6\}$ для $n = 38$. Таким образом, для $n = 37$ имеем разбиения

$$[37],\quad [1,3,5,7,21],\quad [1,3,5,9,19],\quad [1,3,5,11,17],\quad [1,3,5,13,15],\quad [1,3,7,9,17],$$

$$[1,3,7,11,15],\quad [1,3,9,11,13],\quad [1,5,7,9,15],\quad [1,5,7,11,13] \quad \text{и} \quad [3,5,7,9,13],$$

а для $n = 38$ — разбиения

$$[1,37],\quad [3,35],\quad [5,33],\quad [7,31],\quad [9,29],\quad [11,27],\quad [13,25],\quad [15,23],\quad [17,21] \quad \text{и} \quad [1,3,5,7,9,13].$$

Поскольку произведение элементов каждого разбиения не является квадратом, то $r_{37} = 11$ и $r_{38} = 10$. Утверждение 1) теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы.

Пусть $n \geqslant 39$. Мы должны доказать, что $r_n \geqslant 11$. Следовательно, для каждого такого n достаточно указать 11 различных разбиений числа n, удовлетворяющих лемме 1. В следующих рассуждениях используется тривиальное, но полезное замечание: *всякий квадрат нечетного числа сравним с* 1 *по модулю* 8.

Мы будем рассматривать 8 случаев, соответствующих сравнениям $n \equiv \varepsilon \pmod 8$, где $\varepsilon \in \{1, \ldots, 8\}$.

Начнем со случая, когда $n \equiv 2 \pmod 8$. Тогда $n \geqslant 42$, поскольку мы предположили, что $n \geqslant 39$. Данный случай является ключевым в этом разделе, потому что, как легко заметить из последующего изложения, рассуждения в данном случае переносятся на другие.

Предложение 1. *Пусть* $n \equiv 2 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 42$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем в три шага.

Ш а г 1. Рассмотрим разбиения вида $[k, n-k]$ с нечетным k. Заметим, что если $k(n-k)$ — квадрат, то $k \equiv 1 \pmod 4$. В самом деле,

$$\begin{aligned} k(n-k) \equiv 1 \pmod 8 \iff k(2-k) \equiv 1 \pmod 8 \iff 2-k \equiv k \pmod 8 \\ \iff 2k \equiv 2 \pmod 8 \iff k \equiv 1 \pmod 4). \end{aligned}$$

Ш а г 2. Пусть $[k, n-k]$ — разбиение с $k = 4k_1 + 3$ и $n = 8n_1 + 2$ ($k_1, n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Тогда согласно шагу 1 $(4k_1+3)(8n_1-4k_1-1)$ не является квадратом для любого $k_1 \in \{0, \ldots, \tilde{k}_1\}$, где $\tilde{k}_1$ — наибольшее из чисел k_1 с условием $4k_1 + 3 < 8n_1 - 4k_1 - 1$, т.е. $\tilde{k}_1$ — решение следующей системы (относительно k_1):

$$\begin{cases} 4k_1 + 3 \leqslant 8n_1 - 4k_1 - 1 - 2 \\ 4(k_1+1) + 3 \geqslant 8n_1 - 4k_1 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 8k_1 \leqslant 8n_1 - 6 \\ 8k_1 \geqslant 8n_1 - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 2k_1 \leqslant 2n_1 - \dfrac{3}{2} \\ 2k_1 \geqslant 2n_1 - 2 \end{cases}.$$

Отсюда, учитывая целочисленность k_1, получаем $2k_1 = 2n_1 - 2$, и потому $\tilde{k}_1 = n_1 - 1$. Ясно, что

$$\tilde{k}_1 = n_1 - 1 \geqslant 10 \iff n_1 \geqslant 11 \iff n = 8n_1 + 2 \geqslant 88 + 2 = 90.$$

Таким образом, предложение 1 верно для $n \geqslant 90$, а в оставшихся случаях среди разбиений вида $[k, n-k]$ имеется по крайней мере $\tilde{k}_1 + 1 = n_1 - 1 + 1 = n_1$ разбиений в F_n.

Ш а г 3. Итак, рассматриваем $n \in \{42, 50, 58, 66, 74, 82\}$ и получаем соответственно $n_1 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ разбиений в F_n. Произведения элементов разбиений

$$[5, n-5] \in \{[5, 37], [5, 45], [5, 53], [5, 61], [5, 69], [5, 67]\}$$

не являются квадратами, кроме $[5, 45]$, что, кстати, говорит о существенности для условия $[k, n-k] \in F_n$ ограничения $k \equiv 3 \pmod 4$. Отсюда получаем, что утверждение предложения 1 выполнено для $n = 82$, а для $n = 42, 50, 58, 66, 74$ имеем соответственно не менее $6, 6, 8, 9, 10$ разбиений в F_n.

Для $n \in \{42, 50, 58, 66, 74\}$ разбиения

$$[9, n-9] \in \{[9, 33], [9, 41], [9, 49], [9, 57], [9, 65]\}$$

принадлежат F_n, кроме $[9, 49]$. Отсюда получаем, что утверждение предложения выполнено для $n = 74$, а для $n = 42, 50, 58, 66$ имеем соответственно не менее $7, 7, 8, 9$ разбиений в F_n.

Аналогично для $n \in \{42, 50, 58, 66\}$ разбиения

$$[13, n-13] \in \{[13, 29], [13, 37], [13, 45], [13, 53]\},$$

$$[17, n-17] \in \{[17, 25], [17, 33], [17, 41], [17, 49]\}$$

лежат в F_n, и потому $n \neq 66$, а для $n \in \{42, 50, 58\}$ имеем соответственно не менее $9, 9, 10$ разбиений в F_n.

Для $n \in \{50, 58\}$ разбиения

$$[21, n-21] \in \{[21, 29], [21, 37]\}$$

принадлежат F_n, и потому $n \neq 58$, а для $n \in \{42, 50\}$ имеем соответственно не менее $9, 10$ разбиений в F_n.

Для $n = 50$ в F_n находим шестерку (пар нет!) $[3, 5, 7, 9, 11, 15]$, и, значит, $n \neq 50$.

Отметим, что (специально, чтобы использовать в дальнейшем) мы не рассматривали разбиения, где есть 1; для $n = 42$ этого не избежать, и мы дополним имеющиеся уже разбиения в F_{42} парой $[1, 41]$ (больше пар нет!) и шестеркой $[1, 3, 5, 7, 9, 17]$.

Это завершает доказательство предложения 1.

Предложение 2. *Пусть* $n \equiv 6 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 46$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем в три шага по образцу доказательства предложения 1.

Ш а г 1. Рассмотрим снова разбиения вида $[k, n-k]$ с нечетным k. Заметим, что если $k(n-k)$ — квадрат, то $k \equiv 3 \pmod 4$, что доказывается, как в шаге 1 доказательства предложения 1.

Ш а г 2. Пусть $[k, n-k]$ — разбиение с $k = 4k_1+1$ и $n = 8n_1+6$. Тогда $(4k_1+1)(8n_1-4k_1+5)$ не будет квадратом для любого $k_1 \in \{0, \ldots, \tilde{k}_1\}$, где $\tilde{k}_1$ — наибольшее из чисел k_1 с условием $4k_1 + 3 < 8n_1 - 4k_1 - 1$. Тогда, как в шаге 2 доказательства предложения 1, показывается, что $\tilde{k}_1 = n_1$ и $\tilde{k}_1 \geqslant 10 \iff n \geqslant 86$.

Ш а г 3. Завершение доказательства аналогично шагу 3 доказательства предложения 1. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $n \equiv 3 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 43$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Доказательство. Рассмотрим тройки $[1, k, n-k-1]$ с нечетным k. Ясно, что $[k, n-k-1]$ удовлетворяет шагу 1 доказательства предложения 1, и мы можем воспользоваться его результатом. По доказательству предложения 1 для любого $n-1 \geqslant 50$ можно найти нужное количество разбиений в F_n, в которых нет 1. Поэтому надо рассмотреть только $n = 43$. Из доказательства предложения 1 получаем, что можно найти 9 троек в F_n. Можно добавить $[3, 5, 35]$ и $[3, 7, 33]$, поэтому $r_{43} \geqslant 11$, что завершает доказательство. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть* $n \equiv 7 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 39$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.

Предложение 5. *Пусть* $n \equiv 4 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 44$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Доказательство. Согласно общей стратегии попытаемся воспользоваться предыдущими случаями, а именно, результатами из доказательства предложения 1. Рассмотрим четверки вида $[1, 9, k, n-k-10]$. По шагу 1 доказательства предложения 1 произведения элементов четверок вида $[1, 9, 4k_1+3, 8n_1-4k_1-9]$ дадут неквадраты, и их число (см. шаг 2 доказательства предложения 1) будет равно $n_1 - 1$. Поэтому предложение 5 верно для $n_1 \geqslant 12$ (равносильно, для $n = 8n_1 + 4 \geqslant 100$). Остаются $n \in \{44, 52, 60, 68, 76, 84, 92\}$. Отбрасывая в четверках 1 и 9, получим пары $[4k_1+3, 8n_1-4k_1-9]$, являющиеся разбиениями чисел $8n_1 - 6 = n - 10 \equiv 2 \pmod 8$. Следовательно, мы можем частично воспользоваться доказательством предложения 1.

Итак, будем следовать доказательству предложения 1. Для $n = 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92$ имеем соответственно $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ четверок неквадратов. Достаточно далее рассматривать только пары $[k, n-10-k]$ для $n-10$. Добавление пар вида $[5, n-15]$ позволяет не рассматривать $n = 92$ и, как в доказательстве предложения 1, получить для $n \in \{44, 52, 60, 68, 76, 84\}$ соответственно $5, 6, 6, 8, 9, 10$ разбиений в F_n. Разбиения $[13, n-23] \in \{[13, 21], [13, 29], [13, 37], [13, 45], [13, 53]\}$ — неквадраты, и потому $n \neq 84$, а для $n \in \{44, 52, 60, 68, 76\}$ имеем не менее $6, 7, 7, 9, 10$ разбиений в F_n.

Теперь для $n \in \{44, 52, 60, 68, 76\}$ разбиения

$$[1, 3, 5, n-9] \in \{[1, 3, 5, 35], [1, 3, 5, 43], [1, 3, 5, 51], [1, 3, 5, 59], [1, 3, 5, 67]\},$$

$$[1, 3, 7, n-11] \in \{[1, 3, 7, 33], [1, 3, 7, 41], [1, 3, 7, 49], [1, 3, 7, 57], [1, 3, 7, 65]\}$$

принадлежат F_n, и потому для $n = 44, 52, 60, 68, 76$ имеем соответственно не менее $8, 9, 9, 11, 12$ разбиений в F_n. Остаются только $n \in \{44, 52, 60\}$, для которых разбиения

$$[1, 5, 7, n-13] \in \{[1, 5, 7, 31], [1, 5, 7, 39], [1, 5, 7, 47]\},$$

$$[1, 5, 9, n-15] \in \{[1, 5, 9, 29], [1, 5, 9, 37], [1, 5, 9, 45]\}$$

принадлежат F_n, кроме $[1, 5, 9, 45]$, и потому для $n = 44, 52, 60$ имеем соответственно не менее $10, 11, 10$ разбиений в F_n. Поэтому $n \neq 52$, а для $n \in \{44, 60\}$ добавим разбиения

$$[1, 3, 11, n-15] \in \{[1, 3, 11, 29], [1, 3, 11, 45]\},$$

завершая доказательство предложения.

Предложение 6. *Пусть* $n \equiv 8 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 40$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 5.

Предложение 7. *Пусть* $n \equiv 5 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 45$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Доказательство проведем в три шага по образцу доказательства предложения 1.

Шаг 1. Рассмотрим снова разбиения вида $[1, 3, 5, k, n-k-9]$ с нечетным k и, как в шаге 1 доказательства предложения 1, получим, что $15k(n-k-9)$ — неквадрат.

Шаг 2. Пусть $k = 2k_1 + 7$ и $n = 8n_1 + 5$. Тогда пятерки вида $[1, 3, 5, 2k_1 + 7, 8n_1 - 2k_1 - 11]$ содержатся в F_n для любого $k_1 \in \{0, \ldots, \tilde{k}_1\}$, где $\tilde{k}_1$ — наибольшее из чисел k_1 с условием $2k_1 + 7 < 8n_1 - 2k_1 - 7$. Как в шаге 2 доказательства предложения 1, получим, что $\tilde{k}_1 = 2n_1 - 5$ и $\tilde{k}_1 \geqslant 10 \iff n \geqslant 69$.

Шаг 3. Для $n \geqslant 69$ найдено нужное количество разбиений в F_n, и для оставшихся случаев $n \in \{45, 53, 61\}$ имеем соответственно не менее $6, 8, 10$ пятерок в F_n. Для $n \in \{45, 53, 61\}$ разбиения

$$[1, 3, 7, 9, n-20] \in \{[1, 3, 7, 9, 25], [1, 3, 7, 9, 33], [1, 3, 7, 9, 41]\},$$

$$[1, 3, 7, 11, n-22] \in \{[1, 3, 7, 11, 23], [1, 3, 7, 11, 31], [1, 3, 7, 11, 39]\},$$

$$[1, 3, 7, 13, n-24] \in \{[1, 3, 7, 13, 21], [1, 3, 7, 13, 29], [1, 3, 7, 13, 37]\},$$

$$[1, 3, 7, 15, n-26] \in \{[1, 3, 7, 15, 19], [1, 3, 7, 15, 27], [1, 3, 7, 15, 35]\}$$

принадлежат F_n, кроме $[1, 3, 7, 15, 35]$, и потому для $n = 45, 53, 61$ имеем соответственно не менее $10, 12, 13$ пятерок в F_n. Таким образом, осталось рассмотреть $n = 45$. Для него уже имеем 10 разбиений из F_n и, добавив $[1, 3, 9, 11, 21]$, завершаем доказательство.

Предложение 8. *Пусть* $n \equiv 1 \pmod 8$ *и* $n \geqslant 41$. *Тогда* $r_n \geqslant 11$.

Доказательство проведем в три шага по образцу доказательства предложения 1.

Шаг 1. Рассмотрим снова разбиения видов $[1, 3, 7, k, n-k-11]$ и $[1, 3, 11, k, n-k-15]$ с нечетным k. Как в шаге 1 доказательства предложения 1, получим, что если $21k(n-k-9)$ — квадрат или $33k(n-k-15)$ — квадрат, то $k \equiv 1 \pmod 4$.

Шаг 2. Итак, пятерки $[1, 3, 7, 4k_0+11, 8n_1-1-4k_0-11-11] = [1, 3, 7, 4k_0+11, 8n_1-4k_0-21]$ и $[1, 3, 11, 4k_1+15, 8n_1-1-4k_0-15-15] = [1, 3, 7, 4k_1+11, 8n_1-4k_1-29]$ всегда дадут неквадраты для любого $k_0 \in \{0, \ldots, \tilde{k}_0\}$, где $\tilde{k}_0$ — наибольшее из чисел k_0 с условием $4k_0+11 < 8n_1-4k_1-21$ и $k_1 \in \{0, \ldots, \tilde{k}_1\}$, где $\tilde{k}_1$ — наибольшее k_1 с условием $4k_1 + 15 < 8n_1 - 4k_1 - 29$. Как в шаге 2 доказательства предложения 1, получим $\tilde{k}_0 = n_1 - 5$ и $\tilde{k}_1 = n_1 - 6$.

Шаг 3. Завершение доказательства аналогично шагу 3 доказательства предложения 7.

Утверждение 2) теоремы непосредственно следует из предложений 1–8.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алеев Р.Ж., Каргаполов А.В., Соколов В.В.** Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 15–21.
2. **Каргаполов А.В.** Параллельный алгоритм для нахождения рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. Вып. 10 / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2009. С. 8–12.
3. **Каргаполов А.В.** Центральные единицы целочисленных групповых колец знакопеременных групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 2012. 87 с.

4. **Фробениус Г.** Теория характеров и представлений групп / пер. с нем.; под ред. и с предисл. А. К. Сушкевича. М.: КомКнига, 2005. 216 с.
5. **Ferraz R.A.** Simple components and central units in group algebras // J. Algebra. 2004. Vol. 279, no. 1. P. 191–203.

Алеев Рифхат Жалялович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Южно-Уральский государственный университет
Челябинский государственный университет
e-mail: aleev@csu.ru

Поступила 14.02.2013

Том 19 № 3 2013

УДК 512.54

О ГРУППАХ С ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫМИ НОРМАЛИЗАТОРАМИ НЕАБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП

В. А. Антонов

Исследуется строение неразрешимой конечной группы G, в которой для любой неабелевой подгруппы A индекс $|N_G(A):AC_G(A)|$ либо равен единице, либо является простым числом.

Ключевые слова: конечная группа, подгруппа, нормализатор, централизатор.

V. A. Antonov. On groups with relatively small normalizers of nonabelian subgroups.

We investigate the structure of a finite nonsolvable group G in which for any nonabelian subgroup A the index $|N_G(A):AC_G(A)|$ is equal to the unit or a prime.

Keywords: finite group, subgroup, normalizer, centralizer.

Если A — произвольная подгруппа группы G, то $N_G(A) \geq AC_G(A)$, а индекс $|N_G(A):AC_G(A)|$ равен порядку некоторой подгруппы из $Out(A)$, индуцированной элементами группы G. В данной работе изучается строение конечных групп G, в которых для любой неабелевой подгруппы A индекс $|N_G(A):AC_G(A)|$ делит некоторое простое число (т. е. либо равен единице, либо является простым числом). Такие группы будем называть $NSNA$-группами.

Заметим, что ограничения на величину индекса $|N_G(A):AC_G(A)|$ весьма существенно влияют на свойства самой группы. Так, например, в работах Смита и Тирера [1] показано, что если в конечной группе G для силовской p-подгруппы P выполняется равенство $|N_G(P):PC_G(P)| = 2$, а P либо является нециклической абелевой группой, либо имеет коммутант простого порядка, то $G' < G$.

В то же время для получения полного описания групп с ограничениями на индекс $|N_G(A):AC_G(A)|$ нужно, чтобы подгруппа A пробегала достаточно большое множество подгрупп. В качестве такого множества естественно выбирать множество всех абелевых (неабелевых), примарных (непримарных), инвариантных (неинвариантных) подгрупп. В ряде работ автора и его учеников Н. Н. Аминевой и Т. Г. Ножкиной (см. [2–7]) были описаны группы, в которых для любой подгруппы A из такого множества подгрупп индекс $|N_G(A):AC_G(A)|$ делит фиксированное для данной группы G простое число p.

Следующим естественным шагом является исследование групп, в которых число p не является фиксированным, т. е. для различных подгрупп этот индекс может быть равен различным простым числам. Одной из таких задач и посвящена данная статья.

Отметим, что свойство быть $NSNA$-группой переносится на подгруппы и фактор-группы. Цель данной работы — описание строения неразрешимых $NSNA$-групп.

Теорема 1. *Конечная неабелева простая группа G тогда и только тогда является $NSNA$-группой, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) $G \cong PSL(2,p^n)$, *где* $\dfrac{p^n-1}{(2,p^n-1)}$ — *простое число*;

2) $G \cong PSL(2,p^n)$, *где* $\dfrac{p^n-1}{(2,p^n-1)}$ — *произведение двух простых чисел*;

3) $G \cong Sz(8)$, A_7 *или* J_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть G — конечная неабелева простая $NSNA$-группа. Как известно, все конечные абелевы простые группы исчерпываются знакопеременными группами, группами лиева типа и спорадическими простыми группами.

Предположим сначала, что G — простая группа лиева типа над полем $GF(p^n)$, где p — простое число и $n \in \mathbb{N}$. Если S — силовская p-подгруппа из G, то $C_G(S) \leq S$ и $N_G(S) = S \leftthreetimes H$, где H — подгруппа Картана группы G. Из определения $NSNA$-группы следует, что $|H| \in \{1, q, qr\}$, где q и r — простые числа, причем случай $|H| = qr$ возможен только в случае коммутативности группы S, т. е. при $G \cong PSL(2, p^n)$.

Дальнейшее исследование проведем в зависимости от величины лиева ранга l группы G.

Если $l > 2$ и J — параболическая подгруппа группы G, соответствующая паре несмежных вершин диаграммы Дынкина группы G, то (см. [8, предложение 2.17]) $\overline{J} = J/O_p(J) = (\overline{Y}_1 \times \overline{Y}_2) \cdot \overline{H}$, где $\overline{Y}_1$ и $\overline{Y}_2$ — группы лиева ранга 1 над полем $GF(p^n)$, а H — подгруппа Картана группы G. Обозначим через $\overline{H_i}$ подгруппу Картана из $\overline{Y_i}$ для $i = 1, 2$.

Так как порядок H делит простое число, то случай $|\overline{H_1}| \neq 1 \neq |\overline{H_2}|$ невозможен. Если эти несмежные вершины диаграммы Дынкина можно выбрать так, что $|\overline{H_1}| = |\overline{H_2}| = 1$, то $p^n = 2$, $\overline{H_i}$ изоморфна одной из групп $A_1(2)$ или ${}^2A_2(2)$, и если $A/O_2(J)$ — холлова $2'$-подгруппа из $\overline{J}$, то подгруппа A неабелева и $|N_G(A) : AC_G(A)|$ делится на 4.

Предположим теперь, что $|\overline{H_1}| = 1 \neq |\overline{H_2}|$. Тогда G изоморфна одной из групп ${}^2E_6(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_6(2)$ или ${}^2D_4(2)$. В каждом из этих случаев $\overline{Y_2} \cong A_1(4)$, а $\overline{Y_1} \cong A_1(2)$ или ${}^2A_2(2)$. Если $\overline{R}$ — холлова $2'$-подгруппа из $\overline{Y_1}$, а S — силовская 2-подгруппа из Y_2, то для подгруппы $A = RS_2$ индекс $|N_G(A) : AC_G(A)|$ делится на 6; противоречие.

Таким образом, $l \leq 2$. Если $l = 2$, то группа G изоморфна одной из групп $A_2(p^n)$, $B_2(p^n)$, ${}^2A_3(p^n)$, ${}^2A_4(p^n)$, ${}^3D_4(p^n)$, $({}^2F_4(2))'$ или ${}^2F_4(2^{2n+1})$ при $n > 0$. Группа $({}^2F_4(2))'$ содержит подгруппу, изоморфную $PSL(2, 25)$, которая не является $NSNA$-группой, так как у нее порядок подгруппы Картана равен 12. Группа $A_2(2)$ изоморфна $PSL(2, 7)$, а группа $B_2(2) \cong S_6$ не проста. Поэтому можно считать, что $|H| > 1$. Из формул для порядка подгрупп Картана [9, с. 121 и 251] и простоты этого числа следует, что G изоморфна одной из групп $A_2(4)$, $B_2(3) \cong {}^2A_3(2)$ или ${}^3D_4(2)$. Но в группе $A_2(4)$ силовская 3-подгруппа S совпадает со своим централизатором и имеет индекс 8 в своем нормализаторе (см. [10]), т. е. если $A = S \leftthreetimes \langle z \rangle$, где z — элемент порядка 2 из $N_G(S)$, то $|N_G(A) : AC_G(A)| = 4$. В группе ${}^2A_3(2)$ силовская 3-подгруппа неабелева и имеет индекс 8 в своем нормализаторе (см. [10]). Группа ${}^3D_4(2)$ содержит такую экстраспециальную подгруппу A порядка 2^9, что $N_G(A)/A \cong PSL(2, 8)$ [10].

Таким образом, $l = 1$. Если $G \cong A_1(p^n)$, то порядок $|H| = (p^n - 1)/(2, p^n - 1)$ должен быть либо простым числом, либо произведением двух простых чисел, т. е. G — группа типа 1) или 2) из условия теоремы. Группа ${}^2A_2(2)$ не проста, а в группе ${}^2A_2(p^n)$ при $p^n > 2$ число $|H| = (p^{2n} - 1)/(3, p^n + 1)$ не может быть простым. Если $G \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$ и $n > 1$, то силовская 2-подгруппа S группы G не является $NSNA$-группой. В самом деле, если a и b — два неперестановочных элемента из S и $A = \langle a, b \rangle Z(S)$, то $C_S(A) = Z(S)$ и $|S : A| = 2^{2n-1}$. Следовательно, в этом случае $G \cong {}^2B_2(2^3) = Sz(8)$.

Предположим теперь, что $G \cong A_n$. Так как $A_5 \cong PSL(2, 4)$, а $A_6 \cong PSL(2, 9)$, то можно считать, что $n \geq 7$. Но группа $A_8 \cong PSL(4, 2)$ по уже доказанному не является $NSNA$-группой. Поэтому $n = 7$.

Теперь, используя [10], покажем, что G не может быть простой спорадической группой, отличной от J_1. Для этого достаточно показать, что любая такая группа содержит подгруппу, не являющуюся $NSNA$-группой. Через G_p условимся обозначать силовскую p-подгруппу группы G для простого числа p.

1) В группе M_{11} подгруппа G_3 совпадает со своим централизатором, а ее нормализатор $N_G(G_3)$ равен $G_3 \leftthreetimes K$, где K — полудиэдральная группа порядка 16, что невозможно.

2) M_{12}, M_{23}, M_{24}, Co_3, Suz и McL содержат M_{11}.

3) M_{22} содержит подгруппу H вида $E_{16} \leftthreetimes A_6$, и если B — силовская 3-подгруппа из H и $A = E_{16} \leftthreetimes B$, то $|N_H(A) : AC_H(A)| = 4$.

4) В группе M_{24} централизатор центральной инволюции содержит неабелеву подгруппу A порядка 2^7 со свойством $N_G(A)/A \cong PSL(2,7)$.

5) F_{22} содержит S_{10}, а F_{23} и F'_{24} содержат S_{12}.

6) В группе $O'N$ подгруппа G_7 неабелева и $N_G(G_7)/G_7 \cong Z_3 \times D_8$.

7) В группе J_2 имеем $N_G(G_3) = G_3 \leftthreetimes \langle a\rangle$, $C_G(G_3) = G_3$ и $|a| = 8$.

8) В группах J_3 и He подгруппа $N_G(G_{17})$ является группой Фробениуса порядка $17 \cdot 8$; в группах J_4 и Co_2 подгруппа $N_G(G_{29})$ — группа Фробениуса порядка $29 \cdot 28$, что невозможно, а Co_1 и F_2 содержат Co_2.

9) Группа F_1 содержит такую инволюцию τ, что $C_G(\tau)/O_2(C_G(\tau)) \cong Co_2$.

10) В группе Ly подгруппа $N_G(G_{37})$, а в группе F_3 подгруппа $N_G(G_{19})$ являются группами Фробениуса порядков $37 \cdot 18$ и $19 \cdot 18$ соответственно.

11) Группа F_5 содержит HS, а в группе HS подгруппа $N_G(G_3)$ изоморфна $S_3 \times S_5$, и если $A \cong A_3 \times A_5$, то $|N_G(A) : AC_G(A)|$ делится на 4.

12) В группе Ru централизатор центральной инволюции z содержит такую инвариантную неабелеву подгруппу A порядка 2^{11}, что $C_G(z)/A \cong S_5$.

Достаточность. Пусть G — группа из теоремы. Если A — собственная неабелева подгруппа группы G, то $N_G(A) < G$. Поэтому достаточно убедиться, что любая максимальная подгруппа группы G является $NSNA$-группой.

Предположим сначала, что $G \cong PSL(2,p^n)$. Так как число $(p^n - 1)/(2, p^n - 1)$ является либо простым числом, либо произведением двух простых чисел, то, как несложно видеть, n является либо простым числом, либо квадратом простого числа. Из теоремы Диксона [11, теорема 2.8.27] следует, что максимальные подгруппы группы G исчерпываются подгруппами из следующего списка: $N_G(P) = P \leftthreetimes \langle a\rangle$, где P — силовская p-подгруппа и $|a| = (p^n-1)/(2,p^n-1)$; группы диэдра порядков $2(p^n \pm 1)/(2,p^n-1)$; S_4 при $p^n \equiv \pm 1(8)$, A_4 при $p^n \equiv \pm 3(8)$, A_5 при $p^n \equiv \pm 1(10)$; $PSL(2,p^r)$ при $n = r^2$. Несложно проверить, что каждая из них является $NSNA$-группой.

В группе $Sz(8)$ максимальными подгруппами являются следующие группы [10]: $N_G(Q) = Q \leftthreetimes \langle a\rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа и $|a| = 7$; группы диэдра порядка 14; группы Фробениуса вида $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|a| \in \{5, 13\}$ и $|b| = 4$.

Максимальные подгруппы A_7 исчерпываются группами следующих типов: A_6, S_5, $PSL(2,7)$ и $(A_4 \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $a^3 = b^2 = 1$ (см. [10]).

Максимальными подгруппами группы J_1 являются группы следующих типов (см. [10]): $PSL(2,11)$, $Z_2 \times A_5$, $E_8 \leftthreetimes Z_{21}$, $D_6 \times D_{10}$, $Z_7 \leftthreetimes Z_6$, $Z_{11} \leftthreetimes Z_{10}$, $Z_{19} \leftthreetimes Z_6$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Несложно показать, что если число $(p^n-1)/(2,p^n-1)$ является простым, то либо $p = 2$ и n — простое число, либо $p = 3$ и n — нечетное простое число, либо $p > 3$ и $n = 1$. Если число $(p^n - 1)/(2, p^n - 1)$ является произведением двух простых чисел, то еще возможны случаи $p^n = 9$ и $p \in \{2,3\}$, а n — квадрат нечетного простого числа. Кроме того, если $(p^n - 1)/(2, p^n - 1)$ является простым числом и $p^n \not\equiv \pm 1(8)$, то в группе $G \cong PSL(2,p^n)$ для любой неабелевой подгруппы A выполняется равенство $N_G(A) = AC_G(A)$, а для любой абелевой подгруппы A индекс $|N_G(A) : AC_G(A)|$ делит простое число.

В дальнейшем через $F(G)$ и $F^* = F^*(G)$ условимся обозначать подгруппу Фиттинга и обобщенную подгруппу Фиттинга группы G.

Теорема 2. *Пусть G — неразрешимая непростая $NSNA$-группа. Тогда выполняется один из следующих случаев*:

1) *подгруппа* $F(G) = F^*(G)$ *абелева и* $G/F(G) \cong PSL(2,4)$;

2) $G = Z(G) \times G_1$, *где* G_1 — *группа из теоремы* 1;

3) $G = Z(G) \cdot G_1$, *где* $G_1 \cong SL(2,p^n)$, *а* $G_1/Z(G_1)$ — *группа из п.* 1) *теоремы* 1 *при* $p^n \equiv \pm 3(8)$;

4) $G = Z(G) \times G_1 \times G_2$, G_1 *и* G_2 — *группы из п.* 1) *теоремы* 1, *и* $p_i^{n_i} \not\equiv -1(8)$, $i = 1,2$.

5) $F^* = Z(F^*) \times G_1$, *где* G_1 — *группа из п.* 1) *теоремы* 1, *и если* $p > 3$, *то* $p^n \equiv \pm 3(8)$, $G = F^*\langle a\rangle$, $|G/F^*| = r$ — *простое число и* $[a, G_1] = 1$;

6) $F^* = Z(F^*) \times G_1$, *где* G_1 *— группа из п.* 1) *теоремы* 1, $G = F^*\langle a\rangle$, $|G/F^*| = r$ *— простое число и элемент* a *индуцирует внешний автоморфизм группы* G_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — неразрешимая непростая $NSNA$-группа. Предположим сначала, что $F(G) = F^*(G)$. Тогда $C_G(F(G)) \leq F(G)$. Если группа $F(G)$ неабелева, то $|G : F(G)|$ — простое число, что противоречит неразрешимости G. Поэтому подгруппа $F(G)$ абелева. Кроме того, если $A/F(G)$ — произвольная неединичная подгруппа из $G/F(G)$, то подгруппа A неабелева и, следовательно, $|N_G(A) : A|$ делит простое число.

Если $G_1/F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/F(G)$, то индекс $|G : G_1|$ делит простое число. Предположим сначала, что $G = G_1$. Тогда $G/F(G)$ — простая $NSNA$-группа, т. е. группа из теоремы 1.

Если $G/F(G) \cong Sz(8)$ и $zF(G)$ — центральная инволюция из силовской 2-подгруппы $S/F(G)$ группы $G/F(G)$ ($z \in S > F(G)$), то подгруппа $A = \langle F(G), z\rangle$ неабелева и $|N_S(A) : AC_S(A)| = 2^5$. Случаи $G/F(G) \cong A_7$ и $G/F(G) \cong J_1$ рассматриваются аналогично, здесь индекс такой подгруппы равен 4 или 60 соответственно.

Пусть $G/F \cong PSL(2, p^n)$, где p — простое число и $n \in \mathbb{N}$. Если $S/F(G)$ — силовская p-подгруппа из $G/F(G)$, то подгруппа S неабелева. Поэтому число $(p^n - 1)/(2, p^n - 1)$ является простым. Если $A/F(G)$ — подгруппа порядка p из $S/F(G)$, то из того, что индекс $|N_S(A) : A|$ делит простое число, следует, что $n \leq 2$. Если $n = 2$, то из простоты числа $(p^2 - 1)/(2, p^2 - 1)$ следует, что $p = 2$, т. е. $G/F(G) \cong PSL(2, 4)$.

Пусть $n = 1$, $p > 3$ и $(p-1)/2$ является простым числом. Так как $PSL(2, 5) \cong PSL(2, 4)$, то можно считать, что $p > 5$. Группа $G/F(G)$ содержит диэдральную подгруппу $H/F(G)$ порядка $(p^n + 1)$. Если $A/F(G) = Z(H/F(G))$, то $C_G(A) < A$ и индекс $|N_G(A) : AC_G(A)| = (p + 1)/2$ является простым числом. Но числа $(p - 1)/2$ и $(p + 1)/2$ одновременно являются простыми числами только при $p = 5$.

Предположим теперь, что $G_1 < G$. Тогда, по уже доказанному, $G_1/F(G) \cong PSL(2, 4)$ и $G = G_1\langle a\rangle$ для некоторого $a \in G$. Предположим сначала, что элемент a индуцирует внешний автоморфизм группы $G_1/F(G)$. Если $A/F(G)$ — подгруппа порядка 5 из $G_1/F(G)$, то в силу леммы Фраттини можно считать, что $aF \in N_{G/F(G)}(A/F(G))$. Но тогда $|N_G(A) : AC_G(A)|$ делится на 4, что невозможно. Поэтому a индуцирует внутренний автоморфизм группы $G_1/F(G)$. Умножая a на соответствующий элемент из G_1, можно считать, что $[aF(G), G_1/F(G)] = 1$. Если $A = F(G)\langle a\rangle$, то $N_G(A) = G$, а $C_G(A) < F$. Но тогда $|N_G(A) : AC_G(A)| = |G_1/F(G)|$, что невозможно.

Итак, если $F(G) = F^*(G)$, то G — группа типа 1) из условия теоремы. Поэтому в дальнейшем считаем, что $F(G) < F^*(G)$. Тогда $F^*(G) = F(G)\,L$, где L — слой группы G и $[L, F(G)] = 1$. Если A_1 и A_2 — такие подгруппы из $F(G)$ и L соответственно, что $N_G(A_i) > A_iC_G(A_i)$, то для подгруппы $A = A_1A_2$ индекс $|N_G(A) : AC_G(A)|$ не является простым числом. Поэтому $N_G(A_1) = A_1C_G(A_1)$ для любой подгруппы $A_1 \leq F(G)$, и, следовательно, подгруппа $F(G)$ абелева, т. е. $F(G) = Z(F^*(G))$.

Предположим сначала, что $G = F^*(G)$. Тогда $G/Z(G) = \prod_{i=1}^{n} \overline{G_i}$, где $\overline{G_i}$ — простые группы из теоремы 1. Так как группы $\overline{G_i}$ неабелевы, то найдутся такие подгруппы $\overline{H_i}$ из $\overline{G_i}$, что $N_{\overline{G_i}}(\overline{H_i}) > \overline{H_i}C_{\overline{G_i}}(\overline{H_i})$. Если $n > 2$ и $A = H_1H_2G_3$, то индекс $|N_G(A) : AC_G(A)|$ не является простым числом (здесь и далее, если $\overline{H} \leq G/Z(G)$, то через H обозначается полный прообраз в G факторгруппы $\overline{H}$). Поэтому $n \leq 2$.

Пусть $n = 1$. Если $Z(L) = E$, то G — группа из п. 2) теоремы. Пусть $Z(L) \neq 1$. Тогда L — накрывающая для группы из теоремы 1. Предположим, что $L/Z(L) \cong A_7$. Мультипликатор Шура группы A_7 имеет порядок 6. Если $|Z(L)|$ делится на 2 и $A/Z(L)$ — четверная группа из $L/Z(L)$, то подгруппа A неабелева и $|N_G(A) : AC_G(A)| = 6$. Если $|Z(L)| = 3$ и $A/Z(G)$ — силовская 3-подгруппа из $G/Z(G)$, то снова подгруппа A неабелева и $|N_G(A) : AC_G(A)| = 4$. Поэтому $G/Z(G) \ncong A_7$.

Если L — накрывающая для $Sz(8)$, то силовская 2-подгруппа S группы L имеет индекс 21 в своем нормализаторе ([10]), что невозможно. Мультипликатор Шура группы J_1 тривиален, поэтому $L \ncong J_1$.

Рассмотрим теперь случай $G/Z(G) \cong PSL(2, p^n)$. Из $Z(L) \neq 1$ следует, что $p \neq 2$ при $n > 2$. Так как $PSL(2,4) \cong PSL(2,5)$, то можно считать, что $p^n > 4$. Если $p^n \neq 9$, то $G = Z(G)G_1$, где $G_1 \cong SL(2,p^n)$. Если при этом $p^n \equiv \pm 1(8)$, то $G/Z(G)$ содержит подгруппу $B/Z(G) \cong S_4$. И если $A/Z(G)$ — четверная подгруппа из $B/Z(G)$, то подгруппа A неабелева и $|N_G(A) : AC_G(A)| = 6$. Поэтому $p^n \equiv \pm 3(8)$. Для группы $PSL(2,9)$ мультипликатор Шура имеет порядок 6. Если $|Z(L)|$ делится на 3 и $A/Z(G)$ — силовская 3-подгруппа из $G/Z(G)$, то подгруппа A неабелева и $|N_G(A) : AC_G(A)| = 4$. Поэтому $|Z(L)| = 2$. Так как $9 \equiv 1(8)$, то $G/Z(G)$ содержит подгруппу, изоморфную S_4, и если $A/Z(L)$ — четверная группа, то снова $|N_G(A) : AC_G(A)| = 6$.

Итак, если $n = 1$ и $G = F^*$, то G — группа типа 2) или 3) из условия теоремы. Предположим теперь, что $n = 2$, т.е. $G/Z(G) = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$. Пусть G_i — полный прообраз в G группы $\overline{G_i}$. Обозначим через H_i такие подгруппы из G_i, $i = 1,2$, что $N_{G_i}(H_i) > H_iC_{G_i}(H_i)$. Если $Z(L) \neq 1$, то можно считать, что подгруппы H_i неабелевы, и тогда для подгруппы $A = H_1H_2$ индекс $|N_G(A) : AC(A)|$ не является простым числом. Поэтому $L = G_1 \times G_2$. Если, например, в качестве H_1 можно выбрать неабелеву подгруппу, то из простоты числа $|N_G(H_1H_2) : (H_1H_2)C_G(H_1H_2)|$ следует, что $N_{G_2}(H_2) = H_2C_{G_2}(H_2)$, что противоречит выбору подгруппы H_2. Поэтому для любой неабелевой подгруппы A_i из G_i выполняется равенство $N_{G_i}(A_i) = A_iC_{G_i}(A_i)$, т.е. G — группа типа 4) из условия теоремы. В самом деле, предположим, например, что $p_1^{n_1} \equiv -1(8)$. Тогда G содержит в качестве подгруппы группу диэдра $H = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ порядка $(p_1^n + 1)$, и если $A = \langle a^2 \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, то подгруппа A неабелева и $|H/A| = 2 \neq 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $G > F^*(G)$. Тогда $r = |G/F^*(G)|$ является простым числом. Пусть $G = F^*(G)\langle a \rangle$ для некоторого $a \in G$, а $F^*(G)$ — группа типа 2)–4) из условия теоремы. Тогда подгруппы $Z(F^*(G))$ и $H = [F^*(G), F^*(G)]$ являются a-допустимыми подгруппами. Если a индуцирует внутренний автоморфизм группы H, то, как и выше, можно считать, что $[a, H] = 1$ и подгруппа $Z(F^*)\langle a \rangle$ неабелева. Если при этом K — произвольная подгруппа из H и $A = \langle Z(F^*), K, a \rangle$, то из того, что $|N_G(A) : AC_G(A)|$ делит простое число, следует, что $|N_H(K) : KC_H(K)|$ тоже делит простое число. А из произвольности подгруппы $K \leq H$ получаем (см. [12]), что $F^*(G)$ является группой типа 2) из условия теоремы 1 и $p^n \not\equiv \pm 1(8)$, т.е. G — группа типа 5).

Предположим теперь, что элемент a индуцирует внешний автоморфизм группы H. Для удобства будем считать, что $F^*(G) = H$. Так как группа внешних автоморфизмов группы J_1 тривиальна, то F^* не изоморфна J_1.

Если $F^*(G) \cong Sz(8)$, то силовская 2-подгруппа S из G имеет индекс 21 в своем нормализаторе (см. [10]), что невозможно. Если $F^*(G) \cong A_7$, то из $Aut(A_7) \cong S_7$ следует, что G содержит подгруппу вида $S_4 \times S_3$. Если B — четверная подгруппа из S_4 и $A = B \times S_3$, то $|N(A) : AC(A)| = 6$.

Если же $F^*(G) \cong SL(2,p^n)$, $p \equiv \pm 3(8)$ и A — силовская 2-подгруппа из $F^*(G)$, то $|N_G(A) : AC_G(A)| = 6$, что невозможно.

Пусть теперь $F^*(G) = G_1 \times G_2$. Если $G_1^a = G_2$ и S_1 — силовская p_1-подгруппа из G_1, то можно считать, что подгруппа $A = S_1 \times S_1^a$ является a-допустимой подгруппой. Но тогда $|N_G(A) : AC_G(A)| = r \cdot \left((p^n - 1)/(2, p^n - 1)\right)^2$, что невозможно. Если каждая из подгрупп G_1 и G_2 a-допустима и S_i — силовская p_i-подгруппа из G_i для $i = 1,2$, то для подгруппы $A = S_1 \times S_2$ выполняется равенство $|N_G(A) : AC_G(A)| = r \cdot \prod_{i=1}^{2} \left((p_i^{n_i} - 1)/(2, p_i^{n_i} - 1)\right)^2$.

Таким образом, $F^*(G) \cong PSL(2, p^n)$ при подходящих значениях p^n. Если A — силовская p-подгруппа из $F^*(G)$, то из $|N_G(A) : AC_G(A)| = 2(p^n - 1)/(2, p^n - 1)$ получим, что $(p^n - 1)/(2, p^n - 1)$ является простым числом, т.е. G — группа типа 6) из условия теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Smith S.D., Tyrer A.P.** On finite groups with a certain Sylow normalizer. I, II // J. Algebra. 1973. Vol. 26, no. 2. P. 343–365; ibid. Vol. 26, no .2. P 366–367.
2. **Антонов В.А.** Локально конечные группы с малыми нормализаторами // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 3. С. 296–302.
3. **Антонов В.А.** Локально конечные группы с малыми нормализаторами, 2 // Изв. вузов. Математика. 1989. № 1. С. 12–14.
4. **Аминева Н.Н., Антонов В.А.** О группах с относительно большими централизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 8. С. 1–8.
5. **Аминева Н.Н., Антонов В.А.** О группах с относительно большими централизаторами // Изв. вузов. Математика. 2003. № 7. С. 8–17. (Исправление: “Письмо в редакцию” // Изв. вузов. 2004. № 5. С. 90.)
6. **Amineva N.N., Antonov V.A.** On finite 2-groups with relatively large centralizers of noninvariant subgroups // Acta Appl. Math. 2005. Vol. 85, no. 1. P. 11–15.
7. **Антонов В.А., Ножкина Т.Г.** О конечных нильпотентных группах с относительно большими централизаторами неинвариантных подгрупп // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 12–16.
8. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
9. **Carter R.G.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 331 p.
10. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
11. **Huppert B.** Endliche Gruppen, I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
12. **Антонов В.А.** О группах с относительно малыми нормализаторами всех (всех абелевых) подгрупп // Теория групп и ее приложения: сб. тр. Восьмой междунар. шк.-конф. Нальчик: КБГУ, 2010. С. 8–17.

Антонов Владимир Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: ava@susu.ac.ru

Поступила 25.11.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.54

О КОНТРОЛЕ ПРОСТОГО СПЕКТРА КОНЕЧНОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ[1]

В. А. Белоногов

Множество $\pi(G)$ всех простых делителей порядка конечной группы G часто называют её простым спектром. Доказано, что каждая конечная простая неабелева группа G имеет секции $H_1,\ldots,H_m$ некоторого особого вида такие, что $\pi(H_1)\cup\ldots\cup\pi(H_m)=\pi(G)$ и $m\leq 5$, причем в случае, когда G — знакопеременная или классическая простая группа, $m\leq 2$. Кроме того, в любом случае секции H_i можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой, группой Фробениуса или (в одном случае) диэдральной группой. Если для конечной группы G выполнено записанное выше равенство, то мы говорим, что множество $\{H_1,\ldots,H_m\}$ контролирует простой спектр группы G. Изучается также некоторый параметр $c(G)$ конечных групп G, связанный с понятием контроля.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, простой спектр, максимальная подгруппа, секция группы.

V. A. Belonogov. On control of the prime spectrum of the finite simple groups.

The set $\pi(G)$ of all prime divisors of the order of a finite group G is often called its prime spectrum. It is proved that every finite simple nonabelian group G has sections $H_1,\ldots,H_m$ of some special form such that $\pi(H_1)\cup\ldots\cup\pi(H_m)=\pi(G)$ and $m\leq 5$, in the case when G is an alternating or classical simple group, in addition, $m\leq 2$. Moreover, in any case, it is possible to choose the sections H_i so that each of them is a simple nonabelian group, a Frobenius group, or (in one case) a dihedral group. If the above equality is realized for a finite group G, then we say that the set $\{H_1,\ldots,H_m\}$ controls the prime spectrum of G. We also study some parameter $c(G)$ of finite groups G related to the notion of control.

Keywords: finite group, simple group, prime spectrum, maximal subgroup, section of a group.

Введение

Пусть G — конечная группа. Множество $\pi(G)$ всех простых делителей её порядка будем называть *π-спектром* или, следуя фольклору, *простым спектром* группы G. Скажем, что подгруппы (или секции) $H_1,\ldots,H_m$ из G *контролируют простой спектр группы* G (или, для краткости, *контролируют* $\pi(G)$), если

$$\pi(H_1)\cup\ldots\cup\pi(H_m)=\pi(G). \qquad (0.1)$$

В этой ситуации можно сказать также, что множество $\{H_1,\ldots,H_m\}$ *контролирует* $\pi(G)$. Наименьшее из чисел m, для которых возможна описанная выше ситуация для некоторых собственных подгрупп H_i из G, обозначим через $c(G)$. Понятно, что определение $c(G)$ не зависит от того, собственные подгруппы или произвольные гомоморфные образы собственных подгрупп группы G допускаются в (0.1) в качестве H_i. Параметр $c(G)$ не определён лишь в случае, когда G не имеет собственных неединичных подгрупп, т. е. есть единичная группа или группа простого порядка.

В настоящей статье мы исследуем некоторые свойства конечных простых неабелевых групп, связанные с введёнными выше понятиями. Определённый интерес представляют ситуации, когда число m в (0.1) мало (например, равно $c(G)$) или же когда удаётся выбрать секции

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-10018) и НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

$H_1, \ldots, H_m$ некоторого специального, “хорошего”, вида, удобного для применения в той или иной конкретной ситуации.

В теоремах 1, 2, 3 настоящей статьи рассматриваются отдельно случаи, когда G — знакопеременная или классическая простая группа, простая исключительная группа лиева типа и спорадическая простая группа соответственно. В каждой из них получено равенство вида (0.1) для некоторых секций H_i собственных подгрупп группы G, причём всегда оказывается $m \leq 5$. Кроме того, показано, что в любом случае секции H_i можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой, группой Фробениуса или (в одном случае в теореме 1) диэдральной группой. Именно такой выбор оказался полезным в применении к одной конкретной ситуации в разд. 4 (см. предложения 2, 3 ниже).

Поскольку, очевидно, $\pi(G/\Phi(G)) = \pi(G)$ и гомоморфные образы собственных подгрупп группы $G/\Phi(G)$ являются одновременно гомоморфными образами собственных подгрупп группы G (см. лемму 1 ниже), то $c(G/\Phi(G)) = c(G)$, и, более того, заключения теорем 1–3 останутся справедливыми при условии, что не сама G, а лишь её факторгруппа $G/\Phi(G)$ предполагается простой группой с указанными свойствами.

По сказанному выше, $c(G) \leq 5$ для всех конечных простых неабелевых групп G. Более точная информация о значениях $c(G)$ для простых групп G приводится в следствиях теорем 1–3. Для многих из них оказывается, что $c(G) \leq 2$. Таковы все знакопеременные и все классические простые группы, исключительные группы $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)'$ и 19 спорадических групп: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, J_3, HS, He, Mc, Ru, $O'N$, Co_3, Co_2, Co_1, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, F_5. Максимальное число $c(G) = 5$ имеют только наибольшая группа Янко J_4 и, вероятно, группы $E_8(q)$. Для многих простых групп (в частности, для спорадических) получены точные значения $c(G)$, причём все значения от 1 до 5 встречаются.

Что касается непростых групп G, то для них, как правило, $c(G) \leq 2$, а именно,

если $c(G) \geq 3$, то $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа.

Действительно, если $G \triangleright N > \Phi(G)$, то $G = MN$ для некоторой максимальной подгруппы M из G и, следовательно, $c(G) \leq 2$. Из этого замечания и теорем 1–3 вытекает

Предложение 1. $\{m \in \mathbb{N} \mid m = c(G)$ *для некоторой конечной группы* $G\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Используемые далее понятия и обозначения, в основном, стандартны (см., например, [1–3]). В частности, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; *секция* группы G есть гомоморфный образ некоторой её подгруппы; если $n \in \mathbb{N}$, то $\pi(n)$ есть множество всех простых делителей числа n; если же π — множество простых чисел, то π' есть множество всех простых чисел, не содержащихся в π; группа называется *π-разложимой* (или *(π, π')-разложимой*), если она является прямым произведением π-группы и π'-группы; *группой Шмидта* называется конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны; $\dot\cup$ — знак объединения попарно непересекающихся множеств; запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n. Подгруппа H группы G называется *изолированной в* G, если $H \cap H^g = 1$ при всех $g \in G \setminus N_G(H)$ и $C_G(h) \subseteq H$ для всех $h \in H \setminus \{1\}$. Всюду в этой статье q есть степень простого числа.

Запись $G \doteq A.B$ (читается “G имеет тип $A.B$” или “G есть группа типа $A.B$”) означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения, а именно, полупрямого или прямого произведения, вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ или $\times$ соответственно. В правой части может быть большее число “множителей”. Например, запись $G \doteq A.B \leftthreetimes C.D$ означает, что $G \doteq ((A.B) \leftthreetimes C).D$ (скобки “привязаны” к левой стороне). (В Атласе [4] и многих других работах в подобных обозначениях вместо знака “$\leftthreetimes$” используется знак “:” .)

В заключительном разд. 4 настоящей статьи полученные результаты применяются для доказательства следующих двух предложений.

Предложение 2. *Пусть π — множество простых чисел. Для конечной не π-разложимой группы G равносильны условия*:

(1) *все максимальные подгруппы группы G π-разложимы*;

(2) *G — группа Шмидта.*

Этот результат выводится из теорем 1–3, классификации конечных простых групп [5] и статьи автора [6] (в которой он был доказан при условии, что фактор-группа $G/\Phi(G)$ непроста). Отметим, что предложение 2 является также следствием результатов статьи [6] и статьи З. Арада и Д. Чиллага [7], где также используется классификация конечных простых групп. В доказательстве, полученном в настоящей статье, используются другие идеи.

При $\pi = \{p\}$ это — известный результат И. К. Чунихиной и С. А. Чунихина [8]. При произвольном π и дополнительном предположении, что группа G обладает свойством D_π, этот результат был получен В. А. Ведерниковым [9].

Следующее предложение даёт критерий π-разложимости конечной группы.

Предложение 3. *Конечная группа π-разложима тогда и только тогда, когда каждая её подгруппа Шмидта π-разложима (и, следовательно, является π-группой или π'-группой).*

Отсюда следует, в частности, что конечная группа π-разложима, если каждая её бипримарная подгруппа π-разложима.

О некоторых результатах настоящей статьи сообщалось в [10; 11].

В заключение этого введения приведём три вспомогательных результата, первый из которых уже упоминался выше, а другие помогают в ряде случаев для рассматриваемой группы G найти точное значение $c(G)$.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа и $G_1 := G/\Phi(G)$. Тогда $\pi(G) = \pi(G_1)$ и если секции $S_1, \ldots, S_n$ собственных подгрупп группы G_1 контролируют $\pi(G_1)$, то существуют секции $T_1, \ldots, T_n$ собственных подгрупп группы G, которые контролируют $\pi(G)$, такие, что $T_i \simeq S_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. В частности, $c(G) = c(G_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $\pi(G) = \pi(G_1)$ следует из леммы Фраттини [1, теорема 1.3.7]. Далее, если $G_1 > H_1 \rhd N_1$ и H, N — полные прообразы в G подгрупп H_1, N_1 соответственно относительно естественного гомоморфизма G на G_1, то

$$H_1/N_1 = (H/\Phi(G))/(N/\Phi(G)) \simeq H/N.$$

Следовательно, мы получим заключение леммы, если для каждой подгруппы S_i вида H_1/N_1 выберем в качестве T_i соответствующий (см. выше) фактор H/N. Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (теорема Жигмонди [12, теорема IX.8.3]). *Пусть $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $\pi(a^n - 1) \nsubseteq \cup_{i=1}^{n-1} \pi(a^i - 1)$;

(2) $a = 2^k - 1$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *и* $n = 2$ (*тогда* $\pi(a^2 - 1) = \pi(a - 1)$);

(3) $a = 2$ *и* $n = 6$ (*тогда* $\pi(a^6 - 1) \subset \pi(a^3 - 1) \cup \pi(a^4 - 1)$).

Лемма 3. *Пусть $a, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Равносильны условия*:

(1) $\pi(a^m + 1) \subseteq \cup_{i=1}^{m-1} \pi(a^i + 1)$;

(2) $a = 2$ *и* $m = 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (2), очевидно, следует (1). Предположим, что верно (1). Тогда при $n = 2m$ ввиду равенства $a^n - 1 = (a^m - 1)(a^m + 1)$ получаем

$$\pi(a^n - 1) \subseteq \pi(a^m - 1) \cup (\cup_{i=1}^{m-1} \pi(a^i + 1)) \subseteq \pi(a^m - 1) \cup (\cup_{i=1}^{m-1} \pi(a^{2i} - 1)) \subseteq \cup_{j=1}^{n-1} \pi(a^j - 1).$$

Поэтому при данных a и n не выполнено условие (1) леммы 2. Не выполнено также и её условие (2), так как $n = 2m > 2$. Следовательно, по заключению леммы 2 должно быть выполнено её условие (3), а значит, и условие (2) леммы 3. Лемма 3 доказана.

1. О подгруппах знакопеременных и классических простых групп

Конечные классические простые группы — это группы $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$, $P\Omega_n(q)$, $P\Omega_n^+(q)$ и $P\Omega_n^-(q)$ при некоторых ограничениях на n и q, исключающих непростоту группы. Эти ограничения указываются в теореме 1, причём в каждом пункте указаны также и ограничения, исключающие изоморфизм рассматриваемых групп с группами предыдущих пунктов. Причины этих ограничений объяснены в доказательстве соответствующего пункта.

Как уже отмечалось во введении, следующая теорема останется справедливой, если в её формулировке, а именно, в первом предложении и в пп. (1)–(7), заменить G на $G/\Phi(G)$ (считая, что G — конечная группа).

Теорема 1. *Пусть G — конечная знакопеременная или классическая простая группа. Тогда существует пара секций X и Y собственных подгрупп из G такая, что $\pi(X)\cup\pi(Y) = \pi(G)$ (допускается равенство $X = Y$). Более того, секции X и Y можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой, группой Фробениуса или (в одном случае) диэдральной группой. Ниже указаны примеры таких секций X, Y в G:*

(1) *если $G \simeq A_n$, где $n \geq 5$, то*

(а) *при непростом n $X = Y \simeq A_{n-1}$;*

(б) *при простом n $X \simeq A_{n-1}$ и $Y \simeq N_G(P) \doteq P \leftthreetimes Z_{(n-1)/2}$, где $|P| = n$ (группа Фробениуса);*

(2) *если $G \simeq PSL_n(q)$, где $n \geq 2$ и $(n,q) \notin \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,9),(4,2)\}$, то*

(а) *при $n = 2$ $X \simeq D_{2(q+1)/(2,q+1)}$, $Y \doteq Z_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/(2,q-1)}$ (группа Фробениуса);*

(б) *при непростом $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_m(q^r)$, где $n = mr$ и r — простое число;*

(в) *при простом $n \geq 3$ $X \simeq PSL_{n-1}(q)$ и $Y \doteq Z_{t/(t,q-1)} \leftthreetimes Z_n$, где $t = (q^n-1)/(q-1)$ (группа Фробениуса);*

(3) *если $G \simeq PSU_n(q)$, где $n \geq 3$ и $(n,q) \neq (3,2)$, то*

(а) *при чётном n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSL_{n/2}(q^2)$;*

(б) *при нечётном непростом n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_m(q^r)$, где $n = mr$ и r — простое число;*

(в) *при нечётном простом n $X \simeq PSU_{n-1}(q)$, $Y \doteq Z_{t/(t,q+1)} \leftthreetimes Z_n$, где $t = (q^n+1)/(q+1)$ (группа Фробениуса);*

(4) *если $G \simeq PSp_{2n}(q)$, где $n \geq 2$ и $(n,q) \neq (2,2)$, то*
$X \simeq PSp_{2n-2}(q)$ и $Y \simeq PSp_2(q^n)$;
при $n = 2$ $\pi(G) = \pi(Y)$;

(5) *если $G \simeq P\Omega_{2n+1}(q)$, где $n \geq 3$ и q нечётно, то*
$X \simeq P\Omega_{2n}^+(q)$ и $Y \simeq P\Omega_{2n}^-(q)$;
при чётном n $\pi(G) = \pi(Y)$;

(6) *если $G \simeq P\Omega_{2n}^+(q)$, где $n \geq 4$, то $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$ и $Y \simeq PSL_n(q)$;*
при чётном n $\pi(G) = \pi(X)$;

(7) *если $G \simeq P\Omega_{2n}^-(q)$, где $n \geq 4$, то*

(а) *при нечётном n $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq PSU_n(q)$;*

(б) *при чётном $n = 2m$ $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$, $Y \simeq P\Omega_{2m}^-(q^2)$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи 1–7.

Случай 1. Пусть $G = A_n$, где $n \geq 5$. ($A_4 \doteq E_4 \leftthreetimes Z_3 \neq E_4 \times Z_3$, $A_3 \simeq Z_3$.)

Если n не является простым числом, то, очевидно, $\pi(G) = \pi(A_{n-1})$, и верно утверждение (а) в (1).

Пусть $n = p$ — простое число и P — силовская p-подгруппа в A_p (циклическая группа порядка p). Здесь

$$\pi(G) = \pi(A_{p-1}) \cup \{p\} = \pi(A_{p-1}) \cup \pi(H) \quad \text{для любой } H \text{ с } P \leq H < G.$$

Хорошо известно и легко проверить, что $C_G(P) = P$, и тогда $N_G(P)/P$ изоморфна подгруппе из $Aut(P) \simeq Z_{p-1}$. Также понятно (или см. [3, теорема 2.4]), что $N_{S_p}(P) \doteq P \leftthreetimes Z_{p-1}$. И эта группа является группой Фробениуса, поскольку $C_G(P) = P$. Итак, выполнено условие (б) в (1), и, следовательно, верно утверждение (1) теоремы.

Случай 2. Пусть $G = PSL_n(q)$, где $n \geq 2$ и $(n, q) \notin \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 9), (4, 2)\}$. ($PSL_2(2) \simeq S_3$, $PSL_2(3) \simeq A_4, PSL_2(4) \simeq PSL_2(5) \simeq A_5$, $PSL_2(9) \simeq A_6$, $PSL_4(2) \simeq A_8$.)

Здесь $G = SL_n(q)/Z$, где $Z = Z(SL_n(q))$ — группа порядка $d := (n, q-1)$, и (порядки простых групп приведены, например, в [3–5])

$$|G| = \frac{1}{d} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n} (q^i - 1). \tag{1.1}$$

2(а). Если $n = 2$, то $|G| = q(q^2 - 1)/d$, и по [2, теорема II.8.27] максимальные подгруппы группы G могут быть лишь следующих типов: A_4, S_4, A_5, диэдральные группы $D_{2(q\pm1)/d}$, подгруппа Бореля B (группа Фробениуса порядка $q(q-1)/d$ [2, теорема II.7.2]) и группы $PSL_2(q_1)$ и $PGL_2(q_1)$ при некоторых q_1, делящих q. Поэтому $\pi(G) = \pi(2(q+1)) \cup \pi(B) = \pi(D_{2(q+1)/d}) \cup \pi(B)$, и, следовательно, верно утверждение (а) в (2) при $X = D_{2(q+1)/d}$ и $Y = B$. Легко увидеть (используя леммы 2 и 3), что здесь $c(G) = 2$.

(В равенстве $\pi(G) = \pi(D_{2(q+1)/d}) \cup \pi(B)$ вместо $D_{2(q+1)/d}$ можно взять её подгруппу порядка $2(q+1)_{2'}$, которая есть простая группа порядка 2 или группа Фробениуса.)

2(б). Пусть $n \geq 3$. Так как группа $SL_n(q)$ имеет подгруппу $H \simeq SL_{n-1}(q)$, то группа $G = SL_n(q)/Z$ имеет подгруппу $HZ/Z \simeq H/H \cap Z$ и, следовательно, имеет секцию $X \simeq PSL_{n-1}(q)$. Пусть $e := (n-1, q-1)$. Тогда

$$\frac{|G|}{|X|} = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\ldots(q^2 - 1)/d}{q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(q^{n-1} - 1)\ldots(q^2 - 1)/e},$$

откуда $|G| = |X| q^{n-1} \frac{q-1}{d} (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)e$, а так как $q(q-1)$ делит $|X|$ и $(d, e) = 1$, то

$$\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(t), \quad \text{где} \quad t = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1. \tag{1.2}$$

Заметим, что $(t, q-1) = (n, q-1) = d$, так как $t = (q^{n-1} - 1) + (q^{n-2} - 1) + \ldots + (q-1) + n$.

Пусть r — простое число, делящее n, и $n = mr$. Согласно [13, предложение 4.3.6] группа G имеет максимальную подгруппу $M \doteq Z_a.PSL_m(q^r).Z_b.Z_r$, где

$$a = \frac{(q^r - 1)(m, q-1)}{(q-1)d}, \quad b = \frac{(m, q^r - 1)}{(m, q-1)}.$$

Если $m > 1$, то $|PSL_m(q^r)|$ делится на $(q^r)^m - 1 = q^n - 1 = (q-1)t$ и из (1.2) следует, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $Y \simeq PSL_m(q^r)$. Следовательно, здесь верно утверждение (б) в (2).

Если $m = 1$, то $M \doteq Z_a.Z_r$, где $a = t/d = t/(t, q-1)$. При этом $|M|$ делится и на t, и на r, так как $d = (r, q-1)$ делит и $t = (q^{r-1} - 1) + \ldots + (q-1) + r$, и r. Так как $(a, r) = 1$, то $M = A \leftthreetimes R$, где $A \simeq Z_a$ и $R \simeq Z_r$. Если R централизует некоторый элемент простого порядка p из A, то, как легко увидеть, R централизует силовскую p-подгруппу P из M. Но тогда P является, очевидно, силовской p-подгруппой в G и содержится в центре своего нормализатора $N_G(P) = M$. По теореме Бернсайда [1, теорема 7.4.3] P имеет нормальное дополнение в G, что противоречиво. Поэтому $C_M(R) = R$ и, следовательно, M является группой Фробениуса. Итак, при $X \simeq PSL_{n-1}(q)$ и $Y = M$ выполнено утверждение (в) в п. (2).

Утверждение (2) теоремы доказано.

Случай 3. Пусть $G = PSU_n(q)$, где $n \geq 3$ и $(n, q) \neq (3, 2)$. ($PSU_2(q) \simeq PSL_2(q)$, группа $PSU_3(2) \doteq E_9 \leftthreetimes Q_8$ разрешима.)

Здесь $G = SU_n(q)/Z$, где $Z = Z(SU_n(q))$ имеет порядок $d := (n, q+1)$, и

$$|G| = \frac{1}{d}\, q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n} (q^i - (-1)^i).$$

Легко увидеть, что G имеет секцию $X \simeq PSU_{n-1}(q)$. Тогда

$$|X| = \frac{1}{e}\, q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{i=2}^{n-1} (q^i - (-1)^i), \text{ где } \ e = (n-1, q+1), \quad \text{и} \quad |G| = |X| q^{n-1} \frac{q^n - (-1)^n}{d} e. \quad (1.3)$$

Так как $q^{n-1}\dfrac{q+1}{d}$ делит $|X|$ и $(d, e) = 1$, то из (1.3) следует, что

$$\pi(G) = \pi(X) \cup \pi\Big(\frac{q^n - (-1)^n}{q+1}\Big). \quad (1.4)$$

Предположим, что n чётно (следовательно, $n \geq 4$). Тогда по (1.4) $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi\Big(\dfrac{q^n - 1}{q+1}\Big)$. Известно (см., например, [3, теорема 3.9]) что группа $GU_n(q)$ имеет подгруппу $GL_{n/2}(q^2)$. Поскольку эта подгруппа имеет тип $Z_{q-1}.PSL_{n/2}(q^2).Z_d$, то группа $G = PSU_n(q)$ имеет секцию $Y \simeq PSL_{n/2}(q^2)$. Так как $\dfrac{q^n - 1}{q+1}$ делит $|PSL_{n/2}(q^2)|$, то мы имеем $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$. Следовательно, верно утверждение (а) в (3).

Предположим теперь, что n нечётно. Тогда по (1.4)

$$\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(t), \quad \text{где } \ t = \frac{q^n + 1}{q+1}. \quad (1.5)$$

Пусть r — простое число, делящее n, и $n = mr$. Согласно [13, предложение 4.3.6] группа G имеет максимальную подгруппу $M \doteq Z_a.PSU_m(q^r).Z_b.Z_r$, где

$$a = \frac{q^r + 1}{q+1}\, \frac{(m, q+1)}{d}, \quad b = \frac{(m, q^r + 1)}{(m, q+1)}.$$

Если $m > 1$, то $|PSU_m(q^r)|$ делится на $(q^r)^m + 1 = q^n + 1$, согласно (1.5) $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(PSU_m(q^r))$ и при $Y = PSU_m(q^r)$ верно утверждение (б) в (3).

Если $m = 1$, то $M \doteq Z_a.Z_r$ при $a = t/d$, $|M|$ делится на t ($d = (r, q+1)$ делит (r, t), так как $t = (q^{r-1}-1) - (q^{r-2}+1) + \ldots + (q^2-1) - (q+1) - r)$, и, следовательно, по (1.5) $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(M)$. Теперь так же, как и в случае 2 (со ссылкой на теорему Бернсайда [1, теорема 7.4.3]), легко устанавливается, что M является группой Фробениуса. Поэтому верно утверждение (б) в п. (3).

Утверждение (3) теоремы доказано.

Случай 4. Пусть $G = PSp_{2n}(q)$, где $n \geq 2$, $(n, q) \neq (2, 2)$. ($PSp_2(q) \simeq PSL_2(q)$, $PSp_4(2) \simeq S_6$.)

Здесь $G = Sp_{2n}(q)/Z$, где $Z = Z(Sp_{2n}(q))$ имеет порядок $d := (2, q-1)$, и

$$|G| = \frac{1}{d}\, q^{n^2} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1).$$

Легко заметить, что G содержит секцию $X \simeq PSp_{2n-2}(q)$ (см., например, [3, теоремы 3.7, 3.8]). Тогда

$$|X| = \frac{1}{d}\, q^{(n-1)^2} \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1) \quad \text{и} \quad |G| = |X|\, q^{2n-1} (q^{2n} - 1).$$

Так как q делит $|X|$, то отсюда следует, что

$$\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(q^{2n} - 1). \tag{1.6}$$

По [2, теорема II.9.24] группа $Sp_{2mk}(q)$ имеет подгруппу, изоморфную $Sp_{2m}(q^k)$ при любых $m, k \in \mathbb{N}$. Следовательно, G имеет секцию $Y \simeq PSp_2(q^n) \simeq PSL_2(q^n)$. Так как $q^{2n} - 1$ делит $|Y|$, то отсюда и из (1.6) следует, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$.

При $n = 2$, очевидно, $\pi(G) = \pi(Y)$.

Утверждение (4) теоремы доказано.

Случай 5. Пусть $G = P\Omega_{2n+1}(q)$, где $n \geq 3$ и q нечётно. ($P\Omega_3(q) \simeq PSL_2(q)$, $P\Omega_5(q) \simeq PSp_4(q)$ и $P\Omega_{2n+1}(2^m) \simeq PSp_{2n}(2^m)$ при $m \in \mathbb{N}$.)

Здесь $G = \Omega_{2n+1}(q)/Z$, где $Z = Z(\Omega_{2n+1}(q)) \simeq Z_2$, и $\Omega_{2n+1}(q)$ есть подгруппа индекса 2 группы $SO_{2n+1}(q)$ (содержащейся в $SL_{2n+1}(q)$). Тогда

$$|G| = \frac{1}{2}\, q^{n^2} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1) = \frac{1}{2}\, q^{n^2} (q^n - 1)(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1). \tag{1.7}$$

Известно (см., например, [3, с. 75 или теорема 3.10]), что группа $GO_{2n+1}(q)$ имеет подгруппы, изоморфные $GO^+_{2n}(q)$ и $GO^-_{2n}(q)$. Поскольку $GO_{2n+1}(q) \doteq Z_2.G.Z_2$ и $(GO^\varepsilon_{2n}(q))' \doteq Z_2.P\Omega^\varepsilon_{2n}(q)$ при $\varepsilon = \pm 1$ [4, табл. 2 (с. xii)], то G имеет секции $X \simeq P\Omega^+_{2n}(q)$ и $Y \simeq P\Omega^-_{2n}(q)$. (Здесь $GO^\varepsilon_{2n}(q)$ означает $GO^+_{2n}(q)$ при $\varepsilon = +1$ и $GO^-_{2n}(q)$ при $\varepsilon = -1$; подобно — для $P\Omega^\varepsilon_{2n}(q)$.) При этом

$$|P\Omega^\varepsilon_{2n}(q)| = \frac{1}{d}\, q^{n(n-1)} (q^n - \varepsilon) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1), \quad \text{где } d = (4, q^n - \varepsilon) \;\; (\varepsilon = \pm 1). \tag{1.8}$$

Сравнивая формулы (1.7) и (1.8), непосредственно видим, что

$$\pi(G) = \pi(P\Omega^\varepsilon_{2n}(q)) \cup \pi(q^n + \varepsilon) \;\; \text{при любом} \;\; \varepsilon = \pm 1. \tag{1.9}$$

Так как $q^n + \varepsilon$ делит порядок $P\Omega^{-\varepsilon}_{2n}(q)$, то по (1.9) $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$.

При чётном n, как видно из (1.8), $q^n - 1$ делит $|P\Omega^-_{2n}(q)|$, но тогда по (1.9) $\pi(G) = \pi(Y)$.

Утверждение (5) теоремы доказано.

Случай 6. Пусть $G = P\Omega^+_{2n}(q)$, где $n \geq 4$. ($P\Omega^+_4(q) \simeq PSL_2(q) \times PSL_2(q)$ и $P\Omega^+_6(q) \simeq PSL_4(q)$.)

Тогда $G = \Omega^+_{2n}(q)/Z$, где $Z = Z(\Omega^+_{2n}(q)) \simeq Z_d$ при $d = (4, q^n - 1)$, и

$$|G| = \frac{1}{d}\, q^{n(n-1)} (q^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1). \tag{1.10}$$

Известно [3, теорема 3.12 или (3.34) и § 3.9.3], что группа G имеет секции $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$ и $Y \simeq PSL_n(q)$. Запишем их порядки:

$$|X| = \frac{1}{(2, q-1)}\, q^{(n-1)^2} \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1) \;\; \text{и} \;\; |Y| = \frac{1}{(n, q-1)}\, q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n} (q^i - 1).$$

Отсюда и из (1.10) непосредственно видно, что

$$\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(q^n - 1), \tag{1.11}$$

а так как $q^n - 1$ делит $|Y|$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$.

Если же число n чётно, то $q^n - 1$ делит $|X|$ и по (1.11) $\pi(G) = \pi(X)$.

Утверждение (6) теоремы доказано.

Случай 7. Пусть $G = P\Omega^-_{2n}(q)$, где $n \geq 4$. ($P\Omega^-_4(q) \simeq PSL_2(q^2)$, $P\Omega^-_6(q) \simeq PSU_4(q)$.)
Тогда $G = \Omega^-_{2n}(q)/Z$, где $Z = Z(\Omega^-_{2n}(q)) \simeq Z_d$ при $d = (4, q^n + 1)$, и

$$|G| = \frac{1}{d}\, q^{n(n-1)}(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1).$$

Согласно [3, теорема 3.11] G имеет секцию $X \simeq P\Omega_{2n-1}(q)$. Тогда при $e = (2, q-1)$

$$|X| = \frac{1}{e}\, q^{(n-1)^2} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1) \quad \text{и} \quad \frac{|G|}{|X|} = \frac{e}{d}\, q^{n+1}(q^n + 1).$$

Следовательно,

$$\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(q^n + 1). \tag{1.12}$$

Если число n нечётно, то согласно [3, теорема 3.11] группа G имеет секцию $Y_1 \simeq PSU_n(q)$ и $\pi(Y_1) \supseteq \pi(q^n + 1)$. Отсюда и из (1.12) следует, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y_1)$.

Если же $n = 2m$ чётно, то по [3, теорема 3.11] группа G имеет секцию $Y_2 \simeq P\Omega^-_{2m}(q^2)$ порядка, делящегося на $(q^2)^m + 1 = q^n + 1$. Следовательно, по (1.12) $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y_2)$.

Утверждение (7) теоремы доказано.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если G — конечная знакопеременная или классическая простая группа, то $c(G) \leq 2$. При этом $c(G) = 1$, если G изоморфна одной из групп: A_n при непростом n, $PSp_4(q)$, $P\Omega_{4n+1}(q)$ или $P\Omega^+_{4n}(q)$ при любых q или одной из групп $PSL_6(2)$, $PSU_3(3)$, $PSU_3(5)$, $PSU_4(2)$, $PSU_4(3)$, $PSU_5(2)$, $PSU_6(2)$, $PSp_6(2)$ и $\Omega_7(2)$.*

2. О подгруппах исключительных простых групп

Конечные простые исключительные группы лиева типа — это группы $Sz(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)'$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$ при некоторых ограничениях на q. Причины этих ограничений указаны ниже в доказательстве теоремы 2. В этой теореме для каждой из групп указывается некоторое множество её секций со свойствами, подобными свойствам секций классических групп в теореме 1. Но здесь часто требуется более двух секций — от двух до пяти (пять секций требуется только для групп $E_8(q)$). Подобно теореме 1, теорема 2 останется справедливой, если в её первом предложении и в выражениях “$G \simeq$” пп. (1)–(10) заменить G на $G/\Phi(G)$.

Теорема 2. *Пусть G — конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда существует пятёрка секций X, Y, Z, V, W собственных подгрупп группы G (среди которых могут быть равные) такая, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$. Более того, эти секции можно выбрать так, чтобы каждая из них была простой неабелевой группой или группой Фробениуса. Ниже указаны примеры таких секций в G:*

(1) если $G \simeq Sz(q)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ (все — группы Фробениуса); $c(G) = 3$;

(2) если $G \simeq G_2(q)$ с $q > 2$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq SL_3(q)$ и $Y \simeq SU_3(q)$; $c(G) = 2$ при $q > 3$ и $c(G_2(3)) = 1$;

(3) если $G \simeq {}^2G_2(q)$ с $q = 3^{2n+1} \geq 27$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, где $X \simeq PSL_2(q)$, $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$, $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ (Y, Z — группы Фробениуса); $c(G) = 3$;

(4) если $G \simeq {}^3D_4(q)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq SL_2(q^3)$ (или $G_2(q)$) и $Y \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$ (группа Фробениуса); $c(G) = 2$;

(5) если $G \simeq F_4(q)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, где $X \simeq \Omega_9(q)$ и $Y \simeq {}^3D_4(q)$;

(6) *если* $G \simeq {}^2F_4(q)$ *с* $q = 2^{2n+1} \geq 8$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, *где* $X \simeq Sz(q)$ (*или* $Sp_4(q)$), $Y \simeq SU_3(q)$, $Z \doteq Z_{q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ *и* $V \doteq Z_{q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1)} \leftthreetimes Z_{12}$ (Z, V — *группы Фробениуса*); $c(G) = 4$;

(6a) *если* $G \simeq {}^2F_4(2)'$, *то* $\pi(G) = \pi(X)$, *где* $X \simeq PSL_2(25)$;

(7) *если* $G = E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSL_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^+_{10}(q)$;

(8) *если* $G \simeq {}^2E_6(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^-_{10}(q)$;

(9) *если* $G \simeq E_7(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq E_6(q)$, $Y \simeq {}^2E_6(q)$, $Z \simeq PSL_2(q^7)$;

(10) *если* $G \simeq E_8(q)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, *где* $X \simeq E_7(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^4)$, $Z \simeq PSU_5(q^2)$, $V \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{30}$ *и* $W \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{30}$, *где* $a = q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1$ *и* $b = q^8-q^7+q^5-q^4+q^3-q+1$ (V, W — *группы Фробениуса*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующие случаи 1–10.

Случай 1. Пусть $G \simeq Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 8$. ($Sz(2) \doteq Z_5 \leftthreetimes Z_4$.)

Тогда $|G| = q^2(q-1)(q^2+1) = q^2(q-1)(q-\sqrt{2q}+1)(q+\sqrt{2q}+1)$, где множители q^2, $q-1$, $q+\sqrt{2q}+1$, $q-\sqrt{2q}+1$ попарно взаимно просты. Согласно работе М. Судзуки [14] (см. также [3, теорема 4.1]) каждая максимальная подгруппа группы G сопряжена в G с одной из подгрупп следующего списка:

(1) $B \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$ — группа Фробениуса;

(2) $D \simeq D_{2(q-1)}$;

(3) $F_+ \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ — группа Фробениуса;

(4) $F_- \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ — группа Фробениуса;

(5) $T_r \simeq Sz(q_0)$, где $q = q_0^r$, r — простое число и $q_0 > 2$.

Отсюда и из формулы для $|G|$ видно, что

$$\pi(G) = \pi(B) \cup \pi(F_+) \cup \pi(F_-) \tag{2.1}$$

и ни одну подгруппу здесь нельзя опустить. (В этом равенстве вместо B можно взять D, так как $\pi(D) = \pi(B)$.) Если бы было $c(G) < 3$, то мы имели бы: $q = q_0^r$, r нечётно, $q_0 > 2$ и $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(T_r)$, где X — одна из групп B, F_+, F_-, а $T_r \simeq Sz(q_0)$ — группа порядка $q_0^2(q_0-1)(q_0^2+1)$. По лемме 2 $\pi(q_0-1) \subset \pi(q-1)$, и потому можно считать, что $X = B$. Но тогда должно быть $\pi(q_0^2+1) = \pi(q^2+1)$, т. е. $\pi(q_0^2+1) = \pi((q_0^2)^r+1)$, что противоречит лемме 3. Таким образом, $c(G) = 3$.

Утверждение (1) теоремы 2 доказано.

Случай 2. Пусть $G \simeq G_2(q)$, где $q > 2$ ($G_2(2) \doteq PSU(3,3) \leftthreetimes Z_2$).

Тогда $|G| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$. Пусть $q = p^m$, где p — простое число и $m \in \mathbb{N}$. В [3, табл. 4.1] приведены полные списки максимальных подгрупп групп G (полученные в [15; 16]) отдельно для случаев $p = 2$, $p = 3$ и $p > 3$. В любом случае G имеет подгруппы $X \simeq SL_3(q)$ и $Y \simeq SU_3(q)$. Так как $|L| = q^3(q^3-1)(q^2-1)$ и $|U| = q^3(q^3+1)(q^2-1)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$.

Просматривая упомянутые выше списки максимальных подгрупп группы G (предварительно вычеркнув подгруппы H с $\pi(H) \subset \pi(M)$ для некоторых подгрупп M этого списка), легко увидеть, что при $q \neq 3$ группа G не имеет максимальных подгрупп групп M с $\pi(G) = \pi(M)$ (возможность $M = G_2(q_0)$ исключается леммами 2 и 3). Итак, при $q \neq 3$ $c(G_2(q)) = 2$.

Однако $c(G_2(3)) = 1$, так как $G_2(3)$ имеет максимальную подгруппу, изоморфную $PSL_2(13)$, и $\pi(G_2(3)) = \pi(PSL_2(13))$.

Утверждение (2) теоремы доказано.

Случай 3. Пусть $G \simeq {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{3n+1} \geq 27$. (${}^2G_2(3) \simeq P\Gamma L_2(8) \doteq PSL_2(8) \leftthreetimes Z_3$.)

Тогда

$$|G| = q^3(q-1)(q^3+1) = 2^3q^3\frac{q-1}{2}\,\frac{q+1}{4}\,(q+\sqrt{3q}+1)\,(q-\sqrt{3q}+1),$$

где все множители последнего разложения попарно взаимно просты. Согласно [16; 17] (см. также [3, теорема 4.2]) каждая максимальная подгруппа группы G сопряжена в G с одной из подгрупп следующего списка:

(1) $B \doteq P \leftthreetimes Z_{q-1}$, $|P| = q^3$;

(2) $D \simeq (E_4 \times D_{(q+1)/2}) \leftthreetimes Z_3$;

(3) $M \simeq Z_2 \times X$, где $X \simeq PSL_2(q)$;

(4) $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ — группа Фробениуса;

(5) $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ — группа Фробениуса;

(6) $R_r \simeq {}^2G_2(q_0)$, где $q = q_0^r$, r — простое число и $q_0 > 3$.

Подгруппы Y и Z — единственные в этом списке, порядок которых не взаимно прост с $q^2-q+1 = (q+\sqrt{3q}+1)(q-\sqrt{3q}+1)$. Поэтому они должны быть включены в искомое множество подгрупп, контролирующее $\pi(G)$. Поскольку множество $\pi(G) \setminus (\pi(Y) \cup \pi(Z)) = \pi(q^2-1) \setminus \{2\}$ не пусто и содержится в $\pi(X)$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$ и $c(G) = 3$. ($\pi(R_r)$ не может быть взято вместо $\pi(X)$ ввиду лемм 2 и 3.)

Утверждение (3) теоремы 2 доказано.

Случай 4. Пусть $G \simeq {}^3D_4(q)$.

Тогда $|G| = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$, причём $q^8+q^4+1 = (q^4-q^2+1)(q^4+q^2+1) = (q^4-q^2+1)(q^2-q+1)(q^2+q+1)$ делит $(q^4-q^2+1)(q^6-1)$. Таким образом, $\pi(G) = \pi(q) \cup \pi(q^6-1) \cup \pi(q^4-q^2+1)$. Список максимальных подгрупп группы G получен в [18] и приведён также в [3, теорема 4.3]. Если из этого списка выбросить все подгруппы M с $\pi(M) \subseteq \pi(G_2(q))$, кроме самой $G_2(q)$, то, как легко увидеть, в нём останутся лишь подгруппы $X \simeq G_2(q)$ с $\pi(X) = \pi(q) \cup \pi(q^6-1)$, $Y \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$ и $D_r \simeq {}^3D_4(q_0)$, где $q = q_0^r$ и r — простое число (если такие q_0 и r существуют). Ясно, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$. Согласно [19, табл. 1] группа G имеет холлову циклическую изолированную подгруппу порядка q^4-q^2+1 и, следовательно, Y — группа Фробениуса. Поскольку по лемме 2 $\pi(D_r) \neq \pi(G)$, то $c(G) = 2$.

(Вместо X можно взять также подгруппу $SL_2(q^3)$, имеющую такой же простой спектр.)

Утверждение (4) теоремы 2 доказано.

Случай 5. Пусть $G \simeq F_4(q)$.

Тогда $|G| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1) = q^{24}(q^8+q^4+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$. Группа $F_4(q)$ имеет секции $X \simeq \Omega_9(q)$ порядка $q^{16}(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$ и $Y \simeq {}^3D_4(q)$ порядка $q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$ (см. [20, табл. 2] или [3, теорема 4.4 и с. 158–159] или [21, табл. 5.1]). Сравнение порядков этих секций с порядком группы G показывает, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$.

Из полного списка максимальных подгрупп группы $G \simeq F_4(q)$ при $(q,6) = 1$ [3, теорема 4.4] следует, что в этом случае $c(G) = 2$.

Утверждение (5) теоремы 2 доказано.

Случай 6. Пусть $G \simeq {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

Тогда $|G| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$, где $q^6+1 = (q^2+1)(q^4-q^2+1)$, $q^2+1 = (q+\sqrt{2q}+1)(q-\sqrt{2q}+1)$ и $q^4-q^2+1 = ab$, где $a = q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)$ и $b = q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1)$, причём

$$\pi(G) = \{2\} \,\dot\cup\, \pi(q^6+1) \,\dot\cup\, \pi(q^3+1) \,\dot\cup\, \pi(q-1),$$

$$\pi(q^6+1) = \pi(q^2+1) \,\dot\cup\, \pi(q^4-q^2+1), \quad \text{и } \pi(q^4-q^2+1) = \pi(a) \,\dot\cup\, \pi(b).$$

Рассмотрим список $\mathcal{S}$ максимальных подгрупп группы G, полученный в [22] (см. также [3, теорема 4.5]). Из него видно, что группа G имеет максимальные подгруппы $Z = Z_a \leftthreetimes Z_{12}$ и $V = Z_b \leftthreetimes Z_{12}$, причём они — единственные в $\mathcal{S}$, порядок которых не взаимно прост с q^4-q^2+1. Поэтому они должны быть включены в искомое множество $\mathcal{K}$ подгрупп, контролирующее $\pi(G)$. Среди других подгрупп списка $\mathcal{S}$ имеется лишь одна подгруппа, а именно, $SU_3(q) \leftthreetimes Z_2$, порядок которой не взаимно прост с q^3+1. Мы должны включить её или её подгруппу $X = SU_3(q)$ в $\mathcal{K}$. Однако $\{X, Z, V\} \neq \mathcal{K}$, так как

$$\pi(G) \setminus (\pi(Z) \cup \pi(V) \cup (X)) = \pi(q^2+1).$$

Наконец, добавив ещё какую-нибудь секцию подгруппы из $\mathcal{S}$ порядка, делящегося на q^2+1, например, $Y = Sz(q)$ или $PSp_4(q)$ (подгруппа ${}^2F_4(q_0)$ с $q = q_0^r$, где r — простое число, отпадает по лемме 3), получим $\mathcal{K}$. Итак, $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$ и $c(G) = 4$.

Так как согласно [19, табл. 2] группа G имеет холловы циклические изолированные подгруппы порядков a и b, то Z и V — группы Фробениуса.

Утверждение (6) теоремы 2 доказано.

Случай 6a. Пусть $G \simeq {}^2F_4(2)'$ — простая группа Титса. Тогда $|G| = 2^{11}\cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$. Группа G имеет подгруппу, изоморфную $PSL_2(25)$ [4]. Очевидно, $\pi(G) = \pi(PSL_2(25))$.

Утверждение (6a) теоремы 2 доказано.

Случай 7. Пусть $G \simeq E_6(q)$.

Тогда

$$|G| = \frac{1}{(3, q-1)}\, q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$$

и группа G имеет секции $X \simeq F_4(q), Y \simeq PSL_3(q^3), Z \simeq P\Omega^+_{10}(q)$ (см. [21, табл. 5.1; 20, табл. 2]).

Поскольку $q^{12}-1$ делит $|X|$, q^9-1 делит $|Y|$ и $(q^8-1)(q^5-1)$ делит $|Z|$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$.

Утверждение (7) теоремы 2 доказано.

Случай 8. Пусть $G \simeq {}^2E_6(q)$.

Тогда

$$|G| = \frac{1}{(3, q+1)}\, q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$$

и группа G имеет секции $X \simeq F_4(q)$, $Y \simeq PSU_3(q^3)$, $Z \simeq P\Omega^-_{10}(q)$ (см. [21, табл. 5.1; 20, табл. 2]). Поскольку $q^{12}-1$ делит $|X|$, q^9+1 делит $|Y|$ и $(q^8-1)(q^5+1)$ делит $|Z|$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$.

Утверждение (8) теоремы 2 доказано.

Случай 9. Пусть $G \simeq E_7(q)$.

Тогда

$$|G| = \frac{1}{(2, q-1)}\, q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$$

и группа G имеет секции $X \simeq E_6(q)$, $Y \simeq {}^2E_6(q)$, $Z \simeq L_2(q^7)$ (см. [21, табл. 5.1]). Поскольку $|G|/|X| = \dfrac{(3, q-1)}{(2, q-1)}\, q^{27}(q^9+1)(q^{14}-1)(q^5+1)$, $|Y|$ делится на $(q^9+1)(q^5+1)$ и $|Z|$ делится на $q^{14}-1$, то $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$.

Утверждение (9) теоремы 2 доказано.

Случай 10. Пусть $G \simeq E_8(q)$.

Тогда $|G| = q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$ и группа G имеет секции $X \simeq E_7(q)$, $Y \simeq U_3(q^4)$, $Z \simeq U_5(q^2)$, а также максимальные подгруппы $V \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{30}$ и $W \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{30}$, где

$$a = \frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1} = q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1 \quad \text{и} \quad b = \frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1} = q^8-q^7+q^5-q^4+q^3-q+1$$

(см. [21, табл. 5.1 и 5.2]). Имеем

$$(2, q-1)|G|/|X| = q^{57}(q^{30}-1)(q^{12}+1)(q^{10}+1)/((q^{10}-1)(q^6-1)),$$

$$q^{15}-1=(q^5-1)(q^{10}+q^5+1)=(q^5-1)(q^2+q+1)b,$$
$$q^{15}+1=(q^5+1)(q^{10}-q^5+1)=(q^5+1)(q^2-q+1)a.$$

Поэтому $\pi(G)\setminus\pi(X)\subseteq\pi(ab(q^{12}+1)(q^{10}+1))$. Кроме того, $|Y|$ делится на $q^{12}+1$ и $|Z|$ делится на $q^{10}+1$. Из последних двух предложений следует, что $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)\cup\pi(Z)\cup\pi(V)\cup\pi(W)$. Так как согласно [19, табл. 2] группа G имеет холловы циклические изолированные подгруппы порядков a и b, то M_+ и M_- — группы Фробениуса. Утверждение (10) подтверждено.

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Для любой конечной простой группы G исключительного лиева типа $c(G)\le 5$. При этом*

$c(G)=1$, если G есть $G_2(3)$ или группа Титса ${}^2F_4(2)'$;
$c(G)=2$, если G есть $G_2(q)$ при $q>3$ или ${}^3D_4(q)$;
$c(G)\le 2$, если $G=F_4(q)$ ($c(G)=2$ при $(q,6)=1$);
$c(G)=3$, если G есть $Sz(q)$ для $q>2$ или ${}^2G_2(q)$ для $q>3$;
$c(G)\le 3$, если G есть $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или $E_7(q)$;
$c(G)=4$, если $G={}^2F_4(q)$ и
$c(G)\le 5$, если $G=E_8(q)$.

3. О подгруппах спорадических простых групп

Подобно теоремам 1 и 2 следующая теорема останется справедливой, если в её формулировке, а именно, в первом предложении и в выражениях “$G\simeq$” пп. (1)–(26), заменить G на $G/\Phi(G)$.

Теорема 3. *Пусть G — спорадическая простая группа. Тогда справедливы следующие утверждения, где X, Y, Z, V, W есть некоторые секции собственных подгрупп группы G:*

(1) *если $G\simeq M_{11}$, то $\pi(G)=\pi(X)$, где $X\simeq PSL_2(11)$;*
(2) *если $G\simeq M_{12}$, то $\pi(G)=\pi(X)$, где $X\simeq M_{11}$;*
(3) *если $G\simeq M_{22}$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq PSL_2(11)$ и $Y\simeq A_7$;*
(4) *если $G\simeq M_{23}$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq M_{22}$ (или A_7) и $Y\doteq Z_{23}\leftthreetimes Z_{11}$ (группа Фробениуса);*
(5) *если $G\simeq M_{24}$, то $\pi(G)=\pi(X)$, где $X\simeq M_{23}$;*
(6) *если $G\simeq J_1$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)\cup\pi(Z)$, где $X\simeq PSL_2(11)$, $Y\doteq Z_7\leftthreetimes Z_6$ и $Z\doteq Z_{19}\leftthreetimes Z_6$ (Y и Z — группы Фробениуса);*
(7) *если $G\simeq J_2$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq PSL_2(7)$ и $Y\simeq A_5$;*
(8) *если $G\simeq J_3$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq PSL_2(17)$ и $Y\simeq PSL_2(19)$;*
(9) *если $G\simeq J_4$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)\cup\pi(Z)\cup\pi(V)\cup\pi(W)$, где $X\simeq L_2(23)$ (или M_{24}), $Y\simeq PSL_2(32)$ (или $PSL_5(2)$), $Z\simeq PSU_3(11)$, $V\doteq Z_{29}\leftthreetimes Z_{28}$ и $W\doteq Z_{43}\leftthreetimes Z_{14}$ (V и W — группы Фробениуса);*
(10) *если $G\simeq HS$, то $\pi(G)=\pi(X)$, где $X\simeq M_{22}$;*
(11) *если $G\simeq He$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq PSp_4(4)$ и $Y\simeq A_7$;*
(12) *если $G\simeq Mc$, то $\pi(G)=\pi(X)$, где $X\simeq M_{22}$;*
(13) *если $G\simeq Suz$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq G_2(4)$, $Y\simeq M_{11}$ (или $Z_{11}\leftthreetimes Z_{10}$);*
(14) *если $G\simeq Ly$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)\cup\pi(Z)$, где $X\simeq G_2(5)$, $Y\doteq Z_{37}\leftthreetimes Z_{18}$ и $Z\doteq Z_{67}\leftthreetimes Z_{22}$ (Y и Z — группы Фробениуса);*
(15) *если $G\simeq Ru$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq PSL_2(29)$ и $Y\simeq Sz(8)$;*
(16) *если $G\simeq O'N$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq J_1$ и $Y\simeq PSL_2(31)$;*
(17) *если $G\simeq Co_3$, то $\pi(G)=\pi(X)$, где $X\simeq M_{23}$;*
(18) *если $G\simeq Co_2$, то $\pi(G)=\pi(X)$, где $X\simeq M_{23}$;*
(19) *если $G\simeq Co_1$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq Co_2$ и $Y\simeq Suz$;*
(20) *если $G\simeq Fi_{22}$, то $\pi(G)=\pi(X)\cup\pi(Y)$, где $X\simeq M_{22}$ и $Y\simeq\Omega_7(3)$;*

(21) *если* $G \simeq Fi_{23}$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq Fi_{22}$, $Y \simeq Sp_8(2)$ *и* $Z \simeq M_{23}$;

(22) *если* $G \simeq Fi'_{24}$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq Fi_{23}$ *и* $Y \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{14}$ (*группа Фробениуса*);

(23) *если* $G \simeq F_5\,(= HN)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, *где* $X \simeq A_{12}$ *и* $Y \simeq PSU_3(8)$;

(24) *если* $G \simeq F_3\,(= Th)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq PSL_5(2)$, $Y \simeq PSL_2(19)$ *и* $Z \simeq PSL_3(3)$;

(25) *если* $G \simeq F_2\,(= B)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z)$, *где* $X \simeq Fi_{23}$, $Y \simeq F_3$, $Z \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$ (*группа Фробениуса*);

(26) *если* $G \simeq F_1\,(= M)$, *то* $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V)$, *где* $X \simeq F_2$, $Y \simeq PSL_2(59)$, $Z \simeq PSL_2(71)$, $V \simeq \Omega_8^-(3)$ (*или* $V \doteq Z_{41} \leftthreetimes Z_{40}$ (*группа Фробениуса*)).

В каждом из утверждений (1)–(26) *выбрано минимальное число секций собственных подгрупп группы* G, *контролирующих её простой спектр, и каждая из этих секций является либо простой неабелевой группой, либо группой Фробениуса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы предполагаем, что читатель имеет под рукой списки максимальных подгрупп спорадических простых групп (см. [4] или в более компактном и более полном виде [3]); в списке присутствует лишь один представитель класса сопряжённых максимальных подгрупп. Зная порядки рассматриваемых групп (см., например, [5, табл. I; 4]), записываем их простые спектры. При любом $i \in \{1, \ldots, 26\}$, просматривая список максимальных подгрупп соответствующей группы G,

записываем простые спектры этих подгрупп,

убеждаемся, что указанные в п. (i) группы X, Y, ... действительно являются секциями рассматриваемой группы G,

проверяем равенство $\pi(G) = \pi(X) \cup \ldots$, приведённое в п. (i),

и, наконец, используя список простых спектров максимальных подгрупп группы G, убеждаемся, что указанное в п. (i) число секций группы G, контролирующих её простой спектр, не может быть уменьшено (внимание к большим простым числам из $\pi(G)$ упрощает эту работу).

Рассмотрим подробнее, например, группы F_1 и J_4 с наибольшими значениями $c(G)$.

Пусть $G = F_1$. Обратим внимание на четыре наибольших простых делителя её порядка: $41, 47, 59, 71$. В списке известных максимальных подгрупп группы F_1 единственной подгруппой, порядок которой делится на 47, является группа $Z_2.F_2$, причём $\pi(G) \setminus \pi(Z_2.F_2) = \{29, 41, 59, 71\}$. Группа F_1 — единственная из спорадических простых групп, список $\mathfrak{A}$ известных максимальных подгрупп которой, возможно, не совпадает с (неизвестным пока) списком $\mathfrak{B}$ всех её максимальных подгрупп. Но в [3] указан некоторый список $\mathfrak{C}$ подгрупп из F_1 такой, что $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$. Поскольку порядок любой подгруппы из списка $\mathfrak{C}$ не делится ни на одно из чисел $29, 41, 47, 59, 71$, то мы можем не учитывать его в следующих рассуждениях. Равенство п. (26) теоремы 3 следует из того, что $29 \cdot 59$ делит $|PSL_2(59)|$, 71 делит $|PSL_2(71)|$ и 41 делит $|\Omega_8^-(3)|$. Наконец, в этом равенстве ни одна из групп F_2, $PSL_2(59)$, $PSL_2(71)$ не может быть опущена, так как они — единственные в списке максимальных подгрупп группы G, порядок которых делится на $47, 59$ и 71 соответственно, но

$$\pi(G) \setminus (\pi(F_2) \cup \pi(PSL_2(59)) \cup \pi(PSL_2(71)) = \{41\} \neq \varnothing.$$

И нам остаётся добавить ещё какую-нибудь секцию порядка, делящегося на 41, например, $\Omega_8^-(3)$ или $Z_{41} \leftthreetimes Z_{40}$. Итак, $c(F_1) = 4$.

Пусть $G = J_4$. Выписав множества $\pi(M)$ для всех 13 групп M из списка максимальных подгрупп группы G, проверяем равенство п. (9) теоремы. Отметим пять наибольших чисел из $\pi(G)$: $23, 29, 31, 37, 43$. Максимальные подгруппы $V \doteq Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}$ и $W \doteq Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}$ — единственные в списке максимальных подгрупп группы G, порядок которых делится на 29 и 43 соответственно, и потому не могут быть удалены из равенства п. (9) (могут быть лишь заменены меньшими подгруппами или секциями). Порядки точно двух максимальных подгрупп, а именно $PSU_3(11)$ и $Z_{37} \leftthreetimes Z_{12}$, делятся на 37. В п. (9) взята первая, имеющая больший простой спектр (т. е. строго содержащий простой спектр другой). (Выбирая подгруппу с меньшим простым спектром, мы могли бы получить число “слагаемых”, большее $c(G)$.) Далее, из точно двух максимальных подгрупп с порядками, делящимися на 23 ($E_{2^{11}} \leftthreetimes M_{24}$ и $PSL_2(23) \leftthreetimes Z_2$), мы можем выбрать любую, поскольку при любой $X \in \{M_{24}, PSL_2(23)\}$ (в п. (9) взято $X \simeq PSL_2(23)$) имеем

$$\pi(X) \cup \pi(PSU_3(11)) \cup \pi(Z_{29} \leftthreetimes Z_{28}) \cup \pi(Z_{43} \leftthreetimes Z_{14}) = \pi(G) \setminus \{31\} \neq \pi(G).$$

Отсюда следует, что $c(J_4) = 5$. В качестве пятой секции можно добавить $PSL_2(32)$ или $PSL_5(2)$.

Остаётся ещё убедиться, что встречающиеся в теореме секции типа $Z_a \leftthreetimes Z_b$ являются группами Фробениуса. Такие секции встречаются только в группах M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi'_{24}, F_2, причём в каждом случае a является простым числом. Из таблицы характеров любой такой группы G (см. [4]) непосредственно видно, что для любого такого a порядок централизатора в G любого элемента порядка a равен a. Это гарантирует, что рассматриваемая секция типа $Z_a \leftthreetimes Z_b$ группы G есть группа Фробениуса.

Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Пусть G — конечная спорадическая простая группа. Тогда $c(G) \leq 5$, а именно*:

$c(G) = 1$, *если G — одна из групп M_{11}, M_{12}, M_{24}, HS, Mc, Co_3, Co_2;*
$c(G) = 2$, *если G — одна из групп M_{22}, M_{23}, J_2, J_3, He, Suz, Ru, $O'N$, Co_1, Fi_{22}, Fi'_{24}, F_5;*
$c(G) = 3$, *если G — одна из групп J_1, Ly, Fi_{23}, F_3, F_2;*
$c(G) = 4$, *если $G \simeq F_1$;*
$c(G) = 5$, *если $G \simeq J_4$.*

4. Доказательство предложений 2 и 3

1. Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 2.

Как доказано в [6], предложение 2 справедливо в случае, когда факторгруппа $G/\Phi(G)$ непроста. Поэтому для завершения доказательства предложения 2 нам остаётся лишь доказать, что для π-неразложимой группы G с простой факторгруппой $G/\Phi(G)$ условие (1) не может быть выполнено.

Предположим (от противного), что $G/\Phi(G)$ проста и верно условие (1). Все максимальные подгруппы в $G/\Phi(G)$, очевидно, π-разложимы. Сама же группа $G/\Phi(G)$ не может быть π-разложимой, так как для любой конечной группы H из π-разложимости $H/\Phi(H)$ следует π-разложимость H (см., например, [23, лемма 4.4]). Поэтому в дальнейшем доказательстве мы можем предполагать, что $\Phi(G) = 1$, т. е. *группа G проста* и, очевидно, не абелева. Согласно классификации конечных простых групп [5] G удовлетворяет условию и, следовательно, заключению одной из теорем 1–3. Без ограничения общности далее считаем, что

$$2 \in \pi, \text{ и полагаем } \ \pi_2(G) := \pi \cap \pi(G) \ \text{ и } \ \pi_1(G) := \pi' \cap \pi(G).$$

Так как группа G не π-разложима, то

$$\text{множества } \pi_2(G) \text{ и } \pi_1(G) \text{ — непустые.} \tag{4.1}$$

Очевидно, что если K — подгруппа или даже секция группы G, не имеющая неединичных холловых прямых множителей нечётного порядка, и $K \neq G$, то $\pi(K) \subseteq \pi_2(G)$. Понятно также, что справедливо следующее чуть более общее утверждение.

$$\begin{array}{l}\text{Если секция } K \neq G \text{ группы } G \text{ не имеет неединичных холловых}\\ \text{прямых множителей } H \text{ с } \pi(H) \subseteq \pi_1(G), \text{ то } \pi(K) \subseteq \pi_2(G).\end{array} \tag{4.2}$$

Наша цель — максимально расширить множество $\pi_2(G)$, а именно, получить равенство $\pi_2(G) = \pi(G)$, которое противоречиво ввиду (4.1).

(i) Предположим, что G — классическая простая группа. Согласно теореме 1 группа G имеет секции X и Y такие, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)$, причём секция X — простая неабелева или диэдральная (в случае 2(а)) группа, а секция Y — простая неабелева группа или группа Фробениуса. Поэтому согласно (4.2) $\pi(X) \subseteq \pi_2(G)$. Если секция Y также проста, то по (4.2) $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y)) \subseteq \pi_2(G)$, а это противоречиво ввиду (4.1).

Следовательно, возможны лишь случаи 1(б), 2(а), 2(в) и 3(в), в которых Y есть группа Фробениуса. Так как группа Фробениуса не имеет собственных холловых прямых множителей, то по (4.2) либо $\pi(Y) \subseteq \pi_1(G)$, либо $\pi(Y) \subseteq \pi_2(G)$. Первая возможность отпадает в случаях 1(б) (поскольку $\pi((q-1)/2) \subseteq \pi(X))$ и 2(а) (из-за наличия в G диэдральной подгруппы порядка $q-1$). Покажем, что в каждом из случаев 2(в) и 3(в) $n \in \pi_2(G)$ (и тогда $\pi(Y) \nsubseteq \pi_1(G)$). Известно (см., например, [2, теорема II.7.2]), что нормализатор диагональной подгруппы в $GL_n(q)$ имеет секцию $S \simeq S_n$. Следовательно, группа $G = PSL_n(q)$ имеет секцию $A \simeq A_n$ и в случае 2(в) $n \in \pi_2(G)$, и, значит, $\pi(Y) \subseteq \pi_2(G)$. Подобно (или см. [3, теорема 3.9]) можно показать, что группа $G = PSU_n(q)$ имеет секцию, изоморфную A_n, и в случае 3(в) также $n \in \pi_2(G)$ и $\pi(Y) \subseteq \pi_2(G)$. В обоих случаях получаем противоречие с (4.1).

(ii) Предположим, что G — исключительная простая группа. Согласно теореме 2 группа G имеет собственные секции X, Y, Z, V, W (среди которых могут быть равные) такие, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, причём эти секции не имеют собственных холловых прямых множителей. Кроме того, просматривая случаи (1)–(10), мы видим, что каждая секция $H \in \{X, Y, Z, V, W\}$ имеет чётный порядок, и, следовательно, по (4.2) $\pi(H) \subseteq \pi_2(G)$. Поэтому в любом случае $\pi(G) \subseteq \pi_2(G)$, в противоречие с (4.1).

(iii) Предположим, что G — спорадическая простая группа. Согласно теореме 3 группа G имеет собственные секции X, Y, Z, V, W (среди которых могут быть равные) такие, что $\pi(G) = \pi(X) \cup \pi(Y) \cup \pi(Z) \cup \pi(V) \cup \pi(W)$, причём эти секции не имеют собственных холловых прямых множителей. Ввиду (4.2) дальнейшего рассмотрения требует лишь случай (25), в котором есть секция нечётного порядка $Z \doteq Z_{47} \leftthreetimes Z_{23}$. Так как $23 \in \pi(Fi_{23}) \subseteq \pi_2(G)$, то по (4.2) $\pi(Z) \subseteq \pi_2(G)$. Итак, в любом случае $\pi(G) \subseteq \pi_2(G)$, что противоречит (4.1).

Во всех случаях (i)–(iii) мы получили противоречие. Предложение 2 доказано.

2. Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 3.

Предположим, что все подгруппы Шмидта группы G π-разложимы. Тогда по предположению индукции все максимальные подгруппы группы G π-разложимы, и согласно предложению 2 G — группа Шмидта. Но мы предположили, что все подгруппы Шмидта группы G π-разложимы, так что и G π-разложима.

Обратно, если группа G π-разложима, то таковы же и все её подгруппы и, следовательно, каждая её подгруппа Шмидта π-разложима, а потому является π-группой или π'-группой. Предложение 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gorenstein D.** Finite Groups. New York: Harper & Row, 1968. 527 p.
2. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 793 S.
3. **Wilson R.A.** The finite simple groups. London: Springer, 2009. 298 p.
4. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
5. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. 1994. 165 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, no. 1.)
6. **Белоногов В.А.** О конечных группах, насыщенных (π, π')-разложимыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 3. С. 494–506.
7. **Arad Z., Chillag D.** A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. Vol. 87, no. 2. P. 472–482.
8. **Чунихина И.К., Чунихин С.А.** О p-разложимых группах // Мат. сб. 1944. Т. 15, № 2. С. 325–342.

9. **Ведерников В.А.** О π-свойствах конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп // Тр. Гомел. семинара Ин-та математики АН БССР. Минск, 1986. С. 13–19.
10. **Белоногов В.А.** О подгруппах конечных знакопеременных и классических простых групп // Алгебра и линейная оптимизация: тез. Междунар. конф., посвящ. 100-летию С.Н. Черникова. Екатеринбург: Изд-во УМЦ-УПИ, 2012. С. 14.
11. **Belonogov V.A.** Finite groups all of whose maximal subgroups are π-decomposable // Теория групп и её приложения.: тез. IX Междунар. конф. по теории групп, посвящ. 90-летию со дня рождения проф. З. И. Боревича / Северо-Осетин. гос. ун-т. Владикавказ, 2012. С. 126–127.
12. **Huppert B., Blackburn N.** Finite Groups. II. Berlin: Springer, 1982. 531 p.
13. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 303 p. (London Math. Soc. Lect. Note Series; vol. 129.)
14. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
15. **Cooperstein B.N.** Maximal subgroups of $G_2(2^n)$ // J. Algebra. 1981. Vol. 70, no. 1. P. 23–36.
16. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the finite Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 117, no. 1. P. 30–71.
17. **Левчук В.М., Нужин Я.Н.** О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.
18. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the Steinberg triality groups ${}^3D_4(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 115, no. 1. P. 182–199.
19. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
20. **Кондратьев А.С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
21. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65. P. 297–325.
22. **Malle G.** The maximal subgroups of ${}^2F_4(q)$ // J. Algebra. 1991. Vol. 139, no. 1. P. 52–69.
23. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 20.08.12

Том 19 № 3 2013

УДК 512.544

ГРУППЫ С ФИНИТАРНЫМИ КЛАССАМИ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. В. Беляев

Класс сопряженных элементов группы будем называть финитарным, если действие группы сопряжением индуцирует группу финитарных подстановок этого класса. Группу с финитарными классами сопряженных элементов будем называть ФС-группой. В данной работе получены некоторые характеризации ФС-групп в классе всех групп. Также показано, что любая ФС-группа либо является FC-группой, т. е. группой с конечными классами сопряженных элементов, либо ее строение близко к строению вполне импримитивной группы финитарных подстановок.

Ключевые слова: группы финитарных подстановок, обобщенные FC-группы.

V. V. Belyaev. Groups with finitary classes of conjugate elements.

A class of conjugate elements of a group is called finitary if the action of group by conjugation induces a group of finitary permutations of this class. A group with finitary classes of conjugate elements will be called a ΦC-group. Some characterizations of ΦC-groups in the class of all groups are obtained. It is also shown for every ΦC-group that either it is an FC-group, i.e., a group with finite classes of conjugate elements, or its structure is close to the structure of a totally imprimitive group of finitary permutations.

Keywords: finitary permutation groups, generalized FC-groups.

1. Введение

Пусть G — произвольная группа и $g \in G$. Класс сопряженных с g элементов будем называть *финитарным*, если группа подстановок, индуцируемая сопряжением G на классе g^G, является финитарной. Очевидно, финитарность класса g^G равносильна тому, что любой элемент группы G перестановочен почти с каждым сопряженным с g элементом. Ради краткости в дальнейшем группу G будем называть ФС-*группой*, если любой класс сопряженных в G элементов является финитарным. ФС-группу, не являющуюся FC-группой, будем называть Ф-*группой*.

На ФС-группу можно смотреть как на некоторое обобщение FC-группы, т. е. группы с конечными классами сопряженных элементов. Как и класс FC-групп, класс ФС-групп замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов (это очевидным образом следует из определения ФС-группы), но в отличие от класса FC-групп, замкнутого также относительно операции прямого произведения, прямое произведение ФС-групп является ФС-группой только в двух случаях: либо все сомножители являются FC-группами, либо один из сомножителей есть Ф-группа, а все остальные сомножители являются абелевыми группами.

Наш интерес к ФС-группам вызван тесной связью, существующей между ФС-группами и группами финитарных подстановок. Более подробно эту связь мы обсуждаем во втором разделе работы, а здесь отметим лишь один факт: класс ФС-групп включает в себя не только FC-группы, но и вполне импримитивные группы финитарных подстановок.

В [3] было получено одно достаточное условие для финитарности классов сопряженных элементов. Это условие сформулировано в терминах соизмеримости подгрупп. Напомним, что подгруппы A и B произвольной группы мы называем *соизмеримыми*, если $A \cap B$ является подгруппой конечного индекса как в A, так и в B. В дальнейшем, говоря о множестве, состоящем из попарно соизмеримых подгрупп, мы для краткости опускаем слово "попарно". Пользуясь понятием ФС-группы, мы можем переформулировать теорему 3 из [3] следующим образом:

Теорема A. *Пусть G — произвольная группа, в которой*

1) *централизаторы всех неединичных элементов соизмеримы*;

2) *любой элемент содержится в нормальной* FC-*подгруппе.*

Тогда G является ФС-*группой.*

Два условия из теоремы A достаточно хорошо отражают особенности строения ФС-группы, являясь не только достаточными, но и близкими к необходимым условиями. Действительно, в ФС-группе централизаторы всех нецентральных элементов соизмеримы (предложение 3.1) и любой элемент содержится в нормальной FC-подгруппе (предложение 3.2). Таким образом, для групп с тривиальным центром два условия из теоремы A являются необходимыми и достаточными условиями финитарности всех ее классов сопряженных элементов. Более интересным фактом является то, что второе условие в теореме A в большинстве случаев лишнее. Это утверждение есть основной результат данной работы. Его точная формулировка такова:

Теорема 1.1. *Если в группе G централизаторы всех неединичных элементов бесконечны и соизмеримы, то G является* ФС-*группой.*

Понятно, что условие бесконечности централизаторов из теоремы 1.1 убрать нельзя, так как существуют не ФС-группы, в которых централизаторы всех неединичных элементов конечны и поэтому соизмеримы (см., например, [9]). Но в классе локально конечных групп требование бесконечности централизаторов является лишним и его можно удалить (предложение 6.1).

Обратим внимание на то, что в теореме 1.1 приводится лишь один из итоговых результатов, полученных при исследовании групп с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов. Для доказательства этой теоремы потребовался тщательный анализ строения ФС-групп. Вспомогательные результаты, изложенные в следующих двух разделах работы, также представляют самостоятельный интерес, так как они улучшают наше представление о строении ФС-групп, а в некоторых случаях и о строении групп финитарных подстановок.

2. Группы финитарных подстановок

ФС-группы возникают естественным образом при изучении групп финитарных подстановок. Для объяснения их появления в теории финитарных групп нам необходимо напомнить некоторые результаты из более ранних работ [4; 5].

Пусть G — произвольная группа подстановок множества Ω. Отображение $f : \Omega \to \Omega$ мы называем *G-предельным*, если для любого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Omega$ найдется такая подстановка $g \in G$, что $g|\Delta = f|\Delta$, т. е. $\alpha^f = \alpha^g$ для любой точки $\alpha \in \Delta$.

Если G — группа финитарных подстановок множества Ω, то, очевидно, совокупность всех финитарных G-предельных подстановок образует подгруппу G^* в $\mathrm{FSym}(\Omega)$, группе всех финитарных подстановок множества Ω. Эту группу G^* мы будем называть *финитарным замыканием* группы G. Понятно, что $G \leqslant G^*$ и $(G^*)^* = G^*$.

Согласно определению финитарного замыкания для любых $x, y \in G^*$ найдутся такие $x_1, y_1 \in G$, что ограничения подстановок x и x_1 на множество точек $\mathrm{supp}(x) \cup \mathrm{supp}(y)$ совпадают и ограничения подстановок y и y_1 на множество точек $\mathrm{supp}(x) \cup \mathrm{supp}(y) \cup \mathrm{supp}(x_1)$ также совпадают. В этом случае выполняется равенство $[x, y] = [x_1, y_1]$ и поэтому $[G^*, G^*] = [G, G]$. В частности, $G \trianglelefteq G^*$ и G/G^* — абелева группа.

Таким образом, подрастание группы G за счет добавления финитарных G-предельных подстановок происходит небольшое и переход от группы G к ее финитарному замыканию G^*, как правило, не добавляет серьезных проблем при исследовании строения группы. В дальнейшем группу G финитарных подстановок мы будем называть *финитарно замкнутой*, если $G = G^*$.

В работах [4; 5] начато изучение финитарно замкнутых групп финитарных подстановок, в ходе которого были получены следующие результаты.

Пусть G — финитарно замкнутая подгруппа из $\mathrm{FSym}(\Omega)$. Тогда найдется такое семейство $\{\Omega_i \,|\, i \in I\}$ подмножеств из Ω, образующих разбиение множества Ω, что подгруппы $G_i =$

$\{g \in G \mid \mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega_i\}$, $i \in I$, порождают всю группу G, причем действие групп G_i на множествах Ω_i имеет специальный характер одного из двух типов:

Тип A: Стабилизаторы всех точек из Ω_i в группе G_i, а следовательно и в группе G, соизмеримы. Другими словами, для любых точек $\alpha, \beta \in \Omega_i$ G_α-орбита точки β конечна. Таким образом, действие типа A можно описать в терминах подорбит: G_i — группа финитарных подстановок с конечными подорбитами на множестве Ω_i.

Тип B: Если разбить множество Ω_i на классы точек с соизмеримыми стабилизаторами, то, во-первых, эти классы конечны, во-вторых, само семейство этих классов бесконечно и, в третьих, G_i действует транзитивно на семействе этих классов.

Группы типа B допускают точное описание как с точки зрения внутреннего строения, так и с точки зрения подстановочного действия. Краткая формулировка этого описания, данного в работе [5], может быть представлена в следующем виде: любая финитарно замкнутая группа финитарных подстановок типа B подстановочно изоморфна ограниченному сплетению группы подстановок конечного множества и группы подстановок $\mathrm{FSym}(\Sigma)$ для некоторого бесконечного множества Σ.

Итак, изучение строения финитарно замкнутых групп финитарных подстановок свелось к рассмотрению групп типа A, т. е. групп с соизмеримыми стабилизаторами точек. В отличие от групп типа B вряд ли можно говорить о возможности конструктивного описания групп типа A. Здесь, видимо, речь может идти только об особых свойствах, выделяющих или даже характеризующих группы типа A в том или ином классе групп. И в первую очередь нас будут интересовать абстрактные групповые свойства групп типа A.

Уже самые поверхностные наблюдения дают нам ряд удивительных свойств групп типа A, отражающих весьма специфическое строение этих групп. Так, например, легко увидеть, что централизаторы всех неединичных элементов в группе типа A соизмеримы и поэтому централизатор любого неединичного элемента должен быть FC-группой. Другим свойством, общим для всех групп типа A, является финитарность классов сопряженных элементов; значит, некоторые этапы исследования групп типа A могут быть реализованы в рамках общей теории ФС-групп. Это исследование строения ФС-групп представлено в следующем разделе, а данный раздел будет посвящен рассмотрению ряда простых свойств ФС-групп финитарных подстановок, часть которых будет использована нами в дальнейшей работе.

Начнем мы с рассмотрения мощности групп финитарных подстановок типа A.

Лемма 2.1. *Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$ и Δ — произвольное бесконечное множество точек из Ω. Тогда для любого конечного подмножества $\Gamma \subseteq \alpha^G$ найдется такая точка $\beta \in \Delta$, что $\Gamma \subseteq \alpha^{G_\beta}$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{\alpha^x \mid x \in K\}$ для некоторого конечного подмножества K из G. Так как K состоит из финитарных подстановок и Δ — бесконечное множество, то найдется точка $\beta \in \Delta \cap \mathrm{fix}(K)$. Значит, $K \subseteq G_\beta$ и $\Gamma \subseteq \alpha^{G_\beta}$. □

Предложение 2.1. *Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$ и G-орбита точки α бесконечна. Тогда множество точек из Ω, стабилизаторы которых в группе G соизмеримы со стабилизатором точки α, не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть Δ — множество всех точек из Ω, стабилизаторы которых в группе G соизмеримы со стабилизатором точки α. Для любого натурального числа n положим

$$\Delta_n = \{\beta \in \Delta \mid |G_\beta : G_\alpha \cap G_\beta| = n\}.$$

Другими словами, Δ_n состоит из точек $\beta \in \Delta$, для которых G_β-орбита точки α имеет длину, равную n. Если Δ_n — бесконечное множество, то согласно лемме 2.1 любое конечное подмножество $\Gamma \subseteq \alpha^G$ содержится в G_β-орбите точки α для некоторой точки $\beta \in \Delta_n$. Но G_β-орбита точки α для любого $\beta \in \Delta_n$ согласно определению Δ_n имеет длину, равную n. Значит, $\left|\alpha^G\right| = n$, что противоречит условию леммы. Таким образом, множество Δ_n конечно для любого $n \in \mathbb{N}$ и поэтому множество Δ, совпадающее с объединением всех Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, не более чем счетно. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ и стабилизаторы в G всех точек из Ω соизмеримы. Тогда имеет место один из случаев*:

1) *множество Ω не более чем счетно и, в частности, группа G не более чем счетна*;
2) *G-орбиты всех точек из Ω конечны.*

Группа финитарных подстановок с конечными орбитами точек, понятно, может иметь любую мощность. Но при наложении определенных ограничений на группу ее мощность также может быть ограничена сверху.

Будем говорить, что группа G финитарных подстановок множества Ω *неразложима*, если для любого разбиения $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ из равенства $G = \langle G_{(\Omega_1)}, G_{(\Omega_2)}\rangle$ вытекает, что по крайней мере одна из подгрупп $G_{(\Omega_1)}$ или $G_{(\Omega_2)}$ является единичной.

Предложение 2.2. *Неразложимая финитарно замкнутая группа финитарных подстановок с конечными орбитами не более чем счетна.*

Доказательство. Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ и G удовлетворяет всем условиям предложения. Очевидно, нам достаточно рассмотреть случай $G \neq 1$, поэтому далее мы будем предполагать, что G — неединичная группа.

Сначала мы индуктивно определим бесконечную возрастающую последовательность неединичных конечных нормальных подгрупп $1 \neq G_1 \leqslant G_2 \leqslant \ldots \leqslant G_i \leqslant G_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant G$, удовлетворяющую для любого $i \in \mathbb{N}$ следующему условию:

$$G = G_{(\Delta_i)}\, G_{i+1}, \quad \text{где} \quad \Delta_i = \mathrm{supp}(G_i). \tag{A}$$

База индуктивного построения. В качестве G_1 мы можем взять любую неединичную конечную нормальную подгруппу из G. Напомним, что все G-орбиты конечны, поэтому группа G есть подпрямое произведение конечных групп. В частности, G — локально нормальная группа, и поэтому выбор G_1 возможен.

Шаг индуктивного построения. Пусть $i \geqslant 1$ и подгруппа G_i уже определена. Поскольку подгруппа G_i конечна, то множество $\Delta_i = \mathrm{supp}(G_i)$ также конечно и, следовательно, индекс $\left|G : G_{(\Delta_i)}\right|$ конечен. В силу локальной нормальности группы G найдется конечная нормальная подгруппа $G_{i+1} \trianglelefteq G$, содержащая G_i и удовлетворяющая условию (A).

Рассмотрим теперь подгруппу $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Подгруппа H, являющаяся объединением нормальных подгрупп G_i, также нормальна в G и поэтому множество $\Delta = \mathrm{supp}(H)$ является G-инвариантным. Следовательно, и $\Gamma = \Omega - \Delta$ есть G-инвариантное множество. Отсюда вытекает, что любая подстановка из G индуцирует финитарные подстановки множеств Δ и Γ и поэтому для любого $g \in G$ найдутся такие $a, b \in \mathrm{FSym}(\Omega)$, что $g = ab$, причем $\mathrm{supp}(a) \subseteq \Delta$ и $\mathrm{supp}(b) \subset G$. Покажем, что подстановка a является H-предельной.

Пусть Φ — произвольное конечное множество точек из Ω. Тогда пересечение $\Phi \cap \Delta$ также конечно и, следовательно, $\Phi \cap \Delta \subseteq \Delta_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Воспользовавшись условием (A), выберем такой элемент $h \in G_{i+1}$, что $g \in G_{(\Delta_i)}\, h$. Понятно, что ограничения действий подстановок h, g и a на Δ_i совпадают и, в частности, $h|\Phi \cap \Delta = a|\Phi \cap \Delta$. Более того, обе подстановки a и h действуют тождественно на $\Omega - \Delta$, откуда вытекает равенство $h|\Phi = a|\Phi$.

Таким образом, a — H-предельная подстановка и в силу финитарной замкнутости группы G принадлежит G. Заметим, что $b = a^{-1}g$. Значит, и подстановка b принадлежит G.

Итак, для любого $g \in G$ найдутся такие $a \in H^*$ и $b \in G_{(\Delta)}$, что $g = ab$. Отсюда очевидно следует, что $G = \langle G_{(\Delta)}, G_{(\Gamma)}\rangle$ и в силу неразложимости G одна из подгрупп $G_{(\Delta)}$ или $G_{(\Gamma)}$ тривиальна. Но $G_{(\Gamma)}$ содержит неединичную подгруппу H. Поэтому $G_{(\Delta)} = 1$ и подстановка b является тождественной. Значит, $G = H^*$ и, так как группа H не более чем счетна, то и ее финитарное замыкание, совпадающее с G, не более чем счетно. $\square$

Далее нам потребуется одна подстановочная характеризация групп типа A, справедливая не только для групп финитарных подстановок, но и для любой локально конечной группы подстановок. Ее доказательство основано на следующем утверждении.

Лемма 2.2. *Пусть G — локально конечная группа, $H_1, \ldots, H_n$ — семейство соизмеримых подгрупп из G, $H = \langle H_1, \ldots, H_n \rangle$ и $K = \bigcap_{i=1}^n H_i$. Тогда индекс $|H : K|$ конечен.*

Доказательство. Поскольку все подгруппы H_i, $1 \le i \le n$, соизмеримы, то индекс подгруппы K в H_i конечен для любого i и поэтому найдутся такие конечные подмножества $S_i \subseteq H_i$, что $H_i = S_i K = K S_i$. Отсюда следует, что $H = \langle S_i, K \,|\, i = 1, \ldots, n \rangle = \langle S_i \,|\, i = 1, \ldots, n \rangle K$. В силу локальной конечности группы G подгруппа $\langle S_i \,|\, i = 1, \ldots, n \rangle$ конечна и поэтому индекс подгруппы K в H конечен. □

Предложение 2.3. *Для локально конечной группы G подстановок множества Ω следующие два условия равносильны:*

1) *стабилизаторы в G всех точек из Ω соизмеримы;*

2) *для любого конечного $\Gamma \subseteq \Omega$ найдется такое конечное Δ, содержащее Γ, что $\Delta \cap \Delta^x = \varnothing$ или $\Delta = \Delta^x$ для любого $x \in G$.*

Доказательство. Пусть выполнено первое условие. Для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ положим $T(\alpha, \beta) = \{x \in G \,|\, \alpha^x = \beta\}$. Очевидно, множество $T(\alpha, \beta)$ либо пусто, либо совпадает с некоторым правым смежным классом группы G по стабилизатору G_α. Следовательно, множество $T = \bigcup_{\alpha, \beta \in \Gamma} T(\alpha, \beta)$ совпадает с объединением некоторого конечного семейства правых смежных классов группы G по подгруппам G_α, $\alpha \in \Gamma$. Пусть S — множество представителей этих смежных классов и $H = \langle T \rangle = \langle G_\alpha, S \,|\, \alpha \in \Gamma \rangle$.

Семейство подгрупп вида $x^{-1} G_\alpha x$, где $\alpha \in \Gamma$ и $x \in \langle S \rangle$, конечно и состоит из соизмеримых подгрупп. Отсюда в силу леммы 2.2 следует, что $G_{(\Gamma)}$ есть подгруппа конечного индекса в H и поэтому множество $\Delta = \bigcup_{h \in H} \Gamma^h$ конечно.

Очевидно, что $\Gamma \subseteq \Delta$. Покажем, что Δ удовлетворяет второму условию предложения 2.3. Пусть $\Delta \cap \Delta^x \ne \varnothing$ для некоторого $x \in G$. Тогда $\Gamma^a \cap \Gamma^{bx} \ne \varnothing$ для некоторых $a, b \in H$ и поэтому $bxa^{-1} \in T$. Значит, $x \in H$ и $\Delta^x = \Delta$.

Допустим теперь, что выполнено второе условие предложения 2.3. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется такое конечное $\Delta \subseteq \Omega$, содержащее α и β, что $\Delta \cap \Delta^x = \varnothing$ или $\Delta^x = \Delta$ для любого $x \in G$. Так как $\Delta \cap \Delta^x \ne \varnothing$ для любого $x \in G_\beta$, то $\Delta^x = \Delta$ для всех $x \in G_\beta$ и поэтому G_β-орбита точки α конечна. Это означает, что стабилизаторы в G любых двух точек из Ω соизмеримы. □

Следствие 2.2. *Для группы G финитарных подстановок множества Ω следующие два условия равносильны:*

1) *стабилизаторы в G всех точек из Ω соизмеримы;*

2) *для любого конечного $\Gamma \subseteq \Omega$ найдется такое конечное $\Delta \subseteq \Omega$, содержащее Γ, что $\Delta \cap \Delta^x = \varnothing$ или $\Delta = \Delta^x$ для любого $x \in G$.*

Следствие 2.3. *Для бесконечной транзитивной группы G финитарных подстановок множества Ω следующие два условия равносильны:*

1) *стабилизаторы в G всех точек из Ω соизмеримы;*

2) *G — вполне импримитивная группа.*

С помощью следствия 2.2 легко получить следующие свойства групп типа A.

Предложение 2.4. *Пусть G — группа финитарных подстановок с соизмеримыми стабилизаторами точек. Тогда*

1) *стабилизатор в G любой точки и централизатор в G любого неединичного элемента соизмеримы. В частности, централизаторы в G всех неединичных элементов соизмеримы и являются* FC-*группами*;

2) *нормальное замыкание в G любого конечного непустого подмножества $S \subseteq G$ есть прямая степень некоторой конечной группы. В частности, $\langle S^G \rangle$ — локально нормальная группа конечного периода*;

3) *G есть* ФС-*группа*;

4) *G есть* FC-*группа тогда и только тогда, когда все G-орбиты конечны*;

5) *G есть Ф-группа тогда и только тогда, когда все G-орбиты бесконечны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть g — произвольный неединичный элемент из G и $\Delta = \mathrm{supp}(g)$. Тогда $G_{(\Delta)} \leqslant \mathrm{C}_G(g) \leqslant G_{\{\Delta\}}$, откуда следует соизмеримость подгрупп $\mathrm{C}_G(g)$ и $G_{(\Delta)}$, а, значит, и соизмеримость $\mathrm{C}_G(g)$ и стабилизатора любой точки. Остальные утверждения п. 1) заключения предложения тривиальным образом следуют из соизмеримости централизаторов неединичных элементов и стабилизаторов точек.

2–3) Пусть S — произвольное конечное множество элементов из G и $\Gamma = \mathrm{supp}(S)$. С помощью следствия 2.2 найдем в Ω такое конечное подмножество Δ, содержащее Γ, что $\Delta \cap \Delta^x = \varnothing$ или $\Delta = \Delta^x$ для любого $x \in G$. Пусть $H = \langle S^x \mid x \in G_{\{\Delta\}} \rangle$. Понятно, что подгруппа H конечна и поэлементно перестановочна с любой сопряженной с ней подгруппой H^x, отличной от H. Более того, $\mathrm{supp}(H) \cap \mathrm{supp}(H^x) = \varnothing$. Следовательно, нормальное замыкание в G подгруппы H, совпадающее с нормальным замыканием в G множества S, есть прямое произведение всех сопряженных с H подгрупп.

Возьмем теперь произвольные $g \in G,\ s \in S$, и пусть $\{s^{x_i} \mid x_i \in G, i \in I\}$ — множество всех сопряженных с s элементов, неперестановочных с g. Тогда $\Delta^{x_i} \cap \mathrm{supp}(g) \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, откуда следует конечность семейства $\{\Delta^{x_i} \mid i \in I\}$, а, значит, и множества $\{s^{x_i} \mid i \in I\}$.

4) Если все G-орбиты конечны, то в силу финитарного действия группа G представима в виде подпрямого произведения конечных групп, индуцированных действием G на своих орбитах. Следовательно, G является FC-группой. Обратно, если G — FC-группа, то в силу соизмеримости стабилизаторов точек и централизаторов неединичных элементов любой стабилизатор имеет конечный индекс в G и поэтому все G-орбиты конечны.

5) Этот пункт непосредственно следует из предыдущего пункта, так как соизмеримость стабилизаторов точек влечет конечность всех G-орбит, если хотя бы одна G-орбита конечна. $\square$

Предложение 2.4 вызывает вопросы: верно ли обратное утверждение к п. 3) заключения, т. е. любая ли ФС-группа финитарных подстановок имеет соизмеримые стабилизаторы точек? Если нет, то насколько шире класс ФС-групп финитарных подстановок класса групп финитарных подстановок с соизмеримыми стабилизаторами точек?

Проанализировать поставленные вопросы (см. предложение 2.6) нам помогут следующие два утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть Ω — произвольное непустое множество, $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ — бесконечное семейство возможно совпадающих подмножеств множества Ω, состоящих из равного числа $n \in \mathbb{N}$ элементов. Тогда найдутся такие конечное подмножество $\Delta \subseteq \Omega$ и бесконечное подмножество $J \subseteq I$, что $\Delta_i \cap \Delta_j \subseteq \Delta$ для любых различных i и j из J.*

Д о к а з а т е л ь с т в о (индукцией по n). *База индукции.* Пусть $n = 1$ и $\Sigma = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$. Тогда для любого $\alpha \in \Sigma$ найдется такое $i = i(\alpha) \in I$, что $\{\alpha\} = \Delta_i$. Если Σ — конечное множество, то полагаем $\Delta = \Sigma$ и $J = I$. Если Σ — бесконечное множество, то полагаем $\Delta = \varnothing$ и $J = \{i(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma\}$. В обоих случаях Δ и J удовлетворяют заключению леммы.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$ и для всех значений индуктивного параметра, меньших n, заключение леммы справедливо.

Если найдется такое $\alpha \in \Omega$, что $I^* = \{i \in I \mid \alpha \in \Delta_i\}$ — бесконечное множество, то, применяя индуктивное предположение к бесконечному семейству подмножеств $\Delta_i^* = \Delta_i - \{\alpha\}, i \in I^*$, состоящих из $n-1$ элементов, выберем такие конечное $\Delta^* \subseteq \Omega$ и бесконечное $J^* \subseteq I^*$ подмножества, что $\Delta_i^* \cap \Delta_j^* \subseteq \Delta^*$ для любых i и j из J^*. Полагая в этом случае $\Delta = \Delta^* \cup \{\alpha\}$ и $J = J^*$, получаем требуемую пару Δ и J.

Если для любого $\alpha \in \Omega$ множество $\{i \in I \mid \alpha \in \Delta_i\}$ конечно, то для любого конечного подмножества $\Sigma \subseteq \Omega$ число подмножеств Δ_i, $i \in I$, имеющих общий элемент с Σ, конечно и поэтому мы можем выбрать из $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ бесконечную последовательность попарно непересекающихся подмножеств Δ_i. В этом случае $\Delta = \varnothing$ и J — множество индексов у выбранной последовательности подмножеств Δ_i. □

Предложение 2.5. *Финитарное замыкание* ФС*-группы финитарных подстановок также является* ФС*-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. нашлись такие ФС-группа $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ и $a, b \in G^*$, что $[a, b^{x_i}] \neq 1$ для некоторого бесконечного множества различных элементов b^{x_i}, где $x_i \in G^*$ и $i \in I$. С помощью леммы 2.3 для бесконечного семейства $\{\mathrm{supp}(b^{x_i}) \mid i \in I\}$ выберем такие конечное $\Delta \subseteq \Omega$ и бесконечное $I_i \subseteq I$ подмножества, что $\mathrm{supp}(b^{x_i}) \cap \mathrm{supp}(b^{x_j}) \subseteq \Delta$ для различных i и j из I_1.

Поскольку $a \in G^*$, то найдется такое $a_1 \in G$, что $a|\Delta = a_1|\Delta$. Пусть $a_2 = a_1^{-1}a$. Очевидно, что $\mathrm{supp}(a_2)$ — конечное множество, не имеющее общих точек с Δ. Значит, $I_2 = \{i \in I_1 \mid \mathrm{supp}(a_2) \cap \mathrm{supp}(b^{x_i}) \neq \varnothing\}$ — бесконечное множество.

Рассмотрим теперь семейство $\{\mathrm{supp}(a_1^{x_i^{-1}}) \mid i \in I_2\}$ и снова, пользуясь леммой 2.3, выберем такие конечное $\Gamma \subseteq \Omega$ и бесконечное $I_3 \subseteq I_2$ подмножества, что $\mathrm{supp}(a_1^{x_i^{-1}}) \cap \mathrm{supp}(a_1^{x_j^{-1}}) \subseteq \Gamma$ для различных i и j из I_3. Без потери общности можно считать, что $\mathrm{supp}(b) \subseteq \Gamma$.

Поскольку $b \in G^*$, то найдется такой $b_1 \in G$, что $b|\Gamma = b_1|\Gamma$. Пусть $b_2 = b_1^{-1}b$. Ясно, что $\mathrm{supp}(b_2)$ — конечное множество, не имеющее общих точек с Γ. Поэтому $I_4 = \{i \in I_3 \mid \mathrm{supp}(a_1^{x_i^{-1}}) \cap \mathrm{supp}(b_2) = \varnothing\}$ — бесконечное множество.

Наконец, из множества I_4 выберем подмножество $I_5 = \{i \in I_4 \mid [a_1, b_1^{x_i}] = 1\}$. Множество I_5 бесконечно, так как, во-первых, a_1 и b_1 — элементы ФС-группы, во-вторых, $\mathrm{supp}(b) \subseteq \mathrm{supp}(b_1)$ и поэтому среди элементов вида $b_1^{x_i}$, $i \in I_4$, бесконечно много различных и, в-третьих, элементы $b_1^{x_i}$, $x_i \in G^*$, сопряжены и в группе G, что, в свою очередь, следует из определения финитарного замыкания.

Согласно выбору множества I_5 для любого $i \in I_5$ имеем $\mathrm{supp}(a_1^{x_i^{-1}}) \cap \mathrm{supp}(b_2) = \varnothing$, откуда следует, что $\mathrm{supp}(a_1) \cap \mathrm{supp}(b_2^{x_i}) = \varnothing$ и, значит, элементы a_1 и $b_2^{x_i}$ перестановочны. Учитывая также перестановочность элементов a_1 и $b_1^{x_i}$ и разложение $b = b_1 b_2$, получаем $[a_1, b^{x_i}] = 1$ для любого $i \in I_5$.

Также для любого $i \in I_5$ имеем $\mathrm{supp}(a_2) \cap \mathrm{supp}(b^{x_i}) = \varnothing$. Следовательно, элемент $a = a_1 a_2$ перестановочен с b^{x_i} для любого $i \in I_5$, что противоречит неперестановочности a и b^{x_i} для любого $i \in I$. □

Предложение 2.6. *Пусть G — финитарно замкнутая* ФС*-группа финитарных подстановок множества Ω. Тогда имеет место один из двух случаев*:

1) *стабилизаторы в G всех точек из Ω соизмеримы*;

2) *существует такое нетривиальное разбиение $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, что подгруппы $G_i = \{g \in G \mid \mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega_i\}$, $i = 1, 2$, порождают всю группу G, причем G_1 — абелева, возможно тривиальная, группа, G_2 —* Ф*-группа и стабилизаторы в G_i всех точек из Ω_i соизмеримы для $i = 1, 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что стабилизаторы не всех точек из Ω соизмеримы. В этом случае согласно основной теореме из [4] найдется такое нетривиальное разбиение $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, $|I| \geqslant 2$, что подгруппы $G_i = \{g \in G \mid \mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega_i\}$, $i \in I$, порождают всю группу G и действие группы G_i на множестве Ω_i есть действие одного из типов A или B для любого $i \in \Omega$.

Группы типа B, очевидно, не являются ФС-группами, поэтому действие компоненты G_i на Ω_i имеет тип A для любого $i \in I$. Так как все G-орбиты не могут быть конечными, то найдется компонента $G_k,\ k \in I$, с бесконечной орбитой на множестве Ω_k. Положим $\Gamma = \Omega - \Omega_k$ и $H = \langle G_i \,|\, i \in I - \{k\}\rangle$. Если H — неабелева группа, то в ней найдутся неперестановочные элементы a и b. Беря в этом случае произвольный неединичный элемент $g \in G_k$, мы получаем бесконечное множество сопряженных в G элементов $\{ag^x \,|\, x \in G_k\}$, неперестановочных с элементом b, что противоречит условию предложения 2.6. Значит, H — абелева группа и ее орбиты на множестве Γ конечны. □

3. Свойства ФС-групп

Для доказательства теоремы 1.1, основного результата данной работы, нам потребуются несколько свойств ФС-групп, касающихся строения финитно аппроксимируемых и FC-разрешимых ФС-групп (следствие 3.1 и предложение 3.11).

Напомним, что семейство всех ФС-групп состоит из FC-групп и Ф-групп. Эти два подсемейства обладают рядом общих свойств, в которых отражается степень близости Ф-групп к FC-группам. В то же время Ф-группы имеют весьма специфические свойства, аналогичные свойствам вполне импримитивных групп финитарных подстановок, которые можно найти, например, в [8]. Схожесть в строении Ф-групп и вполне импримитивных групп финитарных подстановок не должна удивлять, так как подстановочное действие Ф-группы на любом бесконечном классе сопряженных элементов является вполне импримитивным (предложение 3.3). Заметим, что степень близости строения совершенной Ф-группы с тривиальным центром к строению группы финитарных подстановок настолько велика, что может даже возникнуть гипотеза о существовании точного финитарного подстановочного представления для этих Ф-групп. Отрицательный ответ на данное предположение может быть получен с помощью примера 6.4 из [6]. Тем не менее остается открытым

В о п р о с. *Верно ли, что коммутант произвольной Ф-группы есть гомоморфный образ некоторой группы финитарных подстановок?*

Помимо необходимых нам в работе свойств ФС-групп мы включили в этот раздел несколько элементарных свойств центра произвольной Ф-группы (предложения 3.12–3.14). Эти свойства в какой-то степени сводят общую задачу изучения строения Ф-групп к рассмотрению Ф-групп с тривиальным центром.

Во введении данной работы мы уже отмечали, что финитарность всех классов сопряженных элементов группы G равносильна следующему условию: для любых $x, y \in G$ множество элементов сопряженных с y и неперестановочных с x конечно. В дальнейшем это условие мы будем называть просто Ф-*условием.*

Кроме того, мы будем использовать еще один новый термин. Будем говорить, что подгруппа H группы G FC-*вложена* в G, если индекс $|H : \mathrm{C}_H(x)|$ конечен для любого $x \in G$.

Предложение 3.1. *В ФС-группе централизаторы нецентральных элементов соизмеримы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — ФС-группа и x, y — произвольные неперестановочные элементы из G. Тогда для любого $g \in \mathrm{C}_G(x)$ элемент y^g неперестановочен с x, так как $[x, y^g] = [x, y]^g \neq 1$ и согласно Ф-условию множество $\{y^g \,|\, g \in \mathrm{C}_G(x)\}$ конечно. Но

$$|\mathrm{C}_G(x) : \mathrm{C}_G(x) \cap \mathrm{C}_G(y)| = |\{y^g \,|\, g \in \mathrm{C}_G(x)\}|\,,$$

откуда следует, что централизаторы любых двух неперестановочных элементов из G соизмеримы.

Допустим теперь, что x, y — произвольные нецентральные элементы. Так как две собственные подгруппы не могут покрывать всю группу, то $\mathrm{C}_G(x) \cup \mathrm{C}_G(y) \neq G$. Значит, найдется элемент из G, неперестановочный и с x, и с y. Воспользовавшись тем, что соизмеримость — отношение эквивалентности, получаем соизмеримость $\mathrm{C}_G(x)$ и $\mathrm{C}_G(y)$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть G — ФС-группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *централизатор любого нецентрального элемента из G есть* FC-*группа*;

2) *любая* FC-*подгруппа* FC-*вложена в G*;

3) *любое конечное множество элементов из G содержится в нормальной* FC-*подгруппе из G*;

4) *любое конечное семейство* FC-*подгрупп порождает* FC-*подгруппу из G.*

Доказательство. Первое и второе утверждения вытекают тривиальным образом из предложения 3.1. Третье и четвертое утверждения, очевидно, справедливы для любой FC-группы. Значит, нам достаточно доказать последние два утверждения для Ф-групп.

Итак, пусть G — Ф-группа и a^G — некоторый бесконечный класс сопряженных в G элементов.

Сначала покажем, что для любого конечного подмножества $K \subset G$ группа $\langle K, \mathrm{C}_G(a)\rangle$ есть FC-группа. Действительно, согласно Ф-условию $S = \mathrm{C}_G(a) \cap a^G$ — бесконечное множество. Так как $\mathrm{C}_G(a)$ — FC-группа, а S — $\mathrm{C}_G(a)$-инвариантное подмножество из $\mathrm{C}_G(a)$, то S есть объединение бесконечного семейства конечных классов сопряженных в $\mathrm{C}_G(a)$ элементов. Снова воспользовавшись Ф-условием, выберем среди этих классов конечный класс C, поэлементно перестановочный с K. Тогда $\langle K, \mathrm{C}_G(a)\rangle \leqslant \mathrm{N}_G(C)$. В силу конечности класса C подгруппа $\mathrm{N}_G(C)$ соизмерима с централизатором любого нецентрального элемента из G и поэтому является FC-группой. Следовательно, и $\langle K, \mathrm{C}_G(a)\rangle$ — FC-группа.

Покажем теперь, что нормальное замыкание в G произвольного конечного подмножества $M \subset G$ является FC-группой. Действительно, согласно Ф-условию множество $K = M^G - \mathrm{C}_G(a)$ конечно и поэтому содержится в FC-группе $\langle K, \mathrm{C}_G(a)\rangle$. Следовательно, $\langle M^G\rangle$ — FC-группа.

Обратимся к последнему утверждению предложения. Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — произвольное конечное семейство FC-подгрупп. Так как эти подгруппы FC-вложены в G, то индекс $|H_i : \mathrm{C}_{H_i}(a)|$ конечен для $i = 1, \ldots, n$. Значит, найдется такое конечное подмножество $K \subset G$, что $\langle H_1, \ldots, H_n\rangle$ содержится в подгруппе $\langle K, \mathrm{C}_G(a)\rangle$, которая является FC-группой. Следовательно, $\langle H_1, \ldots, H_n\rangle$ — FC-группа. $\square$

Предложение 3.3. *Пусть G — Ф-группа и a — произвольный нецентральный элемент из G. Тогда*

1) *класс a^G счетен*;

2) *действие сопряжением группы G индуцирует на a^G вполне импримитивную группу финитарных подстановок*;

3) *ядро действия G на a^G, совпадающее с $\mathrm{C}_G(a^G)$, является FC-вложенной в G подгруппой.*

Доказательство. Если класс a^G конечен, то в силу предложения 3.1 любой нецентральный класс сопряженных в G элементов конечен, т. е. G — FC-группа, что противоречит условию. Значит, a^G — бесконечный класс и группа подстановок, индуцируемая действием G на a^G, является бесконечной группой. Соизмеримость централизаторов элементов из a^G может быть интерпретирована как соизмеримость стабилизаторов точек этой бесконечной транзитивной группы финитарных подстановок. Применяя следствие 2.3, получаем первые два утверждения предложения 3.3. Третье утверждение следует из первых двух утверждений предложения 3.2. $\square$

Предложение 3.4. *Пусть G — Ф-группа. Тогда для любого конечного подмножества $K \subset G$ справедливы следующие утверждения*:

1) *множество сопряженных с $\mathrm{C}_G(K)$ подгрупп покрывает группу G*;

2) *если $\mathrm{C}_G(K) \leqslant N \trianglelefteq G$, то $N = G$*;

3) $\mathrm{C}_G(K)\, G' = G$.

Доказательство. Понятно, что $\mathrm{Z}(G) \leqslant \mathrm{C}_G(K)$. Пусть g — произвольный нецентральный элемент из G. Так как согласно Ф-условию каждый элемент из K неперестановочен лишь с конечным числом элементов из g^G, а класс g^G по предложению 3.3 бесконечен, то найдется такой элемент $x \in G$, что $g^x \in \mathrm{C}_G(K)$. Следовательно, сопряженные с $\mathrm{C}_G(K)$ подгруппы покрывают G и первое утверждение предложения 3.4 справедливо.

Второе утверждение очевидным образом вытекает из первого, так как все сопряженные с $\mathrm{C}_G(K)$ подгруппы содержатся в N.

Наконец, обратимся к третьему утверждению. Подгруппа $\mathrm{C}_G(K)\,G'$ нормальна в G и содержит $\mathrm{C}_G(K)$. Применяя второе утверждение, получаем требуемое равенство $\mathrm{C}_G(K)\,G' = G$. □

Предложение 3.5. *Коммутант Ф-группы является Ф-группой.*

Доказательство. Предположим, что заключение неверно, т. е. существует Ф-группа G, коммутант которой есть FC-группа. Пусть a — произвольный нецентральный элемент из G. Тогда по предложению 3.4 $G = \mathrm{C}_G(a)\,G'$, а по предложению 3.2 G' — FC-вложенная подгруппа. Значит, $\mathrm{C}_G(a)$ — подгруппа конечного индекса в G, что противоречит счетности класса a^G (предложение 3.3). □

Предложение 3.6. *Любая подгруппа конечного индекса в Ф-группе также является Ф-группой.*

Доказательство. Пусть G — Ф-группа и H — подгруппа конечного индекса в G. Если H — FC-группа, то согласно предложению 3.2 H — FC-вложенная подгруппа и поэтому централизатор любого элемента из G имеет конечный индекс в G, т. е. G — FC-группа, что противоречит условию. Следовательно, H — Ф-группа. □

Предложение 3.7. *Любая нормальная Ф-подгруппа в Ф-группе G содержит G'.*

Доказательство. Пусть N — нормальная Ф-подгруппа в G. Нам необходимо показать, что $[x, y] \in N$ для любых $x, y \in G$. Если $y \in \mathrm{Z}(G)$, то $[x, y] = 1 \in N$. Пусть $y \notin \mathrm{Z}(G)$. Тогда согласно предложению 3.2 $\mathrm{C}_G(y)$ — FC-группа. Если y^N — конечное множество, то индекс $|N : \mathrm{C}_N(y)|$ конечен, т. е. Ф-группа N содержит FC-подгруппу $\mathrm{C}_N(y)$ конечного индекса, что невозможно по предложению 3.6. Значит, множество y^N бесконечно и мы, используя Ф-условие, можем найти такой элемент $g \in N$, что $[x, y^g] = 1$. Отсюда в силу нормальности подгруппы N следует, что $[x, y] \in N$. □

Предложение 3.8. *Любая подгруппа конечного индекса в Ф-группе G содержит G'.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа конечного индекса в G. Понятно, что H содержит нормальную в G подгруппу N конечного индекса, которая согласно предложению 3.6 является Ф-группой. Применяя предложение 3.7, получаем $G' \leqslant N \leqslant H$. □

Из предложения 3.8 вытекает

Следствие 3.1. *Финитно аппроксимируемая ФС-группа является FC-группой.*

Предложение 3.9. *Пусть G — Ф-группа. Тогда $G' = G''$.*

Доказательство. Из предложения 3.5 следует, что G'' есть Ф-группа. Воспользовавшись предложением 3.7, получим требуемое равенство. □

Предложение 3.10. *Пусть N — нормальная подгруппа в Ф-группе G, причем G/N — FC-группа. Тогда $G' \leqslant N$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения FC-группы следует, что пересечение всех подгрупп конечного индекса в факторгруппе G/N содержится в $\mathrm{Z}(G/N)$. В то же время это пересечение согласно предложению 3.8 содержит $(G/N)'$. Следовательно, G/N — абелева или двуступенно разрешимая группа и $G'' \subseteq N$. Применяя предложение 3.9, получаем включение $G' \leqslant N$. $\square$

Предложение 3.11. FC-*разрешимая* ФС-*группа является* FC-*группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что двуступенно FC-разрешимая ФС-группа является FC-группой.

Итак, пусть G — ФС-группа, $N \trianglelefteq G$, причем N и G/N — FC-группы. Если G не является FC-группой, то G — Ф-группа и по предложению 3.10 $G' \leqslant N$. Но тогда G' — FC-группа, что противоречит предложению 3.5. Значит, G — FC-группа. $\square$

Предложение 3.12. *Пусть G —* ФС-*группа, a — произвольный нецентральный элемент из G и черта $(\overline{})$ есть естественный гомоморфизм группы G на $G/\mathrm{Z}(G)$. Тогда индекс $|\,\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{a}) : \overline{\mathrm{C}_G(a)}|$ конечен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что образ централизатора $\mathrm{C}_G(a)$ в факторгруппе $\overline{G}$ содержится в $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{a})$, централизаторе образа элемента a. Пусть H — полный прообраз $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{a})$ в группе G. Нам необходимо доказать конечность индекса $|H : \mathrm{C}_G(a)|$, равного мощности множества $\{a^x \,|\, x \in H\}$. Так как $a \notin \mathrm{Z}(G)$, то в G найдется элемент b, неперестановочный с a. Заметим, что $[a, x] \in \mathrm{Z}(G)$ для любого $x \in H$ и поэтому $[a^x, b] = [a, b] \neq 1$. Но множество элементов, сопряженных с a и неперестановочных с b, конечно. Следовательно, множество $\{a^x \,|\, x \in H\}$ также конечно. $\square$

Из предложения 3.12 непосредственно вытекает

Предложение 3.13. *Пусть G —* ФС-*группа и $\overline{G} = G/\mathrm{Z}(G)$. Тогда*

1) *централизаторы всех неединичных элементов из $\overline{G}$ соизмеримы*;
2) *G —* FC-*группа тогда и только тогда, когда $\overline{G}$ —* FC-*группа*;
3) *если G —* Ф-*группа, то $\mathrm{Z}(\overline{G}) = 1$.*

Предложение 3.14. *Пусть G —* Ф-*группа. Тогда*

1) *G' — счетная локально конечная группа*;
2) $\mathrm{C}_G(G') = \mathrm{Z}(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство всех FC-подгрупп из G согласно предложению 3.2 локально покрывает G и поэтому коммутант группы G локально покрывается коммутантами FC-подгрупп из G. Но коммутант любой FC-группы локально конечен [7], откуда и следует локальная конечность G'.

Для доказательства счетности группы G' возьмем любой нецентральный элемент $a \in G$, и пусть T — множество представителей всех правых смежных классов группы G по подгруппе $\mathrm{C}_G(a)$. По предложению 3.3 как само множество, так и все классы t^G, $t \in T$, являются счетными множествами. Значит, нормальное замыкание $\langle T^G \rangle$ счетно. Из способа построения подгруппы $\langle T^G \rangle$ следует, что эта подгруппа не является FC-вложенной в G, а в силу предложения 3.2 $\langle T^G \rangle$ — Ф-группа. Значит, мы можем воспользоваться предложением 3.7, из которого следует, что $G' \leqslant \langle T^G \rangle$, а так как коммутант G' Ф-группы G бесконечен, то G' — счетная группа.

Второе утверждение предложения 3.14 вытекает из третьего утверждения предложения 3.4. Действительно, пусть $x \in \mathrm{C}_G(G')$. Тогда $\mathrm{C}_G(x) \geqslant G'$ и поэтому $G = \mathrm{C}_G(x)G' = \mathrm{C}_G(x)$, т. е. $x \in \mathrm{Z}(G)$. $\square$

4. Основная редукция

В этом разделе мы начинаем исследование строения групп с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов. Мы покажем, что такие группы являются ФС-группами в том случае, когда они содержат неединичные субнормальные FC-подгруппы. Более того, доказательство теоремы 1.1 будет сведено к нахождению неединичных субнормальных FC-подгрупп в локально конечных группах с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов.

Обратим внимание читателя на два факта, которые тривиальным образом следуют из определения соизмеримости и применяются везде без ссылок. Пусть G — группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов. Тогда, во-первых, в любой подгруппе $H \leqslant G$ централизаторы неединичных элементов из H также соизмеримы и, во-вторых, централизатор любого неединичного элемента из G является FC-группой.

Лемма 4.1. *Пусть G — группа с бесконечными соизмеримыми централизаторами неединичных элементов. Тогда*

1) *любое конечное семейство* FC-*подгрупп из G порождает* FC-*подгруппу*;

2) *G' — локально конечная группа.*

Доказательство. Сначала покажем, что любое конечное подмножество $K \subset G$ и любая FC-подгруппа $H \leqslant G$ порождают FC-подгруппы.

Действительно, если H — конечная группа, то в силу соизмеримости и бесконечности централизаторов неединичных элементов из G подгруппа $\mathrm{C}_G(K) \cap \mathrm{C}_G(H)$ содержит неединичный элемент G. Значит, подгруппа $\langle K, H\rangle$ содержится в FC-группе $\mathrm{C}_G(g)$ и поэтому также является FC-группой.

Пусть H — бесконечная FC-группа. В этом случае, так как индекс $|H : \mathrm{C}_H(K)|$ конечен, в $\mathrm{C}_H(K)$ найдется неединичная нормальная в H подгруппа, которая содержит неединичный конечный класс C сопряженных в H элементов. Заметим, что $\langle K, H\rangle \leqslant \mathrm{N}_G(C)$. В силу конечности C подгруппа $\mathrm{N}_G(C)$ соизмерима с централизатором любого неединичного элемента из G и поэтому является FC-группой. Следовательно, и $\langle K, H\rangle$ — FC-группа.

Покажем теперь, что любое конечное семейство FC-подгрупп $H_1, \ldots, H_n$ из G порождает FC-группу. С этой целью возьмем произвольный неединичный элемент $g \in G$. Поскольку индекс $|H_i : \mathrm{C}_{H_i}(g)|$ конечен для $i = 1, \ldots, n$, то найдется такое конечное подмножество $K \subset G$, что $\langle H_1, \ldots, H_n\rangle \leqslant \langle K, \mathrm{C}_G(g)\rangle$, и в силу доказанного $\langle H_1, \ldots, H_n\rangle$ — FC-группа.

Второе утверждение леммы следует из первого. Действительно, семейство всех FC-подгрупп согласно первому утверждению леммы образует локальное покрытие группы G и поэтому коммутант группы G локально покрывается коммутантами FC-подгрупп. Но коммутант любой FC-группы локально конечен [7], откуда и следует локальная конечность группы G'. □

Лемма 4.2. *Пусть G — произвольная группа, $x_1, \ldots, x_n$ — любые элементы из G и $\mathcal{L}$ — семейство подгрупп из G, индексы которых в G меньше n. Для $1 \le i, j \le n$ положим $\mathcal{L}_{ij} = \{H \in \mathcal{L} \mid x_i x_j^{-1} \in H\}$. Тогда $\mathcal{L} = \bigcup_{i \neq j} \mathcal{L}_{ij}$.*

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа из семейства $\mathcal{L}$. Так как индекс H в G меньше n, то для некоторых различных i и j справедливо равенство $Hx_i = Hx_j$. Отсюда и вытекает требуемое включение $x_i x_j^{-1} \in H$, т. е. $H \in \mathcal{L}_{ij}$. □

Лемма 4.3. *Если группа G с соизмеримыми централизаторами всех неединичных элементов содержит неединичную нормальную* FC-*подгруппу, то G —* ФС-*группа.*

Доказательство. Пусть N — неединичная нормальная FC-подгруппа в G. Если N — конечная группа, то из соизмеримости централизаторов неединичных элементов следует, что централизаторы всех элементов из G имеют конечный индекс в G, т. е. G — FC-группа. Поэтому далее мы будем предполагать, что N — бесконечная FC-группа. В частности, централизаторы элементов из G бесконечны и поэтому мы можем воспользоваться леммой 4.1.

Пусть g — произвольный элемент из G. Тогда $|N : \mathrm{C}_N(g)| < n$ для некоторого натурального числа n. Так как подгруппа N бесконечна, то в N можно выбрать n различных элементов $x_1, \dots, x_n$. Пусть $\mathcal{L} = \{\mathrm{C}_N(g^x) \,|\, x \in G\}$. В силу нормальности N имеем $|N : \mathrm{C}_N(g^x)| = |N : \mathrm{C}_N(g)| < n$, а по лемме 4.2 $\mathcal{L} = \bigcup_{i \neq j} \mathcal{L}_{ij}$, где $\mathcal{L}_{ij} = \{\mathrm{C}_N(g^x) \,|\, x \in G, x_i x_j^{-1} \in \mathrm{C}_N(g^x)\}$. Значит, $g^G \subseteq \bigcup_{i \neq j} \mathrm{C}_G(x_i x_j^{-1}) \subseteq \langle \mathrm{C}_G(x_i x_j^{-1}) \,|\, i \neq j \rangle = H$. Подгруппа H согласно лемме 4.1 является FC-группой как группа, порожденная конечным семейством FC-подгрупп. Следовательно, и $\langle g^G \rangle$ — FC-группа.

Таким образом, любой элемент из G содержится в нормальной FC-подгруппе из G. Применение теоремы A завершает доказательство леммы. □

Итак, проблема финитарности классов свелась к проблеме существования неединичных нормальных FC-подгрупп. Следующим шагом редукции является ослабление условия нормальности FC-подгруппы.

Лемма 4.4. *Если в группе G централизаторы неединичных элементов соизмеримы, то любая субнормальная* FC-*подгруппа из G содержится в нормальной* FC-*подгруппе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, достаточно доказать следующее: если $1 \neq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ и H — FC-группа, то $\langle H^G \rangle$ также FC-группа.

Пусть $N = \langle H^G \rangle$. Так как H — FC-группа и централизаторы неединичных элементов группы соизмеримы, то индекс $|H^g : H^g \cap H|$ конечен для любого $g \in G$. Следовательно, факторгруппа N/H порождается конечными нормальными подгруппами $H^g H/H$ и поэтому является FC-группой. Применяя предложение 3.11 к группе N, которая по лемме 4.3 является ФС-группой, мы получаем требуемое заключение: N есть FC-группа. □

Из лемм 4.3 и 4.4 вытекает

Лемма 4.5. *Если группа G с соизмеримыми централизаторами всех неединичных элементов содержит неединичную субнормальную* FC-*подгруппу, то G —* ФС-*группа.*

Из леммы 4.1 и 4.5 вытекает

Лемма 4.6. *Теорема* 1.1 *справедлива, если любая неединичная локально конечная группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов содержит неединичную субнормальную* FC-*подгруппу.*

5. Локально разрешимые группы

В этом разделе мы докажем существование неединичных абелевых нормальных подгрупп в локально разрешимых группах с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов. Для этого нам потребуется несколько новых понятий и вспомогательных результатов.

Пусть G — произвольная группа и $H \leqslant G$. Конечную подгруппу $K \leqslant G$ будем называть *сигнализатором* подгруппы H, если $K \cap H = 1$ и $H \leqslant \mathrm{N}_G(K)$. Сигнализатор K подгруппы H будем называть *точным*, если действие сопряжением группы H на K является точным, т. е. $\mathrm{C}_H(K) = 1$. Наконец, последовательность подгрупп $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$, мы будем называть *башней сигнализаторов*, если H_{i+1} — сигнализатор подгруппы $\langle H_1, \dots, H_n \rangle$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Лемма 5.1. *В периодической локально разрешимой группе, не содержащей неединичных абелевых нормальных подгрупп, для любой конечной подгруппы найдется точный нильпотентный сигнализатор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — периодическая локально разрешимая группа, не содержащая неединичных абелевых нормальных подгрупп, и H — произвольная конечная подгруппа в G. Понятно, можно считать, что $H \neq 1$.

Из условий, наложенных на группу G, следует, что в G нет неединичных нильпотентных нормальных подгрупп и, в частности, нормальное замыкание в G любого элемента $h \in H^{\#}$ не является нильпотентной подгруппой. Значит, для любого $h \in H^{\#}$ найдется такое конечное подмножество $S_h \subseteq G$, что $\{h^x \mid x \in S_h\}$ не является нильпотентной группой класса $\leqslant 2$.

Пусть $L = \langle h, S_h \mid h \in H^{\#}\rangle$ и K — произвольная максимальная нильпотентная подгруппа класса $\leqslant 2$ из L. Если $K \cap H$ содержит неединичный элемент h, то $\langle h^x \mid x \in S_h\rangle \leqslant K$, что противоречит выбору S_h. Значит, $K \cap H = 1$ и, учитывая очевидное включение $\mathrm{C}_L(K) \leqslant K$, мы получаем искомый точный нильпотентный сигнализатор K подгруппы H.

Лемма 5.2. *Пусть $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — башня сигнализаторов в некоторой группе $H = \langle H_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ и централизаторы в H элементов из $H_1^{\#}$ соизмеримы. Тогда найдется такое натуральное число $n > 1$, что $\mathrm{C}_{H_n}(x) = \mathrm{C}_{H_n}(y)$ для любых $x, y \in H_1^{\#}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соизмеримости централизаторов в H всех элементов из $H_1^{\#}$ следует, что $\mathrm{C}_H(H_1)$ — подгруппа конечного индекса в $\mathrm{C}_H(x)$ для любого $x \in H_1^{\#}$. Так как $\mathrm{C}_H(H_1) = \langle \mathrm{C}_{H_i}(H_1) \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ и $\mathrm{C}_H(x) = \langle \mathrm{C}_{H_i}(x) \mid i \in \mathbb{N}\rangle$, то индекс $|\mathrm{C}_H(x) : \mathrm{C}_H(H_1)| = \prod_{i=1}^{\infty} |\mathrm{C}_{H_i}(x) : \mathrm{C}_{H_i}(H_1)|$ конечен. Значит, найдется такое натуральное число $n(x)$, что $|\,\mathrm{C}_{H_i}(x) : \mathrm{C}_{H_i}(H_1)| = 1$ для всех $i \geqslant n(x)$. Полагая $n = \max\{n(x) \mid x \in H_1^{\#}\}$, получаем $\mathrm{C}_{H_n}(x) = \mathrm{C}_{H_n}(H_1) = \mathrm{C}_{H_n}(y)$ для любых $x, y \in H_1^{\#}$. □

Лемма 5.3. *Пусть конечная p-группа P действует на конечной p-группе Q, p — простое число, причем $\mathrm{C}_Q(P') = \mathrm{C}_Q(P)$. Тогда $\mathrm{C}_Q(P) = Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна и $\mathrm{C}_Q(P) \neq Q$. В этом случае $\mathrm{C}_L(P) \neq 1$ для $L = \mathrm{N}_Q(\mathrm{C}_Q(P))/\,\mathrm{C}_Q(P)$. Пусть K — полный прообраз подгруппы $\mathrm{C}_L(P)$ в группе $\mathrm{N}_Q(\mathrm{C}_Q(P))$. Группа P действует тождественно на $K/\,\mathrm{C}_Q(P)$ и $\mathrm{C}_Q(P)$ и поэтому ее коммутант P' действует тождественно на K, что противоречит условию леммы. □

Лемма 5.4. *Неединичная периодическая локально разрешимая группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов содержит неединичную абелеву нормальную подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что лемма неверна, т. е. найдется неединичная периодическая локально разрешимая группа G с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов, в которой нет неединичных абелевых нормальных подгрупп. В частности, G — неразрешимая группа и поэтому в G найдется конечная p-подгруппа P ранга $\geqslant 2$ для некоторого простого числа p. Очевидно, можно также считать, что P — неабелева группа в том случае, если G содержит неабелеву p-подгруппу.

Определим индуктивно башню сигнализаторов $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$, полагая, что $H_1 = P$ и H_{i+1} — произвольный точный нильпотентный сигнализатор подгруппы $\langle H_1, \ldots, H_i\rangle$, который для $i \geqslant 1$ найдется по лемме 5.1. С помощью леммы 5.2 выберем такое натуральное число $n > 1$, что $\mathrm{C}_{H_n}(x) = \mathrm{C}_{H_n}(y)$ для любых $x, y \in P^{\#}$.

Пусть Q — силовская q-подгруппа из H_n для произвольного $q \in \pi(H_n)$. Ясно, что $\mathrm{C}_Q(x) = \mathrm{C}_Q(y)$ для $x, y \in P^{\#}$ и Q — P-инвариантная подгруппа. Если $p \neq q$, то, так как P содержит нециклическую абелеву подгруппу, $Q = \langle \mathrm{C}_Q(x) \mid x \in P^{\#}\rangle = \mathrm{C}_Q(P)$, т. е. $[P, Q] = 1$. Если $p = q$ и P — неабелева группа, то равенство $[P, Q] = 1$ следует из леммы 5.3. Наконец, если $p = q$ и P — абелева группа, то согласно выбору P любая p-подгруппа из G абелева и поэтому $[P, Q] = 1$. Таким образом, $[P, Q] = 1$ для произвольной силовской подгруппы Q из H_n, откуда следует равенство $[P, H_n] = 1$, противоречащее выбору точного сигнализатора H_n. □

Лемма 5.5. *Пусть G — локально конечная группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов, причем G содержит неединичную локально разрешимую нормальную подгруппу. Тогда*

1) *G есть ФС-группа;*

2) *если группа G финитно аппроксимируема, то G — локально нормальная группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы 5.5 вытекает из лемм 5.4 и 4.5. Второе утверждение выводим из первого и следствия 3.1. □

6. Полупростые группы

Очевидно, любая локально конечная группа G содержит единственную максимальную нормальную локально разрешимую подгруппу, которую мы называем локально разрешимым радикалом группы G и обозначаем через $\mathrm{S}(G)$. Если $\mathrm{S}(G) = 1$ и $G \neq 1$, то группу G мы называем *полупростой.*

Из результатов предыдущих разделов (леммы 4.6 и 5.5) следует, что для завершения доказательства теоремы 1.1 нам достаточно рассмотреть случай полупростых локально конечных групп. При рассмотрении этого случая мы будем применять некоторые результаты из [2], в которых используется понятие s-диагональной подгруппы. Для определения s-диагональной подгруппы требуется несколько дополнительных понятий.

Пусть G — произвольная группа и $H \leqslant G$. Подгруппы A и B из G, удовлетворяющие условиям $[A,B] \leqslant A \cap B$, $H \leqslant AB$, $A \cap H = B \cap H = 1$, называются *H-парой.* В частности, подгруппы A и B, образующие H-пару, являются сигнализаторами подгруппы H. Если $A \cap B$ — разрешимая группа, то подгруппы A и B будем называть *H-парой с разрешимым пересечением.*

Подгруппу H будем называть *диагональной* в G, если в G найдется хотя бы одна H-пара. В случае существования H-пары с разрешимым пересечением подгруппу H будем называть s-*диагональной.* Заметим, что s-диагональность разрешимой подгруппы H равносильна существованию H-пары разрешимых подгрупп.

Лемма 6.1. *Полупростая локально конечная группа, в которой любая финитно аппроксимируемая p-подгруппа локально нормальна для любого простого числа p, содержит неединичную субнормальную подгруппу H, удовлетворяющую одному из условий:*

1) *в H любая конечная подгруппа* s-*диагональна*;

2) *H — простая группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательно применяя [2, леммы 3.8, 3.10 и 3.12], получаем требуемое заключение. □

Лемма 6.2 [1, теорема 1.4]. *Для бесконечной локально конечной простой группы G следующие условия эквивалентны*:

1) *G изоморфна знакопеременной группе подстановок бесконечного множества*;

2) *любая финитно аппроксимируемая подгруппа из G локально нормальна.*

Лемма 6.3. *Пусть G — полупростая локально конечная группа, в которой любая локально разрешимая финитно аппроксимируемая подгруппа локально нормальна. Тогда G содержит субнормальную простую подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы вытекает, что любая финитно аппроксимируемая p-подгруппа группы G локально нормальна для произвольного простого числа p и, следовательно, мы можем применить лемму 6.1, в силу которой группа G содержит неединичную субнормальную подгруппу H, удовлетворяющую одному из условий: 1) в H любая конечная подгруппа s-диагональна; 2) H — простая группа.

Нам достаточно показать, что случай 1) невозможен. С этой целью возьмем произвольную конечную неабелеву разрешимую подгруппу $K \leqslant H$. Понятно, что такая подгруппа найдется в любой локально конечной неабелевой, и тем более полупростой, группе, каковой является группа H в силу полупростоты G. Используя условие s-диагональности, индуктивно определим две башни сигнализаторов $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$, полагая, что $A_1 = B_1 = K$ и A_{i+1}, B_{i+1} —

произвольная K_i-пара конечных разрешимых подгрупп из H для $K_i = A_iB_i$ и $i \geqslant 1$. Из способа построения этих башен сигнализаторов вытекает, что группы $A = \langle A_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ и $B = \langle B_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ локально разрешимы и финитно аппроксимируемы и согласно условию леммы локально нормальны. Значит, найдется такое натуральное число n, что нормальные замыкания подгруппы K как в A, так и в B содержатся в $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ и в $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ соответственно. Следовательно,

$$[K, A_{n+1}] \leqslant \langle A_1, \ldots, A_n\rangle \cap A_{n+1} = 1 \quad \text{и} \quad [K, B_{n+1}] \leqslant \langle B_1, \ldots, B_n\rangle \cap B_{n+1} = 1$$

и поэтому $[K, K] \leqslant [K, A_{n+1}B_{n+1}] = 1$. Таким образом, K — абелева группа, что противоречит ее выбору. □

С помощью леммы 6.3 мы можем усилить второе утверждение леммы 5.5 следующим образом.

Лемма 6.4. *Пусть G — локально конечная финитно аппроксимируемая группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов. Тогда G — локально нормальная группа.*

Доказательство. Если $\mathrm{S}(G) \neq 1$, то G — локально нормальная группа согласно лемме 5.5. Пусть $\mathrm{S}(G) = 1$. С помощью леммы 6.3 в этом случае мы можем найти в G субнормальную простую подгруппу, которая должна быть финитно аппроксимируемой и поэтому конечной. Последовательно применяя леммы 4.5 и 3.1, получаем требуемое заключение. □

Лемма 6.5. *Неединичная локально конечная группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов содержит неединичную субнормальную* FC-*подгруппу.*

Доказательство. Пусть G — неединичная локально конечная группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов. Если $\mathrm{S}(G) \neq 1$, то, по лемме 5.4, $\mathrm{S}(G)$ содержит неединичную абелеву нормальную подгруппу, которая является искомой субнормальной FC-подгруппой в G.

Пусть $\mathrm{S}(G) = 1$. Так как по лемме 6.4 любая финитно аппроксимируемая подгруппа из G локально нормальна, то мы можем применить лемму 6.3, в силу которой группа G содержит субнормальную простую подгруппу H.

Если H — бесконечная группа, то согласно лемме 6.2 H изоморфна бесконечной знакопеременной группе. Но в бесконечной знакопеременной группе условие соизмеримости централизаторов неединичных элементов не выполнено. Значит, H — конечная группа, которая и является требуемой неединичной субнормальной FC-подгруппой в G. □

Лемма 6.5 согласно лемме 4.6 завершает доказательство теоремы 1.1.

Есть и другое полезное следствие леммы 6.5, которое можно получить с помощью леммы 4.5 и в котором условие бесконечности централизаторов отсутствует.

Предложение 6.1. *Локально конечная группа с соизмеримыми централизаторами неединичных элементов является* ФС-*группой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.В.** Локальные характеризации бесконечных знакопеременных групп и групп лиевского типа // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 4. С. 369–390.
2. **Беляев В.В.** Периодические полупростые группы конечных преобразований // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 17–33.
3. **Беляев В.В.** К вопросу о существовании минимальных не FC-групп // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1267–1270.
4. **Беляев В.В.** Прямые суммы финитарных групп подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 45–49.
5. **Беляев В.В.** Сплетения групп финитарных подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 38–43.

6. **Leinen F., Puglisi O.** Finitary representations and images of transitive finitary permutation groups // J. Algebra. 1999. Vol. 222, no. 2. P. 524–549.
7. **Neumann B.H.** Groups with finite classes of conjugate elements // Proc. London Math. Soc. (3). 1951. Vol. 1. P. 178–187.
8. **Neumann P.M.** The structure of finitary permutations groups // Arch. Math. 1976. Vol. 27, no. 1. P. 3–17.
9. **Ольшанский А.Ю.** Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 4. С. 785–787.

Беляев Виссарион Викторович
Поступила 20.05.2013
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: v.v.belyaev@list.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ РАЗРЕШИМЫХ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА[1]

Е. П. Вдовин

В работе доказано, что если холлова подгруппа почти простой группы, цоколь которой является исключительной группой лиева типа, разрешима, то существует четыре сопряженных с ней подгруппы, пересечение которых тривиально.

Ключевые слова: почти простая группа, размер базы, разрешимая холлова подгруппа.

E. P. Vdovin. On intersection of solvable Hall subgroups in finite simple exceptional groups of Lie type.

It is proved that, if a Hall subgroup of an almost simple group whose socle is an exceptional group of Lie type is solvable, then there exist four groups conjugate to it whose intersection is trivial.

Keywords: almost simple group, base size, solvable Hall subgroup.

Посвящается А. А. Махневу в связи с его 60-летием!

Введение

Везде в данной работе термин "группа" используется в значении "конечная группа". Мы используем обозначеня $A \leq G$ и $A \trianglelefteq G$, если A является подгруппой группы G и A является нормальной подгруппой группы G соответственно. Если Ω — (конечное) множество, то через $\mathrm{Sym}(\Omega)$ обозначена группа всех подстановок множества Ω. Мы также обозначаем $\mathrm{Sym}(\{1,\dots,n\})$ через Sym_n. Для данной подгруппы $H \leq G$ через $H_G = \cap_{g\in G} H^g$ обозначается ядро подгруппы H.

Предположим, что группа G действует на множестве Ω. Элемент $x \in \Omega$ называется *G-регулярной точкой*, если $|xG| = |G|$, т. е. если стабилизатор элемента x тривиален. Определим действие группы G на Ω^k по правилу

$$g : (i_1,\dots,i_k) \mapsto (i_1g,\dots,i_kg).$$

Если G действует точно и транзитивно на множестве Ω, то минимальное число k такое, что множество Ω^k содержит G-регулярную точку, называется *размером базы* группы G и обозначается через $\mathrm{Base}(G)$. Для любого натурального числа m количество G-регулярных орбит на множестве Ω^m обозначено через $\mathrm{Reg}(G,m)$ (это количество равно 0, если $m < \mathrm{Base}(G)$). Если H — подгруппа группы G и G действует на множестве Ω правых смежных классов по подгруппе H правыми умножениями, то G/H_G действует точно и транзитивно на множестве Ω. В этом случае мы обозначаем $\mathrm{Base}(G/H_G)$ и $\mathrm{Reg}(G/H_G, m)$ через $\mathrm{Base}_H(G)$ и $\mathrm{Reg}_H(G,m)$ соответственно. Мы также говорим, что $\mathrm{Base}_H(G)$ — это *размер базы группы G относительно подгруппы H*. Очевидно, $\mathrm{Base}_H(G)$ — это такое минимальное число k, что существуют элементы $x_1,\dots,x_k \in G$, для которых $H^{x_1} \cap \ldots \cap H^{x_k} = H_G$. Таким образом, размер базы группы G относительно подгруппы H — это такое минимальное число k, что существует k сопряженных с H подгрупп, пересечение которых совпадает с H_G.

В настоящей работе мы доказываем следующую основную теорему.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00456 и 12-01-33102).

Теорема 1. *Пусть H — разрешимая холлова подгруппа почти простой группы G, цоколь которой изоморфен исключительной группе лиева типа. Тогда* $\mathrm{Base}_H(G) \leq 4$.

Ранее в данном направлении были получены следующие результаты. В 1966 г. Д.С. Пассман доказал (см. [1]), что в p-разрешимой группе существуют три силовские p-подгруппы, пересечение которых совпадает с p-радикалом группы. Позже в 1996 г. В.И. Зенков доказал (см. [2]), что аналогичное утверждение справедливо для произвольной конечной группы. В работе [3] С. Долфи доказал, что в любой π-разрешимой группе G существуют три сопряженные π-холловы подгруппы, пересечение которых совпадает с $O_\pi(G)$ (см. [4]). Отметим также, что В.И. Зенков в работе [5] построил пример группы G, содержащей разрешимую π-холлову подгруппу H такую, что пересечение некоторых пяти сопряженных с ней подгрупп равняется $O_\pi(G)$, в то время как пересечение любых четырех сопряженных с H подгрупп больше, чем $O_\pi(G)$. В обозначениях настоящей работы теорему 1 из [6] можно сформулировать в следующем виде.

Предложение 1. *Пусть G — конечная группа, содержащая разрешимую π-холлову подгруппу H. Предположим, что для любой простой компоненты S цоколя $E(\overline{G})$ группы $\overline{G} = G/S(G)$, где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G, выполнено следующее условие: для любой группы L такой, что $S \leq L \leq \mathrm{Aut(S)}$, содержащей π-холлову подгруппу M, справедливы неравенства* $\mathrm{Base}_M(L) \leq 5$ *и* $\mathrm{Reg}_M(L,5) \geq 5$. *Тогда* $\mathrm{Base}_H(G) \leq 5$ *и* $\mathrm{Reg}_H(G,5) \geq 5$.

Кроме того, в начале доказательства теоремы 2 из [6] отмечено и доказано утверждение, которое в обозначениях настоящей работы можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1. *Если для некоторых группы G и ее подгруппы H справедливо неравенство* $\mathrm{Base}_H(G) \leq 4$, *то* $\mathrm{Reg}_H(G,5) \geq 5$.

Таким образом, из теоремы 1, предложения 1, леммы 1 и теоремы 2 из [6] непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть H — разрешимая π-холлова подгруппа группы G. Предположим, что любой неабелев композиционный фактор цоколя факторгруппы $G/S(G)$, где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G, изоморфен либо знакопеременной, либо спорадической, либо исключительной группе лиева типа. Тогда* $\mathrm{Base}_H(G) \leq 5$, *т. е. существуют такие элементы x, y, z, t группы G, что справедливо равенство $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = O_\pi(G)$.*

1. Обозначения и предварительные результаты

Везде в работе через π обозначено некоторое множество простых чисел, а через π' — его дополнение в множестве всех простых чисел. Подгруппа H группы G называется *π-холловой*, если порядок $|H|$ делится только на те простые числа, которые лежат в π, в то время как ее индекс $|G : H|$ делится только на те простые числа, которые лежат в π'. Множество всех π-холловых подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Подгруппа H группы G называется *холловой*, если ее порядок $|H|$ и индекс $|G : H|$ взаимно просты. Группа G называется *почти простой*, если ее обобщенная подгруппа Фиттинга $F^*(G)$ есть неабелева простая группа. Иными словами, группа G называется почти простой, если существует такая неабелева простая группа S, что $S \simeq \mathrm{Inn}(S) \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$.

Лемма 2 [7, лемма 1]. *Пусть G — произвольная конечная группа и A — ее нормальная подгруппа. Если $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то $H \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$ и $HA/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$.*

Лемма 3 [8]. *Пусть A — абелева подгруппа конечной группы G. Тогда существует такой элемент $x \in G$, что $A \cap A^x \leq F(G)$.*

Объединяя известные результаты (см. [9, теоремы 8.3–8.7]), мы получаем следующий результат.

Лемма 4. *Пусть G — простая группа лиева типа над полем характеристики $p \in \pi$ и H — ее разрешимая π-холлова подгруппа. Тогда либо H содержится в подгруппе Бореля группы G, либо выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *$G \simeq SL_3(2)$ или $G \simeq SL_3(3)$ и H является стабилизатором прямой или стабилизатором плоскости естественного 3-мерного модуля, т. е. в этом случае в G существует два класса сопряженных π-холловых подгрупп.*

(2) *$G \simeq SL_4(2)$ и H является стабилизатором двумерной плоскости естественного 4-мерного модуля.*

(3) *$G \simeq SL_5(2)$ и H является стабилизатором вложенной цепочки подпространств $V_0 < V_1 < V_2 < V_3 = V$, коразмерности которой лежат в множестве $\{1, 2\}$ (т. е. две коразмерности равны 2 и одна коразмерность равна 1). В этом случае в G существует три класса сопряженных π-холловых подгрупп.*

Напомним некоторые известные технические результаты (см. [10]). Если G действует транзитивно на множестве Ω, то для элемента $x \in G$ через $\mathrm{fpr}(x)$ обозначается отношение количества неподвижных точек элемента x к мощности множества Ω, т. е. $\mathrm{fpr}(x) = |\mathrm{fix}(x)|/|\Omega|$, где $\mathrm{fix}(x) = \{\omega \in \Omega \mid \omega^x = \omega\}$. Если группа G действует транзитивно и H — стабилизатор точки, то хорошо известно, что

$$\mathrm{fpr}(x) = \frac{|x^G \cap H|}{|x^G|}. \tag{1.1}$$

Как замечено в [11, теорема 1.3], размер базы можно оценить, используя следующие рассуждения. Предположим, что G действует точно, и пусть $Q(G, c)$ обозначает вероятность того, что случайным образом выбранный элемент множества Ω^c не является G-регулярной точкой. Очевидно, $\mathrm{Base}(G)$ — это такое минимальное число c, что $Q(G, c) < 1$. В частности, если $Q(G, c) < 1$, то $\mathrm{Base}(G) \le c$. Ясно, что элемент множества Ω^c не является G-регулярной точкой в том и только в том случае, если он остается неподвижным относительно действия некоторого элемента x простого порядка. Заметим также, что вероятность того, что случайным образом выбранный элемент множества Ω^c неподвижен относительно x, не больше, чем $\mathrm{fpr}(x)^c$. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество элементов простого порядка группы G. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — представители классов сопряженности элементов из $\mathcal{P}$. Поскольку группа G действует транзитивно на Ω, формула (1.1) показывает, что $\mathrm{fpr}(x)$ не зависит от выбора представителя класса сопряженности. Таким образом, справедлива цепочка

$$Q(G, c) \le \sum_{x \in \mathcal{P}} \mathrm{fpr}(x)^c = \sum_{i=1}^{k} |x_i^G| \cdot \mathrm{fpr}(x_i)^c =: \widehat{Q}(G, c). \tag{1.2}$$

В частности, мы можем использовать верхнюю оценку числа $\mathrm{fpr}(x)$ для того, чтобы оценивать $\widehat{Q}(G, c)$ и, тем самым, оценивать $Q(G, c)$. Основным техническим инструментом для этого будет следующая

Лемма 5 [10, предложение 2.3]. *Пусть G — транзитивная группа подстановок на множестве Ω и H — стабилизатор в G точки из Ω. Предположим, что $x_1, \dots, x_k$ — представители различных классов сопряженности группы G, для которых справедливы неравенства $\sum_{i=1}^k |x_i^G \cap H| \le A$ и $|x_i^G| \ge B$ для всех $i = 1, \dots, k$. Тогда неравенство*

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^G| \cdot \mathrm{fpr}(x_i)^c \le B(A/B)^c$$

справедливо для любого $c \in \mathbb{N}$.

Отметим, что для любой подгруппы H группы G и для любого набора $x_1, \dots, x_k$ элементов группы G, не содержащего единицу группы, справедлива оценка $\sum_i |x_i^G \cap H| < |H|$.

2. Вспомогательные результаты

Наши обозначения для групп лиева типа согласуются с обозначениями из [12]. В частности, для любой простой группы S лиева типа над полем характеристики p мы фиксируем некоторую простую алгебраическую группу $\overline{G}$ присоединенного типа и отображение Стейнберга σ таким образом, что $S = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. При этом $\overline{G}_\sigma$ совпадает с группой внутренне-диагональных автоморфизмов группы S (далее группу внутренне-диагональных автоморфизмов группы S мы будем обозначать через $\widehat{S}$). Мы считаем, что подгруппа Бореля $\overline{B}$ и ее максимальный тор $\overline{T}$ выбраны σ-инвариантными, и обозначаем $\overline{B}_\sigma$ и $\overline{T}_\sigma$ через B и T соответственно. Напомним, что поле определения группы S равно $\mathbb{F}_{q^2}$, если $S \in \{{}^2A_n(q), {}^2D_n(q), {}^2E_6(q)\}$; равно $\mathbb{F}_{q^3}$, если $S = {}^3D_4(q)$, и равно $\mathbb{F}_q$ во всех остальных случаях. Для групп ${}^2A_n(q), {}^2D_n(q), {}^2E_6(q)$ мы также будем использовать обозначения $A_n^-(q), D_n^-(q), E_6^-(q)$ соответственно. Отметим также известный факт: $Z(\overline{B}) \cap \overline{T} = Z(\overline{G})$ (равно 1, если группа $\overline{G}$ имеет присоединенный тип) и $Z(B) \cap T = Z(S)$ (равно 1, если группа $\overline{G}$ имеет присоединенный тип).

Лемма 6. *Пусть G — группа внутренне-диагональных автоморфизмов конечной простой группы лиева типа над полем характеристики p (т. е. $G = \overline{G}_\sigma$ для некоторой связной простой алгебраической группы $\overline{G}$ присоединенного типа над алгебраически замкнутым полем характеристики p и некоторого отображения Стейнберга σ). Пусть $B = U \rtimes T$ — подгруппа Бореля группы G, где U — максимальная унипотентная подгруппа группы G и T — подгруппа Картана группы G. Обозначим подгруппу мономиальных матриц, содержащую тор T, через N, так что $N/T \simeq W$ является группой Вейля для группы G. Пусть $w_0 \in W$ — единственный элемент, переводящий все положительные корни в отрицательные, и n_0 — его прообраз в N. Тогда существует элемент $x \in U^{n_0}$ такой, что $T^x \cap B = 1$. В частности, существуют такие элементы $u, v \in O^{p'}(G)$, что $B \cap B^u \cap B^v = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $B^{n_0} = U^{n_0} \rtimes T$. Подгруппа Фиттинга $F(U^{n_0} \rtimes T)$ равна U^{n_0}, поскольку $Z(O^{p'}(G)) = 1$. В противном случае, поскольку U^{n_0} является нормальной нильпотентной подгруппой группы $U^{n_0} \rtimes T$, получаем $U^{n_0} \leq F(U^{n_0} \rtimes T)$. Если $U^{n_0} \neq F(U^{n_0} \rtimes T)$, то существует элемент $1 \neq z \in T$, централизующий U^{n_0} и потому лежащий в $Z(O^{p'}(G)) = 1$, противоречие. Значит, $F(U^{n_0} \rtimes T) = U^{n_0}$, и в силу леммы 3 существует элемент $x \in U^{n_0}$ такой, что $T \cap T^x = 1$.

Заметим, что $U^{n_0} \cap B = 1$, значит, $(U^{n_0} \rtimes T) \cap B = T$. Поскольку $T^x \in U^{n_0} \rtimes T$, получаем

$$1 = T^x \cap T = T^x \cap ((U^{n_0} \rtimes T) \cap B) = (T^x \cap (U^{n_0} \rtimes T)) \cap B = T^x \cap B,$$

откуда следует основное утверждение леммы.

Докажем теперь “в частности”, т. е. покажем, что существуют такие элементы $u, v \in O^{p'}(G)$, что $B \cap B^u \cap B^v = 1$. По построению $x \in U^{n_0} \leq O^{p'}(G)$ и $1 = T^x \cap B = (B^{n_0} \cap B)^x \cap B = B \cap B^x \cap B^{n_0 x}$. Лемма доказана.

Пусть $S = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — конечная простая нескрученная группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Подгруппа Картана $T \cap S$ группы S может быть получена как $\langle h_r(\lambda) \mid r \in \Pi, \lambda \in \mathbb{F}_q^* \rangle$, где Π — множество фундаментальных корней корневой системы группы S (см. [12, теорема 2.4.7]). Тогда полевой автоморфизм φ группы S можно выбрать таким образом, что для любых $r \in \Pi$, $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ справедливо равенство $h_r(\lambda)^\varphi = h_r(\lambda^p)$. Кроме того, графовый автоморфизм τ, соответствующий симметрии $\overline{} : \Pi \to \Pi$ диаграммы Дынкина группы S, можно выбрать так, что для любых $r \in \Pi$, $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ справедливо равенство $(h_r(\lambda))^\tau = h_{\bar{r}}(\bar{\lambda})$, где $\bar{\lambda} = \lambda$, если все корни имеют одинаковую длину. Рассмотрим подгруппу A, порожденную таким образом выбранными полевым и графовыми автоморфизмами (для корневой системы D_4 существует несколько графовых автоморфизмов). Хорошо известно, что $\mathrm{Aut}(S) = \widehat{S} \rtimes A$. Кроме того, A нормализует некоторую подгруппу Бореля B, содержащую выбранную подгруппу Картана T. Поскольку $N_{\widehat{S}}(B) = B$, получаем $N_{\mathrm{Aut}(S)}(B) = B \rtimes A$.

Пусть теперь S — конечная простая скрученная группа лиева типа, отличная от групп Судзуки и Ри, L — нескрученная группа лиева типа и ψ — автоморфизм группы L, для которых $S = O^{p'}(L_\psi)$. Пусть $\overline{} : \Pi \to \Pi$ — симметрия диаграммы Дынкина фундаментального набора корней Π корневой системы группы L, используемая для построения автоморфизма ψ. Тогда подгруппа Картана $T \cap L$ группы L может быть записана как $\langle h_r(\lambda) \mid r \in \Pi, \lambda \in \mathbb{F}_q^*\rangle$, и полевой автоморфизм φ группы S можно выбрать таким образом, что для любых $r \in \Pi$, $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ справедливо равенство $(h_r(\lambda))^\varphi = h_{\bar r}(\lambda^p)$ (см. [13, 12.2]). Положим $A = \langle\varphi\rangle$, тогда $\mathrm{Aut}(S) = \widehat{S} \leftthreetimes A$, и существует подгруппа Бореля B группы $\widehat{S}$, для которой справедливо равенство $N_{\mathrm{Aut}(S)}(B) = B \leftthreetimes A$.

Лемма 7. *Во введенных выше обозначениях предположим, что если группа S не является скрученной, то порядок q поля определения $\mathbb{F}_q$ группы S больше двух. Кроме того, если $S = D_4(q)$, предположим, что $q > 3$. Предположим также, что S не является группой Судзуки или Ри. Тогда существует такой элемент $x \in T \cap S$, что $C_A(x) = 1$. В частности, $A \cap A^x = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если группа S не является скрученной и отлична от $D_4(q)$, то в качестве x можно выбрать элемент $h_r(\lambda)$, где корень $r \in \Pi$ таков, что $r \neq \bar r$, а λ — порождающий элемент мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_q$. Если группа S является скрученной, отличной от ${}^3D_4(q)$, то в качестве x можно взять элемент $h_r(\lambda)h_{\bar r}(\lambda^q)$, где λ — порождающий элемент мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_{q^2}$ и $r \neq \bar r$. Если $S = {}^3D_4(q)$, то в качестве x можно взять элемент $h_r(\lambda)h_{\bar r}(\lambda^q)h_{\bar{\bar r}}(\lambda^{q^2})$, где λ — порождающий элемент мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_{q^3}$ и $r \neq \bar r$. Наконец, если $S = D_4(q)$ и $q > 3$, то существуют элементы $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_q^* \setminus \{1\}$ такие, что $\lambda_2 \notin \{\lambda_1^p, \lambda_1^{p^2}, \ldots, \lambda_1^q\}$ и λ_1 порождает $\mathbb{F}_q^*$. Выберем фундаментальные корни r, s так, чтобы существовала нетривиальная симметрия диаграммы Дынкина, переставляющая эти корни. Тогда в качестве x можно взять элемент $h_r(\lambda_1)h_s(\lambda_2)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G — почти простая группа, цоколь S которой является группой лиева типа, удовлетворяющей условиям леммы 7. Пусть $B = U \leftthreetimes T$ — подгруппа Бореля группы $\widehat{S}$ и $H = N_G(B)$. Тогда существуют такие элементы $x, y, z \in S$, что $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы будем использовать обозначения, введенные в леммах 6 и 7, в частности, $H \leq B \leftthreetimes A$. В лемме 6 доказано, что существует элемент $x \in U^{n_0} \leq S$ такой, что $T^x \cap B = 1$. В частности, $B \cap B^{n_0} \cap B^{x^{-1}} = 1$. Следовательно, $H \cap H^{n_0} \cap H^{x^{-1}} \leq A$ и $A \cap B = 1$. По лемме 7 существует элемент $y \in T \cap S = (B \cap B^{n_0}) \cap S$ такой, что $A \cap A^y = 1$. Таким образом,

$$(H \cap H^{n_0} \cap H^{x^{-1}}) \cap (H \cap H^{n_0} \cap H^{x^{-1}})^y = H \cap H^{n_0} \cap H^{x^{-1}} \cap H^{x^{-1}y} = 1,$$

откуда следует лемма. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть S — простая исключительная группа лиева типа над полем характеристики $p \notin \pi$ и H — разрешимая π-холлова подгруппа группы S. Тогда справедливо одно из следующих утверждений.*

(1) *Существует максимальный тор T группы S такой, что*

$$H \leq N(S,T) \quad \text{и} \quad |\pi(N(S,T)/T) \cap \pi| \leq 1.$$

(2) *$S = {}^2G_2(3^{2n+1})$, $\pi \cap \pi(S) = \{2, 7\}$, $|S|_{\{2,7\}} = 56$, H является группой Фробениуса порядка 56.*

(3) *$S \in \{G_2(q), F_4(q), E_6^{-\varepsilon}(q), {}^3D_4(q)\}$, где значение $\varepsilon \in \{+, -\}$ выбрано так, что $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$; $2, 3 \in \pi$, $\pi \cap \pi(S) \subseteq \pi(q - \varepsilon 1)$, $H \leq N(S,T)$, где T — единственный с точностью до сопряжения максимальный тор в S, для которого $N(S,T)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы S и $N(S,T)/T$ — $\{2,3\}$-группа. Здесь $N(S,T) := N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap S$, где $T = \overline{T} \cap S$ и $S = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $2 \notin \pi$, то в силу [14, леммы 7–14, теорема 3] справедливо утверждение (1) леммы.

Если $2 \in \pi$, а $3 \notin \pi$, то в силу [15, лемма 5.1 и теорема 5.2] (см. также [9, теорема 8.9]) справедливы либо утверждение (1), либо утверждение (2) леммы.

Наконец, если $2, 3 \in \pi$, то группа S не может быть группой Судзуки или Ри (поскольку $p \notin \pi$). В силу [16, леммы 7.1–7.6] (см. также [9, теорема 8.15]) имеем $2, 3 \in \pi$, $\pi \cap \pi(S) \subseteq \pi(q - \varepsilon 1)$, $H \leq N(S, T)$, где T — единственный с точностью до сопряжения максимальный тор в S, для которого $N(S, T)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы S и либо $N(S, T)/T$ — $\{2, 3\}$-группа, либо группа $N(S, T)/T$ изоморфна группе Вейля корневой системы группы S. Поскольку для корневых систем E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 группы Вейля являются либо $\{2, 3\}$-группами, либо неразрешимы, получаем, что если $S \in \{E_6^{\varepsilon}(q), E_7(q), E_8(q)\}$, то H неразрешима, откуда следует утверждение (3) леммы. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть S — простая исключительная группа лиева типа над полем характеристики $p \notin \pi$, S не является группой Судзуки или Ри и H — разрешимая π-холлова подгруппа группы S. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $S = E_8(q)$, то $|H| \leq (q+1)^8 \cdot 2^{14}$.*

(2) *Если $S = E_7(q)$, то $|H| \leq (q+1)^7 \cdot 2^{10}$.*

(3) *Если $S = E_6^{\epsilon}(q)$, то $|H| \leq (q+1)^6 \cdot 2^7$.*

(4) *Если $S = F_4(q)$, то $|H| \leq (q+1)^4 \cdot 2^7 \cdot 3^2$.*

(5) *Если $S = G_2(q)$, то $|H| \leq (q+1)^2 \cdot 12$.*

(6) *Если $S = {}^3D_4(q)$, то $|H| \leq \max\{(q^2+q+1)^2, (q+1)^2 \cdot 48\}$.*

3. Доказательство основной теоремы

Доказательство будем вести, разбирая различные возможные случаи для простого цоколя S группы G и строения ее π-холловой подгруппы H. Если S является группой Судзуки или Ри, то из [10, табл. 3 и 4] следует, что для любой подгруппы H группы G справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 3$. Поэтому далее предполагаем, что группа S не является группой Судзуки или Ри.

3.1. S является простой группой лиева типа над полем характеристики $p \in \pi$

В силу леммы 2 $H \cap \widehat{S} \in \mathrm{Hall}_{\pi}(\widehat{S})$, поэтому в этом случае для $H \cap \widehat{S}$ справедлива лемма 4. Предположим сначала, что $H \cap \widehat{S}$ лежит в подгруппе Бореля группы $\widehat{S}$. Если S — нескрученная группа лиева типа над полем из двух элементов, то H — 2-группа. В силу [2] справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 3$. Если $S = D_4(3)$, то H — 3-группа. В силу [2] справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 3$. Предположим, что S не является нескрученной группой лиева типа над полем из двух элементов и $S \not\cong D_4(3)$. Тогда $H \leq N_G(U) = N_G(B)$, и в силу леммы 8 справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 4$. Если же выполнено одно из утверждений (1)–(3) леммы 4, то S — классическая группа, и вычисления с помощью [17] показывают, что в любом случае $\mathrm{Base}_H(G) \leq 5$ и $\mathrm{Reg}_H(G, 5) \geq 5$.

Отметим, что в предыдущем абзаце нами доказана следующая

Теорема 3. *Пусть G — конечная почти простая группа, цоколь которой изоморфен группе лиева типа над полем характеристики $p \in \pi$. Предположим, что H — разрешимая π-холлова подгруппа группы G. Тогда справедливы неравенства* $\mathrm{Base}_H(G) \leq 5$ *и* $\mathrm{Reg}_H(G, 5) \geq 5$.

3.2. S является простой исключительной группой лиева типа над полем характеристики $p \notin \pi$

Пусть $S = E_8(q)$. Воспользуемся леммой 5. Если x — унипотентный элемент из S, то $x^G \cap H = \varnothing$. Если x — полупростой элемент из $G = \widehat{G}$, то из [18, табл. 2] непосредственно следует, что максимум порядков централизаторов полупростых элементов в группе $E_8(q)$ не превосходит

$$q^{64}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)^2,$$

откуда $|x^G| > q^{112}$. Действительно, очевидно, что максимум порядков централизаторов достигается в том случае, когда центральный тор тривиален ($|S_\sigma| = 1$ в обозначениях из [18]). Проверка порядков централизаторов дает требуемое неравенство. Очевидно, что неравенство $|x^G| > q^{112}$ справедливо и в том случае, когда x является полевым автоморфизмом. Отсюда при $c = 2$ получаем

$$\widehat{Q}(G,2) \leq \frac{((q+1)^8 \cdot 2^{14})^2}{q^{112}} < 1$$

для любого $q \geq 2$. Значит, $\mathrm{Base}_H(G) \leq 2$.

Пусть $G = E_7(q)$. Мы вновь воспользуемся леммой 5. Если x — унипотентный элемент из S, то $x^G \cap H = \varnothing$. Если x — полупростой элемент из $\widehat{G}$, то из [18, табл. 1] следует, что максимум порядков централизаторов полупростых элементов в группе $E_7(q)$ не превосходит

$$q^{31}(q^2-1)^2(q^4-1)(q^6-1)^2(q^8-1)(q^{10}-1),$$

откуда $|x^G| > (1/2)q^{64}$. Очевидно, что неравенство $|x^G| > (1/2)q^{64}$ справедливо и в том случае, когда x является полевым автоморфизмом. Отсюда при $c = 2$ получаем

$$\widehat{Q}(G,2) \leq \frac{((q+1)^7 \cdot 2^{20})^2 \cdot 2}{q^{64}} < 1$$

для любого $q \geq 2$. Значит, $\mathrm{Base}_H(G) \leq 2$.

Пусть $G = E_6^\epsilon(q)$. Как и выше, получаем, что x либо является полупростым элементом из $\widehat{G}$, либо не лежит в $\widehat{G}$. Если x — полупростой элемент, то из [19, табл. 1 и случай $E_6(q)$] следует, что максимум порядков централизаторов полупростых элементов в группе $E_6^\epsilon(q)$ не превосходит

$$q^{20}(q-\epsilon 1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^5-\epsilon 1),$$

откуда $|x^G| > (1/3)q^{30}$. Очевидно, что неравенство $|x^G| > (1/3)q^{30}$ справедливо и в том случае, если x является полевым или графово-полевым автоморфизмом. Если же x является графовым автоморфизмом, то

$$|x^G| = |E_6^\epsilon|/|F_4(q)| \geq \frac{1}{3}\, q^{12}(q^5-1)(q^9-1).$$

Отсюда при $c = 4$ получаем

$$\widehat{Q}(G,2) \leq \frac{(q+1)^{24} \cdot 2^{28} \cdot 3^3}{q^{36} \cdot (q^5-1)^3 \cdot (q^9-1)^3} < 1$$

для любого $q \geq 2$. Значит, $\mathrm{Base}_H(G) \leq 4$.

Пусть $G = F_4(q)$. Вновь можно считать, что либо x является полупростым элементом из $G = \widehat{G}$, либо не лежит в $\widehat{G}$. Если x — полупростой элемент, то из [19, табл. 2] следует, что максимум порядков централизаторов полупростых элементов в группе $F_4(q)$ не превосходит

$$q^{16}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)(q^8-1),$$

откуда $|x^G| > q^{16}$. Очевидно, что неравенство $|x^G| > q^{16}$ справедливо и для любого x, не лежащего в G. Отсюда при $c = 4$ получаем

$$\widehat{Q}(G,2) \leq \frac{(q+1)^{16} \cdot 2^{28} \cdot 3^8}{q^{48}} < 1$$

для любого $q \geq 3$. Значит, при $q \geq 3$ справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 4$. Если $q = 2$, то в силу условия $p \notin \pi$ получаем, что порядок $|H|$ нечетен. В силу [14, лемма 8] получаем, что либо H является силовской 3-подгруппой группы G, либо H абелева. Значит, справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 3$: в первом случае в силу [2], а во втором — в силу леммы 3.

Пусть $G = G_2(q)$. Как и выше, можно считать, что либо x является полупростым элементом из $G = \widehat{G}$, либо не лежит в $\widehat{G}$. Если x — полупростой элемент, то из [19, табл. 4] следует, что максимум порядков централизаторов полупростых элементов в группе $F_4(q)$ не превосходит

$$q^2(q^2-1)(q^3+1),$$

откуда $|x^G| \geq q^4(q^3-1)$. Очевидно, что неравенство $|x^G| \geq q^4(q^3-1)$ справедливо и для любого x, не лежащего в G. Отсюда при $c = 4$ имеем

$$\widehat{Q}(G,2) \leq \frac{(q+1)^8 \cdot 12^4}{q^{12} \cdot (q^3-1)^3} < 1$$

для любого $q \geq 3$. Значит, при $q \geq 3$ справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 4$. Если $q = 2$, то в силу условия $p \notin \pi$ получаем, что порядок $|H|$ нечетен. В силу [14, лемма 7] получаем, что либо H является силовской 3-подгруппой группы G, либо H абелева. Значит, справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 3$: в первом случае в силу [2], а во втором — в силу леммы 3.

Если $G = {}^3D_4(q)$, то из [19, табл. 7] легко получить оценку $|x^G| > q^{16}$, используя которую, получаем, что при $q \geq 2$ справедливо неравенство $\mathrm{Base}_H(G) \leq 4$. Основная теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Passman D.S.** Groups with normal solvable Hall p'-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, no. 1. P. 99–111.
2. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
3. **Dolfi S.** Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360, no. 1. P. 135–152.
4. **Vdovin E.P.** Regular orbits of solvable linear p'-groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 345–360.
5. **Зенков В.И.** О пересечениях разрешимых холловых подгрупп в конечных неразрешимых группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 86–89.
6. **Вдовин Е.П., Зенков В.И.** О пересечении разрешимых холловых подгрупп в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 74–83.
7. **Hall P.** Theorems like Sylow‘s // Proc. London Math. Soc. (3). 1956. Vol. 6, no. 6. P. 286–304.
8. **Зенков В.И.** Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 150–152.
9. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5 (401). С. 3–46.
10. **Burness T.C., Liebeck M.W., Shalev A.** Base sizes for simple groups and a conjecture of Cameron // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 2009, Vol. 98, no. 1. P. 116–162.
11. **Liebeck M.W., Shalev A.** Simple groups, permutation groups, and probability // J. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 12, no. 2. P. 497–520.
12. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K-groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, № 3.)

13. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. New York: Wiley & Sons, 1972. 331 p.
14. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
15. **Revin D.O. Vdovin E.P.** Hall subgroups of finite groups // Contemp. Math. 2006. Vol. 402. P. 229–263.
16. **Revin D.O., Vdovin E.P.** On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. Vol. 324, no. 12. P. 3614–3652.
17. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.5.7. 2013. URL: http://www.gap-system.org.
18. **Deriziotis D.I.** The centralizers of semisimple elements of the Chevalley groups E_7 and E_8 // Tokyo J. Math. 1983. Vol. 6, no. 1. P. 191–216.
19. **Deriziotis D.I.** Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. Essen, 1984. 148 p. (Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen; Heft 11.)

Вдовин Евгений Петрович
д-р физ.-мат. наук, доцент
заместитель директора
Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева
e-mail: vdovin@math.nsc.ru

Поступила 22.01.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ КАЖДАЯ НЕРАЗРЕШИМАЯ МАКСИМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА ХОЛЛОВА

В. А. Ведерников

В работе получено описание конечных простых неабелевых групп, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима или холлова, а также неабелевых композиционных факторов конечной неразрешимой группы с такими свойствами.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, неабелев композиционный фактор, неразрешимая группа, максимальная подгруппа, холлова подгруппа, разрешимая подгруппа.

V. A. Vedernikov. Finite groups in which every nonsolvable maximal subgroup is a Hall subgroup.

We describe finite simple nonabelian groups in which every maximal subgroup is a solvable or Hall subgroup. We also describe nonabelian composition factors of a finite nonsolvable group with these properties.

Keywords: finite group, solvable group, nonabelian composition factor, nonsolvable group, maximal subgroup, Hall subgroup, solvable subgroup.

К 60-летию Александра Алексеевича Махнева

Введение

Из работы Томпсона [26] следует описание по модулю подгруппы Фраттини строения конечных неразрешимых групп, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима.

В. С. Монахов в работе [12] изучил строение конечных разрешимых групп, в которых каждая максимальная подгруппа холлова. В работе [15] Т. В. Тихоненко, В. Н. Тютянов по модулю классификации конечных простых групп описали простые неабелевы группы, а Н. В. Маслова в работе [10] — простые неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы с холловыми максимальными подгруппами. В работе [11] Н. В. Маслова и Д. О. Ревин получили полное описание конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа холлова. Естественно возникает задача объединения классов групп, изученных в работах [26] и [11].

Цель настоящей работы — исследовать строение конечной группы, в которой каждая максимальная подгруппа разрешима или холлова.

В дальнейшем будем применять следующие обозначения: $\mathfrak{J}$ — класс всех конечных простых неабелевых групп, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима; $\mathfrak{T}$ — класс всех конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима; $\mathfrak{J}_h$ — класс всех простых неабелевых групп, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима или холлова; $\mathfrak{T}_h$ — класс всех конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима или холлова. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, то группа, принадлежащая $\mathfrak{F}$, называется *$\mathfrak{F}$-группой*, а через $\mathfrak{K}(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам всех $\mathfrak{F}$-групп.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Группа G является $\mathfrak{J}_h$-группой тогда и только тогда, когда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) *простой неабелевой $\mathfrak{J}$-группе*;

(2) $L_2(p)$, *где p — простое число, $p > 7$, $p^2-1 \equiv 0 \pmod 5$, $p \equiv \pm 3 \pmod 8$, $p^2-1 \not\equiv 0 \pmod 9$, и $p^2-1 \not\equiv 0 \pmod{25}$*;

(3) $L_5(2)$.

Теорема 2. *Если группа G является $\mathfrak{T}_h$-группой, то каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен некоторой группе, принадлежащей множеству $\mathfrak{J}_h \cup \{Sz(q) \mid q = 2^{2m+1},\ 2m+1$ — составное число$\}$.*

1. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Рассматриваются лишь конечные группы. При доказательстве основных результатов работы применяются теорема о классификации простых неабелевых групп и их список из [5, табл. 2.4]. Для конечных простых групп лиева типа и их подгрупп применяются обозначения, терминология и результаты из работ [5–7; 14; 16; 17].

Из описания Томпсоном [26] минимальных простых групп непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *В группе G каждая максимальная подгруппа разрешима тогда и только тогда, когда либо группа G разрешима, либо $G/\Phi(G)$ изоморфна одной из следующих групп*:

(1) *$L_2(p)$, где p — простое число, $p > 3$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$;*

(2) *$L_2(2^p)$, где p — нечетное простое число;*

(3) *$L_2(3^p)$, где p — нечетное простое число;*

(4) *$L_3(3)$;*

(5) *$Sz(2^p)$, где p — нечетное простое число.*

Лемма 2. *Класс $\mathfrak{T}_h$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{T}_h$, $N \lhd G$ и H/N — неразрешимая максимальная подгруппа группы G/N. Тогда H — неразрешимая максимальная подгруппа группы G. Так как $G \in \mathfrak{T}_h$, то H является холловой подгруппой в группе G. Из равенств $|G/N : H/N| = |G : H|$ и $(|H|, |G : H|) = 1$ имеем, что $(|H/N|, |G/N : H/N|) = (|H/N|, |G : H|) = 1$. Следовательно, H/N — холлова подгруппа группы G/N и $G/N \in \mathfrak{T}_h$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть S — конечная простая неабелева группа, обладающая неразрешимой подгруппой X такой, что*

(1) *класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно $Aut(S)$;*

(2) *из $X \le Y < S$ следует, что Y не является холловой подгруппой в группе S.*

Тогда $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Доказательство. Применяются рассуждения, как и при доказательстве [10, предложение 1], с учетом леммы 2 и неразрешимости подгруппы X в группе S. Лемма доказана.

Замечание 1. Класс $\mathfrak{J}$ состоит лишь из групп, каждая из которых изоморфна одной из групп типа (1)–(5) из формулировки леммы 1. Для применения леммы 3 в дальнейшем используется понятие параметра c (см. [20, § 3.2, (3.2.1)]). Поясним это в наших обозначениях. Пусть $S \le A = Aut(S)$, где S — классическая простая неабелева группа и $H \le S$. Тогда $H^A = \{H^a \mid a \in A\}$ — класс сопряженности в группе A с представителем H и в группе S отношением сопряженности класс H^A разобьется на c классов сопряженности. Если $c = 1$, то $H^A = H^S$ и класс H^S является A-инвариантным.

Лемма 4. *Пусть G — неразрешимая $\mathfrak{T}_h$-группа, $S(G) = 1$ и $M = P_1 \times \dots \times P_n$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, где $P_1, \dots, P_n$ — попарно изоморфные простые неабелевы группы. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$G = P_1 \in \mathfrak{J}_h$;*

(2) *$G = M : A$, где $A \neq 1$ является холловой подгруппой нечетного порядка в G, а главные факторы группы A изоморфны силовским подгруппам из G, $C_G(M) = 1$, n делит $|A|$ и $N_A(P_1) \neq C_A(P_1)$, в частности p делит $|Out(P_1)|$ для некоторого $p \in \pi(A)$, причем $p > 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G — простая неабелева $\mathfrak{T}_h$-группа, то $G = P_1 \in \mathfrak{J}_h$ — группа типа (1). Пусть G — непростая неразрешимая $\mathfrak{T}_h$-группа с $S(G) = 1$ и M — минимальная нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим неединичную фактор-группу G/M. Так как каждая максимальная подгруппа H группы G, содержащая M, является неразрешимой подгруппой, то по условию H — холлова подгруппа в группе G. Тогда H/M — холлова подгруппа в группе G/M. Следовательно, в G/M каждая максимальная подгруппа является холловой.

Допустим, что G/M — неразрешимая группа. Тогда по [11, теорема 1] группа G обладает нормальным рядом подгрупп $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = M$ таким, что выполняется одно из следующих утверждений:

$$(1)\ \ G/G_1 \cong L_5(2), \quad (2)\ \ G/G_1 \cong L_2(11), \quad (3)\ \ (G/G_1)/\Phi(G/G_1) \cong L_2(7),$$

причем $\Phi(G/G_1)$ — 3-группа.

Пусть H/G_1 — максимальная подгруппа в группе G/G_1 индекса $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7$, $2^2 \cdot 3$, 2^3 соответственно. Так как H является неразрешимой максимальной подгруппой в группе G, содержащей M, то 2 делит $|H|$ и, значит, подгруппа H не является холловой в G. Получили противоречие. Следовательно, группа G/M разрешима. Так как $S(G) = 1$, то $C_G(M) = 1$. Поскольку в G/M каждая максимальная подгруппа является холловой, то по [12, следствие 1] каждый главный фактор группы G/M изоморфен некоторой силовской p-подгруппе группы G/M.

Допустим, что p делит $(|G : M|, |M|)$. Пусть H/M — холлова p'-подгруппа группы G/M. Тогда H/M является максимальной подгруппой в группе G/M и, значит, H — неразрешимая максимальная подгруппа группы G и p делит $(|G : H|, |H|)$. Получили противоречие. Следовательно, M — холлова подгруппа группы G. Тогда по теореме Шура — Цассенхауза $G = M : A$, где A — неединичная подгруппа в G. Так как A действует транзитивно на множестве $\{P_1, \ldots, P_n\}$, то по [7, теорема 5.2.1(б)] $n = |A : N_A(P_1)|$ делит $|A|$. Ввиду того, что $G/M \cong A$ и A — холлова подгруппа группы G, каждый главный фактор группы A изоморфен некоторой силовской p-подгруппе группы G.

Допустим, что $N_A(P_1) = C_A(P_1)$. Пусть $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ — полная система представителей правых смежных классов группы A по подгруппе $N_A(P_1)$ и $P = \{x^{h_1} x^{h_2} \ldots x^{h_n} \mid x \in P_1\} \cong P_1$. Тогда, как и при доказательстве [11, лемма 21], можно показать, что $A \leq C_G(P)$. Если $n = 1$, то $1 \neq A = C_A(P_1) = C_G(P_1)$ является нормальной подгруппой в G и, значит, $S(G) \neq 1$, что не так. Поэтому $n > 1$ и, следовательно, AP — собственная подгруппа группы G. Рассмотрим максимальную подгруппу H группы G, содержащую AP. Тогда подгруппа H неразрешима, $|G : H|$ делит $|M|$ и, значит, H не является холловой подгруппой в группе G, а это противоречит тому, что $G \in \mathfrak{T}_h$.

Таким образом, $N_A(P_1) \neq C_A(P_1)$. Так как по [7, теорема 8.3.2] $N_G(P_1)/C_G(P_1)$ изоморфна подгруппе из $Aut(P_1)$ и $M < N_G(P_1)$, то по [7, предложение 3.2.1] получим, что $N_G(P_1) = M : N_A(P_1)$ и $P_1 C_G(P_1) = M : C_A(P_1)$. Теперь из $Out(P_1) = Aut(P_1)/Inn(P_1) \cong Aut(P_1)/P_1$ следует, что $N_G(P_1)/P_1 C_G(P_1) \cong N_A(P_1)/C_A(P_1) \neq 1$ изоморфна подгруппе из $Out(P_1)$. Поэтому p делит $|Out(P_1)|$ для некоторого $p \in \pi(A)$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — простая неабелева $\mathfrak{J}_h$-группа и $G \notin \mathfrak{J}$. Применяя результаты о минимальных подстановочных представлениях простых групп Шевалле, содержащиеся в работах [1–4; 9], будем выяснять, в каких случаях простая группа Шевалле содержит максимальную подгруппу, которая неразрешима и не является холловой в G.

1. Пусть $G = PSL_{l+1}(q) = L_{l+1}(q) \cong A_l(q)$, где $l \geq 1$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Допустим, что $s > 1$ при $p \geq 5$ и s является составным числом при $p \in \{2, 3\}$. Пусть r — простой делитель числа s и $q_0 = p^{s/r}$. Тогда по [20, § 4.5] в G существует максимальная подгруппа $H \cong N_G(L_{l+1}(q_0))$, причем p делит $(|G : H|, |H|)$. Если $p \geq 5$, то подгруппа H

неразрешима и не является холловой подгруппой в G. Если $p \in \{2, 3\}$, то $s/r \geq 2$ и подгруппа H также неразрешима и не является холловой подгруппой в G.

Таким образом, либо $s = 1$, либо $p \in \{2, 3\}$ и s — простое число.

Теперь выясним, какие значения может принимать натуральное число l. Рассмотрим в группе S параболические максимальные подгруппы типа P_1 и типа P_2 (при $l \geq 2$) (см. [20]). Тогда по [20, предложение 4.1.17] имеем

$$|P_1| = q^{l(l+1)/2}\frac{(q-1)}{d}\prod_{i=1}^{l-1}(q^{i+1}-1) \quad \text{и} \quad |G : P_1| = \frac{q^{l+1}-1}{q-1},$$

$$|P_2| = q^{l(l+1)/2}\frac{(q-1)}{d}(q^2-1)\prod_{i=1}^{l-2}(q^{i+1}-1) \quad \text{и} \quad |G : P_2| = \frac{(q^{l+1}-1)(q^l-1)}{(q-1)(q^2-1)},$$

где $d = (l+1, q-1)$.

1.1. Пусть $l \geq 3$ — нечетное число. Тогда $l + 1 = 2k$, $k > 1$, $q^{2k} - 1$ делится на $q^2 - 1$ и, значит, $(q + 1)$ делит $(|G : P_1|, |P_1|)$. Так как по [6, § 2] при $l \geq 3$ подгруппа P_1 неразрешима, это противоречит условию.

1.2. Пусть $l \geq 6$ — четное число. Тогда $l = 2m$, $m \geq 3$, и

$$\frac{q^l-1}{q^2-1} = \frac{(q^m-1)(q^m+1)}{q^2-1}.$$

Пусть $d_1 = (q^m - 1, q^2 - 1)$ и $q^m - 1 = d_1 t$. Так как $m \geq 3$, то $t > 1$, t делит $\dfrac{q^l-1}{q^2-1}$ и, значит, t делит $|G : P_2|$. Поскольку $(q^m - 1)$ делит $|P_2|$, то t делит $(|G : P_2|, |P_2|)$, причем по [6, § 2] при $l \geq 6$ подгруппа P_2 неразрешима, что противоречит условию.

1.3. Пусть $l = 4$. Тогда

$$|G : P_2| = \frac{(q^5-1)(q^4-1)}{(q-1)(q^2-1)}.$$

Если q — нечетное число, то 2 делит $(|G : P_2|, |P_2|)$, причем по [6, § 2] P_2 неразрешима, что противоречит условию. Поэтому q — четное число. Если $q = 2$, то $G \cong L_5(2)$. По [16] все максимальные подгруппы в G являются холловыми, и G — группа типа (3) из заключения теоремы. Если $q = 2^r$, где r — простое число, то по [20, § 4.5] G содержит неразрешимую максимальную подгруппу $H \cong N_G(L_5(2))$, причем 2 делит $(|G : H|, |H|)$, что противоречит условию.

1.4. Пусть $l = 2$. Тогда $G = L_3(q)$. Так как $L_3(2) \cong L_2(7)$, то при $q \in \{2, 3\}$ группа G принадлежит $\mathfrak{J}$. Если $q = p^s$, где $p \in \{2, 3\}$ и s — простое число, то по [20, § 4.5] G содержит максимальную подгруппу $H \cong N_G(L_3(p))$, которая неразрешима и не является холловой в G. Поэтому $q = p \geq 5$. Тогда по [22, теорема 1] группа G содержит неразрешимую максимальную подгруппу $PGL_2(q)$, которая не является холловой в G, что противоречит условию.

1.5. Пусть $l = 1$. Тогда $G = L_2(q)$. Если $q = p^r$, где $p \in \{2, 3\}$ и r — простое число, то $G \in \mathfrak{J}$. Так как $L_2(2)$ и $L_2(3)$ разрешимы, то $q = p \geq 5$. Группа $G = L_2(p)$ при $p \geq 5$ содержит неразрешимую максимальную подгруппу, изоморфную A_5, лишь тогда, когда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$, и она является холловой в G лишь тогда, когда $p \equiv \pm 3 \pmod 8$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 9$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{25}$ и, значит, G — группа типа (2) из заключения теоремы.

2. Пусть $G = PSp_{2l}(q) = S_{2l}(q) \cong C_l(q)$, где $l \geq 2$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число и $(2l, q) \neq (4, 2)$.

В работе [9] описаны минимальные подстановочные представления группы G со стабилизатором точки H и степени $n = |G : H|$. Применяя [9, теорема 2], замечаем, что во всех случаях

H является неразрешимой максимальной подгруппой группы G, причем 3 или $q+1$ делит $(n,|H|)$, что противоречит условию.

3. Пусть $G = PSU_{l+1}(q) = U_{l+1}(q) \cong {}^2A_l(q)$, где $l \geq 2$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число и $(l,q) \notin \{(2,2),(3,2)\}$.

В работе [9] описаны минимальные подстановочные представления группы G со стабилизатором точки H и степени $n = |G:H|$. Применяя [9, теорема 3], замечаем, что при $l > 2$ во всех случаях H является неразрешимой максимальной подгруппой группы G, причем $(n,|H|) > 1$, что противоречит условию.

Пусть $l = 2$. Если $p > 2$, то, применяя [22, § 16], нетрудно проверить, что группа $G = U_3(q) = HO(3,q^2)$ не содержит неразрешимых максимальных подгрупп, являющихся холловыми в G. Поэтому $p = 2$. Допустим, что H — неразрешимая максимальная подгруппа группы G и H холлова в G. Тогда $p = 2 \in \pi(H)$ и по [13, теорема 3.3] H является параболической подгруппой в G, а по [13, теорема 5.2] H является подгруппой Бореля в G и, значит, H разрешима, противоречие.

4. Пусть $G = P\Omega_{2l+1}(q) = \Omega_{2l+1}(q) = O_{2l+1}(q) \cong B_l(q)$, где $l \geq 3$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

В работе [4] описаны минимальные подстановочные представления группы G со стабилизатором точки H и степени $n = |G:H|$. Применяя [4, теорема], замечаем, что 2 делит $(n,|H|)$ и H — неразрешимая максимальная подгруппа группы G, что противоречит условию.

5. Пусть $G = P\Omega^+_{2l}(q) = O^+_{2l}(q) \cong D_l(q)$, где $l \geq 4$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

В работе [4] описаны минимальные подстановочные представления простой ортогональной группы G со стабилизатором точки H и степени $n = |G:H|$. Применяя [4, теорема], нетрудно проверить, что во всех случаях $(n,|H|) > 1$ и H — неразрешимая максимальная подгруппа группы G, что противоречит условию.

6. Пусть $G = P\Omega^-_{2l}(q) = O^-_{2l}(q) \cong {}^2D_l(q)$, где $l \geq 4$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

В работе [4] описаны минимальные подстановочные представления группы G со стабилизатором точки H и степени $n = |G:H|$. Применяя [4, теорема], нетрудно проверить, что во всех случаях $(n,|H|) > 1$ и H — неразрешимая максимальная подгруппа группы G, что противоречит условию.

7. Пусть $G = G_2(q)$, где $q = p^s \geq 3$, $s \geq 1$, p — простое число.

В работе [1, теорема 1] приведены степени $n = |G:P|$ минимальных подстановочных представлений группы G и соответствующие стабилизаторы точек P. Нетрудно проверить, что во всех случаях P — неразрешимая максимальная подгруппа в G, причем $(n,|P|) > 1$, т. е. P не является холловой подгруппой в G, что противоречит условию.

8. Пусть $G = F_4(q)$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Тогда $|G| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$. По [1, теорема 2] группа G обладает минимальным подстановочным представлением степени

$$n = |G:P| = \frac{(q^{12}-1)(q^4+1)}{q-1}$$

со стабилизатором точки P, причем P — неразрешимая максимальная подгруппа группы G. Покажем, что P не является холловой в G.

Пусть $q = 2^s$. Тогда

$$P \cong (2^s \cdot 2^{8s} \times 2^{6s}) : (C_3(q) \times (q-1)).$$

Так как

$$|C_3(q)| = \frac{1}{d}\, q^9(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1), \quad \text{где } d = (2, q-1),$$

то $q+1$ делит $(n,|P|)$. Пусть $q = p^s$ нечетно. Тогда

$$P \cong (p^s \cdot p^{14s}) : \big(2 \cdot \big(C_3(q) \times (q-1)/2\big) \cdot 2\big) \quad \text{или} \quad P \cong (p^{7s} \cdot p^{8s}) : \big(2 \cdot (B_3(q) \times (q-1)/2\big) \cdot 2\big)$$

и опять $q+1$ делит $(n,|P|)$.

9. Пусть $G = E_6(q)$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Тогда по [16, табл. 6]

$$|G| = \frac{1}{d}\, q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1), \quad \text{где} \quad d = (3, q-1),$$

и по [2, теорема 1] группа G содержит максимальную подгруппу

$$P \cong p^{16s} : \big(e \cdot \big(D_5(q) \times (q-1)/e'\big) \cdot e\big) \quad \text{и} \quad n = |G:P| = \frac{(q^9-1)}{(q^8+q^4+1)(q-1)},$$

где $e = (q-1, 4)$, $e' = ed$. Так как $D_5(q)$ — простая неабелева группа, то P — неразрешимая группа, причем по [16, табл. 6] имеем

$$|D_5(q)| = \frac{1}{d_1}\, q^{20}(q^5-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1), \quad \text{где} \quad d_1 = (4, q^5-1).$$

Тогда q^2+q+1 делит $(n,|P|)$. Следовательно, P не является холловой подгруппой в G.

10. Пусть $G = E_7(q)$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Тогда по [16, табл. 6]

$$|G| = \frac{1}{d}\, q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1), \quad \text{где} \quad d = (2, q-1),$$

и по [2, теорема 2] группа G содержит максимальную подгруппу

$$P \cong p^{27s} : \big(d'.\big(E_6(q) \times (q-1)/c\big).d'\big),$$

где $d' = (q-1, 3)$, $e = (q-1, 4)$, $c = dd'$, и

$$n = |G:P| = \frac{(q^{14}-1)(q^9+1)(q^5+1)}{q-1}.$$

Применяя п. 9, получим, что q^3+1 делит $(n,|P|)$. Следовательно, P неразрешима и P не является холловой подгруппой в G.

11. Пусть $G = E_8(q)$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Тогда по [16, табл. 6]

$$|G| = q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$$

и по [2, теорема 3] группа G содержит максимальную подгруппу

$$P \cong p^s \cdot p^{56s} : (d \cdot (E_7(q) \times (q-1)/d) \cdot d), \quad \text{где} \quad d = (q-1, 2),$$

и

$$n = |G:P| = \frac{(q^{30}-1)(q^{12}+1)(q^{10}+1)(q^6+1)}{q-1}.$$

Применяя п. 10, замечаем, что q^6+1 делит $(n,|P|)$. Следовательно, P неразрешима и P не является холловой подгруппой в группе G.

12. Пусть $G = Sz(2^{2m+1}) \cong {}^2B_2(q)$, где $q = 2^{2m+1}$, $m \geq 1$.

Из работы [25] следует, что $|G| = q^2(q^2+1)(q-1)$ и все максимальные подгруппы в группе G известны. Если $2m+1$ — простое число, то все максимальные подгруппы группы G разрешимы, т. е. $G \in \mathfrak{J}$. Пусть $2m+1$ не является простым числом и r — простой делитель числа $2m+1$.

Из [25] следует, что G содержит подгруппу $H \cong Sz(q_0)$, где ${q_0}^r = q$, причем $|H| = {q_0}^2({q_0}^2 + 1)(q_0 - 1)$, $q_0 \geq 8$. Подгруппа H неразрешима и не является холловой в G.

13. Пусть $G = {}^3D_4(q)$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

По [16, табл. 6] $|G| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$ и по [3, теорема 3] группа G содержит максимальную подгруппу

$$P \cong (p^s \cdot p^{8s}) : \big(d \cdot \big(A_1(q^3) \times (q-1)/d\big) \cdot d\big), \quad \text{где} \ \ d = (q-1, 2),$$

и

$$n = |G : P| = (q^8 + q^4 + 1)(q + 1).$$

Так как $|A_1(q^3)| = q^3(q^6 - 1)$ и $A_1(q^3) \cong L_2(q^3)$ — неразрешимая группа, то P — неразрешимая максимальная подгруппа группы G, причем $q + 1$ делит $(n, |P|)$.

14. Пусть $G = {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$.

По [23] имеем $|G| = q^3(q^3+1)(q-1)$ и G содержит неразрешимую максимальную подгруппу $H \cong 2 \times L_2(q)$. Так как q делит $(|G : H|, |H|)$, то H не является холловой подгруппой в G.

15. Пусть $G = {}^2F_4(q)$, $q = 2^s$, s — нечетное натуральное число, большее 1.

Тогда по [16, табл. 6] $|G| = q^{12}(q^6 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q - 1)$. По [3, теорема 5] группа G содержит неразрешимую максимальную подгруппу

$$P \cong (2^s \cdot 2^{4s} \cdot 2^{5s}) : ({}^2B_2(q) \times (q - 1)).$$

Так как $|{}^2B_2(q)| = q^2(q^2+1)(q-1)$, то q^2+1 делит $(|G : P|, |P|)$. Следовательно, P не является холловой подгруппой в группе G.

16. Пусть $G = {}^2E_6(q)$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Тогда по [16, табл. 6]

$$|G| = \frac{1}{d}\, q^{36}(q^{12} - 1)(q^9 + 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^5 + 1)(q^2 - 1), \quad \text{где} \ \ d = (3, q + 1),$$

и по [3, теорема 4] группа G содержит неразрешимую максимальную подгруппу

$$P \cong (p^s \cdot p^{20s}) : (d_+ \cdot {}^2A_5(q) \times (q - 1)/c) \cdot c, \quad \text{где} \ \ d_+ = (q + 1, 2), \quad c = (q + 1, 3),$$

и

$$n = |G : P| = \frac{(q^{12} - 1)(q^6 - q^3 + 1)(q^4 + 1)}{q - 1}.$$

Так как

$$|{}^2A_5(q)| = q^{15}(q^2 - 1)(q^3 + 1)(q^4 - 1)(q^5 + 1)(q^6 - 1),$$

то $(|G : P|, |P|) > 1$ и, значит, P не является холловой подгруппой в группе G.

17. Пусть $G = A_n$, $n \geq 5$. Так как $A_5 \in \mathfrak{J}$, а при $n = 6$ группа G содержит неразрешимую максимальную подгруппу $H \cong A_5$, которая не является холловой подгруппой в G, то можно считать, что $n \geq 7$. Пусть A — множество всех подстановок из S_n, оставляющих на месте каждые из k первых символов, а B — множество всех подстановок из S_n, оставляющих на месте все символы, начиная с $(k+1)$-го. Тогда $A \cong S_{n-k}$, $B \cong S_k$, $A \leq S_n$, $B \leq S_n$ и $A \times B \leq S_n$. По [21], если $k \neq n/2$, то $H := G \cap (A \times B)$ является максимальной подгруппой в группе G. Пусть $k = 2$. Тогда $H \cong A \cong S_{n-2}$ и $n - 2 \geq 5$, поэтому H — неразрешимая максимальная подгруппа порядка $(n - 2)!$ в группе G. Отсюда

$$|G : H| = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Поскольку $n \geq 7$, имеем

$$(|G:H|,|H|) = \Big(\frac{n(n-1)}{2}, (n-2)!\Big) > 1.$$

18. Пусть G — одна из 26 спорадических групп. Применяя [16], нетрудно проверить, что G содержит неразрешимую максимальную подгруппу, которая не является холловой подгруппой в G.

Применяя пп. 1–18 и классификацию конечных простых групп, заключаем, что G изоморфна одной из групп из заключения теоремы 1. Нетрудно проверить, что в каждой из групп из заключения теоремы 1 каждая максимальная подгруппа разрешима или холлова.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть S — простая неабелева группа. Применяя классификацию конечных простых групп, будем выяснять, в каких случаях $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Так как $\mathfrak{J}_h \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$, то будем считать,что $S \notin \mathfrak{J}_h$. Рассуждения будем проводить, следуя доказательству [10, предложения 2–15].

1. Пусть S изоморфна одной из 26 спорадических простых групп.

Тогда по [5, теорема 4.240] $|Out(S)| \leq 2$ и по лемме 4 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

2. Пусть $S = A_n, n \geq 5$.

По теореме 1 имеем $L_2(5) \in \mathfrak{J}_h$. Поэтому $n \geq 6$. Так как при $n \geq 6$ по [5, теорема 4.239] $Out(A_n)$ является 2-группой и по теореме 1 $A_n \notin \mathfrak{J}_h$, то по лемме 4 $A_n \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$ при $n \geq 6$.

3. Пусть $S = L_n(q) \cong A_{n-1}(q)$, где $n \geq 2$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

3.1. Пусть $n = 2$. Предположим, что $p = 2$. Если s — простое число, то по теореме 1 имеем $S \in \mathfrak{J}_h$. Поэтому s — составное число. Пусть r — простой делитель числа s. Так как $(q-1,n) = (2^s-1,2) = 1$, то по [20, табл. 3.5.A, предложение 4.5.3] группа S содержит максимальную подгруппу $H \cong PGL_2(q_0)$, где $q_0^r = q$ и класс сопряженных с H подгрупп в S инвариантен относительно $Aut(S)$. Поскольку H неразрешима и 2 делит $(|S:H|,|H|)$, то по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Пусть $p = 3$. Так как $L_2(9) \cong A_6$ и по п. 2 $A_6 \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$, то можем считать, что $s > 2$. Если s — простое число, то по теореме 1 имеем $S \in \mathfrak{J}_h$. Поэтому s — составное число. Если $s = 2^\alpha$, где $\alpha \geq 2$, то по [16, табл. 5] $Out(S)$ является 2-группой и по лемме 4 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Пусть r — нечетный простой делитель числа s и $s = rk$. Тогда по [20, табл. 3.5.A, предложение 4.5.3] группа S содержит максимальную подгруппу $H \cong L_2(3^k)$, причем класс сопряженных с H подгрупп в S инвариантен относительно $Aut(S)$, так как

$$c = \frac{3^{rk}-1}{[3^k-1,(3^{rk}-1)/2]} = \frac{(3^k-1)d}{[3^k-1,d(3^k-1)/2]} = \frac{(3^k-1)d}{((3^k-1)/2)[2,d]} = 1$$

(см. [20, § 1.2]). Так как H неразрешима и 3 делит $(|S:H|,|H|)$, то по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Пусть $p > 3$. Если $s = 1$, то по [16, табл. 5] $|Out(S)| = 2$ и по лемме 4 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Пусть $s > 1$. Если s является степенью числа 2, то $Out(S)$ является 2-группой и по лемме 4 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Следовательно, составное число s делится на нечетное простое число. Теперь, как и выше при $p = 3$, получим, что $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Пусть далее $n \geq 3$. Так как $L_3(2) \cong L_2(7)$, то по теореме 1 имеем $\{L_3(2), L_3(3), L_5(2)\} \subseteq \mathfrak{J}_h$. Поэтому можем считать, что $(n,q) \notin \{(3,2),(3,3),(5,2)\}$. По [16, табл. 5] $|Out(S)| = |Out(L_n(q))| = dfg$, где $d = (n, q-1)$, $f = s$ и $g = 2$.

3.2. Пусть $n \in \{3,5\}$. Предположим, что $d = 1$. Если $s = 2^k$, где $k \geq 0$, то $Out(S)$ является 2-группой и по лемме 4 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Поэтому можем считать, что существует нечетный простой делитель r числа s. Пусть $q_0^r = q$. Тогда по [20, табл. 3.5.A, предложение 4.5.3] группа S

содержит максимальную подгруппу $H \cong PGL_n(q_0))$, причем класс сопряженных с H подгрупп в S инвариантен относительно $Aut(S)$, так как

$$c = \frac{q-1}{[q_0-1,(q-1)/(q-1,n)]} = 1.$$

По лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Пусть $d > 1$ и H — подгруппа из S типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$ (см. [20]), где $m = 1$ и $n - m = n - 1 \in \{2,4\}$. Так как $q \geq 4$ при $n = 3$ и $q \geq 3$ при $n = 5$, то по [20, предложение 4.1.4] подгруппа H неразрешима и класс сопряженных в H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным, причем $|H|$ делится на $6p$. Пусть $H \leq Y < S$. Так как $d = (n, q-1) > 1$ и $n \in \{3,5\}$, то n делит $(q-1)$ и по [13, теорема 1.2] Y не является холловой подгруппой в S. Тогда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

3.3. Пусть $n \in \{4,6\}$ и H — подгруппа в группе S типа P_m (см. [20]), где $m = n/2 \in \{2,3\}$. Тогда по [20, табл. 3.5.A, предложение 4.1.17] H является максимальной подгруппой группы S и класс сопряженных в H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным, причем H содержит секцию, изоморфную $L_m(q)$. При $n = 6$ имеем $m = 3$, и, значит, подгруппа H неразрешима. Пусть $n = 4$. Если $s = 2^k$, где $k \geq 0$, то $Out(S)$ является 2-группой и по лемме 4 $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Пусть $r > 2$ — простой делитель числа s. Тогда $m = 2$, $q > 4$ и подгруппа H неразрешима. По [13, теорема 1.2] H не является холловой в S. Тогда по лемме 3 $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

3.4. Пусть $n > 6$, H — подгруппа группы S типа $P_{2,n-2}$, т.е. стабилизатор в S пары подпространств W и U соответствующего группе S векторного пространства V такой, что $W < U < V$, $\dim W = 2$ и $\dim U = n-2$ (см. [20]). Тогда по [20, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22] H является неразрешимой подгруппой группы S и класс сопряженных в H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным, причем $\{2,3,p\} \subseteq \pi(H)$. Собственными надгруппами подгруппы H в S являются лишь стабилизатор X в S подпространства W и стабилизатор Y в S подпространства U. Поэтому ввиду [13, теорема 1.2] подгруппы H, X, Y не являются холловыми в группе S и по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

4. Пусть $S = U_{l+1}(q) \cong {}^2A_l(q)$, где $l \geq 2$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число и $(l,q) \neq (2.2)$. По [16] $|Out(U_4(2))| = |Out(U_3(3))| = 2$. Отсюда по лемме 4 имеем $\{U_4(2), U_3(3)\} \nsubseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Поэтому $(l,q) \notin \{(2,2),(3,2),(2,3)\}$. По [20, табл. 3.5.B, предложение 4.1.4] группа S содержит неразрешимую подгруппу H типа $GU_1(q) \perp GU_l(q)$, причем класс сопряженных с H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным и $\{2,3,p\} \subseteq \pi(H)$. Пусть $H \leq Y < S$. Тогда по [13, теорема 1.2] подгруппа Y не является холловой в группе S и по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

5. Пусть $S = S_{2l}(q) \cong C_l(q)$, где $l \geq 2$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

По [20, предложение 2.9.1] $S_4(3) \cong U_4(2) \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$ и $S_4(2)' \cong A_6 \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Поэтому $(2l,q) \notin \{(4,2),(4,3)\}$. Если $s = 2^k$, где $k \geq 0$, то по [16, табл. 5] $Out(S)$ является 2-группой и, следовательно, по лемме 4 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Поэтому можем считать, что существует нечетный простой делитель r числа s.

Пусть $(l,p) \neq (2,2)$. Рассмотрим в группе S подгруппу H типа P_1 при $l = 2$ и типа P_2 при $l > 2$ (см. [20]). Тогда по [20, табл. 3.5.C, предложение 4.1.19] H является неразрешимой максимальной подгруппой группы S и класс сопряженных с H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным. Так как $\{2,3,p\} \subseteq \pi(H)$, то по [13, теорема 1.2] H не является холловой подгруппой в S. Тогда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Пусть $(l,p) = (2,2)$. Тогда $S = S_4(2^s)$ и можем считать, что существует нечетный простой делитель r числа s. Как и в [10, предложение 7], можно показать, что группа S содержит неразрешимую максимальную подгруппу $H \cong S_4(2^{s/r})$, причем класс сопряженных с H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным и 2 делит $(|H|, |S:H|)$. Тогда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

6. Пусть $S = P\Omega_{2l+1}(q) = O_{2l+1}(q) \cong B_l(q)$, где $l \geq 3$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Рассмотрим в группе S подгруппу H типа P_2 (см. [20]). Тогда по [20, табл. 3.5.D, предложение 4.1.20] H — неразрешимая максимальная подгруппа группы S и класс сопряженных с H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным. По [13, теорема 5.2] H не является холловой подгруппой в S. Тогда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

7. Пусть $S = P\Omega^{\pm}_{2l}(q) = O^{\pm}_{2l}(q)$, где $l \geq 4$, $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Если $s = 2^k$, где $k \geq 0$, то по [16, табл. 5] $Out(S)$ является 2-группой. Тогда по лемме 4 $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Следовательно, существует нечетный простой делитель r числа s. По [20, табл. 3.5.E и 3.5.F, предложение 4.5.10] имеем, что группа S содержит неразрешимую максимальную подгруппу $H \cong O^{\mp}_{2l}(q^{1/r})$, причем класс сопряженных с H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным и p делит $(|H|, |S : H|)$. Отсюда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

8. Пусть $S \in \{E_8(q), E_7(q), {}^2E_6(q^2), {}^3D_4(q^3), {}^2F_4(2^{2n+1})\}$.

Как и при доказательстве [10, предложение 11], рассмотрим в группе S параболическую максимальную подгруппу H. Как и при доказательстве теоремы 1, полагаем $H = P$ соответственно по п. 11, 10, 16, 13, 15 и, значит, H — неразрешимая нехоллова максимальная подгруппа группы S. По [7, III] класс сопряженных с H подгрупп в S является $Aut(S)$-инвариантным. Тогда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

9. Пусть $S = Re(q) \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$, $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$.

По [8, лемма 3] все подгруппы группы S, изоморфные $Re(3)$, образуют один класс сопряженных подгрупп в S. Следовательно, класс сопряженности подгруппы $Re(3)$ в S является $Aut(S)$-инвариантным. По [13, теорема 1.2] все собственные подгруппы группы S, содержащие $Re(3)$, не являются холловыми в S. Тогда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

10. Пусть $S \in \{E_6(q), F_4(q)\}$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Рассмотрим, как и при доказательстве [10, предложения 12, 13], в группе S параболическую нехоллову максимальную подгруппу H, класс сопряженности которой инвариантен относительно $Aut(S)$. По [6, теорема 2.2] подгруппа H неразрешима. Тогда по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

11. Пусть $S = G_2(q)$, где $q = p^s$, $s \geq 1$, p — простое число.

Если $s = 2^k$, где $k \geq 0$, то по [16, табл. 5] $Out(S)$ является 2-группой и, следовательно, по лемме 4 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$. Следовательно, существует нечетный простой делитель r числа s. В частности, $q > 4$.

Если $p = 2$, то по [18, теорема 2.3] группа S содержит точно один класс сопряженных максимальных подгрупп с представителем $H \cong SL_2(q) \times SL_2(q)$. Тогда этот класс является $Aut(S)$-инвариантным и q делит $(|H|, |S : H|)$. Поскольку H неразрешима, то по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Пусть $p > 2$ и $q_0^r = q$, где r — нечетный простой делитель числа s. Тогда по [19, теорема A] S содержит один класс сопряженных максимальных подгрупп с представителем $H \cong G_2(q_0)$. Отсюда этот класс является $Aut(S)$-инвариантным и q делит $(|H|, |S : H|)$. Поскольку H неразрешима, то по лемме 3 имеем $S \notin \mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h)$.

Применяя пп. 1–11 и классификацию конечных простых групп, получим, что

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{T}_h) \subseteq \mathfrak{I}_h \cup (\{Sz(q) \mid q = 2^{2m+1}, \text{ где } 2m+1 - \text{составное число}\}).$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть G — неразрешимая $\mathfrak{T}_h$-группа, $S(G) = 1$ и $M = P_1 \times \cdots \times P_n$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, где $P_1, \ldots, P_n$ — попарно изоморфные простые неабелевы группы. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $G = P_1 \in \mathfrak{I}_h$.

(2) $G = M : A$, *где $A \neq 1$ является холловой подгруппой нечетного порядка, а главные факторы группы A изоморфны силовским подгруппам из G, $C_G(M) = 1$, n делит $|A|$, $N_A(P_1) \neq C_A(P_1)$ и P_1 изоморфна одной из следующих групп*:

(a) $L_2(2^p)$, *p — нечетное простое число*;
(b) $L_2(3^p)$, *p — нечетное простое число*;
(c) $Sz(q)$, *$q = 2^{2m+1}$, $m \geq 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G — простая неабелева $\mathfrak{T}_h$-группа, то $G = P_1 \in \mathfrak{J}_h$ — группа типа (1). Пусть G — непростая неразрешимая $\mathfrak{T}_h$-группа. Тогда по теореме 2 $\mathfrak{K}(G) \subseteq \mathfrak{J}_h \cup (\{Sz(q) \mid q = 2^{2m+1},\ 2m+1$ — составное число$\})$. Так как группы внешних автоморфизмов простых групп $L_2(p)$, где $p > 3$ — простое число, $L_5(2)$ и $L_3(3)$ имеют порядок 2, то по лемме 4 они не встречаются. Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть G — неразрешимая группа и $S(G) = 1$. В группе G каждая неразрешимая подгруппа является холловой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$G \in \mathfrak{J}_h$ и G не изоморфна $L_5(2)$.*

(2) *$G \cong P : p \leq Aut(P)$, где группа P изоморфна $L_2(2^p), L_2(3^p)$ или $Sz(2^p)$, p — нечетное простое число и $(|P|, p) = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть в неразрешимой группе G каждая неразрешимая подгруппа является холловой и $S(G) = 1$. Тогда G является неразрешимой $\mathfrak{T}_h$-группой и G изоморфна одной из групп пп. (1) или (2) следствия 1. Пусть G — простая неабелева группа. Тогда $G \in \mathfrak{J}_h$. Так как $L_5(2) \in \mathfrak{J}_h$ и по [16, с. 70] она содержит нехоллову подгруппу, изоморфную $L_3(2)$, а в любой $\mathfrak{J}_h$-группе, неизоморфной $L_5(2)$, каждая неразрешимая подгруппа является холловой, то G — группа из п. (1) следствия 2.

Пусть G — непростая группа. Тогда $M = P_1 = P$, $C_G(P) = 1$ и, значит, G изоморфна подгруппе из $Aut(P)$ и P изоморфна одной из групп из пп. (a), (b), (c) из заключения следствия 1. Если P из пп. (a), (b), то, учитывая $Aut(P)$ [16, табл. 5], получим, что G из п. (2) следствия 2. Пусть P изоморфна одной из групп п. (c) заключения следствия 1. Допустим, что $s = 2m+1$ — составное число и r — простой делитель s. Тогда P содержит неразрешимую подгруппу H, изоморфную $Sz(2^{s/r})$, которая нехоллова в P (см. доказательство теоремы 1, п. 12), и значит, H нехоллова в G. Получили противоречие. Следовательно, $s = p$ — простое число. Учитывая порядок $Aut(P)$ [16, табл. 5], получим, что G из п. (2) следствия 2.

Достаточность. Нетрудно проверить, что в любой группе, изоморфной одной из групп из пп. (1) и (2) следствия 2, каждая неразрешимая подгруппа является холловой. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 2. Остается открытым вопрос: “Можно ли в заключениях теоремы 2, а также следствия 1 исключить класс групп $(\{Sz(q) : q = 2^{2m+1},\ 2m+1$ — составное число$\})$?”

Автор выражает благодарность профессору А. С. Кондратьеву за уточнение формулировки следствия 2 и рецензенту за замечания по оформлению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 663–684.
2. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа E_6, E_7 и E_8 // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 518–530.
3. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 1. С. 17–35.
4. **Васильев А.В., Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных простых ортогональных групп // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 6. С. 603–627.
5. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. Москва: Мир, 1985. 352 с.
6. **Кондратьев А.С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.

7. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
8. **Левчук В.М., Нужин Я.Н.** О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.
9. **Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные, линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 267–287.
10. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
11. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, все максимальные подгруппы которых холловы // Мат. труды. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.
12. **Монахов В.С.** Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.
13. **Ревин Д.О.** Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 1. С. 157–205.
14. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. Москва: Мир, 1976. 262 с.
15. **Тихоненко Т.В., Тютянов В.Н.** Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. Т. 50, № 5. С. 198–206.
16. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
17. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972. 331 p.
18. **Cooperstein B.N.** Maxsimal subgroups of $G_2(2^n)$ // J. Algebra. 1981. Vol. 70, no. 1. P. 23–36.
19. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 117, no. 1. P. 30–71.
20. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 303 p.
21. **Liebeck M.W., Praeger C., Saxl J.** A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383.
22. **Mitchel H.H.** Determination of the ordinary and modular ternary liner groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1911. Vol. 12, no. 2. P. 207–242.
23. **Ree R.** A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (G_2) // Am. J. Math. 1961. Vol. 83, no. 3. P. 432–462.
24. **Ree R.** A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (F_4) // Am. J. Math. 1961. Vol. 83, no. 3. P. 401–420.
25. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
26. **Thompson J.G.** Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, no. 3. P. 383–437.

Ведерников Виктор Александрович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
Московский городской педагогический университет
e-mail: vavedernikov@mail.ru

Поступила 18.02.2013

Том 19 № 3 2013

УДК 512.566

ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ И ЗАМКНУТЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ $[0,1]$-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ТОПОЛОГИЕЙ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

В работе для произвольного тихоновского пространства X описаны замкнутые идеалы и замкнутые конгруэнции топологического полукольца $C_p(X,\mathbf{I})$ всех непрерывных функций на X со значениями в единичном отрезке $\mathbf{I}$, рассматриваемом с топологией поточечной сходимости. Установлена двойственность между категорией тихоновских пространств X с непрерывными отображениями и категорией топологических полуколец $C_p(X,\mathbf{I})$ с непрерывными гомоморфизмами, сохраняющими константы.

Ключевые слова: полукольцо, непрерывная функция, тихоновская топология, замкнутый идеал, замкнутая конгруэнция, двойственность.

E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. Closed ideals and closed congruences of semirings of $[0,1]$-valued functions with topology of pointwise convergence.

For an arbitrary Tychonoff space X, we describe closed ideals and closed congruences of the topological semiring $C_p(X,\mathbf{I})$ of all continuous functions on X with values in the closed unit interval $\mathbf{I}$ considered in the topology of pointwise convergence. The duality between the category of Tychonoff spaces X with continuous mappings and the category of topological semirings $C_p(X,\mathbf{I})$ with continuous homomorphisms preserving constants is established.

Keywords: semiring, continuous function, Tychonoff topology, closed ideal, closed congruence, duality.

Введение. Предварительные сведения

Полукольца $C^+(X) = C(X,\mathbb{R}^+)$ всех непрерывных неотрицательных действительнозначных функций на топологических пространствах X систематически изучаются с середины 1990-х гг. [3]. Их изучение базируется на классической теории колец $C(X) = C(X,\mathbb{R})$ всех непрерывных действительнозначных функций на X (см. монографию Гиллмана и Джерисона [13]). В данной работе продолжается исследование идемпотентных полуколец непрерывных функций на тихоновских пространствах X со значениями в единичном отрезке $\mathbf{I} = [0,1]$, начатое в [3; 5; 7]. Основные результаты предлагаемой статьи были анонсированы в [10].

Введем исходные определения и обозначения. Отметим, что основы общей топологии можно найти в книге Энгелькинга [12], решеточные понятия — в монографии Гретцера [9].

Полукольцом [14] называется непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, для которых $\langle S,+\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1 и $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$, $0\cdot a = 0 = a\cdot 0$ для любых $a,b,c \in S$.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\mathbf{I} = [0,1]$ — единичный числовой отрезок, рассматриваемый с обычными операциями умножения $\cdot$, max ($\vee$), min ($\wedge$) и со стандартной топологией. Через $\mathbf{I}^X$ обозначается полукольцо всех функций $X \to \mathbf{I}$ с поточечно определенными операциями сложения $\vee$ и умножения $\cdot$, а также взятия min функций и поточечным отношением порядка:

$$\text{для любых функций } f,g \in C(X,\mathbf{I}) \text{ и всех точек } x \in X$$

$$(f\vee g)(x) = \max(f(x),g(x)), (f\wedge g)(x) = \min(f(x),g(x)), (fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$f \le g \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \quad \text{для всех} \ \ x \in X.$$

Пусть $C(X, \mathbf{I})$ — алгебраическая структура всех непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце $\mathbf{I}$, относительно операций сложения $\vee$ и умножения. Получаем коммутативное аддитивно идемпотентное полукольцо $C(X, \mathbf{I})$.

Под *окрестностью* подмножества топологического пространства понимается любое содержащее его открытое множество. Через $\overline{U}$ будем обозначать замыкание множества $U \subseteq X$, через U^0 — его внутренность. Каждой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$ соответствуют *нуль-множество* $\mathrm{Z}(f) = f^{-1}(0)$, его внутренность $\mathrm{Z}^0(f)$ и *конуль-множество* $\mathrm{coz} f = X \setminus Z(f)$.

Стоун-чеховская компактификация βX тихоновского пространства X определяется следующими условиями:

1) βX — *компакт*, т. е. компактное хаусдорфовое пространство;

2) X — плотное подпространство в βX;

3) любая ограниченная функция из $C(X)$ продолжается до некоторой функции из $C(\beta X)$, равносильно каждая функция из $C(X, \mathbf{I})$ продолжается до функции из $C(\beta X, \mathbf{I})$.

Продолжение любой ограниченной функции $f \in C(X, \mathbf{I})$ на βX определяется единственным образом и обозначается через $f^\beta \in C(\beta X, \mathbf{I})$. Легко видеть, что имеет место

Лемма 1. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда $\mathrm{Z}^0(f^\beta) = (\overline{Z(f)}_{\beta X})^0$ для любой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$.*

Замечание 1. На любом топологическом пространстве X вводится следующее отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$, если $f(x) = f(y)$ для любой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$. На фактормножестве $\tau X = X/\sim$ существует слабейшая топология, относительно которой непрерывны все функции $\overline{f} : \tau X \to \mathbf{I}$, где $f \in C(X, \mathbf{I})$ и $\overline{f}(\widetilde{x}) = f(x)$ при любом $x \in X$ ([13, p. 41]). Пространство τX *тихоновское*, т. е. такое T_1-пространство, что для всякого замкнутого множества $A \subseteq \tau X$ и любой точки $x \in \tau X \setminus A$ существует функция $f \in C(X, \mathbf{I})$, равная 0 на A и 1 в точке x. Полукольца $C(X, \mathbf{I})$ и $C(\tau X, \mathbf{I})$ изоморфны при каноническом отображении $f \mapsto \tilde{f}$. Для пространства τX существует стоун-чеховская компактификация $\beta(\tau X) = Z$, при этом имеет место изоморфизм $C(\tau X, \mathbf{I})$ на $C(Z, \mathbf{I})$. Таким образом, любому топологическому пространству X соответствует компакт $Z = \beta\tau X$ такой, что полукольца $C(X, \mathbf{I})$ и $C(Z, \mathbf{I})$ канонически изоморфны.

Идеалом (*фильтром*) коммутативного полукольца S называется всякое его непустое подмножество J такое, что для любых $a, b \in J$, $s \in S$ выполняется: $as \in J$, $a + b \in J$ ($a + s \in J$, $ab \in J$). Идеал (фильтр) J в S называется *простым*, если его дополнение до S непусто и мультипликативно (аддитивно) замкнуто. Идеал J полукольца S называется *полупростым*, если $a^2 \in J$ влечет $a \in J$ для любого $a \in S$. Будем называть идеал J полукольца S *выпуклым*, если $a \in J$ влечет $b \in J$ для любого $b \in S$, $b \leq a$.

Отношение эквивалентности ρ на полукольце S называется *конгруэнцией*, если ρ сохраняет полукольцевые операции, т. е. $\forall a, b, a_1, b_1 \in S (a\rho b$ и $a_1\rho b_1 \implies (a + a_1)\rho(b + b_1)$ и $(aa_1)\rho(bb_1))$. Примером конгруэнции на полукольце S служит отношение Берна ρ_J по любому идеалу J в $S : a\rho_J b \iff a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in J$.

Для тихоновского пространства X, подмножества $A \subseteq \beta X$ и точки $y \in \beta X$ полагаем

$$O^A = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : A \subseteq (\overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X})^0\},\ O^y = O^{\{y\}},$$

$$M^A = \{f \in C(X, \mathbf{I})) : A \subseteq \overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}\},\ M^y = M^{\{y\}}.$$

При этом O^A, M^A — идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$.

В частности, для $A \subseteq X$ и $x \in X$ имеем

$$O^A = O_A = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : A \subseteq \mathrm{Z}^0(f)\},$$

$$O^x = O_x = O_{\{x\}} = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : x \in \mathrm{Z}^0(f)\} = \bigcup \{M_{\overline{U}} : U \text{ — окрестность точки } x\},$$

$$M^A = M_A = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f(A) = \{0\}\},\ M_x = M_{\{x\}},$$

$$N^x = N_x = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f(x) \neq 1\}.$$

Любому подмножеству $A \subseteq X$ соответствует конгруэнция

$$\rho_A : f\rho_A g \Leftrightarrow f = g \text{ на } A \Leftrightarrow A \subseteq \mathrm{Z}(f-g).$$

Следующие две общеизвестные леммы позволяют “строить” функции полукольца $C(X,\mathbf{I})$ по заданным параметрам.

Лемма 2 [6, лемма 1]. *Пусть X — тихоновское пространство и $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — его различные точки. Тогда существуют такая функция $e \in C(X,\mathbf{I})$, что $e(x_1) = 1$ и $e(x_i) = 0$ при $i = 2, \ldots, k$.*

Лемма 3 [6, лемма 2]. *Пусть X — тихоновское пространство и U — окрестность точки $x \in X$. Тогда существуют такие окрестности $V \subseteq W$ точки x и функция $f \in C(X,\mathbf{I})$, что $\overline{W} \subseteq U$, $f(X \setminus W) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$.*

Полукольцо $C(X,\mathbf{I})$ можно понимать как подпространство тихоновской степени $\mathbf{I}^X$ $|X|$ экземпляров единичного отрезка $\mathbf{I}$ (с топологией поточечной сходимости). Обозначим соответствующее топологическое полукольцо через $C_p(X,\mathbf{I})$. Для любого $x \in X$ проектирование $\pi_x : C_p(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, определяемое формулой $\pi_x(f) = f(x)$ для всех $f \in C_p(X,\mathbf{I})$, является непрерывным эпиморфизмом топологических полуколец. При этом предбазу топологии поточечной сходимости образует совокупность множеств вида $\pi_x^{-1}(U)$, где U — произвольное открытое множество в $\mathbf{I}$. База топологии поточечной сходимости состоит из всевозможных конечных пересечений $\bigcap_{x\in A}\{\pi_x^{-1}(U_x)\} = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f(x) \in U_x, x \in A\} = U(x_1,\ldots,x_n; U_{x_1},\ldots,U_{x_n})$, где $A = \{x_1,\ldots,x_n\}$ — конечное подмножество в X и U_x — открытое подмножество пространства $\mathbf{I}$ для всех $x \in A$.

Идеал J полукольца $C_p(X,\mathbf{I})$ называется *замкнутым идеалом*, если J есть замкнутое множество в $C_p(X,\mathbf{I})$. Легко видеть, что для произвольной функции $\varphi \in \mathbf{I}^X$ множество

$$J(\varphi) = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f \le \varphi\}$$

будет замкнутым идеалом в $C_p(X,\mathbf{I})$.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнция ρ на полукольце $C(X,\mathbf{I})$ называется *замкнутой*, если множество $\{(f,g) : f,g \in C(X,\mathbf{I}), f\rho g\}$ замкнуто в тихоновском квадрате $C_p(X,\mathbf{I}) \times C_p(X,\mathbf{I})$.

Примером замкнутой конгруэнции служит конгруэнция ρ_A для любого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ [11].

1. Sc-функции

В данной работе инструментом изучения замкнутых идеалов и замкнутых конгруэнций являются sc-функции.

Для непустого подмножества $M \subseteq \mathbf{I}^X$ обозначим через r_M точную верхнюю грань множества M в полной решетке $\mathbf{I}^X$.

О п р е д е л е н и е 2. Функцию $\varphi \in \mathbf{I}^X$ назовем *sc-функцией*, если $\varphi = r_M$ для подходящего непустого подмножества $M \subseteq C(X,\mathbf{I})$.

Отметим, что подмножество M в определениии sc-функции можно считать идеалом, поскольку $\sup M = \sup J$ для идеала J, порожденного множеством M.

З а м е ч а н и е 2. В силу результатов Бурбаки (см. [1, теорема 4, с. 192] и [2, предложение 5, с. 22]) sc-функции на произвольном тихоновском пространстве X – это в точности полунепрерывные снизу $[0,1]$-значные функции на X.

Множество всех sc-функций на X обозначим через $SC(X,\mathbf{I})$. Имеют место включения $C(X,\mathbf{I}) \subseteq SC(X,\mathbf{I}) \subseteq \mathbf{I}^X$. Относительно поточечного порядка $SC(X,\mathbf{I})$ является ограниченной дистрибутивной решеткой — подрешеткой в $\mathbf{I}^X$ (предложение 1), не являющейся, вообще говоря, полной подрешеткой в $\mathbf{I}^X$. Множество $SC(X,\mathbf{I})$ содержит точную верхнюю грань в $\mathbf{I}^X$ любого непустого множества своих элементов, но не обязано содержать их точную нижнюю грань.

П р и м е р ы. 1. Положим

$$\varphi_A(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in A; \\ 1, & \text{если } y \in X \setminus A \end{cases}$$

для произвольного подмножества A топологического пространства X. Отметим, что функция $\varphi_A = \chi_{(X\setminus A)}$ является характеристической функцией множества $X \setminus A \subseteq X$. Если множество A не замкнуто в топологическом пространстве X, то функция φ_A не является sc-функцией. Легко видеть, что тихоновость T_1-пространства X равносильна тому, что для любого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ функция φ_A является sc-функцией. Кроме того, для любого замкнутого подмножества A тихоновского пространства X имеем $\varphi_A = \inf_{x\in A}\varphi_x$ $(\varphi_x = \varphi_{\{x\}})$ в $SC(X,\mathbf{I})$.

2. Пусть даны функция $f \in C(X,\mathbf{I})$ на тихоновском пространстве X и точки $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{coz} f$ для $n \in \mathbb{N}$. Получаем sc-функцию φ, принимающую значения $\varphi(x_i) < f(x_i)$ в точках $x_i, i = 1, \ldots, n$, и $\varphi(x) = f(x)$ в остальных точках $x \in X$. В частности, такой будет функция $\varphi_x = \sup M_x$ в решетке $\mathbf{I}^X$. Легко видеть, что для неизолированной точки $x \in X$ и множества $1 - M_x \subseteq C(X,\mathbf{I})$ функция $\inf(1 - M_x) = 1 - \sup M_x = 1 - \varphi_x$ не является sc-функцией.

3. Для sc-функции φ функция $1 - \varphi$ не обязана быть sc-функцией, как это показывают примеры 1 и 2.

4. Функция Дирихле на числовой прямой $\mathbb{R}$ не является sc-функцией.

Далее укажем основные свойства sc-функций.

Утверждение 1 [8, свойство 1]. *Пусть φ, ψ — произвольные функции из $\mathbf{I}^X$, I, J — некоторые идеалы полукольца $C(X,\mathbf{I})$. Тогда*:
1) $\varphi \leq \psi \Longleftrightarrow J(\varphi) \subseteq J(\psi)$;
2) $J \subseteq I \Longrightarrow r_J \leq r_I$;
3) $\overline{J} \subset \overline{I} \Longrightarrow r_{\overline{J}} < r_{\overline{I}}$;
4) $r_{J(\varphi)} \leq \varphi$;
5) $J(\varphi) = J(r_{J(\varphi)})$.

Утверждение 2 [8, свойство 2]. *Функция $\varphi \in \mathbf{I}^X$ является sc-функцией тогда и только тогда, когда $\varphi = r_{J(\varphi)}$.*

Утверждение 3 [8, свойство 3]. *Пусть φ, ψ — произвольные функции из $\mathbf{I}^X$. Тогда $r_{J(\varphi)} = r_{J(\psi)} \Leftrightarrow J(\varphi) = J(\psi)$.*

Утверждение 4 [8, свойства 4 и 1]. *Пусть I, J — произвольные идеалы полукольца $C(X,\mathbf{I})$. Тогда*:
1) $r_{\overline{J}} = r_J$;
2) *если $\overline{J} \subset \overline{I}$, то $r_J < r_I$*;
3) $J(r_J) = \overline{J}$.

Утверждение 5 [8, свойство 5]. *Для произвольных функций $f, g \in C(X,\mathbf{I})$ имеем $J(f) \vee J(g) = J(f \vee g)$ и $J(f) \cap J(g) = J(f \wedge g)$.*

Предложение 1 [8, предложение 1]. *Для любого топологического пространства X множество $SC(X,\mathbf{I})$ является полукольцом относительно операций $\vee$ и $\cdot$, подрешеткой в $\mathbf{I}^X$ и полной решеткой относительно поточечного порядка $\leq$.*

З а м е ч а н и е 3. В замечании 1 определена тихоновизация τX произвольного топологического пространства X. Отображение $\tau : X \to \tau X$ по правилу $x \mapsto \tilde{x}$ при $x \in X$ непрерывно и индуцирует изоморфизм полуколец $C(X,\mathbf{I})$ и $C(\tau X,\mathbf{I})$ непрерывных функций. Легко видеть, что τ порождает и изоморфизм полуколец $SC(X,\mathbf{I})$ и $SC(\tau X,\mathbf{I})$. Поэтому при изучении полуколец sc-функций $SC(X,\mathbf{I})$ можно ограничиться тихоновскими пространствами X.

2. Замкнутые идеалы в топологических полукольцах $C_p(X, \mathbf{I})$

Опишем замкнутые идеалы в топологических полукольцах $C_p(X, \mathbf{I})$ на тихоновских пространствах X. Очевидна следующая

Лемма 4. *Собственные идеалы идемпотентного полукольца* $\mathbf{I}$ *имеют вид* $\{0\}$, $[0,1)$, $[0,r)$ *и* $[0,r]$ *при* $0 < r \leq 1$. *Простыми идеалами в* $\mathbf{I}$ *будут только* $\{0\}$ *и* $[0,1)$. *В топологическом полукольце* $\mathbf{I}$ *замкнутые идеалы — это в точности множества* $[0,r]$ *для произвольных чисел* $r \in \mathbf{I}$.

Лемма 5 [6, замечание 5]. *В топологическом полукольце* $C_p(X, \mathbf{I})$ *над тихоновским пространством* X *замкнутые идеалы выпуклые.*

Предложение 2 [6, лемма 11]. *Пусть* X *— тихоновское пространство. Тогда для любых замкнутого идеала* J *в топологическом полукольце* $C_p(X, \mathbf{I})$ *и точки* $x \in X$ *имеем* $\pi_x(J) = \overline{\pi_x(J)}$.

Следствие 1. *Для произвольного тихоновского пространства* X *и замкнутого идеала* J *полукольца* $C_p(X, \mathbf{I})$ *имеем*

$$J = \bigcap_{x \in X} \pi_x^{-1}(\pi_x(J)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 2 достаточно показать, что

$$J = \bigcap_{x \in X} \pi_x^{-1}(\overline{\pi_x(J)}).$$

Пусть J – замкнутый правый идеал в $C_p(X, \mathbf{I})$. Ясно, что

$$J \subseteq \bigcap_{x \in X} \pi_x^{-1}(\overline{\pi_x(J)}).$$

Докажем обратное включение. Рассмотрим функцию $f \in \bigcap\limits_{x \in X} \pi_x^{-1}(\overline{\pi_x(J)})$. Возьмем произвольную базисную окрестность U элемента f в пространстве $C_p(X, \mathbf{I})$: $U = U(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n)$. Для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $f(x_i) \in U_i \bigcap \overline{\pi_{x_i}(J)}$. Пусть i – некоторое фиксированное число из кортежа $\overline{1, \ldots, n}$. Получаем, что $U_i \bigcap \overline{\pi_{x_i}(J)} = U_i \bigcap \pi_{x_i}(J) \neq \varnothing$. Это означает, что для любого $i = 1, \ldots, n$ в идеале J существует функция g_i, обладающая свойством $g_i(x_i) \in U_i$. Рассмотрим функцию $g = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i \in J$, где функции e_i соответствуют точкам $x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ (как в лемме 2). Получаем, что $g(x_i) \in U_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Показали, что в любой окрестности функции f нашлась функция из замкнутого идеала J. Следовательно, $f \in \overline{J} = J$. □

Из предложения 2 и леммы 4 вытекает также

Следствие 2. *Для произвольного тихоновского пространства* X *значение произвольной sc-функции* $\varphi : X \to \mathbf{I}$ *в каждой точке* $x \in X$ *равно* $max\{f(x) : \varphi \geq f \in C(X, \mathbf{I})\}$.

Из п. 5) утверждения 1 и п. 3) утверждения 4 вытекает

Теорема 1. *Для всякого тихоновского пространства* X *и любого идеала* J *полукольца* $C(X, \mathbf{I})$ *эквивалентны следующие утверждения*:

1) *идеал* J *замкнутый*;
2) $J = J(\varphi)$ *для некоторой функции* $\varphi \in \mathbf{I}^X$;
3) $J = J(\varphi)$ *для единственной sc-функции* $\varphi \in \mathbf{I}^X$;
4) $J = J(r_J)$.

Из теоремы 1 и утверждений 1–3 получаем

Следствие 3. *Для произвольного тихоновского пространства X отображения $r_{(\cdot)}$ и $J(\cdot)$ устанавливают изоморфизм между решеткой $IdC_p(X,\mathbf{I})$ всех замкнутых идеалов J полукольца $C(X,\mathbf{I})$ и решеткой $SC(X,\mathbf{I})$ по правилу $r_{J(\varphi)} = \varphi$ и $J(r_J) = J$.*

Из теоремы 1 и леммы 4 вытекает

Предложение 3. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замкнутые простые идеалы в топологическом полукольце $C_p(X,\mathbf{I})$ суть в точности идеалы M_x для $x \in X$.*

Поскольку замыкание любого простого идеала в $C_p(X,\mathbf{I})$ является простым идеалом или $C(X,\mathbf{I})$, то из предложения 3 вытекает

Следствие 4. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замыкание всякого простого идеала в $C_p(X,\mathbf{I})$ равно M_x для некоторого $x \in X$ или $C(X,\mathbf{I})$.*

Так как в любом коммутативном полукольце полупростые идеалы совпадают с пересечениями простых идеалов, их содержащих, то имеет место

Следствие 5. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замкнутые полупростые идеалы в топологическом полукольце $C_p(X,\mathbf{I})$ суть в точности множества M_A для всех замкнутых подмножеств A в X.*

Следствие 6. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда:*
1) $\overline{O_A} = M_A = M_{\overline{A}}$ *для любого подмножества* $A \subseteq X$;
2) $\overline{O^p} = C(X,\mathbf{I})$ *для любой точки* $p \in \beta X \setminus X$.

Доказательство. 1) Действительно, $M_{\overline{A}} = M_A \supseteq O_A$ и множество M_A замкнуто в $C_p(X,\mathbf{I})$. При этом $\varphi_{\overline{A}} = r_{O_A}$. Значит, $\overline{O_A} = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f \leq \varphi_{\overline{A}}\} = M_A$.

2) В силу леммы 1 имеем $r_{O^p} = 1$. Поэтому $\overline{O^p} = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f \leq 1\} = C(X,\mathbf{I})$. □

Для описания замкнутых фильтров в топологическом полукольце $C_p(X,\mathbf{I})$ можно ввести понятие ic-функций, двойственное понятию sc-функции. Для любого непустого подмножества J множества $C(X,\mathbf{I})$ назовем функции вида $\varphi = \inf J$ в $\mathbf{I}^X$ *ic-функциями* (это полунепрерывные сверху функции из $\mathbf{I}^X$). Замкнутыми фильтрами тогда будут в точности множества $F(\varphi) = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f \geq \varphi\}$ по всем замкнутым подмножествам $A \subseteq X$ и ic-функциям вида $\varphi = 1 - \varphi_A$. Отметим также, что для подмножества A тихоновского пространства X имеет место равносильность: φ_A — ic-функция $\Leftrightarrow$ A открыто.

Приведенные выше рассуждения легко переносятся на случай топологической решетки $C_p(X,\mathbf{I})$ над произвольным тихоновским пространством X. Отметим, что в топологической решетке $C_p(X,\mathbf{I})$ все идеалы выпуклые, при этом все главные идеалы в ней замкнутые. В топологической решетке $C_p(X,\mathbf{I})$ замкнутыми фильтрами будут в точности множества $F(\varphi) = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f \geq \varphi\}$ для всех ic-функций φ.

3. Замкнутые конгруэнции на топологических полукольцах $C_p(X,\mathbf{I})$

Охарактеризуем далее замкнутые конгруэнции на топологических полукольцах $C_p(X,\mathbf{I})$.

Из определения конгруэнции непосредственно следует

Предложение 4. *Пусть X — произвольное топологическое пространство и ρ — конгруэнция на топологическом полукольце $C_p(X,\mathbf{I})$. Тогда если $f, g \in C(X,\mathbf{I})$, $f \leq g$ и $[f]_\rho = [g]_\rho$, то $[h]_\rho = [f]_\rho$ для любой функции $h \in C(X,\mathbf{I})$, для которой $f \leq h \leq g$.*

Лемма 6. *Пусть X — тихоновское пространство и ρ — замкнутая конгруэнция на топологическом полукольце $C_p(X,\mathbf{I})$. Тогда для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ множество $[f]_\rho$ замкнуто в $C_p(X,\mathbf{I})$.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in C_p(X,\mathbf{I})$ получаем $(C_p(X,\mathbf{I}) \times \{f\}) \cap \rho = [f]_\rho \times \{f\}$. Множество $\prod_{i\in X} A_i, \varnothing \neq A_i \subseteq \mathbf{I}$, замкнуто в тихоновской степени $\mathbf{I}^X$ тогда и только тогда, когда все $A_i, i \in X$, замкнуты [12, с. 129]. Тогда в силу замкнутости ρ в $C_p(X,\mathbf{I}) \times C_p(X,\mathbf{I})$ и замкнутости $\{f\}$ в $C_p(X,\mathbf{I})$ множество $[f]_\rho$ замкнуто в $C_p(X,\mathbf{I})$. □

Для произвольной конгруэнции ρ на полукольце $C(X,\mathbf{I})$ рассмотрим функцию $\varphi_\rho = \sup[\mathbf{0}]_\rho$. Имеет место следующая

Лемма 7. *Пусть X — тихоновское пространство и ρ — конгруэнция на полукольце $C(X,\mathbf{I})$, все классы которой замкнуты в $C_p(X,\mathbf{I})$. Тогда $[\mathbf{0}]_\rho = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f \leq \varphi_\rho\}$.*

Доказательство следует из теоремы 1 и того, что $[\mathbf{0}]_\rho$ — замкнутый идеал в $C_p(X,\mathbf{I})$. □

Для произвольной функции $\varphi \in \mathbf{I}^X$ зададим бинарное отношение $\rho(\varphi)$ на полукольце $C(X,\mathbf{I})$ следующим образом: для любых функций $g,h \in C(X,\mathbf{I})$ полагаем

$$g\rho(\varphi)h \Leftrightarrow \forall x \in X(g(x) \neq h(x) \Rightarrow (g \vee h)(x) \leq \varphi(x)).$$

Иными словами, две функции $g,h \in C(X,\mathbf{I})$ находятся в отношении $\rho(\varphi)$ тогда и только тогда, когда они обе не превосходят функции φ на коуль-множестве $\operatorname{coz}(g-h)$.

Предложение 5. *Для произвольного топологического пространства X и любой функции φ в $\mathbf{I}^X$ отношение $\rho(\varphi)$ является замкнутой конгруэнцией на полукольце $C(X,\mathbf{I})$.*

Доказательство. Покажем, что бинарное отношение $\rho(\varphi)$ на множестве $C(X,\mathbf{I})$ является конгруэнцией. Рефлексивность и симметричность очевидны. Возьмем произвольные функции $g,h,f,k \in C(X,\mathbf{I})$. Если $g\rho(\varphi)h$ и $h\rho(\varphi)f$, то для любых точек $x \in X$, для которых $g(x) \neq f(x)$, получаем $(g \vee f)(x) \leq \varphi(x)$. Значит, отношение $\rho(\varphi)$ транзитивно. Пусть далее $g\rho(\varphi)h$ и $f\rho(\varphi)k$. Для любых точек $x \in X$, в которых $(g \vee f)(x) \neq (h \vee k)(x)$ $((gf)(x) \neq (hk)(x))$, получаем $((g \vee f) \vee (h \vee k))(x) \leq \varphi(x)$ $((gf \vee hk)(x) \leq \varphi(x))$. Значит, отношение $\rho(\varphi)$ является конгруэнцией.

Покажем, что конгруэнция $\rho(\varphi)$ замкнутая. Рассмотрим произвольную направленность (f_α, g_α) из ρ, сходящуюся к $(f,g) \in C_p(X,\mathbf{I}) \times C_p(X,\mathbf{I})$, т. е. $f_\alpha \to f$ и $g_\alpha \to g$. Тогда $f_\alpha(x) \to f(x)$ и $g_\alpha(x) \to g(x)$ для каждой точки $x \in X$. Поскольку $f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ для всех точек $x \in X$, в которых $(f_\alpha \vee g_\alpha)(x) > \varphi(x)$, то и $f(x) = g(x)$ для всех точек $x \in X$, в которых $(f \vee g)(x) > \varphi(x)$. Значит, $(f,g) \in \rho(\varphi)$ и конгруэнция $\rho(\varphi)$ замкнута в $C_p(X,\mathbf{I}) \times C_p(X,\mathbf{I})$. □

Предложение 6. *Пусть X — тихоновское пространство и ρ — конгруэнция на полукольце $C(X,\mathbf{I})$, все классы которой замкнуты в $C_p(X,\mathbf{I})$. Тогда $\rho = \rho(\varphi)$ для sc-функции $\varphi = \varphi_\rho$.*

Доказательство. По теореме 1 $[\mathbf{0}]_\rho = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f \leq \varphi\} = J(\varphi)$. Покажем, что $\rho \subseteq \rho(\varphi)$. Пусть $g,h \in C(X,\mathbf{I})$ и $g\rho h$. Зафиксируем точку $x \in X$, для которой $(g \vee h)(x) > \varphi(x)$. Предположим, что $g(x) \neq h(x)$. Обозначим $n = g(x) < h(x) = m$. Для функции-константы $\mathbf{s}$ со значением $(n+m)/2$ и функций $g_1 = g \vee \mathbf{s}$ и $h_1 = h \vee \mathbf{s} \vee g_1$ имеем $g_1\rho h_1$. При этом $h_1 > 0$ и $h_1 \geq g_1$ $h_1(x) > \varphi(x)$, значит, найдется окрестность U точки x, на которой все еще $h_1 > g_1$ и $h_1 > \varphi$. Для U возьмем функцию f и множество V из леммы 3.

Покажем, что $\mathbf{0} \in [fh_1]_\rho$. Класс $[fh_1]_\rho$ замкнут. Возьмем произвольную базисную окрестность U_0 элемента $\mathbf{0}$ в пространстве $C_p(X,\mathbf{I})$: $U_0 = U(x_1,\ldots,x_n;U_1,\ldots,U_n)$. Построим функцию из $[fh_1]_\rho \cap U_0$. Рассмотрим последовательности функций $fg_{i+1} = fg_i \cdot \dfrac{g_1}{h_1}$ и $fh_{i+1} = fh_i \cdot \dfrac{g_1}{h_1}$

из $[fh_1]_\rho$. Имеем $(fg_1)\rho(fh_1)$. Если $(fg_i)\rho(fh_i)$, то $(fg_{i+1})\rho(fh_{i+1})$. По индукции заключаем, что $(fg_i)\rho(fh_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Для каждой точки $x \in U$ имеем $(fg_i)(x) \to 0$ при $i \to \infty$, а для $x \in X \setminus U$ имеем $fg_i(x) = 0$. Возьмем окрестность $U' = \bigcap_{i=1}^{n} U_i = [0,a) \cup W$ значения 0. Для каждой точки $x_i \in U$ найдется функция $fg_j \in [fh_1]_\rho$, для которой $fg_j(x_i) \le a/2$. Для $j' = \max j$ получаем $fg_{j'}(x_i) \le a/2$. Значит, $fg_{j'} \in U_0$ и $\mathbf{0} \in [fh_1]_\rho$. Получили противоречие с леммой 7, поскольку $fg_{j'}(x) > \varphi(x)$. Значит, $g(x) = h(x)$ для всех точек $x \in X$, в которых $(g \vee h)(x) > \varphi(x)$. Поэтому $g\rho(\varphi)h$.

Обратно, проверим включение $\rho \supseteq \rho(\varphi)$. Пусть для функций $g\rho(\varphi)h, g, h \in C(X, \mathbf{I})$ и точек $x \in X$, в которых $(g \vee h)(x) > \varphi(x)$, выполняется равенство $g(x) = h(x)$. Достаточно показать, что $g \vee h \in [g]_\rho$ (тогда и $g \vee h \in [h]_\rho$ в силу симметрии). Покажем, что для произвольной базисной окрестности $U' = U(x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n)$ функции $h \vee g$ в пространстве $C_p(X, \mathbf{I})$ пересечение $[g]_\rho \cap U_{h\vee g}$ непусто. Пусть $Y = \{x : g(x) = h(x)\}$. Для окрестности $U = X \setminus Y$ точек $x_i \notin Y, i = 1, \ldots, n$, возьмем соответствующие функции f_i как в лемме 3. Пусть $f = \bigvee_{i, x_i \notin Y} f_i$. Тогда на множестве Y имеем $f = 0$ и $g = h$. Для точек $x \in Y$ получаем, что $fh(x) = 0$ и $(fh \vee g)(x) = g(x) = (g \vee h)(x)$. Для точек $x \notin Y$ получаем, что $(g \vee h)(x) \le \varphi(x)$, а для точек $x_i \notin Y$ имеем, что $fh(x_i) = h(x_i) \le \varphi(x_i)$ и $(fh \vee g)(x_i) = (h \vee g)(x_i)$. Тогда $fh \in [\mathbf{0}]_\rho$, и $fh \vee g \in [g]_\rho, fh \vee g \in U_{h\vee g}$. Значит, $g \vee h \in [g]_\rho$. □

Получаем, что любая конгруэнция ρ на полукольце $C_p(X, \mathbf{I})$, все классы которой замкнуты, определяет единственную sc-функцию $\varphi_\rho = r_{[\mathbf{0}]_\rho}$, а любая sc-функция φ задает замкнутую конгруэнцию $\rho(\varphi)$ с классом нуля $[\mathbf{0}]_\rho = J(\varphi)$.

Теорема 2. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда для любой конгруэнции ρ на полукольце $C(X, \mathbf{I})$ эквивалентны следующие утверждения*:

1) *ρ — замкнутая конгруэнция*;
2) *все классы конгруэнции ρ замкнуты в $C_p(X, \mathbf{I})$*;
3) $\rho = \rho(r_{[\mathbf{0}]_\rho})$;
4) *$\rho = \rho(\varphi)$ для некоторой функции $\varphi \in \mathbf{I}^X$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) по лемме 6. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из предложения 6. Очевидно, что 3) $\Rightarrow$ 4). Импликация 4) $\Rightarrow$ 3) следует из предложения 5. □

4. Приложения

Рассмотрим некоторые приложения полученных результатов.

Пусть X — тихоновское пространство. Идемпотентами в полукольце $SC(X, \mathbf{I})$ будут функции $\varphi = \varphi_A$ для всевозможных замкнутых подмножеств $A \subseteq X$. Обозначим через $O(X)$ множество всех идемпотентов в полукольце $SC(X, \mathbf{I})$. Тогда $O(X)$ является подполукольцом в $SC(X, \mathbf{I})$. Относительно поточечного порядка $O(X)$ есть полная дистрибутивная решетка. Дополняемые идемпотенты образуют булеву алгебру в решетке $O(X)$, изоморфную решетке всех открыто-замкнутых множеств в X.

Функцию $\varphi \in SC(X, \mathbf{I})$ назовем *цепной*, если множество $\{\psi \in SC(X, \mathbf{I}) : \varphi \le \psi\}$ является цепью в решетке $SC(X, \mathbf{I})$.

Легко видеть, что имеет место следующее

Предложение 7. *Для любых тихоновских пространств X и функции $\varphi \in SC(X, \mathbf{I})$ равносильны следующие условия:*

1) *φ — коатом решетки $O(X)$*;
2) *φ — минимальная цепная функция в решетке $SC(X, \mathbf{I})$*;
3) *$\varphi = \varphi_x$ для некоторой точки $x \in X$.*

Обозначим через $ConC_p(X, \mathbf{I})$ решетку всех замкнутых конгруэнций на топологическом полукольце $C_p(X, \mathbf{I})$. Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 7. *Для всякого тихоновского пространства X решетки $IdC_p(X,\mathbf{I})$, $ConC_p(X,\mathbf{I})$ и $SC(X,\mathbf{I})$ изоморфны.*

Лемма 8. *Для любых тихоновских пространств X и Y произвольное непрерывные отображение $\alpha : C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ такое, что для любой точки $y \in Y$ имеем $\alpha^{-1}(M_y) = M_x$ для некоторой точки $x \in X$, порождает непрерывное отображение $\psi : Y \to X$.*

Доказательство. Зададим отображение $\psi : Y \to X$ по правилу $\psi(y) = x$, если $\alpha^{-1}(M_y) = M_x$. Отображение определено корректно в силу предложения 3: для любой точки $y \in Y$ идеал M_y прост и замкнут, его прообраз $\alpha^{-1}(M_y)$ — также простой и замкнутый идеал M_x. Отображение ψ непрерывно, так как ψ^{-1} сохраняет нуль-множества, образующие базу замкнутых множеств тихоновских пространств. Действительно, $\psi^{-1}(Z(f)) = Z(\alpha(f))$ для всякой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$, так как для любой точки $y \in Y$

$$y \in Z(\alpha(f)) \Leftrightarrow \alpha(f) \in M_y \Leftrightarrow f \in M_{\psi(y)} \Leftrightarrow \psi(y) \in Z(f) \Leftrightarrow y \in \psi^{-1}(Z(f)). \qquad \square$$

Теорема 3. *Для произвольных тихоновских пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения*:

1) *X и Y гомеоморфны,*
2) *топологические полукольца $C_p(X,\mathbf{I})$ и $C_p(Y,\mathbf{I})$ изоморфны,*
3) *решетки $IdC_p(X,\mathbf{I})$ и $IdC_p(Y,\mathbf{I})$ изоморфны,*
4) *решетки $ConC_p(X,\mathbf{I})$ и $ConC_p(Y,\mathbf{I})$ изоморфны,*
5) *полукольца $SC(X,\mathbf{I})$ и $SC(Y,\mathbf{I})$ изоморфны,*
6) *решетки $SC(X,\mathbf{I})$ и $SC(Y,\mathbf{I})$ изоморфны.*

Доказательство. Очевидно, что 1) влечет остальные утверждения. Ясно, что 5) $\Rightarrow$ 6).

6) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим решеточный изоморфизм $\alpha : SC(X,\mathbf{I}) \to SC(Y,\mathbf{I})$. Зададим отображение $\psi : X \to Y$ по правилу $\psi(x) = y$, если $\alpha(\varphi_x) = \varphi_y$. Отображение ψ определено корректно в силу предложения 7. Ясно, что ψ биективно. Покажем, что ψ сохраняет замкнутые подмножества. Для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ рассмотрим функцию $\varphi_A = \inf_{x\in A}\varphi_x \in SC(X,\mathbf{I})$. Тогда $\alpha(\varphi_A) = \inf_{y=\psi(x)}\varphi_y \in SC(Y,\mathbf{I})$, т. е. $\alpha(\varphi_A) = \varphi_B$ для некоторого замкнутого подмножества $B \subseteq Y$. Достаточно убедиться, что $\psi(A) = B$. Для любой точки $y \in Y$ имеем $y \in B \Leftrightarrow \varphi_B \vee \varphi_y = \varphi_y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(\varphi_B) \vee \alpha^{-1}(\varphi_{\psi^{-1}(y)}) = \alpha^{-1}(\varphi_{\psi^{-1}(y)}) \Leftrightarrow \varphi_A \vee \varphi_{\psi^{-1}(y)} = \varphi_{\psi^{-1}(y)} \Leftrightarrow \psi^{-1}(y) \in A \Leftrightarrow y \in \psi(A)$. Аналогично доказывается, что ψ^{-1} сохраняет замкнутые множества. Следовательно, ψ — гомеоморфизм.

Импликацию 2) $\Rightarrow$ 1) получим, применив лемму 8. По следствию 7 утверждения 3), 4) и 6) равносильны друг другу. $\square$

Замечание 3. Для тихоновского пространства X решетка $IdC_p(X,\mathbf{I})$ не обязана быть подрешеткой решетки $IdC(X,\mathbf{I})$ всех идеалов (аналогично для конгруэнций). Необходимым условием является нормальность тихоновского пространства X. Действительно, пусть A, B — непересекающиеся непустые замкнутые подмножества в X. Имеем $r_{M_A \vee M_B} = 1$. Поэтому замыкание идеала $M_A \vee M_B$ в $C_p(X,\mathbf{I})$ равно $C(X,\mathbf{I})$. Если $IdC_p(X,\mathbf{I})$ является подрешеткой в $IdC(X,\mathbf{I})$, то $M_A \vee M_B = C(X,\mathbf{I})$, т. е. $1 \in M_A \vee M_B$. Значит, $1 = f \vee g$ для $f \in M_A$ и $g \in M_B$, откуда $f = 1$ на B.

Отметим, что определяемость всякого тихоновского пространства X топологическим кольцом $C_p(X)$ была доказана в [15], а топологическим полукольцом $C_p(X,\mathbb{R}^+)$ — в [11].

Замечание 4. Из теоремы 3 следует, что любое тихоновское пространство X определяется и полукольцом, и решеткой $SC(X,\mathbf{I})$ (см. обзор [4, с. 23–24]). Более того, как показано в [8, теорема 1], категория тихоновских пространств X и их непрерывных отображений двойственна категории полуколец $SC(X,\mathbf{I})$ и их гомоморфизмов, сохраняющих точные верхние грани и функции-константы.

Для непрерывного отображения тихоновских пространств $\psi : Y \to X$ рассмотрим отображение $\alpha_\psi : C_p(X, \mathbf{I}) \to C_p(Y, \mathbf{I})$, заданное по правилу

$$\alpha_\psi(f)(y) = f(\psi(y)) \text{ для любых функции } f \in C_p(X, \mathbf{I}) \text{ и точки } y \in Y.$$

Для случая $\mathbf{I}$-значных функций нам понадобится следующее общеизвестное утверждение.

Лемма 9 [15]. *Для любого непрерывного отображения тихоновских пространств $\psi : Y \to X$ отображение α_ψ является непрерывным гомоморфизмом, сохраняющим константы.*

Предложение 8. *Для любых тихоновских пространств X и Y всякий непрерывный гомоморфизм $\alpha : C_p(X, \mathbf{I}) \to C_p(Y, \mathbf{I})$, сохраняющий константы, имеет вид $\alpha = \alpha_\psi$ для некоторого единственного непрерывного отображения $\psi : Y \to X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан непрерывный гомоморфизм $\alpha : C_p(X, \mathbf{I}) \to C_p(Y, \mathbf{I})$, сохраняющий константы. В силу предложения 3 гомоморфизм α удовлетворяет условию леммы 8. Возьмем непрерывное отображение $\psi : Y \to X$, построенное в лемме 8. Покажем, что $\alpha = \alpha_\psi$. Для любой точки $y \in Y$ рассмотрим отображение $p_y = \pi_y \circ \alpha : C(X, \mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, для которого $p_y(f) = \alpha(f)(y)$. Отображение p_y — полукольцевой эпиморфизм, сохраняющий константы. Зафиксируем точку $y \in Y$ и функцию $f \in C(X, \mathbf{I})$. Обозначим $\psi(y) = x$, $f(x) = c$. Достаточно показать, что $p_y(f) = f(x)$. Поскольку $\alpha^{-1}(M_y) = M_{\psi(y)}$, то $p_y^{-1}(0) = M_x$ и в частности, $p_y(O_x) = \{0\}$. Для произвольного числа $q \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ рассмотрим окрестность U_q точки x, равную $\{x \in X : f(x) < c^q\}$, если $q \in (0, 1)$ и $\{x \in X : f(x) > c^q\}$, если $q \in (1, +\infty)$. Для каждой окрестности U_q точки x возьмем соответствующую функцию f_q из леммы 3. Для функции $g_q = 1 - f_q \in O_x$ получаем, что $p_y(f) = p_y(g_q \vee f) \le p_y(g_q \vee \mathbf{c^q}) = p_y(\mathbf{c^q}) = c^q$ в случае $c^q > c$ $(q \in (0, 1))$ и $p_y(f) \ge c^q$ в случае $c^q < c$ $(q \in (1, +\infty))$. Значит, $p_y(f) = c$ и $\alpha = \alpha_\psi$. □

Следствием леммы 9 и предложения 8 является следующая теорема двойственности.

Теорема 4. *Категория всех тихоновских пространств X и их непрерывных отображений антиэквивалентна (двойственна) категории всех топологических полуколец $C_p(X, \mathbf{I})$ и их непрерывных гомоморфизмов, сохраняющих константы.*

Можно дать характеризации некоторых топологических пространств X в терминах замкнутых идеалов полуколец $C_p(X, \mathbf{I})$.

Предложение 9. *Произвольное топологическое пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда все главные идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$ замкнуты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Топологическое пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда любой главный идеал в полукольце $C(X, \mathbf{I})$ выпуклый [3, теорема 1.1]. Но выпуклость главного идеала $fC(X, \mathbf{I}), f \in C(X, \mathbf{I})$, топологического полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$, очевидно, равносильна его замкнутости: $fC(X, \mathbf{I}) = \overline{fC(X, \mathbf{I})} = J(f)$. □

Предложение 10. *Для всякого тихоновского пространства X равносильны следующие условия*:

1) *X — дискретное пространство*;
2) *все sc-функции на X непрерывны, т. е. $SC(X, \mathbf{I}) = C(X, \mathbf{I})$*;
3) *все замкнутые идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$ являются главными идеалами в $C(X, \mathbf{I})$*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что 1) ⇒ 2).

2) ⇒ 3). Если все sc-функции на X непрерывны, то непрерывны будут и функции φ_x по всем точкам $x \in X$. Тогда для произвольного замкнутого идеала J полукольца $C(X, \mathbf{I})$ получаем $J = J(f) = fC(X, \mathbf{I})$. Значит, идеал J главный.

3) ⇒ 1). Если замкнутые идеалы M_x для $x \in X$ главные, то функции вида φ_x непрерывны. Значит, X — дискретное пространство. □

Авторы благодарны рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969. 392 с.
2. **Бурбаки Н.** Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975. 408 с.
3. **Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, вып. 2. С. 493–510.
4. **Вечтомов Е.М.** Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники ВИНИТИ. 1990. Т. 28. С. 3–46. (Алгебра. Топология. Геометрия.)
5. **Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н.** О простых идеалах полуколец непрерывных функций со значениями в единичном отрезке // Вест. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 2. С. 12–18. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
6. **Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н.** Решетки непрерывных функций со значениями в единичном отрезке // Вест. Сыктывкар. ун-та. 2011. Вып. 14. С. 3–20. (Математика. Механика. Информатика.)
7. **Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н.** Определяемость компактов решетками идеалов и конгруэнций полуколец непрерывных $[0, 1]$-значных функций на них // Изв. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 87–91.
8. **Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н.** О полукольцах sc-функций // Вест. Сыктывкар. ун-та. 2012. Вып. 15. С. 73–82. (Математика. Механика. Информатика.)
9. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
10. **Лубягина Е.Н.** Замкнутые идеалы и замкнутые конгруэнции полуколец $C_p(X, \mathbf{I})$ // Современные проблемы математики: тез. Междунар. (43-й Всерос.) мол. шк.-конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2012. С. 55–57.
11. **Подлевских М.Н.** Замкнутые конгруэнции на полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. математика. 1999. Т. 5, вып. 3. С. 947–952.
12. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
13. **Gillman L., Jerison M.** Rings of Continuous Functions. Reprint of the 1960 edition. Berlin: Springer-Verlag, 1976. 300 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 43).
14. **Golan J.S.** Semirings and their applications. Dordaecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 381 p.
15. **Nagata J.** On lettices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces // Osaka Math. J. 1949. Vol. 1. C. 166–181.

Вечтомов Евгений Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vecht@mail.ru

Поступила 28.04.2012

Лубягина Елена Николаевна
канд. физ.-мат. наук
ассистент
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: mathematic@vshu.kirov.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 519.17

О ВЕРШИННОЙ СВЯЗНОСТИ ГРАФОВ ДЕЗА[1]

А. Л. Гаврилюк, С. В. Горяинов, В. В. Кабанов

В работе определено число вершинной связности графов Деза, получаемых из сильно регулярных графов с помощью автоморфизма порядка 2.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, граф Деза, вершинная связность.

A. L. Gavrilyuk, S. V. Goryainov, V. V. Kabanov. On the vertex connectivity of Deza graphs.

We find the vertex connectivity number of Deza graphs obtained from strongly regular graphs by means of an automorphism of order 2.

Keywords: strongly regular graph, Deza graph, vertex connectivity.

Введение

В этой статье мы начинаем изучение вершинной связности (или, более точно, числа вершинной связности) графов Деза. *Вершинная связность* графа является одной из его характеристик, интересных и с практической, и с теоретической точек зрения. Для отдельных классов графов известны оценки и точные результаты: например, вершинная связность k-регулярного графа Кэли не меньше $2/3\,(k+1)$ (см. [1]), а вершинная связность дистанционно регулярного графа равна его валентности, как следует из работы Браувера и Кулена [2] (для сильно регулярных графов аналогичное утверждение доказано Браувером и Меснером в [3]).

Графы Деза принято рассматривать как обобщение сильно регулярных графов (определения см. в следующем разделе статьи). В данной работе мы ограничимся рассмотрением одного класса графов Деза, которые могут быть получены из сильно регулярных графов с помощью конструкции, описанной ниже (см. предложение 2). Естественно было бы ожидать, что вершинная связность графов Деза также равна их валентности. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть Δ — граф Деза, полученный из сильно регулярного графа Γ (см. предложение 2), имеющего неглавные собственные значения r, s. Тогда имеет место один из следующих трех случаев*:

(1) *если $r > 2$ и $s < -2$, то вершинная связность графа Δ равна его валентности, а разделяющим множеством наименьшей мощности является окрестность какой-либо вершины*;

(2) *$s = -2$, вершинная связность графа Δ равна его валентности за исключением случая, когда Γ — это 3×3-решетка* (*в этом случае вершинная связность графа Δ равна* 3);

(3) *$r \le 2$.*

В отличие от дистанционно или сильно регулярных графов для графов Деза невозможно в общем случае вычислить спектр их матриц смежности (т. е. выразить собственные значения как функции от параметров графа). Данное обстоятельство существенно усложняет исследование этого класса графов. Для графов Деза, полученных из сильно регулярных графов,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-31098), гранта Совета при Президенте РФ (МК-1719.2013.1) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155).

мы можем получить некоторую информацию о спектре, что позволяет частично использовать рассуждения из работы [3].

Статья организована следующим образом. В разд. 1 мы напоминаем необходимые определения и вспомогательные результаты. В разд. 2 приведено доказательство теоремы. В заключении статьи обсуждается случай (3) из теоремы.

1. Определения и вспомогательные результаты

Для графа Γ и произвольной его вершины x определим *окрестность* $\Gamma(x) = \{y \mid y \in V(\Gamma), y \sim x\}$ вершины x и положим $x^{\perp} = \{x\} \cup \Gamma(x)$. Граф Γ называется *регулярным валентности* k, если $|\Gamma(x)| = k$ для любой вершины $x \in \Gamma$.

Вершинной связностью $\kappa(\Gamma)$ графа Γ называется наименьшее число вершин, после удаления которых граф Γ становится несвязным. Легко понять, что в регулярном валентности k графе Γ число $\kappa(\Gamma)$ не превосходит k.

Граф Γ называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), если Γ содержит v вершин и для произвольной пары вершин $x, y \in \Gamma$ выполнено условие

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = \begin{cases} k, & \text{если } x = y; \\ \lambda, & \text{если } x \sim y; \\ \mu, & \text{если } x \nsim y. \end{cases}$$

Предложение 1 [4, теорема 1.3.1]. *Пусть Γ – нетривиальный (т.е. неполный и связный) сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ). Тогда*

(1) *Граф Γ имеет три различных собственных значения $k > r > 0 > s$, последние два из которых удовлетворяют квадратному уравнению $x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k) = 0$.*

(2) *Если собственные значения r и s имеют одинаковые кратности, то $r, s = (-1 \pm \sqrt{v})/2$. В противном случае числа r, s целые.*

(3) *Верны равенства*

$$\mu = k + rs, \quad \lambda = \mu + r + s.$$

Граф Δ называется *графом Деза* с параметрами (v, k, β, α) (обычно считают $\alpha < \beta$), если Δ содержит v вершин и для произвольной пары вершин $x, y \in \Delta$ выполнено условие

$$|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = \begin{cases} k, & \text{если } x = y; \\ \alpha \text{ или } \beta, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

При этом параметры α и β реализуются, т. е. существует пара вершин, для которой число общих соседей равно α, и пара вершин, для которой число общих соседей равно β.

В данной работе мы изучим вершинную связность графов Деза, способ получения которых из сильно регулярных графов описан в следующем предложении.

Предложение 2 [5]. *Пусть M — матрица смежности сильно регулярного графа Γ с параметрами (v, k, λ, μ), $k \neq \mu$, $\lambda \neq \mu$. Пусть P — некоторая перестановочная $v \times v$-матрица. Тогда матрица $D = PM$ будет матрицей смежности графа Деза Δ с параметрами (v, k, β, α), где $\{\alpha, \beta\} = \{\lambda, \mu\}$, если и только если $P = I$ или P — перестановочная матрица, отвечающая автоморфизму порядка 2 графа Γ, переставляющему только несмежные вершины.*

Обозначим рассматриваемый в предложении 2 класс графов Деза через $\mathcal{D}$. Множество графов Деза, полученных с помощью автоморфизма порядка 2 из сильно регулярного графа Γ, обозначим через $\mathcal{D}(\Gamma)$.

Таким образом, мы рассматриваем графы Деза, получаемые из сильно регулярных графов с помощью автоморфизма порядка 2.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку P — перестановочная матрица, отвечающая автоморфизму порядка 2, то $P^{-1} = P^\top = P$ и поэтому

$$D^2 = MPMP = MM = M^2 = kI + \lambda M + \mu(J - M - I).$$

З а м е ч а н и е 2. Окрестности вершин в графе $\Delta \in \mathcal{D}(\Gamma)$ (в обозначениях предложения 2) как множества вершин устроены следующим образом. Если вершина $x \in \Gamma$ сдвигается под действием автоморфизма P и x^P — ее образ, то $\Delta(x) = \Gamma(x^P)$, т. е. вершина x смежна со всеми вершинами из окрестности своего образа. Если же $x = x^P$, то $\Delta(x) = \Gamma(x)$.

Нам понадобятся два следующих хорошо известных результата из теории графов.

Предложение 3 [4, теорема 3.12.4]. *Сильно регулярный граф с наименьшим собственным значением -2 является одним из следующих графов*:

(1) *полный многодольный граф с долями порядка* 2;
(2) *$n \times n$-решетка с параметрами* $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$;
(3) *треугольный граф $T(n)$ с параметрами* $(n(n-1)/2, 2(n-2), n-2, 4)$;
(4) *граф Шрикханде с параметрами* 4×4-*решетки*;
(5) *один из трех графов Чанга с параметрами* $T(8)$;
(6) *граф Петерсена с параметрами* $(10, 3, 0, 1)$;
(7) *граф Клебша с параметрами* $(16, 10, 6, 6)$;
(8) *граф Шлефли с параметрами* $(27, 16, 10, 8)$.

Пусть x, y — две различные вершины графа Γ. Две простые цепи, соединяющие x и y, называются *непересекающимися*, если у них нет общин вершин, отличных от x, y. Множество S вершин *разделяет* x и y, если x и y принадлежат различным компонентам связности графа $\Gamma \setminus S$. Множество вершин S графа Γ называется *разделяющим*, если оно разделяет некоторые две его вершины. Следующее предложение известно как теорема Менгера.

Предложение 4 [6, теорема 5.9]. *Наименьшая мощность множества, разделяющего несмежные вершины x и y, равна наибольшему количеству непересекающихся цепей, соединяющих эти вершины.*

2. Вершинная связность графов Деза из класса $\mathcal{D}$

2.1. Сведение задачи к трем случаям

В этом разделе мы покажем, что за исключением трех случаев, которые потребуют отдельного изучения (см. подразд. 2.2–2.4), вершинная связность графов Деза из класса $\mathcal{D}$ равна их валентности.

Доказательство следующего предложения аналогично доказательству теоремы Брауэра и Меснера (см. [3]) и существенно использует возможность вычисления собственных значений графа Деза из $\mathcal{D}$.

Предложение 5. *Пусть $\Delta \in \mathcal{D}(\Gamma)$ — граф Деза с параметрами (v, k, β, α), а сильно регулярный граф Γ имеет неглавные собственные значения r, s, где $r > 0$ и $s < 0$. Тогда имеет место по крайней мере один из следующих двух случаев*:

(1) *вершинная связность графа Δ равна его валентности, а разделяющее множество наименьшей мощности является окрестностью какой-либо вершины*;

(2) $s = -2$ *или* $r \leq 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы придерживаемся обозначений из предложения 2. Поскольку матрица M смежности сильно регулярного графа Γ имеет три различных собственных значения $s < 0 < r < k$ и $M^2 = D^2$, где D — матрица смежности графа Δ, то D может иметь собственные значения лишь из множества $\{\pm k, \pm r, \pm s\}$.

Граф Γ связен и регулярен валентности k, поэтому матрица M имеет собственное значение k кратности 1. Поскольку $M^2 = D^2$, то матрица D^2 имеет собственное значение k^2 кратности 1, следовательно, матрица смежности D графа Деза имеет собственное значение k, равное его валентности и имеющее кратность 1. Отсюда следует, что граф Δ связен.

Пусть S — разделяющее множество наименьшей мощности графа Δ, т. е. $|S| = \kappa(\Delta) \leq k$, A и B — компоненты связности, остающиеся после удаления S из Δ. Допустим, что $|A| > 1$ и $|B| > 1$, т. е. S не является окрестностью некоторой вершины. Поскольку спектр несвязного графа является объединением спектров компонент связности, то спектр $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \ldots \theta_{v-|S|}$ графа $A \cup B$ будет объединением спектров $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{|A|}$ и $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \ldots \geq \omega_{|B|}$ графов A и B соответственно.

Граф $A \cup B$ является индуцированным подграфом графа Δ, и по теореме о переплетении спектров [4, теорема 3.3.1] второе по величине собственное значение θ_2 графа $A \cup B$ не превосходит второго по величине собственного значения графа Δ, т. е. числа $t = \max(r, -s)$. Очевидно, что $\theta_2 \geq \min\{\sigma_1, \omega_1\}$. Поскольку наибольшее собственное значение в любом графе больше или равно средней степени его вершины, т. е. среднего арифметического степеней его вершин, [4, лемма 3.2.1], то, не теряя общности, можно считать, что в графе B средняя степень вершины не превосходит t.

Для вершины $x \in B$ положим $B(x) := B \cap \Delta(x)$, $S(x) := S \cap \Delta(x)$. Тогда $|B(x)| + |S(x)| = k$. Оценим среднюю степень вершины в подграфах B и S:

$$\sum_{x \in B} \frac{|B(x)|}{|B|} \leq t, \quad \text{отсюда} \quad \sum_{x \in B} \frac{|S(x)|}{|B|} \geq k - t.$$

Оценим среднее общее количество соседей в S у произвольной пары различных вершин $x, y \in B$:

$$\frac{\sum\limits_{x \in B} \sum\limits_{y \in B \setminus \{x\}} (|S(x)| + |S(y)|)}{|B| \cdot (|B| - 1)} = \frac{(\sum\limits_{x \in B} |S(x)|) \cdot (|B| - 1) \cdot 2}{|B| \cdot (|B| - 1)} \geq 2(k - t).$$

Поскольку $|B| > 1$, то в B найдется пара вершин x, y со свойством $|S(x)| + |S(y)| \geq 2(k - t)$.

Пусть числа a, b, c таковы, что $b = |S(x) \cap S(y)|$, $a + b = |S(x)|$, $b + c = |S(y)|$. Тогда $a + b + c \leq |S| \leq k$. Далее, $a + c = |S(x)| + |S(y)| - 2b$ и $|S(x) \cap S(y)| = b \leq k - (a + c) = k - (|S(x)| + |S(y)| - 2b)$. Отсюда $|S(x)| + |S(y)| \leq b + k$, и поэтому $b + k \geq 2(k - t)$, т. е. $|S(x) \cap S(y)| = b \geq k - 2t$.

С другой стороны, $|S(x) \cap S(y)| \leq \beta = \max\{\lambda, \mu\}$, что дает неравенство

$$k - 2\max\{r, -s\} \leq \max\{\lambda, \mu\}. \tag{2.1}$$

В силу соотношений (см. предложение 1) $\lambda = k + rs + r + s$ и $\mu = k + rs$ в неравенстве (2.1) возможны следующие случаи.

∘ Если $r \geq -s$, то $\lambda \geq \mu$, и из $k - 2r \leq k + rs + r + s$ следует $s \geq -3r/(r + 1)$. Если число s нецелое, то по предложению 1 имеем $r, s = (-1 \pm \sqrt{v})/2$, противоречие с тем, что $r \geq -s$. Поэтому $s \in \{-2, -1\}$. Но сильно регулярные графы с собственным значением -1 являются в точности полными графами, поэтому $s = -2$.

∘ Если $r < -s$, то $\lambda < \mu$ и из $k + 2s \leq k + rs$ следует $r \leq 2$.

∘ Если же $r > 2$ и $s < -2$, то мы получаем противоречие в неравенстве (2.1). Поэтому $|B| = 1$, S является окрестностью некоторой вершины графа Δ и $\kappa(\Delta) = k$. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 3. Сильно регулярные графы с собственным значением -2 описаны в предложении 3. В следующих разделах мы изучим получаемые из них графы Деза. Для пары несмежных вершин x, y обозначим через $\kappa(x, y)$ наибольшее количество непересекающихся цепей, соединяющих x и y. В силу предложения 4 для каждого изучаемого графа и всякой его пары различных несмежных вершин x, y нам нужно показать, что $\kappa(x, y) = k$, где k — валентность графа.

А именно, нас будут интересовать графы Деза, получаемые из $n \times n$-решетки, треугольных графов и спорадических графов (Чанга и Шлефли). Для графа Петерсена не существует автоморфизма порядка 2, переставляющего только несмежные вершины, в полных многодольных графах с долями порядка 2 имеем $\mu = k$, а в графах Клебша и Шрикханде $\mu = \lambda$, поэтому они не удовлетворяют условиям предложения 2.

Случай, когда сильно регулярный граф имеет собственное значение $r \leq 2$, обсуждается в заключении к статье.

2.2. Графы Деза, полученные из $n \times n$-решетки

Напомним, что $n \times n$-*решеткой* называется граф, определенный на множестве $\{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\}$, в котором две различные пары смежны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую координату.

Графы Деза, получаемые из $n \times n$-решетки, изучались в работе [7]. В частности, там показано, что существует два вида автоморфизмов, удовлетворяющих условиям предложения 2: отражение относительно одной из диагоналей решетки и центральная симметрия (суперпозиция отражений относительно некоторой диагонали и ей противоположной). Вершинной связности соответствующих графов Деза посвящены следующие две леммы.

З а м е ч а н и е 4. Легко убедиться, что для графа Деза Δ, полученного из 3×3-решетки отражением относительно диагонали, в качестве разделяющего множества наименьшей мощности можно взять множество вершин этой диагонали. Таким образом, $\kappa(\Delta) = 3$ при том, что валентность графа Δ равна 4. Далее мы предполагаем, что $n \geq 4$.

Лемма 1. *Вершинная связность графа Деза Δ, получаемого из $n \times n$-решетки, $n \geq 4$, с помощью отражения относительно ее диагонали, равна его валентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При указанном выше обозначении вершин $n \times n$-решетки вершину (i,j), расположенную в i-й строке и в j-м столбце, обозначим для краткости через ij. Тогда вершина, симметричная относительно главной диагонали для вершины ij, имеет вид ji.

Введем обозначения $N := \{1, 2, \ldots, n\}$, $N_i = N \backslash \{i\}$, $N_{i_1 \ldots i_m} = N \backslash \{i_1, \ldots, i_m\}$, где $i \in N$ и $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq N$. Для $k \in N_{ij}$ через k^* обозначим следующий (или минимальный) по величине элемент из N_{ij} (если k — наибольший элемент в N_{ij}). Такой элемент всегда существует, поскольку $n \geq 4$. В таком случае окрестность вершины ij в $n \times n$-решетке можно представить как $iN_j \cup N_i j$, где $iN_j = \{iy \mid y \in N_j\}, N_i j = \{xj \mid x \in N_i\}$. В графе Δ окрестность вершины ij совпадает с окрестностью вершины ji в $n \times n$-решетке, т. е. $jN_i \cup N_j i$. Отсюда следует, что вершины ij и xy смежны в графе Δ тогда и только тогда, когда пары ij и yx имеют один общий символ.

Пара несмежных вершин в графе Δ может быть получена в следующих принципиально различных относительно действия автоморфизма случаях.

1) Обе вершины неподвижны под действием автоморфизма, т. е. лежат на диагонали, относительно которой происходит отражение. Тогда согласно введенным обозначениям можно считать, что вершины имеют вид ii и jj, $j \neq i$. Пусть $k \in N_{ij}$, тогда $ii \sim ik \sim kj \sim jj$. Имеется точно $n-2$ цепей такого вида. Аналогично, имеем $n-2$ цепей вида $ii \sim ki \sim jk \sim jj$. Наконец, $ii \sim ij \sim jj$ и $ii \sim ji \sim jj$. Отсюда $\kappa(ii, jj) = 2n - 2$.

2) Одна вершина неподвижна, другая сдвигается. Можно считать, что вершины имеют вид ii и xy, где $i \neq x, i \neq y$. Для $k \in N_{iy}$ имеется $n-2$ цепей вида $ii \sim ik \sim kx \sim xy$. Аналогично, для $k \in N_{ix}$ имеем $n-2$ цепей вида $ii \sim ki \sim yk \sim xy$. Далее, $ii \sim ix \sim xy$ и $ii \sim yi \sim xy$. Отсюда $\kappa(ii, xy) = 2n - 2$.

3) Обе вершины сдвигаются и являются образами друг друга. Можно считать, что вершины имеют вид ij и ji, $i \neq j$. Пусть $k \in N_{ij}$. Тогда существует по $n-2$ цепей вида $ij \sim jk \sim k^*j \sim ji$ и $ij \sim ki \sim ik^* \sim ji$. Далее, $ij \sim ii \sim ji$ и $ij \sim jj \sim ji$. Отсюда $\kappa(ij, ji) = 2n - 2$.

4) Обе вершины сдвигаются, не являются образами друг друга и смежны в $n \times n$-решетке. Можно считать, что вершины имеют вид ij и ik, где $i \neq j, i \neq k, j \neq k$. Пусть $x \in N_{jk}$, тогда существует $n-2$ цепей вида $ij \sim xi \sim ik$. Пусть $y \in N_i$, тогда существует $n-1$ цепей вида $ij \sim jy \sim yk \sim ky^* \sim ik$. Наконец, для фиксированного элемента z из N_{ijk} имеем цепь $ij \sim ki \sim iz \sim ji \sim ik$ и получаем $\kappa(ij, ik) = 2n-2$.

5) Обе вершины сдвигаются, не являются образами друг друга и несмежны в $n \times n$-решетке. Тогда эти вершины имеют вид ij и xy, где $i \neq j, i \neq x, i \neq y, j \neq x, j \neq y, x \neq y$. Для $k \in N_{ijxy}$ имеем $n-4$ цепей вида $ij \sim jk \sim kx \sim xy$ и $n-4$ цепей вида $ij \sim ki \sim yk \sim xy$. Кроме того, существует 6 цепей $ij \sim jx \sim xy$, $ij \sim yi \sim xy$ $ij \sim jy \sim yy \sim xy$, $ij \sim jj \sim yj \sim xy$, $ij \sim xi \sim xx \sim xy$ и $ij \sim ii \sim ix \sim xy$. Таким образом, имеем $\kappa(ij, xy) = 2n-2$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Вершинная связность графа Деза Δ, получаемого из $n \times n$-решетки с помощью ее центральной симметрии, равна его валентности.*

Доказательство. В силу [7] число n четно, $n = 2m$. Преобразуем вершины $n \times n$-решетки следующим образом. Занумеруем столбцы и строки элементами множества $M := \{-m, -(m-1), \ldots, -1, 1, \ldots, m-1, m\}$ и будем считать, что вершина, расположенная в a-й строке и b-м столбце, имеет вид ab. Симметричная ей относительно центра решетки вершина имеет номер $a'b'$, где a' означает элемент $-a$. Положим $M_{i_1 \ldots i_m} = M \backslash \{i_1, \ldots, i_m\}$ для $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Будем считать, что центральная симметрия осуществляется относительно диагоналей $\{aa \mid a \in M\}$ и $\{aa' \mid a \in M\}$. Тогда вершины ab и cd смежны в графе Δ, если и только если пары $a'b'$ и cd имеют один общий символ.

Пара несмежных вершин в графе Δ может быть получена в следующих принципиально различных относительно действия автоморфизма случаях.

1) Вершины лежат на одной диагонали и являются образами друг друга, т. е. с точностью до выбора нумерации имеют вид aa и $a'a'$. Пусть $x \in M_{aa'}$. Тогда существует по $n-2$ непересекающихся цепей вида $aa \sim a'x \sim ax \sim a'a'$ и $aa \sim xa' \sim xa \sim a'a'$. С учетом еще двух цепей $aa \sim aa' \sim a'a'$ и $aa \sim a'a \sim a'a'$ имеем $\kappa(aa, a'a') = 2n-2$.

2) Вершины лежат на одной диагонали, но не являются образами друг друга, т. е. с точностью до выбора нумерации имеют вид aa и bb, где $a \neq b, a \neq b'$. Для $x \in N_{aa'bb'}$ имеем по $n-4$ непересекающихся цепей вида $aa \sim a'x \sim b'x' \sim bb$ и $aa \sim xa' \sim x'b' \sim bb$. С учетом еще 6 цепей $aa \sim a'b' \sim bb$, $aa \sim b'a' \sim bb$, $aa \sim a'a \sim ab' \sim bb$, $aa \sim aa' \sim b'a \sim bb$, $aa \sim a'b \sim bb' \sim bb$, $aa \sim ba' \sim b'b \sim bb$ получаем $\kappa(aa, bb) = 2n-2$.

3) Вершины лежат на разных диагоналях, но не лежат в одной строке и в одном столбце, т. е. имеют вид aa и bb', где $a \neq b, a \neq b'$. Для $x \in N_{aa'bb'}$ имеем по $n-4$ непересекающихся цепей вида $aa \sim a'x \sim b'x' \sim bb'$ и $aa \sim xa' \sim x'b \sim bb'$. С учетом еще 6 цепей $aa \sim a'b \sim bb'$, $aa \sim b'a' \sim bb'$, $aa \sim aa' \sim b'a \sim bb'$, $aa \sim a'a \sim ab \sim bb'$, $aa \sim a'b' \sim bb \sim bb'$, $aa \sim ba' \sim b'b' \sim bb'$ получаем $\kappa(aa, bb') = 2n-2$.

4) Вершины имеют вид aa и ab, где $a' \neq b, a \neq b$, т. е. вершины смежны в $n \times n$-решетке, но не смежны в графе Δ. Для $x \in N_{a'b'}$ имеем $n-2$ непересекающихся цепей вида $aa \sim a'x \sim ab$. Для $x \in N_{aa'}$ имеем $n-2$ непересекающихся цепей вида $aa \sim xa' \sim x'b' \sim ab$. С учетом еще 2 цепей $aa \sim aa' \sim a'a' \sim ab$ и $aa \sim a'b' \sim ab' \sim ab$ получаем, что $\kappa(aa, ab) = 2n-2$.

5) Вершины имеют вид aa и bc, где $a \neq b, a' \neq b, a \neq c, a \neq c'$, т. е. вершины не смежны ни в $n \times n$-решетке, ни в соответствующем графе Δ. Для $x \in N_{aa'b'}$ имеем $n-3$ непересекающихся цепей вида $aa \sim xa' \sim x'c' \sim bc$. Для $x \in N_{aa'c'}$ имеем $n-3$ непересекающихся цепей вида $aa \sim a'x \sim b'x' \sim bc$. С учетом еще 4 цепей $aa \sim a'c' \sim bc$, $aa \sim b'a' \sim bc$, $aa \sim aa' \sim b'a \sim bc$, $aa \sim a'a \sim ac' \sim bc$ получаем $\kappa(aa, bc) = 2n-2$.

6) Вершины являются образами друг друга, т. е. имеют вид ab и $a'b'$. Для $x \in N_{aa'}$ существует $n-2$ непересекающихся цепей вида $ab \sim xb' \sim xb \sim a'b'$. Для $x \in N_{bb'}$ существует $n-2$

непересекающихся цепей вида $ab \sim a'x \sim ax \sim a'b'$. Кроме того, $ab \sim ab' \sim a'b'$ и $ab \sim a'b \sim a'b'$. Отсюда $\kappa(ab, a'b') = 2n - 2$.

7) Вершины имеют вид ab и ac, где $b \neq c, a \neq b, a \neq c, a \neq b'a \neq c', b \neq c'$, т. е. не являются образами друг друга и смежны в $n \times n$-решетке. Имеем $n-2$ непересекающихся цепей вида $ab \sim a'x \sim ac$, где $x \in N_{b'c'}$. Кроме того, имеем $n-2$ непересекающихся цепей вида $ab \sim xb' \sim x'c' \sim ac$, где $x \in N_{aa'}$. С учетом цепей $ab \sim ab' \sim a'b' \sim ac$ и $ab \sim a'c' \sim ac' \sim ac$ получаем, что $\kappa(ab, ac) = 2n - 2$.

8) Вершины имеют вид ab и cd, где $a \neq b, c \neq d, a \neq c, b \neq d, a' \neq c, b' \neq d$. Для $x \in N_{aa'c'}$ имеем $n-3$ непересекающихся цепей вида $ab \sim xb' \sim x'd' \sim cd$. Для $x \in N_{bb'd'}$ имеем $n-3$ непересекающихся цепей вида $ab \sim a'x \sim c'x' \sim cd$. Оставшиеся 4 цепи обеспечивают $ab \sim a'd' \sim cd$, $ab \sim c'b' \sim cd$, $ab \sim ab' \sim c'b \sim cd$ и $ab \sim a'b \sim ad' \sim cd$. Таким образом, имеем $\kappa(ab, cd) = 2n - 2$.

Лемма доказана.

2.3. Графы Деза, полученные из $T(n)$

Напомним, что *треугольным графом* $T(n)$ называется граф, определенный на множестве двухэлементных подмножеств n-элементного множества, например, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для краткости в рассуждениях будем обозначать вершину, т. е. пару элементов $\{i, j\} \subset N$ через ij.

Ввиду работы [8] для треугольного графа $T(n)$ при четных $n \geq 6$ существует единственный автоморфизм, переставляющий только несмежные вершины. Для нечетных n такого автоморфизма не существует. Если число $n \geq 6$ четно, то этот автоморфизм можно представить в виде $\phi : \{i, j\} \to \{n - i + 1, n - j + 1\}$. Под действием φ остаются неподвижными $n/2$ вершин вида $\{i, n - i + 1\}$, и только они.

Лемма 3. *Вершинная связность графа Деза Δ, получаемого из графа $T(n)$, равна его валентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in N$. Введем обозначение $a' := n - a + 1$. Для множества $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset N$ введем обозначение $N_{i_1 i_2 \ldots i_m} := N \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Автоморфизм φ можно записать в виде $\varphi : ij \to i'j'$, а произвольная неподвижная под его действием вершина имеет вид ii'. В графе Δ вершины ab и xy смежны тогда и только тогда, когда $\{a', b'\} \cap \{x, y\} = 1$. Тогда множество вершин, смежных с вершиной ab в графе Δ, есть $\{a'x \mid x \in N_{a'b'}\} \cup \{b'y \mid x \in N_{a'b'}\}$. Рассмотрим возможные случаи.

1) Обе вершины являются неподвижными. Обозначим их через aa' и bb'. Тогда имеем 4 непересекающиеся цепи $aa' \sim ab \sim bb'$, $aa' \sim a'b' \sim bb'$, $aa' \sim ab' \sim bb'$, $aa' \sim a'b \sim bb'$. Для $x \in N_{aa'bb'}$ имеем по $n-4$ непересекающихся цепей вида $aa' \sim ax \sim x'b' \sim bb'$ и $aa' \sim a'x \sim x'b \sim bb'$. Таким образом, $\kappa(aa', bb') = 2n - 4$.

2) Одна вершина сдвигается, другая фиксируется автоморфизмом. Если вершины смежны в графе $T(n)$, то они имеют вид aa' и ab и таким образом смежны и в графе Δ. Следовательно, вершины имеют вид aa' и bc, где $b \neq c', b \neq a, b \neq a'$. Имеем 4 непересекающиеся цепи $aa' \sim ab' \sim bc$, $aa' \sim ac' \sim bc$, $aa' \sim a'b' \sim bc$, $aa' \sim a'c' \sim bc$ и 4 непересекающиеся цепи $aa' \sim ab \sim bb' \sim bc$, $aa' \sim ac \sim cc' \sim bc$, $aa' \sim a'c \sim bc' \sim bc$, $aa' \sim a'b \sim b'c \sim bc$. Для $x \in N_{aa'bb'cc'}$ имеем еще по $n-6$ цепей вида $aa' \sim ax \sim x'b \sim bc$ и $aa' \sim a'x \sim x'c' \sim bc$. Таким образом, $\kappa(aa', bc) = 2n - 4$.

3) Обе вершины сдвигаются и являются образами друг друга. Тогда они имеют вид ab и $a'b'$. Имеем 4 непересекающиеся цепи $ab \sim aa' \sim a'b'$, $ab \sim bb' \sim a'b'$, $ab \sim ab' \sim a'b'$, $ab \sim a'b \sim a'b'$. Для $x \in N_{aa'bb'}$ существует по $n-4$ непересекающихся цепей вида $ab \sim a'x \sim ax \sim a'b'$ и $ab \sim b'x \sim bx \sim a'b'$. Отсюда $\kappa(ab, a'b') = 2n - 4$.

4) Обе вершины сдвигаются и не являются образами друг друга. Здесь возможны два подслучая, которые рассмотрены ниже.

Если вершины смежны в $T(n)$, то они имеют вид ab и ac. Для них имеем 5 непересекающихся цепей $ab \sim b'c' \sim ac$, $ab \sim a'c' \sim cc' \sim ac$, $ab \sim ab' \sim a'b' \sim ac$, $ab \sim bb' \sim bc' \sim ac$ и $ab \sim b'c \sim ac' \sim ac$. Далее, для $x \in N_{a'b'c'}$ имеем $n-3$ цепей вида $ab \sim a'x \sim ac$. Для $x \in N_{aa'bb'cc'}$ существует $n-6$ цепей вида $ab \sim b'x \sim x'c' \sim ac$. Отсюда $\kappa(ab, ac) = 2n-4$.

Если вершины несмежны в $T(n)$, то они имеют вид ab и cd. Для них существует $n-8$ цепей вида $ab \sim a'x \sim x'd' \sim cd$, где $x \in N_{aa'bb'cc'dd'}$, и $n-8$ цепей вида $ab \sim b'x \sim x'c' \sim cd$, где $x \in N_{aa'bb'cc'dd'}$. Кроме того, существуют цепи $ab \sim b'c' \sim cd$, $ab \sim b'd' \sim cd$, $ab \sim a'c' \sim cd$, $ab \sim a'd' \sim cd$, $ab \sim aa' \sim ac' \sim cd$, $ab \sim ca' \sim cc' \sim cd$, $ab \sim bb' \sim bd' \sim cd$, $ab \sim db' \sim dd' \sim cd$, $ab \sim ba' \sim ad' \sim cd$, $ab \sim da' \sim cd' \sim cd$, $ab \sim ab' \sim bc' \sim cd$, $ab \sim cb' \sim dc' \sim cd$. Таким образом, $\kappa(ab, cd) = 2n-4$.

Лемма доказана.

2.4. Графы Деза, полученные из спорадических графов Зейделя

В этом разделе рассмотрены графы Деза, полученные из графа Шлефли и графов Чанга.

Лемма 4. *Вершинная связность графа Деза Δ, получаемого из сильно регулярного графа Шлефли с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, равна его валентности, а разделяющее множество наименьшей мощности является окрестностью вершины.*

Доказательство. Если граф Δ имеет параметры (v, k, β, α), где $\{\alpha, \beta\} = \{\lambda, \mu\}$, то в дополнительном к нему графе мощность множества общих соседей произвольной пары вершин принимает значение из множества $\{v-2k+\alpha, v-2k+\beta, v-2k+\alpha-2,\ v-2k+\beta-2\}$, наибольшее из которых в нашем случае равно $v-2k+\max(\lambda, \mu)$.

Пусть S — разделяющее множество наименьшей мощности графа Δ, полученного из сильно регулярного графа с параметрами (v, k, λ, μ), A и B — компоненты связности, остающиеся после удаления S из Δ. Допустим, что $|A| > 1$ и $|B| > 1$, т. е. S из Δ не является окрестностью некоторой вершины. Для произвольной пары вершин в графе Δ число вершин, несмежных с ними обеими, не превосходит $v-2k+\max(\lambda, \mu)$. Поэтому $|B| \le v-2k+\max(\lambda, \mu)$ и, аналогично, $|A| \le v-2k+\max(\lambda, \mu)$. Теперь $v-k \le |A|+|B| \le 2v-4k+2\max(\lambda, \mu)$ и $v \ge 3k-2\max(\lambda, \mu)$. Для графа Δ, полученного из графа Шлэфли, имеем $27 \ge 3 \cdot 16 - 2 \cdot 10 = 28$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Вершинная связность графов Деза Δ, получаемых из сильно регулярных графов Чанга с параметрами $(28, 12, 6, 4)$, равна их валентности, а разделяющее множество наименьшей мощности является окрестностью вершины.*

Доказательство. Пусть S — разделяющее множество наименьшей мощности графа Δ, A и B — компоненты связности, остающиеся после удаления S из Δ.

Предположим, что $|S| \le 11$. Рассмотрим пару несмежных вершин $x, y \in B$. Имеем $|x^\perp \cup y^\perp| \ge 2 \cdot 12 - 6 + 2 = 20$ и $|B| + |S| \ge |x^\perp \cup y^\perp| \ge 20$, отсюда $20 - |B| \le |S| \le 11$ и $|B| \ge 9$.

Рассмотрим пару несмежных вершин $x, y \in A$. Теперь $28 - |B| = |A| + |S| \ge |x^\perp \cup y^\perp| \ge 2 \cdot 12 - 6 + 2 = 20$, поэтому $|B| \le 8$. Таким образом, A — клика, значит, $|A| \le 7$.

Предположим, что $|A| = 7$. Тогда ввиду рассуждений предложения 5 средняя степень вершины в подграфе B не больше 4, т. е. второго по величине собственного значения графа Δ (и графа Чанга). Если $s = |S|$, то вершина из S смежна в среднем не менее, чем с $(7 \cdot 6 + 8 \cdot (28-7-s))/s = 210/s - 8$ вершинами из $A \cup B$. Поскольку $210/s - 8 \le 12$, имеем, что $s = 11$ и средняя степень вершины в S не больше 1. Противоречие с тем, что для любой вершины a из A подграф $\Delta(a) \setminus A$ содержится в S и средняя степень вершины в нем не менее 3.

Итак, $|A| \le 6$. Рассмотрим пару вершин $x, y \in A, x \sim y$, тогда $28 - |B| = |A| + |S| \ge |x^\perp \cup y^\perp| \ge 2 \cdot 12 - 6 = 18$ и $|B| \le 10$. Теперь $28 - |S| = |A| + |B| \le 6 + 10 = 16$, $|S| \ge 12$, противоречие.

Таким образом, и B — клика. Рассмотрим вершины $x, y \in B, x \sim y$. Тогда $|x^{\perp} \cup y^{\perp}| \geq 2 \cdot 12 - 6 = 18$. Отсюда $|B| + |S| \geq |x^{\perp} \cup y^{\perp}| \geq 18$, $18 - |B| \leq |S| \leq 11$ и $|B| \geq 7$, противоречие. Лемма доказана.

2.5. Доказательство теоремы

Пусть Δ — граф Деза, полученный из сильно регулярного графа Γ, имеющего неглавные собственные значения r, s, где $r > 0$ и $s < 0$.

Если $r > 2$ и $s < -2$, то по предложению 5 вершинная связность графа Δ равна его валентности, а наименьшим разделяющим множеством является окрестность какой-либо вершины. Отсюда следует утверждение (1) теоремы.

Если $s = -2$, то Γ — один из графов из заключения предложения 3. С учетом замечаний 3 и 4, утверждение (2) теоремы следует из лемм 1–5.

В оставшемся случае выполняется утверждение (3) теоремы, т. е. $r \leq 2$.

Теорема доказана.

Заключение

Следуя рассуждениям доказательства предложения 5, можно показать, что в случае, когда собственное значение $r \leq 2$ нецелое, сильно регулярный граф имеет не более 25 вершин. Единственными сильно регулярными графами, удовлетворяющими этому условию, являются графы Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$ и $(17, 8, 3, 4)$.

Сильно регулярные графы с собственным значением $r = 1$ являются дополнительными к графам с собственным значением -2. Автоморфизмы таких сильно регулярных графов, удовлетворяющие теореме 2, и локальное строение некоторых соответствующих графов Деза изучались в работе [9]. Отметим, что, например, граф, дополнительный к $n \times n$-решетке, допускает автоморфизмы, удовлетворяющие условию предложения 2, причем их количество является возрастающей функцией от n, что существенно усложняет получение результата, аналогичного доказанной в работе теореме.

Сильно регулярные графы с собственным значением $r = 2$ классифицированы в работе [10], среди них существуют три гипотетически бесконечные серии параметров графов, и для многих явно указанных параметров открыт вопрос существования соответствующих графов. Для некоторых графов (в том числе вопрос существования которых открыт) можно показать, что они не допускают автоморфизмов, удовлетворяющих предложению 2.

Таким образом, изучение оставшихся случаев из предложения 5 требует новых подходов. И, конечно, интересным является вопрос о соотношении между величиной вершинной связности и валентностью в классе всех графов Деза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Godsil C., Royle G.** Algebraic Graph Theory. New-York: Springer-Verlag, 2001. 439 p.
2. **Brouwer A.E., Koolen J.H.** The vertex-connectivity of a distance-regular graph // Europ. J. Combin. 2009. Vol. 30, no. 3. P. 668–673.
3. **Brouwer A.E., Mesner D.M.** The connectivity of strongly regular graphs // Europ. J. Combin. 1985. Vol. 6. P. 215–216.
4. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
5. Deza graphs: A generalization of strongly regular graphs / M. Erickson, S. Fernando, W.H. Haemers, D. Hardy, J. Hemmeter // J. Comb. Des. 1999. Vol. 7, no. 6. P. 359–405.
6. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
7. **Кабанов В.В, Шалагинов Л.В.** О графах Деза с параметрами решетчатых графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 117–120.

8. **Шалагинов Л.В.** О графах Деза с параметрами треугольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 294–298.
9. **Горяинов С.В., Шалагинов Л.В.** О графах Деза с параметрами графов, дополнительных к треугольным и решетчатым // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2013. Т. 20, № 2. С. 3–14.
10. **Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В.** О сильно регулярных графах с собственным значением 2 и их расширениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 105–116.

Гаврилюк Александр Львович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: alexander.gavriliouk@gmail.com

Поступила 10.05.2013

Горяинов Сергей Викторович
аспирант
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: 44g@mail.ru

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зам. директора по науке
Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: vvk@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

А. Р. Данилин, Н. С. Коробицына

Рассматривается задача оптимального управления решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено геометрическими ограничениями. Получены общие теоремы об аппроксимации. Построены два главных члена асимптотического разложения решения рассматриваемой задачи и получена оценка погрешности этих приближений.

Ключевые слова: оптимальное управление, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, N. S. Korobitsyna. Asymptotic estimates for a solution of a singular perturbation optimal control problem on a closed interval under geometric constraints.

An optimal control problem is considered for solutions of a boundary value problem for a second-order ordinary differential equation on a closed interval with a small parameter at the second derivative. The control is scalar and satisfies geometric constraints. General theorems on approximation are obtained. Two leading terms of an asymptotic expansion of the solution are constructed and an error estimate is obtained for these approximations.

Keywords: optimal control, time-optimal problem, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления [1–3] решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено геометрическими ограничениями, а критерий качества — интегральный. На данную задачу можно смотреть и как на частный случай общих задач управления, описанных в [4].

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что система оптимальности имеет различную структуру на различных, не известных заранее, подобластях области определения системы. Аналогичная ситуация для задач управления решениями уравнений в частных производных была рассмотрена в [5; 6].

Получены общие теоремы об аппроксимации. Построены два главных члена асимптотического разложения решения рассматриваемой задачи и получена оценка погрешности этих приближений.

В настоящей работе используются методы, развитые в работах [7–9].

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 z_\varepsilon'' + b(x)z_\varepsilon' + a(x)z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in [0,1], \quad z \in H_0^1(0;1), \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00679), и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} := \bigl\{u(\cdot) \in L_2(0;1)\colon |u(x)| \leqslant 1 \text{ почти всюду}\bigr\}, \tag{1.2}$$

$$J := \int\limits_0^1 \bigl((z(x) - z_d(x))^2 + u^2(x)\bigr)\, dx \to \inf. \tag{1.3}$$

Предполагается, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $z_d(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} a(\cdot),\ b(\cdot),\ f(\cdot),\ z_d(\cdot) \in C^\infty[0;1], \\ \forall\, x \in [0;1] \quad a(x) \geqslant \alpha > 0, \quad b(x) \geqslant \alpha, \quad b'(x) \leqslant 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

а решение уравнения (1.1) понимается в слабом смысле:

$$\forall\, Z \in H_0^1(0;1) \quad (\varepsilon^2 z_\varepsilon', Z') + (b z_\varepsilon', Z) + (a z_\varepsilon, Z) = (f + u_\varepsilon, Z), \tag{1.5}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(0;1)$. В дальнейшем норму в пространстве $L_2(0;1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$.

Содержательно задача (1.1)–(1.3) состоит в том, чтобы привести управляемое состояние z_ε по возможности как можно ближе к некоторому заданному состоянию z_d, но с учетом затраченных на управление ресурсов.

З а м е ч а н и е 1. Если в задаче (1.1)–(1.3) перейти к новой независимой переменной $t := 1 - x$, то основное уравнение примет вид $\varepsilon^2 z_\varepsilon'' + b(1-t) z_\varepsilon' - a(1-t) z_\varepsilon = -f - u_\varepsilon$. При этом, переходя от одного уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка, получим систему с “быстрыми и медленными” переменными

$$\dot z = y,\ \varepsilon \dot y = az - by - u - f.$$

Для систем такого вида рассматривались как игровые задачи [10; 11], так и задачи оптимального управления с отличными от рассматриваемого в данной работе критерия качества (см. обзор [12]).

Критерий оптимальности в задаче (1.1)–(1.3) можно получить из принципа максимума Понтрягина [3] либо из теории Лионса [4]. Для применения последней надо, чтобы квадратичная форма из (1.5) $(\mathcal{L}_\varepsilon Z, \mathcal{L}_\varepsilon Z) = (\varepsilon^2 Z', Z') + (bZ', Z) + (aZ, Z)$ была коэрцитивна в $H_0^1(0;1)$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поскольку $(bZ', Z) = -(Z, b'Z)/2$, то

$$(\mathcal{L}_\varepsilon Z, Z) = \varepsilon^2 \|Z\|^2 + ((a - b'/2)Z, Z) \overset{(1.4)}{\geqslant} \varepsilon^2 \|Z'\| + \alpha\|Z\| \geqslant \varepsilon^2 \|Z\|_{H_0^1(0;1)}. \tag{1.6}$$

Тем самым задача (1.1)–(1.3) разрешима единственным образом и существует $p_\varepsilon \in H_0^1(0;1)$ такое, что

$$\mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon := -\varepsilon^2 p_\varepsilon'' - b(x) p_\varepsilon' + (a(x) - b'(x)) p_\varepsilon = -z_\varepsilon + z_d, \quad x \in [0,1], \quad z_\varepsilon \in H_0^1(0;1), \tag{1.7}$$

при этом

$$u_\varepsilon(x) = F(p_\varepsilon) \in H^1(0;1), \qquad \text{где } F(p) = \begin{cases} \ \ 1, & p > 1, \\ \ \ p, & |p| \leqslant 1, \\ -1, & p < 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Таким образом, система оптимальности для задачи (1.1)–(1.3) имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon - F(p_\varepsilon) = f, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon + z_\varepsilon = z_d, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1(0;1). \tag{1.9}$$

Отметим, что в силу свойств дифференциальных операторов второго порядка из условий (1.4) следует, что $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^2[0;1]$.

Целью данной работы является изучение поведения решения системы (1.9) при $\varepsilon \to +0$.

З а м е ч а н и е 2. По сравнению с [4, п. 2.1., формулы (2.25) и (2.26)] в данной работе в качестве сопряженной переменной $p_\varepsilon(\cdot)$ взята сопряженная переменная из [4] со знаком "минус".

2. Априорные оценки

В силу определения функции F для любых p, p_1, $p_2 \in \mathbb{R}$ справедливы следующие соотношения:

$$F(-p) = -F(p), \quad |F(p)| \leqslant 1, \quad \big(F(p_1) - F(p_2)\big)(p_1 - p_2) \geqslant 0, \quad |F(p_1) - F(p_2)| \leqslant |p_1 - p_2|.$$

Поэтому

$$\forall\, p, p_1, p_2 \in L_2(0;1) \quad \|F(p)\|^2 \leqslant 1, \quad \|p_1 - p_2\|^2 \geqslant \big(F(p_1) - F(p_2), p_1 - p_2\big) \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Умножив первое уравнение в (1.9) на z_ε, а второе — на p_ε, исходя из (1.6) и (2.1) получим

$$\varepsilon^2\|z_\varepsilon'\|^2 + \alpha\|z_\varepsilon\|^2 \leqslant \|z_\varepsilon\| \cdot \|f\| + 1 \cdot \|z_\varepsilon\|,$$
$$\varepsilon^2\|p_\varepsilon'\|^2 + \alpha\|p_\varepsilon\|^2 \leqslant \|z_\varepsilon\| \cdot \|p_\varepsilon\| + \|z_d\| \cdot \|p_\varepsilon\|.$$

Из этих неравенств с очевидность следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *Если z_ε, p_ε — решение системы* (1.9)*, то*

$$\varepsilon\|z_\varepsilon'\|, \|z_\varepsilon\|, \varepsilon\|p_\varepsilon'\|, \|p_\varepsilon\| = O(1) \quad \textit{при } \varepsilon \to +0.$$

Следующая теорема является основной для обоснования асимптотических разложений решений задачи.

Теорема 1. *Пусть $Z_\varepsilon, P_\varepsilon \in C^2[0;1]$ удовлетворяют следующей краевой задаче:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon Z_\varepsilon - F(P_\varepsilon) = f + f_{1,\varepsilon}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* P_\varepsilon + Z_\varepsilon = z_d + f_{2,\varepsilon}, \\ &\|f_{i,\varepsilon}\|, Z_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(1), P_\varepsilon(0), P_\varepsilon(1) = O\big(\varepsilon^\gamma\big), \quad \|Z_\varepsilon\|, \|P_\varepsilon\| = O(1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

при $\varepsilon \to +0$ и $\gamma > 0$. Тогда

$$\varepsilon\|Z_\varepsilon' - z_\varepsilon'\|, \|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|, \varepsilon\|P_\varepsilon' - p_\varepsilon'\|, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^\gamma\big)$$

при $\varepsilon \to +0$.

В частности,

$$\|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{C[0;1]}, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{C[0;1]} = O\big(\varepsilon^{\gamma-1}\big) \quad \textit{при } \varepsilon \to +0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $Z_\varepsilon(0) = Z_\varepsilon(1) = P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1) = 0$.
Обозначим $\overline{z}_\varepsilon := Z_\varepsilon - z_\varepsilon$ и $\overline{p}_\varepsilon := P_\varepsilon - p_\varepsilon$. Тогда $\overline{z}, \overline{p} \in H_0^1(0;1)$, а в силу (1.9) и (2.2)

$$\mathcal{L}_\varepsilon \overline{z}_\varepsilon - F(P_\varepsilon) + F(p_\varepsilon) = f_{1,\varepsilon}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* \overline{p}_\varepsilon + \overline{z}_\varepsilon = f_{2,\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Умножив второе уравнение в (2.3) на $\overline{z}_\varepsilon$ и воспользовавшись первым уравнением из (2.3), получим

$$\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 + \big(P_\varepsilon - p_\varepsilon, F(P_\varepsilon) - F(p_\varepsilon)\big) \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{2,\varepsilon}\| + \|\overline{p}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\|. \tag{2.4}$$

Аналогично, умножив первое уравнение из (2.3) на $\overline{z}_\varepsilon$ и второе из (2.3) — на $\overline{p}_\varepsilon$, в силу неравенств (1.6) и (2.1) получим

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\|\overline{z}_\varepsilon'\|^2 + \alpha\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\| + \|z_\varepsilon\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\|, \\ &\varepsilon^2\|\overline{p}_\varepsilon'\|^2 + \alpha\|\overline{p}_\varepsilon\|^2 \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\| + \|f_{2,\varepsilon}\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При этом все слагаемые, стоящие в левых части неравенств (2.4), (2.5), неотрицательны. Поэтому, согласно условиям теоремы

$$\begin{aligned} \|\overline{z}_\varepsilon\|^2 &= O\big(\|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \varepsilon^\gamma\big) + O\big(\|\overline{p}_\varepsilon\| \cdot \varepsilon^\gamma\big), \\ \varepsilon^2\|\overline{z}'_\varepsilon\|^2 + \alpha\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 &= O\big(\|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \varepsilon^\gamma\big) + O\big(\|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\|\big), \\ \varepsilon^2\|\overline{p}'_\varepsilon\|^2 + \alpha\|\overline{p}_\varepsilon\|^2 &= O\big(\|\overline{p}_\varepsilon\| \cdot \varepsilon^\gamma\big) + O\big(\|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\|\big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из последнего соотношения в (2.6) выводим $\|\overline{p}_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^\gamma\big) + O\big(\|\overline{z}_\varepsilon\|\big)$, откуда в силу первого соотношения из (2.6) $\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 = O\big(\|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \varepsilon^\gamma\big) + O\big(\varepsilon^{2\gamma}\big)$. Решая соответствующее квадратичное неравенство, получим $\|\overline{z}_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^\gamma\big)$ и $\|\overline{p}_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^\gamma\big)$.

Наконец, в силу (2.6) справедливы соотношения $\|\overline{z}'_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^{\gamma-1}\big)$ и $\|\overline{p}'_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^{\gamma-1}\big)$.

Теперь рассмотрим общую ситуацию.

Пусть $\widetilde{Z}_\varepsilon(x) := Z_\varepsilon(x) - Z_\varepsilon(1)x - Z_\varepsilon(0)(1-x)$ и $\widetilde{P}_\varepsilon(x) := P_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(1)x - P_\varepsilon(0)(1-x)$. Тогда $\widetilde{Z}_\varepsilon$ и $\widetilde{P}_\varepsilon$ удовлетворяют нулевым граничным условиям, а

$$\mathcal{L}_\varepsilon\widetilde{Z}_\varepsilon - F(\widetilde{P}_\varepsilon) = f + \widetilde{f}_{1,\varepsilon}, \quad \mathcal{L}^*_\varepsilon\widetilde{P}_\varepsilon + \widetilde{Z}_\varepsilon = z_d + \widetilde{f}_{2,\varepsilon},$$

где $\widetilde{f}_{1,\varepsilon} = f_{1,\varepsilon} + \mathcal{L}(\widetilde{Z}_\varepsilon - Z_\varepsilon) + F(P_\varepsilon) - F(\widetilde{P}_\varepsilon)$, $\widetilde{f}_{2,\varepsilon} = f_{2,\varepsilon} + \mathcal{L}^*(\widetilde{P}_\varepsilon - P_\varepsilon) + (\widetilde{Z}_\varepsilon - Z_\varepsilon)$ и $\|f_{i,\varepsilon}\| = O\big(\varepsilon^\gamma\big)$ при $\varepsilon \to +0$.

Последняя оценка $\|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{C[0;1]}, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{C[0;1]} = O\big(\varepsilon^{\gamma-1}\big)$ при $\varepsilon \to +0$ следует из соответствующей теоремы вложения [13]. $\square$

3. Предельная задача

Аналогично теории сингулярно возмущенных краевых задач для (1.9) дифференциальных операторов второго порядка можно ожидать, что предельной задачей для (1.9) будет

$$\mathcal{L}_0 z_0 - F(p_0) = f, \quad \mathcal{L}^*_0 p_0 + z_0 = z_d, \quad z_0(0) = 0, \quad p_0(1) = 0, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{L}_0 z_0 := b(x)z'_0 + a(x)z_0$, а $\mathcal{L}^*_0 p_0 := -b(x)p'_0 + \big(a(x) - b'(x)\big)p_0$.

Рассмотрим условия разрешимости этой задачи, сведя ее к краевой нелинейной задаче второго порядка.

Продифференцировав второе уравнение в системе (3.1) и выразив z' и z через p' и p, получим следующую краевую задачу:

$$p''_0 = \widetilde{b}(x)p'_0 + \widetilde{a}(x)p_0 + \frac{1}{b^2(x)}F(p_0) + \widetilde{f}(x), \quad \delta p_0(0) - b(0)p'_0(0) = 0, \quad p_0(1) = 0, \tag{3.2}$$

где

$$\widetilde{b} = \frac{-2b'}{b} \overset{(1.4)}{>} 0, \quad \widetilde{a} = \frac{(a' - b'')b + (a - b')a}{b^2}, \quad \widetilde{f} = \frac{f - (b' + b + a)z_d}{b^2}, \quad \delta = a(0) - b'(0). \tag{3.3}$$

При выполнении на отрезке $[0;1]$ условий

$$4\widetilde{c}(x) > \widetilde{b}^2(x) \Leftrightarrow \big(a(x)' - b''(x)\big)b(x) + \big(a(x) - b'(x)\big)a(x) > \big(b'(x)\big)^2 \tag{3.4}$$

применима [14, теорема 31.6] и существует $p_0 \in C^2[0;1]$ — единственное решение задачи (3.2).

Теперь, взяв z_0 по формуле $z_0 = z_d + bp'_0 - (a - b')p_0 \in C^1[0;1]$, получим разрешимость задачи (3.1). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении условий* (3.4) *задача* (3.1) *имеет единственное решение* z_0, p_0: $z_0 \in C^1[0;1]$, $p_0 \in C^2[0;1]$.

З а м е ч а н и е 3. Для существования какого-нибудь решения краевой задачи (3.1) с C^2-гладкостью достаточно выполнения более слабого, чем (3.4), условия

$$\widetilde{c}(x) > 0 \Leftrightarrow (a(x)' - b''(x))b(x) + (a(x) - b'(x))a(x) > 0.$$

См., например, [15, § 2.1, теорема 2.3].

З а м е ч а н и е 4. Если b — const, то условие (3.4) принимает вид: $a'b + a^2 > 0$.
Если же и a – const, то условие (3.4) заведомо выполнено.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (3.4). *Если* z_ε, p_ε *— решение задачи* (1.9), *а* z_0, p_0 *— решение задачи* (3.1), *то*

$$\|z_\varepsilon - z_0\|\|, \|p_\varepsilon - p_0\|\| = O\big(\sqrt{\varepsilon}\big) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\overline{z}_\varepsilon := z_\varepsilon - z_0$, а $\overline{p}_\varepsilon := p_\varepsilon - p_0$. Тогда в силу (1.9) и (3.1)

$$-\varepsilon^2 z_\varepsilon'' + \mathcal{L}_0 \overline{z}_\varepsilon - F(p_\varepsilon) + F(p_0) = 0, \quad -\varepsilon^2 p_\varepsilon'' + \mathcal{L}_0^* \overline{p}_\varepsilon + \overline{z}_\varepsilon = 0, \quad \overline{z}_\varepsilon(0) = 0, \quad \overline{p}_\varepsilon(1) = 0. \tag{3.5}$$

Умножив второе уравнение в (3.5) на $\overline{z}_\varepsilon$, получим

$$\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 + \big(p_\varepsilon - p_0, F(p_\varepsilon) - F(p_0)\big) = \varepsilon^2 (p_0, z_\varepsilon'') - \varepsilon^2 (p_\varepsilon'', z_0). \tag{3.6}$$

Учитывая граничные условия $p_0(1) = 0 = z_0(0)$ и утверждение 1, после интегрирования по частям получим $\varepsilon^2(p_0, z_\varepsilon'') - \varepsilon^2(p_\varepsilon'', z_0) = -\varepsilon^2 p_0(0) z_\varepsilon'(0) - \varepsilon^2(p_0', z_\varepsilon') - \varepsilon^2 p_\varepsilon'(1) z_0(1) + \varepsilon^2(p_\varepsilon', z_0') = -\varepsilon^2\big(p_0(0)z_\varepsilon'(0) + p_\varepsilon'(1), z_0(1)\big) + O(\varepsilon)$.

Но из L_2-ограниченности z_ε, p_ε и представления решения краевой задачи для линейного уравнения второго порядка (с помощью функции Грина) следует, что

$$\varepsilon^2 p_0(0) z_\varepsilon'(0), \varepsilon^2 p_\varepsilon'(1) z_0(1) = O(\varepsilon).$$

Тем самым $\|\overline{z}_\varepsilon\| = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Теперь рассмотрим следующую функцию $\widetilde{p}_\varepsilon := \overline{p} - p_0(0)\exp(-b(0)x/\varepsilon^2)$. Она на $[0;1]$ удовлетворяет нулевым граничным условиям и уравнению $\mathcal{L}_\varepsilon^* \widetilde{p}_\varepsilon = \widetilde{g}$, где

$$\widetilde{g} = -\overline{z}_\varepsilon + \varepsilon^2 p_0'' - \big(b(x) - b(0)\big)\exp(-b(0)x/\varepsilon^2) b(0)/\varepsilon^2 - (a - b')\exp(-b(0)x/\varepsilon^2).$$

В силу неравенства (1.6) $\|\widetilde{p}_\varepsilon\| = O(\|\widetilde{g}\|)$.

Поскольку $\|\widetilde{g}\| = \| - \overline{z}_\varepsilon + \varepsilon^2 p_0'' - (a - b')\exp(-b(0)x/\varepsilon^2)\| = O(\sqrt{\varepsilon})$, то осталось оценить только норму $g := \big(b(x) - b(0)\big)\exp(-b(0)x/\varepsilon^2) b(0)/\varepsilon^2 = O(x)\exp(-b(0)x/\varepsilon^2)/\varepsilon^2$:

$$\|g\|^2 = \varepsilon^{-4}\left(\int\limits_0^{\varepsilon^{3/2}} O(x^2)\exp(-2b(0)x/\varepsilon^2)\,dx + \int\limits_{\varepsilon^{3/2}}^1 O(1)\exp(-2b(0)x/\varepsilon^2)\,dx\right) = O(\varepsilon).$$

Наконец, $\|\overline{p}_\varepsilon\| \leqslant \|\widetilde{p}_\varepsilon\| + \|p_0(0)\exp(-b(0)x/\varepsilon^2)\| = O(\sqrt{\varepsilon})$ при $\varepsilon \to +0$. □

4. Внешнее разложение функций z_ε и p_ε

В дальнейшем будем считать, что функция p_0 удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{gathered} \exists\, \vartheta_0, \theta_0 \in (0;1): \ \vartheta_0 < \theta_0, \quad |p_0(x)| < 1 \text{ при } x \in [0;\vartheta_0) \cup (\theta_0;1], \\ p_0(x) > 1 \text{ при } x \in (\vartheta_0;\theta_0), \quad p'(\vartheta_0) > 0, \quad p'(\theta_0) < 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

З а м е ч а н и е 5. Поскольку z_0 и p_0 на каждом из отрезков $[0;\vartheta_0]$, $[\vartheta_0;\theta_0]$ и $[\theta_0;1]$ являются решениями систем линейных уравнений с гладкими коэффициентами, то и сами они бесконечно дифференцируемы на этих отрезках.

Асимптотическое представление решений z_ε и p_ε мы будем строить как решения систем линейных уравнений разной структуры на промежутках $(0;\vartheta_\varepsilon)$, $(\vartheta_\varepsilon;\theta_\varepsilon)$ и $(\theta_\varepsilon;1)$, на которых функции $\overset{o}{P}_\varepsilon$, $\overset{+}{P}_\varepsilon$, $\overset{1}{P}_\varepsilon$, являющиеся приближением функции p_ε, будут вести себя подобно этой функции: $|\overset{o}{P}_\varepsilon| < 1$, $|\overset{1}{P}_\varepsilon| < 1$, а $\overset{+}{P}_\varepsilon > 1$. При этом асимптотические разложения этих решений должны быть согласованы в точках ϑ_ε и θ_ε (построение которых ведется параллельно с построением асимптотических разложений неизвестных функций) по непрерывности до производных первого порядка.

Разложения на каждом из промежутков $(0;\vartheta_\varepsilon)$, $(\vartheta_\varepsilon;\theta_\varepsilon)$ и $(\theta_\varepsilon;1)$ будут состоять из регулярной (внешнее разложение) и сингулярной (функции пограничного слоя, растущие не быстрее полиномов) частей.

Внешнее разложение z_ε и p_ε будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&\overset{o}{z}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{o}{z}_n, \quad \overset{o}{p}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{o}{p}_n, \quad \overset{+}{z}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{+}{z}_n, \quad \overset{+}{p}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{+}{p}_n,\\
&\overset{1}{z}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{1}{z}_n, \quad \overset{1}{p}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{1}{p}_n,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\overset{o}{z}_n$, $\overset{o}{p}_n$, $\overset{+}{z}_n$, $\overset{+}{p}_n$, $\overset{1}{z}_n$ и $\overset{1}{p}_n$ при $n = 0$ — это сужение z_0 и p_0 на $[0;\vartheta_0]$, $[\vartheta_0;\theta_0]$ и $[\theta_0;1]$ соответственно, а при $n > 0$ эти функции удовлетворяют следующим системам:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_0\, \overset{o}{z}_n - \overset{o}{p}_n = \overset{o}{z}_{n-1}, \quad \mathcal{L}_0^*\, \overset{o}{p}_n + \overset{o}{z}_n = \overset{o}{p}_{n-1}, \quad \mathcal{L}_0\, \overset{+}{z}_n = \overset{+}{z}_{n-1}, \quad \mathcal{L}_0^*\, \overset{+}{p}_n + \overset{+}{z}_n = \overset{+}{p}_{n-1},\\
&\mathcal{L}_0\, \overset{1}{z}_n - \overset{1}{p}_n = \overset{1}{z}_{n-1}, \quad \mathcal{L}_0^*\, \overset{1}{p}_n + \overset{1}{z}_n = \overset{1}{p}_{n-1}\,.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Дополнительные условия можно задавать либо начальные в некоторой точке, либо краевые, тогда значение функции z_n задается в левой точке некоторого промежутка, а функции p_n — в правой.

З а м е ч а н и е 6. В силу выполнения условия (3.4) все эти задачи при заданных дополнительных условиях однозначно разрешимы. Более того, как решения систем линейных уравнений с гладкими коэффициентами и правыми частями, они определены и бесконечно дифференцируемы на $[0;1]$.

5. Внутреннее разложение z_ε и p_ε

В дальнейшем для простоты изложения будем считать, что

$$b(x) \equiv 1, \quad a(x) \equiv a \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Внутреннее разложение в этой задаче возникает в малых окрестностях точек $x = 0$, $x = \vartheta_\varepsilon$, $x = \theta_\varepsilon$ и $x = 1$:

$$\begin{aligned}
&\overset{o}{W}_\varepsilon(\eta_1) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{o}{W}_n(\eta_1), \quad \overset{o}{V}_\varepsilon(\eta_1) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{o}{V}_n(\eta_1), \quad \eta_1 := \frac{x}{\varepsilon^2},\\
&\overset{\vartheta-}{W}_\varepsilon(\eta_2) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{\vartheta-}{W}_n(\eta_2), \quad \overset{\vartheta-}{V}_\varepsilon(\eta_2) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{\vartheta-}{V}_n(\eta_2), \quad \eta_2 := \frac{\vartheta_\varepsilon - x}{\varepsilon^2},\\
&\overset{\vartheta+}{W}_\varepsilon(\eta_3) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{\vartheta+}{W}_n(\eta_3), \quad \overset{\vartheta+}{V}_\varepsilon(\eta_3) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{\vartheta+}{V}_n(\eta_3), \quad \eta_3 := \frac{x - \vartheta_\varepsilon}{\varepsilon^2},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\overset{\theta-}{W}_\varepsilon(\eta_4) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\theta-}{W}_n(\eta_4), \quad \overset{\theta-}{V}_\varepsilon(\eta_4) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\theta-}{V}_n(\eta_4), \quad \eta_4 := \frac{\theta_\varepsilon - x}{\varepsilon^2},$$
$$\overset{\theta+}{W}_\varepsilon(\eta_5) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\theta+}{W}_n(\eta_5), \quad \overset{\theta+}{V}_\varepsilon(\eta_5) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\theta+}{V}_n(\eta_5), \quad \eta_5 := \frac{x - \theta_\varepsilon}{\varepsilon^2},$$
$$\overset{1}{W}_\varepsilon(\eta_6) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{1}{W}_n(\eta_6), \quad \overset{1}{V}_\varepsilon(\eta_6) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{1}{V}_n(\eta_6), \quad \eta_6 := \frac{1 - x}{\varepsilon^2}.$$

При этом точки ϑ_ε, θ_ε смены структуры систем будем брать в виде асимптотических рядов

$$\vartheta_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \vartheta_n, \qquad \theta_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \theta_n. \tag{5.3}$$

В силу линейности систем на каждом из рассматриваемых промежутков функции W и V в пограничных слоях удовлетворяют соответствующим однородным уравнениям. Тогда коэффициенты внутренних разложений должны удовлетворять следующим системам уравнений:

$$\begin{aligned} &W_n'' - W' = aW_{n-1} - V_{n-1}, \quad V_n'' + V' = aV_{n-1} + W_{n-1}, \quad \text{для } \eta_1, \eta_3, \eta_5, \\ &W_n'' + W' = aW_{n-1} - V_{n-1}, \quad V_n'' - V' = aV_{n-1} + W_{n-1}, \quad \text{для } \eta_2, \eta_4, \eta_6. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Дополнительные условия проистекают из асимптотических равенств, выражающих дополнительные условия согласования в точках $x = 0$ и $x = 1$ (удовлетворение граничных условий), и в точках $x = \vartheta_\varepsilon$ и $x = \theta_\varepsilon$ (согласование по непрерывности до первых производных включительно).

Отметим, что с ростом n решения систем (5.4) растут как полиномы, что в общем случае при получении асимптотических представлений высокого порядка функций z_ε и p_ε требует применения техники согласования асимптотических разложений [7]. Однако асимптотическое представление порядка $O(\varepsilon)$ можно получить еще без применения указанной техники.

6. Асимптотическое представление z_ε и p_ε с точностью до $O(\varepsilon)$

Нулевое приближение z_ε и p_ε имеет вид

$$z_\varepsilon^{[0]} = z_0 - z_0(1)\exp\big((x-1)/\varepsilon^2\big), \qquad p_\varepsilon^{[0]} = p_0 - p_0(0)\exp\big(-x/\varepsilon^2\big),$$

т. е. $\overset{o}{W}_0 = 0$, $\overset{o}{V}_n(\eta_1) = -p_0(0)\exp(-\eta_1)$, $\overset{\vartheta-}{W}_0 = 0$, $\overset{\vartheta-}{V}_0 = 0$, $\overset{\vartheta+}{W}_0 = 0$, $\overset{\vartheta+}{V}_0 = 0$, $\overset{\theta-}{W}_0 = 0$, $\overset{\theta-}{V}_0 = 0$, $\overset{\theta+}{W}_0 = 0$, $\overset{\theta+}{V}_0 = 0$, $\overset{1}{W}_0(\eta_6) = -z_0(1)\exp(-\eta_6)$, $\overset{1}{V}_0 = 0$.

Члены разложения

$$z_\varepsilon^{[1]} := z_\varepsilon^{[0]} + \varepsilon^2 z^{[1]}, \quad p_\varepsilon^{[1]} := p_\varepsilon^{[0]} + \varepsilon^2 p^{[1]}$$

будем искать как функции, определенные на промежутках $[0; \vartheta_{\varepsilon,1})$, $[\vartheta_{\varepsilon,1}; \theta_{\varepsilon,1})$ и $[\theta_{\varepsilon,1}; 1])$ (здесь $\vartheta_{\varepsilon,1} := \vartheta_0 + \varepsilon^2\vartheta_1$, а $\theta_{\varepsilon,1} := \theta_0 + \varepsilon^2\theta_1$) следующим образом (обозначение констант соответствует обозначению функций из пограничных слоев около соответствующих точек):

$$\begin{aligned} &\overset{o}{z}{}^{[1]} = \overset{o}{z}_1 + \overset{o}{Q}_0 \exp(-\eta_1) + \overset{o}{C} + \overset{\vartheta-}{C} \exp(-\eta_2), && \overset{o}{p}{}^{[1]} = \overset{o}{p}_1 + \overset{o}{D} \exp(-\eta_1) + \eta_1 \overset{o}{R}_0 \exp(-\eta_1) + \overset{\vartheta-}{D}, \\ &\overset{+}{z}{}^{[1]} = \overset{+}{z}_1 + \overset{\vartheta+}{C} + \overset{\theta-}{C} \exp(-\eta_4), && \overset{+}{p}{}^{[1]} = \overset{+}{p}_1 + \overset{\vartheta+}{D} \exp(-\eta_3) + \overset{\theta-}{D}, \\ &\overset{1}{z}{}^{[1]} = \overset{1}{z}_1 + \overset{\theta+}{C} + \overset{1}{C} \exp(-\eta_6)\eta_6 \overset{1}{Q}_0 \exp(-\eta_6), && \overset{1}{p}{}^{[1]} = \overset{1}{p}_1 + \overset{\theta+}{D} \exp(-\eta_5) + \overset{1}{D} + \overset{1}{R}_0 \exp(-\eta_6), \end{aligned}$$

где $\overset{o}{Q}_0$, $\overset{o}{R}_0$, $\overset{1}{Q}_0$ и $\overset{1}{R}_0$ — известные константы; $\overset{o}{z}_1$, $\overset{o}{p}_1$, $\overset{+}{z}_1$, $\overset{+}{p}_1$, $\overset{1}{z}_1$ и $\overset{1}{p}_1$ — решение систем (4.3) с дополнительными условиями

$$\overset{o}{z}_1(0) = 0, \quad \overset{o}{p}_1(\vartheta_0) = 0, \quad \overset{+}{z}_1(\vartheta_0) = \overset{o}{z}_1(\vartheta_0), \quad \overset{+}{p}_1(\theta_0) = 0, \quad \overset{1}{z}_1(\theta_0) = \overset{+}{z}_1(\theta_0), \quad \overset{1}{p}_1(1) = 0.$$

В дальнейшем если на промежутках $[x_1; x_2)$, $[x_2; x_3)$, $[x_3; x_4]$ заданы функции g_1, g_2, g_3, то соотношением $g = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ будем обозначать функцию g, сужение которой на i-й промежуток совпадает с g_i.

По построению функция $z_1 := \langle \overset{o}{z}_1, \overset{+}{z}_1, \overset{1}{z}_1 \rangle$ непрерывна на $[0; 1]$.

Выписывая для $z_\varepsilon^{[0]} + \varepsilon^2 z^{[1]}$ равенство старших членов производных в точке $\vartheta_{\varepsilon,1}$ справа и слева, в силу непрерывной дифференцируемости функции z_0 получим $\overset{\vartheta-}{C} = 0$. Аналогично с учетом непрерывной дифференцируемости функции p_0 имеем $\overset{\theta-}{C} = 0 = \overset{\vartheta+}{D} = \overset{\theta=}{C}$.

Дополнительные условия дадут уравнения для нахождения оставшихся неизвестных включая ϑ_1 и θ_1.

Из равенств $z^{[1]}(0) = 0 = z^{[1]}(1) = p^{[1]}(0) = p^{[1]}(1)$ следует, что

$$\overset{o}{C} = -\overset{o}{Q}_0, \quad \overset{o}{D} + \overset{\vartheta-}{D} = -\overset{o}{p}_1(0), \quad \overset{\theta+}{C} + \overset{1}{C} = -\overset{1}{z}_1(1), \quad \overset{1}{D} = -\overset{1}{R}_0. \tag{6.1}$$

Условие согласования $z_\varepsilon^{[1]}$ по непрерывности в силу непрерывности функций z_0 и z_1 приведет к равенствам

$$\overset{\vartheta+}{C} = \overset{o}{C}, \quad \overset{\theta+}{C} = \overset{\vartheta+}{C}. \tag{6.2}$$

Остальные четыре соотношения

$$p_\varepsilon^{[1]}(\vartheta_{1,\varepsilon} - 0) = 1 + O(\varepsilon^4), \quad p_\varepsilon^{[1]}(\vartheta_{1,\varepsilon} + 0) = 1 + O(\varepsilon^4),$$
$$p_\varepsilon^{[1]}(\theta_{1,\varepsilon} - 0) = 1 + O(\varepsilon^4), \quad p_\varepsilon^{[1]}(\theta_{1,\varepsilon} + 0) = 1 + O(\varepsilon^4)$$

приводят к равенствам

$$\begin{aligned} &p_0'(\vartheta_0)\vartheta_1 + \overset{\vartheta-}{D} = -\overset{o}{p}_1(\vartheta_0), \quad p_0'(\vartheta_0)\vartheta_1 + \overset{\theta-}{D} = -\overset{+}{p}_1(\vartheta_0), \\ &p_0'(\theta_0)\theta_1 + \overset{\theta-}{D} = -\overset{+}{p}_1(\theta_0), \quad p_0'(\theta_0)\theta_1 = -\overset{1}{D}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Непосредственно из вида системы (6.1)–(6.3) получим, что она разрешима единственным образом.

Теперь с помощью функций $\overset{o}{z}^{[1]}$, $\overset{+}{z}^{[1]}$, $\overset{1}{z}^{[1]}$, $\overset{o}{p}^{[1]}$, $\overset{+}{p}^{[1]}$ и $\overset{1}{p}^{[1]}$ сконструируем очередное приближение исходной задачи.

Пусть

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\varepsilon) := z_\varepsilon^{[1]\prime}(\vartheta_{1,\varepsilon} - 0) - z_\varepsilon^{[1]\prime}(\vartheta_{1,\varepsilon} + 0), && \varphi_3(\varepsilon) := z_\varepsilon^{[1]\prime}(\theta_{1,\varepsilon} - 0) - z_\varepsilon^{[1]\prime}(\theta_{1,\varepsilon} + 0), \\ &\varphi_2(\varepsilon) := p_\varepsilon^{[1]\prime}(\vartheta_{1,\varepsilon} - 0) - p_\varepsilon^{[1]\prime}(\vartheta_{1,\varepsilon} + 0), && \varphi_4(\varepsilon) := p_\varepsilon^{[1]\prime}(\theta_{1,\varepsilon} - 0) - p_\varepsilon^{[1]\prime}(\theta_{1,\varepsilon} + 0), \\ &\psi_1(\varepsilon) := p_\varepsilon^{[1]}(\vartheta_{1,\varepsilon} - 0) - 1, && \psi_2(\varepsilon) := p_\varepsilon^{[1]}(\vartheta_{1,\varepsilon} + 0) - 1, \\ &\psi_3(\varepsilon) := p_\varepsilon^{[1]}(\theta_{1,\varepsilon} - 0) - 1, && \psi_4(\varepsilon) := p_\varepsilon^{[1]}(\theta_{1,\varepsilon} + 0) - 1. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Отметим, что $\varphi_i = O(\varepsilon^2)$, а $\psi_i = O(\varepsilon^4)$ при $\varepsilon \to +0$.

Далее, возьмем $\widetilde{z}_\varepsilon^{[1]}$ и $\widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}$ по формулам

$$\widetilde{z}_\varepsilon^{[1]} = z_\varepsilon^{[0]} + \Big\langle \varepsilon^2 \overset{o}{z}{}^{[1]}, \varepsilon^2 \overset{+}{z}{}^{[1]} + \varphi_1(\varepsilon) \cdot (x - \vartheta_{1,\varepsilon})\sigma_\vartheta(x) + \varphi_3(\varepsilon) \cdot (\vartheta_{1,\varepsilon} - x)\sigma_\theta(x), \varepsilon^2 \overset{1}{z}{}^{[1]} \Big\rangle, \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_\varepsilon^{[1]} = p_\varepsilon^{[0]} + \Big\langle \varepsilon^2 \overset{o}{p}{}^{[1]} - \Big(\psi_1(\varepsilon) + \frac{\varphi_2(\varepsilon)}{2}(x - \vartheta_{1,\varepsilon})\Big)\sigma_\vartheta(x), \varepsilon^2 \overset{+}{p}{}^{[1]} + \Big(-\psi_2(\varepsilon) + \frac{\varphi_2(\varepsilon)}{2}(x - \vartheta_{1,\varepsilon})\Big)\sigma_\vartheta(x) \\ - \Big(\psi_3(\varepsilon) + \frac{\varphi_4(\varepsilon)}{2}(x - \theta_{1,\varepsilon})\Big)\sigma_\theta(x), \varepsilon^2 \overset{1}{p}{}^{[1]} + \Big(-\psi_3(\varepsilon) + \frac{\varphi_4(\varepsilon)}{2}(x - \theta_{1,\varepsilon})\Big)\sigma_\theta(x) \Big\rangle. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Здесь $\sigma_\vartheta(x)$, $\sigma_\theta(x)$ — срезающие функции (гладкие функции с носителями в малых, но не бесконечно малых окрестностях точек $\vartheta_{1,\varepsilon}$ и $\theta_{1,\varepsilon}$ соответственно, равные тождественно 1 в некоторых подокрестностях этих точек, поэтому и сами они, и их прозводные 1-го и 2-го порядков ограничены).

Тогда построенные функции $\widetilde{z}_\varepsilon^{[1]}$ и $\widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}$ дважды непрерывно дифференцируемы на каждом из рассматриваемых промежутков, непрерывно дифференцируемы на $[0;1]$, равны нулю на концах отрезка $[0;1]$,

$$|\widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}(x)| < 1 \text{ при } x \in [0;\vartheta_{1,\varepsilon}) \cup (\theta_{1,\varepsilon};1],\ \widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}(x) > 1 \text{ при } x \in (\vartheta_{1,\varepsilon};\theta_{1,\varepsilon}) \text{ и } \widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}(\vartheta_{1,\varepsilon}) = 1 = \widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}(\theta_{1,\varepsilon}).$$

Непосредственная подстановка этих функций в систему (1.9) дает

$$\mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{z}_\varepsilon^{[1]} - F(\widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}) = f + O(\varepsilon^2), \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* \widetilde{p}_\varepsilon^{[1]} + \widetilde{z}_\varepsilon^{[1]} = z_d + O(\varepsilon^2).$$

Поэтому применима теорема 2 и можно утверждать следующее.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.4), *z_ε и p_ε — решение системы* (1.9), *а $\widetilde{z}_\varepsilon^{[1]}$ и $\widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}$ — функции, построенные по* (6.5), (6.6). *Тогда $\|z_\varepsilon - \widetilde{z}_\varepsilon^{[1]}\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon)$, $\|p_\varepsilon - \widetilde{p}_\varepsilon^{[1]}\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$.* □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972. 441 с.
5. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управления в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины, 1992. №2. С. 70–74 (Математика. Естествознание. Технические науки.)
6. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления с геометрическими ограничениями на управление // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9 № 1, С. 71–78.
7. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
8. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
9. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотика решения задачи граничного оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
10. **Красовский А.Н, Решетов В.М.** Задача сближения — уклонения в системах с малым параметром при производных // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 5. С. 771–779.
11. **Субботина Н.Н.** Асимптотика сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона — Якоби // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 2. С. 220–230.
12. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
13. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
14. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
15. **Чанг К., Хаус Ф.** Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. М.: Мир, 1988. 247 с.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор УрФУ
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 21.03.2013

Коробицына Наталья Сергеевна
аспирант
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 519.46

СЕТЕВЫЕ КОЛЬЦА, НОРМАЛИЗУЕМЫЕ НЕРАСЩЕПИМЫМ МАКСИМАЛЬНЫМ ТОРОМ

Н. А. Джусоева

В работе исследуются сетевые кольца $M(\sigma)$, нормализуемые тором $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$ (степени n поля k, $char(k) \neq 2$) при регулярном вложении в $G = GL(n, k)$. Как выяснилось, вся структура таких сетевых колец определяется некоторым подкольцом основного поля k. Получены необходимые и достаточные условия нормализуемости сетевого кольца $M(\sigma)$ тором $T = T(d)$ для случая, когда основное поле $k = \mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Исследуются также модули трансвекций и кольца множителей промежуточных подгрупп H, $T \subseteq H \subseteq G$.

Ключевые слова: сеть, сетевое кольцо, нерасщепимый максимальный тор, промежуточная подгруппа.

N. A. Dzhusoeva. Net rings normalized by a nonsplit maximal torus.

We investigate net rings $M(\sigma)$ normalized by a torus $T = T(d)$, which is the image of the multiplicative group of the radical extension $K = k(\sqrt[n]{d})$ (of degree n of a field k, $char(k) \neq 2$) under the regular embedding into $G = GL(n, k)$. It is shown that the structure of these net rings is determined by a certain subring of the ground field k. Necessary and sufficient conditions are obtained for the normalizability of a net ring $M(\sigma)$ by the torus $T = T(d)$ for the case when the ground field $k = \mathbb{Q}$ is the field of rational numbers. We also study transvection modules and factor rings of intermediate subgroups H, $T \subseteq H \subseteq G$.

Keywords: net, net ring, nonsplit maximal torus, intermediate subgroup.

Введение

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in k$ и $\theta = \sqrt[n]{d}$. Тогда элементы $e_i = \theta^{i-1}, 1 \leq i \leq n$, образуют базис радикального расширения $K = k(\theta)$ над k. В выбранном базисе мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы K^* поля K при ее регулярном вложении в полную линейную группу $G = GL(n, k)$ порядка n над полем k и является матричной подгруппой в $G = GL(n, k)$. В рамках изучения структуры промежуточных подгрупп H, $T \subseteq H \subseteq G$, содержащих одномерное преобразование, в работе исследуются сетевые кольца $M(\sigma)$ (см. [1]), нормализуемые тором $T = T(d)$. Как выяснилось, вся структура таких сетевых колец определяется некоторым подкольцом основного поля k. Получены необходимые и достаточные условия нормализуемости сетевого кольца $M(\sigma)$ тором $T = T(d)$ для случая, когда основное поле $k = \mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел (теорема 2). Исследуются также (теорема 1) модули трансвекций и кольца множителей промежуточных подгрупп H, $T \subseteq H \subseteq G$. В частности, дается формула, устанавливающая равенство произвольного модуля трансвекций с модулем трансвекций первого столбца. Доказывается также, что в случае поля рациональных чисел $k = \mathbb{Q}$ все модули трансвекций являются целыми идеалами некоторого подкольца поля k. Аналогичные исследования для группы $GL(2, k)$ были проведены в [2–6].

Мы пользуемся стандартными обозначениями.

$E = E_n$ (или e) — единичная матрица порядка n;

E_{ij} (или e_{ij}) — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит $1 \in k$, а на остальных местах — нули;

$t_{ij}(\xi) = E + \xi E_{ij}$ — элементарная трансвекция, $\xi \in k$, $\xi \neq 0$, $i \neq j$;

$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор элементов x, y;

через $(S)_{ij}$ обозначается элемент s_{ij} матрицы $S = (s_{ij})$, стоящий на позиции (i,j); s'_{ij} — элемент обратной матрицы $S^{-1} = (s'_{ij})$.

С каждым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ связана невырожденная матрица $c(x)$, элементы которой вычисляются по формулам

$$(c(x))_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geq i+1. \end{cases}$$

Как нетрудно видеть, в выбранном базисе тор $T(d)$ представляется матричной группой $T(d) = \{c(x) \colon x \in k^n \setminus \bar{0}\}$. В работе рассматриваются также матрицы $c(x)$ мономиального вида из тора $T(d)$. А именно, для случая базисной строки $x = e_r$ (на r-м месте 1, а на остальных местах строки 0) мы обозначаем $c_r = c(x)$. Ясно, что c_1 — это единичная матрица.

С каждой матрицей $c = c(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $c^{-1} = c(y) = (c'_{ij}), y = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = C_{1i}/ \mid c\,(x) \mid$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c = c(x)$;

В работе рассматривается унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k, порожденное элементами $x_i y_j, dx_r y_s$:

$$R_0 = R(d) = \langle x_i y_j, dx_r y_s \colon\ i+j \leq n+1, r+s > n+1, \quad x \in k^n \setminus \bar{0} \rangle.$$

На протяжении всей статьи R — промежуточное подкольцо, $R_0 \subseteq R \subseteq k, d \in R$.

Если в дальнейшем в качестве частного случая мы будем рассматривать случай поля рациональных чисел $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{d}\,)$, то мы считаем, что $d = \pm p_1 p_2 \ldots p_m$ — целое рациональное число, равное $(\pm)$ произведению различных простых чисел.

1. Модули трансвекций и кольца множителей промежуточной подгруппы

С каждой промежуточной подгруппой H, $\ T \subseteq H \subseteq G$, содержащей элементарную трансвекцию, связаны модули

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in k \colon t_{ij}(\alpha) \in H,\ i \neq j\}$$

и их кольца множителей

$$R_{ij} = R_{ij}(H) = R_{ij}(A_{ij}) = \{\lambda \in k \colon \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\}.$$

Очевидно, что A_{ij} являются подгруппами аддитивной группы k^+ поля k. Далее, если A и B — подгруппы аддитивной группы поля k, то через AB мы обозначаем подгруппу аддитивной группы поля k, порожденную всеми произведениями ab, $\ a \in A,\ b \in B$.

Основным результатом раздела является следующая

Теорема 1. *Положим $A_i = A_{i1} = A_{i1}(H)$, $i = 2, \ldots, n$. Тогда*

1) *Имеет место формула*

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i, \end{cases} \tag{1}$$

причем $A_2^2 \subseteq A_3,\ A_3^2 \subseteq A_4,\ \ldots,\ A_{n-1}^2 \subseteq A_n,\ dA_n^2 \subseteq A_{n-1}$.

2) *Если $k = \mathbb{Q}$, то все кольца множителей совпадают между собой: $R_{ij} = R$, $i \neq j$, причем A_{ij} — целый идеал кольца R, $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\bar{x} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $c = c(\bar{x})$. Тогда из соотношений

$$c\,t_{12}(\alpha)c^{-1} = t_{23}(\alpha),\ c\,t_{23}(\alpha)c^{-1} = t_{34}(\alpha),\ \ldots,$$
$$c\,t_{n-2,n-1}(\alpha)c^{-1} = t_{n-1,n}(\alpha),\ c\,t_{n1}(\beta)c^{-1} = t_{12}(d\beta)$$

следует, что для $A_n = A_{n1}$ имеем $A_{12} = dA_n = A_{23} = A_{34} = \cdots = A_{n-1,n}$. На самом деле из равенства $c\,t_{12}(\alpha)c^{-1} = t_{23}(\alpha)$ следует включение $A_{12} \subseteq A_{23}$ (обратное включение, как легко видеть, вытекает из равенства $t_{12}(\alpha) = c^{-1}t_{23}(\alpha)c$). Это замечание касается и других равенств. Для остальных позиций доказательство аналогично. Далее, включения, сформулированные в теореме, легко вытекают из известного соотношения

$$[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta), \quad i \neq j,\ i \neq r,\ r \neq j. \tag{2}$$

2) Пусть $\alpha, \beta \in A_{12}$. Согласно доказанному п. 1)

$$A_{12} = A_{23} = \cdots = A_{n-1,n}.$$

Тогда из (2) следует включение $A_{12} \cdot A_{23} \subseteq A_{13}$, откуда $\alpha\beta \in A_{13}$. Далее, $\alpha \in A_{34}$, и из (2) имеем $A_{13}A_{34} \subseteq A_{14}$, откуда $\alpha \cdot \alpha\beta = \alpha^2\beta \in A_{14}$. Действуя аналогично, получим $\alpha^{n-2} \cdot \beta \in A_{1n}$. В частности, $\alpha^{n-1} \in A_{1n}$. Затем согласно доказанному п. 1)

$$A_{13} = dA_{n-1} = dA_{n-1,1} = dA_{n2}.$$

Следовательно, $\alpha\beta \in A_{13} = dA_{n2}$. Далее, из (2) вытекает включение $A_{1n} \cdot A_{n2} \subseteq A_{12}$, откуда

$$\alpha^{n-1} \cdot \frac{\alpha\beta}{d} \in A_{12}, \quad \frac{\alpha^n}{d} \cdot \beta \in A_{12}$$

для любых $\alpha, \beta \in A_{12}$. Поэтому $\dfrac{\alpha^n}{d} \in R_{12}$.

Покажем, например, что A_{12} — целый идеал кольца R_{12}, т. е. что $A_{12} \subseteq R_{12}$. Пусть $\alpha \in A_{12}$. Как мы показали, $\alpha^n \in dR_{12}$, где d — целое число, свободное от n-х степеней, откуда $\alpha \in R_{12}$. Покажем теперь, что все кольца R_{ij} равны между собой. Пусть $R = R_{21}$, $A_2 = A_{21}$. Согласно доказанному $A_2 \subseteq R$. Пусть $A_2 = mR = mR_{21}$. Аналогично, пусть $A_3 = A_{31} = nR_{31}$. Согласно п. 1) мы имеем $A_2^2 \subseteq A_3$. Заметим далее, что всякое унитальное подкольцо R поля $\mathbb{Q}$ определяется некоторым подмножеством S множества простых чисел. А именно, R — это множество всех рациональных чисел, знаменатели которых являются произведением простых чисел из S. Поэтому включение идеалов $A_2^2 \subseteq A_3$ влечет включение простых чисел, определяющих знаменатели колец R_{21} и R_{31}. Отсюда $R_{21} \subseteq R_{31}$. Аналогично, $R_{21} \subseteq R_{31} \subseteq \cdots \subseteq R_{n1}$.

Далее, из (2) следует $A_{2n} \cdot A_{n1} \subseteq A_{n1}$, откуда (см. (1)) $dA_3 \cdot A_n \subseteq A_2$. Поэтому $R_{n1} = R_{n1}(A_{n1}) = R_{n1}(A_n) \subseteq R_{21}$. Итак,

$$R_{21} = R_{31} = \cdots = R_{n1}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Заметим, что в доказательстве теоремы 1 мы пользуемся только тем, что подгруппа H нормализуется тором T (а не содержит его).

2. Описание сетевых колец, нормализуемых тором

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть аддитивных подгрупп поля k, $\sigma_{ij} \leq k^+$, $M(\sigma)$ — соответствующее сетевое кольцо [1]: $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \leq \sigma_{ij}$, $1 \leq i, r, j \leq n$, $M(\sigma) = \{a = (a_{ij})\colon a_{ij} \in \sigma_{ij}\}$. Так как наши исследования связаны с промежуточными подгруппами, содержащими трансвекцию, то в дальнейшем мы предполагаем, что σ — ненулевая сеть. В этом разделе мы сформулируем необходимые и достаточные условия на сеть σ, при которых соответствующее сетевое кольцо $M(\sigma)$ нормализуется тором $T = T(d)$.

Предложение 1. *Если тор $T = T(d)$ нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$, то для недиагональных подгрупп σ_{ij} $(i \neq j)$ сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ имеет место формула (1), а диагональные подгруппы все равны между собой, где $A_i = \sigma_{i1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом,*

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i, \end{cases} \tag{3}$$

причем

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_1.$$

Далее, если $k = \mathbb{Q}$ и $R_i = R(A_i)$ для $i = 1, \ldots, n$, то $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$, причем A_i — целый идеал кольца R для любого i.

Доказательство. Для позиций, отличных от диагональных, доказательство предложения в точности повторяет доказательство теоремы 1. Далее, равенство $A_1 = \sigma_{11} = \cdots = \sigma_{nn}$ получается последовательным сопряжением матрицы αe_{11} $(\alpha \in A_1 = \sigma_{11})$ с помощью матрицы $c(\bar{x})$ для $\bar{x} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. Покажем теперь, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n$, $\quad dA_n \subseteq A_1$. Пусть $\bar{x} = (1, 1, 0, \ldots, 0)$, $\quad c = c(\bar{x})$. Тогда

$$c^{-1} = \frac{1}{1 + (-1)^{n+1}d} c(\bar{y}),$$

где $y = (1, -1, \ldots, (-1)^{n+1})$. Пусть $\alpha \in A_i$, $1 \leq i \leq n-1$, $\alpha e_{i1} \in M(\sigma)$. Рассмотрим матрицу $c\alpha e_{i1} c^{-1}$. Имеем

$$\left[c\alpha e_{i1} c^{-1}\right]_{i+1,1} = \frac{\alpha}{1 + (-1)^{n+1}d},$$

а потому $\dfrac{\alpha}{1 + (-1)^{n+1}d} \in A_{i+1}$, откуда $\alpha \in A_{i+1}$, следовательно, $A_i \subseteq A_{i+1}$. Далее, пусть $\beta \in A_n$, $\beta e_{n1} \in M(\sigma)$. Тогда

$$\left[c\beta e_{n1} c^{-1}\right]_{11} = \frac{d\beta}{1 + (-1)^{n+1}d},$$

откуда $\dfrac{d\beta}{1 + (-1)^{n+1}d} \in A_1$ и $d\beta \in A_1$, следовательно, $dA_n \subseteq A_1$. Далее, оставшаяся часть предложения (касающаяся $k = \mathbb{Q}$) вытекает из теоремы 1 и замечания. Предложение 1 доказано.

Напомним (см. введение), что мы определили матрицы $c(x)$ мономиального вида. А именно, для случая базисной строки $x = e_r$ (на r-м месте 1, а на остальных местах строки 0) полагаем $c_r = c(x)$. Ясно, что c_1 — это единичная матрица.

Несложно проверяются формулы следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $i, j \geq 2$. Тогда*

$$1) \quad c_i e_{r1} = \begin{cases} de_{r+i-n-1,1}, & n-i+2 \leq r \leq n; \\ e_{r+i-1,1}, & 1 \leq r \leq n-i+1. \end{cases}$$

$$2) \quad e_{s1} c_j = \begin{cases} de_{s,n-j+2}, & j \geq 2; \\ e_{s,1}, & j = 1. \end{cases}$$

Из леммы 1 выводится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $i, j \geq 2$. Тогда*

$$c_i e_{r1} c_j = \begin{cases} d^2 e_{r+i-n-1,n-j+2}, & n-i+2 \leq r \leq n, \quad j \geq 2; \\ de_{r+i-n-1,1}, & n-i+2 \leq r \leq n, \quad j = 1; \\ de_{r+i-1,n-j+2}, & 1 \leq r \leq n-i+1, \quad j \geq 2; \\ e_{r+i-1,1}, & 1 \leq r \leq n-i+1, \quad j = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Предложение 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — идеалы соответственно колец $R_1, \ldots, R_n$, содержащих кольцо R_0, причем*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_1.$$

Пусть σ — сеть вида (3). *Тогда тор T нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$. Если $k = \mathbb{Q}$, то $R_1 = \ldots = R_n = R$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала сделаем несколько замечаний по поводу схемы доказательства этого предложения.

Пусть $a = (a_{rs}) \in M(\sigma)$, $a_{rs} \in \sigma_{rs}$ $c(x) \in T$, $c(y) = c^{-1}(x)$. Требуется доказать включение

$$c(x)ac(y) \in M(\sigma). \tag{5}$$

Имеем (см. введение) $c(x) = x_1E + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n$, $c(y) = y_1E + y_2c_2 + \ldots + y_nc_n$. Поэтому для доказательства включения (5) достаточно доказать, что

$$(x_ic_i)(a_{rs}e_{rs})(y_jc_j) \in M(\sigma). \tag{6}$$

Далее, сопряжением мономиальной матрицы $\pi = c_k$ (для некоторого k) из тора T можно перевести матрицу e_{rs} в матрицу e_{m1}: $\pi e_{rs}\pi^{-1} = e_{m1}$. Заметим, что включение (6) эквивалентно включению $a_{rs}\pi^{-1}(\pi x_ic_i\pi^{-1})(\pi e_{rs}\pi^{-1})(\pi y_jc_j\pi^{-1})\pi \in M(\sigma)$. Но матрица π нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$, следовательно, в (6) можно считать, что $s = 1$. Таким образом, достаточно доказать включение

$$x_iy_jA_rc_ie_{r1}c_j \subseteq M(\sigma) \tag{7}$$

(напомним, что $a_{r1} \in A_r$).

Рассмотрим сначала случай $i = 1$ (аналогично рассматривается случай $j = 1$). Тогда $c_1 = E$ и при $j = 1$ включение $x_1y_1A_re_{r1} \subseteq \sigma_{r1}e_{r1}$, очевидно, имеет место, так как $x_1y_1 \in R_0 \subseteq R_r$ (напомним, что $\sigma_{r1} = A_r$). Поэтому будем считать, что $j \geq 2$. По п. 2) леммы 1 имеем $x_1y_jA_re_{r1}c_j = x_1y_jA_rde_{r,n-j+2}$. Но $x_1y_j \in R_0$, поэтому для доказательства (7) достаточно показать, что $dA_r \subseteq \sigma_{r,n-j+2}$. Из (3) мы имеем

$$\sigma_{r,n-j+2} = \begin{cases} A_{r+j-n-1}, & n+2-j \leq r; \\ dA_{r+j-1}, & n+2-j \geq r+1. \end{cases}$$

Поэтому случай $n + 2 - j \leq r$ очевиден ввиду условия на цепочку идеалов в предложении. Рассмотрим второй случай: $n + 2 - j \geq r + 1$. Имеем $r \leq r + j - 1$, поэтому $dA_r \subseteq dA_{r+j-1} = \sigma_{r,n-j+2}$.

Итак, случай $i = 1$ рассмотрен полностью, поэтому в дальнейшем при доказательстве включения (7) считаем, что $i, j \geq 2$. Согласно (4)

$$A_rx_iy_jc_ie_{r1}c_j = \begin{cases} d^2A_rx_iy_je_{r+i-n-1,n-j+2}, & n-i+2 \leq r \leq n; \\ dA_rx_iy_je_{r+i-1,n-j+2}, & 1 \leq r \leq n-i+1. \end{cases} \tag{8}$$

Поэтому доказательство включения (7) разобьем на две части.

Пусть $n - i + 2 \leq r \leq n$. Для доказательства (7) нам нужно показать, что

$$d^2A_rx_iy_j \subseteq \sigma_{r+i-n-1,n-j+2}. \tag{9}$$

Согласно (3)

$$\sigma_{r+i-n-1,n-j+2} = \begin{cases} A_{r+i+j-2n-2}, & r+i+j \geq 2n+3; \\ dA_{r+i+j-n-2}, & r+i+j \leq 2n+2. \end{cases}$$

Справедливость (9) очевидна в случае $r+i+j \geq 2n+3$ (так как $dx_iy_j \subseteq R_0 \subseteq R$, а dA_r содержится в любом идеале A_s по условию на сеть σ). Пусть $r+i+j \leq 2n+2$. Если $i+j \leq n+1$, то $x_iy_j \subseteq R_0 \subseteq R_r$ и $dA_r \subseteq A_{r+i+j-2}$, следовательно, справедливо включение (9). Если же $i+j \geq n+2$, то $r \leq r+i+j-n-2$, а потому ввиду условия на цепочку идеалов имеем $A_r \subseteq A_{r+i+j-n-2}$, при этом $dx_iy_j \subseteq R_0 \subseteq R_r$. Поэтому (9) справедливо.

Пусть $1 \leq r \leq n-i+1$. Для доказательства (7) нужно показать, что

$$dA_rx_iy_j \subseteq \sigma_{r+i-1,n-j+2}. \tag{10}$$

Согласно (3)

$$\sigma_{r+i-1,n-j+2} = \begin{cases} A_{r+i+j-n-2}, & r+i+j \geq n+3; \\ dA_{r+i+j-2}, & r+i+j \leq n+2. \end{cases}$$

Если $r+i+j \geq n+3$, то при $i+j \leq n+1$ включение (10) очевидно (так как $dx_iy_j \subseteq R_0 \subseteq R_r$, а dA_r содержится в любом идеале A_s по условию на сеть σ). Если же $i+j \geq n+2$, то $r+(i+j-n-2) \geq r$, а потому (условие на сеть) $A_r \subseteq A_{r+(i+j-n-2)}$ и $dx_iy_j \subseteq R_0 \subseteq R_r$, отсюда следует (10).

Пусть $r+i+j \leq n+2$. По условию нашего случая имеем $i+j < n+2$, а потому $x_iy_j \subseteq R_0 \subseteq R_r$. Далее (очевидно, $i+j \geq 2$, $\ i+j-2 \geq 0$), мы по условию на цепочку идеалов имеем $A_r \subseteq A_{r+i+j-2}$, откуда следует (10). Первое утверждение предложения 2 доказано.

Второе утверждение следует из предложения 1.

Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Пусть $k = \mathbb{Q}$. Если тор $T = T\,(d)$ нормализует сетевое кольцо $M\,(\sigma)$, то справедливы утверждения предложения* 1, *причем кольцо R содержит кольцо R_0.*

Доказательство. Прежде чем доказывать предложение, сделаем три замечания. Во-первых, согласно предложению 1 сеть σ имеет вид (3), где $A_i = \sigma_{i1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, A_r — идеал кольца R, $\ R \subseteq \mathbb{Q}$, причем

$$dA_n \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n. \tag{11}$$

Во-вторых, согласно предложению 2 и [4] кольцо R_0 содержится в кольце $R_{p_1p_2\ldots p_m}$ всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с $d = p_1p_2\ldots p_m$.

В-третьих, в силу второго замечания, если (см. определение кольца R_0) $x_iy_j \in (1/d)R$ при $i+j \leq n+1$, то $x_iy_j \in R$ при $i+j \leq n+1$. Аналогично, если $dx_iy_j \in (1/d)R$ при $i+j \geq n+2$, то $dx_iy_j \in R$ при $i+j \geq n+2$.

Покажем, что кольцо R содержит кольцо R_0. Так как тор T нормализует сетевое кольцо $M\,(\sigma)$, то $c(x)M\,(\sigma)c(y) \subseteq M\,(\sigma)$, $\ c(y) = c^{-1}(x)$. Напомним (см. введение), что

$$c(x) = x_1E + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n, \quad c(y) = y_1E + y_2c_2 + \ldots + y_nc_n.$$

Следовательно, $c(x)\sigma_{ij}e_{ij}c(y) \subseteq M\,(\sigma)$ для любых i, j. В частности, $c(x)\sigma_{r1}e_{r1}c(y) \subseteq M\,(\sigma)$, где $\sigma_{r1} = A_r$ — идеал кольца R, $R \subseteq \mathbb{Q}$, поэтому (см. введение) $A_rx_iy_jc_ie_{r1}c_j \subseteq M\,(\sigma)$, $x_i \in \mathbb{Q}$. Воспользуемся теперь формулой (4). Имеем

$$A_rx_iy_jc_ie_{r1}c_j = \begin{cases} d^2A_rx_iy_je_{r+i-n-1,n-j+2}, & n-i+2 \leq r \leq n, \quad j \geq 2; \\ dA_rx_iy_je_{r+i-n-1,1}, & n-i+2 \leq r \leq n, \quad j = 1; \\ dA_rx_iy_je_{r+i-1,n-j+2}, & 1 \leq r \leq n-i+1, \quad j \geq 2; \\ A_rx_iy_je_{r+i-1,1}, & 1 \leq r \leq n-i+1, \quad j = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} d^2A_rx_iy_j \subseteq \sigma_{r+i-n-1,n-j+2}, & n-i+2 \leq r \leq n, \quad j \geq 2; \\ dA_rx_iy_j \subseteq \sigma_{r+i-n-1,1}, & n-i+2 \leq r \leq n, \quad j = 1; \\ dA_rx_iy_j \subseteq \sigma_{r+i-1,n-j+2}, & 1 \leq r \leq n-i+1, \quad j \geq 2; \\ A_rx_iy_j \subseteq \sigma_{r+i-1,1}, & 1 \leq r \leq n-i+1, \quad j = 1. \end{cases}$$

Отсюда в силу (3) имеем

$$\begin{cases} d^2A_rx_iy_j \subseteq A_{r+i+j-2n-2}, & n-i+2 \le r \le n, \quad r+i+j \ge 2n+3, \quad j \ge 2; \\ d^2A_rx_iy_j \subseteq dA_{r+i+j-n-2}, & n-i+2 \le r \le n, \quad r+i+j \le 2n+2, \quad j \ge 2; \\ dA_rx_iy_1 \subseteq A_{r+i-n-1}, & n-i+2 \le r \le n, \quad j=1; \\ dA_rx_iy_j \subseteq A_{r+i+j-n-2}, & 1 \le r \le n-i+1, \quad r+i+j \ge n+3, \quad j \ge 2; \\ dA_rx_iy_j \subseteq dA_{r+i+j-2}, & 1 \le r \le n-i+1, \quad r+i+j \le n+2, \quad j \ge 2; \\ A_rx_iy_1 \subseteq A_{r+i-1}, & 1 \le r \le n-i+1, \quad j=1. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть сначала $i+j \le n+1$. Тогда в силу пятого и шестого включения из (12) мы имеем $x_iy_jA_r \subseteq A_s,\ \ r \le s$ (где $s = r+i+j-2$ или $s = r+i-1$). Но тогда (см. (11)) $dx_iy_jA_r \subseteq dA_s \subseteq A_r$, откуда $x_iy_j \in (1/d)R$ и, следовательно, в силу третьего замечания, сделанного в начале доказательства, $x_iy_j \in R$ при $i+j \le n+1$.

Пусть теперь $i+j \ge n+2$. Тогда в силу четвертого включения из (12) мы имеем $dx_iy_jA_r \subseteq A_s,\ \ r \le s$ (где $s = r+i+j-n-2$). Но тогда (см. (11)) $d^2x_iy_jA_r \subseteq dA_s \subseteq A_r$, откуда $dx_iy_j \in (1/d)R$ и, следовательно, в силу третьего замечания, сделанного в начале доказательства, $dx_iy_j \in R$ при $i+j \ge n+2$.

Итак (см. определение кольца R_0), мы показали, что все порождающие элементы кольца R_0 содержатся в R, следовательно, $R_0 \subseteq R$. Предложение 3 доказано.

Из предложений 1–3 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $k = \mathbb{Q}$. Следующие условия эквивалентны*:
1) *Тор $T = T(d)$ нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$.*
2) *Для сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ справедлива формула*

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \le i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i, \end{cases}$$

где

$$dA_n \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n,$$

причем для любого $i,\ \ 1 \le i \le n$, A_i — целый идеал кольца R, содержащего подкольцо R_0, $\ R_0 \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боревич З.И.** О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1978. Т. 75. С. 22–31.
2. **Боревич З.И., Койбаев В.А.** О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами для квадратичных торов // Вестн. СПбГУ. 1993. Т. 1, № 2. С. 5–10.
3. **Боревич З.И., Койбаев В.А., Чан Нгок Хой.** Решетки подгрупп в $GL(2, Q)$, содержащих нерасщепимый тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1991. Т. 191. С. 24–43.
4. **Джусоева Н.А., Койбаев В. А.** Максимальные подгруппы, содержащие тор, связанные с полем отношений дедекиндовой области // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2002. Т. 289. С. 149–153.
5. **Койбаев В.А.** Подгруппы группы $GL(2, Q)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312, № 1. С. 36–38.
6. **Койбаев В.А.** Подгруппы группы $GL(2, K)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1994. Т. 211. С. 136–145.

Джусоева Нонна Анатольевна
ассистент
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова
e-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Поступила 09.01.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 517.9

О РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА[1]

К. В. Емельянов

Изучается сингулярно возмущенная задача с точкой поворота, у которой решение имеет пограничный слояй экспоненциального типа в окрестности граничной точки. Для нахождения приближенного решения применяется разностная схема экспоненциальной подгонки на сетке с постоянным шагом. Доказывается равномерная по параметру возмущения сходимость решений, полученных по этой схеме, к решению исходной дифференциальной задачи с первым порядком точности, когда шаг сетки стремится к нулю.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка; асимптотическое разложение; разностная схема.

K. V. Emel'yanov. On a first-order accurate difference scheme for a singularly perturbed problem with a turning point.

A singularly perturbed problem with a turning point is considered. The solution has a boundary layer of exponential type in a neighborhood of a boundary point. The problem is solved approximately by means of a difference scheme of exponential fitting on a uniform grid. It is proved that the solutions obtained from this scheme converge uniformly with respect to the perturbation parameter with the first order of accuracy to the solution of the original differential problem as the grid step tends to zero.

Keywords: singularly perturbed problem for a second-order ordinary differential equation, asymptotic expansion, difference scheme.

Введение

Приближенные решения дифференциальных задач с малым параметром ε при старшей производной вызывают затруднения ввиду наличия в таких решениях особенностей типа пограничного слоя. Данная особенность приводит к тому, что ошибки приближенных решений, полученных классическими разностными схемами, по сравнению с точными решениями становятся большими, когда $\varepsilon \to 0$.

Разработаны различные подходы к построению разностных схем, обладающих ε-равномерной сходимостью на сетках с постоянными, кусочно-постоянными и переменными шагами (см., например, [1–3] и библиографию в них).

В данной работе рассматривается первая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром ε при старшей производной и с точкой поворота. (Коэффициент при первой производной обращается в нуль в одной из граничных точек [4, гл.VIII].) В окрестности этой граничной точки решение обладает пограничным слоем экспоненциального вида. Для приближенного нахождения решения данной задачи применяется разностная схема экспоненциальной подгонки [5]. Доказывается, что решения этой разностной схемы u^h сходятся равномерно по ε к решению u_ε сингулярно возмущенной задачи с точностью $O(h)$ при шаге сетки $h \to 0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума УрО РАН, выполняемых в УрО РАН совместно с организациями СО РАН и ДВО РАН (проект 12-С-1-1001) и программы ориентированных фундаментальных исследований УрО РАН “Разработка алгоритмов и программ построения сеток для областей, образованных объемами вращения” (проект 13-1-006-ЯЦ).

Доказательство проводится с использованием частичной суммы $\tilde{u}_\varepsilon$ асимптотического при $\varepsilon \to 0$ разложения решения u_ε дифференциальной задачи, приближающей это решение с точностью $O(\varepsilon^{3/2})$. Показывается, что $\tilde{u}_\varepsilon$ приближает также и решение u^h разностной задачи с точностью $O(h + \varepsilon^{3/2})$. Нетрудно видеть, что такая оценка пригодна лишь при $\varepsilon \ll h$. Если же $\varepsilon \gg h$, удобно использовать обычную оценку близости решений разностной и дифференциальной задач.

1. Постановка задачи

На отрезке $[0,1]$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu_\varepsilon \equiv \varepsilon u_\varepsilon'' + a(x)x^2 u_\varepsilon' - b(x)u_\varepsilon = f(x), \quad \varepsilon \in (0,1] \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$u_\varepsilon(0) = \mu_0, \quad u_\varepsilon(1) = \mu_1. \tag{1.2}$$

Предполагается, что исходные данные этой задачи удовлетворяют условиям $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta^2 > 0$, кроме того, функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ — достаточно гладкие на отрезке $[0,1]$.

На отрезке $[0,1]$ построим разностную сетку $\bar{\omega}_h$ с $N+1$ узлами и с постоянным шагом $h = N^{-1}$ между ними по правилу $\bar{\omega}_h = \{x_i : x_i = ih, i = \overline{0,N}\}$. На сетке $\bar{\omega}_h$ аппроксимируем задачу (1.1), (1.2) разностной схемой

$$\Lambda u^h = \gamma_1(x_i)\frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \gamma_2(x_i)\frac{u_{i+1}^h - u_{i-1}^h}{2h} - bu_i^h = f,\ x_i \in \omega_h,\ u_0^h = \mu_0,\ u_N^h = \mu_1. \tag{1.3}$$

Здесь использованы обозначения

$$\gamma_1(x_i) = \frac{bh^2}{2}\frac{\operatorname{ch} z_0(x_i)}{\operatorname{ch} z(x_i) - \operatorname{ch} z_0(x_i)} \quad \text{и} \quad \gamma_2(x_i) = \frac{bh \operatorname{sh} z_0(x_i)}{\operatorname{ch} z(x_i) - \operatorname{ch} z_0(x_i)},$$

кроме того, $b = b(x_i)$, $z_0(x_i) = \dfrac{ax_i^2}{2\varepsilon}h$, $a = a(x_i)$; $z(x_i) = \dfrac{(a^2x_i^4 + 4b\varepsilon)^{1/2}h}{2\varepsilon}$. Выбор коэффициентов γ_1, γ_2 определяется наличием у решения u_ε особенности типа пограничного слоя [1;6].

Нетрудно проверить, что разностный оператор Λ обладает свойством принципа максимума [7, гл. 1]. Цель настоящей работы — доказать равномерную по ε сходимость решений u^h схемы (1.3) к решению u_ε задачи (1.1), (1.2) в точках сетки ω_h с точностью $O(h)$ при $h \to 0$.

2. Об асимптотике решения дифференциальной задачи

Частичную сумму $\tilde{u}_\varepsilon$ асимптотического разложения решения u_ε дифференциальной задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$\tilde{u}_\varepsilon = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + v_0\left(\frac{x}{\varepsilon^{1/2}}\right) + \varepsilon^{1/2}v_1\left(\frac{x}{\varepsilon^{1/2}}\right) + \varepsilon v_2\left(\frac{x}{\varepsilon^{1/2}}\right). \tag{2.1}$$

Функция $U_0(x) \equiv u_0(x) + \varepsilon u_1(x)$ — внешнее разложение асимптотики $\tilde{u}_\varepsilon$ и его слагаемые $u_k(x), k = 0,1$, находятся из уравнений $x^2au_k' - bu_k = \tilde{f}_k, x \in (0,1), k = 0,1; \tilde{f}_0(x) = f(x)$, $\tilde{f}_1 = -u_0''$. Покажем, что граничные условия для $u_k(x)$ нужно задавать в точке $x = 1$, чтобы выделить единственное гладкое решение. Рассмотрим это на примере при $k = 0$.

Общее решение u_0 уравнения

$$x^2au_0' - bu_0 = f, \quad x \in (0,1), \quad \rho \equiv \frac{b(x)}{a(x)}, \tag{2.2}$$

имеет вид

$$u_0(x) = -W_0(x)\left[\int\limits_x^1 \frac{\exp\left(\int\limits_\xi^1 \rho t^{-2} dt\right)}{a(\xi)\xi^2} f(\xi)\,d\xi + C_0\right], \quad C_0 = \mathrm{const},$$

где $W_0(x)$ — частное решение однородного уравнения (2.2). После интегрирования по частям $u_0(x)$ примет вид

$$u_0(x) = W_0(x)\Big[\frac{f(1)}{b(1)} - C_0\Big] - \frac{f(x)}{b(x)} - \int\limits_x^1 \exp\left[-\int\limits_x^\xi \rho t^{-2}\,dt\right]\left(\frac{f(\xi)}{b(\xi)}\right)'\,d\xi.$$

Нетрудно видеть, что $W_0(x) = \exp\left[-\int_x^1 \frac{\rho(t)}{t^2}\,dt\right]$ при $x = 0$, т. е. $W_0(0) = 0$, а $u_0(0) = -\dfrac{f(0)}{b(0)}$ при любой постоянной C_0. Это, в частности, означает, что условие для $u_0(x)$ следует задавать при $x = 1$, т. е. $C_0 = -\mu_1$. Аналогично и для $u_1(x)$ условия нужно задавать в точке $x = 1$. В этом случае постоянную, которую мы обозначим посредством C_1, нужно положить равной 0.

Таким образом, гладкие слагаемые $u_k, k = 0, 1$, внешнего разложения $U_0(x)$ частичной суммы (2.1) $\tilde{u}_\varepsilon$ примут вид $u_k = W_0(x)\Big[\dfrac{f_k(1)}{b(1)} - C_k\Big] - \dfrac{f_k(x)}{b(x)} - \int_x^1 \exp\left[-\int_x^\xi \rho t^{-2}\,dt\right]\left(\dfrac{f_k(\xi)}{b(x)}\right)' d\xi$. Слагаемые $v_k(\xi), k = 0, 1, 2$, внутреннего разложения частичной суммы $\tilde{u}_\varepsilon$ в переменной $\xi = x\varepsilon^{-1/2}$ находятся из решения следующих дифференциальных задач:

$$v_0''(\xi) - b_0 v_0(\xi) = 0, \quad \xi \in [0, \infty), \quad b_0 = b(0),$$

$$v_0(0) = \mu_0 - u_0(0) \equiv \bar{\mu}_0, \quad v_0(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty, \tag{2.3}$$

а при $p = 1, 2$

$$v_p'' - b_0 v_p = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \xi^{p-\alpha}(b_{p-\alpha} v_\alpha - \xi a_{p-1-\alpha} v_\alpha'); \tag{2.4}$$

$$v_p(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty, \quad v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = -u_1(0).$$

Здесь $b_p = \dfrac{b^{(p)}(0)}{p!}, \quad a_p = \dfrac{a^{(p)}(0)}{p!}$.

В дальнейшем потребуются явные виды решения задач (2.3), (2.4). Выпишем их:

$$v_1(\xi) = P_3(\xi)\exp(-\beta\xi) \equiv \sum_{k=0}^{2}(P_{1,3-k}\xi^{3-k})\exp(-\beta\xi),$$

$$v_2(\xi) = P_6(\xi)\exp(-\beta\xi) \equiv \sum_{k=0}^{6}(P_{2,6-k}\xi^{6-k})\exp(-\beta\xi).$$

Коэффициенты $P_{1,\alpha}, \alpha = \overline{1,3}$, $P_{2,\beta}, \beta = \overline{0,6}$, однозначно определяются из соответствующих систем алгебраических уравнений.

Предположения относительно коэффициентов $a(x), b(x)$ задачи (1.1),(1.2) позволяют заключить, что дифференциальный оператор L обладает свойством принципа максимума. Далее нетрудно установить, используя принцип максимума, что

$$|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon| \le M_0 \varepsilon^{3/2}, \tag{2.5}$$

где u_ε — решение дифференциальной задачи (1.1),(1.2). (Здесь и в дальнейшем посредством M и M_k будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от ε и h).

3. Вспомогательные утверждения

Из явного вида коэффициентов γ_1, γ_2 и из свойств гиперболических функций нетрудно получить, что при любых соотношениях между h и ε, с одной стороны,

$$|\gamma_1 - \varepsilon|,\ |\gamma_2 - ax^2| \le M_1(\xi_i + 1)^2 h^2, \tag{3.1}$$

а с другой —

$$|\gamma_1 - \varepsilon|,\ |\gamma_2 - ax^2| \le M_2 h. \tag{3.2}$$

Кроме того,

$$0 < \gamma_1 \le M(h + \varepsilon), \quad 0 < \gamma_2 < M. \tag{3.3}$$

Можно показать, что решение u_ε задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет оценке

$$|u_\varepsilon^{(k)}(x)| \le M\Big(\frac{\exp(-\beta\xi)}{\varepsilon^{k/2}} + 1\Big), \quad k = \overline{0,4}. \tag{3.4}$$

Это соотношение нетрудно установить, пользуясь, например, частичной суммой $\tilde{u}_\varepsilon$. Из неравенств (3.1), (3.4) вытекает, что

$$|\gamma_1 - \varepsilon||u_\varepsilon''|,\ |\gamma_2 - ax^2||u_\varepsilon'| \le M_3\frac{h^2}{\varepsilon}. \tag{3.5}$$

Вычислим теперь на решении u_ε задачи (1.1), (1.2) невязку $(L-\Lambda)u_\varepsilon$, которая возникает в результате замены дифференциального оператора L разностным оператором Λ. Пользуясь стандартным обозначением разностных производных $f_{x\bar{x}}, f_{\tilde{x}}$ (см., например, [1]), получим $(L-\Lambda)u_\varepsilon = \gamma_1(u_\varepsilon'' - (u_\varepsilon)_{x\bar{x}}) + \gamma_2(u_\varepsilon' - (u_\varepsilon)_{\tilde{x}}) + (\varepsilon - \gamma_1)u_\varepsilon'' + (ax^2 - \gamma_2)u_\varepsilon'$. Из этого равенства в силу оценок (3.3)–(3.5) приходим к соотношению $|(L-\Lambda)u_\varepsilon| \le M\Big(\dfrac{h^3}{\varepsilon^2} + \dfrac{h^2}{\varepsilon^{3/2}}\Big)$. Полученная оценка невязки приводит согласно принципу максимума, которым обладает разностный оператор Λ, к следующей оценке уклонения приближенного решения u^h от решения u_ε дифференциальной задачи:

$$|u_\varepsilon - u^h| \le M\Big(\frac{h^3}{\varepsilon^2} + \frac{h^2}{\varepsilon^{3/2}}\Big). \tag{3.6}$$

Заметим, что это соотношение пригодно лишь при $\varepsilon \gg h$, хотя оно имеет место при любых соотношениях между h и ε.

Для получения оценки уклонения разностного решения u^h от решения u_ε дифференциальной задачи при $\varepsilon \ll h$ покажем, прежде всего, что при малых h и ε u^h также мало отличается от частичной суммы $\tilde{u}_\varepsilon$. С этой целью вычислим сначала $\Lambda(u_0 + \varepsilon u_1)$. После несложных преобразований

$$\Lambda(u_0 + \varepsilon u_1) = f(x_i) + \tilde{f}_\varepsilon(x_i)(h + \varepsilon^2), \tag{3.7}$$

где $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ — гладкая функция, регулярно зависящая от ε, и в силу оценок (3.2), (3.3) $|\tilde{f}_\varepsilon| \le M$.

Преобразуем значения разностного оператора Λ на внутреннем разложении частичной суммы $\Lambda(v_0(\xi_i) + \varepsilon^{1/2}v_1(\xi_i) + \varepsilon v_2(\xi_i))$. Преобразование будем проводить для каждого слагаемого в отдельности. Вычислим

$$\Lambda v_0(\xi_i) = \bar{\mu}_0\Bigg[\gamma_1\frac{4\,\mathrm{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{h^2} - \gamma_2\frac{\mathrm{sh}\,\beta\tau_0}{h} - b(x_i)\Bigg]\exp(-\beta\xi_i)$$

$$= v_0(\xi_i)b(x_i)\Big[2F(x_i)\,\mathrm{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} - 1 - G(x_i)\,\mathrm{sh}\,\beta\tau_0\Big]; \quad \tau_0 = \frac{h}{\varepsilon^{1/2}}, \quad \beta = \sqrt{b(0)}, \quad b(x_i) \equiv \beta_i^2. \tag{3.8}$$

Здесь, кроме того, использованы следующие обозначения:

$$F(x_i) = \frac{\mathrm{ch}\,z_0(x_i)}{\mathrm{ch}\,z(x_i) - \mathrm{ch}\,z_0(x_i)}, \quad G(x_i) = \frac{\mathrm{sh}\,z_0(x_i)}{\mathrm{ch}\,z(x_i) - \mathrm{ch}\,z_0(x_i)}.$$

Для краткости записи удобно положить $f_0(x_i) = \operatorname{ch} z_0(x_i)$, $h_0(x_i) = \operatorname{sh} z_0(x_i)$, $g(x_i) = \operatorname{ch} z(x_i) - \operatorname{ch} z_0(x_i)$. $S_{0,0} = 2F(x_i)\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2} - 1$, $S_{0,1} = -G(x_i)\operatorname{sh}\beta\tau_0$.

Преобразуем прежде всего $S_{0,0}$. С этой целью выпишем несколько членов ряда Тейлора функции $F(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$S_{0,0} = 2F(0)\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} - 1 + \Big(2F'(0)\xi_i\varepsilon^{1/2} + F''(0)\xi_i^2\varepsilon + F'''(\theta x_i)\frac{\xi_i^3}{3}\varepsilon^{3/2}\Big)\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Выпишем далее явный вид функции $F(x_i)$ и ее производных при $x_i = 0$. Имеем

$$2F(0)\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} - 1 = 0,$$

$$2\xi_i\varepsilon^{1/2}F'(0)\cdot\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} = -\xi_i\frac{\beta h}{2}\operatorname{cth}\frac{\beta\tau_0}{2}\cdot\frac{b_1}{\beta^2} = -\frac{b_1\xi_i}{b(0)}\Big(\frac{\beta h}{2}\operatorname{cth}\frac{\beta\tau_0}{2} - \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/2}\Big)$$

$$= -\frac{b_1\xi_i}{b(0)}\varepsilon^{1/2} + r_1 h, \quad |r_1| \le M_0(1+\xi_i); \tag{3.9}$$

$$\xi_i^2\varepsilon F''(0)\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} = \xi_i^2\varepsilon\Big[\frac{3}{4}\frac{b_1^2\tau_0^2}{4b(0)}\operatorname{cth}^2\frac{\beta\tau_0}{2} - \frac{1}{2}\frac{2b_2b(0) - b_1^2}{4\beta^3}\tau_0\operatorname{cth}\frac{\beta\tau_0}{2} - \frac{1}{4}\frac{b_1^2\tau_0^2}{4\beta^2}\Big]$$

$$= \frac{2b_1^2 - b_2b_0}{2\beta^4}\xi_i^2\varepsilon + r_2 h, \quad |r_2| \le M_0(1+\xi_i)^2.$$

Из найденных значений слагаемых в $S_{0,0}$ приходим к равенству

$$S_{0,0} = -\frac{b_1\xi_i}{\beta^2}\varepsilon^{1/2} + \Big(\frac{b_1^2}{\beta^4} - \frac{b_2}{\beta^2}\Big)\xi_i^2\varepsilon + r_3(\xi_i)h + F'''(\theta x_i)\frac{\xi_i^3}{3}\varepsilon^{3/2}\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2}, \quad |r_3| \le M_0(1+\xi_i)^2. \tag{3.10}$$

Преобразуем теперь $S_{0,1}$:

$$S_{0,1} = -G(x_i)\operatorname{sh}\beta\tau_0 = -\Big(G''(0)\frac{\xi_i^2}{2}\varepsilon + G'''(0)\frac{\xi_i^3}{6}\varepsilon^{3/2}\Big)\operatorname{sh}\beta\tau_0 - G^{IV}(\mu x_i)\frac{\xi_i^4}{24}\varepsilon^2\operatorname{sh}\beta\tau_0, \quad 0 < \mu < 1,$$

а $G(0) = G'(0) = 0$. Выпишем явный вид слагаемых в $S_{0,1}$. Имеем

$$-\operatorname{sh}\beta\tau_0\frac{\xi_i^2}{2}\varepsilon G''(0) = -\operatorname{sh}\beta\tau_0\frac{\xi_i^2}{2}\frac{a_0h}{2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2}} = -\frac{a_0}{\beta}\frac{\beta h}{2}\xi_i^2\operatorname{cth}\frac{\beta\tau_0}{2}$$

$$= -\frac{a_0}{\beta}\xi_i^2\left(\frac{\beta h}{2}\operatorname{cth}\frac{\beta\tau_0}{2} - \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/2}\right) = -\frac{a_0}{\beta^2}\xi_i^2\varepsilon^{1/2} + q_2(\xi_i)h, \quad |q_2| \le M_0(1+\xi_i)^2; \tag{3.11}$$

$$-\operatorname{sh}\beta\tau_0\frac{\xi_i^3}{6}\varepsilon^{3/2}G'''(0) = -\operatorname{sh}\beta\tau_0\frac{\xi_i^3}{6}\varepsilon^{3/2}\left[\frac{3a_1h}{2\varepsilon\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2}} - \frac{3ah}{4\varepsilon\operatorname{sh}^4\dfrac{\beta\tau_0}{2}}\operatorname{sh}\beta\tau_0\frac{b_1\tau_0}{2\beta}\right]$$

$$= -\frac{a_1b_0 - a_0b_1}{\beta^3}\xi_i^3\varepsilon + q_3(\xi_i)h, \quad |q_3| \le M_0(1+\xi_i)^3.$$

Из этих равенств следует, что

$$S_{0,1} = -\frac{a_0}{\beta}\xi_i^2\varepsilon^{1/2} - \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{\beta^3}\xi_i^3\varepsilon + q_4(\xi_i)h - G^{IV}(\mu x_i)\frac{\xi_i^4}{24}\varepsilon^2\operatorname{sh}\beta\tau_0, \quad |q_4| \le M_0(1+\xi_i)^3.$$

Подставим это значение $S_{0,1}$ и значение $S_{0,0}$ (формула (3.10)) в (3.8), получим

$$\Lambda v_0(\xi_i) = v_0(\xi_i)\frac{b(x_i)}{b(0)}\Big\{-(b_1\xi_i + a_0\beta\xi_i^2)\varepsilon^{1/2} + \Big[\Big(\frac{b_1^2}{\beta^2} - b_2\Big)\xi_i^2 - \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{\beta}\xi_i^3\Big]\varepsilon\Big\}$$

$$+\bar{\mu}_0 R_0(\xi_i)\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i) + Q(\xi_i)h\exp(-\beta\xi_i), \quad |Q| \le M_0(1+\xi_i)^3.$$

Здесь

$$R_0(\xi_i) \equiv b(x_i)\Big[F'''(\theta x_i)\frac{\xi_i^3}{3}\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} - \varepsilon^{1/2}G^{IV}(\mu x_i)\frac{\xi_i^4}{24}\operatorname{sh}\beta\tau_0\Big]. \tag{3.12}$$

Заменим в предыдущем равенстве функцию $b(x_i)$ формулой Тейлора в точке $x_i = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа и преобразуем полученное соотношение. В результате приходим к равенству

$$\Lambda v_0(\xi_i) = (-b_1\xi_i v_0 + a_0\xi_i^2 v_0')\varepsilon^{1/2} + (-b_2\xi_i^2 v_0 + a_1\xi_i^3 v_0')\varepsilon + Q_0(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i)$$
$$+\bar{\mu}_0 R_0(\xi_i)\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i), \quad |Q_0| \le M(1+\xi_i)^4. \tag{3.13}$$

Преобразуем и оценим далее $\varepsilon^{1/2}\Lambda v_1(\xi_i)$. Имеем

$$\varepsilon^{1/2}\Lambda(P_3(\xi_i)\exp(-\beta\xi_i))$$

$$= \varepsilon^{1/2}\gamma_1\left\{(P_3(\xi_i))_{x_i\bar{x}_i}\exp(-\beta(\xi_i+\tau_0)) + 2\,(P_3(\xi_i))_{\bar{x}_i}\,(\exp(-\beta\xi_i))_{x_i} + P_3(\xi_i-\tau_0)\exp(-\beta\xi_i)\frac{4\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{h^2}\right\}$$
$$+\gamma_2\varepsilon^{1/2}\left\{(P_3(\xi_i))_{\bar{x}_i}\exp(-\beta(\xi_i+\tau_0)) + P_3(\xi_i-\tau_0)\,(\exp(-\beta\xi_i))_{\bar{x}_i}\right\} - \varepsilon^{1/2}b(x_i)v_1(\xi_i).$$

Принимая во внимание определения разностных производных, вычисляя их и проводя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$\varepsilon^{1/2}\Lambda v_1(\xi_i) = \exp(-\beta\xi_i)P_3(\xi_i-\tau_0)\left\{\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0^2} - \gamma_2\frac{\operatorname{sh}\beta\tau_0}{\tau_0} - \varepsilon^{1/2}b(x_i)\right\} + \exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)$$
$$\times\left\{\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\Big[(6P_{1,3}\xi_i + 2P_{1,2})\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - 4\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\big(P_{1,3}(3\xi_i^2 - 3\xi_i\tau_0 + \tau_0^2) + P_{1,2}(2\xi_i - \tau_0) + P_{1,1}\big)\Big]\right.$$
$$\left.+\gamma_2\Big[(P_{1,3}(3\xi_i^2+\tau_0^2) + 2P_{1,2}\xi_i + P_{1,1})\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big]\right\} - b(x_i)\varepsilon^{1/2}\,[P_3(\xi_i) - P_3(\xi_i-\tau_0)]\exp(-\beta\xi_i).$$

Введем обозначение s_1. Имеем

$$s_1 = P_3(\xi_i-\tau_0)\left[\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0^2} - \gamma_2\frac{\operatorname{sh}\beta\tau_0}{\tau_0} - \varepsilon^{1/2}b\right]\exp(-\beta\xi_i)$$
$$= P_3(\xi_i-\tau_0)b(x_i)\varepsilon^{1/2}\left[2\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2}F(x_i) - \operatorname{sh}\beta\tau_0 G(x_i) - 1\right]\exp(-\beta\xi_i).$$

Заменим, как и выше, функции F и G их формулами Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа. В результате приходим к равенству

$$s_1 = P_3(\xi_i-\tau_0)b(x_i)\varepsilon^{1/2}\Big[\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2}\big(2F(0) + 2F'(0)\xi_i\varepsilon^{1/2}\big) - \operatorname{sh}\beta\tau_0 G''(0)\frac{\xi_i^2}{2}\varepsilon - 1$$
$$+\Big(\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2}F''(\theta_1 x_i)\xi_i^2 - \operatorname{sh}\beta\tau_0 G'''(\mu_1 x_i)\frac{\xi_i^3}{6}\varepsilon^{1/2}\Big)\varepsilon\Big]\exp(-\beta\xi_i).$$

Подставим в это соотношение значения (3.9), (3.11), получим

$$s_1 = P_3(\xi_i-\tau_0)b(x_i)\varepsilon^{1/2}\Big[-\frac{b_1\xi_i + a_0\beta\xi_i^2}{b(0)}\varepsilon^{1/2} + r_4(\xi_i)h + \Big(\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2}F''(\theta_1 x_i)\xi_i^2$$

$$-\operatorname{sh}\beta\tau_0 G'''(\mu_1 x_i)\frac{\xi_i^3}{6}\varepsilon^{1/2}\Big)\varepsilon\Big]\exp(-\beta\xi_i), \quad |r_4| \le M_0(1+\xi_i)^2.$$

Преобразуем последнее равенство, используя тождество $P_3(\xi_i-\tau_0) = P_3(\xi_i)+P_3(\xi_i-\tau_0)-P_3(\xi_i)$ и формулу Тейлора $b(x_i) = b(0) + b'(\theta x_i)\xi_i\varepsilon^{1/2}$. В результате получим

$$s_1 = \big[-b_1\xi_i v_1(\xi_i) + a_0\xi_i^2 P_3(\xi_i)\,(\exp(-\beta\xi_i))'\big]\,\varepsilon + Q_1(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i) + P_3(\xi_i-\tau_0)b(x_i)$$

$$\times\exp(-\beta\xi_i)\bigg(\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2}F''(\theta_1 x_i)\xi_i^2 - \operatorname{sh}\beta\tau_0 G'''(\mu_1 x_i)\frac{\xi_i^3}{6}\bigg)\varepsilon^{3/2}, \quad |Q_1(\xi_i)| \le M_0(1+\xi_i)^5. \tag{3.14}$$

Положим теперь

$$s_2 = \exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)\bigg\{\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\bigg[P_3''(\xi_i)\exp\Big(-\beta\frac{\tau_0}{2}\Big) - \frac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\Big(P_{1,3}(3\xi_i^2-3\xi_i\tau_0+\tau_0^2)$$

$$+P_{1,2}(2\xi_i-\tau_0)+P_{1,1}\Big)\bigg] + \gamma_2\Big[(P_{1,3}(3\xi_i^2+\tau_0^2)+2P_{1,2}\xi_i+P_{1,1})\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big]\bigg\}. \tag{3.15}$$

После элементарных преобразований s_2 примет вид

$$s_2 = \varepsilon^{-1/2}\gamma_1 P_3''(\xi_i)\exp\big(-\beta(\xi_i+\tau_0)\big) + \exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)\bigg[P_3'(\xi_i)\bigg(-\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}+\gamma_2$$

$$\times\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\bigg)+\tau_0\bigg(-\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}(P_{1,3}(-3\xi_i+\tau_0)-P_{1,2})+\gamma_2 P_{1,3}\tau_0\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\bigg)\bigg]. \tag{3.16}$$

Представим последнее равенство в виде двух слагаемых $s_2 = \bar{s}_2 + \tilde{s}_2$. Здесь

$$\bar{s}_2 = \varepsilon^{-1/2}P_3''(\xi_i)\gamma_1\exp\big(-\beta(\xi_i+\tau_0)\big)$$

$$+\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)\bigg[P_3'(\xi_i)\bigg(-\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}+\gamma_2\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\bigg)\bigg],$$

$$\tilde{s}_2 = \tau_0\bigg(-\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}(P_{1,3}(-3\xi_i+\tau_0)-P_{1,2})+\gamma_2 P_{1,3}\tau_0\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\bigg)\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big).$$

Для упрощения изложения представим $\bar{s}_2$ в виде суммы трех слагаемых $\bar{s}_{2,1}+\bar{s}_{2,2}+\bar{s}_{2,3}$. Каждое из этих слагаемых будет выписано в дальнейшем. Так,

$$\bar{s}_{2,1} \equiv \varepsilon^{-1/2}P_3''\exp\left(-\beta(\xi_i+\tau_0)\right)(\gamma_1-\varepsilon+\varepsilon) = \Big[\varepsilon^{1/2}P_3'' + \varepsilon^{-1/2}P_3''(\gamma_1-\varepsilon)\Big]\exp\left(-\beta(\xi_i+\tau_0)\right).$$

Используя уравнение (2.4) при $p=1$ и обозначение $r_5(\xi_i) = P_3''\Big[\varepsilon^{-1}\dfrac{\gamma_1-\varepsilon}{\tau_0}\exp(-\beta\tau_0) - \beta\displaystyle\int_0^1\exp\left(-(\beta\tau_0(1-t))\right)dt\Big]$, приходим к равенству

$$\bar{s}_{2,1} = \big(b_1\xi_i v_0(\xi_i) - a_0\xi_i^2 v_0'(\xi_i) + 2P_3'(\xi_i)\beta\exp(-\beta\xi_i)\big)\,\varepsilon^{1/2} + r_5(\xi_i)h\exp(-\beta\xi_i).$$

Отсюда в силу (3.1) приходим к оценке $|r_5| \le M_0(1+\xi_i)^3\tau_0 \le M_0(1+\xi_i)^4,\ \tau_0\le\xi_i,\ i\ge 1.$

Второе слагаемое $\bar{s}_{2,2}$ имеет вид

$$\bar{s}_{2,2} = -\exp\left(-\beta\left(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\right)\right)P_3'\varepsilon^{-1/2}\frac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}(\gamma_1-\varepsilon+\varepsilon)$$

$$= \Big[-\varepsilon^{-1/2} P_3' \frac{4\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}(\gamma_1-\varepsilon) - P_3'(\xi_i)\varepsilon^{1/2}\,2\beta\,\frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\beta\tau_0/2}\Big] \exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big).$$

Положим $r_6(\xi_i) = -\Big[\dfrac{2\beta P_3'\varepsilon^{1/2}}{h}\Big(\dfrac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}-1\Big) + \varepsilon^{-1/2}P_3'\,2\beta\,\dfrac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}\,\dfrac{\gamma_1-\varepsilon}{h}\Big]$. Тогда $\bar{s}_{2,2} = -\varepsilon^{-1/2}P_3'(\xi_i)2\beta\exp(-\beta\xi_i) + r_6(\xi_i)h\,\exp(-\beta\xi_i)$.

Можно показать, используя, например, формулу Тейлора функции $\exp(-\beta\tau_0)$ с остаточным членом в интегральной форме, что

$$\tau_0^{-1}\Big|\frac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}-1\Big| \le M(1+\tau_0).$$

Это соотношение и оценка (3.1) приводят к неравенству $|r_6| \le M_0(1+\xi_i)^5$.

Наконец, последнее слагаемое

$$\bar{s}_{2,3} = x_i^2(a_0 + a'(\theta x_i)\xi_i\varepsilon^{1/2})P_3'(\xi_i)\exp\left(-\beta(\xi_i+\tau_0)\right) + \exp\left(-\beta(\xi_i+\tau_0)\right)(\gamma_2 - ax_i^2)P_3'(\xi_i)$$

$$= a_0\xi_i^2P_3'(\xi_i)\varepsilon\exp(-\beta\xi_i)\left[1+\exp(-\beta\tau_0)-1\right] + a'(\theta x_i)\xi_i^3\varepsilon^{3/2}P_3'(\xi_i)\exp\left(-\beta(\xi_i+\tau_0)\right)$$
$$+ (\gamma_2 - ax^2)P_3'\exp\left(-\beta(\xi_i+\tau_0)\right).$$

Отсюда $\bar{s}_{2,3} = a_0\xi_i^2P_3'(\xi_i)\varepsilon\exp(-\beta\xi_i) + r_7(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i)$, $\quad |r_7(\xi_i)| \le M_0(1+\xi_i)^5$.

Проведем оценку $\tilde{s}_2$. Имеем $\tilde{s}_2 = Q_2(\xi_i)h\exp(-\beta\xi_i)$. Здесь с целью однообразия обозначения величин, не являющихся главными, положено

$$Q_2 = \tilde{s}_2h^{-1}\exp(\beta\xi_i)$$

$$= -\frac{\gamma_1-\varepsilon+\varepsilon}{\varepsilon}2\beta\frac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}(P_{1,3}(-3\xi_i+\tau_0)-P_{1,2}) + \tau_0\frac{\gamma_2-ax^2+ax^2}{\varepsilon^{1/2}}P_{1,3}\exp(-\beta\tau_0).$$

Соответственно, с учетом (3.1) $|Q_2| \le M_0(1+\xi_i)^5, \tau_0 \le \xi_i, i \ge 1$. Подставляя полученные представления слагаемых в s_2, получим при $\xi_i \ge \tau_0$ и $\tau_0 \in [0,\infty)$

$$s_2 = \left(b_1\xi_iv_0 - a_0\xi_i^2v_0'\right)\varepsilon^{1/2} + a_0\xi_i^2P_3'\varepsilon\exp(-\beta\xi_i) + Q_3(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i), \quad |Q_3| \le M_0(1+\xi_i)^5.$$

В свою очередь, $s_3 = Q_4h\exp(-\beta\xi_i)$, где $Q_4(\xi_i) = -b\varepsilon^{1/2}(P_3)_{\bar{x}} = -b(P_3'(\xi_i) + \tau_0(P_{1,3}(-3\xi_i+\tau_0) - P_{1,2}))$, $|Q_4| \le M_0(1+\xi_i)^2$, $\tau_0 \le \xi_i$, $i \ge 1$. Отсюда и из (3.14) заключаем, что

$$\varepsilon^{1/2}\Lambda v_1 = \left(b_1\xi_iv_0 - a_0\xi_i^2v_0'\right)\varepsilon^{1/2} + \left(-b_1\xi_iv_1 + a_0\xi_i^2v_1'\right)\varepsilon$$
$$+ \Big[Q_5(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i) + P_3(\xi_i-\tau_0)R_1(\xi_i)\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i)\Big]. \tag{3.17}$$

Здесь $R_1(\xi_i) \equiv b(x_i)\Big[F''(\theta_1x_i)\xi_i^2\,\mathrm{sh}^2\,\dfrac{\beta\tau_0}{2} - G'''(\mu_1x_i)\dfrac{\xi_i^3}{6}\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau_0\Big]$, а $|Q_5| \le M_0(1+\xi_i)^5$ при $\xi_i \ge \tau_0$ и $\tau_0 \in [0,\infty)$.

Вычислим и оценим теперь $\varepsilon\Lambda v_2(\xi_i)$:

$$\varepsilon\Lambda v_2(\xi_i) = P_6(\xi_i-\tau_0)\Big[\gamma_1\frac{4\,\mathrm{sh}^2\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0^2} - \varepsilon^{1/2}\gamma_2\frac{\mathrm{sh}\,\beta\tau_0}{\tau_0} - \varepsilon b\Big]\exp(-\beta\xi_i)$$

$$+ \Big\{\gamma_1\Big[\varepsilon(P_6)_{x_i\bar{x}_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - 4(P_6)_{\bar{x}_i}\varepsilon^{1/2}\frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\Big] + \varepsilon\gamma_2(P_6)_{\tilde{x}_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big\}$$

$$\times\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big) - \varepsilon b(P_6(\xi_i) - P_6(\xi_i-\tau_0))\exp(-\beta\xi_i).$$

Представим это соотношение для удобства изложения в виде суммы трех слагаемых $S_1+S_2+S_3$. Их значения будут выписаны в процессе преобразований. Так,

$$S_1 = P_6(\xi_i-\tau_0)b(x_i)\varepsilon\Big[2F(x_i)\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\beta\tau_0}{2} - G(x_i)\,\mathrm{sh}\,\beta\tau_0 - 1\Big]\exp(-\beta\xi_i) = P_6(\xi_i-\tau_0)b\Big[2F'(\theta_2 x_i)\xi_i$$

$$\times\mathrm{sh}^2\,\frac{\beta\tau_0}{2} - G''(\mu_2 x_i)\frac{\xi_i^2}{2}\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau_0\Big]\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i) \equiv P_6(\xi_i-\tau_0)R_2(\xi_i)\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i),\ 0<\theta_2,\mu_2<1. \tag{3.18}$$

Далее

$$S_2 = \Bigg\{\gamma_1\Bigg[\varepsilon(P_6)_{x_i\bar{x}_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - 4(P_6)_{\bar{x}_i}\varepsilon^{1/2}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\Bigg] + \varepsilon\gamma_2(P_6)_{\tilde{x}_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Bigg\}$$

$$\times\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big). \tag{3.19}$$

Справедливы представления

$$(P_6)_{x_i\bar{x}_i} = \varepsilon^{-1}\left[P_6''(\xi_i)+\tau_0^2 p_2\right],\ (P_6)_{\tilde{x}_i} = \varepsilon^{-1/2}\left[P_6'(\xi_i)+\tau_0^2 p_3\right],\ (P_6)_{\bar{x}_i} = \varepsilon^{-1/2}\left[P_6'(\xi_i)+\tau_0 p_4\right];$$

$$|p_2|\le M_0(1+\xi_i)^2,\quad |p_3|\le M_0(1+\xi_i)^3,\quad |p_4|\le M_0(1+\xi_i)^4.$$

Подставим эти значения разностных производных в S_2, получим

$$S_2 = \Bigg\{\gamma_1\left[P_6''(\xi_i)+\tau_0^2 p_2\right]\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - 4\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\gamma_1\left[P_6'(\xi_i)+\tau_0 p_4\right] + \gamma_2\varepsilon^{1/2}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)$$

$$\times\left[P_6'(\xi_i)+\tau_0^2 p_3\right]\Bigg\}\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big) = \Bigg\{\gamma_1 P_6''(\xi_i)\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - 4\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\gamma_1 P_6'(\xi_i)$$

$$+\gamma_2\varepsilon^{1/2}P_6'(\xi_i)\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) + \gamma_1\tau_0^2 p_2\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - 4\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\gamma_1\tau_0 p_4 + \varepsilon^{1/2}\gamma_2\tau_0^2 p_3\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Bigg\}$$

$$\times\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big). \tag{3.20}$$

Всю эту сумму разобьем на четыре слагаемых $S_{2,1}+S_{2,2}+S_{2,3}+S_{2,4}$. Здесь

$$S_{2,1} = P_6''(\xi_i)(\gamma_1-\varepsilon+\varepsilon)\exp(-\beta(\xi_i+\tau_0)).$$

Используя уравнения (2.4) при $p=2$, нетрудно видеть, что

$$S_{2,1} = \varepsilon\left[b_2\xi_i^2 v_0 - a_1\xi_i^3 v_0' + b_1\xi_i v_1 - a_0\xi_i^2 v_1' + 2P_6(\xi_i)\beta\exp(-\beta\xi_i)\right]\exp(-\beta\tau_0)$$

$$+P_6''(\xi_i)(\gamma_1-\varepsilon)\exp(-\beta(\xi_i+\tau_0)).$$

Отсюда в силу (3.1)

$$S_{2,1} = \varepsilon\left[b_2\xi_i^2 v_0 - a_1\xi_i^3 v_0' + b_1\xi_i v_1 - a_0\xi_i^2 v_1' + 2\beta P_6'(\xi_i)\exp(-\beta\xi_i)\right](1+\exp(-\beta\tau_0)-1)$$

$$+r_8(\xi_i)h^2\exp(-\beta\xi_i) = \varepsilon\left[b_2\xi_i^2 v_0 - a_1\xi_i^3 v_0' + b_1\xi_i v_1 - a_0\xi_i^2 v_1' + 2\beta P_6'(\xi_i)\exp(-\beta\xi_i)\right]$$

$$+r_9(\xi_i)h\exp(-\beta\xi_i) + r_8(\xi_i)h^2\exp(-\beta\xi_i),\quad |r_8|,|r_9|\le M_0(1+\xi_i)^6.$$

Второе слагаемое $S_{2,2} = -P_6' \dfrac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}(\gamma_1 - \varepsilon + \varepsilon)\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i + \dfrac{\tau_0}{2}\Big)\Big)$. Справедливо представление $-\dfrac{4\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0} = -2\beta\exp\Big(\dfrac{\beta\tau_0}{2}\Big) + \dfrac{2}{\tau_0}\exp\Big(\dfrac{\beta\tau_0}{2}\Big)\displaystyle\int_{-\beta\tau_0}^{0}(\beta\tau_0+\alpha)\exp\alpha\,d\alpha$. Подставляя это представление в предыдущее равенство, получим в силу (3.2)

$$S_{2,2} = -2\beta\varepsilon P_6'\exp(-\beta\xi_i) + q_5(\xi_i)h\exp(-\beta\xi_i), \quad |q_5| \le M_0(1+\xi_i)^5.$$

Выпишем третье и четвертое слагаемое:

$$S_{2,3} = P_6'(\xi_i)\varepsilon^{1/2}(\gamma_2 - ax^2 + ax^2)\exp(-\beta(\xi_i+\tau_0)) = q_6(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i), \quad |q_6| \le M_0(1+\xi_i)^5;$$

$$S_{2,4} = \left[\gamma_1\tau_0^2 p_2\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - 4\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\gamma_1\tau_0 p_4 + \varepsilon^{1/2}\gamma_2\tau_0^2 p_3\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\right]\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)$$
$$= q_7 h\exp(-\beta\xi_i), \quad |q_7| \le M_0(1+\xi_i)^5.$$

При выводе последнего соотношения были использованы неравенства (3.3). Проведенные преобразования и оценки слагаемых в S_2 позволяют заключить, что

$$S_2 = \big[b_2\xi_i^2 v_0 - a_1\xi_i^3 v_0' + b_1\xi_i v_1 - a_0\xi_i^2 v_1'\big] + Q_6 h\exp(-\beta\xi_i), \quad |Q_6| \le M_0(1+\xi_i)^6,$$

при $\xi_i \ge \tau_0$, $\tau_0 \in [0,\infty)$.

Последнее слагаемое S_3 в $\varepsilon\Lambda v_2$ имеет вид

$$S_3 = -\varepsilon b(x_i)(P_6(\xi_i) - P_6(\xi_i-\tau_0))\exp(-\beta\xi_i) = -\varepsilon b(x_i)(P_6)_{\bar{x}_i}h\exp(-\beta\xi_i)$$
$$= -\varepsilon b(x_i)h\varepsilon^{-1/2}(P_6'(\xi_i) + \tau_0 p_4)\exp(-\beta\xi_i) = hq_8\exp(-\beta\xi_i), \quad |q_8| \le M_0(1+\xi_i)^4.$$

Отсюда и из полученных представлений других слагаемых получено соотношение

$$\varepsilon\Lambda v_2(\xi_i) = \big(b_2\xi_i^2 v_0 - a_1\xi_i^3 v_0' + b_1\xi_i v_1 - a_0\xi_i^2 v_1'\big)\varepsilon + Q_7 h\exp(-\beta\xi_i) + P_6(\xi_i-\tau_0)R_2\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i), \tag{3.21}$$
$$|Q_7| \le M_0(1+\xi_i)^6 \text{ при } \xi_i \ge \tau_0, \quad \tau_0 \in [0,\infty).$$

4. Оценка невязки внутреннего разложения

Представления (3.13), (3.17), (3.21) приводят к равенству при $\xi_i \ge \tau_0$, $\tau_0 \in [0,\infty)$,

$$\Lambda(v_0 + \varepsilon^{1/2}v_1 + \varepsilon v_2) = [\bar{\mu}_0 R_0 + P_3(\xi_i-\tau_0)R_1 + P_6(\xi_i-\tau_0)R_2]\,\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i)$$
$$+ Q_8(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i), \quad |Q_8| \le M_0(1+\xi_i)^6. \tag{4.1}$$

Займемся прежде всего оценкой R_0. С этой целью выпишем явные виды функций F''', G^{IV}:

$$F'''(y_i) = g^{-1}f_0''' - g^{-2}(3f_0''g' + 3f_0'g'' + f_0g''') + g^{-3}6(f_0'g'^2 + f_0g'g'') - g^{-4}6f_0g'^3;$$

$$\varepsilon^{1/2}G^{IV}(\bar{y}_i) = \varepsilon^{1/2}\Big\{g^{-1}h_0^{IV} - g^{-2}(4h_0'''g' + 6h_0''g'' + 4h_0'g''' + h_0g^{IV}) + g^{-3}(12h_0''g'^2 + 24h_0'g'g''$$
$$+ 8h_0g'g''' + 6h_0g''^2) - g^{-4}(24h_0'g'^3 + 36h_0g'^2g'') + g^{-5}h_0g'^4\Big\}; \quad y_i = \theta x_i, \ \ \bar{y}_i = \mu x_i, \ \ 0 < \theta, \ \ \mu < 1.$$

Проведем оценку слагаемых в этих представлениях при $x_i \ge 2h$ ($\xi_i \ge 2\tau_0$). Нетрудно заметить, используя явный вид z, z_0, что $z + z_0 \ge \beta\tau_0$, $z - z_0 \ge \beta\tau_0(m_1(1+\xi_i))^{-1}$, $m_1 = \max(1, m/\beta)$. Отсюда видно, что

$$g^{-1} = \frac{1}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_0} = \frac{1}{2\operatorname{sh}\dfrac{z+z_0}{2}\operatorname{sh}\dfrac{z-z_0}{2}} \le \frac{M_0(1+\xi_i)\exp(-z)}{(1-\exp(-\beta\tau_0))\tau_0}. \tag{4.2}$$

Последовательно оценим слагаемые в F'''. Получим, пользуясь (4.2), явным видом функций f_0, g и их производными оценку

$$|\bar{\mu}_0|b(x_i)\frac{\xi_i^3}{3}|F'''|\varepsilon^{3/2}\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} \le M_0(1+\xi_i)^3$$

$$\times\Big[(1+\xi_i)^5 h\varepsilon^{-1} + (1+\xi_i)^9(h\varepsilon^{-1}+1) + (1+\xi_i)^{10}\Big(\frac{\tau_0\beta}{1-\exp(-\tau_0\beta)}\Big)^2\Big]\varepsilon^{3/2}\exp(\beta\tau_0).$$

Нетрудно видеть, что при $x \ge 0$

$$\frac{x}{1-\exp(-x)} \le \frac{1+x}{1-\exp(-1)}. \tag{4.3}$$

Поэтому предыдущее неравенство с учетом $\tau_0 \le \xi_i$ $(i \ge 1)$ примет вид

$$|\bar{\mu}_0|b(x_i)\frac{\xi_i^3}{3}|F'''|\varepsilon^{3/2}\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} \le M_0\big[(1+\xi_i)^7 h + (1+\xi_i)^{12}(h+\varepsilon^{3/2}) + (1+\xi_i)^{15}\varepsilon^{3/2}\big]\exp(\beta\tau_0)$$

$$\le M_0(1+\xi_i)^{15}(h+\varepsilon^{3/2})\exp(\beta\tau_0). \tag{4.4}$$

Проведем таким же образом оценку $\varepsilon^{1/2}G^{IV}$. Из (4.2), явного вида функций h_0, g и их производных можно получить, что

$$b(x_i)\frac{\xi_i^4}{24}|G^{IV}|\varepsilon^2\operatorname{sh}\beta\tau_0 \le M_0(1+\xi_i)^{21}\exp(\beta\tau_0)\Big[\frac{\beta\tau_0}{1-\exp(-\beta\tau_0)}\Big]^4\varepsilon^{3/2}.$$

Принимая во внимание неравенство (4.3) при $x = \beta\tau_0$ и то, что $\tau_0 \le \xi_i$ $(i \ge 1)$, приходим к оценке

$$|\bar{\mu}_0|b(x_i)\frac{\xi_i^4}{24}|G^{IV}|\varepsilon^2\operatorname{sh}\beta\tau_0 \le M_0(1+\xi_i)^{25}\varepsilon^{3/2}\exp(\beta\tau_0). \tag{4.5}$$

Справедливо утверждение. При $\xi_i \ge 0,\ \beta > 0$, при любом конечном $k \ge 0$ и при $\xi_i \in [0,\infty)$

$$\xi_i^k\exp(-\beta\xi_i) \le M(k)\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{2}\Big) \le M_0\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{2}\Big). \tag{4.6}$$

Очевидно, кроме того, при $\xi_i \ge 2\tau_0$ неравенство

$$\exp(-\beta\xi_{i-1}) \le \exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{2}\Big). \tag{4.7}$$

Удобно для дальнейшего ввести следующее обозначение:

$$\tilde{R}_0 = Q_8(\xi_i)(h+\varepsilon^{3/2}) + \bar{\mu}_0\varepsilon^{3/2}R_0(\xi_i), \quad |Q_8| \le M_0(1+\xi_i)^6. \tag{4.8}$$

Исходя из этого равенства, определения R_0 (3.12) и из оценок (4.1), (4.4), (4.5), приходим к неравенству

$$|\tilde{R}_0| \le M_0(h+\varepsilon^{3/2})(1+\xi_i)^{25}\exp(\beta\tau_0) \tag{4.9}$$

при всех $\xi_i \ge \tau_0$ и $\tau_0 \in [0,\infty)$. Отсюда при $\xi_i \ge 2\tau_0$ в силу (4.7), (4.6)

$$|\tilde{R}_0|\exp(-\beta\xi_i) \le M_0(h+\varepsilon^{3/2})(1+\xi_i)^{25}\exp(-\beta\xi_{i-1}) \le M_0(h+\varepsilon^{3/2})(1+\xi_i)^{25}\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{2}\Big)$$

$$\le M_0(h+\varepsilon^{3/2})\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{3}\Big) \le M_0(h+\varepsilon^{3/2}).$$

Теперь оценим R_1 (3.17). Имеем $R_1 = b(x_i)\xi_i^2\Big[F''(\theta_1 x_i)\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} - G'''(\mu_1 x_i)\frac{\xi_i}{6}\varepsilon^{1/2}\operatorname{sh}\beta\tau_0\Big]$. Как и выше, выпишем явные виды F'', G''':

$$F'' = g^{-1}f_0'' - g^{-2}(2f_0'g' + f_0g'') + g^{-3}2f_0g'^2,$$

$$G''' = g^{-1}h_0''' - g^{-2}(3h_0''g' + 3h_0'g'' + h_0g''') - g^{-3}(h_0'g'^2 + h_0g'g'') - g^{-4}6h_0g'^3.$$

Оценим прежде всего F'':

$$g^{-1}|f_0''| \le M_0\frac{(1+\xi_i)^4\exp(-z+z_0)}{1-\exp(-\beta\tau_0)}, \quad g^{-2}(2|f_0'g'| + f_0|g''|) \le M_0\frac{(1+\xi_i)^6\exp(-z+z_0)}{(1-\exp(-\beta\tau_0))^2},$$

$$g^{-3}2f_0g'^2 \le M_0\frac{(1+\xi_i)^7\tau_0\exp(-z+z_0)}{(1-\exp(-\beta\tau_0))^3}.$$

Используя полученные соотношения, а также (4.3) при $x = \beta\tau_0$, приходим к неравенству

$$b(x_i)\xi_i^2|F''|\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} \le M_0(1+\xi_i)^{10}\exp(\beta\tau_0), \quad \xi_i \ge \tau_0, \quad \tau_0 \in [0,\infty). \tag{4.10}$$

Приступим к оценке G''':

$$\varepsilon^{1/2}g^{-1}|h_0'''| \le M_0\frac{(1+\xi_i)^6\exp(-z+z_0)}{1-\exp(-\beta\tau_0)},$$

$$\varepsilon^{1/2}g^{-2}(3|h_0''||g'| + 3|h_0'g''| + h_0|g'''|) \le M_0\frac{(1+\xi_i)^{11}\tau_0\exp(-z+z_0)}{(1-\exp(-\beta\tau_0))^2},$$

$$\varepsilon^{1/2}g^{-3}(|h_0'|g'^2 + h_0|g'||g''|) \le M_0\frac{(1+\xi_i)^{10}\tau_0^2\exp(-z+z_0)}{(1-\exp(-\beta\tau_0))^3},$$

$$\varepsilon^{1/2}g^{-4}6h_0|g'^3| \le M_0\frac{(1+\xi_i)^{10}\tau_0^3\exp(-z+z_0)}{(1-\exp(-\beta\tau_0))^4}.$$

Исходя из полученных неравенств и из оценки (4.3) при $x = \beta\tau_0$ и учитывая, что $\tau_0 \le \xi_i \;\; i \ge 1$, приходим к соотношению $b\xi_i^3\varepsilon^{1/2}|G'''|\operatorname{sh}\beta\tau_0 \le M_0(1+\xi_i)^{14}\exp(\beta\tau_0)$, $\tau_0 \in [0,\infty)$. Отсюда и из (4.10) при $\xi_i \ge \tau_0, \tau_0 \in [0,\infty)$,

$$|P_3(\xi_i - \tau_0)R_1| \le M_0(1+\xi_i)^{17}\exp(\beta\tau_0). \tag{4.11}$$

Таким образом, в силу (4.7), (4.6) при $\xi_i \ge 2\tau_0$

$$|P_3(\xi_i - \tau_0)R_1|\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i) \le M_0\varepsilon^{3/2}\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{3}\Big) \le M_0\varepsilon^{3/2}.$$

Преобразуем и проведем оценку $R_2(\xi_i)$, см. (3.18). Имеем

$$R_2(\xi_i) = 2F'(\theta_2x_i)\xi_i\operatorname{sh}^2\frac{\beta\tau_0}{2} - G''(\mu_2x_i)\frac{\xi_i^2}{2}\varepsilon^{1/2}\operatorname{sh}\beta\tau_0.$$

Выпишем, как и выше, явные виды F', G'':

$$F' = f_0'g^{-1} - f_0g'g^{-2}, \quad G'' = g^{-1}h_0'' - g^{-2}(2h_0'g' + h_0g'') + 2h_0g'^2g^{-3}.$$

Исходя из оценки (4.2) $|F'| \le M_0\dfrac{(1+\xi_i)^4\exp(-z+z_0)}{(1-\exp(-\beta\tau_0))^2}$, в свою очередь

$$\varepsilon^{1/2}|G''| \le M_0(1+\xi_i)^7\exp(-z+z_0)\frac{1}{1-\exp(-\beta\tau_0)}\Big[1 + \frac{\tau_0}{1-\exp(-\beta\tau_0)} + \frac{\tau_0^2}{(1-\exp(-\beta\tau_0))^2}\Big].$$

Подставляя в R_2 полученные оценки $|F'|$, $|G''|$, принимая во внимание (4.3) при $x = \beta\tau_0$, приходим к неравенству

$$|P_6(\xi_i - \tau_0)R_2| \le M_0(1+\xi_i)^{17}\exp(\beta\tau_0), \;\; \xi_i \ge \tau_0, \;\; \tau_0 \in [0,\infty). \tag{4.12}$$

Отсюда при $\xi_i \geq 2\tau_0$ и в силу неравенств (4.7), (4.6)

$$|P_6(\xi_i-\tau_0)R_2|\varepsilon^{3/2}\exp(-\beta\xi_i) \leq M_0\varepsilon^{3/2}\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{3}\Big) \leq M_0\varepsilon^{3/2}.$$

Положим

$$R \equiv \big[\tilde R_0 + (P_3(\xi_i-\tau_0)R_1 + P_6(\xi_i-\tau_0)R_2)\varepsilon^{3/2}\big]\exp(-\beta\xi_i). \tag{4.13}$$

Исходя из этого определения, получим оценку $|R|$ при $\tau_0 \leq 1$ и всех $\xi_i \geq \tau_0$. В силу (4.6), (4.9), (4.11) и (4.12)

$$|R| \leq M_0(1+\xi_i)^{25}(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i)\exp(\beta\tau_0) \leq M_0(1+\xi_i)^{25}(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_i)\exp(\beta)$$
$$\leq M_0(h+\varepsilon^{3/2})\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{2}\Big) \leq M_0(h+\varepsilon^{3/2}). \tag{4.14}$$

Пусть теперь $\tau_0 \geq 1$, а $\xi_i \geq 2\tau_0$, тогда из (4.7) и из (4.6)

$$|R| \leq M_0(1+\xi_i)^{25}(h+\varepsilon^{3/2})\exp(-\beta\xi_{i-1}) \leq M_0(1+\xi_i)^{25}(h+\varepsilon^{3/2})\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{2}\Big)$$
$$\leq M_0(h+\varepsilon^{3/2})\exp\Big(-\frac{\beta\xi_i}{3}\Big) \leq M_0(h+\varepsilon^{3/2}). \tag{4.15}$$

Таким образом, осталось показать, что эта оценка имеет место при $\xi_i = \tau_0$ и $\tau_0 \geq 1$.

Вычислим с этой целью

$$\Lambda(v_0+\varepsilon^{1/2}v_1+\varepsilon v_2) = \Lambda((\bar\mu_0+\varepsilon^{1/2}P_3+\varepsilon P_6)\exp(-\beta\xi_i)) \equiv \Lambda(\tilde P_6\exp(-\beta\xi_i)) = \tilde P_6(\xi_i-\tau_0)$$
$$\times\Bigg[\gamma_1\varepsilon^{-1}\frac{4\,\mathrm{sh}^2\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0^2} - \gamma_2\varepsilon^{-1/2}\frac{\mathrm{sh}\,\beta\tau_0}{\tau_0} - b\Bigg]\exp(-\beta\xi_i)$$
$$+\Bigg\{\gamma_1\Bigg[(\tilde P_6)_{x_i\bar x_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - \varepsilon^{-1/2}(\tilde P_6)_{\bar x_i}\frac{4\,\mathrm{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\Bigg] + \gamma_2(\tilde P_6)_{\tilde x_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Bigg\}\exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)$$
$$- b(x_i)h(\tilde P_6)_{\bar x_i}\exp(-\beta\xi_i). \tag{4.16}$$

Оценим вместе со множителями выражение, стоящее в фигурных скобках последнего равенства при $\xi_i = \tau_0$, $\tau_0 \geq 1$, обозначив его посредством Σ_2. С этой целью прежде всего вернемся к определению $\tilde P_6$. Тогда, согласно (3.15), (3.19)

$$\Sigma_2 = \exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)\Bigg\{\gamma_1\Bigg[\varepsilon^{1/2}(P_3)_{x_i\bar x_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - (P_3)_{\bar x_i}\frac{4\,\mathrm{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\Bigg] + \varepsilon^{1/2}\gamma_2(P_3)_{\tilde x_i}$$
$$\times\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Bigg\} + \exp\Big(-\beta\Big(\xi_i+\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)\Bigg\{\gamma_1\Bigg[\varepsilon(P_6)_{x_i\bar x_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big) - \varepsilon^{1/2}(P_6)_{\bar x_i}\frac{4\,\mathrm{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}\Bigg]$$
$$+\varepsilon\gamma_2(P_6)_{\tilde x_i}\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Bigg\} = s_2 + S_2.$$

После элементарных преобразований согласно (3.16), (3.20) будем иметь

$$s_2(\tau_0) = \varepsilon^{-1/2}\gamma_1 P_3''(\tau_0)\exp(-2\beta\tau_0) + \exp\Big(-\frac{3}{2}\beta\tau_0\Big)\Bigg[P_3'(\tau_0)\Bigg(-\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\,\mathrm{sh}\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}$$

$$+\gamma_2\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big)+\tau_0\Big(-\varepsilon^{-1/2}\gamma_1\frac{4\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}(-P_{1,3}2\tau_0-P_{1,2})+\gamma_2P_{1,3}\tau_0\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big)\Big].$$

Для наглядности проведем оценку $|s_2|$, используя промежуточный результат. Согласно (3.1) при $\tau_0\ge 1$

$$|s_2|\le M\Big\{\frac{|\gamma_1-\varepsilon+\varepsilon|}{\varepsilon^{1/2}}\tau_0\exp(-2\beta\tau_0)+\exp\Big(-\frac{3}{2}\beta\tau_0\Big)\Big[(1+\tau_0)^2\frac{|\gamma_1-\varepsilon+\varepsilon|}{\varepsilon^{1/2}}\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)$$

$$\times\frac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}+|\gamma_2-a_1h^2+a_1h^2|+\tau_0\Big(\frac{|\gamma_1-\varepsilon+\varepsilon|}{\varepsilon^{1/2}}\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)(1+\tau_0)\frac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}.$$

$$+|\gamma_2-a_1h^2+a_1h^2|\tau_0\Big)\Big]\Big\}\le M_0(1+\tau_0)^5h\exp(-\beta\tau_0).$$

Аналогично согласно (3.20) получим явный вид S_2:

$$S_2(\tau_0)=\gamma_1P_6''(\tau_0)\exp(-2\beta\tau_0)+\exp\Big(-\frac{3}{2}\beta\tau_0\Big)\Big[P_6'(\tau_0)\Big(-\gamma_1\frac{4\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}+\varepsilon^{1/2}\gamma_2\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big)$$

$$+\tau_0\Big(-\gamma_1\frac{4\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{\tau_0}p_4+\varepsilon^{1/2}\gamma_2\tau_0p_3\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big)\Big].$$

Оценку S_2 проведем по той же схеме, что и оценку s_2. В силу неравенств (3.3) при $\tau_0\ge 1$ будем иметь

$$|S_2|\le M_1\Big\{h(1+\tau_0)^4\exp(-2\beta\tau_0)+\varepsilon\tau_0(1+\tau_0)^3\exp(-2\beta\tau_0)+\exp\Big(-\frac{3}{2}\beta\tau_0\Big)\Big[(h(1+\tau_0)^5+(1+\tau_0)^4\tau_0\varepsilon)$$

$$\times\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\frac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}+\varepsilon^{1/2}M\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)(1+\tau_0)^4\tau_0\Big]+\exp\Big(-\frac{3}{2}\beta\tau_0\Big)$$

$$\times\Big[\tau_0h\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\frac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}(1+\tau_0)^4+\varepsilon\tau_0\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\frac{1-\exp(-\beta\tau_0)}{\beta\tau_0}(1+\tau_0)^4$$

$$+\varepsilon^{1/2}M\tau_0(1+\tau_0)^4\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\Big]\Big\}\le M_0h(1+\tau_0)^5\exp(-\beta\tau_0).$$

Из неравенств, полученных для S_2, s_2, следует, что

$$|\Sigma_2(\tau_0)|\le M_0h(1+\tau_0)^5\exp(-\beta\tau_0)\le M_0h\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\le M_0h. \tag{4.17}$$

Преобразуем и оценим первое слагаемое в (4.16), обозначив его посредством Σ_1. Имеем

$$\Sigma_1(\xi_i)=\tilde P_6(\xi_i-\tau_0)\Big[\gamma_1\frac{4\,\mathrm{sh}^2\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}}{h^2}-\gamma_2\frac{\mathrm{sh}\,\beta\tau_0}{h}-b\Big]\exp(-\beta\xi_i)=\tilde P_6(\xi_i-\tau_0)b(x_i)\Big[2F(x_i)\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\beta\tau_0}{2}$$

$$-G(x_i)\,\mathrm{sh}\,\beta\tau_0-1\Big]\exp(-\beta\xi_i)=B(x_i)x_i\Big[F'(\theta x_i)\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta\tau_0}{2}-G'(\theta x_i)\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta\tau_0}{2}\Big]\exp(-\beta\xi_i),$$

где $0<\theta<1,\ B(x_i)\equiv 2\tilde P_6(\xi_i-\tau_0)b(x_i)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta\tau_0}{2}$.

Подставим вместо F' и G' их явный вид и представим полученное выражение в виде двух слагаемых $\Sigma_1(\xi_i) = B(x_i)x_i(J_1 + J_2)\exp(-\beta\xi_i)$, где

$$J_1 = -\tilde{g}^{-1}\tilde{z}_0' \operatorname{ch}\Big(\tilde{z}_0 - \frac{\beta\tau_0}{2}\Big), \quad J_2 = \tilde{g}^{-2}(\operatorname{sh}\tilde{z}\tilde{z}' - \operatorname{sh}\tilde{z}_0\tilde{z}_0')\operatorname{sh}\Big(\tilde{z}_0 - \frac{\beta\tau_0}{2}\Big).$$

Волна $\sim$ над функцией означает, что она рассматривается в точке θx_i. Применяя оценку (4.2), получим $|J_1| \le M_0\dfrac{(1+\xi_i)\exp(-\tilde{z})}{(1-\exp(-\beta\tau_0))\tau_0}(1+\xi_i)^2\tau_0\exp\Big(\tilde{z}_0 - \dfrac{\beta\tau_0}{2}\Big)$ при $\tilde{z}_0 - \dfrac{\beta\tau_0}{2} \ge 0$. Отсюда $|J_1| \le M_0(1+\xi_i)^3\exp\Big(-\dfrac{\beta\tau_0}{2}\Big)$, так как $\tau_0 \ge 1$, а $(\tilde{z} - \tilde{z}_0) \ge 0$. Если же $\dfrac{\beta\tau_0}{2} - \tilde{z}_0 \ge 0$, то

$$|J_1| \le M_0(1+\xi_i)^3\exp(-\tilde{z})\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2} - \tilde{z}_0\Big) = M_0(1+\xi_i)^3\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\exp(-\tilde{z} - \tilde{z}_0)$$

$$\le M_0(1+\xi_i)^3\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)$$

в силу того, что $\tilde{z} + \tilde{z}_0 \ge \beta\tau_0$.

Аналогично проведем оценку $|J_2|$. Пусть сначала $\tilde{z}_0 - \dfrac{\beta\tau_0}{2} \ge 0$. Тогда

$$|J_2| \le M_0\frac{(1+\xi_i)^4\tau_0\exp\Big(\tilde{z}_0 - \dfrac{\beta\tau_0}{2}\Big)}{\tau_0^2(1-\exp(-\beta\tau_0))}\exp(-\tilde{z}) \le M_0(1+\xi_i)^4\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big).$$

Если $\dfrac{\beta\tau_0}{2} - \tilde{z}_0 \ge 0$, то

$$|J_2| \le M_0(1+\xi_i)^4\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2} - \tilde{z}_0\Big)\exp(-\tilde{z}) = M_0(1+\xi_i)^4\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\exp(-\tilde{z} - \tilde{z}_0)$$

$$\le M_0(1+\xi_i)^4\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big).$$

Из полученных неравенств при $x_i = h$ $(\xi_i = \tau_0)$ приходим к соотношению

$$|\Sigma_1(\tau_0)| \le 2|\tilde{P}_6(0)|b(x_1)\exp\Big(\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)hM_0(1+\tau_0)^4\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{2}\Big)\exp(-\beta\tau_0)$$

$$\le M_0 h\exp\Big(-\frac{\beta\tau_0}{3}\Big) \le M_0 h. \tag{4.18}$$

Равенство (4.16) при $\xi_i = \tau_0$ в силу введенных обозначений слагаемых правой части примет вид

$$\Lambda(\tilde{P}_6\exp(-\beta\xi_i))|_{\xi_i=\tau_0} = \Sigma_1(\tau_0) + \Sigma_2(\tau_0). \tag{4.19}$$

Отсюда согласно (4.17), (4.18)

$$|\Sigma_1(\tau_0) + \Sigma_2(\tau_0)| \le |\Sigma_1| + |\Sigma_2| \le M_0 h. \tag{4.20}$$

Соотношение (4.1) в силу введенных обозначений (4.8), (4.13) имеет вид

$$\Lambda(v_0 + \varepsilon^{1/2}v_1 + \varepsilon v_2) \equiv \Lambda(\tilde{P}_6\exp(-\beta\xi_i)) = R(\xi_i). \tag{4.21}$$

Правая часть $R(\xi_i)$ согласно неравенствам (4.14) при $\xi_i \ge \tau_0$, $\tau_0 \le 1$, (4.15) при $\xi_i \ge 2\tau_0$, $\tau_0 \ge 1$, удовлетворяет оценке $|R(\xi_i)| \le M_0(h + \varepsilon^{3/2})$. Представление (4.21) не позволяло оценить правую часть R при $\xi_i = \tau_0$. С этой целью при $\xi_i = \tau_0$ было выведено другое равенство (4.19) и получена оценка (4.20).

Положим

$$\Lambda(\tilde{P}_6\exp(-\beta\xi_i)) = R_\varepsilon(\xi_i), \quad \xi_i \ge \tau_0, \quad \tau_0 \in [0, \infty). \tag{4.22}$$

Здесь $R_\varepsilon(\xi_i) = R(\xi_i)$ при $\xi_i \ge \tau_0$, $\tau_0 \le 1$, и при $\xi_i \ge 2\tau_0$, $\tau_0 \ge 1$, и $R_\varepsilon(\xi_i) = \Sigma_1(\tau_0) + \Sigma_2(\tau_0)$ при $\xi_i = \tau_0$, $\tau_0 \ge 1$. Из определения R_ε следует в силу (4.14), (4.15) и (4.19), что при $\xi_i \ge \tau_0, \tau_0 \in [0, \infty)$,

$$|R_\varepsilon| \le M_0(h + \varepsilon^{3/2}). \tag{4.23}$$

Вычислим значение разностного оператора Λ на частичной сумме $\tilde{u}_\varepsilon$ (2.1). В силу (3.7), (4.22) $\Lambda(u_0 + \varepsilon u_1 + \tilde{P}_6 \exp(-\beta\xi_i)) = f(x_i) + \tilde{f}_\varepsilon(x_i)(h + \varepsilon^2) + R_\varepsilon$, причем из ограниченности $|\tilde{f}_\varepsilon| \le M_2$ и оценки (4.23) следует, что $|\tilde{f}_\varepsilon(x_i)(h + \varepsilon^2) + R_\varepsilon| \le M_0(h + \varepsilon^{3/2})$. Используя далее принцип максимума, которым обладает разностный оператор Λ, докажем утверждение.

Лемма. *Пусть $\tilde{u}_\varepsilon$ — частичная сумма асимптотического разложения решения u_ε задачи* (1.1), (1.2), *u^h — решение разностной задачи* (1.3). *Тогда в точках разностной сетки ω_h справедлива оценка*

$$|\tilde{u}_\varepsilon - u^h| \leqslant M_1(h + \varepsilon^{3/2}).$$

Доказательство. Введем с этой целью вспомогательную функцию $\Phi(x_i) = \gamma_3(h + \varepsilon^{3/2}) \pm (\tilde{u}_\varepsilon - u^h)$, где $\gamma_3 > 0$ — постоянная, которая будет выбрана в дальнейшем. Вычислим $\Lambda\Phi(x_i)$, имеем

$$\Lambda\Phi(x_i) = -b(x_i)\gamma_3(h + \varepsilon^{3/2}) \pm (f(x_i) + \tilde{f}_\varepsilon(x_i)(h + \varepsilon^2) + R_\varepsilon - f(x_i)),$$

следовательно,

$$\Lambda\Phi(x_i) \le -\beta\gamma_3(h + \varepsilon^{3/2}) + |\tilde{f}_\varepsilon|(h + \varepsilon^2) + |R_\varepsilon| \le -\beta\gamma_3(h + \varepsilon^{3/2}) + M_0(h + \varepsilon^{3/2}).$$

Отсюда видно, что постоянную γ_3 можно выбрать так, чтобы $\Lambda\Phi \le 0$, а $\Phi(0), \Phi(1) \ge 0$. Тогда в силу принципа максимума $\Phi(x_i) \ge 0$, значит, $|\tilde{u}_\varepsilon - u^h| \leqslant M_1(h + \varepsilon^{3/2})$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема. *В точках сетки $\bar{\omega}_h$ для решения u_ε задачи* (1.1), (1.2) *и решения u^h разностной задачи* (1.3) *справедлива оценка $|u_\varepsilon(x_i) - u^h(x_i)| \leqslant Mh$.*

Доказательство. В силу леммы и неравенства (2.5) имеем

$$|u_\varepsilon - u^h| \leqslant |u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon| + |\tilde{u}_\varepsilon - u^h| \le M_1(h + \varepsilon^{3/2}).$$

Из полученного неравенста при $\varepsilon^{3/2} \le h$ и из (3.6) при $\varepsilon^{3/2} \ge h$ следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А. М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
2. **Шишкин Г. И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992. 232с.
3. **Бахвалов Н. С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
4. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1968. 464с.
5. **Емельянов К. В.** Разностная схема подгонки для сингулярно возмущенной задачи с точкой поворота // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 80–91.
6. **Шишкин Г. И., Титов В.А.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при производных // Численные методы механики сплошной среды. 1976. Т. 1, № 2. С. 145–155.
7. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553с.

Емельянов Константин Васильевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ekv@imm.uran.ru

Поступила 30.01.2013

Том 19 № 3 2013

УДК 512.5

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, СВОБОДНО ДЕЙСТВУЮЩИХ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ[1]

А. Х. Журтов, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. И. Созутов

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Периодическая группа G называется π-группой, если порядок каждого ее элемента делится только на простые числа из π. Свободным действием G на нетривиальной группе V называется действие G на V, удовлетворяющее условию: если $v \in V$, $g \in G$ и $vg = v$, то либо $v = 1$, либо $g = 1$.

В работе дается описание $\{2, 3\}$-групп, которые могут действовать свободно на абелевой группе.

Ключевые слова: периодическая группа, абелева группа, свободное действие, локальная конечность.

A. Kh. Zhurtov, D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, A. I. Sozutov. On periodic groups acting freely on abelian groups.

Let π be some set of primes. A periodic group G is called a π-group if all prime divisors of the order of each of its elements lie in π. An action of G on a nontrivial group V is called free if, for any $v \in V$ and $g \in G$ such that $vg = v$, either $v = 1$ or $g = 1$. We describe $\{2, 3\}$-groups that can act freely on an abelian group.

Keywords: periodic group, abelian group, free action, local finiteness.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Периодическая группа G называется *π-группой*, если порядок каждого ее элемента делится только на простые числа из π. *Свободным действием G на нетривиальной группе V* называется действие G на V, удовлетворяющее условию: если $v \in V$, $g \in G$ и $vg = v$, то либо $v = 1$, либо $g = 1$.

В работе дается описание $\{2, 3\}$-групп, которые могут действовать свободно на абелевой группе.

Интерес к этой теме был стимулирован работой Э. Ябары и П. Майра [1], которые доказали локальную конечность $\{2, 3\}$-группы G конечного периода $2^m 3^2$, действующей свободно на абелевой группе. Позднее Д.В. Лыткина [2] показала, что этот результат остается верным и без предположения о конечности периода силовской 2-подгруппы группы G. Формулировка наших основных результатов требует предварительных пояснений и обозначений.

Под *локально циклической* группой в дальнейшем понимается группа, любое конечное подмножество которой содержится в некоторой циклической подгруппе. Локально циклическая примарная группа либо является конечной циклической p-группой для некоторого простого числа p, либо изоморфна группе типа p^∞, т. е. группе

$$C(p) = \langle a_0, a_1, \ldots \mid a_0^p = 1, a_{i+1}^p = a_i \text{ для } i \geq 0\rangle.$$

Кватернионной группой мы называем группу кватернионов порядка 8 или обобщенную группу кватернионов, т. е. группу, изоморфную группе

$$Q_{2^{m+1}} = \langle a, b \mid a^{2^m} = b^4 = 1,\ a^b = a^{-1},\ b^2 = a^{2^{m-1}}\rangle, \quad m \geq 3.$$

Локально кватернионной группой называется 2-группа G, любое конечное подмножество которой содержится в некоторой кватернионной подгруппе. По известному результату В.П. Шункова (см. [3]) локально кватернионная группа либо является кватернионной группой, либо

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00509, 11-01-00456, 12-01-90006), федеральной целевой программы “Научно-образовательные кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракт 14.740.11.0346) и программы проектов партнерских фундаментальных исследований СО РАН на 2012–2014 гг. (проект № 14).

изоморфна группе $Q(2) = \langle C(2), b \mid b^2 = a_0,\ a_i^b = a_i^{-1}\text{для } i \geq 1\rangle$. Локально кватернионная группа содержит ровно одну инволюцию (т. е. элемент порядка 2), которая порождает центр этой группы.

Группа кватернионов порядка 8 обладает автоморфизмом порядка 3. Соответствующее полупрямое произведение порядка 24 изоморфно группе $SL_2(3)$ двумерных матриц над полем порядка 3 с определителем, равным единице. Через $\tilde{S}_4$ мы обозначаем расширение группы порядка 2 посредством симметрической группы S_4 степени 4 с кватернионной силовской 2-подгруппой. Известно (см., например, [4]), что группа $\tilde{S}_4$ существует и единственна с точностью до изоморфизма. Отметим, что все элементы простого порядка из $\tilde{S}_4$ порождают подгруппу индекса 2, изоморфную $SL_2(3)$.

Группа G называется *центральным произведением* своих подгрупп A и B с объединением по подгруппе C, если $G = AB$, $[A, B] = 1$ и $C = A \cap B$. Центральное произведение AB называется *нетривиальным*, если $A \neq G \neq B$. Очевидно, что $C \leq Z(G)$ и центральное произведение AB с объединением по C изоморфно фактор-группе $A \times B$ по подгруппе $C_1 = \{(c, c^{-1}) \mid c \in C\}$.

Пусть p — простое нечетное число, a — натуральное число. Назовем *группой типа* $Q(p^a)$ бесконечную p-группу P, обладающую следующими свойствами:

(а) центр группы P — циклическая группа порядка p^a;

(б) любая конечная подгруппа из P является циклической.

Отметим, что любая группа типа $Q(p^a)$ не является локально конечной.

Назовем *группой типа* $Q(p^a, d)$ $\{2, p\}$-группу H с инволюциями, обладающую следующими свойствами:

(а) центр группы H является локально циклической группой;

(б) все 2-элементы из H содержатся в $Z(H)$ и образуют группу T порядка 2^d (случай $d = \infty$ не исключается);

(в) H/T является группой типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a.

Примеры групп типов $Q(p^a)$ и $Q(p^a, d)$ приведены ниже.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть G — $\{2, 3\}$-группа, действующая свободно на абелевой группе. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1. *G локально конечна и изоморфна либо локально циклической группе, либо прямому произведению локально циклической 3-группы на локально кватернионную группу, либо полупрямому произведению локально циклической 3-группы R на циклическую 2-группу $\langle b\rangle$, где $b^2 \neq 1$ и $a^b = a^{-1}$ для любого $a \in R$, либо полупрямому произведению локально циклической 3-группы R на локально кватернионную группу Q, в котором $|Q : C_Q(R)| = 2$, либо полупрямому произведению группы кватернионов $Q_8 = \langle x, y\rangle$ порядка 8 на циклическую 3-группу $\langle a\rangle$, в котором $x^a = y$, $y^a = xy$, либо группе $\tilde{S}_4$.*

2. *G не является локально конечной группой, и все элементы простых порядков из G порождают циклическую подгруппу.*

Обратно, любая из перечисленных групп может действовать свободно на подходящей абелевой группе.

Подробное описание групп из п. 2 теоремы 1 содержится в теореме 2.

Теорема 2. *Пусть G — не локально конечная $\{2, p\}$-группа, где p — простое нечетное число. Тогда и только тогда все элементы простых порядков из G порождают циклическую подгруппу, когда все 2-элементы из G порождают 2-подгруппу S, которая является локально циклической или локально кватернионной группой, и выполнено одно из условий*:

1. *$G = P \times S$, где P — группа типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a (случай $S = 1$ не исключается).*

2. *S — нетривиальная локально циклическая группа, и G — группа типа $Q(p^a,d)$ для некоторого натурального числа a.*

3. *S — локально циклическая группа, и G — нетривиальное центральное произведение группы S и группы типа $Q(p^a,d)$ для некоторых натуральных чисел a и d с объединением по подгруппе порядка 2^d.*

4. *S — локально кватернионная группа, и G — центральное произведение группы S и группы типа $Q(p^a,1)$ для некоторого натурального числа a с объединением по подгруппе порядка 2.*

5. *S — группа кватернионов порядка 8, $p=3$, $|G:C_G(S)|=3$ и G/S — группа типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a. При этом $C_G(S)$ — либо группа типа $Q(p^a,1)$, либо прямое произведение группы типа $Q(p^a)$ на группу порядка 2.*

1. Необходимые определения и известные результаты

Пусть H — подгруппа группы G и $G=\bigcup_{i\in I}Hg_i$ — разложение G на смежные классы по H. Пусть H действует на группе W. Для каждого $i\in I$ рассмотрим множество $W_i=\{(w,i)\mid w\in W\}$ и определим на нем операцию умножения по правилу $(w_1,i)(w_2,i)=(w_1w_2,i)$, где $w_1,w_2\in W$. Понятно, что относительно этого умножения W_i является группой, изоморфной W. Пусть V — прямое произведение всех групп W_i, $i\in I$. Легко проверить, что следующие правила определяют действие G на V:

(а) если $v=w_i$ — элемент из W_i, т. е. $w_i=(w,i)$, где $w\in W$, $i\in I$ и g — элемент группы G, то $w_ig=w_k=(u,k)$, где $g_ig=hg_k$, $h\in H$, $k\in I$ и $u=wh\in W$;

(б) если $v=w_{i_1}\dots w_{i_n}$, где $w_{i_j}\in W_{i_j}$, $i_j\in I$ и g — элемент из G, то $vg=(w_{i_1}g)\dots(w_{i_n}g)$.

Это действие очевидным образом обобщает операцию индуцирования, хорошо известную в теории представлений конечных групп. В дальнейшем будем называть его *индуцированным действием G на $V=W^G$*. Из результата В.П. Шункова [3, теорема 2] вытекает

Лемма 1. *2-группа с единственной инволюцией является локально циклической или локально кватернионной группой и, в частности, локально конечна.*

Короткое доказательство леммы 1 см., например, в [2, лемма 4].

Лемма 2 (см., например, [2, лемма 9]). *Пусть G — периодическая группа, действующая свободно на абелевой группе. Если G содержит инволюцию, то эта инволюция единственна в G. В частности, если G — 2-группа, то верно одно из следующих утверждений*:
1. *G — циклическая группа.*
2. *G — кватернионная группа.*
3. *G изоморфна $C(2)$ или $Q(2)$.*

Лемма 3. *2-группа G с единственной инволюцией обладает нетривиальным автоморфизмом простого нечетного порядка p тогда и только тогда, когда G — группа кватернионов порядка 8 и $p=3$.*

Доказательство. Если $G=\langle a,b\rangle$ — группа кватернионов порядка 8, то отображение $a\to b$, $b\to ab$ продолжается до автоморфизма порядка 3 группы G.

Пусть теперь G — произвольная 2-группа с единственной инволюцией, α — ее автоморфизм нечетного порядка p. По лемме 1 группа G локально конечна. Пусть $g\in G$ и $g^\alpha\neq g$. Тогда g принадлежит конечной α-инвариантной подгруппе K. Понятно, что K — нециклическая группа, поскольку группа автоморфизмов циклической группы порядка 2^n имеет порядок 2^{n-1} и не содержит элементов нечетного порядка. Следовательно, K — кватернионная группа. По теореме Бернсайда о базисе [9, теорема 12.2.1] α нетривиально переставляет максимальные подгруппы группы K. Так как K — двупорожденная 2-группа, то она содержит точно 3 максимальные подгруппы, поэтому $p = 3$. И поскольку только в группе кватернионов порядка 8 все максимальные подгруппы изоморфны, то $G \simeq Q_8$. Лемма доказана.

Лемма 4 [2, теорема 2]. *Пусть G — периодическая группа, все конечные 2-подгруппы которой циклические или диэдральные. Если ни один из нетривиальных элементов нечетного порядка не сопряжен в G со своим обратным, то все 2-элементы из G составляют нормальную 2-подгруппу, которая либо конечна, либо изоморфна $C(2)$, либо изоморфна $D(2) = \langle d, C(2) \mid d^2 = 1,\ a_i^d = a_i^{-1},\ i = 1, 2, \ldots\rangle$.*

2. Предварительные леммы

Для группы G через $\Omega(G)$ обозначим подгруппу, порожденную всеми элементами простых порядков из G.

Лемма 5. *Если G — периодическая группа и $H = \Omega(G)$ действует свободно на группе W, то G действует свободно на группе $V = W^G$.*

Доказательство. Предположим, что $vg = v$ для некоторых $v \in V$ и $1 \neq g \in G$. Тогда $vh = v$ для некоторого нетривиального элемента h из H, являющегося степенью элемента g. Пусть $v = w_{i_1} \ldots w_{i_n}$, где $w_{i_j} \in W_{i_j}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ и все индексы i_j попарно различны. Тогда $w_{i_j} = (w_j, i_j)$, где $w_j \in W$, $i_j \in I$, и $w_{i_j}h = (w_jh', k)$, где $g_{i_j}h = h'g_k$, $h' \in H$, $k \in I$. Поскольку подгруппа H нормальна в G и $h \in H$, то $k = i_j$, $h' = g_{i_j}hg_{i_j}^{-1} \neq 1$ и $w_{i_j}h = (w_jh', i_j)$. Из $v = vh = (w_{i_1}h) \ldots (w_{i_n}h)$ заключаем, что $w_j = w_j(g_{i_j}hg_{i_j}^{-1})$ для всех j, и поскольку H действует на W свободно, то все w_j и, следовательно, v тривиальны. Лемма доказана.

Отметим, что эта лемма по существу была доказана в [5, лемма 2].

Следующая лемма, по-видимому, известна, но мы затрудняемся дать точную ссылку.

Лемма 6. *Пусть α — автоморфизм порядка 2 группы G. Если для любого $g \in G$ элемент $g^{-1}g^{\alpha}$ имеет нечетный порядок, то $G = CN$, где $C = \{x \in G \mid x^{\alpha} = x\}$, $N = \{x \in G \mid x^{\alpha} = x^{-1}\}$. В частности, если $C = 1$, то $N = G$ и G коммутативна.*

Доказательство. Для $g \in G$ положим $a = g^{-1}g^{\alpha}$. Очевидно, что $a \in N$. По условию порядок элемента a — нечетное число $m = 2k + 1$. Пусть $b = a^k$. Ясно, что $b \in N$ и $b^2 = a^{-1}$. Положим $c = gb^{-1}$. Тогда $c^{\alpha} = g^{\alpha}b = gab$ и $c^{\alpha}c^{-1} = gab^2g^{-1} = 1$. Таким образом, элемент $c^{\alpha} = c$ принадлежит C и $g = cb \in CN$.

Если $C = 1$, то $G = N$ и для любых $x, y \in G$ выполняются равенства $x^{\alpha} = x^{-1}$, $y^{\alpha} = y^{-1}$ и

$$yx = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = (x^{\alpha}y^{\alpha})^{\alpha} = xy.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — $\{2, 3\}$-группа, действующая свободно на абелевой группе. Тогда либо $\Omega(G) \simeq SL_2(3)$, либо $\Omega(G)$ — циклическая группа.*

Доказательство. Лемма вытекает из [6, теорема 3] и [5, теорема 1].

Лемма 8. *Периодическая группа G, для которой $\Omega(G) \simeq SL_2(3)$, конечна.*

Доказательство. Положим $N = \Omega(G)$. Достаточно показать, что $C_G(N) \leq N$. Предположим противное. Пусть c — p-элемент $C_G(N) \setminus N$ и $c^p \in N$. Тогда $c^p \neq 1$, $\langle c^p \rangle \leq Z(N)$ и $p = 2$. Отсюда для любого элемента t порядка 4 из N подгруппа $\langle c, t\rangle$ абелева и нециклическая вопреки условию. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — бесконечная локально конечная $\{2,3\}$-группа, действующая свободно на абелевой группе. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

1. *G — локально циклическая группа.*

2. *G — прямое произведение локально циклической 3-группы на локально кватернионную группу.*

3. *G — полупрямое произведение локально циклической 3-группы $C = C(3)$ на циклическую 2-группу $\langle b\rangle$, где $b^2 \neq 1$ и $a^b = a^{-1}$ для любого $a \in C$.*

4. *G — полупрямое произведение локально циклической 3-группы R на локально кватернионную группу Q, в котором $|Q : C(R)| = 2$.*

Доказательство. Пусть P — силовская 3-подгруппа из G. Ввиду леммы 2 можно считать, что $P \neq 1$. Поскольку любая конечная подгруппа из P циклическая, то P — локально циклическая группа. Покажем, что P нормальна в G. Предположим противное. Пусть $x \in P$ и $x^g \notin P$ для некоторых $x, g \in G$. Тогда $\langle x, g\rangle$ — конечная группа с неинвариантной силовской 3-подгруппой. Отсюда следует (см., например, [4, теорема 4]), что либо силовская 2-подгруппа из G нормальна в G, либо $\Omega(G) \simeq SL_2(3)$ и G конечна по леммам 3 и 8 вопреки условию.

Теперь заключение леммы вытекает из того, что силовская 2-подгруппа в G — локально циклическая или локально кватернионная группа, а $\Omega(G)$ — циклическая группа. Лемма доказана.

3. Примеры и свойства групп $Q(p^\alpha)$ и $Q(p^\alpha, d)$

Лемма 10. (а) *Для любого нечетного простого числа p и любого натурального числа a существует группа типа $Q(p^a)$.*

(б) *Для любого нечетного простого числа p и любых натуральных чисел a и d существует группа типа $Q(p^a, d)$.*

(в) *Для любого нечетного простого числа p и любого натурального числа a существует группа типа $Q(p^a, \infty)$.*

Доказательство. Пусть $n = p^s > 665$, $m \geq 2$ и $G = A(m, n)$ — группа, определенная в [7, гл. VII, §1]. Как показано в этой главе, $Z(G) = \langle z\rangle$ — бесконечная циклическая группа, $Z(G) \leq G'$, $G/Z(G) \simeq B(m, n)$ и любые две циклические подгруппы из G пересекаются нетривиально.

(а) Пусть $P = G/\langle z^{p^a}\rangle$. Покажем, что P — группа типа $Q(p^a)$. По [7, гл. VII, § 1, теорема 1.8] конечные подгруппы группы $B(m, n)$ — не локально конечной m-порожденной свободной группы периода $n \geq 665$ — являются конечными циклическими группами. Следовательно, если K — нетривиальная конечная подгруппа группы P, то ее полный прообраз A в G порождается элементом z и подходящим элементом $x \in G \setminus Z(G)$. В силу свойств группы $A(m, n)$ подгруппа $A = \langle z, x\rangle$ есть абелева группа без кручения, и поскольку каждая неединичная подгруппа из A имеет нетривиальное пересечение с $\langle z\rangle$, то по основной теореме о конечно порожденных абелевых группах группа A циклическая. Значит, $A/\langle z^{p^a}\rangle$ — циклическая p-группа порядка p^r, где $a < r \leq a+s$, а подгруппа $A/\langle z^{p^a}\rangle$ порождена элементом $x\langle z^{p^a}\rangle$ и содержит подгруппу $\langle z\rangle/\langle z^{p^a}\rangle$. Отсюда следует, что центр $Z(P)$ группы P — циклическая группа $\langle z\rangle/\langle z^{p^a}\rangle$ порядка p^a и любая конечная подгруппа из P является циклической, т. е. P является группой типа $Q(p^a)$.

(б) Если в доказательстве п. 1 леммы положить $P = G/\langle z^{p^a 2^d}\rangle$, то те же рассуждения показывают, что P — группа типа $Q(p^a, d)$.

(в) Пусть $n = p^t > 10^{10}$, $m \geq 2$ и H — свободная группа ранга m многообразия, заданного тождеством $x^n y = y x^n$. Как вытекает из [8, следствие 31.1 и теорема 31.2], существует фактор-группа G группы H, обладающая следующими свойствами.

1. $Z(G) \leq G'$ и $Z(G)$ — свободная абелева группа счетного ранга.

2. $G/Z(G) \simeq B(m,n)$.

3. В $Z(G)$ найдется подгруппа A такая, что $G/A \simeq A(m,n)$.

В силу последнего свойства в $Z(G)$ найдется подгруппа N, для которой G/N — группа типа $Q(p^a)$. Далее, как свободная абелева группа счетного ранга $Z(G)$ обладает подгруппой M такой, что группа $Z(G)/M$ изоморфна квазициклической 2-группе $C(2)$. Понятно, что $G/N \cap M$ — группа типа $Q(p^a, \infty)$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть G — группа типа $Q(p^a)$. Тогда*

(а) $|\Omega(G)| = p$;

(б) $\mathrm{Aut}(G)$ *не содержит инволюций*;

(в) *каждая нецентральная циклическая подгруппа группы G содержит $Z(G)$ и каждая неабелева подгруппа из G является группой типа $Q(p^b)$ для подходящего натурального числа $b \geq a$*;

(г) *G не изоморфна нетривиальному центральному произведению двух групп*;

(д) *G действует свободно на некоторой абелевой группе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт (а) очевиден.

(б) Предположим, что a — инволюция из $\mathrm{Aut}(G)$. Воспользуемся леммой 6, сохранив ее обозначения. Поскольку $G \neq C$, то $N \neq 1$. Пусть g — нетривиальный элемент из N. По (а) $\Omega(G) = \langle z \rangle$ и порядок z равен p. Очевидно, что $z \in \langle g \rangle$ и, значит, $z^a = z^{-1}$. Предположим, что $C \neq 1$ и x — нетривиальный элемент из C. Тогда $z \in \langle x \rangle$ и $z \in C$, что не так. Следовательно, $C = 1$. По лемме 6 G абелева, что противоречит определению группы типа $Q(p^a)$. Пункт (б) доказан.

(в) Для каждого $g \in G \setminus Z(G)$ подгруппа $\langle Z(G), g \rangle$ локально конечна и в силу определения группы типа $Q(p^a)$ является циклической. Следовательно, $Z(G) \leq \langle g \rangle$, в частности, каждая некоммутативная подгруппа P из G содержит $Z(G)$. Допустим, что $Z(P)$ — квазициклическая группа $C(p)$. Выберем элементы $x \in P \setminus Z(P)$ и $y \in Z(P)$ одинакового порядка p^k. Тогда абелева подгруппа $\langle x, y \rangle$ конечна, содержит различные циклические подгруппы $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ порядка p^k и потому не является циклической, что противоречит свойствам группы G. Следовательно, $Z(P)$ — конечная циклическая группа порядка p^b для подходящего натурального числа $b \geq a$ и P — группа типа $Q(p^b)$.

(г) Предположим, что утверждение неверно и G — произведение двух коммутирующих подгрупп A и B, ни одна из которых не совпадает с G. Ввиду п. (в) можно считать, что $A \cap B = Z(G)$. Выберем элементы $x \in A \setminus Z(G)$, $y \in B \setminus Z(G)$ одинакового порядка. Тогда $\langle x, y, Z(G) \rangle$ — нециклическая конечная подгруппа вопреки определению группы типа $Q(p^a)$. Это доказывает п. (г).

(д) Так как мультипликативная группа любого поля действует свободно на его аддитивной группе, то группа порядка p действует свободно на аддитивной группе поля комплексных чисел и любого поля, мультипликативная группа которого содержит элемент порядка p. Теперь п. (д) вытекает из леммы 5. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть P — не локально конечная p-группа, для которой $|\Omega(P)| = p$. Тогда P — группа типа $Q(p^a)$ для подходящего натурального числа a.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\Omega(P) = \langle r \rangle$, где r — элемент порядка p. По лемме 1 $p \neq 2$. Поскольку $\langle r \rangle$ — единственная в P подгруппа порядка p, то по [9, теорема 12.5.2] любая конечная подгруппа в P является циклической группой. Очевидно, $r \in Z = Z(P)$ и Z — коммутативная группа с единственной подгруппой порядка p, поэтому Z — либо циклическая группа, либо группа типа p^∞, т. е. группа, изоморфная $C(p) = \langle a_0, a_1, \ldots \mid a_0^p = 1, a_{i+1}^p = a_i \ \text{ для } i \geq 0 \rangle$. Если Z — циклическая группа порядка p^a, то P удовлетворяет условиям, определяющим группу типа $Q(p^a)$. Предположим, что $Z \simeq C(p)$. Поскольку Z — локально конечная группа, то $Z \neq P$. Пусть $x \in P \setminus Z$. Тогда $Z_1 = \langle x, Z \rangle$ — абелева группа и, как выше, $Z_1 \simeq C(p)$. Но поскольку все собственные подгруппы в $C(p)$ конечны, то $Z_1 = Z$, что противоречит выбору x. Лемма доказана.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Omega(G)$ — циклическая группа. В силу леммы 1 G содержит элемент r нечетного простого порядка p, и ввиду условий теоремы подгруппа $\langle r \rangle$ нормальна в G. Пусть $C = C_G(r)$. Тогда подгруппа C нормальна в G и, поскольку G/C конечна, то C не локально конечна. Пусть S — силовская 2-подгруппа в C. Если $S = 1$, то по лемме 12 G — группа типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a и по лемме 11 $G = C$, т.е. выполнен п. 1 заключения теоремы 2.

Пусть $S \neq 1$ и t — единственная инволюция в C (лемма 2). Ввиду той же леммы 2 в $C/\langle t \rangle$ любая конечная подгруппа является циклической или диэдральной группой, и по лемме 4 S нормальна в C. Так как по лемме 1 S — локально конечная группа, то C/S — не локально конечная p-группа с единственной подгруппой порядка p. По лемме 12 C/S — группа типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a. Понятно, что S нормальна в G, и в силу леммы 11 $C = G$.

Пусть P — подгруппа, порожденная всеми p-элементами из G. Понятно, что $G = PS$ и $P \cap S \leq Z(P) \cap [P, P]$, поскольку иначе $\overline{P} = P/[P, P]$ содержит нетривиальную 2-подгруппу, которая выделяется в $\overline{P}$ прямым сомножителем, что противоречит определению группы P.

Пусть $G = SC_G(S)$. Легко проверить, что в этом случае G удовлетворяет одному из пп. 1–4 теоремы 2.

Если, наконец, $G \neq SC_G(S)$, то в G есть p-элемент, действующий на S нетривиально. Учитывая лемму 2, приходим к выводу, что S — группа кватернионов порядка 8, $|G : SC_G(S)| = 3$, $p = 3$ и G удовлетворяет п. 5 теоремы 2.

Обратно, для любой группы G из пп. 1–5 теоремы 2 подгруппа $\Omega(G)$ циклическая. Теорема 2 доказана.

Отметим, что по лемме 10 любой из пп. 1–5 теоремы 2 реализуется.

Доказательство теоремы 1. Для конечной группы G теорема известна (см., например, [4, § 5, теоремы 1–3; 5, теорема 1]).

Пусть G — бесконечная $\{2, 3\}$-группа, действующая свободно на абелевой группе. Если G локально конечна, то заключение теоремы 1 следует из леммы 9. Пусть G не локально конечна. Тогда по леммам 7 и 8 подгруппа $\Omega(G)$ циклическая, и заключение 2 теоремы 1 вытекает из теоремы 2.

Обратно, пусть G — бесконечная не локально конечная группа из п. 2 доказываемой теоремы. Так как $\Omega(G)$ — циклическая группа, то по лемме 5 G может действовать свободно на подходящей абелевой группе. Теорема 1 доказана.

Авторы благодарны профессору А.Ю. Ольшанскому за консультацию о свойствах свободных групп многообразия, заданного тождеством $x^n y = y x^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jabara E., Mayr P.** Frobenius complements of exponent dividing $2^m \cdot 9$ // Forum Mathematicum. 2009. Vol. 21, no. 1. P. 217–220.
2. **Лыткина Д.В.** О периодических группах, действующих свободно на абелевых группах // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 379–387.
3. **Шунков В.П.** Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Vol. 9, № 4. P. 484–496.
4. **Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.** Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968. 112 с.
5. **Созутов А.И.** О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893–901.

6. **Журтов А.Х., Мазуров В.Д.** О группах Фробениуса, порожденных квадратичными элементами // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 3. С. 271–292.
7. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 335 с.
8. **Ольшанский А.Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. 446 с.
9. **Холл М.** Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.

Поступила 28.01.2013

Журтов Арчил Хазешович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Кабардино-Балкарский гос. университет
e-mail: archil@ns.kbsu.ru

Лыткина Дарья Викторовна
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры высшей математики
ФГОБУ ВПО "СибГУТИ"
e-mail: daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
советник РАН
e-mail: mazurov@math.nsc.ru

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
кафедры алгебры и математической логики
Сибирский федеральный университет
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУППАХ[1]

В. И. Зенков

В работе доказано, что в конечной неразрешимой симметрической или знакопеременной группе, за исключением группы S_8, для любой пары нильпотентных подгрупп найдется сопряженная с одной из них, которая в пересечении с другой дает единичную подгруппу.

Ключевые слова: нильпотентная подгруппа, симметрическая группа, знакопеременная группа.

V. I. Zenkov. On intersections of nilpotent subgroups in finite symmetric and alternating groups.

It is proved that, in a non-solvable finite symmetric or alternating group, for any pair of nilpotent subgroups, there exists a subgroup conjugate to one of them such that its intersection with the other subgroup is trivial, except for the group S_8.

Keywords: maximal nilpotent subgroup, symmetric group, alternating group.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — нильпотентные подгруппы в G. Рассмотрим множество M минимальных по включению пересечений вида $A \cap B^g$, где $g \in G$. Положим $\mathrm{Min}_G(A,B) = \langle M \rangle$. Подмножество m минимальных по порядку элементов из M порождает подгруппу $\mathrm{min}_G(A,B) = \langle m \rangle$. По определению подгруппа $\mathrm{Min}_G(A,B)$ содержит подгруппу $\mathrm{min}_G(A,B)$. В работе [1, теорема 1] было доказано, что в любой конечной группе G для любых абелевых подгрупп A и B группы G подгруппа $\mathrm{Min}(A,B)$ лежит в $F(G)$. В этой теореме отказаться от условия абелевости подгруппы A с сохранением заключения невозможно даже при условии цикличности подгруппы B. Пример группы $G \simeq S_4$, где $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$, а $B \simeq Z_4$, показывает, что в этом случае $\mathrm{Min}_G(A,B) = A \not\leq F(G)$. Тем не менее для любой простой неабелевой группы G и любых примарных подгрупп A и B из группы G имеем $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1 \leq F(G)$ [2, теорема 1]. Однако, уже для почти простой группы $G \simeq \mathrm{Aut}(A_8) \simeq S_8$ имеем $\mathrm{Min}_G(T,T) \not\leq F(G)$, где $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$ [3, теорема B1]. Для любых примарных подгрупп A и B неразрешимых симметрических и знакопеременных групп G при $G \neq S_8$ имеем $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1 \leq F(G)$ [2, теорема 2]. Целью настоящей работы является перенос этого результата на случай произвольных нильпотентных подгрупп A и B. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа, изоморфная A_n или S_n, $n \geq 5$, A и B — нильпотентные подгруппы в G и хотя бы одна из подгрупп A или B — не 2-группа в случае $G \simeq S_8$. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.

В частном случае $A = B$ теорема доказана в [5].

1. Обозначения и предварительные сведения

Наши обозначения в основном стандартны и следуют [7] . Термин сплетение означает в данной работе подстановочное сплетение. Пусть $\pi(n)$ — множество простых делителей целого числа n. Положим $\pi(H)= \pi(|H|)$ для конечной группы H.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, G_1, A и B — подгруппы из G такие, что G_1 содержит A. Если $G_2 \trianglelefteq G_1$ и $G_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в факторгруппе $\overline{G}_1 = G_1/G_2$ имеем $\overline{A} \cap (\overline{G_1 \cap B^g})^{\overline{g}_1} = \overline{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \cap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2.*

Доказательство. Допустим, что $A \cap B^{gg_2} \neq 1$ для некоторого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2. Так как $G_2 \cap B^g = 1$, то и $G_2 \cap B^{gg_2} = G_2^{g_2} \cap B^{gg_2} = (G_2 \cap B^g)^{g_2} = 1$ в силу нормальности G_2 в G_1. Следовательно, $A \cap G_2 \cap B^{gg_2} \leq G_2 \cap B^{gg_2} = 1$. Так как $A \cap B^{gg_2} \neq 1$, $A \leq G_1$ и $G_2 \cap B^{gg_2} = 1$, то $\overline{A \cap B^{gg_2}} \neq \overline{1}$. Но $\overline{A \cap B^{gg_2}} = \overline{A \cap B^{gg_2} \cap G_1} = \overline{A \cap (G_1 \cap B^{gg_2})} \leq \overline{A} \cap (\overline{G_1 \cap B^{gg_2}}) = \overline{A} \cap (\overline{G_1^{g_2} \cap B^{gg_2}}) = \overline{A} \cap \overline{(G_1 \cap B^g)^{g_2}} = \overline{A} \cap (\overline{G_1 \cap B^g})^{\overline{g}_1} = \overline{1}$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2 [1, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G. Тогда*

$$\mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G).$$

Лемма 3 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, A и B — примарные подгруппы из G. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Лемма 4 [2, теорема 2]. *Пусть G — конечная группа, изоморфная симметрической группе S_n, $n \geq 5$, $n \neq 8$, A и B — примарные подгруппы из G. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Лемма 5 [6, § 34, теорема 1]. *Пусть N — транзитивная нильпотентная подгруппа в S_n. Если n — степень простого числа p, то N является p-подгруппой. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n, то $N = N_1 \times \cdots \times N_k$, где каждая подгруппа N_i является p_i-группой, транзитивной на $p_i^{\alpha_i}$ точках, и подгруппа N изоморфна подгруппе подстановочного сплетения $S_{p_i}^{\alpha_i} \wr S_{n/p_i^{\alpha_i}}$.*

Лемма 6 [6, § 35, теорема 1]. *Пусть N — интранзитивная подгруппа из S_n. Тогда число n можно представить в виде суммы $n = n_1 + \cdots + n_k$, где $k > 1$ и $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$, так, что $N \leq N_1 \times \cdots \times N_k$, где N_i — транзитивная на n_i точках нильпотентная подгруппа из S_n. В частности, $N \leq S_{n_1} \times S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_k}$.*

Лемма 7. *Пусть $G \in \{S_5, S_6, A_5, A_6\}$ и A и B — нильпотентные подгруппы в G. Тогда*

$$\mathrm{Min}_G(A, B) = 1.$$

Доказательство. Из лемм 5 и 6 следует, что максимальная нильпотентная подгруппа из G — абелева группа или 2-группа.

Если A и B обе абелевы, то утверждение леммы следует из леммы 2. Если же одна из подгрупп A или B является 2-подгруппой, то утверждение леммы следует из леммы 3. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $G \in \{A_7, S_7\}$ и A и B — нильпотентные подгруппы в G. Тогда*

$$\mathrm{Min}_G(A, B) = 1.$$

Доказательство. Пусть $A \leq N$, где N — максимальная нильпотентная подгруппа из S_7. Так как 7 — простое число, то по лемме 5 транзитивной в S_7 может быть только 7-подгруппа и в этом случае утверждение леммы следует из леммы 2. Если A — интранзитивная подгруппа, то рассмотрим описанные в лемме 6 различные разбиения числа 7 вида $7 = 1 + \ldots$, $7 = 2 + \ldots$, $7 = 3 + \ldots$, согласно которым по лемме 6 подгруппа N лежит в подгруппе $G_1 \simeq Z_k \times S_{4-k}$ группы G, где $k = 1, 2, 3$. Если k=1, то по лемме 6 имеем $A < Z_1 \times S_6$. Таким образом, $A \leq S_6$, и утверждение леммы следует из леммы 7. Если k=2, то подгруппа N

лежит в подгруппе $G_1 \simeq Z_2 \times S_5$ из S_7. По теореме Бэра — Судзуки [4, теорема 2] $C_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента $g \in G$, и в факторгруппе $\overline{G_1} = G_1/C_2$ по лемме 7 имеем $\overline{A} \cap (\overline{G_1 \cap B^g})^{\overline{h}} = \overline{1}$ для некоторого элемента $h \in G_1$. Тогда по лемме 1 имеем $A \cap B^{gh} = 1$. Если k=3, то подгруппа N лежит в подгруппе $G_1 \simeq Z_3 \times S_4$ группы G. По лемме 2 хотя бы одна из подгрупп A или B неабелева, а по лемме 3 обе подгруппы A и B непримарны. Следовательно, обе подгруппы A и B являются {2,3}-группами, и по крайней мере одна из них, скажем, A неабелева. Следовательно, $A \simeq Z_3 \times D_8$. Так как подгруппа B может быть рассмотрена аналогично подгруппе A, то достаточно доказать лемму для случая, когда и B неабелева. Поэтому, согласно лемме 6, можно считать, что с точностью до сопряженности подгруппы A и B лежат в подгруппе $G_1 \simeq Z_3 \times S_4$ и $B \simeq Z_3 \times D_8$. Так как $G_2 := O_{\{2,3\}}(G_1)$ — абелева группа, то по лемме 2 имеем $G_2 \cap G_2^x = 1$ для некоторого элемента x из G. Но тогда можно считать, что $G_2 \cap B^x = 1$. Действительно, так как $B \leq G_1$, то $B^x \leq G_1^x$. Но $G_2 \cap G_2^x = 1$, и в факторгруппе $\overline{G_1^x} = G_1^x / G_2^x \simeq S_3$ выполняется условие леммы 1. Следовательно, $G_2 \cap B^{x_1} = 1$ для некоторого элемента x_1 из G_1^x. Теперь мы покажем, что $A \cap B^t = 1$ для некоторого элемента t из G. Действительно, $G_2 \cap B^x = 1$, а в факторгруппе $\overline{G}_1 = G_1/G_2 \simeq S_3$ имеем $\overline{A} \cap (\overline{G_1 \cap B^x})^{\overline{h}} = \overline{1}$ для некоторого элемента $h \in G_1$. Но тогда по лемме 1 имеем $A \cap B^{xh} = 1$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $G \in \{A_8, S_8\}$ и A и B — нильпотентные подгруппы из G, а в случае $G = S_8$ хотя бы одна из них — не 2-группа. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Доказательство. Так как $8 = 2^3$, то по лемме 5 транзитивная нильпотентная подгруппа из S_8 является 2-подгруппой. Итак, пусть A — транзитивная подгруппа. Тогда по условию леммы B — не 2-группа. Следовательно, по лемме 6 подгруппа B лежит в интранзитивной нильпотентной подгруппе N, соответствующей некоторому разбиению $8 = 1 + \ldots$, $8 = 2 + \ldots$, $8 = 3 + \ldots$, $8 = 4 + \ldots$.

В случае $8 = 1 + \ldots$ подгруппа B лежит в подгруппе S_7 из G, и утверждение леммы следует из леммы 8. В случае $8 = 2 + \ldots$ подгруппа B лежит в подгруппе $G_1 \simeq Z_2 \times S_6$ из G. По теореме Бэра — Судзуки $C_2^g \not\leq A$ для некоторого элемента g из G, и по лемме 7 в факторгруппе $\overline{G_1^g} = G_1^g / G_2^g$ имеем $(\overline{A \cap G_1^g}) \cap \overline{B^{\overline{gh}}} = \overline{1}$ для некоторого элемента $h \in G_1^g$. По лемме 1 $A \cap B^{gh} = 1$.

Если $8 = 3 + \ldots$, то B лежит в подгруппе $G_1 \simeq Z_3 \times S_5$ из G. Так как $Z_3 \cap A = 1$, то как и выше, по лемме 1 имеем $A \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G.

Если $8 = 4 + \ldots$, то подгруппа B лежит в подгруппе $G_1 \simeq S_4 \times S_4$ из G. По условию она непримарна, поэтому снова достаточно доказать лемму для максимальной B, которая изоморфна $D_8 \times C_3 \leq S_7$, что уже было рассмотрено в лемме 8.

Если A интранзитивна, то A лежит в некоторой максимальной интранзитивной нильпотентной подгруппе N, соответствующей разбиению $8 = 1 + \ldots$, $8 = 2 + \ldots$, $8 = 3 + \ldots$, $8 = 4 + \ldots$.

Если $8 = 1 + \ldots$, то A лежит в подгруппе $G_1 \simeq S_7$ группы G и утверждение леммы следует из леммы 8.

Если $8 = 2 + \ldots$, то A лежит в подгруппе $G_1 \simeq Z_2 \times S_6$ группы G. По теореме Бэра — Судзуки $C_2 \not\leq B^g$ для некоторого элемента g из G, и по лемме 7 в факторгруппе $\overline{G_1} = G_1/C_2 \simeq S_6$ имеем $\overline{A} \cap (\overline{G_1 \cap B^g})^{\overline{h}} = \overline{1}$ для некоторого элемента h из G_1. Следовательно, по лемме 1 имеем $A \cap B^{gh} = 1$.

Если $8 = 3 + \ldots$, то A лежит в подгруппе $G_1 \simeq S_3 \times S_5$ группы G_1, и аналогично предыдущему $A \cap B^{gh} = 1$ для некоторых элементов g и h из G.

Если $8 = 4 + \ldots$, то $A \simeq D_8 \times D_8$ и B — не 2-группа по условию леммы. Но эта ситуация аналогична уже рассмотренной в лемме выше, когда A транзитивна. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $G \in \{A_n, S_n\}$, где $n \in \{12, 24\}$, и A и B — нильпотентные подгруппы в G, причем A — транзитивная подгруппа из G. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 5 подгруппа A лежит в подгруппе $M \simeq S_m \wr S_3$ группы G для $m \in \{4, 8\}$ в случае $G = S_n$ и в подгруппе M_1 индекса 2 в M в случае $G = A_n$. Более того, подгруппа А лежит в подгруппе $G_1 = G_2 \times G_3$, где G_2 изоморфна Z_2 или Z_3, факторгруппа $\overline{G}_1 = G_1/G_2$ изоморфна S_4 или S_8 и подгруппа A непримарна по лемме 4. Если $G_2 \simeq Z_2$, то ввиду лемм 4 и 9 в факторгруппе $\overline{G}_1$ выполняются условия леммы 1 и, следовательно, $G_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. По лемме 1 получаем $A \cap B^x = 1$ для некоторого элемента x из G. Если $G_2 \simeq Z_3$, то в факторгруппе $\overline{G}_1$ не выполняются условия леммы 1 только в случае, когда факторгруппа $\overline{G}_1 = G_1/G_2$ изоморфна S_4 или S_8 и $\overline{A}$ является 2-группой. Пусть P — силовская 2-подгруппа из базы T сплетения $S_m \wr S_3$ в случае симметрической группы и P_1 – силовская 2-подгруппа из $T \cap M_1$, содержащая $O_2(A)$, в случае знакопеременной группы. Тогда по аргументу Фраттини можно считать, что элемент f порядка 3 из A лежит в $G_2 = O_3(A)$. По лемме 4 имеем $P \cap B^g = 1$ или $P_1 \cap B^g = 1$ соответственно для некоторого элемента g из G. Так как $O_3(A)$ действует нетривиально на $Z(P)$ и $m \in \{4, 8\}$, то в $Z(P)$ найдется элемент h такой, что $O_3(A) \cap O_3(A)^h = 1$. Следовательно, в случае $A \cap B^g = 1$, утверждение леммы справедливо, а в случае $A \cap B^g = O_3(A)$ имеем $A \cap B^{gh} = 1$, и снова утверждение леммы справедливо. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы будем вести индукцией по порядку группы G. Итак, пусть G — контрпример к теореме и порядок G при этом минимален. Выберем среди всех пар нильпотентных подгрупп, для которых нарушается заключение теоремы, пару A, B так, чтобы число $|A||B|$ было минимальным.

Лемма 11. $n \geq 9$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из лемм 7–9. Лемма доказана.

Лемма 12. $\pi(A) = \pi(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\pi(A) \neq \pi(B)$, то $D = A \cap B^g = A \cap (O_{\pi(A)}(B))^g$ для некоторого элемента g из G. Так как $|O_{\pi(A)}(B)| < |B|$, то минимальность числа $|A||B|$ влечет, что $A \cap (O_{\pi(A)}(B))^x = 1$ для некоторого элемента x из G. Но тогда и $A \cap B^x = 1$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 13. *Хотя бы одна из подгрупп A или B неабелева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что обе подгруппы A и B абелевы. Тогда по лемме 2 имеем $\mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G) = 1$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 14. *Каждая из подгрупп A и B не является примарной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что хотя бы одна из подгрупп примарна. Тогда по лемме 12 имеем $\pi(A) = \pi(B)$, и по лемме 4 получаем, что $A \cap B^g = 1$ для некоторого элемента $g \in G$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 15. *Подгруппа A действует без неподвижных точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что подгруппа A фиксирует некоторую точку. Тогда A лежит в стабилизаторе S в G этой точки, который изоморфен S_{n-1} или A_{n-1} соответственно. Если при этом $n - 1 \neq 8$, то по индукции $A \cap (S \cap B)^t = 1$ для некоторого элемента t из S. Но $1 = A \cap (S \cap B)^t = A \cap S^t \cap B^t = A \cap B^t$, противоречие. Если $n - 1 = 8$, то $n = 9$, и по лемме 14 подгруппа A непримарна. Следовательно, по лемме 9 G — не контрпример к теореме.

Лемма доказана.

Лемма 16. *Подгруппа A интранзитивна.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы ложно и A — транзитивная подгруппа из S_n.

Если n — степень простого числа, то по лемме 5 подгруппа A примарна и по лемме 14 G — не контрпример к теореме.

Итак, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $k > 1$, где $p_1, \dots, p_k$ — попарно различные простые числа. Поэтому без ограничения общности можно считать, что p_1 — нечетное простое число. Пусть $n' = p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Тогда по лемме 5 можно считать, что подгруппа A содержится в подстановочном сплетении $S_{p_1^{\alpha_1}} \wr S_{n'}$. Более того, $A \leq D \times S_{n'}$, где D — диагональ этого сплетения и, следовательно, $D \simeq S_{p_1^{\alpha_1}}$. Поэтому, если хотя бы одна из подгрупп $S_{p_1^{\alpha_1}}$ или $S_{n'}$ удовлетворяет заключению теоремы, например, $S_{n'}$, то, полагая $A_1 = \cap D$, по лемме 14 получаем $|A_1| \leq |A|$. Поэтому для подгруппы $G_1 = A_1 \times S_{n'}$ в силу выбора числа |A||B| выполняются условия леммы 1, т. е. G — не контрпример к теореме. Если в подгруппах $S_{p_1^{\alpha_1}}$ и $S_{n'}$ не выполняются условия теоремы, то нечетность числа p_1 влечет, что $p_1^{\alpha_1} = 3$. Леммы 7–9 влекут тогда, что $n' \in \{4, 8\}$. Следовательно, $G \in \{S_n, A_n\}$, где $n \in \{12, 24\}$, и по лемме 10 G — не контрпример к теореме.

Лемма доказана.

Лемма 17. *G — не контрпример к теореме.*

Доказательство. По лемме 16 подгруппа A интранзитивна, а по лемме 15 она действует без неподвижных точек. По лемме 6 имеем $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, где k>1, n_i — длина i-й A-орбиты, $A \leq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$, где A_i — транзитивная на i-й A-орбите нильпотентная подгруппа из G. Пусть $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$. Тогда $n = n_1 + n'$ и по лемме 11 имеем $n_1 + n' \geq 9$. Если в S_{n_1} или в $S_{n'}$ любая пара нильпотентных подгрупп удовлетворяет заключению теоремы, то в силу выбора подгрупп A и B для подгруппы $G_1 \in \{A \cap S_{n_1}, A \cap S_{n'}\}$ имеем $G_1 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Тогда по лемме 1 G — не контрпример к теореме. Поэтому в S_{n_1} и в $S_{n'}$ не выполняется заключение теоремы и, следовательно, $n' = 8$, откуда ввиду лемм 14 и 15 имеем $n_1 = 3$. Таким образом, $G \in \{A_{11}, S_{11}\}$. Без ограничения общности можно считать, что первая A-орбита равна $\{1, 2, 3\}$, а остальные A-орбиты принадлежат множеству $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Если $O_3(A) \cap B^g = 1$ для любого элемента g из G, то по лемме 9 подгруппа $O_{3'}(A)$ является 2-группой. По леммам 12 и 13 подгруппы $O_{3'}(A)$ и $O_{3'}(B)$ — 2-группы, причем хотя бы одна из них неабелева. Тогда лемме 4 имеем $O_2(A) \cap O_2(B)^x = 1$ для некоторого элемента x из G и, следовательно, G — не контрпример к теореме. Поэтому $O_3(A) \cap B^g \neq 1$ для некоторого элемента g из G и, следовательно, $O_3(A) = O_3(B)^g$, откуда $O_{3'}(B)^g \leq C_G(O_3(A))$. По лемме 12 подгруппа $O_{3'}(B)$ является 2-группой. Следовательно, подгруппы $O_2(A)$ и $O_2(B)$ лежат в подгруппе из G, изоморфной S_8 и действующей естественно на множестве $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. По лемме 1 можно считать, что $O_2(A) \cap O_2(B)^x \neq 1$ для любого элемента x из этой подгруппы. Но в подгруппе из G, изоморфной S_9 и действующей естественно на множестве $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, по лемме 4 найдется элемент g такой, что $O_2(A) \cap O_2(B)^g = 1$. Кроме того, элемент g фиксирует символы $1, 2$ и сдвигает символ 3. Значит, $O_3(A) \cap O_3(B)^g = 1$. Поэтому $A \cap B^g = 1$ и G — не контрпример к теореме. Лемма доказана.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенков В.И.** Пересечение абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1996. Т. 1, № 2. С. 32–34.
2. **Зенков В.И., Мазуров В.Д.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.

3. **Зенков В.И.** Пересечение нильпотентных подгрупп в конечных подгруппах // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.
4. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
5. **Курмазов Р.К.** О пересечении сопряженных нильпотентных подгрупп в группах подстановок // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 98–104.
6. **Супруненко Д.А.** Группы подстановок. Минск: Наука и техника, 1996. 366 с.
7. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

Зенков Виктор Иванович
Поступила 5.03.2013
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: zenkov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.54

О ЛЕММЕ ДИЦМАНА[1]

Л. С. Казарин

Пусть H — подгруппа группы G, порожденная конечным G-инвариантным подмножеством $X = \bigcup_{i=1}^k C_i$, состоящим из элементов конечного порядка, где C_i — класс сопряженных элементов группы G с представителем a_i. Доказано, что

$$|H| \leq \prod_{i=1}^{k} o(a_i)^{|C_i|},$$

где $o(a_i)$ — порядок элемента $a_i \in C_i$. Для некоторых важных частных случаев получены лучшие оценки.

Ключевые слова: простая группа, группа лиева типа, спорадическая простая группа, квазипростая группа.

L. S. Kazarin. On Ditsman's lemma.

Let H be a subgroup of a group G generated by a finite G-invariant subset $X = \bigcup_{i=1}^k C_i$ that consists of elements of finite order, where C_i is the class of conjugate elements of G with representative a_i. We prove that

$$|H| \leq \prod_{i=1}^{k} o(a_i)^{|C_i|},$$

where $o(a_i)$ is the order of the element $a_i \in C_i$. Best estimates are obtained for some important special cases.

Keywords: simple group, Lie type group, sporadic simple group, quasisimple group.

Введение

А.П. Дицманом [4] доказано, что конечное G-инвариантное множество X, состоящее из элементов конечного порядка, порождает конечную нормальную подгруппу H группы G. В своей лекции на 42-й Всероссийской молодежной школе-конференции близ Екатеринбурга А.И. Созутов предположил, что имеется точная оценка

$$|H| \leq \prod_{i=1}^{k} o(a_i)^{|C_i|},$$

где $o(a_i)$ — порядок элемента $a_i \in C_i$.

В настоящей статье мы покажем, что справедливость предположения А.И. Созутова вытекает, фактически, из доказательства Дицмана, а также получим более точные оценки для некоторых важных частных случаев.

С использованием идеи Дицмана доказана

Теорема 1. *Пусть G — группа и X — конечное G-инвариантное подмножество G, состоящее из элементов конечного порядка, причем $X = \bigcup_{i=1}^k C_i$, где C_i — класс сопряженных элементов группы G с представителем a_i. Если $H = \langle X \rangle$, то*

$$|H| \leq \prod_{i=1}^{k} o(a_i)^{|C_i|},$$

где $o(a_i)$ — порядок элемента $a_i \in C_i$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469).

Следствие 1. *Пусть G — конечная простая группа и элемент $x \in G$ имеет порядок $m > 1$. Тогда $|G : C_G(x)| \geq \log_m |G|$. Если p — наибольшее простое число, делящее порядок группы G, то $k(G) \leq (|G|-1)/\log_p |G| + 1$, где $k(G)$ — классовое число группы G.*

Сплетение $G = C_m \wr K$ циклической группы $\langle a \rangle$ порядка m и группы K порядка k имеет подгруппу $H = \langle a^G \rangle$ порядка $m^k = o(a)^{|a^G|}$. Поэтому результат теоремы 1 неулучшаем в классе всех конечных групп.

Однако это не так для некоторых важных классов конечных групп, близких к простым неабелевым группам.

В разд. 2 все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Напомним, что почти простой называется группа G, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу N, являющуюся простой неабелевой группой. В этом случае G изоморфна подгруппе группы $Aut(N)$, содержащей $Inn(N)$. Если G — конечная группа, H — ее подгруппа и $x \in G$, то через $i_H(x)$ далее будет обозначаться индекс относительно H элемента $x \in G$, т. е. мощность множества $\{x^h \mid h \in H\}$ сопряженных с x при помощи H элементов группы G. В этом случае не предполагается, что $x \in H$. Число классов сопряженных элементов (классовое число) группы G обозначается через $k(G)$, а $n(G)$ — наименьшая степень точного подстановочного представления группы G. Обозначения простых неабелевых групп соответствуют принятым в [8]. Группа G, совпадающая со своим коммутантом, называется *квазипростой*, если $G/Z(G)$ — простая неабелева группа. Квазипростая группа G называется *накрывающей* группой для простой неабелевой группы $H \simeq G/Z(G)$. Любая конечная простая неабелева группа H допускает *универсальную накрывающую* конечную группу X, обладающую тем свойством, что всякая накрывающая группы H является гомоморфным образом X. Она обозначается через $\widehat{H}$. Центр группы $\widehat{H}$ называется *мультипликатором Шура* группы H (см. [3, с. 53]).

С использованием результатов из [10], опирающихся на классификацию конечных простых групп, получены следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть G — почти простая группа и $x \in G \setminus \{1\}$. Тогда $|G| < 2^{i_G(x)}$.*

Следствие 2. *Пусть G — почти простая группа. Тогда $k(G) \leq (|G|-1)/\log_2 |G| + 1$.*

Теорема 3. *Пусть G — накрывающая группа конечной простой неабелевой группы H. Тогда $|G| < 2^{i_G(x)}$ для любого $x \in G \setminus Z(G)$. Если $|G| > 2^{n(H)}$, то группа H изоморфна одной из следующих групп: A_n для $n \geq 5$, $L_2(7)$, M_i для $i \in \{11, 12, 23, 24\}$.*

1. Доказательство теоремы 1

Покажем сначала, что достаточно доказать теорему для случая конечной группы H, порожденной классом сопряженных элементов этой группы. В самом деле, по лемме Дицмана подгруппа H группы G, порожденная конечным нормальным подмножеством, состоящим из элементов конечного порядка, является конечной. Если элемент $x \in G$ таков, что подгруппа $\langle x^G \rangle$ конечна, то она нормальна в G и в H. Если $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — все классы сопряженных элементов группы H, на которые распадается класс $\langle x^G \rangle \subseteq H$, то каждый из классов C_i порождает в H нормальную подгруппу H_i, причем $\langle x^G \rangle = \prod_{i=1}^k H_i$. При этом $|\langle x^G \rangle| \leq \prod_{i=1}^k |H_i|$. Из справедливости оценки теоремы 1 для каждой из подгрупп H_i конечной группы H следует ее справедливость и для подгруппы $\langle x^G \rangle$. Действительно, если x_i — представитель класса C_i мощности m_i, то из $|H_i| \leq o(x_i)^{m_i}$ следует, что $|H| \leq \prod_{i=1}^s o(x_i)^{m_i} = o(x)^{\sum_{i=1}^s m_i} = o(x)^{i_G(x)}$. С другой стороны, если Y — конечное инвариантное подмножество группы G, порождающее конечную подгруппу $H \leq G$, то Y — объединение конечного числа классов сопряженных элементов группы H. Из справедливости оценки, указанной в теореме, для каждой подгруппы, порожденной классом сопряженных элементов группы H, следует ее справедливость и в группе G. Таким образом, задача сводится к случаю конечной группы G.

Пусть G — конечная группа, порожденная классом $C = x^G$ размера $i_G(x) = n$ и порядок элемента x равен m. Тогда $C = \{y_1, y_2 \dots, y_n\}$. Как и в доказательстве леммы Дицмана (см. [6, с. 338–339]), можно считать, что любой элемент $g \in G$ имеет запись вида $y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_n^{a_n}$, где $1 \le a_i \le m$.

В самом деле, пусть элемент $g \in G$ имеет запись $g = u_1 y_1 u_2 y_1 \dots u_t y_1 u_{t+1}$, где в записях элементов $u_1, u_2, \dots, u_{t+1}$ в алфавите $y_1, y_2, \dots, y_n$ элемент y_1 уже не встречается. Тогда $g = y_1(y_1^{-1} u_1 y_1) u_2 y_1 \dots u_t y_1 u_{t+1}$ и можно получить запись для g вида $g = y_1 u_1' y_1 \dots y_1 \dots u_t'$, где элементы $u_1' = y_1^{-1} u_1 y_1 u_2, u_2' = u_3, \dots, u_t' = u_{t+1}$ не содержат в своей записи элемента y_1. Действительно, элемент u_1 записывается словом в алфавите $y_2, \dots, y_n$. Поэтому $y_1^{-1} u_1 y_1$ является словом в алфавите $y_1^{-1} y_2 y_1, \dots, y_1^{-1} y_n y_1$. Этот алфавит по определению содержится в $\{y_1, \dots, y_n\}$. Однако $y_1^{-1} y_j y_1 \ne y_1$ при $j \ne 1$. Индукция по числу t позволяет получить запись для элемента g вида $g = y_1^t v$, где элемент v записывается в алфавите $\{y_2, \dots, y_n\}$. Применение индукции по числу n переменных позволяет получить искомую запись.

Но тогда число элементов в G не превосходит $m^n = o(y)^n$, и по предыдущему получаем заключение теоремы 1. Теорема доказана.

Как заметил автору рецензент, теорема 1 следует также из [1, задача 9.18].

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. Первая часть — частный случай теоремы 1. Пусть $k(G) = k$ и $h_1, \dots, h_{k-1}$ — все размеры классов сопряженных элементов группы G с представителями $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$, отличными от единицы. Применяя теорему 1, получаем, что для любых $x_i \in G$ и $y \in \langle x_i \rangle \setminus \{1\}$ справедливо неравенство $o(y)^{i_G(y)} \ge |G|$, причем $i_G(y) \le i_G(x_i) = h_i$. Тем более $o(y)^{h_i} \ge |G|$. Отсюда для всякого элемента x_i при $i \le k-1$ имеем $p^{h_i} \ge |G|$. Таким образом, $|G| - 1 = \sum_{i=1}^{k-1} h_i \ge (k-1) \log_p |G|$, откуда и следует утверждение. Следствие 1 доказано.

2. Доказательства теорем 2 и 3

Доказательствам теорем 2 и 3 предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть G — квазипростая группа и $H = G/Z(G)$. Тогда выполнены следующие утверждения*:

(i) *Если $H \simeq L_m(q)$, где $m > 2$ и $(m, q) \notin \{(3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$, то $(q^m - 1)/(q - 1) > \log_2 |G|$.*

(ii) *Если $H \simeq U_m(q)$, где $m > 4$ и $(m, q) \ne (6, 2)$, то $(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)/(q^2 - 1) > \log_2 |G|$.*

(iii) *Если $H \simeq S_{2m}(q)$ или $O_{2m+1}(q)$, где $m \ge 2, q \ge 3$ и $(m, q) \ne (3, 3)$, то $(q^{2m} - 1)/(q - 1) > \log_2 4|G|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Пусть выполнено предположение (i). Тогда порядок группы G делит число $q^N \prod_{i=2}^{m} (q^i - 1) < q^{m^2-1}$, где $N = m(m-1)/2$, и $\log_2 |G| < (m^2 - 1) \log_2 q$.

Допустим (от противного), что $(q^m - 1)/(q - 1) \le (m^2 - 1) \log_2 q$. Если $q = 2$ и $m \ge 3$, то $m = 3$ или $m = 4$. Если $q = 3$, то $(3^m - 1)/2 > (m^2 - 1) \log_2 3$ для всех $m \ge 3$. При $q \ge 4$ получаем

$$(q^m - 1)/(q - 1) \le \log_2 q (m^2 - 1).$$

Очевидно, $q^{m-2} \le m^2 - 1$ только при $q = 4, m = 3$. Но тогда $\log_2 q = 2$ и выполнено неравенство $(4^3 - 1)/(4 - 1) > (3^2 - 1) \log_2 4$.

(ii) Из [3, табл. 4.1] следует, что универсальным накрытием группы $U_m(q)$ при $m > 4$ и $(m, q) \ne (6, 2)$ служит группа $SU_m(q)$. Согласно [9] порядок G не превосходит q^{m^2}. Поэтому получаем неравенство

$$(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)/(q^2 - 1) = (q^m - 1)/(q - 1) \cdot (q^{m-1} - 1)/(q + 1) > m^2 \log_2 q \ge \log_2 |G|.$$

(iii) Из [3, табл. 4.1] следует, что универсальным накрытием группы $S_{2m}(q)$ при $(m, q) \ne (2, 2), (3, 2)$ и $(3, 3)$ служит группа $Sp_{2m}(q)$, а универсальным накрытием группы $O_{2m+1}(q)$

при тех же ограничениях служит группа $\Omega_{2m+1}(q)$. Порядок группы G в обоих случаях не превосходит q^{2m^2+m}. Отсюда

$$(q^{2m}-1)/(q-1) = (q^m-1)/(q-1)\cdot(q^m+1) > (2m^2+m)\log_2 q + 2 \geq \log_2 4|G|.$$

Так как $((2m^2+m)\log_2 q+2)/(q^m+1) < (m^2-1)\log_2 q$, то для $m \geq 3, (m,q) \neq (3,3)$ заключение следует из (i). Пусть $m = 2$. Тогда $(q^4-1)/(q-1) > 10\log_2 q + 2$ при $q \geq 3$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа и N — ее нормальная подгруппа. Если $x \in G$, то*

$$i_G(x) = i_N(x) i_{G/N}(xN)\delta,$$

где $\delta = \delta(x, N, G)$ — натуральное число. В частности, $i_N(x)$ и $i_{G/N}(xN)$ делят $|G|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливо следующее равенство:

$$|G : C_N(x)| = |G : C_G(x)N||C_G(x)N : N||N : C_N(x)| = |G : C_G(x)||C_G(x) : C_N(x)|.$$

Так как $C_G(x)N/N \simeq C_G(x)/C_N(x)$, то

$$i_G(x) = |G : C_G(x)| = |G : C_G(x)N||N : C_N(x)| = |G : C_G(x)N| i_N(x).$$

Поскольку $C_G(x)N/N \leq C_{G/N}(xN)$, то

$$|G : C_G(x)N| = |G/N : C_{G/N}(xN)||C_{G/N}(xN) : C_G(x)N/N| = i_{G/N}(xN)\cdot\delta,$$

где $\delta = |C_{G/N}(xN) : C_G(x)N/N|$ — некоторое натуральное число. Лемма доказана.

Лемма 3 (А. Мароти [10]). *Пусть G — примитивная группа подстановок степени n с простым неабелевым цоколем, не содержащая A_n. Если $|G| > 2^{n-1}$, то $n \leq 24$ и G изоморфна одной из следующих групп*:

$$L_2(q) \ \ \textit{для} \ \ q \leq 8, \quad L_3(3), L_4(2), PGL_2(q) \ \ \textit{для} \ \ q \leq 8,$$

$$P\Gamma L_2(8), P\Gamma L_2(9), M_i \ \ \textit{для} \ \ i \in \{11, 12, 23, 24\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение вытекает из [10, следствие 1.4]. Для этого достаточно исключить в списке А. Мароти группы, не являющиеся почти простыми. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть G — почти простая группа и $x \in G \setminus \{1\}$. Подгруппа $C_G(x)$ содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Пусть индекс подгруппы M в G равен n. Тогда $n = |G : M| \leq i_G(x)$.

Допустим, что группа G является контрпримером к теореме 2. Тогда $|G| \geq 2^{i_G(x)} \geq 2^n$. Из леммы 3 следует, что $n \leq 24$ и группа G изоморфна одной из почти простых групп списка леммы 3 или содержит знакопеременную подгруппу A_n. Рассмотрим отдельно имеющиеся возможности.

Если $G \simeq L_3(3)$, то из [8] следует, что наименьший индекс подгруппы в G равен 13. Однако $|L_3(3)| < 2^{13}$, так что эта группа исключена. Пусть $G \simeq L_2(q)$ для $7 \leq q \leq 8$. Наименьший индекс централизатора неединичного элемента в обеих группах не меньше 21, тогда как по [8] порядки обеих групп меньше 2^{21}. Поэтому обе эти группы не являются контрпримерами к теореме 2.

Пусть $G \simeq PGL_2(7)$. Используя [8], получаем, что наименьший индекс элемента в этой группе не меньше 21. Так как $|PGL_2(7)| < 2^{21}$, то и эта группа не может быть контрпримером к теореме 2. Группа $P\Gamma L_2(8)$ является расширением $L_2(8)$ с помощью группы полевых автоморфизмов (порядка 3). Из [8] следует, что индекс любой собственной подгруппы группы $L_2(8)$

не меньше 28 либо равен 9. Так как индекс элемента в почти простой группе не может быть степенью простого числа (см. [5]), то получаем справедливость теоремы и для этой группы.

Пусть $G \simeq P\Gamma L_2(9)$. Порядок этой группы меньше, чем 2^{11}. Централизатор любого неединичного элемента группы G содержится в некоторой максимальной подгруппе M этой группы. Имеются три подгруппы индекса два в группе G. Наименьший индекс элемента в подгруппе $PGL_2(9)$ этой группы равен 72. Другие максимальные подгруппы индекса 2 группы G изоморфны одной из следующих групп: S_6, симметрической группе подстановок степени 6, и M_{10}, стабилизатору точки в группе Матье M_{11}. В группе S_6 индекс любого элемента не меньше 15. То же верно и для M_{10}. Кроме того, силовская 3-подгруппа группы G самоцентрализуема. Индекс неединичного элемента в группе G не может быть степенью простого числа ввиду [5]. В то же время для любого элемента порядка, взаимно простого с числом 3, его индекс не меньше 18, а для элемента порядка 3 его индекс делится на 40. Поэтому группа $P\Gamma L_2(9)$ не может быть контрпримером к теореме.

В группах S_n и A_n наименьший порядок класса сопряженных элементов, отличного от единицы, не меньше, чем $n(n-1)/2$, тогда как порядки указанных групп не превосходят $n!$. Так как $n! < 2^{n(n-1)/2}$ при $n \geq 5$, то указанные группы не могут служить контрпримерами к теореме 2. Попутно этот случай исключает также группы $L_2(4) \simeq L_2(5) \simeq A_5, PGL_2(5) \simeq S_5, L_4(2) \simeq A_8$ из списка леммы 3.

Рассмотрим теперь группы Матье M_i для $i \in \{11, 12, 23, 24\}$. Наименьший индекс неединичного элемента в M_{11} равен 165, а группа внешних автоморфизмов группы M_{11} тривиальна (см. [8]). Поэтому M_{11} удовлетворяет заключению теоремы. Группа $G = M_{12}$ имеет порядок $7920 < 2^{17}$ и группу внешних автоморфизмов порядка 2 (см. [8]). При этом за исключением подгруппы, изоморфной M_{11}, все остальные максимальные подгруппы группы G имеют индекс, не меньший 66. Как видно из таблицы характеров групп M_{12} и порядка ее группы автоморфизмов в [8], индексы неединичных элементов в обеих группах больше 100, так что эти группы удовлетворяют заключению теоремы 2.

Пусть $G \simeq M_{23}$. Группа внешних автоморфизмов группы G тривиальна, а порядок G не выше 2^{24}. При этом (см. [8]), за исключением подгруппы этой группы, изоморфной M_{22}, все остальные максимальные ее подгруппы имеют индекс не менее 253. Поэтому M_{23} не является контрпримером к теореме 2.

Пусть $G \simeq M_{24}$. Ее порядок не выше 2^{28}, а группа внешних автоморфизмов тривиальна. При этом (см. [8]) все максимальные подгруппы G, кроме подгруппы, изоморфной M_{23}, имеют индекс не менее 276, тогда как подгруппа, изоморфная M_{23}, не имеет подгрупп индекса менее 23 по [8]. Так как централизатор любого неединичного элемента группы G содержится в некоторой максимальной подгруппе группы G и подгруппа, изоморфная M_{23}, проста, то индекс любого неединичного элемента из G не меньше $276 < 24 \cdot 23$. Теорема 2 доказана.

Лемма 4. *Пусть G — накрывающая группа для простой неабелевой группы $H \neq G$. Тогда верно точно одно из следующих утверждений: либо $|G| < 2^{n(H)}$, либо H — изоморфна одной из следующих простых групп:*

$$L_2(7), M_{12}, M_{22}, A_n \quad \textit{для } n \geq 5. \tag{1}$$

Доказательство. Знакопеременная группа $G = A_n$ для $n \geq 5$ и $n \notin \{6, 7\}$ имеет подгруппу индекса n и мультипликатор Шура порядка 2 (см. [3, табл. 4.1]). Так как $n! = |G| > 2^n$ при $n = 5$ и $n \geq 8$ и так как $3(n!) > 2^n$ при $n \in \{6, 7\}$, то для знакопеременных групп лемма справедлива.

Рассмотрим теперь классические группы. Пусть $H \simeq L_m(q)$. В [3, табл. 4.1] имеется информация о порядках мультипликатора Шура рассматриваемых групп. Для $(m, q) \notin \{(4, 2), (2, 5), (2, 7), (2, 9), (2, 11)\}$ наименьшая степень $n(H)$ точного подстановочного представления H равна $(q^m - 1)/(q - 1)$ (см. [7, теорема 1]). По лемме $1(i)$ получаем, что $|G| < 2^{n(H)}$ для всех (m, q), не входящих в список (1).

Группы $A_5 \simeq L_2(5) \simeq L_2(4), A_6 \simeq L_2(9)$ и $L_4(2) \simeq A_8$ по доказанному выше содержатся в списке (1) леммы. Группа $H = L_2(11)$ имеет порядок 660 и мультипликатор Шура порядка 2, причем $n(H) = 11$ по [8]. Так как G, накрывающая для H, имеет порядок, меньший 2^{11}, то лемма справедлива для $H \simeq L_2(11)$, а потому и для всех простых $H \simeq L_m(q)$.

Пусть $H \simeq U_m(q)$. Из [3, табл. 4.1] следует, что порядок мультипликатора Шура группы H равен $(n, q+1)$, кроме случаев $(m,q) = (4,2),(4,3),(6,2)$. По [7, теорема 3] при $m > 4, (m,q) \neq (2s,2)$ минимальная степень $n(H)$ точного подстановочного представления H равна

$$(q^m - (-1)^m)(q^{m-1} - (-1)^{m-1})/(q^2-1) < (q^m-1)(q^{m-1}-1)/(q^2-1).$$

При указанных ограничения по лемме 1 получаем $|G| < 2^{n(H)}$.

Пусть $(m,q) = (2s,2), s > 3$. По [7, теорема 3] в этом случае $n(H) = 2^{m-1}(2^m-1)$. Легко убедиться, что в этом случае $|G| < 2^{n(H)}$.

Пусть $m \leq 4$. Тогда $n(H) = (q^3+1)(q+1)$, а в случае $m = 3$ имеем $n(H) = q^3+1$, за исключением группы $H = U_3(5)$, для которой $n(H) = 50$ (см. [7, теорема 3]). Непосредственные вычисления показывают, что $|G| < 2^{n(H)}$ в любом из этих случаев. Действительно, при $n = 3, q \neq 5$ мультипликатор Шура группы H имеет порядок не выше 3 (см. [3, табл. 4.1]), поэтому $q^3+1 > 8q+2 > \log_2|G|$. Если $q > 2$, то это неравенство верно, а если $q = 2$, то H разрешима. Порядок группы $H = U_3(5)$ равен $126000 < 2^{17}$, так что $50 > \log_2 3|H|$. При $n = 4$ порядок группы $H = U_4(q)$ не превосходит q^{15}, а порядок мультипликатора Шура не превосходит 36 по [3, табл. 4.1]. Так как $(q^3+1)(q+1) > 16(q+1) > \log_2|G|$ при $q > 2$, то и в этом случае $|G| < 2^{n(H)}$. Наконец, из [2] то же заключение следует для случая $q = 2$.

Предположим, что $H \simeq U_4(3)$. Ее мультипликатор Шура имеет порядок 36. Поэтому порядок накрывающей группы G для группы H не превосходит 2^{27}, тогда как наименьший из индексов максимальных подгрупп группы H равен 112 по [8]. Поэтому $|G| < 2^{n(H)}$.

Пусть $H \simeq U_4(2)$. Ее мультипликатор Шура имеет порядок 2, так что порядок накрывающей группы G для H не превосходит 2^{17}, тогда как наименьший из индексов максимальных подгрупп группы H равен 27 по [8]. Поэтому $|G| < 2^{n(H)}$.

Пусть $H \simeq U_6(2)$. Ее мультипликатор Шура имеет порядок 18, так что порядок накрывающей группы G для H не превосходит 2^{32}, тогда как наименьший из индексов максимальных подгрупп группы H равен 672 по [8]. Поэтому $|G| < 2^{n(H)}$.

Допустим, что $H \simeq S_{2m}(q)$ или $O_{2m+1}(q)$. Используем результаты [7, теорема 2] и [3, табл. 4.1] . Если $m = 2, q = 3$, то $H \simeq S_4(3)$ и $n(H) = 27$. Нетрудно видеть, что $|G| \leq 2|H| < 2^{27}$. Напомним, что группы $S_4(q)$ и $O_5(q)$ изоморфны. Если $q > 2$ и $m \geq 2$, то $n(H) = (q^m-1)/(q-1)$. По лемме 1(iii) получаем требуемое заключение. Если $q = 2, m \geq 6$, то $n(H) = 2^{m-1}(2^m-1)$. Легко проверить, что и в этом случае $|G| \leq 2|H| < 2^{n(H)}$. Группа $S_4(2)$ изоморфна S_6 и потому не рассматривается.

Пусть $H \simeq O^{\pm}_{2m}(q),\ m \geq 4$. Тогда H содержит подгруппу, изоморфную некоторой накрывающей для группы $L_m(q)$. По [7, теорема 1] $n(H) \geq (q^m-1)/(q-1)$ при $(m,q) \neq (4,2)$. Так как $|H| < 2q^{2m^2-m+1}$, а порядок мультипликатора Шура группы H не превосходит 4 [3, табл. 4.1], то достаточно установить, что $(q^m-1)/(q-1) \geq (2m^2-m+1)\log_2 q+3$. Это неравенство выполнено при $(m,q) \neq (m,2), m \geq 8$. Согласно [3, табл. 4.1] все ортогональные группы над полем характеристики 2, за исключением $O^+_8(2)$, имеют тривиальный мультипликатор Шура. Так как $n(O^+_8(2)) = 120$, то и для этой группы $|G| = 2|H| < 2^{n(H)}$. Это завершает доказательство леммы для всех классических простых групп.

Если H — исключительная простая группа лиева типа с мультипликатором Шура порядка не более двух, то заключение следует из леммы 3. В самом деле, если $|H| > 2^{n(H)-1}$, то H должна быть в списке леммы 3. Но в этом списке нет исключительных простых групп лиева типа. Значит, $|H| \leq 2^{n(H)-1}$ и $|G| \leq 2^{n(H)}$. Если $|G| = 2^{n(H)}$, то G — разрешимая группа. Поэтому $|G| < 2^{n(H)}$.

Следовательно, далее можно не рассматривать группы $E_m(q)$ для $m = 7, 8$, ${}^2B_2(q)$, $q > 8$, ${}^2F_4(q)'$, $F_4(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, так как порядки их мультипликаторов Шура не превосходят двух.

Группа $H \simeq E_6(q)$ содержит подгруппу (фактор Леви), изоморфную некоторой накрывающей для $K = L_6(q)$. По лемме 1 $n(H) \geq (q^6 - 1)/(q - 1)$. Так как $|E_6(q)| < q^{64}$, то из справедливости неравенства

$$(q^6 - 1)/(q - 1) > 64 \log_2 q$$

получаем заключение леммы для случая $q > 2$. Если $q = 2$, то из [8] следует, что $O_{10}^+(2)$ содержится в $H = E_6(2)$ и потому $n(H) \geq 496$. Так как $|\tilde{H}| = 3|H| < 2^{496}$, то лемма верна и для этой группы.

Группа ${}^2E_6(q) = H$ содержит подгруппу, изоморфную $O_{10}^-(q)$, откуда $n(H) \geq (q^{10}-1)/(q-1)$ по [2, теорема 5]. Заметим, что из [3, табл. 4.1] следует, что мультипликатор Шура группы ${}^2E_6(q) = H$ не превосходит 3 при $q > 2$ и равен 12 при $q = 2$. Использование лемм 1 и 3 при $q > 2$ позволяет исключить и эти группы. В случае $q = 2$ используется [8]. Наименьшая степень подстановочного представления группы $O_{10}^-(2)$, содержащейся в ${}^2E_6(2)$, равна 495, тогда как порядок группы $\tilde{H}$ меньше 2^{495}.

Группа $G_2(q)$ при $q \geq 4$ имеет тривиальный мультипликатор Шура и по лемме 3 удовлетворяет заключению доказываемой леммы. Наконец, для значений $q < 4$ воспользуемся [8]. Для группы $H \simeq Sz(8)$ мультипликатор Шура равен 4. Согласно [8] порядок группы H равен $29120 < 2^{65}$, а $n(H) = 65$. Поэтому лемма 4 справедлива для этой группы. Тем самым она доказана для всех групп H, являющихся знакопеременными группами или группами лиева типа.

Среди спорадических простых групп, не входящих в список (1) леммы, мультипликатором Шура порядка, большего 2, обладают лишь группы $Fi_{22}, J_3, McL, M_{22}, Suz, Fi'_{24}$ и $O'N$. Использование [8] позволяет исключить перечисленные выше возможности для H, кроме $H = Fi'_{24}$. Для этой группы в [8] нет в явном виде значения $n(H)$, но в H имеется подгруппа, изоморфная $O_{10}^-(2)$, откуда следует, что $n(H) \geq 496$, так что порядок группы $G = \tilde{H}$ не превосходит $2^{n(H)}$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Если G — простая неабелева группа, то теорема справедлива ввиду леммы 3 и теоремы 2. Пусть $Z(G) \neq 1$ и G — накрывающая для простой неабелевой группы H. Предположим, что $|G| > 2^{n(H)}$. По лемме 4 группа H изоморфна $L_2(7), M_{12}, M_{22}$ или знакопеременной группе A_n для $n \geq 5$, т. е. входит в список групп в заключении теоремы 3. Покажем, что в каждом из случаев при $Z(G) \neq 1$ порядок G не превосходит $2^{i_G(x)}$ для любого $x \in G \setminus Z(G)$. Допустим противное. Тогда список возможных контрпримеров H состоит из групп $L_2(7), A_n (n \geq 5), M_{12}, M_{22}$. Если $H \simeq L_2(7)$, то мультипликатор Шура группы H имеет порядок не выше 2. При этом наименьший из индексов нееденичных элементов в $G/Z(G) \simeq H$ не меньше 21. По лемме 2 $i_G(x) \geq 21$. Так как $|G| = 336 < 2^{21}$, то накрывающая группы $H = L_2(7)$ не может быть контрпримером.

Пусть $H \simeq A_n$, где $n \geq 8$ или $n = 5$. Порядок мультипликатора Шура этих групп равен 2, тогда как индекс нееденичного элемента в H не меньше $n(n-1)/2$. По лемме 2 имеем $i_G(x) \geq n(n-1)/2$ для любого $x \in G \setminus Z(G)$. Так как $2^{n(n-1)/2} > n!$ при $n \geq 5$, то эти группы не могут быть контрпримерами. Если $n = 6$ или 7, то порядок мультипликатора A_n равен 6 ([3, табл. 4.1]). Так как индекс нееденичного элемента в $H = A_6$ не меньше $40 \leq i_G(x)$ (лемма 2), а $|G| \leq 1960$, то $|G| < 2^{i_G(x)}$ и в этом случае. Аналогично в группе $H = A_7$ индекс любого элемента не меньше 20, а $|G| \leq 6|H| < 2^{14}$, так что G не может быть контрпримером.

Пусть $H \simeq M_{12}$. Порядок H равен 95040, а мультипликатор Шура порядка 2 (см. [8]). При этом индекс любого нееденичного элемента группы H не меньше 66. Так как по лемме 2 $i_G(x) \geq i_{G/Z(G)}(xZ(G))$ для любого $x \in G \setminus Z(G)$, то $|G| \leq 2|H| < 2^{i_G(x)}$ для всякого $x \in G \setminus Z(G)$ и M_{12} не является контрпримером к теореме.

Пусть $H \simeq M_{22}$. Порядок H равен 443520, а мультипликатор Шура порядка 12 (см. [8]). (Заметим, что в [3, табл. 4.1] указано значение мультипликатора Шура группы H, равное 6). При этом индекс любого нееденичного элемента группы H не меньше 77. Так как по лемме 2

$i_G(x) \geq i_{G/Z(G)}(xZ(G))$ для любого $x \in G \setminus Z(G)$, то $|G| \leq 12|H| < 2^{i_G(x)}$ для всякого $x \in G \setminus Z(G)$ и M_{22} удовлетворяет заключению теоремы.

Таким образом, контрпримера к теореме 3 не существует. Теорема доказана.

Доказательство следствия 2. По теореме 2 для любого неединичного элемента $x \in G$ выполнено неравенство $|G| < 2^{i_G(x)}$, т. е. справедливо неравенство $\log_2 |G| < i_G(x)$. Пусть $x_1 = 1, x_2, \ldots, x_k$ — представители всех классов сопряженных элементов группы G, где $k = k(G)$. Очевидно, $|G| = \sum_{i=1}^{k} i_G(x_i)$. Так как G — почти простая группа, то $Z(G) = 1$ и по доказанному выше $1 + (k-1)\log_2 |G| < |G|$, откуда и следует требуемое заключение. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 239 с.
2. **Гречкосеева М.А.** О минимальных подстановочных представлениях классических простых групп // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 560–586.
3. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
4. **Дицман А.П.** О p-группах // Докл. АН СССР. 1937. Т. 258. С. 71–76.
5. **Казарин Л.С.** О p^α-лемме Бернсайда // Мат. заметки. 1990. Vol 48, № 2. С. 45–48.
6. **Курош А.Г.** Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
7. **Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных классических простых групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 267–287.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Brauer R., Fong P.** On the centralizers of p-elements in finite groups // Bull. London Math. Soc. 1974. Vol. 6. P. 319–324.
10. **Maróti A.** On the orders of primitive groups // J. Algebra. 2002. Vol. 258, no. 2. P. 631–640.

Казарин Лев Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова
e-mail: kazarin@uniyar.ac.ru

Поступила 22.01.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542.4+512.542.6

О ПОДГРУППАХ, ПОКРЫВАЮЩИХ ТОЛЬКО $\mathfrak{F}$-ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ГЛАВНЫЕ ФАКТОРЫ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

С. Ф. Каморников, О. Л. Шеметкова

Элемент x конечной группы G авторы называют $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным, если каждый главный фактор A/B группы G, для которого $x \in A\backslash B$, является $\mathfrak{F}$-центральным. Исследуется связь $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральных элементов группы G с ее главными факторами. В случае, когда $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, изучаются свойства подгрупп, покрывающих все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирующих все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G (такие подгруппы авторы называют $\mathfrak{F}$-изоляторами). Устанавливается связь $\mathfrak{F}$-изоляторов с $\mathfrak{F}$-нормализаторами группы G.

Ключевые слова: конечная группа, насыщенная формация, $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральный элемент, $\mathfrak{F}$-нормализатор, $\mathfrak{F}$-изолятор.

S. F. Kamornikov, O. L. Shemetkova. On subgroups that cover only $\mathfrak{F}$-central chief factors in finite groups.

The authors call an element x of a finite group G $Q\mathfrak{F}$-supercentral if every chief factor A/B of G for which $x \in A\backslash B$ is $\mathfrak{F}$-central. The connection between $Q\mathfrak{F}$-supercentral elements of G and its chief factors is investigated. In the case when $\mathfrak{F}$ is a nonempty saturated formation, the properties of subgroups that cover all $\mathfrak{F}$-central chief factors of G and isolate all $\mathfrak{F}$-eccentric chief factors are investigated (the authors call these subgroups $\mathfrak{F}$-isolators). The connection between $\mathfrak{F}$-isolators and $\mathfrak{F}$-normalizers of G is established.

Keywords: finite group, saturated formation, $Q\mathfrak{F}$-supercentral element, $\mathfrak{F}$-normalizer, $\mathfrak{F}$-isolator.

Посвящается А. А. Махневу в связи с его шестидесятилетием

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый непустой класс групп. Главный фактор A/B группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным*, если полупрямое произведение $[A/B](G/C_G(A/B))$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Если же $[A/B](G/C_G(A/B))$ не принадлежит $\mathfrak{F}$, то главный фактор A/B называется $\mathfrak{F}$-*эксцентральным*.

Л.А. Шеметковым введена концепция $Q\mathfrak{F}$-центрального элемента: элемент x группы G называется $Q\mathfrak{F}$-*центральным*, если в G существует такой $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор A/B, что $x \in A\backslash B$ (см. [1]). Единичный элемент по определению считается $Q\mathfrak{F}$-центральным.

В данной работе мы развиваем концепцию $Q\mathfrak{F}$-центрального элемента. Мы вводим понятие $Q\mathfrak{F}$-сверхцентрального элемента, которое используется для изучения $\mathfrak{F}$-подгрупп, обладающих свойством покрытия-изолирования.

О п р е д е л е н и е 1. Элемент x группы G называется $Q\mathfrak{F}$-*сверхцентральным*, если выполняется одно из следующих двух равносильных условий:

1) каждый главный фактор A/B группы G, для которого $x \in A\backslash B$, является $\mathfrak{F}$-центральным;

2) каждый главный фактор группы G вида $\langle x^G\rangle/B$ является $\mathfrak{F}$-центральным.

Единичный элемент по определению считается $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным.

Здесь через $\langle x^G\rangle$ обозначается нормальное замыкание элемента x в группе G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп группы G, которые содержат элемент x.

О п р е д е л е н и е 2. Элемент x группы G называется Q-*сверхцентральным*, если он является $Q\mathfrak{N}$-сверхцентральным, где $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп (это значит, что все главные факторы группы G вида $\langle x^G\rangle/B$ являются центральными).

Отметим, что каждый $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральный элемент группы G является $Q\mathfrak{F}$-центральным. Обратное неверно. Пусть G — внешнее прямое произведение знакопеременной группы A_4 и циклической группы $\langle y\rangle$ порядка 2. Рассмотрим элемент $h = (x, y) \in G$, где x — элемент группы A_4, имеющий порядок 3. Простая проверка показывает, что: 1) $\langle h^G\rangle = G$;

2) $h \in G \backslash (V \times \langle y \rangle)$, где V — подгруппа из A_4 порядка 4; 3) $h \in G \backslash (A_4 \times 1)$; 4) главный фактор $G/(V \times \langle y \rangle)$ группы G является $\mathfrak{N}_3$-центральным, где $\mathfrak{N}_3$ — формация всех 3-групп; 5) главный фактор $G/(A_4 \times 1)$ группы G является $\mathfrak{N}_3$-эксцентральным. Таким образом, элемент h является $Q\mathfrak{N}_3$-центральным в группе G, но не является $Q\mathfrak{N}_3$-сверхцентральным.

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [2; 3].

Нам потребуются некоторые понятия, связанные со свойствами нормальных факторов.

Определение 3. Пусть H — подгруппа, а A/B — нормальный фактор группы G. Говорят, что:

1) H покрывает фактор A/B, если $HB \supseteq A$;

2) H изолирует фактор A/B, если $H \cap A \subseteq B$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый непустой класс групп, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Если все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G, то все элементы подгруппы HN/N являются $Q\mathfrak{F}$-свехцентральными в G/N.*

Доказательство. Пусть $h \in H$. Тогда любой главный фактор $\langle h^G \rangle/B$ группы G является $\mathfrak{F}$-центральным. Рассмотрим элемент hN группы G/N. Если $hN = N$, то элемент hN является $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным в G/N как единичный элемент группы G/N.

Значит, h не содержится в N. Предположим, что $N \subseteq \langle h^G \rangle$. Тогда $N \subset \langle h^G \rangle$. Пусть $(\langle h^G \rangle/N)/(B/N)$ — главный фактор группы G/N. Ввиду G-изоморфизма $(\langle h^G \rangle/N)/(B/N) \cong \langle h^G \rangle/B$ имеем, что фактор $(\langle h^G \rangle/N)/(B/N)$ является $\mathfrak{F}$-центральным.

Пусть N не содержится в $\langle h^G \rangle$. Рассмотрим главный фактор $(\langle h^G \rangle N/N)/\ (B/N)$ группы G/N. Так как $\langle h^G \rangle N = \langle h^G \rangle B$, то из равенства

$$(\langle h^G \rangle N/N)/(B/N) = (\langle h^G \rangle B/N)/(B/N) \cong \langle h^G \rangle / \langle h^G \rangle \cap B$$

следует, что главный фактор $(\langle h^G \rangle N/N)/(B/N)$ является $\mathfrak{F}$-центральным.

Итак, любой главный фактор группы G/N, имеющий вид

$$\langle hN^{G/N} \rangle/(B/N) = (\langle h^G \rangle N/N)/(B/N),$$

является $\mathfrak{F}$-центральным, а значит, элемент hN является $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным в G/N. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый непустой класс групп, H — подгруппа группы G, причем все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G. Если A/B — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G, то H изолирует A/B.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Тогда в G найдется такая подгруппа H, что все ее элементы $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G, но она не изолирует некоторый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор A/B группы G.

Рассмотрим группу G/B. Ввиду леммы 1 все элементы из HB/B являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G/B, а A/B — $\mathfrak{F}$-эксцентральная минимальная нормальная подгруппа группы G/B. Если $B \neq 1$, то из $|G/B| < |G|$ следует, что подгруппа HB/B изолирует A/B, т. е. $(HB/B) \cap (A/B) = 1$. Отсюда $HB \cap A = B$, а значит, $(H \cap A)B = B$ и $H \cap A \subseteq B$. Следовательно, H изолирует A/B. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Итак, $B = 1$, A — $\mathfrak{F}$-эксцентральная минимальная нормальная подгруппа группы G и $H \cap A \neq 1$. Пусть $h \in H \cap A$, $h \neq 1$. Так как все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G, то из определения $Q\mathfrak{F}$-сверхцентрального элемента следует, что $\langle h^G \rangle = A$ — $\mathfrak{F}$-центральная минимальная нормальная подгруппа группы G, что невозможно. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть h — инволюция группы $G = A_4$ и $H = \langle h \rangle$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых групп, то все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G, но подгруппа H не изолирует и не покрывает минимальную нормальную подгруппу из G. Таким образом, подгруппа H, все элементы которой $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G, в общем случае может не покрывать и не изолировать главные факторы группы G. В то же время справедливо следующее простое утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая подформация формации всех сверхразрешимых групп и H — подгруппа группы G, причем все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G. Если A/B — главный фактор группы G, то H либо изолирует, либо покрывает A/B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если A/B — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G, то ввиду леммы 2 H изолирует A/B. Если A/B — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G, то $|A/B| = p$ — простое число (см., например, [2, с. 93]). В этом случае, очевидно, H либо изолирует, либо покрывает A/B. Предложение доказано.

Следуя [3], подгруппу H группы G будем называть CAP-*подгруппой*, если она либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G. В этом случае говорят также, что подгруппа H *обладает свойством покрытия-изолирования* в группе G.

Прямым следствием предложения 1 является следующий результат.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая подформация формации всех сверхразрешимых групп и H — подгруппа группы G, причем все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G. Тогда H обладает свойством покрытия-изолирования.*

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*изолятором* группы G, если H покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G.

О п р е д е л е н и е 5. Подгруппа H называется *изолятором* группы G, если она является $\mathfrak{N}$-изолятором, где $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп (это значит, что H покрывает все центральные и изолирует все эксцентральные главные факторы группы G).

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Так как при любом гомоморфизме группы G $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы группы G переходят в $\mathfrak{F}$-центральные, а $\mathfrak{F}$-эксцентральные — в $\mathfrak{F}$-эксцентральные, то HN/N — $\mathfrak{F}$-изолятор группы G/N для любого $\mathfrak{F}$-изолятора H группы G и любой ее нормальной подгруппы N. Для любого $\mathfrak{F}$-изолятора H группы G справедливо равенство $G = HG^{\mathfrak{F}}$.

Напомним, что наибольшая нормальная подгруппа группы G, все G-главные факторы которой $\mathfrak{F}$-центральны в G, называется $\mathfrak{F}$-*гиперцентром* группы G и обозначается через $Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Теорема. *Для любой непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *все $\mathfrak{F}$-изоляторы группы G имеют одинаковый порядок*;

2) *каждый $\mathfrak{F}$-изолятор группы G принадлежит формации $\mathfrak{F}$*;

3) *если H — $\mathfrak{F}$-изолятор группы G, то:*

3a) *все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G*;

3b) *H не является собственной подгруппой ни в одной подгруппе, все элементы которой $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G*;

3c) $Core_G(H) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ — *$\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G*;

3d) *если $H \trianglelefteq G$, то $H = Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. 1) Пусть $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$ — некоторый главный ряд группы G, причем $\{A_i/A_{i-1} \mid i \in I\}$ — множество всех $\mathfrak{F}$-центральных главных факторов этого ряда. Так как $\mathfrak{F}$-изолятор H группы G по определению покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G, то ввиду [3, лемма A.1.7] справедливо равенство $|H| = \prod_{i\in I} |A_i/A_{i-1}|$. Итак, любой $\mathfrak{F}$-изолятор группы G имеет порядок, равный $\prod_{i\in I} |A_i/A_{i-1}|$.

2) Применим индукцию по порядку группы G. Пусть H — $\mathfrak{F}$-изолятор группы G и N — ее минимальная нормальная подгруппа.

Так как по индукции для группы G/N теорема верна, то $HN/N \in \mathfrak{F}$. Если N — $\mathfrak{F}$-центральная минимальная нормальная подгруппа группы G, то H покрывает N, а значит, $N \subseteq H$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Так как формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, то ввиду [3, теорема IV.4.6] найдется такая формационная функция f, что $\mathfrak{F} = LF(f)$, причем $f(q) = \mathfrak{N}_q f(q)$ и $f(q) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых чисел $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Так как минимальная нормальная подгруппа N $\mathfrak{F}$-центральна в G, то $G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого простого числа p, делящего порядок подгруппы N. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$, а значит, из $G = HG^{\mathfrak{F}}$ имеем $HC_G(N) = G$. Если N — неабелева группа, то из того, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, имеем $C_G(N) = 1$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $H = G \in \mathfrak{F}$. Поэтому полагаем далее, что N — абелева p-группа. Из $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \in f(p)$ заключаем, что $H/C_H(N) \in f(p)$. Отсюда следует, что все H-главные факторы подгруппы N являются $\mathfrak{F}$-центральными в H, а значит, $H \in \mathfrak{F}$.

Если N — $\mathfrak{F}$-эксцентральная минимальная нормальная подгруппа группы G, то H изолирует N, а значит, $H \cap N = 1$. Тогда из $HN/N \cong H$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, каждый $\mathfrak{F}$-изолятор группы G принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

3a) Пусть $h \in H$ и $A = \langle h^G \rangle$. Рассмотрим главный фактор A/B группы G. Тогда $h \in A \backslash B$. Так как H — CAP-подгруппа группы G, то H либо покрывает, либо изолирует A/B. Поэтому из $h \in A\backslash B$ следует, что H покрывает A/B. Из определения $\mathfrak{F}$-изолятора следует, что A/B — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G. Значит, h — $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральный элемент группы G.

3b) Пусть M — некоторая подгруппа группы G, которая содержит H и все элементы которой $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G. Тогда ввиду леммы 2 подгруппа M изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы главного ряда $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$ группы G. Так как M содержит H, то M покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы главного ряда $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$. Ввиду [3, лемма A.1.7] порядок подгруппы M равен произведению порядков всех $\mathfrak{F}$-центральных главных факторов главного ряда $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$. Тогда ввиду утверждения 1) теоремы имеем $|M| = |H|$. А так как $H \subseteq M$, то $H = M$.

3c) Рассмотрим G-главный ряд $1 = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_k = C$ группы $C = Core_G(H)$. Очевидно, подгруппа H покрывает все G-главные факторы этого ряда. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-изолятора следует, что C_i/C_{i-1} — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G для любого $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит, $C \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Пусть теперь $1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_t = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ — некоторый G-главный ряд группы $Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Так как все его факторы $\mathfrak{F}$-центральны в G, то $HZ_{i-1} \supseteq Z_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Отсюда следует, что $H \supseteq Z_t = Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $Z_{\mathfrak{F}}(G) \trianglelefteq G$, то $Z_{\mathfrak{F}}(G) \subseteq Core_G(H) = C$.

3d) Утверждение непосредственно следует из утверждения 3c).

Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, получаем

Следствие 1. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *все изоляторы группы G имеют одинаковый порядок*;

2) *каждый изолятор группы G нильпотентен*;

3) *если H — изолятор группы G, то*:

а) *все элементы из H являются Q-сверхцентральными в G*;

в) *H не содержится в качестве собственной подгруппы ни в одной подгруппе, все элементы которой Q-сверхцентральны в G*;

c) *$Core_G(H)$ — гиперцентр группы G*;

d) *если $H \trianglelefteq G$, то H — гиперцентр группы G.*

Следуя [2], дадим определение $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной группы для случая, когда $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Нормальная подгруппа R группы G называется $\mathfrak{F}$-*предельной* нормальной подгруппой, если $R/R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G. Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-*критической* в G, если в G найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R, что $MR = G$. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-*нормализатором* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и существует цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ $(n \geq 0)$, в которой подгруппа H_{i-1} $\mathfrak{F}$-критична в H_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. По определению, каждая группа G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Как установлено в [5], если $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, то в любой группе G с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$ существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-нормализаторов. При этом каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G, т. е. является $\mathfrak{F}$-изолятором.

Пусть $G = PSL(2,7)$. Тогда каждая максимальная подгруппа группы G является $\mathfrak{S}$-нормализатором ($\mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых групп). В то же время $\mathfrak{S}$-изолятором группы G является только ее единичная подгруппа. Таким образом, $\mathfrak{F}$-нормализатор группы не всегда является ее $\mathfrak{F}$-изолятором.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, имеющей $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G.*

Пусть $S = SL(2,3)$ и V — естественный модуль для S. Как показано в [3, с. 401], группа $G = [V]S$ обладает единственным главным рядом $1 \lhd V \lhd VZ(Q) \lhd VQ \lhd G$, где $Q = O_2(S)$ — группа кватернионов порядка 8. Группа G имеет три класса сопряженных $\mathfrak{N}_3$-изоляторов $\langle gv \rangle$, где $\langle g \rangle$ — силовская 3-подгруппа группы S, $v \in C_V(g)$.

Таким образом, если $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, то разрешимая группа может иметь несколько классов сопряженных $\mathfrak{F}$-изоляторов, один из которых совпадает с классом сопряженных $\mathfrak{F}$-нормализаторов.

Пусть $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Следуя [3], систему Σ холловых подгрупп разрешимой группы G будем называть *холловой системой* группы G, если выполняются следующие два условия:

1) для любого подмножества π множества $\pi(G)$ система Σ содержит в точности одну π-холлову подгруппу группы G;

2) если H и K — подгруппы из Σ, то $HK = KH$.

Ввиду основного результата работы [6] имеем

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, H — $\mathfrak{F}$-изолятор разрешимой группы G. Тогда и только тогда H является $\mathfrak{F}$-нормализатором в G, когда подгруппа H перестановочна с каждым элементом некоторой холловой системы группы G.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аль-Шаро Х.А., Шеметков Л.А.** О подгруппах простого порядка в конечной группе // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 6. С. 745–752.
2. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

3. **Doerk K., Hawkes T.O.** Finite soluble groups. Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
4. **Carter R.W., Hawkes T.O.** The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble groups // J. Algebra. 1967. Vol. 5, no. 2. P. 175–201.
5. **Шеметков Л.А.** Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 684–715.
6. **Gillam J.D.** Cover-avoid subgroups in finite solvable groups // J. Algebra. 1974. Vol. 29, no. 2. P. 324–329.

Поступила 14.02.2013

Каморников Сергей Фёдорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Шеметкова Ольга Леонидовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
e-mail: ol-shem@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

CONSTRUCTION OF SMALL STRONGLY REGULAR DESIGNS[1]

Mikhail H. Klin and Sven Reichard

We consider a particular class of coherent configurations, namely strongly regular designs (in the sense of D.G. Higman). We suggest to investigate these combinatorial structures from scratch and report first steps towards their systematical enumeration. This allows to take a fresh algebraic look on classical objects such as the Reye configuration.

Keywords: coherent configuration, strongly regular design, association scheme, automorphism group, Reye configuration.

1. Introduction

This project appears on the border of Algebraic Graph Theory (AGT) and scientific computation.

During the last five to six decades two axiomatical systems, namely association schemes and coherent configurations — the latter being a generalisation of the former — have played a central role in the development of AGT.

In fact one of the origins of interest to coherent configurations stems from Computer Science due to their natural role in the theoretical analysis of the complexity of the graph isomorphism problem.

The creation of catalogues of association schemes with given properties is an ongoing essential task in AGT. Surprisingly the corresponding activity for proper coherent configuration has not been developed systematically. The current text is designed as a report about first results in this direction.

Using a quite naive approach all small coherent configuration (say, on up to 13 vertices) might be easily generated with the aid of a computer. It turns out that all obtained objects are Schurian, that is they appear from a suitable permutation group in a certain standard way.

The analysis of further difficulties leads to the conclusion that special attention should be given to the enumeration of coherent configurations with two fibres, and in particular to so-called coherent designs. The knowledge of coherent designs will hopefully serve as a solid background for the systematical approach towards the constructive enumeration and further classification of all coherent configurations. Finally we select one particular class of coherent designs, namely strongly regular designs (in the sense of D.G. Higman) and report about first steps toward their enumeration. A few new striking examples are discussed with enough detail in conjunction with the consideration of classical geometric structures, such as the Reye configuration, from an AGT standpoint.

This text provides a short version of a detailed preprint [17] about our first achievements. At some moment the updated preprint will become available on the WWW.

The concept of a strongly regular design is an honest generalisation of partial geometry considered together with its dual. Partial geometries, introduced by Bose in [2], are nowadays one of the central objects of investigations in AGT, in particular in the school of A.A. Makhnev, see e.g., [19].

In this text we try to introduce the reader to this wider class of structures, paying special attention to the proper strongly regular designs, i.e., those which are not partial geometries.

[1]Partially supported by the Center for Advanced Studies in Mathematics at Ben-Gurion University.

2. Coherent configurations and association schemes

In this section we provide a brief account of the concepts and terminology used throughout the text. For more details the reader is advised to our recent publications, like [14; 16; 18].

A *colour graph* is an edge colouring of a complete finite graph. In other words, it is a triple (Ω, C, δ) consisting of a finite set Ω of vertices, a finite set C of colours, and a surjective map $\delta : \Omega^2 \to C$ assigning a colour to each pair of vertices.

If $W = (\Omega, C, \delta)$ is a colour graph we call the number $|\Omega|$ of vertices the *order* of W, and the number $|C|$ of colours the *rank* of W.

For each colour $i \in C$ the preimage $\delta^{-1}(i)$ of i under δ is a binary relation on Ω. We denote this relation by R_i and call it a *basic relation* of the colour graph W.

Each basic relation R_i in turn defines a (possibly directed) graph $\Gamma_i = (\Omega, R_i)$. For each $i \in C$ we define a matrix $A_i = (a_{xy})$ by setting $a_{xy} = 1$ if $(x, y) \in R_i$, and $a_{xy} = 0$ otherwise. We call the graphs Γ_i *basic graphs* of W, and the matrices A_i *basic matrices* of W.

Note that the relation R_i, the graph Γ_i, and the matrix A_i essentially contain the same information. This allows us to use either language as it is convenient.

We can now define the central notion of this text. A colour graph $W = (\Omega, C, \delta)$ is a *coherent configuration* (CC for short) if its basic matrices A_i form the basis of an algebra (over $\mathbb{C}$) which contains the identity matrix and which is closed under transposition.

This is equivalent to the following conditions:

1. The identity matrix I is the sum of a set of basic matrices:

$$I = \sum_{i \in C_0} A_i,$$

here, C_0 is a suitable subset of C.

2. The matrix J is the sum of all basic matrices:

$$J = \sum_{i \in C} A_i;$$

here, J is the all-one matrix.

3. For each colour $i \in C$ there is a colour i' such that $A_i^T = A_{i'}$.
4. There are numbers $p_{ij}^k \in \mathbb{C}$ for all colours i, j, k such that

$$A_i A_j = \sum_{k \in C} p_{ij}^k A_k.$$

We call the numbers p_{ij}^k the *intersection numbers.*

It follows that each basic relation is either reflexive or anti-reflexive. The reflexive relations define a partition of Ω in the sense that each of them is the identity on a subset of Ω. We call these subsets the *fibres* of W.

A coherent configuration is *homogeneous* if it has a single fibre. Homogeneous coherent configurations are also known as association schemes (AS).

For a coherent configuration with m fibres let $t_{i,j}$ be the number of colours relating fibres i and j. This defines an $m \times m$ matrix T. Since the matrix T is symmetric we only consider the entries on and above the diagonal. This matrix T is called the *type* of the configuration.

A permutation of the points of a CC W which preserves the colours is an *automorphism* of W. A permutation of the points of a CC which induces a permutation on the colours is a *colour automorphism* of W. Finally, a permutation of the colours which preserves the intersection numbers is an *algebraic automorphism* of W.

The sets of each type of automorphisms form groups which we call the *automorphism group* $Aut(W)$, the *colour automorphism group* $CAut(W)$, and the *algebraic automorphism group* $AAut(W)$

respectively. Note that $Aut(W)$ acts on the point set Ω; the group $AAut(W)$ acts on the set C of colours, while the group $CAut(W)$ acts on points and colours simultaneously. We have the following inclusions as permutation groups: $(Aut(W), \Omega) \leq (CAut(W), \Omega)$ and $(CAut(W)/Aut(W), C) \leq (AAut(W), C)$. In other words, we note that the action of the colour group on the colours is usually not faithful (in fact its kernel is $Aut(W)$); all other group actions considered here are faithful by definition.

An abundant source of coherent configuration are finite permutation groups. Let G be a group acting on a set Ω. The orbits of G in its induced action on the set Ω^2 of ordered pairs define a colour graph on Ω which we denote by $V(G)$. In fact, $V(G)$ is a coherent configuration. Its fibres are the orbits of G on Ω.

We will call coherent configurations that arise in this way *Schurian*.

Let W_1, W_2 be colour graphs. We say that W_1 is a *fusion* of W_2 if each basic relation of W_1 is a union of basic relations of W_2. Conversely we say that W_2 is a *fission* of W_1. In short we write $W_1 \leq W_2$ in this case.

The relation "$\leq$" defines a partial ordering on the set of all colour graphs with given vertex set.

Proposition 1 (Weisfeiler-Leman [24; 29]). *Let W be a colour graph. Let S be the set of coherent fissions of W. Then S has a minimal element, which we denote by $\langle\langle W \rangle\rangle$.*

Weisfeiler and Leman described an algorithm which constructs $\langle\langle W \rangle\rangle$ in polynomial time. We will call $\langle\langle W \rangle\rangle$ the WL-*closure* of W, or *coherent closure* of W.

From any graph Γ we can get a colour graph if we assign one colour to edges and another colour to non-edges. This allows us to define the WL-closure $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$ also for usual graphs.

A graph Γ is *coherent* (cf. [15]) if it is a basic graph of a suitable coherent configuration.

Lemma 1. *A graph Γ is coherent if and only if it is a basic graph of its* WL-*closure $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$.*

Proof. By definition, $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$ is a coherent configuration, so if Γ is its basic graph then Γ is coherent.

Now suppose that Γ is a basic graph of some coherent configuration $W \geq \langle\langle \Gamma \rangle\rangle$. Then Γ as a basic graph of W is contained in some basic relation of $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$, which in turn is contained in Γ. Hence Γ is a basic graph of $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$. □

A design (in the sense of [12], see also Definition 1 in Section 5), is called *coherent* if its incidence graph is coherent. Following L. A. Kaluzhnin, we are using "orthodoxal" notation for the operation of wreath product, cf. [6].

3. Computer algebra tools

Our most important computer algebra tool is GAP [8], a system for discrete mathematics, developed at RWTH Aachen and St. Andrews. It provides data types for common objects such as rationals, permutations, finite field elements, and groups. Furthermore it contains an interpreter for a programming language similar to Pascal with some support for object-oriented programs.

GAP can be extended by user libraries, so-called share packages. Two of them, GRAPE [28] and DESIGN [27], were developed by L. Soicher and provide functionality for graphs and block designs, respectively. They also provide an interface to `nauty`, the state of the art program for finding automorphism groups of graphs by B. McKay [20].

For computations with colour graphs, a group of researchers in Moscow including Igor Faradžev and the first author developed the program COCO in the early 1990's [5]. Its main functionality consists of

- computing the action G of a given permutation group on a set of combinatorial structures;
- find the colour graph $W = V(G)$;
- find all fusion association schemes of W;

• find the automorphism groups of all the fusion schemes.

The second author has ported some of COCO's functionality to GAP, however the code has not yet been released.

So we see that there are (at least) two programs for finding automorphism groups, one (`nauty`) for graphs, and one (COCO) for colour graphs. Both have their strengths and weaknesses.

Since `nauty` deals with graphs in general, and statistically speaking graphs have rather small automorphism groups, the program excels in finding invariants of the graph which prove that the group is small. It struggles a bit more for reasonably large groups.

The colour graphs that COCO investigates by construction are invariant under relatively large groups. The program uses this fact and therefore deals better with graphs which have a reasonably large automorphism group.

However there are cases where both programs struggle. This happens when the automorphism group is very large — for example, an iterated wreath product of symmetric groups. We think that it might be worthwhile to recognise these cases and deal with them in a more intelligent way.

Other packages that have been useful in our investigations are: Discreta, a package for the construction of block designs developed at Bayreuth, and two implementations of WL-stabilisation [1]. The latter may serve as a demonstration of our pragmatic approach to algorithms: While one implementation has a superior worst case running time analysis the other is in fact faster for many examples.

Computer experiments go hand in hand with software development. Two facets of complexity, theoretical difficulty and practical efficiency, both deserve our attention. Accumulated experience may be of interest to computer scientists. The paper [7] serves as an example of such a bilateral intermediation. Much more interactions were discussed implicitly and explicitly in the past.

4. Japanese catalogue and related results

In any branch of Mathematics it is useful to have a repertoire of objects in order to discover general properties, and to check conjectures. In Combinatorics many classes of objects have an important numerical invariant, often called the order of the object. It makes sense then to try and classify all objects of small order. Examples include small groups, small transitive permutation groups, small regular graphs.

The first steps towards the classification of small strongly regular graphs were taken by several research teams, mainly in Moscow, Eindhoven, and in Canada. Surprisingly for a long time there were no serious attempts to seriously enumerate association schemes and coherent configurations.

In 1998, See-Song [26] published a survey of all association schemes on up to 15 points in terms of certain standard constructions. After that a group including Hanaki and Miyamoto [10] started to systematically tackle the problems of enumerating association schemes.

Their main results, which include all schemes of order up to 31, appear on the website [21]. There are also partial catalogues for some higher orders. The known schemes can be downloaded in the form of GAP adjacency matrices. There are some articles describing their results, however their search methods do not appear in evident and sufficiently detailed form.

Other patterns of classification include work on 28 points [14], as well as the second author's classification of small Schur rings (unpublished).

We started this project, not being aware of any attempt at classifying small coherent configurations. We report in [17] our strategies, difficulties, and first results. After the submission of a brief report about this project we were informed by Eiichi Bannai about a project run by his colleagues [22] — see also the site [4]. We compare the two approaches in [17].

5. Search for small strongly regular designs

A systematic approach to the investigation of coherent configurations with two fibres was established by D.G. Higman, a founder of the theory of coherent configurations. In a series of papers (from which we only mention [11] and [12]) he attacked coherent configurations of "small type" (his wording), that is, non-trivial types of coherent configurations with two fibres, each of rank at most three.

Here by trivial we – like Higman – understand *reducible* cases, that is, those configurations which may be represented as direct products or wreath products of configurations of smaller order.

According to the background mainly developed in [11] there are four possible "small types", viz. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$, and $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ & 3 \end{bmatrix}$. The first two types can be interpreted as the classes of symmetric designs and quasi-symmetric designs, respectively (classical structures in design theory). The third type was called *strongly regular designs* (SRD) by Higman. Like other types this class of designs is closed with respect to duality.

Note that if we consider designs of the second type above, their point graph is of rank 2, whereas their block graph is of rank 3. Hence the duals of these designs do not belong to the same class. As coherent configurations this distinction disappears.

Thus we consider the incidence structure (P, B, F), where P is a set of *points*, B a set of *blocks*, and F a set of *flags*, here $F \subseteq P \times B$, and P and B are disjoint non-empty sets. The *dual* incidence structure is (B, P, F^T), where $F^T = \{(y,x) | (x,y) \in F\}$.

Definition 1 [12]. *A strongly regular design* (SRD) *is a finite incidence structure with n_1 points and n_2 blocks which satisfies the following conditions* (*together with the corresponding conditions, formulated for their duals*):

1. *Each block is incident to S_1 points.*

2. *Two distinct blocks are incident with either a_1 or b_1 points, $a_1 > b_1$, and both cases occur. This allows us to define the block graph Γ_2 to be the graph whose vertices are blocks, two distinct blocks being adjacent if they are incident with a_1 common points.*

3. *The number of blocks incident with a point x and adjacent to a block y is N_2 or P_2, according as x and y are incident or not.*

Here by the dual conditions $1', 2', 3'$ we understand the same conditions 1, 2, 3, just formulated for the dual structure. In the constants applying to the dual we change the index from 1 to 2 or vice versa. Thus, by definition the SRD's form a self-dual class of designs.

We refer to [12] for the elements of the theory of SRD's that is developed there. In particular it is proved that SRD's are equivalent to CC's of type $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$ (with the additional requirement that both rank 3 schemes induced on both fibers are symmetric); such a CC has two fibres and rank 10.

Note that an SRD is precisely the same as a $1\frac{1}{2}$-design in the sense of Neumaier [23] that in addition satisfies conditions 2 and $2'$.

A particular case of SRD's implies the existence of a merging which is an association scheme. This is in a sense a folklore result which for completeness is presented below.

An SRD Γ is called algebraically (or formally) self-dual (or *symmetric*) if all parameters of Γ coincide with the corresponding parameters of its dual Γ^T. A symmetric SRD (SSRD) Γ is (combinatorially) self-dual if it allows a duality, that is, if Γ and Γ^T are isomorphic incidence structures.

In the case of an SSRD Γ we may consider the following colour graph: Vertices are points and blocks, relations are a) the identity; b) the union of the point and block graphs; c) the union of their complements; d) the symmetrised incidence relation, and e) the symmetrised non-incidence relation.

Proposition 2. *Let* Γ *be an* SSRD *and* $\mathfrak{M}$ *the colour graph constructed above. Then* $\mathfrak{M}$ *is a symmetric association scheme of rank* 5.

Proof. The proof is evident, due to the existence of a formal self-duality σ. This duality translates to an involutory automorphism of the tensor of structure constants of the CC of rank 10. Merging each colour with its image under σ yields tensor for an association scheme of rank 5. □

In fact, Higman developed in [12] a quite involved general theory of SRD's, proving a number of very helpful properties and reformulations, in particular that both point and block graphs of an SRD Γ are strongly regular graphs (SRG).

Section 3.2 of [12] lists 15 numerical equations for the parameter sets of an SRD. Unfortunately there is a (typographical?) mistake in the formulation of Condition 15 (see the discussion in [17]). This is why in our consideration we were omitting this Condition 15. (Its correct reconstruction remains on our agenda.)

It is significant to mention that the concept of an SRD is an honest generalisation of the classical concept of a partial geometry and thus in particular of a net and dually a transversal design. In what follows we restrict our attention to the case of proper SRD's (that is those which are not coming from partial geometries).

An extra restriction, employed in [12], was that both point graph and block graph should be *primitive* SRG's (that is, both the graph and its complement are connected). This extra condition made SRD's quite rare objects. Higman describes in [12] a few infinite families and sporadic examples that come from the areas of finite simple groups and diagram geometries. There are a couple of parameter tables in Higman's text. For example, Table 1 lists just three parameter sets for (proper) non-symmetric SRD's with $n_1 = n_2 \leq 500$. Table 3 includes all known primitive SRD's (including partial geometries) with $n_1 \leq n_2 \leq 50$. It contains just 10 parameter sets.

The first job in our project was to generate the list of feasible parameters of SRD's with n up to 200, $n = \max(n_1, n_2)$. The list contains for each of the two designs Γ and Γ^T the parameters $(n_i, s_i, a_i, b_i, N_i, P_i)$, $i = 1, 2$, as well as the parameters $(k, \lambda, \mu, r, s, f, g)$ for both accompanying SRG's (point and block graphs). Remarks refer to the available information about the known amount of SRD's (up to combinatorial isomorphisms), schurity of the associated CC's, and other helpful hints. For completeness the list also includes parameters of possible partial geometries (covering also transversal designs and orthogonal arrays).

Note that a given CC of type $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$ can be generated by four different SRD's, some of which may be isomorphic (for known SRD's, this information is included to the list). The list itself soon will be available on the home page of the second author.

It turns out that as soon as the requirement of primitivity of both point and block graphs is dropped, the size of the list of feasible parameter sets increases drastically. Indeed we have 22 parameter sets for $n \leq 20$, 318 for $n \leq 100$, and 869 for $n \leq 200$.

Besides the completeness of the list of parameters, our new input to it refers only to proper SRD's. (For those coming from partial geometries we simply are copying the information from the famous list by Andries Brouwer [3]).

The next stage was the constructive enumeration of all SRD's (up to isomorphism) with a given parameter set. We exploited a more or less standard approach to generation, creating a backtracking procedure. Its details will be reported elsewhere. It is significant to mention that this procedure is depending on the knowledge of all SRG's with a given parameter set. (Clearly, for imprimitive SRG just one such graph always exists.) At this moment full results have been obtained for the initial 25 parameter sets ($n \leq 24$; see [17] for details). The first hole in the constructive enumeration corresponds to set # 26 with $n_1 = n_2 = 24$.

The computer returns non-existence of SSRD's for parameter sets 5, 7, 15, 16, 22, 23, 31 ($n = 10, 12, 16, 16, 20, 21, 26$) thus pushing us to formulate some plausible conjectures about the non-existence of SSRD's in some general situations.

There exists only one Schurian configurations for parameter sets 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 17, 19, 20, 25, 27, 29, 30, etc. In most cases this result is just a reformulation of known results about partial geometries, though in a few cases the obtained result is of a slight independent interest. For example, set #11 with $n_1 = 10$ and $n_2 = 16$ reflects our preliminary knowledge that the automorphism group of the famous primitive Clebsch graph on 16 vertices is a quotient group (with a kernel of size 2) of $Aut(5 \circ K_2)$, that is of the group $S_5 \wr S_2$ of order $2^5 5!$.

There are also a few parameter sets for which we have more than one SRD (Schurian or non-Schurian), corresponding to the known amount of orthogonal arrays with prescribed parameters.

The first case with a pleasant surprise is provided by parameter set #6 ($n_1 = 8, n_2 = 12$) where there exists a unique SRD that is non-Schurian. Its model (computer free interpretation in our terminology) is described in Section 6.

In addition we mention results corresponding to parameter sets #8, 12, 13, 18, 21, 24, 28, 33. In each such case there exists at least one non-Schurian example. A common feature of all these cases is that for us the existence of the discovered models was not clear at all before we discovered it by computer search. In all these cases we are either facing new incarnations of some classical incidence structures, or we really are enjoying a pleasure to understand an artifact completely new to us, or we are still struggling in order to find a suitable interpretation of the computer-aided result.

In this text we will in particular consider with all details one more parameter set, #8 (SSRD with $n = 12$, see Section 7). Here we get 8 SSRD's , which imply 3 CC's with two fibres. The Schurian one is nothing else but a new incarnation of the famous Reye configuration, while its two non-Schurian mates are in our eyes quite striking combinatorial objects, new in a certain sense.

As was mentioned we report about an ongoing project. There are a few other very promising cases, like parameter set # 21, $n_1 = 16, n_2 = 20$. This is one of these non-symmetric proper SRD's where we have a few solutions (four in this case), all non-Schurian, and their interpretation requires quite a tricky manipulation with suitable subgraphs of a well-known SRG (here, again the Clebsch graph).

6. The smallest non-Schurian SRD with 8 points and 12 lines

We are now in a position to consider with enough details and from a few diverse points of view the first example (# 6 in our list) of a non-Schurian SRD. It has the following parameters: $n_1 = 8$, $S_1 = 4$, $a_1 = 2$, $b_1 = 0$, $N_1 = 2$, $P_1 = 2$, $n_2 = 12$, $S_2 = 6$, $a_2 = 3$, $b_2 = 2$, $N_2 = 5$, $P_2 = 5$, $(n_1, k_1, l_1, \mu_1, \lambda_1) = (8, 4, 3, 4, 0)$ and $(n_2, k_2, l_2, \mu_2, \lambda_2) = (12, 10, 1, 10, 8)$.

Up to isomorphisms there is just one CC with two fibres of size $n_1 = 8$ and $n_2 = 12$. This CC is non-Schurian, the SRD and the one with complement incidence structure are isomorphic. The automorphism group G of this CC, denoted now by $\mathfrak{S}$, has order 192, acts transitively on the fibres and, as intransitive permutation group of degree 20, has rank 11. Recall that the WL-closure of an SRD has always rank 10. Thus this inequality, observed by us on a computational level, allows to claim that the SRD # 6 is non-Schurian.

The computer also returns the list of all 12 blocks of $\mathfrak{S}$. Recall that the point graph of $\mathfrak{S}$ is isomorphic to the complete bipartite graph $\Gamma_1 = K_{4,4}$, while the block graph Γ_2 has the form $\overline{6 \circ K_2}$. Each subset of the vertex set V corresponding to a block induces a quadrangle (or 4-cycle) in Γ_1. Thus in what follows it is convenient to consider the block set B of $\mathfrak{S}$ as the set of 12 induced quadrangles in Γ_1. It is listed below as follows:

$$\begin{array}{cccc} (0,1,2,3) & (0,1,4,6) & (0,1,5,7) & (0,2,4,7) \\ (0,2,5,6) & (0,3,6,7) & (1,2,4,5) & (1,3,4,7) \\ (1,3,5,6) & (2,3,4,6) & (2,3,5,7) & (4,5,6,7). \end{array}$$

Note that the edges of (a, b, c, d) include $\{a, d\}$ as well as three edges in the natural order.

GAP also returns some extra information about the permutation group G of degree 20, as well as a few of its names. This information will be discussed below.

Our foremost goal is now to reconsider the discovered structure from scratch, reducing, as much as it is possible, the reader's dependence on the knowledge of data obtained by the computer. In our eyes the fulfilment of this goal is of independent interest, showing some patterns of scientific computation in AGT.

According to the selected labelling the bi-components of Γ_1 are $\{0,3,4,5\}$ and $\{1,2,4,7\}$.

To prove that the structure $\mathfrak{S}$ is our unique solution we first of all need to consider the point graph $\Gamma_1 = K_{4,4}$ and to select in it a system consisting of 12 quadrangles (from the complete set of 36 quadrangles in Γ_1), such that each vertex of Γ_1 is in 6 quadrangles, each edge in 3 quadrangles, and each non-edge in 2 quadrangles.

It turns out that up to isomorphism there exist just three systems of quadrangles (including $\mathfrak{S}$). The second system has an intransitive automorphism group of order 16 isomorphic to $D_4 \times S_2$ with the orbits $\{0,3,4,5\}, \{1,7\}, \{2,6\}$. The third system has a group of order 12 isomorphic to A_4 with the orbits $\{0,3,5,6\}, \{1\}, \{2,4,7\}$. The reader who is interested to get a computer-free proof of the uniqueness of $\mathfrak{S}$ is welcome to fulfil the routine exercise of the reconstruction of the second and third solutions as well as to convince himself that this is the full set of solutions.

Finally, we note that the first solution (listed in fact above) contains with each quadrangle the "opposite" one which is induced by the remaining four vertices while the second and third solutions do not satisfy this necessary property. (Recall that we need for the block graph Γ_2 six pairs of disjoint blocks.) Thus this comparison justifies the fact that we have just one SRD with the considered parameters.

We refer to [17] for further discussion of the outlined proof of the uniqueness in terms of partially balanced incomplete block designs (PBIBDs).

Model 1 (A mnemonic way via a Latin square). Consider the following Latin square L, the Cayley table of the group E_4. Here e is the identity, and a, b, c are involutions:

$$\begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix}.$$

Check that there are $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ Latin sub-squares of order 2. Identify rows and columns of L with points, and sub-squares of L with blocks. Incidence is natural. It is an easy exercise to check that the resulting incidence structure has all properties of SRD #6. Due to the uniqueness it is isomorphic to $\mathfrak{S}$. Of course, an isomorphism may be established also explicitly via a suitable labelling of rows and columns of L by elements from the set $[0, 7]$.

It is a little bit more tricky to observe the group of order 192. For this purpose let us consider an amorphic association scheme [9] which is defined on the cells of L. The first class of the scheme, of valency 6, contains pairs of cells in the same row or column. The second class of valency 3 contains pairs of cells filled by the same element. All other pairs of cells form the third class of valency 6. According to the theory developed in [9] the automorphism group of this scheme has order $|E_4|^2 \cdot |Aut(E_4)| \cdot 2 = 16 \cdot 6 \cdot 2 = 192$. This group is isomorphic to our group G.

In fact we were able to elaborate four additional models of this strongly regular design (see [17], Models 2–5). These models refer to such diverse structures as the affine plane of order 4, a reaction graph on cubes, extra manipulations inside of $K_{4,4}$, and the consideration of the famous Shrikhande graph. Altogether our models allow to reach a computer-free proof for a number of properties of SRD #6, as presented in the proposition below.

Proposition 3. 1. *Up to isomorphism there exists a unique* SRD $\mathfrak{S} = (V, B)$ *on* 8 *points and* 12 *blocks with parameter set* #6.

2. *The coherent configuration* $\mathcal{M}$ *generated by* $\mathfrak{S}$ *has two fibres and rank* 10.

3. *The automorphism group* $G = Aut(\mathfrak{S})$ *is an intransitive permutation group of degree* 20, *rank* 11, *and order* 192.

4. *The coherent configuration* $\mathcal{M}$ *is non-Schurian.*

5. *The group* G *acts faithfully on* 8 *points and coincides with the group* 41 *in the* GAP *catalogue of small transitive groups.*

6. *The group* G *has the following names*:

$$G \cong [E_{16} : S_3].\mathbb{Z}_2 \cong E_8 : S_4 \cong E_4 : (S_3 \wr S_2) \cong [E_{16} : \mathbb{Z}_3] : E_4.$$

7. The Reye configuration and its non-Schurian mates

7.1. A general outline

We are now working with the next interesting case provided by the parameter set #8. Here $n_1 = n_2$, and the structure is formally self-dual, thus it is enough to list the parameters of the initial SRD, which are $n = 12$, $S = 6$, $a = 3$, $b = 2$, $N = 4$, $P = 4$, $(n, k, l, \lambda, \mu) = (12, 8, 3, 4, 8)$. Both the point and the block graphs are of the form $\overline{3 \circ K_4}$.

By computer search we found that there exist exactly three solutions up to isomorphism. Each solution below will be considered as a CC and as an AS. It turns out that one solution is Schurian and is well-known (though in an alternative incarnation). The other two are non-Schurian. We believe that as CC's these objects were not known before, though the corresponding AS's are listed in the Japanese catalogue.

First we provide the results formally and admit that at this stage the proof of our proposition below is computer-based. The remaining text should be interpreted as providing an interpretation for the first structure and explanations of the non-Schurian ones (see Section 8 for a brief discussion of these terms).

Proposition 4. *There are exactly three solutions for the parameter set* # 8*. The main features of the solutions are summarised in Table below. Each solution may be interpreted as* CC, AS, *or* SRD. *There are three CC's and three corresponding AS's, while altogether* 8 *non-isomorphic* SRD*'s.*

More concrete data about the solutions is provided below, while much more details may be found in Supplement B to the preprint [17].

Before entering the details let us consider a brief sketch of the classical structure, usually called *Reye configuration*, which corresponds to our solution R_1.

The structure was discovered by T. Reye [25]. It appeared in terms of projective geometry and included 12 points, 16 lines, and 12 planes. The pair (points, lines) indeed forms a configuration

Table

Main information about parameter set # 8

Notation	Schurity	self-dual	# SRD's
R_1	yes	yes	2
R_2	no	no	4
R_3	no	yes	2

	CC			AS		
Notation	$\lvert Aut\rvert$	rank	Aut	$\lvert Aut\rvert$	rank	Aut
R_1	576	10	$(S_2 \wr S_4)^{pos}$	1152	5	$S_2 \wr S_4$
R_2	24	52	$A_4 \times S_2$	24	52	$A_4 \times S_2$
R_3	32	58	$(D_4 \times S_2) : S_2$	64	29	$((C_4 \times C_4) : S_2) : S_2$

of type $(12_4, 16_3)$ in the sense which was coined by Reye himself (1876) – a partial linear space in modern terms. The pair (lines, planes) is also a configuration (with dual parameters), while the pair (points, planes) is not literally a configuration but a general incidence structure.

The projective model of the Reye configuration is described in terms of the cube Q_3. Points are the eight vertices of the cube, its centre, and three points at infinity corresponding to the directions of the edges of Q_3. The 16 lines, each of size 3, consist of the 12 edges of Q_3 and the four space diagonals with natural incidence. The 12 planes are the six faces of Q_3 and the six planes passing through diagonally opposite pairs of edges (again with natural incidence). A classical discussion of nice properties of $(12_4, 16_3)$ may be found in [13].

Typically, symmetries of this structure are considered strictly in the projective framework and thus are explained in terms of the geometrical symmetries of Q_3. For us the pair (points, planes) appears as "abstract" incidence structure. This is why finally its automorphism group turns out to be much larger and has order 576 (if we are thinking of the CC). Still this group is isomorphic to a subgroup of S_8. In the next subsection we will present one more model (new in our eyes) of R_1 using again the structure of the graph $K_{4,4}$. This model will reveal the full group of R_1 both as CC and AS. The model immediately implies the fact that R_1 is Schurian.

The other two SRD's, denoted by R_2 and R_3, are non-Schurian. We will describe their groups and will try to consider them as subgroups of $Aut(K_{4,4})$. Also we will outline how both R_2 and R_3 can be obtained as so-called algebraic mates of R_1 (in the sense of [14]). This will provide enough justification to regard both R_2 and R_3 as pseudo-Reye SRD's. We however admit that there still exists some extra potential to describe in the future all three objects in more common terms and hopefully to completely remove the dependence on computer data.

7.2. Other models for the Reye configuration

We consider again the bipartite graph $K_{4,4}$, this time with a more natural labelling. That is, the two bipartite parts are $\{0,1,2,3\}$ and $\{4,5,6,7\}$. Let $G = S_2 \wr S_4 = Aut(K_{4,4})$. Here, $|G| = 2 \cdot (4!)^2 = 1152$. Let G^+ be the subgroup of even permutations in G. Consider matchings between the parts in $K_{4,4}$, each matching consists of four edges. Under the action of G^+ these 24 matchings form two orbits of length 12 with the representatives $\{\{0,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\}\}$ and $\{\{0,4\},\{1,5\},\{2,7\},\{3,6\}\}$.

Let us call the elements of the first orbit "points" and the elements of the second orbit "planes" (or blocks). We also introduce "lines," they are edges of $K_{4,4}$ and there are 16 lines. Incidence between lines and points and between lines and planes is natural. Thus every point lies on four lines, every plane contains four lines. Each line is incident with $3! = 6$ elements; half of them are points and half are planes. So each line is incident to 3 points and 3 planes.

A point and a plane are incident if they share a line incident to both. In fact they then share exactly two lines, and these two lines uniquely determine the point and the plane. Finally, each point is incident to $\binom{4}{2} = 6$ planes, and vice versa.

It turns out that both the point and block graphs of the resulting incidence structure are imprimitive connected SRG's with block size 4. We get all points not collinear to a given point by applying the cyclic group $\langle(4,5,6,7)\rangle$ to that point.

The centraliser ring of the action of G^+ on points and blocks gives us a Schurian CC of rank 10. If we apply the whole group G to our colour graph we get also dualities. Thus the association scheme resulting from the merging is Schurian of rank 5.

Proposition 5. 1. *The above model is isomorphic to the Reye incidence structure* (*let us denote it by* R_1) *and thus is an* SSRD.

2. $Aut(R_1) \cong G^+ = Aut(W)$, *where* W *is the coherent closure of the directed incidence graph.*

3. *The* WL-*closure* $\mathfrak{M}$ *of the undirected incidence graph of* R_1 *is a Schurian rank* 5 AS.

4. $Aut(\mathfrak{M}) \cong G$.

5. $CAut(\mathfrak{M}) \cong G$.

Proof. Parts 1 through 4 were justified above. For the justification of Part 5 it is enough to prove that the incidence graph of R_1 and of the complement $\overline{R_1}$ to R_1 are not isomorphic. For this it is sufficient to find a difference in the value of a suitable numerical or structural invariant of the two incidence graphs.

Consider any line of the Reye geometry. It is clear that the three points and the three lines incident to it form an induced subgraph of the incidence graph (see Figure 1) that is isomorphic to the graph $K_{3,3}$. Altogether there are 16 such subgraphs; one example is given by the vertices $0, 1, 2, 16, 21, 23$.

The reader is invited to check that the complementing incidence graph (see Figure 2) does not contain a copy of $K_{3,3}$. □

At this stage we wish to consider two more models of R_1. Though they are of a local nature and thus are just revealing only a part of the entire symmetry of R_1 (like it was with the classical projective model related to Q_3), they will contribute extra interesting features of R_1. Both extra models were originally detected with the aid of a computer, some of their features are presented visually.

Semiregular action of $\mathbb{Z}_{12}$. Let us consider a model of R_1 that reveals the existence of a subgroup $\mathbb{Z}_{12}$ in the group G. It is visually observed from Figure 1 as a rotational symmetry.

We note that a similar symmetry allows to depict the 24-cell (cf. [17]).

We would like to direct the reader's attention to a special partition of the non-incidence graph of R_1. It consists of 6 co-cliques, each of size 4, while between two co-cliques there are no edges at all or there is a partial graph with 8 vertices of valency 2. We again refer to the diagram depicted in Figure 2.

Note that the quotient graph is isomorphic to the graph $K_{3,3}$ with the automorphism group of order 72. It turns out that the kernel of this action is exactly the group E_{16}. Thus we get that $G = Aut(R_1) \cong E_{16} : (S_2 \wr S_3)$.

7.3. Two non-Schurian mates

The two objects that we approach here play a special role in our presentation. According to the Japanese catalogue the order 24 is the first order for which the number of AS's increases drastically: There are 750 AS's, 81 of them are non-Schurian. Practically, this is the first order for which the task of computer-free comprehension of all existing objects loses its sense.

This understanding dictates the style of our presentation in this subsection. The exposition centres around computer results. We will briefly discuss the way of presentation, intentionally referring to [17] for all relevant data.

Here the group $AAut(\mathfrak{W})$ of all algebraic automorphisms of a given CC $\mathfrak{W}$ plays a crucial role. The main strategy looks as follows. We consider a pair consisting of the classical Reye incidence system R_1 and, say, R_2. We find a suitable subgroup H in the intersection of $Aut(\mathfrak{W}_1)$ with $Aut(\mathfrak{W}_2)$, where $\mathfrak{W}_1$ and $\mathfrak{W}_2$ are the two SRD's R_1 and R_2, respectively. The subgroup H turns out to be intransitive and the rank of $\mathfrak{W} = V(Aut(H))$ relatively high. We found $AAut(\mathfrak{W})$ and observed an element $\sigma \in AAut(\mathfrak{W})$ which sends $\mathfrak{W}_1$ to $\mathfrak{W}_2$. This immediately implies (see [14]) that $\mathfrak{W}_1$ and $\mathfrak{W}_2$ are algebraically isomorphic to CC's. In particular this provides a proof of the fact that $\mathfrak{W}_2$ is a CC with the same parameters as $\mathfrak{W}_1$, and therefore R_2 is an SRD with the same parameters as R_1.

The same strategy is used for the pair (R_1, R_3).

It remains just to discuss briefly the main relevant data.

For R_2 we have $Aut(R_2) = A_4 \times S_2$. This group of order 24 turns out to be a subgroup of $Aut(R_1)$ and we use it in the role H. The rank of $V(H)$ is 52, and $AAut(V(H))$ has order 72.

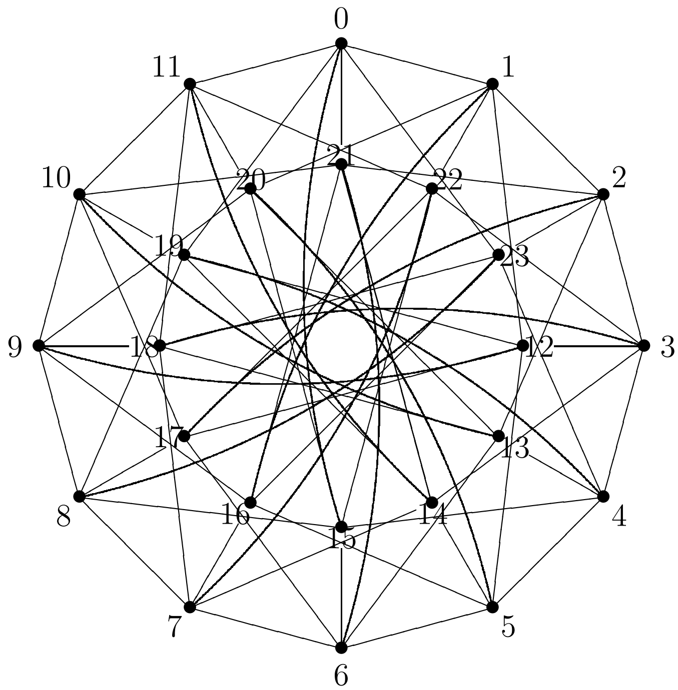


Figure 1. The incidence graph of the Reye configuration.

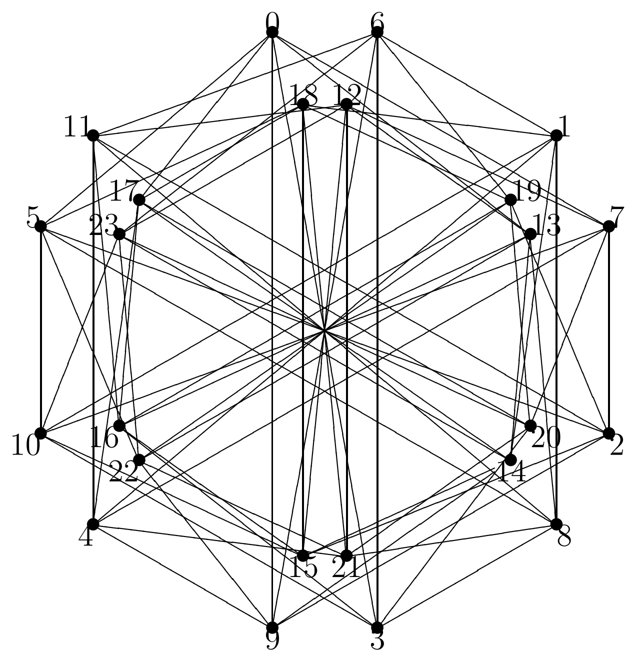


Figure 2. The non-incidence graph of the Reye configuration.

For R_3, $Aut(R_3) = (D_4 \times S_2) : S_2$, a group of order 32 and rank 58. It is convenient to select as H the group $D_4 \times S_2$ of order 16 and rank 90. For both cases all relevant data obtained by computer is presented in [17], the systems are there identified by the order of the group $Aut(R_i)$, $i = 2, 3$.

8. Concluding remarks

In this section we discuss a few issues not strictly related to the main body of the presentation, although in our eyes they may help the reader to get an overview of related results, activities, and intentions around AGT.

8.1. More on CC's

The concept of CC has two origins that appeared independently and more or less simultaneously. Higman in 1970 introduced CC's in order to better understand the links between group theory and relational structures, in particular in the framework of the systematic investigation of permutation representations of the finite simple groups.

B.Yu. Weisfeiler and A.A. Leman published in 1968 a seminal paper in Russian [29] where cellular algebras (slight generalisations of CC's, originally formulated in matrix terms, cf. [6]) were introduced in an attempt to understand the complexitiy of the graph isomorphism problem. The first results of a growing group in Moscow around W. and L. were presented to a Western audience in 1976 [24]. Since then both approaches were slowly converging, resulting in today's rich theory of CC's and AS's, one of the cornerstones of AGT. Still computer scientists keep a serious interest to the possibilities of CC's in the framework of complexity theory; [7] may serve as an example.

Besides the two origins mentioned above, CC's and AS's provide in AGT a very helpful language for the systematic investigation of diverse structures such as distance regular graphs, generalised polygons, designs, codes, partial geometries, etc. In this context a descriptive part of the theory of AS's was always very significant, resulting in the creation of catalogues of distance regular graphs, SRG's, and AS's. However still there was an unfortunate gap in the creation and support of a similar catalogue of CC's.

With this paper we are trying to announce the necessity of the development of such an approach, to report about first steps in this direction, and to communicate a number of interesting objects we discovered along the way.

8.2. Further intentions

This paper is simply a first short report about our ongoing efforts to refresh the attention to the constructive enumeration and investigation of small CC's and AS's.

Due to the time and space limitations it was not possible to cover in this text all results already achieved.

We are in a position to extend the presented exposition and to continue our efforts to enumerate structures.

In particular the second author plans to prepare for publication a report on the enumeration of S-rings over groups of small order, CC's of small order, and to make the corresponding catalogues available to the scientific community.

The authors (together with some of our colleagues) hope to prepare complete and detailed reports — reasonably computer-free — on all CC's of up to 16 vertices and all AS's on up to 24 vertices.

Last but not least, at some point we wish to present to a wide audience our views about changes in the style of mathematical literature, in particular in the area of AGT, that are influenced by the ever increasing role of computers.

In addition to our traditional concepts of "explanation" and "interpretation" of computer-aided results [18] we wish also to discuss how the use of computers is changing the style and the spirit of a proof in AGT. (The reader was able to observe this in the current preprint.) To make this message more precise we want to make the following claim: The presentation of a computer result in AGT should rely on the relative strengths of humans and computers. While a human should still try to present all crucial ideas to the reader in a pleasant way, all "annoying" details should be more or less completely delegated to the computer.

Acknowledgments

For a few decades Igor Faradžev was a partner of the first author and a rôle model for the second author. We kindly acknowledge Igor's input on the edge between AGT and computer algebra. We thank Misha Muzychuk for helpful conversations as well as Danny Kalmanovich, Christian Pech, and Matan Ziv-Av for efficient assistance in various computer-related aspects. We are much grateful to I. Belousov for the invitation to submit this paper to the collection in honour of A. A. Makhnev. We are pleased to thank A. S. Kondrat'ev for kind attention to this paper and very helpful editorial comments.

REFERENCES

1. **Babel L., Chuvaeva I.V., Klin M., Pasechnik D.V.** Algebraic combinatorics in mathematical chemistry. Methods and algorithms. II. Program Implementation of the Weisfeiler-Leman algorithm: Technical Report TUM-M9701. München: Technische Universität München, 1997. 40 p. URL: http://arxiv.org/abs/1002.1921v1 (arXiv:1002.1921v1 [math.CO]).
2. **Bose R.C.** Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13, no. 2. P. 389–419.
3. **Brouwer A.E.** Parameters of strongly regular graphs [e-resource]. URL: http://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html.
4. Coherent Configurations with at most 13 vertices [e-resource]. URL: http://researchmap.jp/muprb160e-1782674.
5. **Faradžev I.A., Klin M.H.** Computer package for computations with coherent configurations // Proc. ISSAC-91. Bonn: ACM Press, 1991. P. 219–223.
6. **Faradžev I.A., Klin M.H., Muzichuk M.E.** Cellular rings and groups of automorphisms of graphs // Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects / edts. I.A. Faradžev, A.A. Ivanov, M.H. Klin, and A.J. Woldar. Dordrecht: Kluwer Acad. Pub., 1994. P. 1–152.
7. **Fürer M.** Weisfeiler-Lehman refinement requires at least a linear number of iterations // Automata, Languages and Programming. Berlin: Springer, 2001. P. 322–333. (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 2076.)
8. GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming (Ver. 4.4.12., 2008) [e-resource]. URL: http://www.gap-system.org/.
9. **Gol'fand Ja.Ju., Ivanov A.V., Klin M.H.** Amorphic association schemes // Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects / edts. I.A. Faradžev, A.A. Ivanov, M.H. Klin, and A.J. Woldar. Dordrecht: Kluwer Acad. Pub., 1994. P. 167–186.
10. **Hanaki A., Miyamoto I.** Classification of association schemes of small order // Discrete Math. 2003. Vol. 264. P. 75–80.
11. **Higman D.G.** Coherent algebras // Linear Algebra Appl. 1987. Vol. 93. P. 209–239.
12. **Higman D.G.** Strongly regular designs and coherent configurations of type $\begin{bmatrix}3 & 2\\ & 3\end{bmatrix}$// European J. Combin. 1988. Vol. 9, no. 4. P. 411–422.
13. **Hilbert D., Cohn-Vossen S.** Anschauliche Geometrie. Reprint der 1932 Ausgabe. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 358 p.
14. **Klin M., Muzychuk M., Pech C., Woldar A., Zieschang P.-H.** Association schemes on 28 points as mergings of a half-homogeneous coherent configuration // European J. Combin. 2007. Vol. 28, no. 7. P. 1994–2025.
15. **Klin M., Muzychuk M., Ziv-Av M.** Higmanian rank-5 association schemes on 40 points // Michigan Math. J. 2009. Vol. 58, no. 1. P. 255–284.

16. **Klin M., Pech C., Reichard S., Woldar A., Ziv-Av M.** Examples of computer experimentation in algebraic combinatorics // Ars Math. Contemp. 2010. Vol. 3, no. 2. P. 237–258.
17. **Klin M., Reichard S.** Constructive enumeration and investigation of some families of small coherent configurations: preprint / Ben Gurion University. Beer Sheva, 2012. (Preliminary version.)
18. **Klin M., Reichard S., Woldar A.** Siamese combinatorial objects via computer algebra experimentation // Algorithmic Algebraic Combinatorics and Gröbner bases. Berlin: Springer, 2009. P 67–112.
19. **Makhnev A.A.** Partial geometries, their extensions, and related graphs // J. Math. Sci. 2000. Vol. 102, no. 3. P. 4009–4017.
20. **McKay B.D.** Nauty User Guide (Ver. 2.4) / Australian National University. Canberra, 2009. 70 c.
21. **Miyamoto I., Hanaki A.** Classification of association schemes with small vertices [e-resource]. URL: http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/.
22. **Nagatomo A.** Classification of coherent configurations with at most 13 points (Japanese): Master's thesis / Kyushu University. 2009.
23. **Neumaier A.** $t\frac{1}{2}$-designs // J. Combin. Theory. Ser. A. 1980. Vol. 28, no. 3. P. 226–248.
24. On Construction and Identification of Graphs / edt. B. Weisfeiler. Berlin: Springer, 1976. 237 p. (Lect. Notes Math.; vol. 558.)
25. **Reye Th.** Die Hexaëder- und die Octaëder-Configurationen $(12^6, 16^3)$ // Acta Math. 1882. Vol. 1, no. 1. P. 97–108.
26. **See K., Song S.Y.** Association schemes of small order // J. Statist. Plann. Inference. 1998. Vol. 73, no. 1-2. P. 225–271. (R. C. Bose Memorial Conference. Fort Collins, CO, 1995.)
27. **Soicher L.H.** The DESIGN package for GAP (Ver. 1.4., 2009) [e-resource]. URL: http://www.gap-system.org/Packages/design.html.
28. **Soicher L.H.** The GRAPE package for GAP (Ver. 4.3, 2006) [e-resource]. URL: http://www.gap-system.org/Packages/grape.html.
29. **Weisfeiler B.Yu., Leman A.A.** A reduction of a graph to a canonical form and an algebra arising during this reduction // Nauchno-Technicheskaya Informatsiya. 1968. Vol. 2, no. 9. P. 12–16.

Received January 15, 2013

Klin Mikhail
Department of Mathematics
Ben-Gurion University of the Negev
84105 Beer Sheva, Israel
e-mail: klin@cs.bgu.ac.i

Reichard Sven
Institut für Algebra
TU Dresden, Germany

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

О ПОВЕДЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТОГО ПОРЯДКА ИЗ ЦИКЛА ЗИНГЕРА В ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ[1]

А. С. Кондратьев, А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко

Пусть $G = SL_n(q)$, где $n \geq 2$ и q — степень простого числа p. Циклом Зингера группы G называется любая ее циклическая подгруппа порядка $(q^n - 1)/(q - 1)$. В работе классифицированы абсолютно неприводимые G-модули над полем характеристики p, на которые элемент заданного простого порядка m из цикла Зингера группы G действует свободно, в следующих трех случаях: а) вычет числа q по модулю m порождает мультипликативную группу поля порядка m (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$.

Ключевые слова: специальная линейная группа, цикл Зингера, абсолютно неприводимый модуль, свободное действие элемента.

A. S. Kondrat'ev, A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko. On the behavior of elements of prime order from a Zinger cycle in representations of a special linear group.

Let $G = SL_n(q)$, where $n \geq 2$ and q is a power of a prime p. A Zinger cycle of the group G is any its cyclic subgroup of order $(q^n - 1)/(q - 1)$. Here absolutely irreducible G-modules over a field of the defining characteristic p where an element of a given prime order m from a Zinger cycle of G acts freely are classified in the following three cases: a) the residue of q modulo m generates the multiplicative group of the field of order m (in particular, this holds for $m = 3$); b) $m = 5$; c) $n = 2$.

Keywords: special linear group, Zinger cycle, absolutely irreducible module, free action of an element.

К 60-летию Александра Алексеевича Махнева

Введение

Пусть G — конечная группа и V — G-модуль над некоторым полем. Говорят, что нетривиальный элемент группы G действует *свободно* (или *без неподвижных точек*) на V, если он не имеет ненулевых неподвижных векторов в V. Большой интерес вызывает проблема описания неприводимых G-модулей, где некоторый элемент простого порядка из G действует свободно. Результаты в этом направлении находят многочисленные приложения, в частности, при исследовании распознаваемости конечных простых групп по спектру (множеству порядков элементов) или графу простых чисел, а также при изучении строения конечных групп с несвязным графом простых чисел (см., например, обзоры [3; 4]).

Пусть p — простое число, $q = p^l$, $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, P — алгебраически замкнутое поле характеристики p и $G = SL_n(q)$ — специальная линейная группа степени $n \geq 2$ над полем $\mathbb{F}_q$. *Циклом Зингера* группы G (соответственно $G/Z \cong L_n(q)$) называется любая ее циклическая подгруппа порядка $(q^n - 1)/(q - 1)$ (соответственно $(q^n - 1)/(q - 1)(n, q - 1)$) (см. [10, теорема II.7.3]). Изучается задача классификации неприводимых G-модулей над полем P, где нескалярный элемент y заданного простого порядка m из цикла Зингера $\langle s \rangle$ группы G

[1]Исследования первого автора поддержаны РФФИ (проект 13-01-00469), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программой Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программами совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009). Исследования других авторов — НАН Беларуси в рамках отдельного проекта “Алгебраические и конечные группы и их представления: исследование проблем нормального строения анизотропных алгебраических групп и действий определенных подгрупп, важных для приложений, в модулях для конечных групп Шевалле”.

действует свободно. Именно так действуют нетривиальные элементы из цикла Зингера группы G на ее естественном модуле над полем P. Заметим также, что если H — конечная группа с несвязным графом простых чисел такая, что $F(H) \neq 1$, $\overline{H} = H/F(G) \cong L_n(q)$ и $n \geq 3$, то действие (сопряжением) группы H на $F(H)$ индуцирует на каждом главном факторе группы H, входящем в $F(H)$, точный неприводимый $\overline{H}$-модуль (над некоторым полем простого порядка), на котором все нетривиальные элементы из цикла Зингера группы $\overline{H}$ действуют свободно (см. [2; 13]). Поэтому уточнение строения группы H во многом сводится к изучению таких $\overline{H}$-модулей.

Пусть $\overline{q}$ — образ q при каноническом гомоморфизме из кольца целых чисел в поле $\mathbb{F}_m$ порядка m. В данной работе указанная выше задача решена в следующих трех случаях: а) $\overline{q}$ порождает мультипликативную группу поля $\mathbb{F}_m$ (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$. Это обобщает, в частности, результаты Г. Хигмена [8, теорема 8.2] и У. Стюарта [12, предложение 3.2], которые были получены в случае, когда $m = 3$ и $n = 2$. Р. Уилсон [14] определил неприводимые представления в характеристике 2 квазипростых групп Шевалле над конечными полями характеристики 2, где некоторый элемент порядка 3 не имеет собственного значения 1, т. е. действует в соответствующем модуле без неподвижных точек. А. Е. Залесский, В. Лемпкен и П. Фляйшманн [7, теорема 0.1] описали абсолютно неприводимые подгруппы полной линейной группы над конечным полем характеристики 2, порожденные классом сопряженных элементов порядка 3, действующих без неподвижных точек. А. В. Заварницын [16, теорема 8] указал достаточные условия, при выполнении которых элементы больших простых порядков имеют неподвижную точку в неприводимых модулях групп $PSL_n(q)$ и $PSU_n(q)$ в собственной характеристике. В статье А. Е. Залесского [15] приведен обзор результатов о собственных значениях элементов в представлениях алгебраических групп и конечных групп Шевалле, особое внимание уделяется собственному значению 1.

Далее мы пользуемся терминологией и обозначениями из [1]. Пусть $\overline{G} = SL_n(P)$, $r = n-1$, Fr — морфизм Фробениуса группы $\overline{G}$, ассоциированный с возведением элементов поля P в степень p, V — стандартный $\overline{G}$-модуль, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ — стандартные веса модуля V, $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — фундаментальные веса группы $\overline{G}$, $\omega(\varphi)$ и $\Lambda(\varphi)$ — старший вес и множество весов представления φ группы $\overline{G}$ над полем P соответственно, $S(\varphi)$ — множество собственных значений (спектр) элемента $\varphi(y)$, $S(V)$ — аналогичное множество для модуля V.

Пусть Irr_p и Irr_q — множества неприводимых представлений группы $\overline{G}$ над полем P со старшими весами $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$, где все a_i меньше p и q соответственно. Напомним, что представления из Irr_p называются *p-ограниченными.* Известно (см. [11, § 13, теорема 43]), что ограничение $\varphi|G$ неприводимо для любого $\varphi \in Irr_q$ и совокупность таких ограничений образует полный набор неприводимых представлений группы G над P. Поэтому достаточно выяснить, в каких представлениях из Irr_q элемент y действует свободно.

Доказаны следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\overline{q}$ порождает группу $\mathbb{F}_m^*$ (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$) и $\varphi \in Irr_q$ — нетривиальное представление. Элемент $\varphi(y)$ не имеет неподвижных точек тогда и только тогда, когда $\omega(\varphi) = p^j\omega_1$ или $p^j\omega_r$.*

Теорема 2. *Пусть $m = 5$ и $\varphi \in Irr_q$ — нетривиальное представление.*

1) *Предположим, что $q \equiv 4 \pmod 5$. Тогда n четно и элемент $\varphi(y)$ не имеет неподвижных точек в точности тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

a) *$\omega(\varphi) \in \{p^j\omega_1, p^j\omega_r, 3p^j\omega_1, 3p^j\omega_r, p^j(2\omega_1 + \omega_r), p^j(\omega_1 + 2\omega_r)\}$;*

b) *$n \geq 6$, $\omega(\phi) \in \{p^j\omega_3, p^j\omega_{r-2}\}$;*

c) *$n \geq 4$, $\omega(\varphi) = p^j(\omega_v + \omega_w)$, $v \in \{1, r\}$, $w \in \{2, r-1\}$;*

d) *$\omega(\varphi) = p^i\lambda + p^j\mu$, $\lambda \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $\mu \in \{\omega_2, \omega_{r-1}, \omega_1 + \omega_r, 2\omega_1, 2\omega_r\}$, $i \neq j$ и при $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ число $j - i$ четно, если $j > i$, и число $l + j - i$ четно при $j < i$;*

e) *$\omega(\varphi) = p^i\lambda + p^j\mu$, $\lambda, \mu \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $i < j$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ и $j - i$ нечетно;*

f) $\omega(\varphi) = p^i\lambda + p^j\mu + p^k\nu$, $\lambda, \mu, \nu \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $i < j < k$ *и при* $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ *числа* $j - i$ *и* $k - i$ *четны.*

В пп. a) и d) в тех случаях, когда в формулах для $\omega(\varphi)$ *встречаются коэффициенты* 2 *или* 3, *предполагается, что* $p > 2$ *или* $p > 3$ *соответственно.*

2) *Предположим, что* $q \equiv \pm 2 \pmod 5$. *Тогда* $n \equiv 0 \pmod 4$ *и элемент* $\varphi(y)$ *не имеет неподвижных точек в точности тогда, когда* $\omega(\varphi) = p^j\omega_1$ *или* $p^j\omega_r$.

Теорема 3. *Пусть* $n = 2$, h *— полупростой элемент нечетного порядка* k *из* G, $\varphi \in Irr_q$ *и* $\omega(\varphi) = a\omega_1$. *Предположим, что* $a = \sum_{j=0}^{l-1} a_j p^j$ *— p-адическое разложение числа* a. *Тогда элемент* $\varphi(h)$ *имеет неподвижную точку в точности тогда, когда существует такое неотрицательное целое число* b, *что* $bk \leq a$, $a - bk$ *четно и* $(a - bk)/2 = \sum_{j=0}^{l-1} b_j p^j$, *где* $0 \leq b_j \leq a_j$ *для всех* j *от* 0 *до* $l - 1$.

Из теоремы 3 вытекает полезное

Следствие. *Пусть* $n = p = 2$, h *— элемент порядка* $q - 1$ *из* G *и* $\varphi \in Irr_q$. *Тогда элемент* $\varphi(h)$ *имеет неподвижную точку в точности тогда, когда* φ *— тривиальное представление или представление Стейнберга степени* q *группы* G.

В конце разд. 2 рассмотрен пример, когда $G = SL_2(2^7)$ и $k = 43$, представляющий интерес для приложений к задачам распознаваемости конечных групп по графу простых чисел.

В доказательствах теорем 1–3 неоднократно используется теорема Стейнберга о тензорном произведении [11, теорема 1.1], согласно которой неприводимое представление группы $\overline{G}$ со старшим весом $\sum_{j=0}^{l-1} p^j\lambda_j$ и p-ограниченными весами λ_j эквивалентно тензорному произведению $\bigotimes_{j=0}^{l-1} Fr^j \circ \varphi_j$, где $\varphi_j \in Irr_p$ — представление со старшим весом λ_j.

1. Доказательство теоремы 1

В доказательстве теоремы [10, теорема II.7.3] указано, что в модуле V элемент s имеет собственные значения $\beta, \beta^q, \ldots, \beta^{q^{n-1}}$, где $\beta \in P^*$ — элемент порядка $q^{n-1} + \ldots + q + 1$. Отсюда следует, что $\langle s \rangle$ содержит нескалярный элемент простого порядка m тогда и только тогда, когда m делит $q^{n-1} + \ldots + q + 1$, но не делит $q - 1$. Ясно, что в группе $\langle s \rangle$ нет нескалярных инволюций. Всюду в дальнейшем $y \in \langle s \rangle$ — нескалярный элемент порядка m. Ввиду сказанного выше m нечетно. Фиксируем максимальный тор $T \subset \overline{G}$, содержащий элемент y. Далее веса группы $\overline{G}$ рассматриваются относительно тора T.

Докажем сначала три предварительные леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $\gamma \in S(V)$. *Предположим, что* $|\overline{q}| = d$. *Тогда* d *делит* n,

$$S(V) = \{\gamma, \gamma^q, \ldots, \gamma^{q^{d-1}}\}$$

и кратность каждого собственного значения равна n/d.

Доказательство. Ясно, что m делит $q^n - 1$. Поэтому $\overline{q}^n = 1$. Отсюда следует первое утверждение леммы. Поскольку $y \in \langle s \rangle$, то $(\gamma, \gamma^q, \ldots, \gamma^{q^{n-1}})$ — полный набор собственных значений элемента y в модуле V (с учетом кратностей). Остается заметить, что $\gamma^{q^{i+d}} = \gamma^{q^i}$, ибо $q^d \equiv 1 \pmod m$. □

Лемма 2. *Пусть* $|\overline{q}| = m - 1$ *и* $\varphi \in Irr_q$ *— нетривиальное представление. Тогда любой элемент порядка* m *из* P^* *содержится в* $S(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $1 \neq \delta \in S(\varphi)$. Тогда $|\delta| = m$. Так как для любого натурального числа i ограничения $\varphi|G$ и $(Fr^{li} \circ \varphi)|G$ эквивалентны и $y \in G$, то и $\delta^{q^i} \in S(\varphi)$. Поскольку $q^k \not\equiv 1 \pmod m$ при $k < m - 1$, то элементы $\delta, \delta^q, \ldots, \delta^{q^{m-2}}$ попарно различны. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть* φ, φ_1, $\varphi_2 \in Irr_p$ *и* $\omega(\varphi) = \omega(\varphi_1) + \omega(\varphi_2)$. *Тогда*

$$\Lambda(\varphi) = \{\mu_1 + \mu_2 \mid \mu_i \in \Lambda(\varphi_i)\}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из соответствующего равенства для представлений в характеристике 0 [1, гл. VIII, § 7.4, предложение 10] и совпадения систем весов p-ограниченного представления группы $\overline{G}$ и неприводимого представления аналогичной группы в характеристике 0 с тем же старшим весом [6]. □

Доказательство теоремы 1. Ясно, что элементы $\varphi(y)$ и $(Fr^j \circ \varphi)(y)$ одновременно имеют или не имеют неподвижные точки. Поэтому можно считать, что представление φ p-ограничено или тензорно разложимо. Предположим сначала, что $\omega(\varphi) = \omega_i$, $1 < i < r$. Ввиду леммы 1 число n четно. Переходя, если потребуется, к дуальному представлению, можно считать, что $i \leq n/2$. Положим $m' = (m-1)/2$ и фиксируем элемент $\gamma \in S(V)$ порядка m. В силу лемм 1 и 2 $S(V) = \{\gamma^j \mid 1 \leq j \leq m\}$, и кратности всех собственных значений элемента y на V совпадают. Поэтому, используя группу Вейля, можно выбрать такую нумерацию весов ϵ_k, что $\epsilon_k(y) = \epsilon_{n+1-k}(y)^{-1}$ для любого k и $\epsilon_k(y) = \gamma^{t_k} y$ с $t_k \leq m'$ при $k \leq n/2$. Напомним, что представление φ является микровесовым, и поэтому

$$\Lambda(\varphi) = \{\epsilon_{j_1} + \ldots + \epsilon_{j_i} \mid 1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n\}.$$

Пусть $i = 2a$. Ясно, что вес $\lambda = (\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_a) + (\epsilon_n + \ldots + \epsilon_{n+1-a})$ принадлежит $\Lambda(\varphi)$. Легко видеть, что $\lambda(y) = 1$. Предположим теперь, что $i = 3$. Тогда $n \geq 6$. При $m = 3$ множество $S(V)$ равно $\{\gamma, \gamma^{-1}\}$ и кратность каждого из собственных значений не меньше 3, поэтому существует вес $\mu = \epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2} + \epsilon_{i_3} \in \Lambda(\phi)$ с $\mu(y) = 1$. В силу леммы 1 при $m = 5$ кратности собственных значений элемента y на V не меньше 2, поскольку $|S(V)| = 4$. Еще раз используя лемму 1, получаем, что при $m \geq 5$ существуют попарно различные индексы i_1, i_2, i_3 такие, что $\epsilon_{i_1}(y) = \gamma$, $\epsilon_{i_2}(y) = \gamma^2$ и $\epsilon_{i_3}(y) = \gamma^{-3}$. Тогда $\nu = \epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2} + \epsilon_{i_3} \in \Lambda(\varphi)$ и $\nu(y) = 1$. Заметим, что ввиду нашего выбора нумерации весов при $m > 5$ имеем i_1, $i_2 \leq n/2$ и $i_3 > n/2$; при $m = 5$ все эти числа не превосходят $n/2$. Наконец, пусть $i = 2a + 3 > 3$. Ясно, что при $m = 3$ кратность каждого собственного значения γ и γ^{-1} в модуле V не меньше i и поэтому больше $a + 3$. Выберем попарно различные индексы $j_1, \ldots, j_{a+3}$ и $k_1, \ldots, k_a$ так, что $\epsilon_{j_t}(y) = \gamma$ и $\epsilon_{k_u}(y) = \gamma^{-1}$ при $1 \leq t \leq a + 3$ и $1 \leq u \leq a$. Тогда

$$\tau := (\epsilon_{j_1} + \ldots + \epsilon_{j_{a+3}}) + (\epsilon_{k_1} + \ldots + \epsilon_{k_a}) \in \Lambda(\varphi)$$

и $\tau(y) = 1$. Пусть $m \geq 5$ и числа i_1, i_2, i_3 такие, как выше. Положим $b = i_3$ при $m = 5$ и $b = n + 1 - i_3$ при $m > 5$. Зафиксируем a попарно различных индексов $c_1, \ldots, c_a$ так, что $c_1, \ldots, c_a \leq n/2$ и $c_j \notin \{i_1, i_2, b\}$ при $1 \leq j \leq a$. Это возможно, так как $n/2 \geq i > a + 3$. Тогда

$$\rho := \epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2} + \epsilon_{i_3} + (\epsilon_{c_1} + \ldots + \epsilon_{c_a}) + (\epsilon_{n+1-c_1} + \ldots + \epsilon_{n+1-c_a}) \in \Lambda(\varphi)$$

и $\rho(y) = 1$. Очевидно, что y действует без неподвижных точек при $\omega(\varphi) = \omega_1$ или ω_r (в естественном модуле и дуальном к нему). Случай фундаментальных представлений полностью рассмотрен.

Если $\varphi \in Irr_p$, но представление ϕ не является фундаментальным, то существуют нетривиальные представления φ_1, $\varphi_2 \in Irr_p$ такие, что $\omega(\varphi) = \omega(\varphi_1) + \omega(\varphi_2)$. Ввиду леммы 3 имеем $\Lambda(\varphi) = \{\mu_1 + \mu_2 \mid \mu_i \in \Lambda(\varphi_i)\}$. Если же $\varphi \cong \rho_1 \otimes \rho_2$, то ясно, что

$$\Lambda(\varphi) = \{\mu_1 + \mu_2 \mid \mu_i \in \Lambda(\rho_i)\}.$$

В силу леммы 2 в обоих случаях можно выбрать веса μ_1 и μ_2 так, что $\mu_1(y)$ — элемент порядка m и $\mu_2(y) = \mu_1(y)^{-1}$. Это завершает доказательство теоремы 1. □

2. Доказательство теорем 2 и 3

Докажем сначала теорему 2. Пусть далее Γ — множество всех элементов порядка 5 из P^* и

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_{r-1}, \omega_r, \omega_1 + \omega_r, 2\omega_1, 2\omega_r\}.$$

Нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4. *Пусть $m = 5$, $q \equiv 4 \ (mod\ 5)$, $\gamma \in S(V)$ и $\varphi \in Irr_p$ — нетривиальное представление. Тогда либо $\Gamma \subset S(\varphi)$, либо $\omega(\varphi) \in \Omega$. Множество $S(\varphi)$ равно $\{\gamma, \gamma^{-1}\}$ при $\omega(\varphi) \in \{\omega_1, \omega_r\}$ и $\{1, \gamma^2, \gamma^{-2}\}$ в других исключительных случаях.*

Доказательство. Заметим, что $|\overline{q}| = 2$. В силу леммы 1 число n четно, $S(V) = \{\gamma, \gamma^q\}$ и кратности собственных значений элемента y на V равны $n/2$. Можно так выбрать нумерацию весов ϵ_j, что $\epsilon_j(y) = \gamma$ при $j \leq n/2$ и $\epsilon_j(y) = \gamma^{-1}$ при $j > n/2$. Ясно, что $\gamma^q = \gamma^{-1}$. Обозначим через Φ множество всех представлений $\rho \in Irr_p$ таких, что $\Gamma \subset S(\rho)$. Поскольку $y \in G$ и ограничения $\psi|G$ и $(Fr^l \circ \psi)|G$ эквивалентны для любого $\psi \in Irr_q$, то при $\delta \in \Gamma \cap S(\psi)$ имеем $\delta^{-1} = \delta^q \in S(\psi)$. Здесь и в доказательстве теоремы 2 положим $\omega = \omega(\varphi)$. Используя лемму 3 и рассуждая, как в конце доказательства теоремы 1, можно доказать следующее утверждение:

$$\text{если } \rho \in \Phi \text{ и } \omega - \omega(\rho) \text{ — доминантный вес, то } \varphi \in \Phi. \tag{*}$$

Пусть $\omega = \omega_i$, где $3 \leq i \leq r-2$. Переходя, если потребуется, к дуальному представлению, можно считать, что $i \leq n/2$. Предположим сначала, что $i = 3 + 2k$, где k — целое неотрицательное число. Тогда $n \geq 4k + 6$. Положим

$$\lambda_1 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+3} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k},$$
$$\lambda_2 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_k + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+3},$$
$$\lambda_3 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+2} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+1},$$
$$\lambda_4 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+1} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+2}$$

(при $i = 3$ имеем $\lambda_1 = \omega_3$, $\lambda_2 = \epsilon_{n/2+1} + \epsilon_{n/2+2} + \epsilon_{n/2+3}$). Тогда $\lambda_j \in \Lambda(\varphi)$ при $1 \leq j \leq 4$. Непосредственно проверяется, что $\lambda_1(y) = \gamma^3$, $\lambda_2(y) = \gamma^{-3} = \gamma^2$, $\lambda_3(y) = \gamma$ и $\lambda_4(y) = \gamma^{-1}$.

Пусть теперь $i = 2k > 2$. Тогда $k \geq 2$ и $k + 2 \leq i \leq n/2$. Положим

$$\lambda_1 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+2} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k-2},$$
$$\lambda_2 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k-2} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+2},$$
$$\lambda_3 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+1} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k-1},$$
$$\lambda_4 = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k-1} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k+1}$$

(при $i = 4$ имеем $\lambda_1 = \omega_4$, $\lambda_2 = \epsilon_{n/2+1} + \epsilon_{n/2+2} + \epsilon_{n/2+3} + \epsilon_{n/2+4}$). Тогда $\lambda_1(y) = \gamma^{-1}$, $\lambda_2(y) = \gamma$, $\lambda_3(y) = \gamma^2$ и $\lambda_4(y) = \gamma^{-2}$. Поэтому $\varphi \in \Phi$.

Ясно, что $S(\varphi) = \{\gamma, \gamma^{-1}\}$ при $\omega \in \{\omega_1, \omega_r\}$. До конца этого доказательства предполагается, что если у веса ω есть коэффициент 2 или 3, то $p > 2$ или $p > 3$ соответственно. Легко проверить, что $S(\varphi) = \{1, \gamma^2, \gamma^{-2}\}$ при $r > 2$ и $\omega \in \{\omega_2, \omega_{r-1}\}$. Ввиду леммы 3 множество $S(\varphi)$ такое же и при $\omega \in \{2\omega_1, 2\omega_r, \omega_1 + \omega_r\}$. Еще раз используя лемму 3, получаем, что $\varphi \in \Phi$ при

$$\omega \in \{3\omega_1, 3\omega_r, 2\omega_1 + \omega_r, \omega_1 + 2\omega_r, \omega_1 + \omega_2, \omega_{r-1} + \omega_r, \omega_1 + \omega_{r-1}, \omega_2 + \omega_r, \omega_2 + \omega_{r-1}, 2\omega_2, 2\omega_{r-1}\}.$$

Здесь всюду предполагается, что $r > 2$, если в формуле для ω встречается ω_2 или ω_{r-1}. Для завершения доказательства леммы достаточно использовать утверждение (*). □

Доказательство теоремы 2. Утверждение п. 2) следует из леммы 1 и теоремы 1.

Пусть $q \equiv 4 \pmod 5$. Тогда $|\overline{q}| = 2$ и в силу леммы 1 число n четно и $S(V) = \{\gamma, \gamma^{-1}\}$, где $\gamma \in P^*$ — элемент порядка 5. Выберем ту же нумерацию весов ϵ_j, что и в лемме 4. Предположим сначала, что $\varphi \in Irr_p$. Можно считать, что φ не является ни одним из исключительных представлений, указанных в лемме 4.

Пусть $\omega = \omega_i$, где $3 \le i \le n/2$. Предположим, что $i = 2k$ для некоторого натурального числа k. Вес $\lambda = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_k + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k}$ принадлежит $\Lambda(\varphi)$, и легко видеть, что $\lambda(y) = 1$. При $i = 3$ непосредственно проверяется, что $1 \notin S(\varphi)$. Наконец, пусть $i = 5 + 2k$ для некоторого неотрицательного целого числа k. Ясно, что $5 + k \le n/2$. Положим

$$\mu = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_{k+5} + \epsilon_{n/2+1} + \ldots + \epsilon_{n/2+k}$$

при $k > 0$ и $\mu = \omega_5$ при $k = 0$. Тогда $\mu \in \Lambda(\varphi)$ и $\mu(y) = 1$. Переходя к дуальным представлениям, завершаем доказательство для фундаментальных представлений.

Используя леммы 3 и 4, можно установить, что $1 \notin S(\varphi)$ при

$$\omega \in \{3\omega_1, 3\omega_r, 2\omega_1 + \omega_r, \omega_1 + 2\omega_r, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_{r-1}, \omega_2 + \omega_r, \omega_{r-1} + \omega_r\}$$

и что $1 \in S(\varphi)$, если $\omega \in \{2\omega_2, 2\omega_{r-1}, \omega_2 + \omega_{r-1}\}$. Для других представлений φ с $\omega \ne \omega_i$ и $\omega \notin \Omega$ вес ω записывается в виде $\omega(\rho) + \omega(\psi)$, где $\rho, \psi \in Irr_p$ — нетривиальные представления и $\omega(\rho) \notin \Omega$. Ввиду леммы 4 имеем $\Gamma \subset S(\rho)$. Поскольку $S(\psi)$ содержит некоторый элемент из Γ, то $1 \in S(\varphi)$ в силу леммы 3. Таким образом, теорема доказана для p-ограниченных представлений.

Поскольку применение морфизма Фробениуса не влияет на наличие у определенного элемента собственного значения 1, далее можно считать, что представление φ тензорно разложимо. Так как $\varphi \in Irr_q$, то $\varphi \cong \otimes_{j=0}^{l-1} Fr^j \circ \varphi_j$, где $\varphi_j \in Irr_p$ и хотя бы два из них нетривиальны. Ясно, что $1 \in S(\varphi)$, если $1 \in S(\varphi_j)$ для всех j с $0 \le j \le l-1$. Пусть $1 \notin S(\varphi_k)$. Нетрудно заметить, что $1 \in S(\varphi)$, если $\Gamma \subset S(\varphi_j)$ для хотя бы одного j. Поэтому ввиду леммы 4 задача сводится к случаю, когда $\omega(\varphi_j) \in \Omega \cup \{0\}$ для всех j, который и рассматривается ниже. Ограничение на G представления $Fr^{l-k} \circ \varphi$ эквивалентно ограничению $\psi | G$, где $\psi = \otimes_{j=0}^{l-1} Fr^j \circ \psi_j$, $\psi_j = \phi_{j+k}$, если $j + k \le l - 1$, и $\psi_j = \varphi_{j+k-l}$ при $j + k > l - 1$. Понятно, что множества $S(\varphi)$ и $S(\psi)$ одновременно содержат или не содержат 1. Исследуем спектр $S(\psi)$. Так как $1 \notin S(\psi_0)$ и $\omega(\psi_0) \in \Omega$, то ввиду доказанного выше для p-ограниченных представлений $\omega(\psi_0) \in \{\omega_1, \omega_r\}$. Пусть t — минимальный ненулевой индекс с $\omega(\psi_t) \ne 0$. Такой индекс существует, поскольку ψ тензорно разложимо. Положим

$$\xi = \psi_0 \otimes Fr^t \circ \psi_t, \quad \Omega_1 = \{\omega_1, \omega_r\}, \quad \Omega_2 = \{\omega_2, \omega_{r-1}, \omega_1 + \omega_r, 2\omega_1, 2\omega_r\}.$$

Легко видеть, что характеристика p сравнима с одним из чисел $2, 3$ или 4 по модулю 5. Пусть $\Delta \subset \Gamma$ — подмножество, которое для каждого своего элемента содержит и обратный к нему. Тогда $|\Delta| = 2$ или 4. Обозначим через f автоморфизм поля P, задаваемый возведением в степень p. Нетрудно заметить, что при $p \equiv 4 \pmod 5$ преобразование f сохраняет Δ, а при $p \equiv 2 \pmod 5$ или $p \equiv 3 \pmod 5$ автоморфизм f сохраняет Δ лишь при $\Delta = \Gamma$, а в других случаях переводит его в множество, состоящее из квадратов элементов множества Δ. Теперь из леммы 4 вытекают следующие факты о множестве $S(\xi)$:

- $1 \in S(\xi)$ тогда и только тогда, когда либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_1$ и $p \equiv 4 \pmod 5$ или t четно, либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_2$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ и t нечетно;
- $\Gamma \subset S(\xi)$ тогда и только тогда, когда либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_1$, $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ и t нечетно, либо $\omega(\psi_t) \in \Omega_2$.

Пусть $\psi \ne \xi$. Рассуждая, как ранее, легко заметить, что $1 \in S(\psi)$, если $\Gamma \subset S(\xi)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\omega(\psi_t) \in \Omega_1$ и t четно или $p \equiv 4 \pmod 5$. В этой ситуации $S(\xi) = \{1, \gamma^2, \gamma^{-2}\}$. Выберем минимальное натуральное число u такое, что $u > t$ и $\omega(\psi_u) \ne 0$. Положим $\chi = \psi_0 \otimes Fr^t \circ \psi_t \otimes Fr^u \circ \psi_u$. Так как $\omega(\psi_u) \in \Omega$, то $\Gamma \subset S(\chi)$. Поэтому $1 \in S(\psi)$

при $\psi \neq \chi$. Пусть $\psi = \chi$. Ясно, что $1 \in S(\psi)$, если $1 \in S(\psi_u)$. Поскольку $\omega(\psi_u) \in \Omega$, остается рассмотреть случай, когда $\omega(\psi_u) \in \Omega_1$. Нетрудно проверить, что в этой ситуации $1 \in S(\psi)$ в точности тогда, когда $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ и u нечетно. Итак, все возможности для представления ψ рассмотрены. Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно вспомнить, как связаны представления φ и ψ. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть выполняются условия теоремы. Далее система весов группы $A_1(K)$ естественным образом отождествляется с множеством целых чисел с помощью отображения $a\omega_1 \to a$. Ясно, что $\varphi(h)$ имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда у φ есть вес вида bk, где b — неотрицательное целое число. Пусть φ_j — неприводимое представление группы G со старшим весом a_j, где $0 \leq j \leq l-1$. Из цитированной во введении теоремы Стейнберга о тензорном произведении следует, что

$$\Lambda(\varphi) = \Big\{ \sum_{j=0}^{l-1} p^j \lambda_j \mid \lambda_j \in \Lambda(\varphi_j) \Big\}.$$

Известно (например, это легко вытекает из описания неприводимых представлений группы $SL_2(p)$ в [9, § 8 и 9]), что

$$\Lambda(\varphi_j) = \big\{ c \mid c \equiv a_j \pmod 2, -a_j \leq c \leq a_j \big\}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

П р и м е р. Пусть $n = 2$, $q = 2^7$ и $m = 43$. Ясно, что если φ и ψ — представления из Irr_q со старшими весами a и $2^t a$, то $\varphi(h)$ и $\psi(h)$ одновременно имеют или не имеют неподвижные точки. Поэтому достаточно определить представления из Irr_q с нечетными старшими весами, где образ элемента h действует без неподвижных точек. Список таких весов следующий:

$$1, 3, \ldots, 41, 49, 51, 57, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 81, 83, 89, 97, 99, 101, 103, 105, 113, 115, 121.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
2. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. **Кондратьев А.С.** О конечных группах с небольшим простым спектром // Мат. форум (Итоги науки. Юг России). Владикавказ, 2012. Т. 6: Группы и графы. С. 56–74.
4. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7).
5. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 263 с.
6. **Супруненко И.Д.** Сохранение систем весов неприводимых представлений алгебраической группы и алгебры Ли типа A_l с ограниченными старшими весами при редукции по модулю p // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1983. № 2. С. 18–22.
7. **Fleischmann P., Lempken W., Zalesskii A.E.** Linear groups over $GF(2^k)$ generated by a conjugacy class of a fixed point free element of order 3 // J. Algebra. 2001. Vol. 244, no. 2. P. 631–663.
8. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.
9. **Humphreys J.E.** Representations of $SL(2, p)$ // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82, no. 1. P. 21–39.
10. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
11. **Steinberg R.** Representations of algebraic groups // Nagoya Math. J. 1963. Vol. 22. P. 33–56.
12. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. (3) 1973. Vol. 26, no. 4. P. 653–680.
13. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
14. **Wilson R.** Certain representations of Chevalley groups over $CF(2^n)$ // Comm. Algebra. 1975. Vol. 3, no. 4. P. 319–364.

15. **Zalesski A.E.** On eigenvalues of group elements in representations of algebraic groups and finite Chevalley groups // Acta Appl. Math. 2009. Vol. 108, no. 1. P. 175–195.
16. **Zavarnitsine A.V.** Fixed points of large prime-order elements in the equicharacteristic action of linear and unitary groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 333–340.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 07.07.2013

Осиновская Анна Александровна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: anna@im.bas-net.by

Супруненко Ирина Дмитриевна
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: suprunenko@im.bas-net.by

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542.7

К ВОПРОСУ П. КАМЕРОНА О ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК СО СТАБИЛИЗАТОРОМ ДВУХ ТОЧЕК, НОРМАЛЬНЫМ В СТАБИЛИЗАТОРЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ[1]

А. В. Коныгин

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. П. Камероном был поставлен вопрос о справедливости в этом случае равенства $G_{x,y} = 1$. Ранее автором было доказано, что если $\mathrm{soc}(G)$ не является степенью исключительной группы лиева типа, то $G_{x,y} = 1$. В настоящей работе доказывается, что если $\mathrm{soc}(G)$ является степенью исключительной группы лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$, то $G_{x,y} = 1$.

Ключевые слова: примитивная группа подстановок, регулярная подорбита.

A. V. Konygin. On Cameron's question about primitive permutation groups with stabilizer of two points that is normal in the stabilizer of one of them.

Assume that G is a primitive permutation group on a finite set X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, and $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. P. Cameron raised the question about the validity of the equality $G_{x,y} = 1$ in this case. The author proved earlier that, if $\mathrm{soc}(G)$ is not a direct power of an exceptional group of Lie type, then $G_{x,y} = 1$. In the present paper, we prove that, if $\mathrm{soc}(G)$ is a direct power of an exceptional group of Lie type distinct from $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ and $E_8(q)$, then $G_{x,y} = 1$.

Keywords: primitive permutation group, regular suborbit.

1. Введение

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [9; 3, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на G_x-орбите $G_x(y)$, содержащей точку y (т. е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т. е. что $|G_x| = |G_x(y)|$? Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [17; 19; 20]).

Ясно, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Согласно теореме О'Нэна — Скотта (см. [12]) любая конечная примитивная группа подстановок подстановочно изоморфна группе одного из перечисленных ниже типов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00349), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и гранта для молодых ученых Уральского отделения РАН за 2012 год (проект А3).

I. Примитивные группы с абелевой регулярной нормальной подгруппой.

II. Примитивные почти простые группы. Напомним, что группа G называется почти простой, если группа G изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(T)$, содержащей $\mathrm{Inn}(T)$, для некоторой конечной простой неабелевой группы T.

III. Примитивные группы с неабелевым непростым цоколем. Среди групп этого типа различают группы типов III(a), III(b) и III(c).

III(a) (simple diagonal action). Пусть S_k — симметрическая группа степени $k \geq 2$, T — простая неабелева группа и $W = \{\pi(a_1, \ \ldots, \ a_k) \mid a_i \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k, \ a_i a_j^{-1} \in \mathrm{Inn}(T), \ i,j \in \{1,\ldots,k\}\} \leq \mathrm{Aut}(T)\mathrm{wr}S_k$. Тогда представление группы W левыми сдвигами на множестве левых смежных классов группы W по подгруппе $W_x = \{\pi(a, \ \ldots, \ a) \mid a \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k\}$ является точным примитивным представлением степени $|T|^{k-1}$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(a), если она изоморфна подгруппе группы W в этом представлении, содержащей $\mathrm{soc}(W)$.

III(b) (product action). Пусть S_m — симметрическая группа степени $m \geq 2$ и H — примитивная группа типа II или III(a) на конечном множестве Y. Положим $W = H\mathrm{wr}S_m$. Группа W естественным образом действует на $X = Y^m$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(b), если она изоморфна подгруппе группы W в этом представлении, содержащей K^m, где $K = \mathrm{soc}(H)$, и G транзитивно переставляет m прямых множителей группы K^m.

III(c) (twisted wreath action). Конечная примитивная группа G имеет тип III(c), если она обладает единственной неабелевой регулярной нормальной подгруппой.

Ранее в работах [1; 2] было доказано, что если G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и либо G — группа типа I, III(a) или III(c), либо G — группа типа II с цоколем, не являющимся исключительной группой лиева типа, то для группы подстановок G имеет место свойство **(Pr)**. Там же доказано, что если $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H не является исключительной группой лиева типа, то для группы подстановок G также имеет место свойство **(Pr)**. В частности, для всех таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.

В настоящей работе доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что цоколь группы G изоморфен исключительной группе лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* **(Pr)**. *В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Теорема 2. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа* III(b) *и цоколь группы H изоморфен исключительной группе лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G имеет место свойство* **(Pr)**. *В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Таким образом, для доказательства справедливости свойства **(Pr)** для всех примитивных групп подстановок G на конечном множестве X (и для получения ответа на вопрос П. Камерона) остается рассмотреть случай, когда G — почти простая группа с цоколем, изоморфным одной из групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, или $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа III(b) и цоколь группы H изоморфен одной из групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Для произвольной конечной группы G и простого числа p в работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathrm{soc}(G)$ — цоколь группы G, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, $F^*(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G, $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G, $O^{p'}(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа H группы G такая, что $|G/H|$ не делится на p. Для групп A и B через $A.B$ будет обозначаться (см. [8]) произвольная группа G с нормальной подгруппой H такой, что $H \cong A$ и $G/H \cong B$. Через p^n будет обозначаться (см. [8]) элементарная абелевая p-группа порядка p^n.

Пусть A и B — группы. Подгруппу D прямого произведения групп A и B назовем *диагональной*, если $A \cap D = B \cap D = 1$ и AB совпадает с DA или DB.

Для произвольного конечного поля $\mathbb{F}$ и целого положительного числа n через $\mathrm{GL_n}(\mathbb{F})$ обозначим группу всех невырожденных $n \times n$-матриц над полем $\mathbb{F}$. Через $\mathrm{SL_n}(\mathbb{F})$ обозначим подгруппу матриц из $\mathrm{GL_n}(\mathbb{F})$ с единичным определителем. Если $\mathbb{K}$ — квадратичное расширение поля $\mathbb{F}$, то через $\mathrm{GU_n}(\mathbb{F})$ обозначим группу всех унитарных $n \times n$-матриц над полем $\mathbb{K}$. Через $\mathrm{SU_n}(\mathbb{F})$ обозначим подгруппу матриц из $\mathrm{GU_n}(\mathbb{F})$ с единичным определителем. Через $\top$ обозначается операция транспонирования матрицы.

Приведем результаты, которые используются при доказательстве теорем 1 и 2.

Предложение 1 [1, предложение 8]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \backslash \{x\}$. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $F(G_{x,y}) = 1$. В частности, $F(G_x) \cap G_{x,y} = F(G_y) \cap G_{x,y} = 1$ и $[F(G_x), G_{x,y}] = 1$.*

Предложение 2 [1, предложение 9]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что G_x имеет вид $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы и T — простая неабелева группа. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 3 [1, предложение 12]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что G_x имеет вид $A.T^k.B.S$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, $k \geq 2$, $S \in \{A_k, S_k\}$, $S \neq A_2$ и S действует точно на изоморфных T прямых множителях группы* $\mathrm{soc}(A.T^k/A)$. *Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Пусть H — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве Y и $T = \mathrm{soc}(H)$. Будем говорить, что для группы подстановок H выполняется *свойство* **(Pr+)**, если для произвольных $x \in Y$ и $y \in Y \setminus \{x\}$ из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $F(T_{x,y}) = 1$ следует, что $N_T(T_{x,y}) \neq T_x$. Заметим, что если T действует примитивно на Y (другими словами, если для $x \in Y$ подгруппа T_x группы T является максимальной), то из справедливости для группы подстановок T свойства (**Pr**) следует справедливость для групп подстановок T и H свойства (**Pr+**).

Свойство (**Pr+**) интересует нас в связи со следующими утверждениями.

Предложение 4 [1, предложение 17]. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Если для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr+**), *то для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 5 [1, предложение 18]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H \mathrm{wr} S_m$ — группа типа* III(b) *и H — примитивная группа подстановок типа* II. *Если для группы подстановок H выполняется свойство* (**Pr+**), *то для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 6 [1, предложение 20]. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X с цоколем T и $x \in X$. Предположим, что T_x имеет вид $A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, а F — простая неабелева группа. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr+**).

Пусть R — такая простая присоединенная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K ненулевой характеристики p и σ — такой эндоморфизм группы R, что $L = O^{p'}(R_\sigma)$ является конечной простой исключительной группой лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$, где $q = p^m$. Пусть Q — конечная группа такая, что $F^*(Q) = L$. Группа $\mathrm{Aut}(L)$ порождается сопряжениями посредством элементов из R_σ, полевыми и графовыми автоморфизмами группы L, причем все эти автоморфизмы группы L продолжаются до морфизмов абстрактной группы R, коммутирующих с σ. Таким образом, существует подгруппа $\tilde{Q}$ группы $C_{\mathrm{Aut}(R)}(\sigma)$ такая, что $Q = \tilde{Q}/\langle\sigma\rangle$, и, следовательно, Q действует на множестве всех σ-допустимых подмножеств группы R. Через $N_Q(V)$ будем обозначать стабилизатор в Q произвольного σ-допустимого подмножества V группы R. Если D является σ-допустимой замкнутой связной редуктивной подгруппой группы R, содержащей максимальный тор группы R, и $M = N_Q(D)$, то будем говорить, что M — *группа максимального ранга в* Q.

Предложение 7 [15, теорема 8]. *Пусть R_σ — конечная исключительная группы лиева типа, причем группа L отлична от групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$, q — степень простого числа. Предположим, что H — максимальная подгруппа группы R_σ. Тогда выполняется одно из следующих утверждений.*

I. *$H = M_\sigma$, где M — максимальная замкнутая σ-допустимая подгруппа группы R положительной размерности, причем выполняется одно из следующих утверждений*:

a) *M (соответственно H) является параболической подгруппой группы R (соответственно R_σ);*

b) *M является редуктивной подгруппой максимального ранга группы R (имеющиеся при этом возможности для группы H приведены в* [14]);

c) *M — группа из* [15, табл. 1] *и $H = M_\sigma$ — группа из* [15, табл. 3];

II. *H того же лиева типа, что и группа R*;

III. *$R_\sigma = G_2(p)$, $p \geq 3$ и $H = 2^3.SL_3(2)$ или $R_\sigma = F_4(p)$, $p \geq 5$ и $H = 3^3.SL_3(3)$*;

IV. *$F^*(H)$ — простая неабелева группа, не являющаяся группой лиева типа характеристики p*;

V. *$F^*(H)$ — простая группа лиева типа характеристики p.*

Предложение 8 [16, теорема 2]. *Пусть $L = O^{p'}(R_\sigma)$ — исключительная группа лиева типа, отличная от групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$. Предположим, что L_1 — группа со свойством $L \leq L_1 \leq \mathrm{Aut}(L)$ и M — максимальная подгруппа группы L_1. Тогда либо $F^*(M)$ является простой группой, либо выполняется одно из следующих утверждений.*

I. *$M = N_{L_1}(D_\sigma)$, где D является либо параболической подгруппой группы L_1, либо редуктивной подгруппой максимального ранга группы L_1.*

II. *$M = N_{L_1}(E)$, где E является элементарной абелевой группой из* [18, теорема 1(III)].

III. *$M = C_{L_1}(\tau)$, где τ — автоморфизм простого порядка группы L, причем τ является либо полевым автоморфизмом, либо графовым автоморфизмом, либо произведением графового и полевого автоморфизмов группы L.*

IV. *$F^*(M)$ — группа из* [16, табл. 3].

При доказательстве теорем 1 и 2 используются некоторые элементарные факты, касающиеся представлений групп $SL_3(q)$ и $SU_3(q)$, которые мы приводим ниже в удобной для нас формулировке.

Пусть q — степень простого числа p, E — единичная матрица размера 3×3 над полем $\mathbb{F}_q$ и $e_{i,j}$ — матрица размера 3×3 над полем $\mathbb{F}_q$, у которой на (i,j)-м месте стоит единица, а на остальных местах — нули. Для произвольного α из $\mathbb{F}_p^{\#}$ и различных i, j из $\{1,2,3\}$ положим $t_{i,j}(\alpha) = E + \alpha e_{i,j}$. (Здесь и далее в предложениях 9–12 мы рассматриваем $\mathbb{F}_p$ как простое подполе поля $\mathbb{F}_q$.) Мы используем эти обозначения ниже в предложениях 9–12.

Предложение 9. *Пусть* $G = \langle t_{i,j}(\alpha) \otimes t_{i,j}(\alpha) \mid i \neq j, \alpha \in \mathbb{F}_p^{\#} \rangle$ *— группа матриц, действующая естественным образом на 9-мерном пространстве* V *вектор-столбцов над полем* $\mathbb{F}_q$*. Тогда в пространстве* V *есть в точности два нетривиальных собственных* G*-инвариантных подпространства* U *и* W*, причем* $\dim(U) = 3$*,* $\dim(W) = 6$*,* $U < W$ *при* $p = 2$ *и* $V = U \oplus W$ *при* $p \neq 2$*.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что требуемыми свойствами обладают следующие подпространства пространства V:

$$U = \{(0, x, y, -x, 0, z, -y, -z, 0)^\top \mid x, y, z \in \mathbb{F}_q\},$$

$$W = \{(x_1, \ldots, x_9)^\top \mid x_2 = x_4, x_3 = x_7, x_6 = x_8,\, x_1, \ldots, x_9 \in \mathbb{F}_q\}.$$

Предложение доказано.

Предложение 10. *Пусть* $G = \langle t_{i,j}(\alpha) \otimes t_{j,i}(-\alpha) \mid i \neq j, \alpha \in \mathbb{F}_p^{\#} \rangle$ *— группа матриц, действующая естественным образом на 9-мерном пространстве* V *вектор-столбцов над полем* $\mathbb{F}_q$*. Тогда в пространстве* V *есть в точности два нетривиальных собственных* G*-инвариантных подпространства* U *и* W*, причем* $\dim(U) = 1$*,* $\dim(W) = 8$*,* $U < W$ *при* $p = 3$ *и* $V = U \oplus W$ *при* $p \neq 3$*.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что требуемыми свойствами обладают следующие подпространства пространства V:

$$U = \{(x, 0, 0, 0, x, 0, 0, 0, x)^\top \mid x \in \mathbb{F}_q\},$$

$$W = \{(x_1, \ldots, x_9)^\top \mid x_1 + x_5 + x_9 = 0,\, x_1, \ldots, x_9 \in \mathbb{F}_q\}.$$

Предложение доказано.

Предложение 11. *Пусть* $(3, q-1) = 1$*,* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{SL_3(p)})$ *и* $G = \{m \otimes \varphi(m) \mid m \in \mathrm{SL_3(p)}\}$*. Тогда при* $\varphi \in \mathrm{Inn}(\mathrm{SL_3(p)})$ *группа* G *сопряжена в* $\mathrm{GL_9(q)}$ *с группой* $\langle t_{i,j}(\alpha) \otimes t_{i,j}(\alpha) \mid i \neq j, \alpha \in \mathbb{F}_p^{\#} \rangle$*, а при* $\varphi \notin \mathrm{Inn}(\mathrm{SL_3(p)})$ *группа* G *сопряжена в* $\mathrm{GL_9(q)}$ *с группой* $\langle t_{i,j}(\alpha) \otimes t_{j,i}(-\alpha) \mid i \neq j, \alpha \in \mathbb{F}_p^{\#} \rangle$*.*

Доказательство. Группа $G = \langle t_{i,j}(\alpha) \otimes \varphi(t_{i,j}(\alpha)) \mid i \neq j, \alpha \in \mathbb{F}_p^{\#} \rangle$ действует естественным образом на 9-мерном пространстве V вектор-столбцов над полем $\mathbb{F}_q$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что можно выбрать такой базис пространства V, что все линейные преобразования $t_{i,j}(\alpha) \otimes \varphi(t_{i,j}(\alpha))$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{F}_p^{\#}$, запишутся в этом базисе матрицами $t_{i,j}(\alpha) \otimes t_{i,j}(\alpha)$ или матрицами $t_{i,j}(\alpha) \otimes t_{j,i}(-\alpha)$. Поскольку $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{SL_3(p)})$, то φ можно записать как $\varphi = \psi_1 \psi_2$, где ψ_1 — сопряжение элементом из $\mathrm{SL_3(p)}$, ψ_2 — тривиальный или контраградиентный автоморфизм группы $\mathrm{SL_3(p)}$. Для завершения доказательства предложения остается заметить, что $(c^{-1}ac) \otimes (d^{-1}bd) = (c \otimes d)^{-1}(a \otimes b)(c \otimes d)$ для произвольных матриц a, b, c, d из $\mathrm{GL_3(q)}$. Предложение доказано.

Предложение 12. *Пусть* $q > 2$*,* $(3, q+1) = 1$*,* σ *— автоморфизм порядка 2 поля* $\mathbb{F}_{q^2}$ *и* $G = \{m \otimes \sigma(m) \mid m \in \mathrm{SU_3(q)}\}$ *— группа матриц, действующая естественным образом на 9-мерном пространстве* V *вектор-столбцов над полем* $\mathbb{F}_{q^2}$*. Тогда в пространстве* V *есть в точности одно одномерное* G*-инвариантное подпространство.*

Доказательство. Используя множество порождающих для трехмерной унитарной группы, указанное в [10], легко установить, что требуемыми свойствами обладает следующее подпространство пространства V:

$$U = \{(0, 0, x, 0, x, 0, x, 0, 0)^\top \mid x \in \mathbb{F}_{q^2}\}.$$

Предложение доказано.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Лемма 1. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $Z(G_x) = 1$.*

Доказательство. Поскольку G_x является максимальной подгруппой группы G и $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G$, то $N_G(G_{x,y}) = G_x$. Так как $Z(G_y) \leq N_G(G_{x,y})$, то $Z(G_y) \leq G_x$, и, следовательно, $Z(G_y) \leq G_{x,y}$.

Предположим, что $Z(G_x) \neq 1$. Покажем, что $Z(G_x) \leq G_{x,y}$. Действительно, в силу включения $Z(G_y) \leq G_{x,y}$ имеем $C_{G_x}(G_{x,y}) \leq N_G(Z(G_y)) = G_y$. Следовательно, $C_{G_x}(G_{x,y}) \leq G_{x,y}$. В частности, $Z(G_x) \leq G_{x,y}$. Таким образом, $Z(G_{x,y}) \neq 1$. Противоречие с предложением 1. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что $G \cong {}^3D_4(q)$, где q — степень простого числа и $G_x \cong d.(L_2(q) \times L_2(q^3)).d$, где $d = (2, q-1)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$, и утверждение следует из леммы 1. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $d = 1$, т. е. q четно, и $G_x \cong L_2(q) \times L_2(q^3)$. Пусть V — векторное пространство размерности 8 над полем $\mathbb{F}_{q^3}$ с невырожденной квадратичной формой дефекта 0 и $G_0 = P\Omega_8^+(q^3)$ в естественном представлении на V. Тогда (см. [11]) централизатор в группе G_0 некоторого ее графово-полевого автоморфизма τ порядка 3 изоморфен группе ${}^3D_4(q)$. Обозначим через L множество элементов из G_0, оставляющих на месте неупорядоченную пару $\{W, W^{\perp}\}$, где W — некоторое подпространство типа $+$ размерности 4 пространства V, а $W^{\perp}$ — его ортогональное дополнение в V. Из [11] следует, что L имеет вид $(L_2(q^3))^4.2^2$. Положим $M = L \cap C_{G_0}(\tau) = C_L(\tau)$. В [11] доказывается, что M — максимальная подгруппа группы $C_{G_0}(\tau)$, изоморфная $L_2(q^3) \times L_2(q)$, причем прямой множитель группы M, изоморфный $L_2(q)$, является централизатором автоморфизма τ в одном из прямых множителей вида $L_2(q^3)$ цоколя группы L, а прямой множитель группы M, изоморфный $L_2(q^3)$, есть подпрямое произведение трех других прямых множителей вида $L_2(q^3)$ цоколя группы L, циклически переставляемых автоморфизмом τ. Два прямых множителя вида $L_2(q^3)$ из четырех прямых множителей цоколя группы L действуют тривиально на $W^{\perp}$ и их произведение индуцирует на W группу $P\Omega_4^+(q^3)$, а остальные два действуют тривиально на W и их произведение индуцирует на $W^{\perp}$ группу $P\Omega_4^+(q^3)$. Без ограничения общности (заменяя в случае необходимости W на $W^{\perp}$) будем считать, что прямой множитель A группы M, изоморфный $L_2(q)$, действует тривиально на $W^{\perp}$. Поскольку (см. [11]) в группе G имеется точно один класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных $L_2(q) \times L_2(q^3)$, и никакая не входящая в этот класс максимальная подгруппа группы G не содержит подгрупп, изоморфных $L_2(q) \times L_2(q^3)$, то можно отождествить группу G с группой $C_{G_0}(\tau)$, отождествив группу G_x с группой M. Пусть $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$. Ясно, что тогда $G_{x,y}$ — прямой множитель группы M вида $L_2(q)$ и $G_{x,y}$ является диагональной (см. разд. 2) подгруппой группы $G_y \cong L_2(q^3) \times L_2(q)$. Следовательно, группа A сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы M, изоморфной $L_2(q)$. Если $H \leq G$, $U \leq V$ и $H(U) = U$, то через $\mathrm{Fix}_U(H)$ обозначим пространство неподвижных точек группы H в U. Тогда имеем $\dim(\mathrm{Fix}_V(A)) = \dim(\mathrm{Fix}_V(D))$. Поскольку $\dim(\mathrm{Fix}_{W^{\perp}}(A)) = \dim(W^{\perp})$, то

$$\dim(\mathrm{Fix}_V(A)) = \dim(\mathrm{Fix}_W(A)) + \dim(\mathrm{Fix}_{W^{\perp}}(A)) = \dim(\mathrm{Fix}_W(A)) + \dim(W^{\perp}).$$

Поскольку $\dim(\mathrm{Fix}_W(D)) < 2 = \dim(\mathrm{Fix}_W(A))$ и $\dim(\mathrm{Fix}_{W^{\perp}}(D)) < \dim(W^{\perp})$, то

$$\dim(\mathrm{Fix}_V(D)) = \dim(\mathrm{Fix}_W(D)) + \dim(\mathrm{Fix}_{W^{\perp}}(D)) < \dim(\mathrm{Fix}_W(A)) + \dim(W^{\perp}).$$

Таким образом, $\dim(\mathrm{Fix}_V(D)) < \dim(\mathrm{Fix}_V(A))$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть G — простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что $G \cong G_2(q)$, где $q = 2^m$ и $m \geq 2$, и $G_x \cong L_2(q) \times L_2(q)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$ — алгебра октанионов над полем $\mathbb{F}_q$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}) \cong G_2(q)$. В векторном пространстве $\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$ выберем базис $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$, следуя [21, разд. 4.3.4]. Пусть U — подпространство $\langle x_3, x_4, x_5, x_6\rangle$ алгебры $\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$, являющееся подалгеброй алгебры $\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$, изоморфной алгебре кватернионов над $\mathbb{F}_q$. Через M обозначим глобальный стабилизатор U в $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q})$. Согласно [21, разд. 4.3.6] $M \cong L_2(q) \times L_2(q)$ индуцирует на U группу, изоморфную $L_2(q)$, и действует точно на ортогональном (относительно поляризации нормы) дополнении $U^{\perp} = \langle x_1, x_2, x_7, x_8\rangle$ как $SO_4^+(q)$. Следуя [21, разд. 4.3.2], будем отождествлять группу G с группой $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q})$, отождествив G_x с M. Пусть $G_x = A \times B$, где $A \cong B \cong L_2(q)$, A действует на U нетривиально, а B действует на U тривиально.

Пусть $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$. Ясно, что тогда $G_{x,y} \in \{A, B\}$ и $G_{x,y}$ является диагональной подгруппой (см. разд. 2) группы $G_y \cong L_2(q) \times L_2(q)$. Следовательно, группа $G_{x,y}$ сопряжена в G с некоторой диагональной подгруппой D группы M, изоморфной $L_2(q)$. Если $H \leq G$, $W \leq \mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$ и $H(W) = W$, то через $\mathrm{Fix}_W(H)$ обозначим пространство неподвижных точек группы H в U. Тогда $\dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(G_{x,y})) = \dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(D))$.

Предположим, что $G_{x,y} = A$. Тогда

$$\dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(G_{x,y})) = \dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(A)) = \dim(\mathrm{Fix}_U(A)) + \dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(A)),$$

$$\dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(D)) = \dim(\mathrm{Fix}_U(A)) + \dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(D)).$$

Так как $\dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(G_{x,y})) = \dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(D))$, то отсюда следует, что

$$\dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(A)) = \dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(D)).$$

Противоречие с $\dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(A)) = 2 > \dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(D))$.

Предположим, что $G_{x,y} = B$. Тогда

$$\dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(G_{x,y})) = \dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(B)) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(B)),$$

$$\dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(D)) = \dim(\mathrm{Fix}_U(A)) + \dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(D)).$$

Поскольку $\dim(U) > \dim(\mathrm{Fix}_U(A))$ и $\dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(B)) = 2 > \dim(\mathrm{Fix}_{U^{\perp}}(D))$, то получаем противоречие с тем, что $\dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(G_{x,y})) = \dim(\mathrm{Fix}_{\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}}(D))$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что $G \cong F_4(q)$ и $G_x \cong e.(L_3^{\epsilon}(q) \times L_3^{\epsilon}(q)).e.2$, где $\epsilon = \pm 1$, $e = (3, q - \epsilon)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Если $e \neq 1$, то $Z(G_x) \neq 1$ и утверждение следует из леммы 1. Далее считаем, что $e = 1$ и $G_x \cong (L_3^{\epsilon}(q) \times L_3^{\epsilon}(q)).2$. Предположим, что для группы G свойство **(Pr)** не выполняется, т. е. найдется $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Поскольку $G_x \cong (L_3^{\epsilon}(q) \times L_3^{\epsilon}(q)).2$, $G_{x,y} \neq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то $G_{x,y}$ — прямой множитель в $\mathrm{soc}(G_x)$, изоморфный $L_3^{\epsilon}(q)$.

Предположим, что $\epsilon = +1$. Тогда $G_x \cong (SL_3(q) \times SL_3(q)).2$. Следуя [6], рассмотрим представление группы $E_6(q)$ на 27-мерном пространстве V над $\mathbb{F}_q$. Согласно [6, (3.6)] существуют такие 9-мерные подпространства V_1, V_2 и V_3 пространства V, что $V = V_1 + V_2 + V_3$ и $N_{E_6(q)}(V_1) = (M_1 \times M_2 \times M_3)H\langle t\rangle$, где $M_i = C_{E_6(q)}(V_i) \cong SL_3(q)$ для $i \in \{1, 2, 3\}$, H — подгруппа Картана группы $E_6(q)$ и t переставляет V_2 и V_3 и индуцирует графовый автоморфизм на M_1. Кроме того (см. [6, (3.6)]), для попарно различных i, j, k из $\{1, 2, 3\}$ действие группы $M_i \times M_j$ на V_k таково, что относительно этого действия V_k имеет структуру (внешнего) тензорного произведения двух естественных $\mathbb{F}_q SL_3(q)$-модулей.

Следуя [5, разд. 9], будем рассматривать группу G в качестве подгруппы группы $E_6(q)$. Поскольку в группе G имеется точно один класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных G_x, и никакая не входящая в этот класс максимальная подгруппа группы G не содержит подгрупп, изоморфных G_x, то можно считать, что $G_x = N_G(V_1)$ (см. [5, разд. 9; 6, (3.6)]). Пусть A и B — два различных прямых множителя группы $\mathrm{soc}(G_x)$, изоморфных $SL_3(q)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $A = C_G(V_1)$. Тогда B является диагональной подгруппой в группе $M_2 \times M_3$, изоморфной группе $SL_3(q)$. Поскольку $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то $G_{x,y} \in \{A, B\}$ и подгруппа $G_{x,y}$ сопряжена с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Таким образом, подгруппа D сопряжена в группе G с A или B. Если подгруппа D сопряжена в группе G с A, то по теореме Крулля — Шмидта (см. [4, теорема (14.5)]) разложение пространства V на неразложимые относительно D подпространства должно содержать 9 одномерных подпространств, что противоречит приведенному выше описанию действий M_i на V_j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, и предложениям 9–11. Поэтому подгруппа D сопряжена в группе G с B. Но тогда по теореме Крулля — Шмидта разложение пространства V на неразложимые относительно D подпространства должно содержать шесть трехмерных подпространств. Противоречие с приведенным выше описанием действий M_i на V_j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, и предложениями 9–11.

Предположим, что $\epsilon = -1$. Тогда $G_x \cong (SU_3(q) \times SU_3(q)).2$. Следуя [7], рассмотрим представление группы $E_6(q)$ на 27-мерном пространстве V над $\mathbb{F}_q$. Согласно [7, (3.3)] существуют 9-мерное подпространство U и 18-мерное подпространство W пространства V и подгруппа $M \cong SU_3(q)$ группы $E_6(q)$ такие, что $V = U \oplus W$, $U = C_V(M)$, $C_{E_6(q)}(M) \cong SL_3(q^2)$ и группа $N_{E_6(q)}(W)$ имеет вид $MC_{E_6(q)}(M)\langle t\rangle$, где t индуцирует графовый автоморфизм на $C_{E_6(q)}(M)$. Кроме того (см. [7, (3.3)]) подпространство W, рассматриваемое как $\mathbb{F}_{q^2}(MC_{E_6(q)}(M))$-модуль, является $\mathbb{F}_{q^2}$-тензорным произведением естественных модулей для $M \cong SU_3(q)$ и $C_{E_6(q)}(M) \cong SL_3(q^2)$. Если $\mathbb{K}$ — квадратичное расширение поля $\mathbb{F}_q$, то (см. [7, (3.3.4)]) тензорное произведение $K \otimes_{\mathbb{F}_q} C_V(M)$ изоморфно как $\mathbb{K}\,C_{E_6(q)}(M)$-модуль тензорному произведению $N \otimes N^\sigma$, где N — естественный $\mathbb{K}\,C_{E_6(q)}(M)$-модуль и $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F}_q)$.

Следуя [5, разд. 9], будем рассматривать группу G в качестве стабилизатора в $E_6(q)$ подходящего 26-мерного подпространства пространства V. Поскольку в группе $G \cong F_4(q)$ имеется точно один класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных $G_x \cong (SU_3(q) \times SU_3(q)).2$, и никакая не входящая в этот класс максимальная подгруппа группы G не содержит подгрупп, изоморфных G_x, то можно считать, что $G_x = N_G(W)$ (см. [5, разд. 9; 7, (3.3)]). Положим $A = M$ и $B = C_G(M)$. Тогда (см. выше) $\mathrm{soc}(G_x) = A \times B$. Поскольку $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то $G_{x,y} \in \{A, B\}$ и подгруппа $G_{x,y}$ сопряжена в группе G с некоторой диагональной подгруппой D группы $A \times B$. Таким образом, подгруппа D сопряжена в группе G с A или B. Если подгруппа D сопряжена в группе G с A, то поскольку A действует тривиально на $U = C_V(M)$, по теореме Крулля — Шмидта разложение пространства V на неразложимые относительно D подпространства должно содержать не менее 9 одномерных подпространств. Однако легко показать (используя предложение 12), что V имеет единственное одномерное D-инвариантное подпространство. Таким образом, подгруппа D сопряжена в группе G с B. Поскольку группы B и D индуцируют на $C_V(M)$ одну и ту же группу, отсюда по теореме Крулля — Шмидта следует, что разложение пространства W на неразложимые относительно B подпространства должно содержать одномерное подпространство (см. предложение 12), что противоречит [7, (3.3.4)]. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X и $x \in X$. Предположим, что $G \cong F_4(q)$ и $G_x \cong SO_3(q) \times G_2(q)$, где $q \geq 5$ и q нечетно. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr**).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — группа всех автоморфизмов алгебры J (над $\mathbb{F}_q$) всех эрмитовых 3×3-матриц над алгеброй октанионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$. Заметим, что $L \cong F_4(q)$ (см., например, [21, разд. 4.8.3]).

Для матриц из алгебры J будем использовать обозначение

$$(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma) := \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \overline{\alpha} & b & \gamma \\ \overline{\beta} & \overline{\gamma} & c \end{pmatrix},$$

где $a,b,c \in \mathbb{F}_q$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$ и черта обозначает сопряжение в алгебре октанионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}$.

Нам понадобятся следующие подгруппы группы L. Через A обозначим группу автоморфизмов алгебры J, состоящую из отображений вида

$$(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma) \mapsto (a,b,c \mid \varphi(\alpha),\varphi(\beta),\varphi(\gamma)),$$

где $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{F}_q})$ (таким образом, $A \cong G_2(q)$). Через B обозначим группу автоморфизмов алгебры J, состоящую из отображений вида

$$(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma) \mapsto M^{-1}(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma)M,$$

где M — ортогональная 3×3-матрица над $\mathbb{F}_q$ с определителем, равным 1 (таким образом, $B \cong SO_3(q)$). Из [21, разд. 4.8.9] следует, что $B = C_L(A)$ и $\langle A, B\rangle = A \times B$.

Поскольку (см., например, [21, разд. 4.8.3]) в группе G имеется точно один класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных G_x, и никакая не входящая в этот класс максимальная подгруппа группы G не содержит подгрупп, изоморфных G_x, то отождествим группу G с L, положив $G_x = A \times B$. Пусть $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$. Ясно, что тогда $\mathrm{soc}(B) \le G_{x,y} \le B$.

Положим $J_{\mathbb{F}_q} = \{(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma) \mid a,b,c,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{F}_q\}$. Поскольку $G_x \le N_G(J_{\mathbb{F}_q})$, подгруппа G_x максимальна в G и $G \ne N_G(J_{\mathbb{F}_q})$ (см. [21, разд. 4.8.9]), то $G_x = N_G(J_{\mathbb{F}_q})$ и, следовательно, можно отождествить X с множеством подалгебр $\{g(J_{\mathbb{F}_q}) \mid g \in G\}$ алгебры J, а элемент x — с $J_{\mathbb{F}_q}$.

Так как $G_{x,y}$ действует тривиально на $G_x(y)$, то $G_{x,y}$ стабилизирует по крайней мере $1 + |G_x(y)|$ подалгебр алгебры J из $\{g(J_{\mathbb{F}_q}) \mid g \in G\} = X$.

Через ψ_1 и ψ_2 обозначим элементы из $\mathrm{soc}(B)$ равные соответственно сопряжениям элементов алгебры J матрицами

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В наших обозначениях для $(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma) \in J$ имеем $\psi_1(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma) = (a,b,c \mid \gamma,\overline{\alpha},\overline{\beta})$ и $\psi_2(a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma) = (a,b,c \mid -\alpha,-\beta,\gamma)$. Обозначим через V_1 подпространство $\{(a,b,c \mid 0,0,0) \mid a,b,c \in \mathbb{F}_q\}$ пространства алгебры J, а через V_2 подпространство $\{(0,0,0 \mid \alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}_q}\}$ пространства алгебры J. Ясно, что J есть прямая сумма пространств V_1 и V_2. Через p_i будем обозначать проекцию пространства алгебры J на V_i для $i \in \{1,2\}$.

Пусть U — произвольная подалгебра алгебры J из $G_x(y)$. Пусть $L = (a,b,c \mid \alpha,\beta,\gamma)$ — произвольный элемент из U. Положим $L' = \dfrac{1}{2}(L + \psi_2(L)) = (a,b,c \mid 0,0,\gamma)$. Поскольку $L', \psi_1(L'), {\psi_1}^2(L') \in U$, то легко проверить, что $(0,0,0 \mid \gamma,0,0)$, $(0,0,0 \mid 0,\overline{\gamma},0)$, $(0,0,0 \mid 0,0,\gamma) \in U$. Применяя аналогичные рассуждения к элементам $\psi_1(L)$ и ${\psi_1}^2(L)$ (вместо L), получаем, что $(0,0,0 \mid \overline{\beta},0,0)$, $(0,0,0 \mid 0,\beta,0)$, $(0,0,0 \mid 0,0,\overline{\beta}) \in U$ и $(0,0,0 \mid \alpha,0,0)$, $(0,0,0 \mid 0,\overline{\alpha},0)$, $(0,0,0 \mid 0,0,\alpha) \in U$. В частности, $U = p_1(U) + p_2(U)$ и $\dim(p_2(U)) \in \{3,6\}$. Заметим, что если $\dim(p_2(U)) = 3$, то $p_1(U) = V_1$, а если $\dim(p_2(U)) = 6$, то $U \le V_2$.

Таким образом, в $G_x(y)$ имеется не более чем $\dfrac{q^8-1}{q-1}$ алгебр из $\{g(J_{\mathbb{F}_q}) \mid g \in G\}$, содержащих пространство V_1, и не более чем $\dfrac{(q^8-1)(q^7-1)}{(q^2-1)(q-1)}$ алгебр, содержащих пространство V_2. Следовательно, $|G_x(y)| \leq \dfrac{q^8-1}{q-1} + \dfrac{(q^8-1)(q^7-1)}{(q^2-1)(q-1)}$. С другой стороны, $|G_x(y)| = \dfrac{|G_x|}{|G_{x,y}|} \geq |G_2(q)| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что G является исключительной группой лиева типа над $\mathbb{F}_q$, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, и для группы G реализуется возможность* I(b) *предложения 7. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* **(Pr)**.

Доказательство. Описание возможного строения стабилизатора точки G_x для таких групп G дается в [14].

Если G_x имеет вид $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа, то для группы подстановок G по предложению 2 выполняется свойство (**Pr**).

В оставшихся случаях имеем следующие возможности 1)–5) для группы G и стабилизатора точки G_x (см. [14]):

1) $G \cong {}^3D_4(q)$, $G_x \cong d.(L_2(q) \times L_2(q^3)).d$, где $d = (2, q-1)$;

2) $G \cong G_2(q)$, $G_x \cong d.(L_2(q) \times L_2(q)).d$, где $q \geq 3$ и $d = (2, q-1)$;

3) $G \cong {}^2F_4(q)$, $G_x \cong ({}^2B_2(q) \times {}^2B_2(q)).2$, где $q = 2^{2m+1}$ и $m \geq 1$;

4) $G \cong F_4(q)$, $G_x \cong 2.(L_2(q) \times PSp_6(q)).2$, где $q \geq 3$;

5) $G \cong F_4(q)$, $G_x \cong e.(L_3^\epsilon(q) \times L_3^\epsilon(q)).e.2$, где $\epsilon = \pm 1$ и $e = (3, q-\epsilon)$.

Предположим, что реализуется возможность 1). Тогда утверждение следует из леммы 2.

Предположим, что реализуется возможность 2). Если $d = 2$, то $Z(G_x) \neq 1$ и справедливость свойства (**Pr**) для группы подстановок G следует из леммы 1. Если $d = 1$, то q четно и $G_x \cong L_2(q) \times L_2(q)$. Теперь утверждение имеет место в силу леммы 3.

Предположим, что реализуется возможность 3). Поскольку прямые множители из $\mathrm{soc}(G_x)$ сопряжены в G_x (см. [14]), то утверждение справедливо в силу предложения 3.

Предположим, что реализуется возможность 4). Так как $Z(G_x) \neq 1$, то утверждение следует из леммы 1.

Предположим, что реализуется возможность 5). Тогда справедливость свойства (**Pr**) для группы подстановок G следует из леммы 4.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что G является исключительной группой лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, и для группы G реализуется возможность* I(c) *предложения* 7. *Тогда для группы подстановок G имеет место свойство* **(Pr)**.

Доказательство. Список возможностей для случая I(c) приведен в [15, табл. 1]. Если G_x имеет вид $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы и T — простая неабелева группа, то для группы подстановок G по предложению 2 выполняется свойство (**Pr**).

Таким образом, для доказательства леммы остается рассмотреть случай, когда $G \cong F_4(q)$ и $G_x \cong SO_3(q) \times G_2(q)$, где $p \geq 3$ и $q \geq 5$. Теперь утверждение следует из леммы 5. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G — простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что G является исключительной группой лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G имеет место свойство* **(Pr)**.

Доказательство. Заметим прежде всего, что к группе G применимо предложение 7.

Предположим, что для группы G реализуется возможность I(a) предложения 7. Предположим также, что лемма неверна, т. е. найдутся $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $G_{x,y} \neq 1$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда группа G_x является параболической подгруппой в G. В частности, $C_{G_x}(O_p(G_x)) \leq$

$O_p(G_x)$ для некоторого простого числа p. По предложению 1 имеем $[O_p(G_x), G_{x,y}] = 1$ и $O_p(G_{x,y}) = 1$. Таким образом, $G_{x,y} \leq C_{G_x}(O_p(G_x)) \leq O_p(G_x)$ и $O_p(G_{x,y}) = 1$, т.е. $G_{x,y} = 1$. Противоречие.

Таким образом, $G_{x,y} \leq C_{G_x}(O_p(G_x)) \leq O_p(G_x)$. Так как $O_p(G_{x,y}) = 1$, то $G_{x,y} = 1$. Противоречие.

Предположим, что для группы G реализуется возможность I(b) предложения 7. Тогда утверждение следует из леммы 6.

Предположим, что для группы G реализуется возможность I(c) предложения 7. Тогда утверждение следует из леммы 7.

Предположим, что для группы G реализуется возможность II, III, IV или V предложения 7. Тогда G_x имеет вид $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы и T — простая неабелева группа. В силу предложения 2 для группы подстановок G выполняется свойство (**Pr**).

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что цоколем группы G является исключительная группа лиева типа, отличная от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$. Тогда для группы подстановок G выполняется свойство* (**Pr+**).

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $T = \mathrm{soc}(G)$.

Предположим, что $T_x = G_x \cap T$ является максимальной подгруппой группы T. Тогда T — простая примитивная группа подстановок, причем T является исключительной группой лиева типа, отличной от $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$. По лемме 8 для группы T выполняется свойство (**Pr**). Следовательно, для группы подстановок G выполняется свойство (**Pr+**).

Пусть теперь $T_x = G_x \cap T$ не является максимальной подгруппой группы T. Если G_x имеет вид $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа, то для группы подстановок G по предложению 6 выполняется свойство (**Pr+**). Поэтому далее считаем, что G_x не может быть представлена в виде $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа. Согласно предложению 8 для группы G_x имеет место одна из возможностей I–IV предложения 8.

Предположим, что для группы G_x реализуется возможность I или возможность II предложения 8. Тогда группа G_x является локальной подгруппой в G, и по [18, теорема 1] либо G_x является параболической подгруппой группы G, либо G_x является подгруппой максимального ранга, либо G_x из [18, табл. I].

Если группа G_x является параболической подгруппой группы G, то $C_{G_x}(O_p(G_x)) \leq O_p(G_x)$ для некоторого простого числа p. Предположим, что $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $F(T_{x,y}) = 1$. Поскольку $T_{x,y} \cap O_p(G_x) = 1$, то $[O_p(G_x), T_{x,y}] = 1$, и, следовательно, $T_{x,y} \leq C_{G_x}(O_p(G_x)) \leq O_p(G_x)$. Таким образом, $T_{x,y} = 1$, и для группы подстановок G выполняется свойство (**Pr+**).

Если G_x — группа из [18, табл. I], то, вопреки сделанному предположению, G_x имеет вид $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа. Противоречие.

Пусть, наконец, G_x является подгруппой максимального ранга группы G. Тогда G_x — группа из [14, табл. 5.1]. Поскольку, кроме того, T_x не является максимальной подгруппой группы T, то $T \cong F_4(q)$ и $N_T(D) \cong (Sp_4(q) \times Sp_4(q)).2$, где q четно и D — подгруппа группы T, максимальная со свойством $G_x = N_G(D)$. Поскольку $T_x = G_x \cap T = N_T(D) \cong Sp_4(q)\mathrm{wr}S_2$ (см. [13]), то при $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ имеем $|T_{x,y}| \in \{1, |T_x|/2, |T_x|\}$ и, следовательно, $T_{x,y} \trianglelefteq T_y$, и свойство (**Pr+**) выполняется для группы подстановок G.

Предположим, что для G_x реализуется возможность III предложения 8. Из доказательства [16, лемма 3.1] следует, что в этом случае либо $F^*(G_x)$ является простой группой, либо $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$. Если $F^*(G_x)$ является простой группой, то получаем противоречие с тем, что G_x не может быть представлена в виде $A.K.B$, где A, B — разрешимые группы и K — простая неабелева группа. Если $F(G_x) \neq 1$ и $F(G_x) \leq Z(G_x)$, то $Z(G_x) \neq 1$. Противоречие с леммой 1.

Предположим, что для G_x реализуется возможность IV предложения 8. Тогда $T \cong F_4(q)$ и $F^*(G_x) \cong L_2(q) \times G_2(q)$, где $q \geq 5$ и q нечетно. Вопреки сделанному предположению, в этом случае группа T_x является максимальной подгруппой в группе T.

Лемма доказана.

Справедливость теоремы 1 следует из леммы 9 и предложения 4.

Справедливость теоремы 2 следует из леммы 9 и предложения 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коныгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 387–406.
2. **Коныгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них: случай, когда цоколь есть степень спорадической простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 159–167.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с.
4. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представления конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва: Наука, 1969. 669 с.
5. **Aschbacher M.** The 27-dimensional module for E_6, I // Invent. Math. 1987. Vol. 89. P. 159–195.
6. **Aschbacher M.** The 27-dimensional module for E_6, II // J. London Math. Soc. (2). 1988. Vol. 37. P. 275–293.
7. **Aschbacher M.** The 27-dimensional module for E_6, III // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 321. P. 45–84.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Cameron P.J.** Suborbits in transitive permutation groups // Combinatorics: Proc. NATO Advanced Study Inst. (Breukelen, 1974). Part 3: Combinatorial Group Theory. Amsterdam: Math. Centrum, 1974. P. 98–129. (Mathematical Centre Tracts; vol. 57).
10. **Hulpke A., Seress Á.** Short presentations for three-dimensional unitary groups // J. Algebra. 2001. Vol. 245, no. 2. P. 719–729.
11. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the Steinberg triality group ${}^3D_4(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 115, no. 1. P. 182–199.
12. **Liebeck M.W., Praeger Ch.E., Saxl J.** On the O'Nan — Scott theorem for finite primitive permutation groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. Vol. 44, no. 3. P. 389–396.
13. **Liebeck M.W., Saxl J.** On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. Vol. 55, no. 2. P. 299–330.
14. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.
15. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** A survey of maximal subgroups of exceptional groups of Lie type // Groups, combinatorics and geometry (Durham, 2001). River Edge: World Sci. Publ., 2003. P. 139–146.
16. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // Geom. Dedicata. 1990. Vol. 35, no. 1–3. P. 353–387.
17. **Reitz H.L.** On primitive groups of odd order // Amer. J. Math. 1904. Vol. 26. P. 1–30.
18. The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic / A.M. Cohen, M.W. Liebeck, J. Saxl, G.M. Seitz // Proc. London Mat. Soc. (3). 1992. Vol. 64. P. 21–48.
19. **Weiss M.J.** On simply transitive groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40, no. 6. P. 401–405.
20. **Wielandt H.** Finite permutation groups. New York: Acad. Press, 1964. 114 p.
21. **Wilson R.A.** The finite simple groups. London: Springer, 2009. 298 p.

Коныгин Антон Владимирович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: konygin@imm.uran.ru

Поступила 10.01.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

ПОРОЖДАЕМОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ХОЛЛОВЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ПАРОЙ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Для конечной группы G через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей числа $|G|$. В "Коуровской тетради" П. Шумяцким под номером 17.125 записана гипотеза: в конечной группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$. Обозначим через $\mathfrak{Y}$ класс всех конечных групп G таких, что $\pi(H) \neq \pi(G)$ для любой максимальной подгруппы H в G. Гипотеза Шумяцкого эквивалентна следующей гипотезе: любая группа из класса $\mathfrak{Y}$ порождается двумя сопряженными элементами. Пусть $\mathfrak{V}$ — класс всех конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа является холловой. Ясно, что $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{Y}$. В настоящей работе доказано, что любая группа из класса $\mathfrak{V}$ порождается двумя сопряженными элементами. Таким образом, получено частичное подтверждение гипотезы Шумяцкого. Кроме того, изучены некоторые свойства контрпримера наименьшего порядка к гипотезе Шумяцкого.

Ключевые слова: конечная группа, порождаемость парой сопряженных элементов, холлова подгруппа, максимальная подгруппа, простой спектр.

N. V. Maslova, D. O. Revin. Generation of a finite group with Hall maximal subgroups by a pair of conjugate elements.

For a finite group G, the set of all prime divisors of $|G|$ is denoted by $\pi(G)$. P. Shumyatskii introduced the following conjecture, which is included in the "Kourovka Notebook" as Question 17.125: a finite group G always contains a pair of conjugate elements a and b such that $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$. Denote by $\mathfrak{Y}$ the class of all finite groups G such that $\pi(H) \neq \pi(G)$ for every maximal subgroup H in G. Shumyatskii's conjecture is equivalent to the following conjecture: every group from $\mathfrak{Y}$ is generated by two conjugate elements. Let $\mathfrak{V}$ be the class of all finite groups in which every maximal subgroup is a Hall subgroup. It is clear that $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{Y}$. We prove that every group from $\mathfrak{V}$ is generated by two conjugate elements. Thus, Shumyatskii's conjecture is partially supported. In addition, we study some properties of a smallest order counterexample to Shumyatskii's conjecture.

Keywords: finite group, generation by a pair of conjugate elements, Hall subgroup, maximal subgroup, prime spectrum.

Александру Алексеевичу Махневу к 60-летию

Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин "группа" в значении "конечная группа".

Пусть G — группа. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в спектр группы G (или, что то же самое, множество простых делителей числа $|G|$), будем называть *простым спектром группы* G и обозначать через $\pi(G)$.

П. Шумяцкий записал в "Коуровскую тетрадь" следующую гипотезу [2, проблема 17.125]:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00469 и 13-01-00505), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект 14.740.11.0346) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект МК-3395.2012.1), а программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), гранта ИММ УрО РАН для молодых ученых за 2013 г. и целевой программы СО РАН на 2012–2014 гг. (интеграционный проект No. 14).

Гипотеза 1. *В группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$.*

Отметим, что если в гипотезе 1 не требовать сопряженности элементов a и b, то данное утверждение будет верным, как следует из [16, теорема A].

Группу G назовем *минимальной относительно простого спектра,* если $\pi(H) \neq \pi(G)$ для любой собственной (эквивалентно, для любой максимальной) подгруппы H в G. Класс всех групп, минимальных относительно простого спектра, будем обозначать через $\mathfrak{Y}$.

Несложно показать (см. лемму 1), что гипотеза 1 эквивалентна следующей гипотезе:

Гипотеза 2. *Любая группа из класса $\mathfrak{Y}$ порождается двумя сопряженными элементами.*

В данной работе мы получим некоторое частичное подтверждение гипотезы 2. Более точно, наряду с классом $\mathfrak{Y}$ мы рассмотрим класс $\mathfrak{V}$ всех конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа является холловой (т. е. ее порядок и индекс взаимно просты). Такие группы мы будем называть *группами с холловыми максимальными подгруппами.* Легко показать (см. лемму 2), что $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{Y}$ и любая разрешимая группа принадлежит классу $\mathfrak{Y}$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\mathfrak{V}$. Группы из класса $\mathfrak{V}$ изучались в [3; 5–9]. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Любая группа из класса $\mathfrak{V}$ порождается двумя сопряженными элементами.*

Таким образом, можно считать, что в настоящей работе получено частичное подтверждение вышеупомянутой гипотезы Шумяцкого.

Отметим, что достичь успеха в описании групп из класса $\mathfrak{V}$ удалось благодаря тому, что в работе [5] были найдены композиционные факторы таких групп. Поэтому представляется естественной и интересной следующая открытая

Проблема 1. *Каковы неабелевы композиционные факторы групп из класса $\mathfrak{Y}$?*

Следует отметить также, что строение групп из класса $\mathfrak{Y}$ может быть существенно более разнообразным, чем групп из класса $\mathfrak{V}$. Например, из основного результата работы [6] следует, что неразрешимая группа из класса $\mathfrak{V}$ имеет ровно один неабелев композиционный фактор. Кроме того, класс $\mathfrak{V}$ не содержит почти простых групп, которые не являются простыми. Однако используя [11], легко показать, что группы $PSL_2(13) \times PSL_2(19)$ и $Aut(PSL_2(32))$ принадлежат классу $\mathfrak{Y}$.

В данной работе мы установим также некоторые свойства минимального (т. е. имеющего наименьший порядок) контрпримера $G(\mathfrak{Y})$ к гипотезе 2, который является одновременно минимальным контрпримером к гипотезе 1. Из предложения 5, например, следует, что $G(\mathfrak{Y})$ не является простой группой, а из предложения 6 — что разрешимый радикал группы $G(\mathfrak{Y})$ тривиален.

В частности, имеют место следующие два известных результата (см. комментарий к проблеме 17.125 из [2]).

Предложение 1. *Любая разрешимая группа из класса $\mathfrak{Y}$ порождается двумя сопряженными элементами.*

Предложение 2. *В конечной разрешимой группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$.*

В работе [4] было введено понятие ω-критической группы. Для данного множества ω натуральных чисел группа G называется *ω-критической*, если $\omega(G) = \omega$ и для любых подгрупп K и L группы G таких, что $K \trianglelefteq L$, из равенства $\omega(L/K) = \omega$ следуют равенства $L = G$ и $K = 1$. Группу G, которая является ω-критической для некоторого множества ω (или, что то же самое, является $\omega(G)$-критической), естественно назвать *критической по спектру.* Аналогично группу G будем называть *критической по простому спектру*, если для любых подгрупп K и L группы G, удовлетворяющих условию $K \trianglelefteq L$, из равенства $\pi(L/K) = \pi(G)$ следует, что $L = G$ и $K = 1$. Легко видеть, что любая группа, являющаяся критической по простому спектру, будет также критической по спектру и минимальной относительно простого спектра. Как следствие предложений 4 и 6 мы докажем

Предложение 3. *Контрпример $G(\mathfrak{Y})$ наименьшего порядка к гипотезе 2 является группой, критической по простому спектру.*

1. Предварительные результаты

Для конечной группы G через $\mathrm{S}(G)$, $\mathrm{O}_p(G)$ и $\Phi(G)$ будем обозначать соответственно ее разрешимый радикал (т. е. наибольшую разрешимую нормальную подгруппу группы G), p-радикал для простого p (т. е. наибольшую нормальную p-подгруппу группы G) и подгруппу Фраттини (т. е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G). Через p' для простого числа p будем обозначать множество всех простых чисел, отличных от p. Если π — некоторое множество простых чисел, то подгруппа H конечной группы G называется *π-холловой подгруппой*, при условии, что $\pi(H) \subseteq \pi$ и индекс $|G:H|$ не делится на числа из π.

Лемма 1. *Гипотезы 1 и 2 эквивалентны.*

Доказательство. Допустим, что гипотеза 1 верна. Пусть $G \in \mathfrak{Y}$ и $a, b \in G$ — пара сопряженных элементов таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$. Из определения класса $\mathfrak{Y}$ получаем $G = \langle a, b\rangle$. Таким образом, всякая группа из $\mathfrak{Y}$ порождается парой сопряженных элементов, и гипотеза 2 справедлива.

Допустим теперь, что гипотеза 2 верна, а гипотеза 1 ложна, и пусть G — контрпример наименьшего порядка к гипотезе 1. Пусть $H < G$. Тогда $\pi(H) \neq \pi(G)$, так как в противном случае (ввиду минимальности порядка группы G) в подгруппе H имеется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(\langle a, b\rangle) = \pi(H) = \pi(G)$ вопреки выбору G. По определению класса $\mathfrak{Y}$ имеем $G \in \mathfrak{Y}$. Но тогда в силу гипотезы 2 сама группа G порождается парой сопряженных элементов и, в частности, для нее тривиально выполнена гипотеза 1. Противоречие. $\square$

Отметим, что, по существу, доказано утверждение более сильное, чем лемма 1, а именно, установлено, что контрпример наименьшего порядка к любой из гипотез 1 или 2 является также контрпримером наименьшего порядка и к другой.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы групп, определенные во введении, а $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых конечных групп. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{Y}$;

(2) $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{V}$ и H — максимальная подгруппа группы G. Поскольку $H \neq G$, существует простое число p, делящее $|G:H|$. Так как $G \in \mathfrak{V}$, подгруппа H холлова в G и, следовательно, $p \notin \pi(H)$. В то же время $p \in \pi(G)$. Значит, $\pi(H) \neq \pi(G)$ для произвольной максимальной подгруппы H, т. е. $G \in \mathfrak{Y}$. Утверждение (1) доказано.

Пусть теперь $G \in \mathfrak{Y}$ — разрешимая группа и H — ее максимальная подгруппа. Так как $G \in \mathfrak{Y}$, существует простое число $p \in \pi(G) \setminus \pi(H)$. Так как H — p'-подгруппа и группа G разрешима, по теореме Ф. Холла [15] H содержится в некоторой p'-холловой подгруппе из G, а ввиду того что подгруппа H максимальна, H сама является p'-холловой подгруппой. Таким образом, все максимальные подгруппы группы G холловы, т. е. $G \in \mathfrak{V}$. С учетом (1) утверждение (2) доказано. $\square$

Следующая лемма хорошо известна и легко проверяется.

Лемма 3. *Пусть $\varphi : G \to G_1$ — гомоморфизм групп. Тогда для любой π-холловой подгруппы H группы G подгруппа H^{φ} является π-холловой в G^{φ}.*

Лемма 4. *Классы $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{Y}$ замкнуты относительно взятия гомоморфных образов.*

Доказательство. Пусть $\varphi : G \to G_1$ — гомоморфизм групп. Возьмем произвольную максимальную подгруппу группы G^φ и рассмотрим ее полный прообраз H. Подгруппа H максимальна в G.

Допустим, что $G \in \mathfrak{V}$. Тогда подгруппа H холлова в G и по лемме 3 подгруппа H^φ холлова в G^φ. Значит, $G^\varphi \in \mathfrak{V}$ в силу произвольности максимальной подгруппы H^φ.

Допустим, что $G \in \mathfrak{Y}$. Тогда существует число $p \in \pi(G)$ такое, что $p \notin \pi(H)$. Так как $\pi(H^\varphi) \subseteq \pi(H)$, имеем $p \notin \pi(H^\varphi)$. В то же время p делит $|G : H| = |G^\varphi : H^\varphi|$, поэтому $p \in \pi(G^\varphi)$. Следовательно, $\pi(H^\varphi) \neq \pi(G^\varphi)$ и, значит, $G^\varphi \in \mathfrak{Y}$ ввиду произвольности H^φ. $\square$

Предложение 4. *Пусть G — конечная группа, минимальная относительно простого спектра, и $\mathrm{S}(G) = 1$. Тогда G является критической по простому спектру группой.*

Доказательство. Пусть K и L — подгруппы группы G такие, что $K \trianglelefteq L$ и $\pi(L/K) = \pi(G)$. Поскольку $\pi(G) = \pi(L/K) \subseteq \pi(L) \subseteq \pi(G)$ и группа G минимальна относительно простого спектра, имеем $L = G$. Следовательно, $K \trianglelefteq G$ и $\pi(K) \subseteq \pi(G/K)$.

Допустим, что $K \neq 1$ и $p \in \pi(K)$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу P группы K. Используя аргумент Фраттини [10, предл. 6.3], получаем $G = KN_G(P)$. Далее ввиду изоморфизма $KN_G(P)/K \cong N_G(P)/N_K(P)$ имеем

$$\pi(G) = \pi(G/K) = \pi(KN_G(P)/K) = \pi(N_G(P)/N_K(P)) \subseteq \pi(N_G(P)) \subseteq \pi(G),$$

откуда с учетом минимальности группы G относительно простого спектра получаем $G = N_G(P)$. Последнее равенство означает, что $P \trianglelefteq G$ и, следовательно, $\mathrm{S}(G) \neq 1$, поскольку подгруппа P разрешима и $P \neq 1$ ввиду выбора числа p. Противоречие. $\square$

Критическая по простому спектру группа может не только иметь нетривиальный разрешимый радикал, но и даже сама быть разрешимой, что вытекает (с учетом леммы 2) из следующего утверждения.

Лемма 5 [6, теорема 1]. *Нетривиальная группа G принадлежит классу $\mathfrak{V}$ тогда и только тогда, когда G обладает нормальным рядом*

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = 1$$

таким, что

(1) *для любого $i = 1, \ldots, n-1$ группа G_i/G_{i+1} является элементарной абелевой p_i-группой для некоторого $p_i \in \pi(G)$ и изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G;*

(2) *для любого $i = 1, \ldots, n-1$ группа G/G_i действует неприводимо на G_i/G_{i+1} как на векторном пространстве;*

(3) *для группы $\overline{G} = G/G_1$ справедливо одно из следующих утверждений:*

(а) *$\overline{G}$ является циклической группой простого порядка;*

(б) $\overline{G} \simeq PSL_2(11)$;

(в) $\overline{G} \simeq PSL_5(2)$;

(г) $\mathrm{O}_3(\overline{G}) = \Phi(\overline{G})$ *и* $\overline{G}/\Phi(\overline{G}) \simeq PSL_2(7)$.

Непосредственно из леммы 5 вытекает

Лемма 6. *Нетривиальная группа G с единичным разрешимым радикалом принадлежит классу $\mathfrak{V}$ тогда и только тогда, когда G изоморфна одной из групп $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$, $PSL_5(2)$. В частности, любая такая группа проста.*

Предложение 5. *Любая конечная простая группа порождается двумя своими сопряженными элементами.*

Доказательство. Пусть S – конечная простая группа. Можно считать, что S неабелева. По теореме Фейта — Томпсона [13] группа S содержит инволюцию t. Из [14, следствие теоремы 1] вытекает, что $S = \langle x, t\rangle$ для некоторого элемента $x \in S$. Рассмотрим подгруппу $H = \langle x, x^t\rangle$. Эта подгруппа инвариантна относительно t, так как t переставляет образующие x и x^t. Кроме того, H инвариантна относительно x, так как $x \in H$. Поэтому H нормальна в $\langle x, t\rangle = S$ и, значит, $S = H = \langle x, x^t\rangle$ ввиду простоты группы S. □

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{Z}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и такой, что $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Y}$. Допустим, что существует группа $G \in \mathfrak{Z}$, не порождающаяся никакой парой своих сопряженных элементов. Будем считать при этом, что группа G имеет наименьший возможный порядок. Тогда* $\mathrm{S}(G) = 1$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{S}(G) \neq 1$. Возьмем минимальную нормальную подгруппу N группы G, содержащуюся в $\mathrm{S}(G)$. Тогда группа N является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi(G)$.

Пусть $\bar{\ } : G \to G/N$ — естественный эпиморфизм. Так как класс $\mathfrak{Z}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, имеем $\overline{G} \in \mathfrak{Z}$. С учетом выбора группы G существуют элементы $a, b \in G$ такие, что $\overline{G} = \langle \overline{a}, \overline{b}\rangle$ и $b = a^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Пусть $H = \langle a, b\rangle$. Поскольку группа G не порождается никакими двумя сопряженными элементами, имеем $H < G$. Следовательно, $\pi(H) \neq \pi(G)$, так как $G \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Y}$. С другой стороны, $\overline{H} = \overline{G}$, поэтому $\pi(H) = \pi(G) \setminus \{p\}$. Значит, $(|H|, |N|) = 1$, и, учитывая, что $G = HN$, получаем $H \simeq G/N = \overline{G}$.

Заметим, что $C_N(a) = 1$. В противном случае возьмем нетривиальный элемент $x \in C_N(a)$ и рассмотрим элементы $a_1 = ax$ и $b_1 = (ax)^g = bx^g$. Так как $\overline{\langle a_1, b_1\rangle} = \langle \overline{a}_1, \overline{b}_1\rangle = \overline{G}$, имеем $\pi(G) \setminus \{p\} \subseteq \pi(\langle a_1, b_1\rangle)$. С другой стороны, число p делит порядок элемента $ax = a_1$, поэтому $p \in \pi(\langle a_1, b_1\rangle)$. Значит, $\pi(\langle a_1, b_1\rangle) = \pi(G)$, и по определению класса $\mathfrak{Y}$ имеем $G = \langle a_1, b_1\rangle$ вопреки выбору G.

Мы доказали также, что

$$C_N(b) = C_{N^g}(a^g) = C_N(a)^g = 1.$$

Возьмем произвольный элемент $x \in N$. Рассмотрим группу $K = \langle a, b^x\rangle$. Так как G не порождается никакой парой сопряженных элементов, имеем $K < G$ и $\pi(K) \neq \pi(G)$. В то же время $\overline{K} = \langle \overline{a}, \overline{b}\rangle = \overline{G}$, поэтому $\pi(K) = \pi(G) \setminus \{p\}$. Следовательно, $(|K|, |N|) = 1$ и $G = KN$. По теореме Шура — Цассенхауза [10, теорема 18.1] для некоторого $y \in N$ имеем $H = K^y$. Элементы a и a^y лежат в H, значит, $[a, y] = a^{-1}a^y$ — p'-элемент. С другой стороны, $[a, y] \in N$, поэтому $[a, y]$ — p-элемент. Следовательно, $[a, y] = 1$ и $y = 1$, так как $C_N(a) = 1$. Тем самым мы доказали, что

$$\langle a, b^x\rangle = K = K^y = H = \langle a, b\rangle.$$

В частности, $b^x \in \langle a, b\rangle$ для любого $x \in N$. Аналогично $a^x \in \langle a, b\rangle$ для всех $x \in N$. Следовательно, подгруппа $H = \langle a, b\rangle$ нормальна в $HN = G$. Теперь $[H, N] \leq H \cap N = 1$ и

$$N \leq C_N(H) \leq C_N(a) = 1.$$

Противоречие с предположением. □

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы. Допустим, теорема неверна. Возьмем группу $G \in \mathfrak{V}$ наименьшего порядка среди всех групп, которые не порождаются никакой парой сопряженных элементов. Из леммы 4 и предложения 6 следует, что $\mathrm{S}(G) = 1$. Теперь ввиду леммы 6 группа G изоморфна одной из групп $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ или $PSL_5(2)$, в частности проста. Но тогда с учетом предложения 5 группа G порождается двумя сопряженными элементами. Противоречие. □

Изложенное доказательство теоремы опирается на предложение 5, в котором, в свою очередь, существенно используется результат о “полуторапорождаемости” конечных простых групп [14]. Доказательство этого результата получено вероятностными методами, а потому неконструктивно. Далее мы приведем конструктивное доказательство теоремы. Заметим, что пару сопряженных элементов, порождающих заданную конечную группу с холловыми максимальными подгруппами, можно построить явно. Построение будем проводить индукцией по длине n главного ряда группы G.

База индукции. Пусть $n = 1$, т. е. либо $S(G) = 1$ и G — одна из простых групп $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$, либо (очевидный случай) G — циклическая группа простого порядка.

Укажем явным образом пары сопряженных элементов, порождающие группы $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$ соответственно.

Известно [1, лемма 1.3.2], что для любого поля K выполнено равенство

$$SL_2(K) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in K \right\rangle.$$

Поэтому если K — конечное простое поле, то группа $SL_2(K)$ порождается двумя матрицами

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

причем $b = a^g$, где

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, группы $PSL_2(7)$ и $PSL_2(11)$ порождаются двумя сопряженными элементами, являющимися проективными образами матриц a и b над соответствующим полем.

Для группы $PSL_5(2) = SL_5(2) = GL_5(2)$ в [12] явно указаны матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

такие, что $GL_5(2) = \langle a, g \rangle$ и $|g| = 2$. Повторяя рассуждения из доказательства предложения 5, легко убедиться, что $PSL_5(2) = \langle a, b \rangle$, где

$$b = a^g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг индукции. Пусть теперь $G \in \mathfrak{V}$ — произвольная группа с холловыми максимальными подгруппами, и длина n главного ряда группы G больше 1. Тогда $\mathrm{S}(G) \neq 1$ по лемме 5. Пусть

N — минимальная нормальная подгруппа в G такая, что $N \leq S(G)$. Предположим, что $G/N = \langle aN, bN \rangle$ и $b = a^g$ для некоторых $a, g \in G$. Подгруппа N является элементарной абелевой, и, повторяя рассуждения из доказательства предложения 6, легко указать пару сопряженных элементов, порождающих группу G. Более точно, имеет место один из следующих случаев: либо а) $G = \langle a, b \rangle$, либо б) $G \neq \langle a, b \rangle$ и $C_N(a) \neq 1$, либо в) $G \neq \langle a, b \rangle$ и $C_N(a) = 1$. В случае а) искомая пара сопряженных образующих a и b для группы G найдена. В случае б) $G = \langle a_1, b_1 \rangle$, где $a_1 = ax$ для любого нетривиального элемента $x \in C_N(a)$ и $b_1 = a_1^g$. Наконец, в случае в) из доказательства предложения 6 вытекает, что $G = \langle a, b^x \rangle$ для некоторого элемента $x \in N$. $\square$

Предложения 1 и 2 известны. Приведем другие доказательства этих предложений.

Доказательство предложения 1. Требуемое следует из предложения 6, если взять $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых конечных групп. $\square$

Доказательство предложения 2. Допустим, предложение 2 неверно и G — контрпример наименьшего порядка к предложению 2. Тогда $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной подгруппы $H \leq G$. Действительно, предположим, что группа G обладает собственной подгруппой H, для которой $\pi(H) = \pi(G)$. Ввиду разрешимости группы H и того, что $|H| < |G|$, в H (а следовательно, и в G) найдутся сопряженные элементы a и b, для которых выполнено равенство $\pi(G) = \pi(H) = \pi(\langle a, b \rangle)$ вопреки выбору группы G. Тем самым доказано, что $G \in \mathfrak{Y}$. Применение предложения 1 снова дает противоречие с выбором G. $\square$

Доказательство предложения 3. Требуемое следует из предложений 4 и 6, если взять $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/17kt.pdf .
3. **Левчук В.М., Лихарев А.Г.** Конечные простые группы с дополняемыми максимальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 798–810.
4. **Мазуров В.Д., Ши В.** Критерий нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.
5. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
6. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, в которых все максимальные подгруппы холловы // Мат. труды. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.
7. **Монахов В. С.** Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.
8. **Тихоненко Т.В., Тютянов В.Н.** Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. Т. 50, № 5. С. 198–206.
9. **Тютянов В.Н.** Конечные группы с дополняемыми подгруппами // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. Т. 36, № 3. С. 178–183.
10. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
11. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
12. Atlas of finite group representations / Robert Wilson [et. al.]. URL: http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/ .
13. **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. 1964. Vol. 13, no. 3. P. 775–1029.
14. **Guralnick R.M., Kantor W.M.** Probabilistic generation of finite simple groups // J. Algebra. 2000. Vol. 234, no. 2. P. 743–792.

15. **Hall P.** A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. Vol. 3. P. 98–105.
16. **Lucchini A., Morigi M., Shumyatsky P.** Boundedly generated subgroups of finite groups // Forum Math. 2012. Vol. 24, no. 4. P. 875–887.

Поступила 12.09.2012

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: revin@math.nsc.ru

Том 19 № 3 2013

УДК 519.17

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ μ И ИХ РАСШИРЕНИЯХ[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Пусть $\mathcal{M}$ — класс сильно регулярных графов, для которых μ является неглавным собственным значением. Заметим, что окрестность любой вершины $AT4$-графа лежит в $\mathcal{M}$. В работе получено описание параметров графов из $\mathcal{M}$ и найдены массивы пересечений $AT4$-графов, в которых окрестности вершин лежат в выделенных подклассах из $\mathcal{M}$. В частности, $AT4$-граф, в котором окрестности вершин не содержат треугольников, является графом Конвея-Смита с параметрами $(p,q,r)=(1,2,3)$ или первым графом Сойчера с параметрами $(p,q,r)=(2,4,3)$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, $AT4$-граф, локально $\mathcal{M}$-граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions.

Let $\mathcal{M}$ be a class of strongly regular graphs for which μ is a non-principal eigenvalue. Note that the neighborhood of any vertex of an $AT4$ graph lies in $\mathcal{M}$. We describe parameters of graphs from $\mathcal{M}$ and find intersection arrays of $AT4$ graphs in which neighborhoods of vertices lie in chosen subclasses from $\mathcal{M}$. In particular, an $AT4$ graph in which the neighborhoods of vertices do not contain triangles is the Conway–Smith graph with parameters $(p,q,r)=(1,2,3)$ or the first Soicher graph with parameters $(p,q,r)=(2,4,3)$.

Keywords: strongly regular graph, $AT4$-graph, locally $\mathcal{M}$-graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a,L)\in(P,\mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P, и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α,s,t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в графе Γ, то через $b_i(u,w)$ (соответственно $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w, находящихся на расстоянии i в Γ, для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u,w) = d(y,z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются через p^l_{ij} и называются *числами пересечений* графа Γ (см. [1]).

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. По [2] выполняется фундаментальная граница

$$(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \geqslant -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d}, \quad b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется *плотным*. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-. Фундаментальная граница может быть записана в виде $k(a_1 + b^+b^-) \leqslant (a_1 - b^+)(a_1 - b^-)$. Хорошо известно (см., например, [2, теорема 3.2]), что плотный граф диаметра 3 является графом Тэйлора. В этом случае окрестность любой вершины является сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4, $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа Γ. Тогда по [1, предложение 4.2.2] Γ имеет массив пересечений $\{k, k-a_1-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k-a_1-1, k\}$. По [2, теорема 5.2] Γ является плотным тогда и только тогда, когда параметр Крейна q^4_{11} равен 0. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, то все параметры Γ выражаются через p, q, r. В этом случае назовем Γ *антиподальным плотным графом* диаметра 4 с параметрами p, q, r (*$AT4(p,q,r)$-графом*). В $AT4(p,q,r)$-графе окрестности вершин сильно регулярны с неглавным собственным значением $\mu = p$. Через $\mathcal{M}$ обозначим класс сильно регулярных графов с параметрами (v, k, λ, μ), для которых μ является неглавным собственным значением. *Графом Юришича $Jur(r)$* назовем сильно регулярный граф с параметрами $v = (r+1)^2(r+4)^2/2$, $k = (r+2)(r^2+4r+2)$, $\lambda = r(r+3)$, $\mu = 2(r+1)(r+2)$ и неглавными собственными значениями $r, -r^2-4r-4$.

В данной работе получено описание графов из $\mathcal{M}$ и найдены некоторые расширения этих графов. В частности, доказано, что $AT4(q-2,q,2)$-графы не существуют.

Предложение. *Если $\Delta \in \mathcal{M}$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) Δ *имеет параметры* $(m^2\mu + m\mu + m^2, (m+1)\mu, 2\mu - m, \mu)$ *и собственные значения* $\mu, -m$;

(2) $2\mu \geqslant m$, *причем* $2\mu = m$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda = 0$;

(3) $\mu + m$ *делит* $\mu m(m^2-1)$.

Теорема 1. *$AT4(q-2,q,2)$-графы не существуют.*

Теорема 2. *Пусть Γ является $AT4(p,q,r)$-графом, u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $p = \alpha q$, α — натуральное число, то Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q+1), q-1)$, $\alpha+1$ делит $2(q^2-1)$ и $\alpha+q$ делит $q(q^2-1)(q^2+q-1)(q+2)$; $q^3\alpha(\alpha+1)/r$*

четно, $r(p+1) \leqslant q(p+q)$ и r делит $q(\alpha+1)$, в случае $r = q$ Γ — граф Джонсона $J(8,4)$ с $(p,q,r) = (2,2,2)$, половинный 8-куб с $(p,q,r) = (4,2,2)$, $3O_6^-(3)$-граф с $(p,q,r) = (3,3,3)$, второй граф Мейкснера с $(p,q,r) = (8,4,4)$ или $3O_7(3)$-граф с $(p,q,r) = (9,3,3)$;

(2) *если Δ — граф без треугольников, то Γ — граф Конвея — Смита с $(p,q,r) = (1,2,3)$ или первый граф Сойчера с $(p,q,r) = (2,4,3)$;*

(3) *если $q = p+2$, то*

(*i*) *число $2p(p+1)(p+2)/r$ четно, $r < p+2$, r делит $2(p+1)$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{(p+1)(p+2)^2, (p+3)(p+1)^2, (r-1)2(p+1)(p+2)/r, 1; 1, 2(p+1)(p+2)/r, (p+3)(p+1)^2, (p+1)(p+2)^2\}$;*

(*ii*) *антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ является графом Юришича $Jur(p)$ с параметрами $((p+1)^2(p+4)^2/2, (p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), 2(p+1)(p+2))$ и собственными значениями $p, -(p^2+4p+4)$;*

(*iii*) *вторая окрестность вершины в графе $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$ и собственными значениями p, $-(p^2+2p+2)$, имеющий дистанционно регулярное r-накрытие с массивом пересечений $\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}$;*

(4) *если $p \leqslant 4$, то либо*

(*i*) *Γ — граф Конвея — Смита с $(p,q,r) = (1,2,3)$ или граф Сойчера с $(p,q,r) = (2,4,3)$, либо*

(*ii*) *Γ — $3O_6^-(3)$-граф с $(p,q,r) = (3,3,3)$ и массивом пересечений $\{45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45\}$ или $(p,q,r) = (3,5,4)$ и Γ имеет массив пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$, соответственно $\Gamma_2(u)$ имеет массив пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$, либо*

(*iii*) *Γ — половинный 8-куб с $(p,q,r) = (4,2,2)$ или $(p,q,r) = (4,4,2)$ и Γ имеет массив пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$, или $(p,q,r) = (4,6,5)$, Γ — граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ и $\Gamma_2(u)$ имеет массив пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.*

В разд. 1 приведены некоторые вспомогательные результаты. В разд. 2 рассмотрен некоторые подклассы из $\mathcal{M}$ и в разд. 3 исследованы $AT4$-графы, в которых окрестности вершин принадлежат выделенным подклассам из $\mathcal{M}$.

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 [2, лемма 4.1]. *Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4, $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_4$ — собственные значения Γ и m_i — кратность θ_i. Тогда*

(1) *антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ — связный сильно регулярный граф с параметрами $(v/r, k, a_1, rc_2)$ и собственными значениями k и θ_2, θ_4, которые являются корнями уравнения $x^2-(a_1-rc_2)x-(k-rc_2)=0$. Оставшиеся собственные значениями θ_1, θ_3 являются корнями уравнения $x^2-a_1x-k=0$.*

(2) *Верны равенства $k = -\theta_1\theta_3$ и $(\theta_2+1)(\theta_4+1) = (\theta_1+1)(\theta_3+1)$.*

(3) *Параметры антиподального частного выражаются через r и собственные значения $k = \theta_0$, $a_1 = \theta_1+\theta_3$, $b_1 = -(\theta_2+1)(\theta_4+1)$, $c_2 = (\theta_0+\theta_2\theta_4)/r$.*

(4) *Кратности m_i таковы: $m_0 = 1$,*

$$m_2 = \frac{(\theta_4+1)k(k-\theta_4+1)}{rc_2(\theta_4-\theta_2}3+1), \quad m_4 = \frac{v}{r} - m_2 - 1, \quad m_i = \frac{(r-1)v}{r(2+a_1\theta_i/k)},$$

для $i = 1,3$.

(5) *Собственные значения θ_2, θ_4 целые, $\theta_4 \leqslant -2$, $\theta_2 \geqslant 0$ с $\theta_2 = 0$ тогда и только тогда, когда Γ — двудольный граф, $\theta_3 < -1$ и θ_1, θ_3 целые, если $a_1 \neq 0$.*

Лемма 1.2 [2, лемма 5.1]. *Пусть* Γ *— антиподальный граф диаметра* 4 *и* $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_4$ *— собственные значения* Γ. *Тогда* $b^+ = \theta_2$ *и* $b^- = \theta_3$.

Леммы 1.1 и 1.2 необходимы в доказательстве [2, предложение 5.3], а также будут использоваться при изучении дистанционно регулярных графов диаметра 4 без 4-лап.

Лемма 1.3 [2, предложение 5.3]. *Пусть* Γ *является* $AT4(p,q,r)$*-графом и* $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_4$ *— собственные значения* Γ. *Тогда* $k = q(pq+p+q)$, $\theta_1 = pq+p+q$, $\theta_4 = -q^2$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$ *и кратности* m_i *собственных значений таковы*: $m_0 = 1$,

$$m_1 = (r-1)\frac{q(pq^2+q^2+pq-p)}{p+q}, \quad m_2 = \frac{q(pq+p+q)(q^2-1)(pq+p+2q)}{(p+q)(q^2+p)},$$

$$m_3 = (r-1)\frac{(pq^2+q^2+pq-p)(pq+p+q)}{(p+q)}, \quad m_4 = \frac{(p+1)(pq+p+q)(pq^2+q^2+pq-p)}{(p+q)(q^2+p)}.$$

Лемма 1.4 [2, теорема 5.4, следствие 5.6]. *Пусть* Γ *является* $AT4(p,q,r)$*-графом. Тогда* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{q(pq+p+q),(q^2-1)(p+1),(r-1)q(p+q)/r,1;1, q(p+q)/r,(q^2-1)(p+1),q(pq+p+q)\}$, $a_1 = a_3 = p(q+1)$, $a_2 = pq^2$, $a_4 = 0$, *антиподальное частное* $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $\bar k = k$, $\bar\lambda = a_1$, $\bar\mu = q(p+q)$ *и собственные значения* $p, -q^2$, *а параметры окрестности вершины в* Γ *таковы*: $k' = p(q+1)$, $\lambda' = 2p-q$, $\mu' = p$.

Лемма 1.5 [2, теорема 6.1; 3, теорема 4.3, следствие 4.1]. *Пусть* Γ *является* $AT4(p,q,r)$*-графом, отличным от графа Конвея — Смита. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $pq(p+q)/r$ *четно,* $r(p+1) < q(p+q)$ *и* r *— делит* $p+q$;

(2) μ*-подграфы из* Γ *являются полными многодольными тогда и только тогда, когда* $(p,q,r) = (\alpha q, q, q)$ *для некоторого натурального числа* α;

(3) *если* $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, *то* μ*-подграфы из* Γ *являются полными многодольными* $K_{t\times n}$*-графами с* $n = q\beta - p$, $t = q\beta/(q\beta - p)$ *для некоторого натурального числа* β.

2. Класс графов $\mathcal{M}$

Напомним, что класс графов $\mathcal{M}$ состоит из сильно регулярных графов с параметрами (v,k,λ,μ), для которых μ является собственным значением. В этом разделе выделены некоторые важные подклассы в $\mathcal{M}$.

В леммах 2.1–2.6 предполагается, что Δ является сильно регулярным графом с параметрами (v,k,λ,μ) и собственными значениями $k,\mu,-m$. Тогда $k-\mu = m\mu$ и $\lambda - \mu = \mu - m$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) Δ *не является графом в половинном случае и имеет параметры* $(m^2\mu + m\mu + m^2, (m+1)\mu, 2\mu - m, \mu)$;

(2) $2\mu \geqslant m$, *причем* $2\mu = m$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda = 0$;

(3) $\mu + m$ *делит* $(\mu+1, m-1)(\mu-1, m+1)(m,\mu)^2$.

Доказательство. Пусть Δ — граф в половинном случае. Тогда он является графом с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$ и неглавными собственными значениями $(-1 \pm \sqrt{4\mu+1})/2$. В нашем случае имеем $4\mu+1 = (2\mu+1)^2$, противоречие.

Имеем $k-\lambda-1 = m\mu-\mu+m-1$, поэтому $v-k-1 = (m^2-1)(\mu+1)$ и $v = m^2\mu+m\mu+m^2$.

Утверждение (2) очевидно.

Кратность собственного значения μ равна $(m-1)(m+1)(m\mu+\mu+m)/(\mu+m)$. Поэтому $\mu+m$ делит $\mu m(m^2-1)$. Далее, $(\mu+m, m-1) = (\mu+1, m-1)$, $(\mu+m, m+1) = (\mu-1, m+1)$ и $(\mu+m, m\mu) = (\mu+m, m^2)$ делит $(m,\mu)^2$, поэтому $\mu+m$ делит $(\mu+1, m-1)(\mu-1, m+1)(m,\mu)^2$. Лемма и предложение доказаны.

Лемма 2.2. *Если псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s,t)$ принадлежит $\mathcal{M}$, то $s = \alpha(t+2)$ и $\alpha+1$ делит $(t+3)(t+2)t$, в частности, псевдогеометрический граф для $GQ(t+2,t)$ принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s,t)$. Тогда Δ имеет $\mu = \alpha(t+1)$ и собственные значения $s-\alpha$, $-(t+1)$. В нашем случае $s-\alpha = \alpha(t+1)$ и $s = \alpha(t+2)$. В частности, псевдогеометрический граф для $GQ(t+2,t)$ принадлежит $\mathcal{M}$.

По условию целочисленности $\alpha+1$ делит $(t+3)(t+2)t$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть Δ — сильно регулярный граф без треугольников. Тогда Δ имеет параметры $(4\mu^3+6\mu^2, \mu(2\mu+1), 0, \mu)$ и собственные значения $\mu, -2\mu$, в частности, графы Петерсена и Гевиртца принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\Delta \in \mathcal{M}$ и $\lambda = 0$. Тогда $2\mu = m$, Δ имеет параметры $(4\mu^3+6\mu^2, \mu(2\mu+1), 0, \mu)$ и собственные значения $\mu, -2\mu$. Условие целочисленности выполняется. При $\mu = 1$ получаем граф Петерсена, а при $\mu = 2$ — граф Гевиртца. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть Δ — сильно регулярный граф с $m = \mu+2$. Тогда Δ имеет параметры $((\mu+2)(\mu^2+4\mu+2), \mu(\mu+3), \mu-2, \mu)$ и собственные значения $\mu, -2-\mu$, в частности, граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$ принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\Delta \in \mathcal{M}$ и $m = \mu+2$. Тогда Δ имеет параметры $((\mu+2)(\mu^2+4\mu+2), \mu(\mu+3), \mu-2, \mu)$ и собственные значения $\mu, -2-\mu$. Условие целочисленности кратностей собственных значений выполняется. При $\mu = 3$ получаем граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 3$. Тогда Δ имеет параметры $(45, 12, 3, 3)$, $(115, 18, 1, 3)$ или $(162, 21, 0, 3)$.*

Доказательство. Пусть $\Delta \in \mathcal{M}$ и $\mu = 3$. Ввиду леммы 2.3 Δ имеет параметры $(4m^2+3m, 3(m+1), 6-m, 3)$.

В случае $m = 2$ граф Δ имеет параметры $(22, 9, 4, 3)$, собственные значения $3, -2$ и условие целочисленности не выполняется.

В случае $m = 3$ граф Δ имеет параметры $(45, 12, 3, 3)$ и является псевдогеометрическим для $GQ(4, 2)$.

В случае $m = 4$ граф Δ имеет параметры $(76, 15, 2, 3)$, собственные значения $3, -4$ и условие целочисленности не выполняется.

В случае $m = 5$ граф Δ имеет параметры $(115, 18, 1, 3)$, собственные значения $3, -5$ и условие целочисленности выполняется.

В случае $m = 6$ граф Δ имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$, собственные значения $3, -6$ и условие целочисленности выполняется. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 4$. Тогда Δ имеет параметры $(28, 12, 6, 4)$ и собственные значения $4, -2$, Δ имеет параметры $(204, 28, 2, 4)$ и собственные значения $4, -6$, Δ имеет параметры $(352, 36, 0, 4)$ и собственные значения $4, -8$ или Δ является псевдогеометрическим графом для $GQ(5, 3)$.*

Доказательство. Пусть $\Delta \in \mathcal{M}$ и $\mu = 4$. Тогда Δ имеет параметры $(5m^2+4m, 4(m+1), 8-m, 4)$.

В случае $m = 2$ граф Δ имеет параметры $(28, 12, 6, 4)$, собственные значения $4, -2$ и условие целочисленности выполняется.

В случае $m = 3$ граф Δ имеет параметры $(57, 16, 5, 4)$, собственные значения $4, -3$ и условие целочисленности не выполняется.

В случае $m = 4$ граф Δ имеет параметры $(96, 20, 4, 4)$ и является псевдогеометрическим для $GQ(5, 3)$.

В случае $m = 5$ граф Δ имеет параметры $(145, 24, 3, 4)$, собственные значения $4, -5$ и условие целочисленности не выполняется.

В случае $m = 6$ граф Δ имеет параметры $(204, 28, 2, 4)$, собственные значения $4, -6$ и условие целочисленности выполняется.

В случае $m = 7$ граф Δ имеет параметры $(273, 32, 1, 4)$, собственные значения $4, -7$ и условие целочисленности не выполняется.

В случае $m = 8$ граф Δ имеет параметры $(352, 36, 0, 4)$, собственные значения $4, -8$ и условие целочисленности выполняется. Лемма доказана.

3. Антиподальные $AT4$-графы

Пусть Γ — граф $AT4(p, q, r)$, u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. По лемме 1.4 Γ — граф с массивом пересечений $\{q(pq + p + q), (q^2 - 1)(p + 1), (r - 1)q(p + q)/r, 1; 1, q(p + q)/r, (q^2-1)(p+1), q(pq+p+q)\}$, параметры антиподального частного $\bar{\Gamma}$ таковы: $\bar{k} = q(pq+p+q) = k$, $\bar{\lambda} = a_1 = p(q + 1)$, $\bar{\mu} = q(p + q)$. Ввиду леммы 1.3 число $p + q$ делит $q^2(q^2 - 1)$, и $p + q^2$ делит $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$.

Лемма 3.1. *Если $p = \alpha q$, где $\alpha \in \mathbb{N}$, то Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q + 1), q - 1)$, $\alpha + 1$ делит $2(q^2 - 1)$ и $\alpha + q$ делит $q(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$. Далее, $q^3\alpha(\alpha + 1)/r$ четно, $r(p + 1) \leqslant q(p + q)$ и r делит $q(\alpha + 1)$. В случае $r = q$ Γ — граф Джонсона $J(8, 4)$ с $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, половинный 8-куб с $(p, q, r) = (4, 2, 2)$, $3O_6^-(3)$-граф с $(p, q, r) = (3, 3, 3)$, второй граф Мейкснера с $(p, q, r) = (8, 4, 4)$ или $3O_7(3)$-граф с $(p, q, r) = (9, 3, 3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = \alpha q$, где $\alpha \in \mathbb{N}$. Тогда Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q + 1), q - 1)$, и по лемме 2.2 $\alpha + 1$ делит $(q - 1)(q + 1)(q + 2)$. Далее, $\alpha + 1$ делит $q(q^2 - 1)$ и $\alpha + q$ делит $q(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$.

По лемме 1.5 число $q^3\alpha(\alpha + 1)/r$ четно, $r(\alpha q + 1) \leqslant q^2(\alpha + 1)$ и r делит $q(\alpha + 1)$.

В случае $r = q$ по [3, теорема 1.2] Γ — граф Джонсона $J(8, 4)$ с $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, половинный 8-куб с $(p, q, r) = (4, 2, 2)$, $3O_6^-(3)$-граф с $(p, q, r) = (3, 3, 3)$, второй граф Мейкснера с $(p, q, r) = (8, 4, 4)$ или $3O_7(3)$-граф с $(p, q, r) = (9, 3, 3)$.

Если $(\alpha + 1)q(2q + 1) < 3r(\alpha q + 2)$, то по лемме 1.5 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами. Поэтому в случае $r \neq q$ имеем $3r(\alpha q + 2) \leqslant (\alpha + 1)q(2q + 1)$.

При $\alpha = 1$ получим $r \leqslant 2q(2q + 1)/(3(q + 2))$, а при $\alpha = 2$ получим $r \leqslant q(2q + 1)/(2q + 2)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть Δ — сильно регулярный граф без треугольников. Тогда $p = 1, 2$ и Γ — граф Конвея — Смита с $(p, q, r) = (1, 2, 3)$ или первый граф Сойчера с $(p, q, r) = (2, 4, 3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta \in \mathcal{M}$ и $\lambda = 0$. Тогда $q = 2p$, Δ имеет параметры $(4p^3 + 6p^2, p(2p + 1), 0, p)$ и собственные значения $p, -2p$.

Далее, $p+q = 3p$ делит $4p^2(4p^2-1)$ и $p+q^2 = p(4p+1)$ делит $4p^2(4p^2-1)(4p^2+2p-1)(2p+2)$. Поэтому $4p+1$ делит $3(p+1)(p-1)$ и $4p+1$ делит 45. Отсюда $p = 1, 2, 11$. При $p = 1$ получаем граф Конвея — Смита, а при $p = 2$ — первый граф Сойчера.

При $p = 11$ имеем $q = 22$, по лемме 1.5 имеем $12r < 6 \cdot 11^2$ и r — делит 33, поэтому $r = 3, 11$. Теперь Γ имеет массив пересечений $\{6050, 5816, (r - 1)726/r, 1; 1, 726/r, 5816, 6050\}$. Противоречие с тем, что кратности неглавных собственных значений не целые. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $q = p + 2$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) Δ *имеет параметры $((p + 2)(p^2 + 4p + 2), p(p + 3), p - 2, p)$ и собственные значения $p, -(p + 2)$;*

(2) *число* $2p(p+1)(p+2)/r$ *четно,* $r < p+2$, r *делит* $2(p+1)$ *и* Γ — *граф с массивом пересечений* $\{(p+2)(p^2+4p+2), (p+3)(p+1)^2, (r-1)2(p+1)(p+2)/r, 1; 1, 2(p+1)(p+2)/r, (p+3)(p+1)^2, (p+2)(p^2+4p+2)\}$;

(3) *антиподальное частное* $\bar{\Gamma}$ *является графом Юришича* $Jur(p)$ *с параметрами* $((p+1)^2(p+4)^2/2, (p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), 2(p+1)(p+2))$ *и собственными значениями* $p, -(p^2+4p+4)$;

(4) *вторая окрестность вершины в графе* $\bar{\Gamma}$ — *сильно регулярный граф с параметрами* $((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$ *и собственными значениями* $p, -(p^2+2p+2)$, *имеющий дистанционно регулярное* r*-накрытие с массивом пересечений* $\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q = p+2$. По лемме 2.4 Δ имеет параметры $((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p)$ и собственные значения $p, -(p+2)$. В этом случае антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ является графом Юришича $Jur(p)$ с параметрами $((p+1)^2(p+4)^2/2, (p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), 2(p+1)(p+2))$ и собственными значениями $p, -(p^2+4p+4)$. Вторая окрестность вершины в графе $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$ и собственными значениями $p, -(p^2+2p+2)$.

Далее, $2p(p+1)(p+2)/r$ четно, $r < p+2$, r делит $2(p+1)$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{(p+2)(p^2+4p+2), (p+3)(p+1)^2, (r-1)2(p+1)(p+2)/r, 1; 1, 2(p+1)(p+2)/r, (p+3)(p+1)^2, (p+2)(p^2+4p+2)\}$.

По [2, теорема 5.5] для любой вершины u графа Γ подграф $\Gamma_2(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. $AT4(q-2, q, 2)$*-графы не существуют.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ является $AT4(q-2, q, 2)$-графом с массивом пересечений $\{q(q^2-2), (q^2-1)(q-1), q(q-1), 1; 1, q(q-1), (q^2-1)(q-1), q(q^2-2)\}$. По лемме 3.3 окрестность вершины u в Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(q^3-2q, (q+1)(q-2), q-4, q-2)$ и по [4, теорема 5.8] для любых двух вершин $y, z \in \Gamma_2(u)$, находящихся на расстоянии, не большем 2, имеем $|[u] \cap [y] \cap [z]| = q-1$. Отсюда для любых двух вершин $w, w' \in [u]$ имеем $|[w] \cap [w'] \cap \Gamma_2(u)| = q^2-2q+1$.

Таким образом, пара $([u], \Gamma_2(u))$ является квазисимметричной $(q(q^2-2), (q^2-2)(q^2-1), (q^2-1)(q-1), q(q-1), q^2-2q+1)$-схемой, в которой любые два блока пересекаются по 0 или $q-1$ точкам.

По [5, теорема 5.3] блочный граф указанной схемы сильно регулярен с собственными значениями $((r-1)k-xb-y)/(y-x) = q^2(q^2-q-1)-1$, q^2-2q, $-q$ и параметрами $((q^2-2)(q^2-1), q^2(q^2-q-1)-1, q^4-2q^3+2q^2-3q-1, q^4-2q^3+q^2-1)$. Кратность собственного значения q^2-2q равна $(q^2(q^2-q-1)-1)(q^2(q^2-q-1)+q-1)/(q(q^4-2q^3+q^2-1))$, противоречие с тем, что числитель дроби не делится на q. Лемма и теорема 1 доказаны.

Лемма 3.5. *Пусть* $p = 3$. *Тогда либо* $q = r = 3$ *и* Γ — $3O_6^-(3)$*-граф, либо* $q = 5$, $r = 4$, *граф* Δ *имеет параметры* $(115, 18, 1, 3)$, Γ *имеет массив пересечений* $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$, $\Gamma_2(u)$ *имеет массив пересечений* $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 3$. По лемме 2.5 граф Δ имеет параметры $(4q^2+3q, 3(q+1), 6-q, 3)$. Далее, $q+3$ делит $q^2(q^2-1)$ и q^2+3 делит $q^2(q^2-1)(q^2+q-1)(q+2)$.

В случае $q = 3$ граф Δ имеет параметры $(45, 12, 3, 3)$. В этом случае $r = 3$ и ввиду леммы 3.1 Γ — $3O_6^-(3)$-граф.

В случае $q = 5$ граф Δ имеет параметры $(115, 18, 1, 3)$ и собственные значения $3, -5$. По лемме 3.4 случай $r = 2$ невозможен, поэтому $r = 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ и спектр $115^1, 23^{210}, 3^{345}, -5^{966}, -25^{46}$. Соответственно $\Gamma_2(u)$ имеет массив пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ и спектр $75^1, 15^{207}, 3^{230}, -5^{621}, -17^{45}$.

В случае $q = 6$ граф Δ имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$ и собственные значения $3, -6$. В этом случае $q^2 + 3 = 39$ не делит $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть* Δ *— сильно регулярный граф с* $p = 4$. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) Γ *— половинный* 8*-куб с* $(p, q, r) = (4, 2, 2)$;

(2) $(p, q, r) = (4, 4, 2)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$;

(3) $(p, q, r) = (4, 6, 5)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $\Gamma_2(u)$ *имеет массив пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Доказательство. Пусть $p = 4$. По лемме 2.6 граф Δ имеет параметры $(28, 12, 6, 4)$ и собственные значения $4, -2$, параметры $(204, 28, 2, 4)$ и собственные значения $4, -6$, параметры $(352, 36, 0, 4)$ и собственные значения $4, -8$ или Γ является псевдогеометрическим для $GQ(5, 3)$. Ввиду леммы 3.2 имеем $q \neq 8$.

Если $q = 2$, то неравенство $r(p + 1) < q(p + q)$ влечет $r = 2$, и Γ — половинный 8-куб с $(p, q, r) = (4, 2, 2)$.

Если $q = 4$, то Δ является псевдогеометрическим графом для $GQ(5, 3)$. Отсюда $r = 4, 2$. Но в случае $r = 4$ граф не существует по [3, теорема 1.2]. Значит, $(p, q, r) = (4, 4, 2)$, Γ имеет массив пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ и спектр $96^1, 24^{46}, 4^{252}, -4^{276}, -16^{69}$.

Если $q = 6$, то $\bar{\Gamma}$ — граф Юришича $Jur(4)$ с параметрами $(800, 204, 28, 60)$. Ввиду леммы 3.4 имеем $r \neq 2$. Поэтому $q = 5$, Γ — граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ и спектром $204^1, 34^{480}, 4^{714}, -6^{2720}, -36^{85}$.

Вторая окрестность вершины в графе $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(595, 144, 18, 40)$ и собственными значениями $4, -26$. Подграф $\Gamma_2(u)$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ и спектром $144^1, 24^{476}, 4^{510}, -6^{1904}, -26^{84}$. Лемма и теорема 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Jurisic A., Koolen J.** Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Math. 2002. Vol. 244. P. 181–202.
3. **Jurisic A., Koolen J.** Classification of the family $AT4(qs, q, q)$ of antipodal tight graphs // J. Comb. Theory Ser. A. 2011. Vol. 118, no. 3. P. 842–852.
4. **Jurisic A.** $AT4$-family and 2-homogeneous graphs // Discrete Math. 2003. Vol. 264, no. 1-3. P. 127–148.
5. **Cameron P., Lint J.H. van** Designs, graphs, codes and their links. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. 240 p. (London Math. Soc. Student Texts; vol. 22).

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр.
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 25.01.2013

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

О ПРОИЗВОДНОЙ π-ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ π-ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ

В. С. Монахов, Д. В. Грицук

Пусть G_π — π-холлова подгруппа конечной π-разрешимой группы G и M — максимальная подгруппа из G_π. Находятся оценки производной π-длины $l^a_\pi(G)$ группы G в зависимости от строения подгруппы G_π или M. Рассматривается ситуация, когда в этих подгруппах все собственные подгруппы абелевы или нильпотентны. В частности, доказывается, что $l^a_\pi(G) \leq 5$ для π-разрешимой группы G, у которой подгруппа M является минимальной ненильпотентной группой.

Ключевые слова: конечная π-разрешимая группа, холлова подгруппа, производная длина.

V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk. On the derived π-length of a finite π-solvable group with a given π-Hall subgroup.

Let G_π be a π-Hall subgroup of a finite π-solvable group G, and let M be a maximal subgroup of G_π. We find estimates for the derived π-length $l^a_\pi(G)$ of G depending on the structure of the subgroups G_π or M. We consider the situation where all proper subgroups in these subgroups are abelian or nilpotent. In particular, we prove that $l^a_\pi(G) \leq 5$ if M is a minimal nonnilpotent group.

Keywords: finite π-solvable group, Hall subgroup, derived length.

Посвящается А. А. Махневу в связи с его 60-летием!

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и определения соответствуют [1].

Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется *производной π-длиной π-разрешимой группы* G и обозначается через $l^a_\pi(G)$. В случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l^a_\pi(G)$ совпадает со значением $d(G)$ производной длины группы G.

Пусть G_π — π-холлова подгруппа π-разрешимой группы G и M — максимальная подгруппа из G_π. В настоящей статье находятся оценки производной π-длины π-разрешимой группы G в зависимости от строения подгруппы G_π или M. Рассматривается ситуация, когда в этих подгруппах все собственные подгруппы абелевы или нильпотентны. В частности, доказывается, что $l^a_\pi(G) \leq 5$ для π-разрешимой группы G, у которой подгруппа M является минимальной ненильпотентной группой.

1. Необходимые обозначения и вспомогательные леммы

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, а π — некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначается через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(a)$ — множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$.

Циклическую подгруппу порядка n будем обозначать через Z_n, а $[A]B$ — полупрямое произведение группы A на группу B. Если H — подгруппа группы G, то $\mathrm{Core}_G H$ — ее ядро, т. е. наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H.

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется *π-числом*. Группа G называется *π-группой*, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и *π'-группой*, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \varnothing$.

Субнормальным рядом называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в G_{i+1} для каждого i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называют *факторами ряда* (1). Группа G называется *π-разрешимой*, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных рядов π-разрешимой группы G называется ее *π-длиной* и обозначается через $l_\pi(G)$. Поскольку π-факторы ряда (1) π-разрешимой группы G разрешимы, то каждая π-разрешимая группа обладает субнормальным рядом, у которого все π-факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких субнормальных рядов π-разрешимой группы G называется ее *нильпотентной π-длиной* и обозначается через $l^n_\pi(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то π-разрешимая группа G становится разрешимой и значение нильпотентной π-длины группы G совпадает со значением $n(G)$ нильпотентной длины группы G.

В дальнейшем, рассматривая π-разрешимую группу G, условимся считать, что $\pi \subseteq \pi(G)$. Через G_π будем обозначать π-холлову подгруппу из G, а через G_p, G_q, …, G_r — силовские p-, q-, …, r-подгруппы группы G.

Из приведенных определений вытекает

Лемма 1. *Если G — π-разрешимая группа, то $l_\pi(G) \le l^n_\pi(G) \le l^a_\pi(G)$.*

Лемма 2 [2, лемма 3]. *Если G — π-разрешимая группа, то $d(G_\pi) \le l^a_\pi(G) \le l_\pi(G) d(G_\pi)$.*

Лемма 3. *Если G — π-разрешимая группа, то $l^a_\pi(G) \le l^n_\pi(G) \cdot \max_{r\in\pi} d(G_r)$.*

Доказательство. Пусть (1) — субнормальный ряд группы G, факторы которого являются либо π'-группами, либо нильпотентными π-группами, причем число нильпотентных π-факторов совпадает со значением $l^n_\pi(G)$. Пусть G_{i+1}/G_i — π-фактор этого ряда. Поскольку производная длина нильпотентной группы не превосходит максимума производных длин своих силовских подгрупп и производная длина подгруппы и фактор-группы не выше производной длины группы, то $d(G_{i+1}/G_i) \le \max_{r\in\pi} d(G_r) = d$. Поэтому между G_i и G_{i+1} можно добавить нормальные в G_{i+1} подгруппы

$$G_{i+1} = G^{(0)}_{i+1} \supseteq G^{(1)}_{i+1} \supseteq G^{(2)}_{i+1} \supseteq \ldots \supseteq G^{(d)}_{i+1} = G_i$$

с абелевыми факторами $G^{(j)}_{i+1}/G^{(j+1)}_{i+1}$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$, причем число абелевых факторов не превысит d. Здесь $G^{(j)}_{i+1}$ — j-й коммутант группы G_{i+1}. Поступая так с каждым π-фактором исходного ряда (1), получим субнормальный ряд, у которого факторы являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами, причем число абелевых π-факторов не превзойдет значения $l^n_\pi(G) \cdot \max_{r\in\pi} d(G_r)$. Лемма доказана.

Леммы 4–6 справедливы для каждой из величин $l_\pi(G)$, $l^a_\pi(G)$, $l^n_\pi(G)$. Для краткости в дальнейшем для группы G будем считать $l^*_\pi(G) \in \{l_\pi(G),\ l^a_\pi(G),\ l^n_\pi(G)\}$. Напомним, что через $O_\pi(G)$ ($O_{\pi'}(G)$) обозначается наибольшая нормальная π-подгруппа (π'-подгруппа соответственно) группы G, а $O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G) = O_\pi(G/O_{\pi'}(G))$.

Лемма 4 [1, лемма VI.6.4; 2, лемма 2; 3, лемма 1]. *Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H — подгруппа группы G, то $l^*_\pi(H) \le l^*_\pi(G)$*;
2) *если N — нормальная подгруппа группы G, то*

$$l^*_\pi(G/N) \le l^*_\pi(G),\ l^*_\pi(G) \le l^*_\pi(G/N) + l^*_\pi(N);$$

3) *если N — нормальная π'-подгруппа группы G, то $l^*_\pi(G/N) = l^*_\pi(G)$*;
4) *если V — π-разрешимая группа, то $l^*_\pi(G \times V) = \max\{l^*_\pi(G), l^*_\pi(V)\}$*;
5) *если N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G, то*

$$l^*_\pi(G/(N_1 \cap N_2)) \le \max\{l^*_\pi(G/N_1), l^*_\pi(G/N_2)\}.$$

Лемма 5 [1, лемма VI.6.9; 2, лемма 4; 3, лемма 2; 4, лемма 2]. *Пусть G — π-разрешимая группа и t — натуральное число. Предположим, что $l^*_\pi(G/N) \le t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l^*_\pi(G) > t$. Тогда*:

1) *$O_{\pi'}(G) = 1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$*;
2) *в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа*;
3) *$F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ для некоторого простого числа $p \in \pi$*;
4) *$O_{p'}(G) = 1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$*;
5) *если $l^*_\pi(G) \in \{l_\pi(G),\ l^n_\pi(G)\}$, то $\Phi(G) = 1$ и $F(G)$ — минимальная нормальная в G подгруппа.*

Лемма 6 [5, лемма 2.6]. *Если G — π-разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, то $l^*_\pi(G) \le l^*_{\pi_1}(G) + l^*_{\pi_2}(G)$.*

Лемма 7 [2, теорема 2]. *Пусть G — π-разрешимая группа и G_π — π-холлова подгруппа в G. Если G_π абелева, то $l^a_\pi(G) \le 1$.*

Лемма 8. *Пусть G — π-разрешимая группа и G_π — π-холлова подгруппа в G. Если G_π нильпотентна, то $l^n_\pi(G) \le \max_{r\in\pi} l_r(G)$ и $l^a_\pi(G) \le \max_{r\in\pi} l_r(G) \cdot \max_{r\in\pi} d(G_r)$.*

Доказательство. Применяя индукцию по $l^n_\pi(G)$ и лемму 5, будем считать, что $\Phi(G) = O_{\pi'}(G) = 1$, подгруппа Фиттинга $F(G) = O_p(G)$ является единственной минимальной нормальной p-подгруппой для некоторого $p \in \pi$ и $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как подгруппа $H_{p'}$ нормальна в $H = G_\pi$, то $H_{p'} \subseteq C_G(F(G))$. Поэтому $H_{p'} = 1$, $G_\pi = G_p$ и $l^n_\pi(G) = l_p(G) \le \max_{r\in\pi} l_r(G)$.

Из нильпотентности подгруппы G_π следует, что $d(G_\pi) = \max_{r\in\pi} d(G_r)$. Используя лемму 2, получаем $l^a_\pi(G) \le \max_{r\in\pi} l_r(G) \cdot \max_{r\in\pi} d(G_r)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — разрешимая группа и M — максимальная подгруппа в G. Если M холлова и q делит $|G : M|$, то силовская q-подгруппа в группе G элементарная абелева.*

Доказательство. Если M нормальна в G, то силовская q-подгруппа из G имеет простой порядок. Пусть M не нормальна в G. Тогда группа $G/\mathrm{Core}_G M$ примитивна:

$$G/\mathrm{Core}_G M = (M/\mathrm{Core}_G M)[F(G/\mathrm{Core}_G M)],$$

$$|F(G/\mathrm{Core}_G M)| = |G/\mathrm{Core}_G M : (M/\mathrm{Core}_G M)| = |G : M| = q^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $F(G/\mathrm{Core}_G M)$ будет силовской q-подгруппой в $G/\mathrm{Core}_G M$. В примитивных группах подгруппа Фиттинга элементарная абелева. Так как $\mathrm{Core}_G M$ — q'-подгруппа, то $F(G/\mathrm{Core}_G M)$ изоморфна силовской q-подгруппе из группы G и силовская q-подгруппа в группе G элементарная абелева. Лемма доказана.

Нам понадобятся свойства групп Шмидта и групп Миллера — Морено. Напомним, что группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группой Миллера — Морено называют неабелеву группу, у которой все собственные подгруппы абелевы. Ненильпотентные группы Миллера — Морено являются частным случаем групп Шмидта и их строение легко выводится из свойств групп Шмидта. Нильпотентные группы Миллера — Морено являются примарными.

Лемма 10 [1, III.5; 6; 7; 8, 10.8]. *Пусть G — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $G = [P]Q$, *где P — нормальная силовская p-подгруппа в G, $Q = \langle y \rangle$ — ненормальная силовская q-подгруппа в G и $y^q \in Z(G)$ (p и q различные простые числа)*;

2) $Z(G) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$;

3) $|P/\Phi(P)| = p^m$, *где m — показатель числа p по модулю q*;

4) *если P абелева, то P — элементарная абелева группа порядка p^m; если P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$*;

5) *если N — нормальная в G подгруппа и $N \neq G$, то*:

5.1) *подгруппа Q не содержится в N*;

5.2) *либо P содержится в N, либо N содержится в $Z(G)$*;

5.3) *фактор-группа G/N — либо циклическая q-группа, либо группа Шмидта.*

Лемма 11 [1, с. 285; 8, с. 29]. *Пусть G — нильпотентная группа Миллера — Морено. Тогда G — p-группа для некоторого простого числа p, $|G'| = p$ и G является группой одного из следующих видов*:

1) $G = \langle a, b \mid a^{p^m} = b^{p^n} = 1,\ a^b = a^{1+p^{m-1}} \rangle$, $m \geq 2$, $n \geq 1$, $|G| = p^{m+n}$, *G — метациклическая группа*;

2) $G = \langle a, b \mid a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = 1,\ [a, b] = c,\ [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$ *— не метациклическая группа порядка p^{m+n+1}, и если $p = 2$, то $m + n > 2$; кроме того, G' — максимальная циклическая подгруппа из G*;

3) *G изоморфна группе кватернионов порядка* 8.

Лемма 12 [1, с. 285]. *Пусть G — ненильпотентная группа Миллера — Морено. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G = [P]Q$, *где P — минимальная нормальная в G подгруппа порядка p^m, m — показатель числа p по модулю q, $Q = \langle y \rangle$ — ненормальная силовская q-подгруппа в G и $y^q \in Z(G)$*;

2) *если N — нормальная в G подгруппа, $N \neq G$, то*:

2.1) *подгруппа Q не содержится в N*;

2.2) *либо P содержится в N, либо N содержится в $Z(G)$*;

2.3) *фактор-группа G/N есть либо циклическая q-группа, либо ненильпотентная группа Миллера — Морено.*

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть G — π-разрешимая группа и G_π — π-холлова подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если G_π является группой Миллера — Морено, то $l_\pi^a(G) \leq 2$*;

2) *если G_π является группой Шмидта, то $l_\pi^n(G) \leq 2$ и $l_\pi^a(G) \leq 3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Применим индукцию к порядку группы G. Если N — неединичная нормальная подгруппа группы G, то $G_\pi N/N$ по леммам 11, 12 является либо абелевой группой, либо группой Миллера — Морено. Поэтому $l_\pi^a(G/N) \leq 2$ либо по лемме 7, либо по индукции. По лемме 5 в G имеется только одна минимальная нормальная подгруппа. Кроме того, по лемме 4

$$O_{\pi'}(G)=1,\ F(G)=F(O_\pi(G))=O_r(G) \text{ для некоторого } \ r\in\pi \text{ и } C_G(F(G))\subseteq F(G). \qquad (2)$$

Если $F(G)=G_\pi$, то $l_\pi^a(G)=d(G_\pi)=2$. Пусть $F(G)$ является собственной подгруппой группы G_π. Тогда $F(G)\subseteq M$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G_π. По условию M абелева. Поэтому $M\subseteq C_G(F(G))$ и $F(G)=M$. Теперь фактор-группа $G_\pi/F(G)$ имеет простой порядок и $l_\pi^a(G/F(G))\leq 1$ по лемме 7. Так как $F(G)$ абелева, то $l_\pi^a(G)\leq 2$.

2) Для $l_\pi^n(G)$ утверждение доказано в [3, теорема 2]. Докажем оценку для $l_\pi^a(G)$. Применим индукцию по порядку группы G. Поскольку по лемме 10 в каждой фактор-группе π-холлова подгруппа является либо группой Шмидта, либо циклической примарной группой, то $l_\pi^a(G/N)\leq 3$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N из G либо по индукции, либо по лемме 7. По лемме 5 в группе G только одна минимальная подгруппа и выполняются равенства (2). Из свойств групп Шмидта (см. лемму 10) следует, что $G_\pi=[P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, $Q=\langle y\rangle$ — циклическая силовская q-подгруппа в G_π и $Z(G_\pi)=\Phi(P)\times\langle y^q\rangle$. Поскольку $F(G)$ — π-подгруппа, то $F(G)\subseteq G_\pi$. Так как $F(G)$ нормальна в G_π и $C_G(F(G))\subseteq F(G)$, то $F(G)\subseteq P$ и $|Q|=q$. Если $F(G)\neq P$, то $F(G)\subseteq\Phi(G)\subseteq Z(G_\pi)$ по лемме 10, но это противоречит свойству $C_G(F(G))\subseteq F(G)$, поэтому $F(G)=P$. Теперь $G_\pi/F(G)$ является циклической подгруппой и $l_\pi^a(G/F(G))\leq 1$ по лемме 7. Подгруппа $F(G)=P$ метабелева, значит, $l_\pi^a(G)\leq 3$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G — p-разрешимая группа и G_p — силовская p-подгруппа в G. Если G_p является группой Миллера — Морено, то $l_p^a(G)\leq 2$.*

Из следствия 1 и леммы 6 вытекает

Следствие 2. *Пусть G — π-разрешимая группа и для каждого $p\in\pi$ силовская p-подгруппа абелева либо является группой Миллера — Морено. Тогда $l_\pi^a(G)\leq 2\,|\pi(G_\pi)|$.*

Учитывая результат работ [9; 10] и лемму 2, получаем

Следствие 3. *Пусть G — p-разрешимая группа и G_p — силовская p-подгруппа в G. Если G_p изоморфна силовской подгруппе из группы Шмидта, то $l_p^a(G)\leq 2$.*

Приведенные ниже примеры показывают точность оценок, полученных в теореме 1.

П р и м е р 1. $\{3,7\}$-холлова подгруппа группы $G=Z_5\times([Z_7]Z_3)$ является группой Миллера — Морено и $l^n_{\{3,7\}}(G)=l^a_{\{3,7\}}(G)=2$.

П р и м е р 2. Существует [7] группа Шмидта $G=[P]Q$ порядка $7^3\cdot 3$, где P — неабелева подгруппа порядка 7^3, а Q — циклическая группа порядка 3. Пусть $\pi=\{3,7\}$. Так как P неабелева, то $l_\pi^a(G)=d(G)=3$ и $l_\pi^n(G)=2$.

Теорема 2. *Пусть G — π-разрешимая группа в G, G_π — π-холлова подгруппа и M — максимальная подгруппа в G_π. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если подгруппа M абелева, то $l_\pi^n(G)\leq 2$ и $l_\pi^a(G)\leq 3$;*

2) *если подгруппа M абелева и холлова, то $l_\pi^a(G)\leq 2$;*

3) *если подгруппа M нильпотентна, то $l_\pi^n(G)\leq 1+\max_{r\in\pi} l_r(G)$ и*

$$l_\pi^a(G)\leq \max_{r\in\pi} d(G_r)\cdot(1+\max_{r\in\pi} l_r(G));$$

4) *если подгруппа M нильпотентна и холлова, то*

$$l_\pi^a(G)\leq 1+\max_{r\in\pi(M)} l_r(G)\cdot\max_{r\in\pi(M)} d(G_r).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) По лемме 4 можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$. Предположим, что $F(G) \subseteq M$. Поскольку M абелева, то $M \subseteq C_G(F(G))$, а по лемме 5 $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ и $F(G) = M$. Поэтому $G_\pi/F(G)$ имеет простой порядок и $l^a_\pi(G/F(G)) \leq 1$ по лемме 7. Так как $F(G)$ абелева, то $l^n_\pi(G) \leq l^a_\pi(G) \leq 2$.

Пусть $F(G)$ не содержится в M, т. е. $G_\pi = F(G)M$. Поскольку $G_\pi/F(G) \simeq M/(M \cap F(G))$, то $G_\pi/F(G)$ абелева и $l^n_\pi(G/F(G)) \leq l^a_\pi(G/F(G)) \leq 1$ по леммам 1 и 7. Поэтому $l^n_\pi(G) \leq 2$. Подгруппа $F(G) \cap M$ нормальна в G_π и абелева, а

$$G_\pi/F(G) \cap M = [F(G)/F(G) \cap M](M/F(G) \cap M),$$

поэтому $d(F(G)) \leq 2$ и $l^a_\pi(G) \leq 3$.

2) Если подгруппа M абелева и холлова, то $G_\pi = MG_q$, где q делит $|G : M|$, и G_q абелева по лемме 9. Теперь, используя леммы 6 и 7, получаем $l^a_\pi(G) \leq l^a_{\pi(M)}(G) + l^a_q(G) \leq 2$.

3) Вначале докажем оценку $l^n_\pi(G) \leq 1 + \max_{p\in\pi} l_\pi(G)$, используя индукцию по порядку группы G. Если подгруппа G_π нильпотентна, то доказываемое неравенство выполняется в силу леммы 8. Поэтому будем считать, что G_π ненильпотентна. По лемме 5 $O_{\pi'}(G) = 1$, $F(G) = O_p(G)$ для некоторого $p \in \pi$ и $C_G(F(G)) = F(G)$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что $F(G)$ содержится в M. Поскольку подгруппа $M_{p'}$ нормальна в M, то

$$M_{p'} \subseteq C_M(F(G)) \subseteq C_G(F(G)) \subseteq F(G).$$

Поэтому $M_{p'} = 1$ и M — p-подгруппа. Так как подгруппа G_π непримарна, то

$$M = G_p,\ |G_\pi : M| = q^n,\ q \neq p,\ n \in \mathbb{N},\ G_\pi = G_pG_q,$$

и G_q абелева по лемме 9. По лемме 7 $l_q(G) \leq l^a_q(G) \leq 1$ и по лемме 6

$$l^n_\pi(G) \leq l_q(G) + l_p(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi} l_r(G).$$

Пусть $F(G)$ не содержится в M. Тогда $G_\pi = F(G)M$ и фактор-группа $G_\pi/F(G)$ нильпотентна. По лемме 8 $l^n_\pi(G/F(G)) \leq \max_{r\in\pi} l_r(G/F(G))$, поэтому $l^n_\pi(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)$.

Итак, для нильпотентной π-длины требуемая оценка получена. Из леммы 3 следует, что

$$l^a_\pi(G) \leq \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot l^n_\pi(G) \leq \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)).$$

4) Если подгруппа M нильпотентна и холлова, то $G_\pi = MG_q$, где q делит $|G : M|$, и G_q абелева по лемме 9. Теперь, используя леммы 6, 7 и 8, получаем

$$l^a_\pi(G) \leq l^a_q(G) + l^a_{\pi(M)}(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi(M)} l_r(G) \cdot \max_{r\in\pi(M)} d(G_r).$$

Теорема доказана.

Следствие 4. *Если в группе G некоторая максимальная подгруппа M абелева, то коммутант G' нильпотентен, а второй коммутант G'' содержится в $M \cap Z(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа G является разрешимой [1, IV.7.4]. Применяя теорему 2 в случае, когда $\pi = \pi(G)$, получаем $l^n_\pi(G) = n(G) \leq 2$, $l^a_\pi(G) = d(G) \leq 3$, а это означает, что группа G метанильпотентна и второй коммутант G'' абелев.

Проверим нильпотентность коммутанта. Пусть M — абелева максимальная подгруппа группы G и N — минимальная нормальная подгруппа в G. Предположим, что N не содержится в M. Тогда $G = MN$, $G/N \simeq M/M \cap N$, поэтому $G' \subseteq N$ и G' — абелева подгруппа. Далее считаем, что все минимальные нормальные в G подгруппы содержатся в M. Если подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ неединична, то по индукции группа

$$(G/\Phi(G))' = G'\Phi(G)/\Phi(G) \simeq G'/G' \cap \Phi(G)$$

будет нильпотентной подгруппой, а по теореме Гашюца [1, III.3.5] коммутант G' нильпотентен. Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда подгруппа Фиттинга $F(G)$ совпадает с произведением минимальных нормальных подгрупп, поэтому $F(G)$ содержится в M и $F(G) = M$, поскольку в разрешимых группах подгруппа Фиттинга содержит свой централизатор [1, III.4.2.b)]. Но тогда M нормальна в G и $|G : M|$ — простое число, т.е. G' содержится в M и коммутант G' абелев. Итак, нильпотентность коммутанта установлена.

Проверим, что $G'' \subseteq M$. Если $G' \subseteq M$, то утверждение верно. Пусть G' не содержится в M. Тогда $G = G'M$, подгруппа $G' \cap M$ нормальна G и

$$G/G' \cap M = [G'/G' \cap M](M/G' \cap M),$$

поэтому группа $G'/G' \cap M$ абелева и $G'' \subseteq M$. Теперь $G'' \subseteq M^g$ для любого $g \in G$, поэтому $G'' \subseteq Z(G)$. Следствие доказано.

Отметим, что локально конечные группы с абелевой максимальной подгруппой исследовались в работе Н.С. Черникова [11].

Следствие 5. *Если в группе G некоторая максимальная подгруппа является абелевой холловой подгруппой, то коммутант G' абелев.*

Доказательство. Группа G является разрешимой [1, IV.7.4]. Применяя теорему 2 в случае, когда $\pi = \pi(G)$, получаем $l_\pi^a(G) = d(G) \leq 2$, а это означает, что коммутант G' абелев. Следствие доказано.

Следствие 6. *Если в группе G некоторая максимальная подгруппа является абелевой примарной подгруппой, то коммутант G' абелев.*

Доказательство. Группа G является разрешимой [1, IV.7.4]. Пусть A — абелева примарная максимальная подгруппа в G. Если A холлова, то коммутант G' абелев по следствию 5. Если A не холлова, то G примарна, A нормальна в G и G' содержится в A, поэтому G' абелев. Следствие доказано.

Пример 3. Коммутант группы Шмидта с неабелевой силовской подгруппой неабелев, и в этой группе имеется абелева непримарная максимальная подгруппа. Поэтому в следствии 4 коммутант G' может быть неабелевым.

Пример 4. Симметрическая группа S_4 имеет производную длину, равную 3, и в ней силовская 2-подгруппа неабелева и максимальна. Это означает, что в следствии 5 условие абелевости холловой максимальной подгруппы убрать нельзя.

Пример 5. Группа $SL(2,3)$ является группой Шмидта с нормальной силовской 2-подгруппой, изоморфной группе кватернионов порядка 8, и ненормальной силовской 3-подгруппой порядка 3. Группа $SL(2,3)$ имеет производную длину, равную 3, и в ней имеется циклическая максимальная подгруппа порядка 6. Это означает, что в следствии 5 нельзя убрать холловость, а в следствии 6 — примарность максимальной подгруппы.

Заметим, что примеры 3–5 подтверждают точность числовых оценок, полученных в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть G — π-разрешимая группа, G_π — π-холлова подгруппа и M — максимальная подгруппа из G_π. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если M — группа Миллера — Морено, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 4$; в частности, если M холлова, то $l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G) \leq 3$;*

2) *если M — группа Шмидта, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 5$; в частности, если M холлова, то $l_\pi^n(G) \leq 3$, $l_\pi^a(G) \leq 4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что M холлова и $q \in \pi \setminus \pi(M)$. Согласно лемме 9 силовская q-подгруппа в группе G элементарная абелева и $l^*_\pi(G) \leq l^*_q(G) + l^*_{\pi(M)}(G)$ по лемме 6. Применяя лемму 7 и результаты теоремы 1, получаем соответствующие оценки для $l^n_\pi(G)$ и $l^a_\pi(G)$, записанные в пп. 1)–2) доказываемой теоремы.

Поэтому в дальнейшем считаем, что подгруппа M не холлова, и применим индукцию по порядку группы G. По лемме 5 в группе G только одна минимальная нормальная подгруппа и выполняются равенства (2). При рассмотрении $l^n_\pi(G)$ дополнительно считаем, что $\Phi(G) = 1$ и $F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть M — примарная группа Миллера — Морено. Так как M не холлова в G_π, то $G_\pi = G_r$ для некоторого $r \in \pi$. Если $F(G) = G_\pi$, то $l^n_\pi(G) \leq 1$ и $l^a_\pi(G) \leq 3$. Пусть $F(G)$ — собственная подгруппа в G_π. Если $F(G) = M$, то $l^a_\pi(G/F(G)) \leq 1$ по лемме 7, поэтому $l^n_\pi(G) \leq 2$ и $l^a_\pi(G) \leq 3$. Если $F(G)$ — собственная подгруппа в M, то $F(G)$ абелева, а поскольку $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$, то $|G_\pi/F(G)| \leq r^2$, т. е. $G_\pi/F(G)$ также абелева. Поэтому $l^n_\pi(G) \leq l^a_\pi(G) \leq 2$.

Пусть теперь $F(G)$ не содержится в M, т. е. $G_\pi = MF(G)$. По лемме 11 в фактор-группе $G/F(G)$ π-холлова подгруппа $G_\pi/F(G) \simeq M/M \cap F(G)$ — либо абелева группа, либо примарная группа Миллера — Морено, поэтому $l^a_\pi(G/F(G) \leq 2$ по лемме 7 или по теореме 1 и $l^n_\pi(G) \leq 3$. Так как

$$G_\pi/F(G) \simeq M/M \cap F(G),\ r = |G_\pi/M| = |F(G) : M \cap F(G)|,$$

то $d(F(G)) \leq 2$ и $l^a_\pi(G) \leq 4$.

Пусть M — непримарная группа Миллера — Морено или группа Шмидта. Из лемм 10, 12 следует, что $M = [P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа группы M, Q — ненормальная циклическая силовская q-подгруппа группы M. Так как M не холлова, то $\pi = \{p, q\}$ и $r = p$ или $r = q$. Если $F(G) \subseteq M$, то $F(G) = P$ по лемме 10, $r = p$ и

$d(F(G)) = 1$, если M — непримарная группа Миллера — Морено,

$d(F(G)) \leq 2$, если M — группа Шмидта.

В фактор-группе $G/F(G)$ подгруппа $G_\pi/F(G)$ содержит циклическую максимальную подгруппу $M/F(G) \simeq Q$. По теореме 2 $l^n_\pi(G/F(G)) \leq 2$ и $l^a_\pi(G/F(G)) \leq 3$. Поэтому $l^n_\pi(G) \leq 3$ в обоих случаях и

$l^a_\pi(G) \leq 4$, если M — непримарная группа Миллера — Морено,

$l^a_\pi(G) \leq 5$, если M — группа Шмидта.

Предположим, что $F(G)$ не содержится в M. Тогда

$$G_\pi = F(G)M,\ G_\pi/F(G) \simeq M/M \cap F(G),$$

поэтому π-холлова подгруппа в фактор-группе $G/F(G)$ будет либо абелевой, либо группой Миллера — Морено, либо группой Шмидта, и можно применять результаты леммы 1 и леммы 7 или теоремы 1:

$l^n_\pi(G/F(G)) \leq l^a_\pi(G/F(G)) \leq 2$, если M — непримарная группа Миллера — Морено;

$l^n_\pi(G/F(G)) \leq 2$ и $l^a_\pi(G/F(G)) \leq 3$, если M — группа Шмидта.

Отсюда следует, что $l^n_\pi(G/F(G)) \leq 3$ в обоих случаях. Пересечение $M \cap F(G)$ является нормальной в G_π подгруппой и

$$G_\pi/M \cap F(G) = [F(G)/M \cap F(G)](M/M \cap F(G)),$$

поэтому $F(G)/M \cap F(G)$ — элементарная абелева группа. По лемме 10 $d(M \cap F(G)) \leq 2$. Если $d(M \cap F(G)) = 1$, то $d(F(G)) \leq 2$ и

$l^a_\pi(G) \leq 4$, если M — непримарная группа Миллера — Морено;

$l^a_\pi(G) \leq 5$, если M — группа Шмидта.

Пусть $d(M \cap F(G)) = 2$. Тогда $M \cap F(G) = P$, M — группа Шмидта и $G_\pi/F(G) \simeq Q/Q \cap F(G)$ — циклическая, а $l^a_\pi(G/F(G)) \leq 1$ и $l^a_\pi(G) \leq 3$. Теорема доказана.

Следствие 7. *Если G — p-разрешимая группа и в ее силовской p-подгруппе все вторые максимальные подгруппы абелевы, то $l_p(G) \leq 3$, а $l^a_p(G) \leq 4$.*

Отметим, что теорема 3 охватывает также случай, когда в G_π все вторые максимальные подгруппы нильпотентны и G_π не является силовской подгруппой. Используя результаты работы В. А. Белоногова [12], можно дать точные оценки производной π-длины π-разрешимой группы с такой π-холловой подгруппой.

При $\pi = \pi(G)$ из теоремы 3 вытекают еще два следствия.

Следствие 8. *Если в разрешимой группе G некоторая максимальная подгруппа является группой Миллера — Морено, то $d(G) \leq 4$.*

Следствие 9. *Если в разрешимой группе G некоторая максимальная подгруппа является группой Шмидта, то $d(G) \leq 5$.*

П р и м е р 6. В библиотеке SmallGroups компьютерной системы GAP [13] под номером 2293 указана группа $G = SR$ порядка 1944, где $R = [Z_3 \times Z_3]Z_3$ — нормальная подгруппа порядка 27, $S = [Q_8]Z_{27}$ — максимальная подгруппа группы G, являющаяся группой Шмидта, $|S \cap R| = 3$. Здесь Q_8 — группа кватернионов порядка 8. Группа G имеет производную длину, равную 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
2. **Грицук Д.В., Монахов В.С., Шпырко О.А.** О производной π-длине π-разрешимой группы // Вест. БГУ. Сер. 1. 2012. № 3. С. 90–95.
3. **Монахов В.С., Шпырко О.А.** О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 145–152.
4. **Монахов В.С., Шпырко О.А.** О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика, механика. 2009. № 6. С. 3–8.
5. **Грицук Д.В., Монахов В.С., Шпырко О.А.** О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами // Проблемы математики, физики и техники. 2013. Т. 14, № 1. С. 61-66.
6. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3–4. С. 366–372.
7. **Гольфанд Ю.А.** О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.
8. **Berkovich Y.** Groups of prime power order. Vol. 1. Berlin: Walter de Gruyter, 2008. 512 p.
9. **Монахов В.С.** Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы: сб. ст. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.
10. **Журтов А.Х., Сыскин С.А.** О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 74–78.
11. **Chernikov N.S.** Groups with an abelian maximal subgroup // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16, № 1. С. 86–92.
12. **Белоногов В.А.** Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 21–32.
13. Система компьютерной алгебры GAP 4.4.12: электрон. ресурс. 2009. URL: http://www.gap-system.org/ukrgap/gapbook/manual.pdf .

Монахов Виктор Степанович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Victor.Monakhov@gmail.com

Поступила 04.02.2013

Грицук Дмитрий Владимирович
аспирант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Dmitry.Gritsuk@gmail.com

Том 19 № 3 2013

УДК 512.544

ГРАФЫ СКРУЧЕННЫХ ПОДМНОЖЕСТВ, ИМЕЮЩИЕ ДИАМЕТР 2[1]

А. Л. Мыльников

Подмножество K группы G называется ее скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и $xy^{-1}x \in K$ для любых элементов $x, y \in K$. В работе исследуется связь между строением графа скрученного подмножества, имеющего диаметр 2, и строением группы, порожденной этим скрученным подмножеством.

Ключевые слова: скрученное подмножество, граф скрученного подмножества.

A. L. Myl'nikov. Twisted subset graphs of diameter 2.

A subset K of a group G is said to be twisted if $1 \in K$ and $xy^{-1}x \in K$ for any $x, y \in K$. The connection between the structure of a twisted subset graph of diameter 2 and the structure of the group generated by the twisted subset is investigated.

Keywords: twisted subset, twisted subset graph.

Введение

Следуя [1], приведем

О п р е д е л е н и е 1. Подмножество K группы G называется ее скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и $xy^{-1}x \in K$ для любых элементов x, y из K.

Пусть G — группа и w — инволюция из G. В качестве примеров скрученных подмножеств, выступают следующие подмножества образованные с помощью инволюции w: $T = w^G \cup \{1\}$, $I = \{g \in G : g^w = g^{-1}\}$, $F = \{g^{-1}g^w : g \in G\} = ww^G$.

О п р е д е л е н и е 2. Скрученное подмножество K группы G называется редуцированным, если подмножество $Ker(K) = \{x \in K : xK = K\}$ состоит только из 1.

Отметим, что редуцированность скрученного подмножества K группы G в случае, когда $G = \langle K \rangle$, гарантирует наличие у группы G инволютивного автоморфизма, инвертирующего элементы из K.

Следуя [2], приведем

О п р е д е л е н и е 3. Графом Γ_k скрученного подмножества K называется граф с множеством вершин K, в котором две различные вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда существует такой элемент k из K, что $kx^{-1}k = y$.

Легко видеть, что введенное отношение смежности вершин симметрично.

В работе [2] были исследованы некоторые свойства графа скрученного подмножества и была дана характеризация групп, которые порождаются скрученными подмножествами, имеющими полные и вполне несвязные графы. Следующим естественным этапом исследования связи между группами и графами скрученных подмножеств является изучение строения групп, у которых порождающее скрученное подмножество имеет граф диаметра 2. Изучению таких групп и посвящена настоящая работа.

Заметим, что в силу [2, теорема 3] редуцированное скрученное подмножество K, граф которого связен, имеет вид $K = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\} = \varphi\varphi^G$, где φ — некоторый инволютивный автоморфизм группы G. В настоящей работе фактически устанавливается связь между

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания высшим учебным заведениям на 2012 год (проект 1.3755.2011).

свойствами графа такого скрученного подмножества и свойствами класса сопряженных инволюций φ^G группы $G^* = \langle G, \varphi\rangle$, рассматриваемой как подгруппа голоморфа группы G.

Приведем определения некоторых специальных классов сопряженных инволюций в группе.

Определение 4. Согласно [3] сопряженный класс инволюций T из группы G, содержащий неперестановочные элементы, называется классом нечетных транспозиций, если произведение любых двух неперестановочных элементов из T имеет нечетный порядок. Класс нечетных транспозиций T называется классом 3-транспозиций, если произведение любых двух неперестановочных элементов из T имеет порядок 3.

Следующее понятие совершенной инволюции возникло в работе А.И. Созутова [4].

Определение 5. Пусть G — группа, w — инволюция из G такая, что w^G содержит две неперестановочные между собой инволюции. Инволюция w называется совершенной в G, если для любых неперестановочных между собой инволюций $u, v \in w^G$ существует инволюция $s \in w^G$ такая, что $u^s = v$.

Из свойств групп диэдра следует, что класс нечетных транспозиций является классом совершенных инволюций. Также стоит сказать, что в силу предложения 2 настоящей работы эти понятия совпадают в классе периодических групп, которые не содержат бесконечную квазициклическую 2-подгруппу.

Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. *Пусть G — периодическая группа, не содержащая бесконечных квазициклических 2-подгрупп, K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$, и Γ_K — граф скрученного подмножества K. Допустим, что существует инволютивный автоморфизм φ группы G такой, что $K = \varphi\varphi^G$. Тогда, если φ^G — класс совершенных инволюций в $G^* = \langle G, \varphi\rangle$, то граф Γ_K имеет диаметр 2.*

С другой стороны, из [2, теорема 4] вытекает

Предложение 1. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$, и Γ_K — граф скрученного подмножества K. Допустим, что существует инволютивный автоморфизм φ группы G такой, что $K = \varphi\varphi^G$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Γ_K имеет диаметр 2;*

(2) *для любой инволюции $x \in \varphi^G$ существуют элементы $a, b \in \varphi^G \cup \{1\}$ такие, что $x = ba\varphi(a, b)$, и существует инволюция $z \in \varphi^G$ такая, что $z \neq c\varphi c$ для любой инволюции $c \in \varphi^G$.*

(3) *$G = \varphi^G\varphi^G C_G(\varphi)$ и $G \neq \varphi^G C_G(\varphi)$.*

Из теоремы 1 и предложения 1 легко вытекает

Следствие 1. *Пусть G — периодическая группа, не содержащая бесконечных квазициклических 2-подгрупп. Пусть w — инволюция из G. Допустим, что w^G — класс совершенных инволюций и $G = \langle ww^G\rangle$. Тогда $G = w^G w^G C_G(w)$ и $G \neq w^G C_G(w)$.*

Приведем определение графа коммутативности на множестве инволюций.

Определение 6. Пусть G — группа и w — инволюция из G. Графом коммутативности на множестве w^G называется граф Γ с множеством вершин w^G, в котором две различные вершины x и y смежны тогда и тогда, когда $xy = yx$.

Далее, укажем связь между графом Γ_K скрученного подмножества $K = \varphi\varphi^G$ и графом коммутативности на множестве φ^G в том случае, когда φ^G — класс нечетных транспозиций.

Теорема 2. *Пусть G — группа и φ — инволютивный автоморфизм группы G. Пусть $K = \varphi\varphi^G$, Γ_K — граф скрученного подмножества K и Γ — граф коммутативности на множестве φ^G. Допустим, что φ^G — класс нечетных транспозиций группы $G^* = \langle G, \varphi\rangle$. Тогда $\Gamma_K \simeq \overline{\Gamma}$, где $\overline{\Gamma}$ — граф, дополнительный к графу Γ.*

Результаты настоящей работы были анонсированы в [6].

1. Вспомогательные результаты

В данном разделе для удобства читателя приводятся некоторые известные результаты, используемые при доказательстве основных результатов работы.

Лемма 1 [1, лемма 2.1]. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество из G. Тогда для любого элемента x из K подгруппа $\langle x\rangle$ содержится в K.*

Из леммы 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G и $K_2 = \{x^2 : x \in K\}$. Тогда для любого элемента x из K_2 подгруппа $\langle x\rangle$ содержится в K_2.*

Лемма 2 [2, лемма 5]. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$, и Γ_K — граф скрученного подмножества K. Пусть k — произвольный элемент из K и $t_k : K \longrightarrow K$ — отображение, определенное следующим образом: для любого элемента $x \in K$ положим $(x)t_k := k \circ x$, где $a \circ b = ab^{-1}a$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *для любых элементов $x, y \in K$ верно равенство $(x \circ y)t_k = (x)t_k \circ (y)t_k$;*

(2) $t_k^2 = 1$;

(3) t_k — *автоморфизм графа Γ_K;*

(4) *группа $T_K = \langle t_k : k \in K\rangle$ действует транзитивно на множестве вершин каждой компоненты связности графа Γ_K.*

Лемма 3 [5, лемма 1.2]. *Пусть G — группа и w — инволюция из G. Тогда подмножество $\{wg^{-1}wg : g \in G\} = ww^G$ является скрученным подмножеством в G .*

2. Графы скрученных подмножеств, имеющие диаметр 2

В данном разделе излагается доказательство теоремы 1.

2.1. Совершенные инволюции и нечетные транспозиции

Целью настоящего раздела является доказательство следующего утверждения, необходимого для доказательства теоремы 1.

Предложение 2. *Пусть G — периодическая группа, w — инволюция из G и $K = ww^G$. Допустим, что K не содержит бесконечных квазициклических 2-подгрупп.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *w — совершенная инволюция;*

2) *w^G — класс нечетных транспозиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого предложения опирается на следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть G — группа, w — инволюция из G и $K = ww^G$. Допустим, что для подмножества $K_2 = \{x^2 : x \in K\}$ справедливо неравенство $K \neq K_2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *w — совершенная инволюция;*

2) *для любого элемента $s \in K \setminus K_2$ справедливо равенство $s^2 = 1$.*

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть s — элемент из $K \setminus K_2$. Имеем $s = ww^t$ для некоторого элемента $t \in G$. Допустим, что $s^2 \neq 1$. Значит, $ww^t \neq w^t w$. Поскольку w — совершенная в G инволюция, то существует инволюция $w^g \in w^G$ такая, что $w^{w^g} = w^t$. Тогда имеем $s = ww^{w^g} = (ww^g)^2$ и, таким образом, $s \in K_2$, что противоречит выбору s. Значит, $s^2 = 1$.

Покажем, что из 2) следует 1). Пусть w^g — инволюция из w^G такая, что $ww^g \neq w^g w$. Для доказательства леммы достаточно показать, что существует инволюция $w^t \in w^G$ такая, что $w^{w^t} = w^g$. Так как $ww^g \neq w^g w$, то $(ww^g)^2 \neq 1$, значит, $ww^g \in K_2$. Следовательно, существует элемент $x = ww^t$ из K такой, что $ww^g = (ww^t)^2$, откуда получаем, что $w^g = w^t ww^t$. Лемма 4 доказана.

Теперь приступим к непосредственному доказательству предложения 2. В силу свойств групп диэдра порядка $2n$, где n нечетно, легко видеть, что из 2) следует 1).

Покажем, что из 1) следует 2). Достаточно показать нечетность числа $|ww^g|$ для любой инволюции $w^g \in w^G$ такой, что $ww^g \neq w^g w$.

Покажем сначала, что K_2 состоит только из элементов нечетного порядка. Допустим, что существует элемент $z \in K_2$ четного порядка. Так как $K = ww^G$ — скрученное подмножество, то ввиду следствия 2 легко видеть, что в K_2 содержится неединичная циклическая 2-подгруппа. Так как по условию K не содержит бесконечных квазициклических 2-подгрупп, то в K_2 существует максимальная конечная неединичная циклическая 2-подгруппа $\langle t \rangle$. Пусть x — элемент из K такой, что $x^2 = t$. Тогда $x \in K \setminus K_2$. Но в этом случае по лемме 4 получаем, что $x^2 = 1$. Противоречие с тем, что $x^2 = t \neq 1$.

Далее, пусть w^g — инволюция из w^G такая, что $w^g w \neq ww^g$. Тогда $(ww^g)^2 \neq 1$, значит, ввиду леммы 4 ww^g содержится в K_2. Следовательно, число $|ww^g|$ нечетно и предложение 2 доказано.

2.2. Доказательство теоремы 1

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 1, докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G и Γ_K — граф скрученного подмножества K. Пусть z — элемент из K и $S_z = \{kz^{-1}k : k \in K\}$.*

Тогда справедливо следующее:

(1) *диаметр графа Γ_K не превосходит двух тогда и только тогда, когда $S_z \cap S_1 \neq \varnothing$ для любого элемента $z \in K$;*

(2) *если элемент z имеет нечетный порядок, то z содержится в $S_1 = \{k^2 : k \in K\}$.*

Доказательство. Докажем п. (1). Пусть Γ_K имеет диаметр ≤ 2. Тогда окрестности любых двух точек $x, y \in V(\Gamma_K)$ имеют непустое пересечение. Легко видеть, что окрестность любой точки z совпадает с множеством $S_z = \{kz^{-1}k : k \in K\}$. Таким образом, получаем, что $S_z \cap S_1 \neq \varnothing$ для любого элемента $z \in K$.

Обратно, пусть $S_z \cap S_1 \neq \varnothing$ для любого элемента $z \in K$.

Рассмотрим граф Γ с множеством вершин $\{S_x : x \in K\}$, в котором две различные вершины S_x и S_y смежны тогда и только тогда, когда $S_x \cap S_y \neq \varnothing$.

В силу условия S_1 и S_z смежны для любого элемента $z \in K$.

В силу леммы 2(3) для любого элемента $k \in K$ отображение $t_k : K \to K$, определенное равенством $(x)t_k := kx^{-1}k$ для любого элемента $x \in K$, является автоморфизмом графа Γ_K. Поскольку Γ_K — связный граф, то ввиду леммы 2(4) группа $T_K = \langle t_k : k \in K \rangle$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ_K. Группа T_K естественным образом индуцирует действие на графе Γ, которое, как нетрудно видеть, также является транзитивным. Следовательно, валентности всех вершин графа Γ совпадают. Поскольку валентность вершины S_1

графа Γ равна $|V(\Gamma)|$, то получаем, что Γ — полный граф, следовательно, $S_x \cap S_y \neq \varnothing$ для любых элементов $x, y \in K$ и п. (1) доказан.

Докажем п. (2). Пусть t — натуральное число такое, что $|t| = 2t+1$. Тогда $z = (z^{t+1})^2$. В силу леммы 1 $z^{t+1} \in K$, значит, $z \in \{k^2 : k \in K\}$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть G — группа, D — класс нечетных транспозиций из G и w — инволюция из D. Пусть $D_w = \{u \in D : wu \neq uw\}$. Тогда $\langle D\rangle = \langle D_w\rangle$.*

Доказательство. Пусть $F_w = \{u \in D : wu = uw\}$. Очевидно, $D = F_w \cup D_w$. Нетрудно видеть, что для любого элемента $f \in F_w$ верно равенство $D_w^f = D_w$. Легко видеть, что $\langle D_w\rangle$ — нормальная подгруппа в $\langle D\rangle$. В силу свойств групп диэдра порядка $2n$, где n нечетно, существует инволюция $w^g \in D_w$ такая, что $w^g w w^g \in D_w$. Следовательно, $w \in \langle D_w\rangle$, значит, $\langle D_w\rangle = \langle D\rangle$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть G — группа, D — класс нечетных транспозиций из G, w — инволюция из D и $K = wD$. Тогда K — скрученное подмножество и граф Γ_K имеет диаметр 2.*

Доказательство. В силу леммы 3 подмножество K является скрученным подмножеством. Поэтому в силу леммы 5(1) далее достаточно показать, что $S_x \cap S_1 \neq \varnothing$ для любого элемента $x \in K$, где $S_x = \{kx^{-1}k : k \in K\}$ и $S_1 = \{k^2 : k \in K\}$.

Пусть $x \in K$. Тогда $x = ww^s$ для некоторого элемента $s \in G$. Порядок элемента x равен либо 1, либо нечетный, либо равен 2. В силу леммы 5(2) в первых двух случаях $x \in S_1$. Таким образом, для доказательства неравенства $S_x \cap S_1 \neq \varnothing$ можно считать, что $|x| = 2$.

Допустим, что $S_x \cap S_1 = \varnothing$ для некоторой инволюции $x \in K$. Тогда в силу леммы 5(2) получаем, что для любого элемента $z \in S_x$ верно равенство $|z| = 2$.

Далее, так как $x = ww^s$, где s — некоторый элемент из группы G, то $S_x = \{kx^{-1}k : k \in K\} = \{ww^g w^s w w w^g : g \in G\} = \{w(w^g w^s w^g) : g \in G\}$. Поскольку любой элемент $z \in S_x$ является инволюцией, то получаем, что для любого элемента $g \in G$ справедливо равенство $w(w^g w^s w^g) = (w^g w^s w^g)w$.

Рассмотрим $M := \{w^g w^s w^g : g \in G\}$ и $F = \{w^g w w^g : g \in G\}$. Легко видеть, что $M = F^s$.

Пусть $D_w = \{u \in D : wu \neq uw\}$. Покажем, что $F = D_w \cup \{w\}$.

Заметим, что для любого элемента $w^g w w^g$ из F, отличного от w, справедливо неравенство $(w^g w w^g)w \neq w(w^g w w^g)$.

Действительно, если $(w^g w w^g)w = w(w^g w w^g)$, то $(w^g w)^4 = 1$. Так как $(w^g w w^g) \neq w$, то $(w^g w)^2 \neq 1$. Таким образом, $|w^g w| = 4$; противоречие с тем, что w — нечетная транспозиция.

Итак, если $(w^g w w^g) \neq w$, то $w^g w w^g \in D_w$. Значит, $F \subseteq D_w \cup \{w\}$.

Далее, если $u \in D_w$, то $|wu|$ нечетно, значит, в силу свойств групп диэдра порядка $2n$, где n нечетно, инволюции w и u сопряжены в $\langle u, w\rangle$ при помощи некоторой инволюции w^z из $\langle u, w\rangle$. Таким образом, $u = w^z w w^z$, следовательно, $D_w \cup \{w\} \subseteq F$.

Итак, $F = D_w \cup \{w\}$. В силу леммы 6 имеем $\langle D\rangle = \langle D_w\rangle = \langle F\rangle$, откуда вытекает, что $\langle D\rangle = \langle M\rangle$. Таким образом, получаем, что $w \in Z(\langle D\rangle)$, следовательно, $D_w = \varnothing$, что противоречит определению класса нечетных транспозиций. Лемма 7 доказана.

Далее, докажем теорему 1. В силу предложения 2 φ^G — класс нечетных транспозиций. Тогда по лемме 3 K — скрученное подмножество и по лемме 7 граф Γ_K имеет диаметр 2. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

В данном разделе приводится доказательство теоремы 2.

Рассмотрим отображение $f : K \to V(\Gamma)$, определенное следующим образом: для любого элемента $\varphi\varphi^g$ из K полагаем $f(\varphi\varphi^g) = \varphi^g$. Покажем, что f — изоморфизм между графами Γ_K и $\overline{\Gamma}$.

Очевидно, что f — биекция. Таким образом, остается показать, что для любых элементов $x, y \in K$ справедливо выполнение $(x, y) \in E(\Gamma_K)$ тогда и только тогда, когда $(f(x), f(y)) \notin E(\Gamma)$.

Пусть x, y — элементы из K. Покажем сначала, что если $(x, y) \in E(\Gamma_K)$, то $(f(x), f(y)) \notin E(\Gamma)$. Действительно, так как $(x, y) \in E(\Gamma_K)$, то существует элемент $a \in K$ такой, что $x = ay^{-1}a$. Поскольку $x = \varphi\varphi^s$, $y = \varphi\varphi^t$, $a = \varphi\varphi^g$, где s, t, g — некоторые элементы из G, то из равенства $x = ay^{-1}a$ получаем $\varphi^s = \varphi^g\varphi^t\varphi^g$.

Далее, $f(x) = \varphi^s$, $f(y) = \varphi^t$. Покажем, что $\varphi^s\varphi^t \neq \varphi^t\varphi^s$. Допустим, что $\varphi^s\varphi^t = \varphi^t\varphi^s$. Тогда, $\varphi^s\varphi^t = \varphi^t\varphi^g\varphi^t\varphi^g = (\varphi^t\varphi^g)^2$. Следовательно, $|\varphi^t\varphi^g| = 4$; противоречие с тем, что φ^G — класс нечетных транспозиций.

Итак, $\varphi^s\varphi^t \neq \varphi^t\varphi^s$, т. е. $(f(x), f(y)) \notin E(\Gamma)$.

Теперь покажем, что если $(f(x), f(y)) \notin E(\Gamma)$, то $(x, y) \in E(\Gamma_K)$. Пусть для $x = \varphi\varphi^s$, $y = \varphi\varphi^t$ справедливо $(f(x), f(y)) \notin E(\Gamma)$. Значит, $\varphi^s\varphi^t \neq \varphi^t\varphi^s$, следовательно, в силу предложения 2 существует инволюция $\varphi^g \in \varphi^G$ такая, что $\varphi^s = \varphi^g\varphi^t\varphi^g$. Отсюда получаем равенство $\varphi\varphi^s = \varphi\varphi^g(\varphi^t\varphi)\varphi\varphi^g$, а значит, для элементов x, y справедливо включение $(x, y) \in E(\Gamma_K)$.

Итак, f — изоморфизм между графами Γ_K и $\overline{\Gamma}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мыльников А.Л.** Конечные перекрученные группы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 369–375.
2. **Мыльников А.Л.** Графы скрученных подмножеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 179–186.
3. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
4. **Созутов А.И.** О парах Фробениуса с совершенными инволюциями // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 751–762.
5. **Мыльников А.Л.** Характеризация конечных простых неабелевых групп с помощью скрученных подмножеств // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1078–1085.
6. **Мыльников А.Л.** Графы скрученных подмножеств диаметра 2 // Решетневские чтения: материалы XIV Междунар. науч. конф., посвящ. памяти ген. конструктора ракетно-космических систем акад. М.Ф. Решетнева / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2010. Ч. 2. С. 451–452.

Мыльников Андрей Леонидович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. акад. М.Ф. Решетнева
e-mail: mylnand@yandex.ru

Поступила 1.11.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 517.51

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА[1]

С. И. Новиков

Рассматривается задача интерполяции конечных наборов числовых данных гладкими функциями, определенными в квадрате на плоскости и обращающимися в нуль на его границе. При некоторых ограничениях на расположение точек интерполяции внутри квадрата для L_∞-норм оператора Лапласа наилучших интерполянтов на классе ограниченных интерполируемых данных получены близкие друг к другу оценки сверху и снизу, одинаково зависящие от количества точек интерполяции, а для интерполяции в одной и двух точках найдены точные решения.

Ключевые слова: интерполяция, оператор Лапласа, крайние точки.

S. I. Novikov. On an interpolation problem with a minimum value of the Laplace operator.

We consider the problem of interpolation of finite sets of numerical data by smooth functions that are defined on a plane square and vanish on its boundary. Under some constraints on the location of interpolation points inside the square, close upper and lower estimates with the same dependence on the number of interpolation points are obtained for the L_∞-norms of the Laplace operator of the best interpolants on the class of bounded interpolation data. Exact solutions are found for the cases of interpolation at one point and at two points.

Keywords: interpolation, Laplace operator, extreme points.

Настоящая работа посвящена задаче интерполирования в конечном числе точек квадрата с минимальным значением оператора Лапласа на множестве гладких интерполянтов, обращающихся в нуль на границе квадрата.

Пусть

$$\Omega = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0<x<1,\ 0<y<1\big\}$$

— единичный квадрат на плоскости. Через $\partial\Omega$ обозначаем его границу, а через $\overline{Q}$ — замыкание Ω.

Для конечного набора вещественных чисел $z=\{z_j\}_{j=1}^N$ полагаем

$$\|z\|_{l_\infty^N}=\max\{|z_j|\colon j=1,2,\ldots,N\}$$

и определяем класс интерполируемых данных

$$\mathfrak{M}_\infty^N=\Big\{z\colon z=\{z_j\}_{j=1}^N,\ \|z\|_{l_\infty^N}\le 1\Big\}.$$

Под $L_\infty(\Omega)$ будем понимать класс измеримых существенно ограниченных функций f, заданных на Ω, с нормой $\|f\|_\infty=\sup\text{vrai}\,\{|f(x,y)|\colon (x,y)\in\Omega\}$.

Пусть

$$U=\Big\{u\in C^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})\colon\ \frac{\partial^2u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2u}{\partial y^2}\in L_\infty(\Omega)\Big\},$$

где частные производные второго порядка понимаются в обобщенном смысле Соболева [1], т. е. $v(x,y)=\partial^2u(x,y)/\partial x^2$ означает, что равенство

$$\iint\limits_{\Omega} v(x,y)g(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\Omega} u(x,y)\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2}\,dxdy$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 11-01-00347) и программы проектов исследований, выполняемых совместно в Уральском и Сибирском отделениях РАН (проект № 12-С-1-1018).

справедливо для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции g с компактным носителем, лежащим в Ω; производная второго порядка по переменной y определяется аналогично.

Пусть $T = \{(x^{(s)}, y^{(s)})\}_{s=1}^{N} \subset \Omega,\ 1 \le N < +\infty$ — множество точек интерполяции.

Класс функций, интерполирующих в точках множества T фиксированный набор данных $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$, определяем следующим образом:

$$F_N(z,T) \ = \ \{u \in U: \ \ u|_{\partial\Omega} = 0,\ u(x^{(s)}, y^{(s)}) = z_s,\ \ s = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Пусть

$$\varphi_N(z,T) \ = \inf_{u\in F_N(z,T)} \|\Delta u\|_\infty$$

— минимальное значение нормы оператора Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ на классе интерполирующих функций $F_N(z,T)$ для фиксированного элемента $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$.

Целью настоящей работы является изучение величины

$$a_\infty^N(\Omega,T) \ = \sup_{z\in\mathfrak{M}_\infty^N} \varphi_N(z,T), \tag{0.1}$$

которую можно интерпретировать как норму функции, полученной применением оператора Лапласа к “наилучшей” функции из класса $F_N(z,T)$, при интерполировании “наихудших” данных из множества $\mathfrak{M}_\infty^N$.

Величину $\varphi_N(z,T)$ можно рассматривать как интерполяционную проблему типа Фавара [2–4] для фиксированного набора данных $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$, поэтому задача (0.1) представляет собой интерполяционную проблему типа Фавара для всего класса интерполируемых данных $\mathfrak{M}_\infty^N$. Кроме того, величина (0.1) тесно связана с задачами экстремальной функциональной интерполяции (см. [5–10], а также [11] и библиографию в ней).

Для произвольного множества $T \subset \Omega$ точек интерполяции задача (0.1) является очень сложной. Мы ограничимся рассмотрением частного случая этой задачи, когда в качестве множества T выбрана сетка равноотстоящих узлов, расположенных горизонтально на центральной оси квадрата Ω:

$$T = \Big\{\Big(\frac{2s-1}{2N}, \frac{1}{2}\Big): \ s = 1, 2, \ldots, N\Big\}.$$

В дальнейшем мы будем опускать зависимость всех величин от множества T.

В работе [12] рассмотрена задача (0.1) в случае, когда $T = \left\{\dfrac{2j-m}{2m}, \dfrac{2\nu-m}{2m}\right\}_{j,\nu=1}^{m-1}$ (равномерная сетка с одинаковым шагом $h = 1/m$ по каждому из двух направлений) и наложены более жесткие ограничения на гладкость интерполирующих функций.

Отметим также, что в двух других работах [13; 14] мы исследовали аналогичные (0.1) задачи в шаре евклидова пространства $\mathbb{R}^n,\ n \ge 2$.

В первом разделе настоящей работы мы приводим необходимые вспомогательные утверждения и с их помощью проводим предварительный анализ рассматриваемой задачи, в частности выясняем свойства экстремальных функций для величины $\varphi_N(z)$. Во втором разделе мы доказываем, что точная верхняя грань в задаче (0.1) достигается в одной или нескольких крайних (экстремальных) точках множества $\mathfrak{M}_\infty^N$. В третьем разделе будут найдены точные значения величины (0.1) для двух наиболее простых случаев: $N = 1$ и $N = 2$. В четвертом, заключительном, разделе будет получена оценка сверху величины $a_\infty^N(\Omega)$ для любого $N \in \mathbb{N}$, а также будет найдена оценка снизу для больших значений N на некотором более узком, чем $F_N(z)$, классе интерполирующих функций. При этом окажется, что полученные оценки совпадают с точностью до констант, не зависящих от N.

1. Вспомогательные утверждения и предварительный анализ

Для произвольного набора интерполируемых данных $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$ рассмотрим величину $\varphi_N(z)$ и выясним свойства функций, на которых достигается точная нижняя грань. Для этой цели будем использовать результат общего характера о минимизации нормы эллиптического оператора при интерполяционных ограничениях, который был получен С. Фишером и Дж. Джеромом в работе [3]. Прежде чем сформулировать этот результат, введем нужные обозначения.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\alpha_2}$ — оператор дифференцирования, понимаемый в смысле распределений.

Как обычно, через $L_p(\Omega)$ обозначаем пространство Лебега функций, интегрируемых на квадрате Ω с p-й степенью $(1 \le p < \infty)$, снабженное стандартной нормой

$$\|f\|_p = \left(\iint\limits_\Omega |f(x,y)|^p \, dxdy \right)^{1/p}.$$

Пусть

$$W_p^l(\Omega) = \bigl\{ f\colon D^\alpha f \in L_p(\Omega),\ 0 \le |\alpha| \le l \bigr\}$$

— класс Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\sum_{\nu=0}^{l} \iint\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=\nu} |D^\alpha f(x,y)|^p \, dxdy \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty. \tag{1.1}$$

Через $\widetilde{W}_p^l(\Omega)$ обозначаем пополнение по норме пространства Соболева класса бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, лежащим в квадрате Ω.

Пусть A — линейный дифференциальный оператор второго порядка в частных производных с коэффициентами, непрерывными в квадрате Ω, и A^* — формально сопряженный ему оператор.

Теорема A [3, part II, § 4]. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

(1) *уравнение* $\mathrm{Au} = f$ *однозначно разрешимо в классе функций* $W_2^2(\Omega) \bigcap \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *в смысле распределений для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$;

(2) *существует число* $r_0 \in [1, +\infty)$ *такое, что* $W_r^2(\Omega)$ *вложено в пространство* $C(\Omega)$ *при всех* $r > r_0$ *и оператор вложения непрерывен*;

(3) *при всех* $r \ge r_0$ *отображение множества* $W_2^2(\Omega) \bigcap \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *в* $L_r(\Omega)$ *посредством оператора* A *непрерывно*;

(4) *оператор* A *осуществляет непрерывное биективное отображение множества* $W_2^2(\Omega) \bigcap \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$;

(5) *система функций* $\bigl\{ E(x - x^{(j)}, y - y^{(j)}) \bigr\}_{j=1}^N$, *где* $E(x,y)$ — *фундаментальное решение оператора* A^*, *является линейно независимой на любом подмножестве положительной меры из* Ω.

Пусть

$$Q(z) = \Bigl\{ u \in W_2^2(\Omega) \bigcap \widetilde{W}_2^1(\Omega)\colon u(x^{(s)}, y^{(s)}) = z_s,\ s = 1, 2, \ldots, N;\ \mathrm{Au} \in L_\infty(\Omega) \Bigr\}.$$

Тогда существует единственное решение $u_* \in Q(z)$ *минимизационной проблемы*

$$\|\mathrm{Au}\|_\infty \longrightarrow \inf_{u \in Q(z)},$$

причем функция Au_* *имеет постоянный модуль почти везде в* Ω.

Полагаем $A = \Delta$ и проверяем выполнение условий сформулированной теоремы.

Прежде всего замечаем, что согласно теореме о структуре пополнения класса бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем по норме пространства Соболева (см., например, [15, гл. 6, § 8]) условие $\varphi \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ эквивалентно занулению функции φ на границе квадрата Ω. Отсюда имеем, что первое условие теоремы A в свою очередь эквивалентно разрешимости краевой задачи $\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ в смысле распределений. Это хорошо известный факт теории уравнений эллиптического типа (см., например, [16, гл. 5]).

Условие (2) выполняется благодаря теореме Соболева о вложении $W_p^l(\Omega)$ в пространство $C(\Omega)$ (см. [1, § 8], а также, например, [17, Ch. 4]). Оператор вложения в нашем случае непрерывен, поскольку квадрат Ω является областью, звездной относительно любого лежащего в нем круга, а для таких областей оператор вложения непрерывен (см., например, [1, § 11]).

Условие (3) представляет собой простое следствие известного факта о непрерывности интегрального оператора, ядро которого является функцией Грина оператора Лапласа.

Для проверки условия (4) достаточно убедиться, что рассматриваемое отображение биективно. Пусть $u_1 \neq u_2$, $u_j|_{\partial\Omega} = 0$, $j = 1, 2$, но $\Delta u_1 = \Delta u_2$. Тогда $\Delta(u_1 - u_2) = 0$ и $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$, а поскольку класс гармонических функций совпадает с классом обобщенно гармонических (удовлетворяющих уравнению Лапласа в смысле распределений) [16, гл. 5, § 24], то $u_1 \equiv u_2$. Следовательно, отображение биективно.

Для проверки условия (5) сначала заметим, что оператор Лапласа является самосопряженным (см., например, [16, гл. 5, § 3]). Пусть $E(x, y)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа. Предположим, что система функций $\left\{E(x - x^{(j)}, y - y^{(j)})\right\}_{j=1}^N$ линейно зависима, т. е. существует число $a_s \neq 0$ такое, что

$$a_1 E(x - x^{(1)}, y - y^{(1)}) + \ldots + a_s E(x - x^{(s)}, y - y^{(s)}) + \ldots + a_N E(x - x^{(N)}, y - y^{(N)}) \equiv 0.$$

После деления на a_s отсюда получаем

$$E(x - x^{(s)}, y - y^{(s)}) \equiv \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{N} b_j E(x - x^{(j)}, y - y^{(j)}),$$

где $b_j = -a_j/a_s$, $j = 1, 2, \ldots, N$. К полученному тождеству применяем оператор Лапласа и, поскольку $\Delta E(x - x^{(k)},\ y - y^{(k)}) = \delta(x - x^{(k)},\ y - y^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где $\delta(x, y)$ — функция Дирака, имеем

$$\delta(x - x^{(s)}, y - y^{(s)}) \equiv \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{N} b_j \delta(x - x^{(j)}, y - y^{(j)}).$$

Умножаем это равенство на произвольную бесконечно дифференцируемую функцию φ с компактным носителем, интегрируем по $\mathbb{R}^2$ и применяем соотношение (см., например, [18, гл. 4, § 4])

$$\iint\limits_{\Omega} \delta(x - a, y - b)\varphi(x, y)\, dx\, dy = \varphi(a, b).$$

В результате получаем

$$\varphi(x^{(s)}, y^{(s)}) \equiv \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{N} b_j\ \varphi(x^{(j)}, y^{(j)}). \tag{1.2}$$

Теперь около точки $(x^{(s)}, y^{(s)})$ строим шар $B_r(x^{(s)}, y^{(s)})$ радиуса $r > 0$ с центром в этой точке так, чтобы он лежал в Ω и не содержал других точек множества T. Полагаем

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{r^2}{r^2 - ((x - x^{(s)})^2 + (y - y^{(s)})^2)}}, & (x, y)\ \in B_r(x^{(s)}, y^{(s)}),\\ 0, & (x, y)\ \notin B_r(x^{(s)}, y^{(s)}). \end{cases}$$

Функция φ является бесконечно дифференцируемой с носителем $\overline{B_r(x^{(s)}, y^{(s)})}$, и для нее выполняется соотношение (1.2). Поскольку носитель функции $\varphi(x,y)$ не содержит точек $(x^{(j)}, y^{(j)})$ при $j \neq s$, то в правой части (1.2) все слагаемые обращаются в нуль, и мы получаем, что $\varphi(x^{(s)}, y^{(s)}) = 0$; это противоречит построению шара $B_r(x^{(s)}, y^{(s)})$. Следовательно, рассматриваемая система функций является линейно независимой в $\mathbb{R}^2$, а потому обладает этим свойством и на любом непустом подмножестве положительной меры из Ω.

Таким образом, условия (1)–(5) теоремы A выполнены.

Остается убедиться в том, что

$$F_N(z) \subset Q(z).$$

Для этого достаточно установить, что если $u \in C^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ и $\partial^2 u/\partial x^2,\ \partial^2 u/\partial y^2 \in L_\infty(\Omega)$, то $u \in W_2^2(\Omega)$.

Прежде всего замечаем, что если $u \in C(\overline{\Omega})$, то $u \in L_2(\Omega)$, поскольку $\|u\|_2 \le \|u\|_\infty$. Аналогично если производные $\partial^2 u/\partial x^2,\ \partial^2 u/\partial y^2$ принадлежат $L_\infty(\Omega)$, то они лежат в $L_2(\Omega)$. Введем в пространстве Соболева $W_2^2(\Omega)$ другую норму $\|\cdot\|^{(1)}_{W_2^2(\Omega)}$, положив

$$\|u\|^{(1)}_{W_2^2(\Omega)} = \|u\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right\|_2. \qquad (1.3)$$

Из [17, p. 176] для смешанной производной имеем неравенство

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right\|_2 \le C\left(\|u\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_2\right)$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от функции $u(x,y)$, и тот факт, что смешанные производные равны в смысле распределений. Поэтому $\|u\|^{(1)}_{W_2^2(\Omega)} < +\infty$. Поскольку нормы (1.1) и (1.3) эквивалентны на квадрате Ω (см., например, [17]), то $u \in W_2^2(\Omega)$ относительно исходной нормы (1.1).

Таким образом, имеет место следующая

Лемма 1. *Для любого набора интерполируемых данных $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$ существует единственная функция $u_* \in F_N(z)$ такая, что*

$$\|\Delta u_*\|_\infty = \inf_{u \in F_N(z)} \|\Delta u\|_\infty,$$

причем $|\Delta u_*(x,y)| = \mathrm{const}$ для почти всех точек $(x,y) \in \Omega$.

Решение краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике на плоскости в случае, когда правой частью уравнения является константа, можно найти в явном виде.

Лемма 2. *Пусть $a_2 > a_1,\ \ b_2 > b_1$ и $Q_{a,b} = (a_1, a_2)\times(b_1, b_2)$ — открытый прямоугольник в $\mathbb{R}^2$. Тогда для любой константы $c \in \mathbb{R}$ решение внутренней задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = c \\ u|_{\partial Q_{a,b}} = 0 \end{cases}$$

в классе функций $C^2(Q_{a,b}) \bigcap C(\overline{Q_{a,b}})$ имеет следующий вид:

$$u(x,y) = c\Bigg\{\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{2} + \frac{4(a_2-a_1)^2}{\pi^3}$$

$$\times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{a_2-a_1}\left(y - \dfrac{b_2-b_1}{2}\right)\right)\sin\left(\dfrac{\pi(2k+1)(x-a_1)}{a_2-a_1}\right)}{(2k+1)^3\ \mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi(2k+1)(b_2-b_1)}{2(a_2-a_1)}\right)}\Bigg\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 проводится стандартными методами теории уравнений в частных производных (подробнее см. [12]).

В дальнейшем мы будем использовать функции специального вида, построенные на основе параболических B-сплайнов. Аналогичные функции, построенные с помощью кубических B-сплайнов, применялись нами в работах [12–14]. B-сплайны хорошо известны и успешно работают во многих задачах, главным образом в качестве удобного базиса пространства сплайнов (см., например, [19–21] и приведенную там библиографию).

Пусть a — произвольное вещественное число, $P = \{a - h/2, a - h/6, a + h/6, a + h/2\}$ — равномерная сетка с шагом $h > 0$. Параболический B-сплайн на сетке узлов P определяется следующим выражением:

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{9}{2}\Big(t - a + \dfrac{h}{2}\Big)^2, & a - \dfrac{h}{2} \le t < a - \dfrac{h}{6}, \\ 3\Big(\dfrac{h^2}{4} - 3(t-a)^2\Big), & a - \dfrac{h}{6} \le t < a + \dfrac{h}{6}, \\ \dfrac{9}{2}\Big(t - a - \dfrac{h}{2}\Big)^2, & a + \dfrac{h}{6} \le t < a + \dfrac{h}{2}, \\ 0, & t \ge a + \dfrac{h}{2},\ t < a - \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Функция $B(t)$ непрерывно дифференцируема на всей вещественной оси, ее носителем является отрезок $[a - h/2, a + h/2]$, во внутренних точках которого $B(t) > 0$. Кроме того, функция $B(t)$ симметрична относительно точки a и в этой точке имеет единственный максимум.

Около каждой точки интерполяции $((2s-1)/2N, 1/2)$, $s = 1, 2, \ldots, N$ выбираем равномерные по каждому из двух направлений сетки с одинаковым шагом $h = 1/(2N)$ и строим на этих сетках параболические B-сплайны: $B_s(x)$ и $B_s(y)$, а затем определяем функцию $F_s(x, y) = c_s B_s(x) B_s(y)$, где c_s — константа, которую мы находим из условия интерполяции $F_s((2s-1)/2N, 1/2) = z_s$. Полагаем

$$\Phi_N((x, y); z) = \sum_{s=1}^{N} F_s(x, y).$$

Лемма 3. *Функция $\Phi_N((x, y); z)$ лежит в классе $F_N(z)$, и для нее справедлива оценка*

$$\|\Delta\Phi_N(\cdot, z)\|_\infty \ \le C\ \|z\|_{l_\infty^N},$$

где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от элемента $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$.

Доказательство леммы 2 легко получается из построения функции $\Phi_N((x, y); z)$ и перечисленных свойств параболических B-сплайнов.

2. Экстремальные наборы интерполируемых данных

В этом разделе мы доказываем, что точная верхняя грань в (0.1) достигается в одной или нескольких крайних (экстремальных) точках множества $\mathfrak{M}_\infty^N$.

Как известно (см., например, [22, § 13; 23]), точка x, лежащая в выпуклом множестве H линейного пространства X, называется крайней (экстремальной) точкой этого множества, если она не может быть серединой отрезка, принадлежащего множеству H. Если из выпуклого множества удалить его крайние точки, то полученное множество остается выпуклым [22, Ch. II]. В указанных выше книгах можно также найти многие другие характерные свойства крайних точек.

Следующая теорема дает достаточные условия, при выполнении которых решение экстремальной задачи на выпуклом множестве достигается в его крайней точке.

Теорема B [22, p. 74]. *Пусть X — локально выпуклое вещественное (хаусдорфово) пространство, $H \subset X$ — компактное выпуклое подмножество. Если вогнутая функция $f\colon H \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на множестве H, то она достигает минимума на H в некоторой его крайней точке.*

Здесь мы называем вогнутой такую функцию f, для которой функция $g = -f$ является выпуклой.

Мы будем использовать теорему B для доказательства следующего результата.

Теорема 1. $a_\infty^N(\Omega) = \varphi_N(z^*)$, *где* $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_N^*) \in \mathfrak{M}_\infty^N$, $z_j^* = \pm 1$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Доказательство. Легко видеть, что множество интерполируемых данных $\mathfrak{M}_\infty^N$ представляет собой замкнутый куб в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^N$, поэтому оно компактное и выпуклое.

Рассматриваем $\varphi_N(z)$ как функцию, заданную на множестве $\mathfrak{M}_\infty^N$. Покажем, что $\varphi_N(z)$ — выпуклая функция на $\mathfrak{M}_\infty^N$. Пусть z', z'' — произвольные элементы из $\mathfrak{M}_\infty^N$. Согласно лемме 1 существуют и являются единственными такие функции $u_1 \in F_N(z')$ и $u_2 \in F_N(z'')$, для которых $\|\Delta u_1\|_\infty = \varphi_N(z')$, $\|\Delta u_2\|_\infty = \varphi_N(z'')$.

Пусть $0 \le \alpha < 1$, $u = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2$. Функция u интерполирует набор данных $\alpha z' + (1-\alpha) z'' \in \mathfrak{M}_\infty^N$, поэтому

$$\varphi_N(\alpha z' + (1-\alpha) z'') = \inf\left\{\|\Delta u\|_\infty \colon u \in F_N(\alpha z' + (1-\alpha) z'')\right\}$$

$$\le \|\alpha \Delta u_1 + (1-\alpha)\Delta u_2\|_\infty \le \alpha \|\Delta u_1\|_\infty + (1-\alpha)\|\Delta u_2\|_\infty = \alpha\varphi_N(z') + (1-\alpha)\varphi_N(z''),$$

т. е. $\varphi_N(z)$ выпукла.

Кроме того, функция $\varphi_N(z)$ является непрерывной на $\mathfrak{M}_\infty^N$. Действительно, используя лемму 3, получаем

$$\varphi_N(z) = \inf_{u \in F_N(z)} \|\Delta u\|_\infty \le \|\Delta \Phi_N(\cdot, z)\|_\infty \le C\|z\|_{l_\infty^N} \le C,$$

т. е. функция $\varphi_N(z)$ при всех $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$ ограничена сверху одной и той же константой. Но тогда согласно [23, теорема 1, с. 181–182] выпуклая функция $\varphi_N(z)$ непрерывна на $\mathfrak{M}_\infty^N$ и, в частности, полунепрерывна на этом множестве как сверху, так и снизу.

Теперь полагаем $g_N(z) = -\varphi_N(z)$. Функция $g_N(z)$ является вогнутой и полунепрерывной снизу на множестве $\mathfrak{M}_\infty^N$, поэтому в силу Теоремы B она достигает минимума в некоторой его крайней точке. Отсюда имеем, что функция $\varphi_N(z)$ достигает максимума в той же точке.

Для завершения доказательства остается заметить, что крайними точками N-мерного куба $\mathfrak{M}_\infty^N$ являются его вершины и только они. Теорема 1 доказана.

3. Точные значения величины $a_\infty^N(\Omega)$ при малых N

В этом разделе мы находим точные значения величины (0.1) для $N = 1$ и $N = 2$.

Теорема 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$1)\quad a_\infty^1(\Omega) = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\ \operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2}}\right)^{-1}, \tag{3.1}$$

$$2)\quad a_\infty^2(\Omega) = \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\pi(2k+1)}\right)^{-1}. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $N=1$. Доказательство равенства (3.1) в значительной мере повторяет доказательство теоремы 1 работы [12], поэтому мы ограничимся его кратким изложением.

Согласно лемме 1 и теореме 1 для того, чтобы найти величину $a^1_\infty(\Omega)$, достаточно решить краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u=-c,\\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $c\in\mathbb{R}$ — произвольная константа, а затем найти эту константу из условия интерполяции $u(1/2,1/2)=1$. Аналогичную задачу для краевого условия $u(1/2,1/2)=-1$ можно не рассматривать, поскольку наилучший интерполянт будет лишь знаком отличаться от того, который удовлетворяет интерполяционному условию $u(1/2,1/2)=1$, а потому оператор Лапласа на этих интерполянтах имеет одинаковую норму. Для решения краевой задачи (3.3) используем лемму 2 и после несложных преобразований приходим к равенству (3.1).

2) Пусть $N=2$. Мы интерполируем в точках $(1/4,1/2)$ и $(3/4,1/2)$. Множество $\mathfrak{M}^2_\infty$ представляет собой квадрат в $\mathbb{R}^2$ с вершинами $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$, являющимися его крайними (экстремальными) точками. Каждой из этих точек соответствует свой интерполянт с минимальным значением равномерной нормы оператора Лапласа. Однако, нетрудно видеть, что интерполянты, отвечающие вершинам $(1,-1)$ и $(-1,1)$, отличаются лишь знаками и то же свойство имеет место и для интерполянтов, соответствующих вершинам $(1,1)$ и $(-1,-1)$. Поэтому достаточно рассмотреть две следующие задачи:

(I) найти $\varphi_2(z')$ для $z'=(1,1)$,

(II) найти $\varphi_2(z'')$ для $z''=(1,-1)$,

а затем из полученных результатов выбрать наибольший.

Переходим к изучению первой из этих задач. Представляем $u\in F_2(z')$ через оператор Лапласа с помощью функции Грина $G(x,y;t_1,t_2)$ (см. [16; 24]) и учитываем, что функция Грина положительна [16, § 29]. В результате получаем

$$1=u\Big(\frac14,\frac12\Big)=\iint\limits_\Omega G\Big(\frac14,\frac12;t_1,t_2\Big)\Delta u(t_1,t_2)dt_1\,dt_2\le\|\Delta u\|_\infty\iint\limits_\Omega G\Big(\frac14,\frac12;t_1,t_2\Big)dt_1\,dt_2,$$

т. е.

$$\|\Delta u\|_\infty\ge\left(\iint\limits_\Omega G\Big(\frac14,\frac12;t_1,t_2\Big)dt_1\,dt_2\right)^{-1}.$$

Замечаем, что функция

$$v(x,y)=\iint\limits_\Omega G\big(x,y;t_1,t_2\big)dt_1\,dt_2$$

совпадает с решением краевой задачи

$$\Delta v=-1,\qquad v|_{\partial\Omega}=0. \tag{3.4}$$

Поэтому $\|\Delta u\|_\infty\ge(v(1/4,1/2))^{-1}$. Записывая функцию $v(x,y)$ с помощью леммы 2 и переходя к точной нижней грани по $F_2(z')$, приходим к неравенству

$$\varphi_2(z')\ge\left(\frac{3}{32}-\frac{4}{\pi^3\,\sqrt2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{[k/2]}}{(2k+1)^3\operatorname{ch}\dfrac{\pi(2k+1)}{2}}\right)^{-1}, \tag{3.5}$$

где $[a]$ означает целую часть числа $a>0$.

Теперь получим оценку сверху для величины $\varphi_2(z')$. Имеем

$$\varphi_2(z')=\inf_{u\in F_2(z')}\|\Delta u\|_\infty\le\|\Delta\widehat{u}\|_\infty,$$

где $\widehat{u}(x,y) = cv(x,y)$, функция v удовлетворяет соотношениям (3.4), а $c \in \mathbb{R}$ — константа, определяемая из условия интерполяции $\widehat{u}(1/4,1/2) = 1$. Из леммы 2 нетрудно видеть, что функция $v(x,y)$ симметрична относительно отрезка прямой $x = 1/2$, лежащего внутри квадрата Ω, поэтому второе условие интерполяции $\widehat{u}(3/4,1/2) = 1$ выполняется автоматически. В результате приходим к неравенству

$$\varphi_2(z') \le \left(\frac{3}{32} - \frac{4}{\pi^3\,\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{[k/2]}}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \dfrac{\pi(2k+1)}{2}}\right)^{-1}. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) получаем

$$\varphi_2(z') = \left(\frac{3}{32} - \frac{4}{\pi^3\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{[k/2]}}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \dfrac{\pi(2k+1)}{2}}\right)^{-1} \tag{3.7}$$

и тем самым решение задачи (I) найдено.

Теперь обратимся к задаче (II). Пусть функция $\widehat{u}$ является экстремалью в задаче (II), т. е. $\|\widehat{u}\|_\infty = \varphi_2(z'')$. Покажем, что

$$\widehat{u}\Big(\frac{1}{2}, y\Big) = 0 \ \forall y \in (0,1). \tag{3.8}$$

Рассмотрим функцию $g(x,y) = -\widehat{u}(1-x,y)$. Поскольку линейное преобразование $x' = 1-x$, $y' = y$ отображает $\partial\Omega$ на себя, то $g|_{\partial\Omega} = 0$. Замечаем, что $g(1/4,1/2) = 1$, $g(3/4,1/2) = -1$ и $\|\Delta g\|_\infty = \|\Delta\widehat{u}\|_\infty$. Следовательно, функция g также является экстремалью в задаче (II) и благодаря единственности экстремали (лемма 1) совпадает с функцией $\widehat{u}$, поэтому $\widehat{u}(x,y) + \widehat{u}(1-x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in \Omega$. Полагая в этом равенстве $x = 1/2$, получаем $x(1/2,y) = 0$ при всех $y \in (0,1)$, и тем самым (3.8) установлено.

Из леммы 1 имеем $|\Delta\widehat{u}(x,y)| = c$, $c > 0$, $c = \mathrm{const}$ почти везде в Ω. Обозначим $\Omega_1 = (0,1/2) \times (0,1)$, $\Omega_2 = (1/2,1) \times (0,1)$ и покажем, что

$$\Delta\widehat{u}(x,y) = -c \quad \text{почти везде в} \quad \Omega_1, \tag{3.9}$$

а

$$\Delta\widehat{u}(x,y) = c \quad \text{почти везде в} \quad \Omega_2. \tag{3.10}$$

Поскольку $\widehat{u}|_{\partial\Omega_1} = 0$, то записывая $\widehat{u}$ через $\Delta\widehat{u}$ с помощью функции Грина $G_1(x,y;t_1,t_2)$, имеем

$$\widehat{u}(x,y) = -\iint\limits_{\Omega_1} G_1(x,y;t_1,t_2)\ \Delta\widehat{u}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2. \tag{3.11}$$

Допустим, что прямоугольник Ω_1 можно разбить на два подмножества Ω_1', Ω_1'' ненулевой плоской меры такие, что

$$\Delta\widehat{u}(x,y) = \begin{cases} -c, & (x,y) \in \Omega_1', \\ c, & (x,y) \in \Omega_1''. \end{cases}$$

Тогда представление (3.11) дает

$$1 = u(1/4,1/2) = c\left(\iint\limits_{\Omega_1'} G_1\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2};t_1,t_2\Big)\,dt_1\,dt_2 - \iint\limits_{\Omega_1''} G_1\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2};t_1,t_2\Big)\,dt_1\,dt_2\right),$$

т. е.

$$c = \left(\iint\limits_{\Omega_1'} G_1\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2};t_1,t_2\Big)\,dt_1\,dt_2 - \iint\limits_{\Omega_1''} G_1\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2};t_1,t_2\Big)\,dt_1\ dt_2\right)^{-1}.$$

Поскольку функция Грина положительна [16, § 29], то здесь каждый из интегралов неотрицателен, а потому константа $c > 0$ минимальна, только если интеграл по Ω_1'' равен нулю. Отсюда следует, что mes $\Omega_1'' = 0$, и (3.9) установлено. Соотношение (3.10) проверяется аналогичными рассуждениями.

Таким образом, для нахождения величины $\varphi_2(z'')$ достаточно минимизировать по тем функциям из класса $F_2(z'')$, которые дополнительно удовлетворяют условиям (3.9) и (3.10). Обозначаем множество таких функций через $\Phi_2(z'')$. Применив представление (3.11) к функциям $u \in \Phi_2(z'')$, получаем

$$\|\Delta u\|_\infty \;\geq\; \left(\iint\limits_{\Omega_1} G_1\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2};t_1,t_2\Big)\,dt_1\,dt_2\right)^{-1}.$$

Замечаем, что интеграл в правой части этого неравенства представляет собой решение краевой задачи $\Delta v = -1,\ v|_{\partial\Omega_1} = 0$, вычисленное в точке $x = 1/4,\ y = 1/2$. Воспользовавшись леммой 2 и переходя к точной нижней грани по множеству $\Phi_2(z'')$, приходим к неравенству

$$\varphi_2(z'') \geq \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\,\mathrm{ch}\,\pi(2k+1)}\right)^{-1}. \tag{3.12}$$

Теперь для $\varphi_2(z'')$ получим оценку сверху. На прямоугольнике Ω_1 решаем краевую задачу $\Delta u = -c,\ u|_{\partial\Omega_1} = 0$ в классе функций $u \in C^2(\Omega_1)\bigcap C(\overline{\Omega}_1)$, где $c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа. Применяя лемму 2, получаем, что функция

$$u_1(x,y) = c\left[\frac{x}{2}\Big(x-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{\pi^3}\ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}\,\pi(2k+1)(2y-1)\ \sin 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^3\ \ \mathrm{ch}\,\pi(2k+1)}\right] \tag{3.13}$$

является решением этой задачи. Константу c находим из условия интерполяции u(1/4,1/2)=1. В результате

$$c = \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{\pi^3}\ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\,\mathrm{ch}\,\pi(2k+1)}\right)^{-1}. \tag{3.14}$$

При найденной константе c решаем аналогичную краевую задачу на прямоугольнике Ω_2: $\Delta u = c,\ u|_{\partial\Omega_2} = 0$. Вновь используя лемму 2, находим, что функция

$$u_2(x,y) = -c\left[\frac{(x-1)(2x-1)}{4} + \frac{1}{\pi^3}\ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}\,\pi(2k+1)(2y-1)\sin\pi(2k+1)(2x-1)}{(2k+1)^3\,\mathrm{ch}\,\pi(2k+1)}\right] \tag{3.15}$$

является ее решением. Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в том, что $u_2(3/4,1/2) = -1$. Теперь определяем функцию

$$u_*(x,y) \;= \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2.\end{cases}$$

Покажем, что $u_* \in C^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$. Для этого достаточно убедиться в том, что при всех $0 \leq y \leq\ 1$

$$u_1\Big(\frac{1}{2},y\Big) = u_2\Big(\frac{1}{2},y\Big),$$

$$\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=1/2} = \frac{\partial u_2(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=1/2},$$

$$\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y}\Big|_{x=1/2} = \frac{\partial u_2(x,y)}{\partial y}\Big|_{x=1/2}.$$

Первое из этих трех равенств выполняется в силу построения функций u_1 и u_2, второе и третье равенства проверяются непосредственными вычислениями с использованием соотношений (3.13), (3.14) и (3.15).

Таким образом, $u_* \in F_2(z'')$ и

$$\varphi_2(z'') = \inf_{u \in F_2(z'')} \|\Delta u\|_\infty \ \leq \|\Delta u_*\|_\infty = \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\pi(2k+1)}\right)^{-1}.$$

Из (3.12) и этого равенства получаем

$$\varphi_2(z'') = \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\pi(2k+1)}\right)^{-1}. \tag{3.16}$$

Для нахождения величины $a^2_\infty(\Omega)$ остается сравнить $\varphi_2(z')$ и $\varphi_2(z'')$. Докажем, что

$$\varphi_2(z') < \varphi_2(z''). \tag{3.17}$$

Обращаясь к (3.7) и (3.16), переписываем доказываемое неравенство в виде

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\left(\frac{2\sqrt{2}\ (-1)^{[k/2]}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(2k+1)}{2}} + \frac{(-1)^{k+1}}{\operatorname{ch}\pi(2k+1)}\right) < \frac{\pi^3}{16}\ .$$

Поскольку (см., например, [25, с. 724])

$$\frac{\pi^3}{32} \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \ \frac{1}{(2k+1)^3} \ \operatorname{th}\frac{\pi(2k+1)}{2},$$

то достаточно доказать неравенство

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q_k}{(2k+1)^3} > 0\ ,$$

где

$$q_k = 2\operatorname{th}\frac{\pi(2k+1)}{2} + \frac{(-1)^k}{\operatorname{ch}\pi(2k+1)} - \frac{2\sqrt{2}\ (-1)^{[k/2]}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(2k+1)}{2}}\ .$$

Мы покажем, что $q_k > 0,\ \ k = 0, 1, \ldots$.

Пусть $k = 2m,\ \ m = 0, 1, \ldots$. Если m нечетно, то $q_k > 0$, поскольку является суммой трех положительных слагаемых. Если $m = 2s$ $(s = 0, 1, \ldots)$, то

$$q_{4s} = 2\operatorname{th}\frac{\pi(8s+1)}{2} + \frac{1}{\operatorname{ch}\pi(8s+1)} - \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(8s+1)}{2}}\ .$$

Переходя к функции непрерывного аргумента

$$q(\tau) = 2\operatorname{th}\tau + \frac{1}{\operatorname{ch}2\tau} - \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch}\tau}, \qquad q\Big(\frac{\pi(8s+1)}{2}\Big) = q_{4s}, \qquad s = 0, 1, \ldots,$$

убеждаемся, что она положительна при всех $\tau \geq \pi/2$, поскольку

$$q(\tau) = \frac{2\operatorname{ch}2\tau\ (\operatorname{sh}\tau - \sqrt{2}) + \operatorname{ch}\tau}{\operatorname{ch}2\tau\ \operatorname{ch}\tau} > 0,$$

так как $\operatorname{sh}\tau > \sqrt{2}$ при всех $\tau \geq \pi/2$.

Пусть $k = 2m + 1$, $m = 0, 1, \ldots$. Если $m = 2s$ $(s = 0, 1, \ldots)$, то

$$q_{4s+1} = 2 \operatorname{th} \frac{\pi(8s+3)}{2} - \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(8s+3)} - \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(8s+3)}{2}} \ .$$

Переходя к функции непрерывного аргумента $q(t)$, $q(\pi(8s+3)/2) = q_{4s+1}$ $(s = 0, 1, \ldots)$, получаем

$$q(t) = 2 \operatorname{th} t - \frac{1}{\operatorname{ch} 2t} - \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t} = \frac{2 \operatorname{ch} 2t \ (\operatorname{sh} t - \sqrt{2}) - \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t \ \operatorname{ch} t} > 0,$$

так как $\operatorname{sh} t - \sqrt{2} > 1$, $\operatorname{ch} 2t > \operatorname{ch} t$ при $t \geq 3\pi/2$.

Случай $m = 2s + 1$, $s = 0, 1, \ldots$, исчерпывается аналогично.

Тем самым неравенство (3.17) установлено. Теорема 2 доказана.

4. Оценки при $N > 2$

В этом разделе мы покажем, что при всех $N > 2$ справедлива оценка $a_\infty^N(\Omega) \leq C_1 N^2$, где $C_1 > 0$ — константа, не зависящая от N. Кроме того, будет установлено, что эта оценка является “почти точной” по N при больших значениях N.

Теорема 3. (1) *При всех $N > 2$ справедливо неравенство*

$$a_\infty^N(\Omega) \leq C_1 N^2,$$

где $C_1 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от N.

(2) *Пусть $\widetilde{F}_N(z)$ — подмножество из $F_N(z)$, состоящее из функций $u = u(x, y)$, которые имеют производные u''_{xx}, u''_{yy} в классическом смысле во всех точках интерполяции. Тогда существует такое число $N_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $N \geq N_0$ имеет место неравенство*

$$\sup_{z \in \mathfrak{M}_\infty^N} \inf_{u \in \widetilde{F}_N(z)} \|\Delta u\|_\infty \ > C_2 N^2,$$

где $C_2 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от N.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. (1) В работе [12] доказан следующий факт. Пусть d_N — расстояние между точками интерполяции $(x^{(s)}, y^{(s)})$, $s = 1, 2, \ldots, N$, b_N — расстояние от множества точек интерполяции до границы квадрата Ω, $\delta_N = \min\{d_N, b_N\}$, $V_N(z) = \{u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})\colon u|_{\partial\Omega} = 0,\ u(x^{(s)},\ y^{(s)}) = z_s,\ s = 1, 2, \ldots, N\}$. Тогда существует константа $A > 0$, не зависящая от N, такая, что при всех $N \geq N_0$ выполняется неравенство

$$\sup_{z \in \mathfrak{M}_\infty^N} \inf_{u \in V_N(z)} \|\Delta u\|_\infty \leq A \delta_N^{-2}.$$

Использование леммы 3 позволяет тем же методом, каким это было сделано в [12], доказать эту оценку в том случае, когда вместо класса $V_N(z)$ берется класс менее гладких интерполирующих функций $F_N(z)$.

Легко видеть, что в нашем случае $d_N = 1/N$, $b_N = 1/(2N)$, поэтому $\delta_N = 1/(2N)$. Применив доказанное неравенство, получаем

$$a_\infty^N(\Omega) \leq C_1 N^2,$$

где C_1 — положительная константа, не зависящая от N.

(2) Фиксируем точки $A = (1/(2N), 1/2)$, $B = (3/(2N), 1/2)$, $C = (5/(2N), 1/2)$, $D = (3/(2N), (N+2)/(2N)$, $E = (3/(2N), (N-2)/(2N))$. Точки A, B, C расположены горизонтально с шагом $h = 1/N$, а точки D, B, E — вертикально с тем же шагом. Пусть $u = u_N(x, y)$ —

любая функция из класса $\widetilde{F_N}(z)$ такая, что $u(A)=1$, $u(B)=-1$, $u(C)=1$ и принимающая в остальных точках множества T значения $+1$ или -1. Выбранный набор интерполируемых данных обозначаем через z^*. Поскольку производная $u''_{xx}(B)$ существует в классическом смысле, то разностное отношение отличается от нее на бесконечно малую величину, т. е.

$$\frac{u(A)-2u(B)+u(C)}{h^2} = u''_{xx}(B)+\alpha(N), \tag{4.1}$$

где $\alpha(N)\to 0$ при $N\to+\infty$.

Обозначаем $u(D)=-1+\delta_1(N)$, $u(E)=-1+\delta_2(N)$ и замечаем, что $\delta_1(N)\to 0$ и $\delta_2(N)\to 0$ при $N\to+\infty$ в силу непрерывности функции u. Аналогично (4.1) получаем

$$\frac{u(D)-2u(B)+u(E)}{h^2} = u''_{yy}(B)+\beta(N), \tag{4.2}$$

где $\beta(N)\to 0$ при $N\to+\infty$. Из (4.1) и (4.2) имеем

$$\frac{u(A)-2u(B)+u(C)}{h^2}+\frac{u(D)-2u(B)+u(E)}{h^2} = \Delta u(B)+\gamma(N), \tag{4.3}$$

где $\gamma(N)\to 0$ при $N\to+\infty$. С другой стороны,

$$\frac{u(A)-2u(B)+u(C)}{h^2}+\frac{u(D)-2u(B)+u(E)}{h^2} = N^2(4+\delta_1(N)+\delta_2(N)). \tag{4.4}$$

Приравниваем правые части (4.3) и (4.4) и переходим к пределу при $N\to+\infty$. В результате получаем

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\|\Delta u\|_\infty}{N^2}\geq 4.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших значениях N выполняется неравенство $\|\Delta u\|_\infty > C_2N^2$ с некоторой не зависящей от N положительной константой C_2. Это неравенство позволяет написать оценку

$$\sup_{z\in\mathfrak{M}^N_\infty}\ \inf_{u\in\widetilde{F}_N(z)}\|\Delta u\|_\infty \geq \inf_{u\in\widetilde{F}_N(z^*)}\|\Delta u\|_\infty > C_2N^2.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
2. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no 9. P. 281–306.
3. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces. With applications to classical and modern analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1975. 209 p. (Lecture Notes in Math.; vol. 479.)
4. **Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.** О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, no 1. P. 83–96.
5. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 78. С. 24–42.
6. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1967. Т. 88. С. 30–60.
7. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1975. Т. 138. С. 118–173.
8. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
9. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.

10. **Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
11. **Новиков С.И.** Задачи экстремальной функциональной интерполяции // Тр. Междунар. летней мат. шк. С.Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 100–109.
12. **Новиков С.И.** Интерполяция на квадрате с минимальным значением равномерной нормы оператора Лапласа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 249–257.
13. **Новиков С.И.** Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збiрник праць Iн-ту матем. НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 248–262.
14. **Новиков С.И.** Интерполяция в шаре с минимальным значением L_p-нормы оператора Лапласа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 258–265.
15. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
16. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
17. **Burenkov V.I.** Sobolev spaces on domains. Stuttgart: B.G.Teubner Verlag GmbH, 1998. 312 p. (Teubner Texts in Math.; vol. 137.)
18. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1968. 496 с.
19. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М: Наука, 1976. 248 с.
20. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
21. **de Boor C.** Splines as linear combinations of B-splines // Approximation Theory II: Proc. of Internat. Symposium. (Austin, Texas, 1976) N.Y. ect.: Academic Press, 1976. P. 1–47.
22. **Holmes R.** Geometric functional analysis and its applications. N.Y. ect.: Springer Verlag, 1975. 246 p.
23. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
24. **Тимофеев В.Г.** Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.
25. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Ряды и интегралы. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Новиков Сергей Игоревич
кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 23.12.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.5

ГРУППЫ, ЛЕЖАЩИЕ МЕЖДУ ГРУППАМИ СТЕЙНБЕРГА НАД НЕСОВЕРШЕННЫМИ ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 И 3 [1]

Я. Н. Нужин

Описаны группы, лежащие между группами Стейнберга типа ${}^2A_l, {}^2D_l, {}^2E_6$ или ${}^3D_4$ над различными полями характеристик 2 и 3 в случае, когда большее поле является алгебраическим расширением меньшего несовершенного поля.

Ключевые слова: группа Шевалле, группа Стейнберга, несовершенное поле, промежуточные подгруппы.

Ya. N. Nuzhin. Groups lying between Steinberg groups over non-perfect fields of characteristics 2 and 3.

We describe groups lying between Steinberg groups of type ${}^2A_l$, ${}^2D_l$, ${}^2E_6$, or ${}^3D_4$ over different fields of characteristics 2 and 3 in the case where the larger field is an algebraic extension of the smaller non-perfect field.

Keywords: Chevalley group, Steinberg group, non-perfect field, intermediate subgroups.

1. Введение

Пусть $G(K)$ — присоединенная группа Шевалле или группа Стейнберга над полем K и F — подполе поля K. В [1] автор установил, что группы, лежащие между группами $G(F)$ и $G(K)$ лиева ранга больше 1, исчерпываются группами $G(P)$ или их расширениями при помощи групп диагональных автоморфизмов для промежуточных подполей P, $F \subseteq P \subseteq K$, в случае, когда K — алгебраическое расширение поля F, содержащего достаточное число элементов. Причем в исключительных характеристиках предполагалась совершенность поля F. Как показывает следующий пример из книги Р. Стейнберга [2, §10, с. 144], это предположение является существенным для того, чтобы любая промежуточная подгруппа определялась только одним подполем.

Пусть Φ — система корней, K — несовершенное поле характеристики p, где $p = 2$ при $\Phi = B_l$ $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4 и $p = 3$ при $\Phi = G_2$. Множество K^p p-х степеней элементов поля K является его собственным подполем. Положим

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} K, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ K^p, & \text{если } r \text{ — длинный корень.} \end{cases}$$

Тогда набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ однозначно определяет подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$ группы Шевалле типа Φ, порожденную корневыми подгруппами $x_r(\mathfrak{A}_r)$, т. е. она не содержит новых корневых элементов.

В [3] описаны промежуточные подгруппы групп Шевалле в исключительных характеристиках для несовершенного поля F. Оказалось, что они параметризуются уже двумя полями, как в указанном выше примере, а для типа B_l — двумя подгруппами аддитивной группы поля K, и в общем случае определяются замкнутым (допустимым) ковром аддитивных подгрупп.

В данной работе описываются группы, лежащие между группами Стейнберга типа ${}^2A_l$, ${}^2D_l$, ${}^2E_6$ или ${}^3D_4$ над различными полями характеристик 2 и 3 в случае, когда большее поле является алгебраическим расширением меньшего несовершенного поля. Доказано, что для

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12–01–00968) и министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/4620).

типов ${}^2A_l, {}^2E_6, {}^3D_4$ такие группы исчерпываются группами Стейнберга того же типа над промежуточными полями или их расширениями при помощи диагональных автоморфизмов, а для типа ${}^2D_l$ они параметризуются двумя подгруппами аддитивной группы основного поля с определенными условиями на эти две подгруппы.

2. Обозначения и предварительные результаты

Пусть $G = G(K)$ — присоединенная группа Шевалле (нормального типа) над полем K, ассоциированная с системой корней Φ. Она порождается корневыми подгруппами

$$X_r = \langle x_r(t) \mid t \in K \rangle, \quad r \in \Phi,$$

где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент в группе G. Существует гомоморфизм ϕ_r специальной линейной группы $SL_2(K)$ на подгруппу

$$G_r = \langle X_r, X_{-r} \rangle, \quad r \in \Phi,$$

продолжающий отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_r(t), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \to x_{-r}(t) \quad (t \in K).$$

Пусть $t \in K^*$, где K^* — мультипликативная группа поля K. Тогда образы матриц

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

обозначаются соответственно через $h_r(t)$ и $n_r(t)$. При этом для любых $r, s \in \Phi$ и $t, u \in K^*$ имеем

$$n_r(1)x_s(u)n_r(-1) = x_{w_r(s)}(\pm u),$$

$$h_r(t)x_s(u)h_r(t^{-1}) = x_s(ut^{2(r,s)/(r,r)}),$$

где w_r — отражение относительно корня r. Выделим некоторые подгруппы группы G. По определению

$U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \rangle$ — верхняя унипотентная подгруппа;
$V = \langle X_r \mid r \in \Phi^- \rangle$ — нижняя унипотентная подгруппа;
$H = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in K^* \rangle$ — диагональная подгруппа;
$N = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in K^* \rangle$ — мономиальная подгруппа.

Здесь Φ^+ — множество положительных корней, $\Phi^- = -\Phi^+$ и $\langle A \rangle$ — группа, порожденная множеством A.

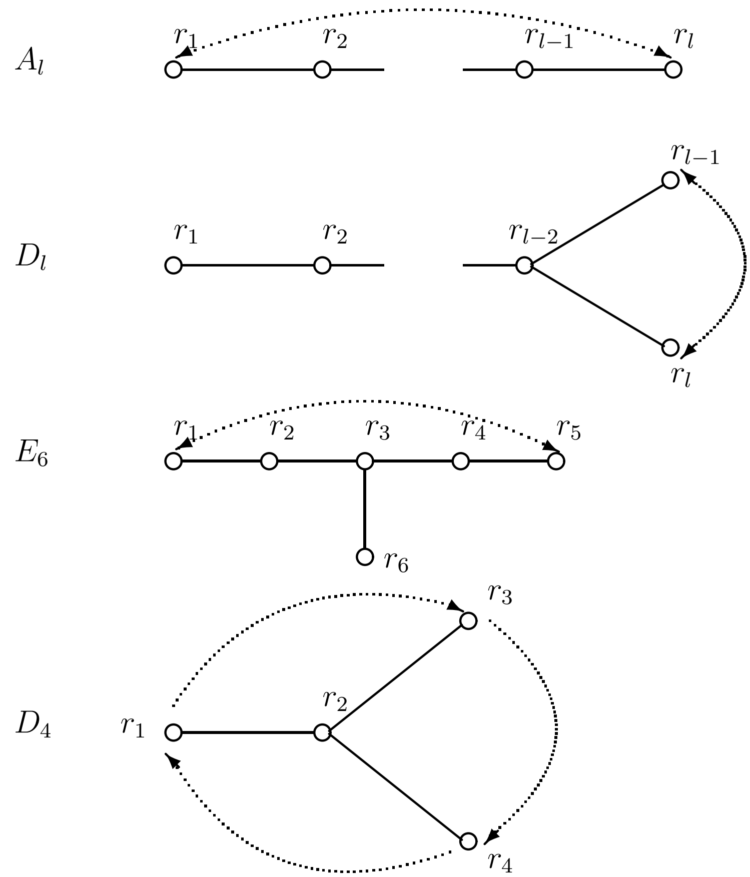
Система корней Φ типа A_l, D_l или E_6 с базой $\{r_1, \dots, r_l\}$ обладает симметрией ρ порядка 2, а система типа D_4 имеет еще и симметрию порядка 3 (см. рисунок).

Если поле K обладает автоморфизмом f, порядок которого совпадает с порядком симметрии ρ, то определена группа Стейнберга $G^1 = G^1(K)$ над полем K как централизатор графового автоморфизма $\sigma = f'\rho'$, где f' и ρ' — ассоциированные с f и ρ соответственно полевой и графовый автоморфизмы группы G, т. е.

$$G^1 = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}.$$

С группой Стейнберга G^1 типа

$${}^2A_{2m},\ {}^2A_{2m-1},\ {}^2D_{m+1},\ {}^2E_6,\ {}^3D_4$$



естественным образом связана система корней Φ^1 типа

$$BC_m,\ C_m,\ B_m,\ F_4,\ G_2$$

соответственно, где неприведенная система корней типа BC_m состоит из корней системы типа B_m и удвоенных ее коротких корней. Группа G^1 порождается своими корневыми подгруппами X^1_S, где S пробегает множество Φ^1 орбит относительно симметрии ρ. В зависимости от типа орбиты корневые подгруппы имеют один из следующих видов:

$X^1_S = \{x_S(t) = x_r(t) \mid t \in K_f\}$, если $S = \{r\}$;

$X^1_S = \{x_S(t) = x_r(t)x_{\bar r}(\bar t) \mid t \in K\}$, если $S = \{r, \bar r\}$, $r + \bar r \notin \Phi$;

$X^1_S = \{x_S(t) = x_r(t)x_{\bar r}(\bar t)x_{\bar{\bar r}}(\bar{\bar t}) \mid t \in K\}$, если $S = \{r, \bar r, \bar{\bar r}\}$;

$X^1_S = \{x_S(t,u) = x_r(t)x_{\bar r}(\bar t)x_{r+\bar r}(u) \mid t, u \in K,\ u + \bar u = \pm t\bar t\}$, если $S = \{r, \bar r\}$, $r + \bar r \in \Phi$;

$X^1_{2S} = \{x_{2S}(u) = x_S(0,u) = x_{r+\bar r}(u) \mid u \in K,\ u + \bar u = 0\}$, если $S = \{r, \bar r\}$, $r + \bar r \in \Phi$.

Здесь и далее K_f — подполе неподвижных элементов поля K относительно его автоморфизма f, $\bar t = f(t)$ и $\bar r = \rho(r)$. Последние два случая встречаются только для типа ${}^2A_{2m}$, причем подгруппа X^1_{2S} совпадает с центром подгруппы X^1_S. Если тип G^1 отличен от ${}^2A_{2m}$, то существует гомоморфизм ϕ_S группы $SL_2(K)$ или группы $SL_2(K_f)$, если $S = \{r\}$, на подгруппу

$$G^1_S = \langle X^1_S, X^1_{-S}\rangle, \quad S \in \Phi^1,$$

продолжающий отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_S(t), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \to x_{-S}(t).$$

Если G^1 типа ${}^2A_{2m}$ и $S, 2S \in \Phi^1$, то подгруппа G^1_S является гомоморфным образом специальной унитарной группы $SU_3(K)$, подгруппа G^1_{2S} изоморфна $SL_2(K_f)$, а для других S подгруппа G^1_S изоморфна $SL_2(K)$. В группе G^1 также определяются унипотентная, диагональная и мономиальная подгруппы $U^1 = G^1 \cap U,\ \ V^1 = G^1 \cap V,\ \ H^1 = G^1 \cap H,\ \ N^1 = G^1 \cap N$ соответственно.

Утверждение следующей леммы является частным случаем теоремы 3 из [4] для групп Стейнберга над полями.

Лемма 1. *Пусть M — подгруппа группы $G^1(K)$, нормализуемая группой H^1, и $|K_f| > 4$. Тогда, если $y_1y_2\dots y_k \in M$, где $y_i \in X_{R_i}$ и $0 < R_1 < R_2 < \dots < R_k$, то $y_i \in M,\ \ i = 1, 2, \dots, k$.*

Нам потребуются также две следующие технические леммы.

Лемма 2. *Пусть P_f — подполе неподвижных элементов поля P с автоморфизмом f порядка 2. Тогда*:

1) *множество $P_0 = \{u + \bar{u} \mid u \in P\}$ совпадает с P_f;*

2) *множество $P_1 = \{t\bar{t} \mid t \in P\}$ аддитивно порождает P_f.*

Доказательство. В поле P существует элемент u такой, что $u + \bar{u} \neq 0$. Действительно, если $charK \neq 2$, то в качестве u можно взять 1, если $charK = 2$ и $u + \bar{u} = 0$ для всех $u \in P$, то f — тривиальный автоморфизм, что невозможно.

1) Для любого $v \in P_f$ справедливо равенство $uv + \overline{uv} = (u + \bar{u})v$, из которого при $u + \bar{u} \neq 0$ получаем $P_f \subseteq P_0$. Включение $P_0 \subseteq P_f$ очевидно.

2) Пусть $u + \bar{u} \neq 0$ и $t = \dfrac{u}{u + \bar{u}}$. Тогда $t + \bar{t} = 1$ и для любого $v \in P_f$ справедливо равенство

$$(1 + vt)\overline{(1 + vt)} = 1 + v + v^2t\bar{t}.$$

Остается заметить, что $1, v^2t\bar{t} \in P_1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть P_f — подполе неподвижных элементов поля P с автоморфизмом f порядка 3. Тогда множество $P_0 = \{u + \bar{u} + \bar{\bar{u}} \mid u \in P\}$ совпадает с P_f.*

Доказательство. В поле P существует элемент u такой, что $u + \bar{u} + \bar{\bar{u}} \neq 0$. Действительно, если $charK \neq 3$, то в качестве u можно взять 1. Пусть $charK = 3$ и $u + \bar{u} + \bar{\bar{u}} = 0$ для всех $u \in P$. Тогда, очевидно, $\bar{\bar{u}} = -u - \bar{u}$, и для всех $u, v \in P$ последовательно получаем равенства

$$uv + \bar{u}\bar{v} + \bar{\bar{u}}\bar{\bar{v}} = 0,$$

$$uv + \bar{u}\bar{v} + (u + \bar{u})(v + \bar{v}) = 0,$$

$$2uv + 2\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v + u\bar{v} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $v = u^{-1}$, получим равенство $1 + \bar{u}u^{-1} + u\bar{u}^{-1} = 0$. Умножая его на $u\bar{u}$, получаем $u\bar{u} + \bar{u}^2 + u^2 = 0$. При $charK = 3$ последнее равенство эквивалентно равенству $(\bar{u} - u)^2 = 0$. Отсюда f — тривиальный автоморфизм, что невозможно.

Для любого $v \in P_f$ справедливо равенство $uv + \overline{uv} + \overline{\overline{uv}} = (u + \overline{u} + \bar{\bar{u}})v$, из которого при $u + \bar{u} + \bar{\bar{u}} \neq 0$ получаем $P_f \subseteq P_0$. Включение $P_0 \subseteq P_f$ очевидно. Лемма доказана.

3. Основная теорема

Пусть A — подмножество поля K. Через A^n обозначим множество всех n-х степеней элементов из A. Если f — автоморфизм поля K и $f(u) = \bar{u}$, то положим $\overline{A} = \{\bar{u} \mid u \in A\}$. По определению A^{-1} состоит из всех обратных к ненулевым элементам из A в объединении с нулем, если он лежит в A.

Теорема. *Пусть M — группа, лежащая между группами Стейнберга $G^1(F)$ и $G^1(K)$ типа ${}^2A_l,\ l \geq 4,\ {}^2D_l,\ l \geq 3,\ {}^2E_6$ или ${}^3D_4$, где K — алгебраическое расширение несовершенного поля F характеристики p, причем $p = 2$ или 3, если $G^1(F)$ типа ${}^3D_4$, и $p = 2$ в остальных случаях. Тогда*:

1) *Если* $G^1(K)$ *типа* ${}^2A_l,\ l \geq 4,\ {}^2E_6$ *или* ${}^3D_4$, *то* $M = G^1(P)H_M$ *для некоторого промежуточного подполя* P, $F \subseteq P \subseteq K$, *и некоторой диагональной подгруппы* H_M, *нормализующей группу* $G^1(P)$.

2) *Если* $G^1(K)$ *типа* ${}^2D_l,\ l \geq 3$, *то* $M = G^1(P,Q)H_M$ *для некоторой диагональной подгруппы* H_M, *нормализующей группу* $G^1(P,Q)$, *которая порождается пересечениями*

$$M \cap x_R(K) = x_R(\mathfrak{A}_R), \quad R \in \Phi^1,$$

где

$$\mathfrak{A}_R = \begin{cases} P, & \text{если } R \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } R \text{ — длинный корень,} \end{cases}$$

P *и* Q *— подгруппы аддитивной группы поля* K, *содержащие подполе* F *и удовлетворяющие следующим условиям*: $PQ \subseteq P$, $P^2P \subseteq P$, $P^{-1} = \overline{P} = P$, $u\bar{u}, u + \bar{u} \in Q$ *для всех* $u \in P$, *если* $l \geq 4$, *то* Q *— поле.*

Доказательство. Пусть группа M лежит между группами Стейнберга $G^1(F)$ и $G^1(K)$. Для любого $R \in \Phi^1$ определим аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_R$ поля K. Если $R, 2R \in \Phi^1$ (этот случай возможен только для $G^1(K)$ типа ${}^2A_{2m}$), то полагаем

$$\mathfrak{A}_R = \{t \in K \mid x_R(t,u) \in M \text{ для некоторого } u \in K\},$$

а в остальных случаях подгруппы $\mathfrak{A}_R$ определяются пересечениями

$$M \cap x_R(K) = x_R(\mathfrak{A}_R), \quad R \in \Phi^1.$$

По условию теоремы мономиальная подгруппа $N(F)$ лежит в M, и она действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одинаковой длины. Поэтому

$$\mathfrak{A}_R = \mathfrak{A}_S, \text{ если } |R| = |S|.$$

Переобозначим $\mathfrak{A}_R$ через P для самого короткого корня, через Q — для самого длинного корня и через T — для корня R средней длины (если такой имеется).

Пусть $G^1(K)$ типа ${}^2A_{2m-1},\ m \geq 3$, или ${}^2E_6$. В системах корней типа C_m при $m \geq 3$ или F_4 существует пара коротких корней, образующих базу подсистемы корней типа A_2. Поэтому существуют $R, S \in \Phi^1$ такие, что

$$[x_R(t), x_S(u)] = x_{R+S}(tu), \qquad t, u \in P. \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что P является кольцом, а в силу алгебраичности расширения K/F — полем. Пусть $R, S, R+S, 2R+S \in \Phi^1$. Тогда в силу коммутаторной формулы Шевалле для любых $u, v \in P$ и $t \in F$ имеем

$$[x_R(u), x_S(t)] = x_{R+S}(ut)x_{2R+S}(u\bar{u}t), \tag{3.2}$$

$$[x_R(u), x_{R+S}(v)] = x_{2R+S}(u\bar{v} + \bar{u}v). \tag{3.3}$$

По лемме 1 (она применима, так как поле F бесконечно в силу его несовершенности) каждый из сомножителей в правой части равенства (3.2) лежит в M. Поэтому в силу (3.2) $PQ \subseteq P$, в частности, $Q \subseteq P_f$. В силу (3.3) и леммы 2 $P_f \subseteq Q$. Таким образом, $Q = P_f$ и, следовательно, пересечения $M \cap x_R(K)$, $R \in \Phi^1$, порождают подгруппу $G^1(P)$ для некоторого промежуточного подполя P, $F \subseteq P \subseteq K$.

Пусть $G^1(K)$ типа ${}^3D_4$ и $R, S, R+S, 2R+S, 3R+S, 3R+2S \in \Phi^1$. Тогда в силу коммутаторной формулы Шевалле для любых $u, v \in P$ и $t \in F$ имеем

$$[x_R(u), x_S(t)] = x_{R+S}(\pm ut)x_{2R+S}(\pm u\bar{u}t)x_{3R+S}(\pm u\bar{u}\bar{\bar{u}}t)x_{3R+2S}(\pm u\bar{u}\bar{\bar{u}}t^2), \tag{3.4}$$

$$[x_R(u), x_{R+S}(v)] = x_{2R+S}(\pm(u\bar{v} + \bar{u}v))x_{3R+S}(\pm(u\bar{u}\bar{\bar{v}} + \bar{u}\bar{\bar{u}}v + \bar{\bar{u}}u\bar{v}))x_{3R+2S}(\pm(u\bar{v}\bar{\bar{v}} + \bar{u}\bar{\bar{v}}v + \bar{\bar{u}}v\bar{v})). \tag{3.5}$$

По лемме 1 каждый из сомножителей в правых частях равенств (3.4) и (3.5) лежит в M. С использованием соотношений (3.4) и (3.5) в [1, с. 531] установлено, что с каждым своим элементом u множество P содержит и любую его степень u^n, где $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, P является F-модулем, так как для любого $v \in F^*$ диагональный элемент $h_R(v)$ лежит в M и

$$h_R(v)x_{R+S}(u)h_R(v^{-1}) = x_{R+S}(uv^{\pm 1}). \tag{3.6}$$

Поэтому кольцо многочленов $F[u]$ лежит в P для любого $u \in P$ и является полем в силу алгебраичности расширения K/F. Следовательно, $h_R(u) \in M$ для любого ненулевого элемента u из P. Теперь из соотношения (3.6) при $u, v \in P$ получаем, что P является полем. Далее, в силу (3.4) $PQ \subseteq P$, в частности, $Q \subseteq P_f$, а в силу (3.5) (при $v = 1$) и леммы 3 $P_f \subseteq Q$. Таким образом, $Q = P_f$ и, следовательно, пересечения $M \cap x_R(K)$, $R \in \Phi^1$, порождают подгруппу $G^1(P)$ для некоторого промежуточного подполя P, $F \subseteq P \subseteq K$.

Пусть $G^1(K)$ типа ${}^2A_{2m}$, $m \geq 2$, и $R, S, R+S, 2R+S, 2R \in \Phi^1$. В силу коммутаторной формулы Шевалле для $t, u, v, w \in P$ имеем

$$[x_R(t,u), x_S(v)] = x_{R+S}(\pm tv, \pm v\bar{v}u)x_{2R+S}(\pm vu), \tag{3.7}$$

$$[x_R(t,u), x_{R+S}(v,w)] = x_{2R+S}(t\bar{v}), \tag{3.8}$$

$$(x_R(t,u))^2 = x_R(0, t+\bar{t}) = x_{2R}(t+\bar{t}). \tag{3.9}$$

Из (3.7) следует включение $PT \subseteq P$, в частности, $T \subseteq P$, а в силу (3.8) — $P\overline{P} \subseteq T$, в частности, $P \subseteq T$. Отсюда получаем, что $T = P$ и P является кольцом, а в силу алгебраичности расширения K/F — полем. В силу (3.9) и леммы 2 $P_f \subseteq Q$, а в силу (3.7) $Q \subseteq P$. Отсюда, учитывая, что $Q \subseteq K_f$, получаем равенство $Q = P_f$. Таким образом, пересечения $M \cap X_R^1$, $R \in \Phi^1$, порождают подгруппу $G^1(P)$ для некоторого промежуточного подполя P, $F \subseteq P \subseteq K$. Нужно лишь отметить следующий факт. Если два корневых элемента $x_R(t, u_1)$ и $x_R(t, u_2)$ лежат в $G^1(P)$, то $u_2 = u_1 + v$ для некоторого $v \in P_f$ и, следовательно, $x_R(t, u_2) = x_R(t, u_1)x_{2R}(v)$.

Пусть $G^1(K)$ типа ${}^2D_l$, $l \geq 3$, и $R, S, R+S, 2R+S \in \Phi^1$. В этом случае система корней Φ^1 имеет тип B_{l-1}. Поэтому из соотношений (3.2), (3.3) следуют включения $PQ \subseteq P$ и $t\bar{t}, t+\bar{t} \in Q$ для всех $t \in P$.

В [1, с. 530] установлено, что $P^n \subseteq P$ для любого натурального числа n. С другой стороны, F^2 — поле и P является F^2-модулем, так как для любого ненулевого элемента $u \in F$ диагональный элемент $h_R(u)$ лежит в M и

$$h_R(u)x_R(v)h_R^{-1}(u) = x_R(u^2 v). \tag{3.10}$$

Поэтому кольцо многочленов $F^2[u]$ лежит в P для любого $u \in P$ и является полем в силу алгебраичности расширения K/F^2. Следовательно, $P^{-1} = P$ и $h_R(u) \in M$ для любого ненулевого элемента u из P. Теперь из соотношения (3.10) получаем включение $P^2P \subseteq P$, а соотношение

$$h_R(u)x_{R+S}(v)h_R^{-1}(u) = x_{R+S}((u^{-1}\bar{u})^{\pm 1}v)$$

дает равенство $\overline{P} = P$. Наконец, в системе корней типа B_{l-1} при $l-1 \geq 3$ существует пара длинных корней, образующих базу подсистемы корней типа A_2, поэтому соотношение (3.1) справедливо и в этом случае с той лишь разницей, что $t, u \in Q$, следовательно, в этом случае Q является кольцом, а в силу алгебраичности расширения K_f/F_f — полем.

Итак, для всех типов остается показать, что промежуточная подгруппа M совпадает с произведением $G^1(P)H_M$ или $G^1(P,Q)H_M$, если $G^1(K)$ типа ${}^2D_l$, $l \geq 3$, для некоторой диагональной подгруппы H_M, нормализующей группу $G^1(P)$ или $G^1(P,Q)$ соответственно.

Любой элемент g из группы Стейнберга над полем имеет каноническое представление в виде

$$g = uvnh, \text{ где } u \in U^1,\ v \in V^1,\ n \in N^1,\ h \in H^1.$$

Так же, как в [1, с. 535–536], можно показать, что сомножители u, v, n элемента $g \in M$ лежат в подгруппе $G^1(P)$ или $G^1(P, Q)$, если $G^1(K)$ типа ${}^2D_l,\ l \geq 3$. Поэтому диагональный элемент h лежит в M, и он обязан нормализовать подгруппу $G^1(P)$ или $G^1(P, Q)$ соответственно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В формулировке теоремы тип ${}^2A_3$ формально исключается, но ${}^2A_3 = {}^2D_3$ и, следовательно, он также рассмотрен.

З а м е ч а н и е 2. Остается неясным, существуют ли аддитивные подгруппы P и Q с условиями из п. 2) теоремы, не являющиеся полями?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нужин Я.Н.** О группах, лежащих между группами лиева типа над различными полями // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5, С. 526–541.
2. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир. 1975. 262 с.
3. **Нужин Я.Н.** Группы, лежащие между группами Шевалле типа B_l, C_l, F_4, G_2 над несовершенными полями характеристики 2 и 3 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 157–162.
4. **Левчук В.М.** Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Поступила 06.02.13

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 517.982.272+515.122.55

О σ-СЧЕТНОЙ КОМПАКТНОСТИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, НАДЕЛЕННЫХ МНОЖЕСТВЕННО-ОТКРЫТОЙ ТОПОЛОГИЕЙ[1]

А. В. Осипов, Е. Г. Пыткеев

Для тихоновского пространства X получен критерий σ-счетной компактности пространства непрерывных функций $C(X)$, наделенного множественно-открытой топологией. В частности, доказано, что в классе экстремально несвязных пространств X σ-счетно-компактность пространства $C_\lambda(X)$ эквивалентна свойству, что X — псевдокомпактно, множество $X(P)$ всех P-точек пространства X плотно в X, семейство λ состоит из конечных подмножеств множества $X(P)$.

Ключевые слова: множественно-открытая топология, σ-счетно компактное пространство, экстремально несвязное пространство, P-точка, пространство непрерывных функций.

A. V. Osipov, E. G. Pytkeev. On the σ-countable compactness of spaces of continuous functions with the set-open topology.

For a Tychonoff space X, we obtain a criterion of the σ-countable compactness of the space of continuous real-valued functions $C(X)$ with the set-open topology. In particular, for extremally disconnected space X, we prove that the space $C_\lambda(X)$ is a σ-countably compact space if and only if X is a pseudocompact space, the set $X(P)$ of all P-points of X is dense in X, and the family λ consists of finite subsets of $X(P)$.

Keywords: set-open topology, σ-countably compact space, extremally disconnected space, P-point, space of continuous functions.

Введение

Пусть X — тихоновское топологическое пространство, λ — семейство подмножеств пространства X и $C_\lambda(X)$ — пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на X, наделенное множественно-открытой топологией, $C_\lambda(X,I)$ — подпространство $C_\lambda(X)$, состоящее из функций $f \in C_\lambda(X)$ таких, что $f(X) \subseteq I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, и $C_p(Y|X)$ — подпространство $C_p(Y)$, состоящее из функций $f|_Y$, где $Y \subseteq X$ и $f \in C(X)$. Основной результат работы — теорема о характеризации свойства σ-счетно компактности пространства $C_\lambda(X)$ для произвольной π-сети λ пространства X.

Теорема. *Пусть X — тихоновское пространство и λ — π-сеть пространства X. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $C_\lambda(X)$ *σ-счетно компактно*;

(2) $C_\lambda(X, I)$ *счетно компактно и X псевдокомпактно*;

(3) *X псевдокомпактно, множество $X(P)$ всех P-точек пространства X плотно в X, семейство λ состоит из конечных подмножеств множества $X(P)$, а пространство $C_p(X(P)|X)$ σ-счетно компактно.*

1. Основные определения и замечания

Все рассматриваемые топологические пространства X предполагаем тихоновскими. Напомним, что пространство X называется *σ-компактным* (*σ-счетно компактным*), если $X =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы Отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003).

$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где пространства X_i компактны (счетно компактны) для любого $i \in \mathbb{N}$. Через $C(X)$ обозначим множество всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на пространстве X. Пусть λ — некоторое семейство непустых подмножеств множества X. Через $C_\lambda(X)$ будем обозначать пространство $C(X)$, наделенное множественно-открытой топологией, предбазу которой образуют множества вида $[F, U] = \{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$. В работе рассматривается случай, когда пространство $C_\lambda(X)$ хаусдорфово. Как доказано в [4], это эквивалентно тому, что семейство λ является π-сетью пространства X (т. е. для всякого непустого открытого множества $U \subseteq X$ найдется элемент $T \in \lambda$ такой, что $T \subseteq U$). Если семейство λ состоит из всех конечных подмножеств пространства X, то множественно-открытая топология совпадает с топологией поточечной сходимости, т. е. $C_\lambda(X) = C_p(X)$. Пусть $Y \subseteq X$ всюду плотно. Тогда через $C_p(Y|X)$ обозначается подпространство $\{f|_Y : f \in C(X)\} \subseteq C(Y)$. Ясно, что в случае, когда λ состоит из всех конечных подмножеств пространства Y, пространства $C_p(Y|X)$ и $C_\lambda(X)$ естественно гомеоморфны.

В работе изучается σ-счетная компактность пространства $C_\lambda(X)$. Первый результат в этом направлении принадлежит Н. В. Величко (см. [2]): пространство $C_p(X)$ σ-компактно в том и только том случае, когда X конечно. В. В. Ткачук и Д. Б. Шахматов доказали [6], что пространство X конечно и в том случае, если $C_p(X)$ — σ-счетно компактное пространство. А. В. Архангельский обобщил [1] результат В. В. Ткачука и Д. Б. Шахматова, доказав, что если пространство $C_p(Y|X)$ σ-счетно компактно, то пространство X псевдокомпактно, а Y является P-пространством. Наконец, отметим результат С. Э. Нохрина (см. [4]): пространство $C_\lambda(X)$ σ-компактно тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно и содержит плотное подмножество D изолированных точек, которое C^*-вложено в X и удовлетворяет равенству $C_\lambda(X) = C_p(D|X)$.

Напомним, что точка $x \in X$ называется *P-точкой*, если любое G_δ-множество, содержащее x, содержит также некоторую окрестность точки x. Через $X(P)$ будем обозначать подпространство X, состоящее из всех его P-точек. Для множества $A \subseteq X$ через $\overline{A}$ (иногда $cl(A)$) будем обозначать замыкание множества A в пространстве X.

2. Основные результаты

Для доказательства основной теоремы о σ-счетно компактности пространства $C_\lambda(X)$ нам необходимо доказать несколько утверждений, которые мы сформулируем в виде лемм, но при этом отмечаем их самостоятельную значимость.

Лемма 1. *Если пространство $C_\lambda(X)$ σ-счетно компактно, то пространство X псевдокомпактно.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что если подпространство $A \subseteq C_\lambda(X)$ счетно компактно, V — непустое открытое подмножество пространства X, последовательность функций $\{f_n \in C(X),\, n \in \mathbb{N}\}$ такова, что $f_n|V \equiv c_n$, $c_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, то $f_n \notin A$ для всех n, кроме конечного числа.

В самом деле, предположим противное. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $f_n \in A$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем функцию $f \in A$, предельную для последовательности $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, точку $x \in V$ и ее окрестность $O(x) \subseteq V$ такую, что $diam f(O(x)) < 1$. Так как λ — π-сеть, найдется множество $T \in \lambda$ с условием $T \subseteq O(x)$. Тогда $f \in [T,\, (f(x)-1,\, f(x)+1)]$, и в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, множество $[T,\, (f(x)-1,\, f(x)+1)]$ содержит лишь конечное число элементов последовательности $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Получили противоречие.

Теперь предположим, что пространство X не псевдокомпактно. Тогда найдется дискретное в X семейство $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ непустых конуль-множеств. Пусть функции $\varphi_n \in C(X, I)$ такие, что

$V_n = \varphi_n^{-1}(0;1]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для каждого натурального числа n зафиксируем число $k_n \in \mathbb{N}$ и точку $x_n \in V_n$ так, чтобы было справедливо неравенство $\varphi_n(x_n) > 1/k_n$. Выберем для каждого $n \in \mathbb{N}$ окрестность $O(x_n)$ такую, что $\varphi_n(y) \cdot k_n > 1$ для всех $y \in O(x_n) \subseteq V_n$, и определим функцию $\psi_n = \min\{1, \varphi_n \cdot k_n\}$. Тогда для всех $y \in O(x_n)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\psi_n(y) = 1$.

Пусть $C_\lambda(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i — счетно компактное множество для любого $i \in \mathbb{N}$.

По доказанному факту для всякого множества $O(x_n)$ существует такое число $m_n \in \mathbb{N}$, что $f|O(x_n) \not\equiv m_n$ для всякой функции $f \in A_n$. Тогда функция $g = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \cdot \psi_n$ непрерывна в силу дискретности семейства $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $g \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Противоречие. □

Напомним, что пространство X называется *базисно несвязным* (см. [3]), если $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ для любого конуль-множества U и любого дизъюнктного с ним открытого множества V из X. Это условие эквивалентно тому, что в пространстве X замыкание любого конуль-множества является открытым подмножеством пространства X. Очевидно, что из базисной несвязности тихоновского пространства X следует, что $ind(X) = 0$.

Лемма 2. *Если пространство $C_\lambda(X)$ σ-счетно компактно, то пространство X базисно несвязно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1 пространство X псевдокомпактно, следовательно, множество $C(X)$, наделенное чебышёвской нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$, является банаховым пространством. Отсюда следует, что найдутся номер $n_0 \in \mathbb{N}$, функция $f \in A_{n_0}$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что множество $B(f, \varepsilon_0) \cap A_{n_0}$ плотно в $B(f, \varepsilon_0)$ в топологии равномерной сходимости. (Здесь через $B(f, \varepsilon_0)$ обозначен замкнутый шар радиуса ε_0 с центром в точке f, т. е. $B(f, \varepsilon_0) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon_0$ для всех $x \in X\}$.) В дальнейшем считаем, что такие n_0, f и ε_0 зафиксированы.

Пусть $U \subseteq X$ — конуль-множество, V — открытое подмножество в X и $U \cap V = \varnothing$. Докажем, что $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$. Предположим противное, пусть $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$.

Выберем окрестность $O(x)$ точки x так, чтобы

$$f(O(x)) \subseteq \Big(f(x) - \frac{\varepsilon_0}{4},\, f(x) + \frac{\varepsilon_0}{4}\Big).$$

Без ограничения общности считаем, что $O(x)$ — конуль-множество. Положим $\widetilde{U} = U \cap O(x)$ и $\widetilde{V} = V \cap O(x)$. Тогда $x \in \overline{\widetilde{V}} \cap \overline{\widetilde{U}}$. Так как $\widetilde{U}$ — конуль-множество, то можно выбрать открытые множества U_n и функции $\varphi_n \in C(X, I)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{U_n} \subseteq U_{n+1} \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \widetilde{U}, \tag{1}$$

$$\varphi_n|U_n \equiv 1 \quad \text{и} \quad \varphi_n|(X \setminus \widetilde{U}) \equiv 0.$$

Положим $h_n = f + (\varepsilon_0/4)\,\varphi_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $h_n \in B(f, \varepsilon_0)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и поэтому найдутся функции $g_n \in B(f, \varepsilon_0) \cap A_{n_0}$ для $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\|h_n - g_n\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2^{n+2}} \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Пусть g — предельная функция для последовательности $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что функции g и $f + \varepsilon_0/4$ совпадают на множестве $\widetilde{U}$. Пусть это не так, т. е. найдется такая точка $y \in \widetilde{U}$, что $g(y) \neq f(y) + \varepsilon_0/4$. В силу (1) можно считать, что $y \in U_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$\delta = \Big|g(y) - \Big(f(y) + \frac{\varepsilon_0}{4}\Big)\Big| > 0.$$

Выберем окрестность $W(y)$ точки y такую, что

$$W(y) \subseteq U_1,\ |g(z) - g(y)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{для всех} \quad z \in W(y), \tag{3}$$

$$|f(z)-f(y)|<\frac{\delta}{4} \text{ для всех } z\in W(y).$$

В силу (2) и (3) найдется номер m_0 такой, что для всех номеров $m>m_0$ и всех точек $z\in W(y)$ выполнено равенство

$$\Bigl|\Bigl(f(z)+\frac{\varepsilon_0}{4}\Bigr)-g_m(z)\Bigr|=|h_m(z)-g_m(z)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2^{m+2}}<\frac{\delta}{4}. \tag{4}$$

Так как λ — π-сеть, то существует множество $T\in\lambda$ такое, что $T\subseteq W(y)$. Тогда в силу (3) $g\in\bigl[T,\,\bigl(g(y)-\delta/4,g(y)+\delta/4\bigr)\bigr]$. Так как g — предельная функция для последовательности $\{g_n,\,n\in\mathbb{N}\}$, найдется такой номер $l>m_0$, что функция $g_l\in\bigl[T,\,\bigl(g(y)-\delta/4,g(y)+\delta/4\bigr)\bigr]$, т. е., $g_l(z)\in\bigl(g(y)-\delta/4,g(y)+\delta/4\bigr)$ для всех $z\in T$. Учитывая (3)–(4), получаем, что для любой точки $z\in T$ имеет место условие

$$\delta=\Bigl|\Bigl(f(y)+\frac{\varepsilon_0}{4}-g(y)\Bigr)\Bigr|=\Bigl|\Bigl(\Bigl(f(z)+\frac{\varepsilon_0}{4}\Bigr)-g_l(z)\Bigr)+(f(y)-f(z))+(g_l(z)-g(y))\Bigr|\leqslant\frac{3\delta}{4}.$$

Противоречие. Таким образом, функции g и $f+\varepsilon_0/4$ совпадают на множестве $\widetilde{U}$.

Покажем, что функции g и f совпадают на множестве $\widetilde{V}$. Пусть это не так, т. е. найдется такая точка $y\in\widetilde{V}$, что $g(y)\neq f(y)$. Положим $\delta=|g(y)-f(y)|>0$. Выберем окрестность $W(y)$ точки y такую, что

$$W(y)\subseteq\widetilde{V} \text{ и } |g(z)-g(y)|<\frac{\delta}{4} \text{ для всех } z\in W(y), \tag{5}$$

$$|f(z)-f(y)|<\frac{\delta}{4} \text{ для всех } z\in W(y).$$

В силу (2) найдется номер m_0 такой, что для всех номеров $m>m_0$ и всех точек $z\in W(y)$ выполнено условие

$$|f(z)-g_m(z)|=|h_m(z)-g_m(z)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2^{m+2}}<\frac{\delta}{4}. \tag{6}$$

Так как λ — π-сеть, то выберем $T\in\lambda$, $T\subseteq W(y)$. Тогда в силу (5) $g\in[T,\,(g(y)-\delta/4,$ $g(y)+\delta/4)]$. Так как g — предельная функция для последовательности $\{g_n,\,n\in\mathbb{N}\}$, найдется такой номер $l>m_0$, что $g_l\in[T,\,(g(y)-\delta/4,g(y)+\delta/4)]$, т. е. $g_l(z)\in(g(y)-\delta/4,g(y)+\delta/4)$ для всех $z\in T$. Учитывая (5)–(6), получаем, что для любой точки $z\in T$ имеет место условие

$$\delta=|f(y)-g(y)|=|(f(z)-g_l(z))+(f(y)-f(z))+(g_l(z)-g(y))|\leqslant\frac{3\delta}{4}.$$

Противоречие. Таким образом, функции g и f совпадают на множестве $\widetilde{V}$.

Но тогда функции f и g совпадают на множестве $\overline{\widetilde{V}}$, а функции $f+\varepsilon_0/4$ и g — на множестве $\overline{\widetilde{U}}$, следовательно, $f(x)=g(x)=f(x)+\varepsilon_0/4$. Приходим к противоречию. □

Обозначим для любого подмножества $A\subseteq C(X)$ через $A|_Y$ множество, состоящее из функций $f|_Y$, где $Y\subseteq X$ и $f\in A$.

Лемма 3. *Пусть X — нульмерное пространство и ν — π-сеть, состоящая из конечных подмножеств P-точек пространства X. Тогда для всякого подмножества $A\subseteq C(X)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$A|_{X(P)}$ счетно компактно в $C_p(X(P)|X)$;*

(2) *A счетно компактно в $C_\nu(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Заметим, что $X(P)$ — всюду плотное подмножество пространства X. Отсюда следует, что тождественное отображение $id : C_p(X(P)|X) \to C_\nu(X)$ является уплотнением и множество $A = id(A|_{X(P)})$ счетно компактно в $C_\nu(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ содержится в A, и $\varphi \in A$ — предельная функция для этой последовательности в пространстве $C_\nu(X)$. Покажем, что $\varphi|_{X(P)}$ будет предельной функцией для последовательности $\{\varphi_n|_{X(P)}\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $C_p(X(P)|X)$. Пусть точка $x \in X(P)$ взята произвольно. Тогда G_δ-множество $\Phi(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \big(\cap\{\varphi_n^{-1}(\varphi_n(x)) : n \in \mathbb{N}\}\big)$ содержит точку x и, так как точка x является P-точкой, то найдется открыто-замкнутая окрестность $W(x) \subseteq \Phi(x)$ точки x. Заметим, что на множестве $W(x)$ все функции φ_n, $n \in \mathbb{N}$, так же, как и функция φ, являются константами. Пусть $O(x_1, \ldots, x_k, V_1, \ldots, V_k)$ — базисная окрестность точки $\varphi|_{X(P)}$ в пространстве $C_p(X(P)|X)$, где $x_i \in X(P)$ для $i \in \overline{1,k}$. Как и выше, выберем открыто-замкнутые окрестности W_i точек x_i ($i \in \overline{1,k}$), которые попарно не пересекаются и на которых функции φ и φ_n для $n \in \mathbb{N}$ являются константами. Так как ν — π-сеть, то найдутся множества $T_i \in \nu$ такие, что $T_i \subseteq W_i$, $i \in \overline{1,k}$. Тогда множество $\bigcap_{i=1}^k [T_i, V_i]$ является окрестностью функции φ в $C_\nu(X)$ и, следовательно, содержит бесконечно много элементов последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. Но так как $\varphi(x_i) = \varphi(T_i)$ при всех $i \in \overline{1,k}$ и $\varphi_n(x_i) = \varphi_n(T_i)$ при всех $i \in \overline{1,k}$ и всех $n \in \mathbb{N}$, то окрестность $O(x_1, \ldots, x_k, V_1, \ldots, V_k)$ также содержит бесконечно много элементов последовательности $\{\varphi_n|_{X(P)}\}_{n=1}^\infty$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $C_\lambda(X) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, где A_n счетно компактно для любого $n \in \mathbb{N}$. По лемме 1 пространство X псевдокомпактно, а по лемме 2, пространство X нульмерно. Тогда множество $C(X)$, наделенное чебышёвской нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$, является банаховым пространством. Отсюда следует, что найдутся номер $n_0 \in \mathbb{N}$, функция $f \in A_{n_0}$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что множество $B(f, \varepsilon_0) \cap A_{n_0}$ плотно в $B(f, \varepsilon_0)$ в топологии равномерной сходимости. Далее будем считать, что такие n_0, f и ε_0 зафиксированы.

Пусть $\lambda' = \{T \in \lambda : T \text{ конечно}\}$, $\lambda'' = \{T \in \lambda : T \text{ бесконечно}\}$. Покажем, что семейство λ' является π-сетью пространства X.

Предположим противное. Тогда найдется непустое открытое множество $W \subseteq X$ такое, что семейство λ'' образует π-сеть подпространства W. В силу леммы 2 пространство X базисно несвязное, таким образом, множество W можно полагать открыто-замкнутым. Пусть точка $x \in W$ произвольна. Выберем окрестность $O(x) \subseteq W$ точки x такую, что $f(O(x)) \subseteq (f(x) - \varepsilon_0/4,\, f(x) + \varepsilon_0/4)$. Так как семейство λ'' является π-сетью пространства W, найдется $T \in \lambda''$, $T \subseteq O(x)$. Выберем последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ открыто-замкнутых в X непустых подмножеств множества $O(x)$ таких, что $T \cap V_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $V_m \cap V_k = \varnothing$ для всех $k, m \in \mathbb{N}$, $k \neq m$. Положим $g_n = f + \varepsilon_0 \cdot \chi_{V_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. (Здесь χ_{V_n} — характеристическая функция множества V_n). Тогда $g_n \in B(f, \varepsilon_0)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем функции $h_n \in A_{n_0} \cap B(f, \varepsilon_0)$ такие, что$\|g_n - h_n\| \leqslant \varepsilon_0/2^{n+2}$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть h — предельная функция для последовательности $\{h_n\}_{n=1}^\infty$. Заметим, что на множестве V_k, $k \in \mathbb{N}$, все функции g_n при $n \neq k$ равны функции f. Как и при доказательстве базисной несвязности в лемме 2, легко доказывается, что $h|_{V_k} = f|_{V_k}$ для всякого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда и $h|_{cl(\bigcup_{k=1}^\infty V_k)} = f|_{cl(\bigcup_{k=1}^\infty V_k)}$. Так как на множестве $X \setminus \overline{\bigcup_{k=1}^\infty V_k}$ все функции g_k равны f, то аналогично доказывается, что $h|_{X \setminus cl(\bigcup_{k=1}^\infty V_k)} = f|_{X \setminus cl(\bigcup_{k=1}^\infty V_k)}$. Таким образом, $h = f$.

Заметим, что $f \in [T, (f(x) - \varepsilon_0/4,\, f(x) + \varepsilon_0/4)]$ в силу выбора $O(x)$. Для завершения доказательства покажем, что $h_n \notin [T, (f(x) - \varepsilon_0/4,\, f(x) + \varepsilon_0/4)]$ для всех $n \in \mathbb{N}$ — это будет противоречить тому, что $h = f$ является предельной функцией последовательности $\{h_n\}_{n=1}^\infty$. Действительно, пусть число $n \in \mathbb{N}$ фиксировано. Выберем точку $y \in T \cap V_n$. Тогда $g_n(y) = f(y) + \varepsilon_0$. Кроме того, $|g_n(y) - h_n(y)| \leqslant \varepsilon_0/2^{n+2} \leqslant \varepsilon_0/8$. Так как $y \in T$, то $|f(y) - f(x)| < \varepsilon_0/4$. Следовательно,

$$|f(x) - h_n(y)| = \big|\big((f(x) - f(y)\big) + \big((f(y) - g_n(y)\big) + \big((g_n(y) - h_n(y)\big)\big|$$

$$= \big|\big((f(x) - f(y)\big) + \varepsilon_0 + \big((g_n(y) - h_n(y)\big)\big| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{8} > \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Итак, мы доказали, что $h_n \notin [T, (f(x) - \varepsilon_0/4, f(x) + \varepsilon_0/4)]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Этим доказано утверждение, что семейство λ' является π-сетью пространства X.

Так как λ' является π-сетью пространства X, то пространство $C_{\lambda'}(X)$ хаусдорофово [4], а так как тождественное отображение $id : C_\lambda(X) \to C_{\lambda'}(X)$ непрерывно, то пространство $C_{\lambda'}(X)$ также является σ-счетно компактным. Кроме того, поскольку все элементы семейства λ' конечны, то топология равномерной сходимости на $C(X)$ мажорирует топологию пространства $C_{\lambda'}(X)$.

Покажем, что множество $B(f, \varepsilon_0)$ — это счетно-компактное подмножество пространства $C_{\lambda'}(X)$ (напомним, что элементы f и ε_0 у нас зафиксированы).

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subseteq B(f, \varepsilon_0)$. В силу выбора f и ε_0 можно выбрать последовательность функций $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subseteq B(f, \varepsilon_0) \cap A_{n_0}$ такую, что для всех натуральных чисел n верно, что $\|\varphi_n - g_n\| < 1/n$. Тогда найдется функция $g \in B(f, \varepsilon_0) \cap A_{n_0}$, являющаяся предельной для последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$. Рассмотрим базисную окрестность $O(g)$ точки g вида $O(g) = \bigcap_{i=1}^m [T_i, V_i]$, где $T_i \in \lambda'$ и V_i — открытое подмножество $\mathbb{R}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$. Выберем число $\delta > 0$ и натуральное число k такие, что $O_\delta(g(T_i)) \subseteq V_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ и $1/k < \delta$. Тогда окрестность $O(g)$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{g_n\}_{n=k}^\infty$, и так как $\|\varphi_n - g_n\| < 1/n$ для $n \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_n(T_i) \subseteq O_\delta(g(T_i))$ для $i = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно, если $g_l \in O(g)$, то и $\varphi_l \in O(g)$ при $l \geqslant k$. Таким образом, множество $B(f, \varepsilon_0)$ счетно компактно в пространстве $C_{\lambda'}(X)$.

Покажем, что всякая точка $x \in \cup\{T : T \in \lambda'\}$ является P-точкой пространства X.

Предположим противное. Тогда найдется такой элемент $T \in \lambda'$, что $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и (для определенности) точка x_1 не является P-точкой пространства X. Так как пространство X нульмерно, то найдется убывающая последовательность $\{W_n(x_1)\}_{n=1}^\infty$ открыто-замкнутых окрестностей точки x_1 такая, что $x_1 \notin Int\,(\cap\{W_n(x_1) : n \in \mathbb{N}\})$ и $x_i \notin W_1(x_1)$ при всех $i = 2, 3, \ldots, n$. Выберем число α $(0 < \alpha < \varepsilon_0)$ такое, что $\alpha \neq f(x_i) - f(x_1)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n \in B(f, \varepsilon_0)$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} f(y), & y \notin W_n(x_1) \\ f(y) + \alpha, & y \in W_n(x_1) \end{cases}.$$

Так как множество $B(f, \varepsilon_0)$ счетно компактно в пространстве $C_{\lambda'}(X)$, то найдется функция $\varphi \in B(f, \varepsilon_0)$, являющаяся предельной точкой последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. Положим $F = \cap\{W_n(x_1) : n \in \mathbb{N}\}$. В силу убывания последовательности $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ для каждой точки $z \notin F$ и для всех номеров n, кроме конечного их числа, выполнено равенство $\varphi_n(z) = f(z)$, поэтому $\varphi(z) = f(z)$ при $z \notin F$. Так как φ — непрерывная функция, а $x_1 \notin Int(F)$, то и $\varphi(x_1) = f(x_1)$. Заметим, что $f(x_1) + \alpha \neq f(x_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ по выбору α. Выберем открытое множество $V \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $f(x_i) \in V$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, а $f(x_1) + \alpha \notin V$. Тогда окрестность $O(\varphi) = [T, V]$ функции φ не содержит ни одной функции φ_n, так как $\varphi_n(x_1) = f(x_1) + \alpha \notin V$. Противоречие.

Напомним, что $X(P) = \{x \in X : x - P\text{-точка в } X\}$. Таким образом, доказано включение

$$\bigcup\{T : T \in \lambda'\} \subseteq X(P),$$

и так как λ' — π-сеть пространства X, то множество $X(P)$ плотно в X.

Докажем, что $\lambda = \lambda'$. Пусть, от противного, существует бесконечное множество $T \in \lambda$. Положим $\tilde{\lambda} = \lambda' \cup \{T\}$.

Так как пространство X псевдокомпактно, то множество $f(T)$ ограничено в $\mathbb{R}$. Рассмотрим множество $M = \{y \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0$ множество $f^{-1}(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap T$ бесконечно$\}$. В силу бесконечности множества T и ограниченности множества $f(T)$ множество M не пусто, замкнуто и ограничено. Пусть $a = \sup M = \max M$. Заметим, что для любого $\delta > 0$ множество $[a + \delta, \infty) \cap f(T)$ является конечным. Действительно, если оно бесконечно, то в силу ограниченности множества $f(T)$ найдется предельная точка z для множества $[a + \delta, \infty) \cap f(T)$, которая должна принадлежать M, что невозможно.

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $(a, a+4\delta) \cap f(T) = \varnothing$ и $4\delta \leq \varepsilon_0$. В силу того что $a \in M$ и $f^{-1}(a, a+\delta) \cap T = \varnothing$, множество $f^{-1}(a-\delta, a] \cap T$ бесконечно. Так как пространство X нульмерно, то найдется дизъюнктная последовательность $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых множеств таких, что $W_n \cap T \neq \varnothing$ и $f(W_n) \subseteq (a-\delta, a]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n \in C(X)$ такую, что

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin W_n \\ a + 2\delta, & x \in W_n \end{cases}.$$

Заметим, что $\varphi_n \in B(f, \varepsilon_0)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Выберем функции $g_n \in A_{n_0} \cap B(f, \varepsilon_0)$ так, чтобы $\|\varphi_n - g_n\| < \delta/(2^{n+2})$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть g — предельная функция для последовательности $\{g_n\}$. Покажем, что $g = f$.

Предположим противное. Пусть $x \in W_{n^*}$ и $\alpha = |f(x) - g(x)| > 0$. Выберем для точки x окрестность $O(x)$ так, чтобы

$$|g(y) - g(x)| < \frac{\alpha}{3} \text{ и } |f(y) - f(x)| < \frac{\alpha}{3} \text{ для любого } y \in O(x), \tag{7}$$

$$O(x) \subseteq W_{n^*}(x).$$

Так как λ' — π-сеть пространства X, то можно выбрать множество $L \in \lambda'$ такое, что $L \subseteq O(x)$. В силу (7) множество

$$g(L) \subseteq \Big(g(x) - \frac{\alpha}{3}, g(x) + \frac{\alpha}{3}\Big)$$

и множество

$$f(L) \subset \Big(f(x) - \frac{\alpha}{3}, f(x) + \frac{\alpha}{3}\Big),$$

следовательно, $f(L) \cap g(L) = \varnothing$. Пусть

$$\tau = \inf\Big\{|d - r| : d \in f(L), r \in \Big(-\infty, f(x) - \frac{\alpha}{3}\Big) \cup \Big(f(x) + \frac{\alpha}{3}, +\infty\Big)\Big\}.$$

Так как L — конечное множество, то $\tau > 0$.

Выберем число $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k > n^*, \quad \frac{\delta}{2^{k+2}} < \tau \text{ и } \frac{\delta}{2^{k+2}} < \frac{\alpha}{3}.$$

Тогда для любого $p \in \mathbb{N}$, $p > k$, множество $g_p(L)$ принадлежит $\Big(f(x) - \frac{\alpha}{3}, f(x) + \frac{\alpha}{3}\Big)$. Действительно, пусть $y \in L$, тогда

$$|g_p(y) - f(x)| \leq |g_p(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| = |g_p(y) - \varphi_p(y)| + |f(y) - f(x)| < \tau + |f(y) - f(x)| \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Таким образом,

$$g \in \Big[L, \Big(g(x) - \frac{\alpha}{3}, g(x) + \frac{\alpha}{3}\Big)\Big],$$

но

$$g_p \notin \Big[L, \Big(g(x) - \frac{\alpha}{3}, g(x) + \frac{\alpha}{3}\Big)\Big]$$

для любого $p > k$. Получаем противоречие с тем, что g — предельная функция для последовательности $\{g_n\}$. Значит, $\alpha = 0$ и $f = g$ на множестве $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i}$.

Пусть $x \in X \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i}$. Тогда $\varphi_n(x) = f(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Аналогично предыдущим рассуждениям, заменяя множество W_{n^*} на множество $X \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i}$, получаем, что $f = g$ на множестве $X \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i}$. Отсюда следует, что $f = g$.

Заметим, что f принадлежит окрестности $[T, \mathbb{R} \setminus [a+\delta, a+3\delta]]$, которая не содержит ни одной из функций g_n, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, для любой точки $x \in W_n \cap T$ имеем

$$|\varphi_n(x) - g_n(x)| = |(a+2\delta) - g_n(x)| < \frac{\delta}{2^{n+2}} < \delta,$$

следовательно,

$$g_n(x) \in (a+\delta, a+3\delta) \quad \text{и} \quad g_n(T) \nsubseteq \mathbb{R} \setminus [a+\delta, a+3\delta].$$

Итак, получили противоречие с предположением, что существует бесконечное множество $T \in \lambda$. Отсюда следует, что $\lambda = \lambda'$.

По лемме 3 пространство $C_p(X(P)|X)$ σ-счетно компактно. Этим доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (3) завершено.

(3) $\Rightarrow$ (2). Так как тождественное отображение $id : C_p(X(P)|X) \to C_\lambda(X)$ является уплотнением, то пространство $C_\lambda(X)$ σ-счетно компактно. При доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (3) было установлено, что множество $B(f, \varepsilon_0)$ является счетно компактным для некоторых $f \in C(X)$ и $\varepsilon_0 > 0$. По лемме 3 множество $B(f, \varepsilon_0)|_{X(P)}$ счетно компактно в пространстве $C_p(X(P)|X)$. По [5, теорема 3.3] пространство $C_p(X(P)|X)$ является топологическим векторным пространством. В силу непрерывности операции сдвига в топологическом векторном пространстве получаем, что множество $B(f_0, 1)|_{X(P)}$ счетно компактно в пространстве $C_p(X(P)|X)$, где f_0 — функция, тождественно равная 0 на множестве X. По лемме 3 множество $B(f_0, 1)$ счетно компактно в пространстве $C_\lambda(X)$. Осталось заметить, что $C(X, I) = B(f_0, 1)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно, так как для псевдокомпактного пространства X выполнено равенство $C(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C(X, [-i; i])$. □

З а м е ч а н и е. Множественно-открытые топологии на пространстве $C(X)$, порожденные различными семействами λ и удовлетворяющие условию теоремы, могут быть различными и даже не сравнимыми. Но среди этих топологий имеется наибольшая (порожденная семейством всех конечных подмножеств множества $X(P)$), которая и влечет σ-счетную компактность всех остальных.

Следствие 1. *Пусть X — такое псевдокомпактное пространство, что множество $X(P)$ всюду плотно и C^*-вложено в X. Тогда для любого семейства λ, которое является π-сетью и состоит из конечных подмножеств множества $X(P)$, пространство $C_\lambda(X)$ σ-счетно-компактно.*

Следствие 2. *Пусть X — экстремально несвязное пространство и λ — π-сеть пространства X. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $C_\lambda(X)$ *σ-счетно компактно*;

(2) $C_\lambda(X, I)$ *счетно компактно и X псевдокомпактно*;

(3) *X псевдокомпактно, множество $X(P)$ плотно в X, семейство λ состоит из конечных подмножеств множества $X(P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В экстремально несвязных пространствах любое всюду плотное множество является C^*-вложенным в X. Тогда по теореме и следствию 1 получаем эквивалентность всех трех утверждений. □

На основе теоремы можно несколько упростить доказательство теоремы С.Э. Нохрина о σ-компактности пространства $C_\lambda(X)$. А именно, получаем

Следствие 3 [4]. *Пространство $C_\lambda(X)$ σ-компактно тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно, содержит плотное C^*-вложенное множество D изолированных точек, а семейство λ совпадает с семейством всех конечных подмножеств множества D.*

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из того, что пространство $C_\lambda(X)$ гомеоморфно пространству $C_p^*(D)$. Но пространство $C_p^*(D)$ равно $\bigcup_{i=1}^{\infty}[D, [-i, i]]$, причем каждое множество $[D, [-i, i]]$ есть произведение отрезков, т. е. компакт, поэтому $C_\lambda(X)$ σ-компактно.

Докажем необходимость. Пусть пространство $C_\lambda(X)$ σ-компактно. В силу теоремы X псевдокомпактно и пространство $C_\lambda(X, I)$ счетно компактно. Пространство $C_\lambda(X, I)$ — замкнутое подпространство пространства $C_\lambda(X)$, поэтому оно σ-компактно, а следовательно, финально компактно. Итак, пространство $C_\lambda(X, I)$ счетно компактно и финально компактно, поэтому оно компактно. Положим $D = \bigcup_{T\in\lambda} T$. Покажем, что все точки D изолированы в X. Предположим противное. Пусть точка $x \in D$ предельная. Тогда семейство $\tilde{\lambda} = \{T : T \in \lambda, x \notin T\}$ — π-сеть пространства X, и так как $C_\lambda(X, I)$ компактно, то $id : C_\lambda(X, I) \to C_{\tilde{\lambda}}(X, I)$ — гомеоморфизм. Пусть

$$T \in \lambda, \quad x \in T, \quad f_{\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{2}, \quad \left[T, \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)\right] \ni f_{\frac{1}{2}}.$$

Тогда найдутся элементы $T_i \in \tilde{\lambda}$ и открытые множества $V_i \subseteq \mathbb{R}$ для $i = \overline{1, n}$ такие, что $f_{\frac{1}{2}} \in \bigcap_{i=1}^{n}[T_i, V_i] \subset [T, (1/4; 3/4)]$. Так как пространство X нульмерно и все элементы семейства $\tilde{\lambda}$ конечны, то можно выбрать открыто-замкнутую окрестность $O(x)$ точки x так, что $O(x) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} T_i) = \varnothing$. Рассмотрим функцию $f_1 \in C(X, I)$, совпадающую с функцией $f_{\frac{1}{2}}$ на множестве $X \setminus O(x)$ и тождественно равную $3/4$ на множестве $O(x)$. Тогда $f_1 \in \bigcap_{i=1}^{n}[T_i, V_i]$, но $f_1 \notin [T, (1/4; 3/4)]$ — противоречие. Итак, все точки $x \in D$ изолированы. Так как λ — π-сеть пространства X, то все множества $\{x\}$, где $x \in D$, являются элементами семейства λ. Множество $\pi_D\,(C_\lambda(X, I)) \subseteq C_p(D, I)$ компактно и плотно в I^D, где π_D — проекция, следовательно, совпадает с I^D. Это и означает C^*-вложенность множества D в пространство X. □

Следствие 4. *Пусть X — сепарабельное пространство, имеющее счетный псевдохарактер. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) $C_\lambda(X)$ *σ-счетно компактно*;

(2) $C_\lambda(X)$ *σ-компактно.*

Доказательство. Пусть пространство $C_\lambda(X)$ σ-счетно компактно. Так как любая P-точка пространства X будет изолированной, то множество $X(P)$ всех P-точек пространства X принадлежит любому всюду плотному подмножеству пространства X. В силу сепарабельности множество $X(P)$ не более чем счетно. Так как пространство X базисно несвязно, то счетное множество $X(P)$ C^*-вложено в пространство X. По следствию 3 получаем, что $C_\lambda(X)$ σ-компактно. □

Из результата С. Э. Нохрина (следствие 3) следует, что если X — компакт, λ — π-сеть и $C_\lambda(X)$ σ-компактно, то пространство X гомеоморфно пространству $\beta(D)$ (стоун-чеховской компактификации дискретного пространства D), а λ состоит из конечных подмножеств D. Приведем примеры, показывающие, что для σ-счетно компактного пространства $C_\lambda(X)$, где X — компакт, это не так.

3. Примеры

Используя результат теоремы, легко построить примеры σ-счетно-компактных пространств $C_\lambda(X)$, которые не являются σ-компактными.

Пример 1. Пусть T — P-пространство без изолированных точек, $X = \beta(T)$ и λ состоит из конечных подмножеств T. Тогда пространство $C_\lambda(X)$ σ-счетно компактно по теореме. Однако X не содержит изолированных точек, поэтому пространство $C_\lambda(X)$ не является σ-компактным по следствию 3.

Пример 2. Пусть D — несчетный дискрет. Положим

$$F = \beta(D) \setminus \bigcup \{\overline{S} : S \subset D \text{ и } S \text{ счетно}\}.$$

Пусть $b(D)$ — фактор-пространство, полученное из $\beta(D)$ отождествлением множества F в одну точку $\{F\}$. Покажем, что $C_\lambda(b(D))$, где семейство λ состоит из всех конечных подмножеств множества D, σ-счетно компактно. Для этого докажем, что подпространство $Y = D \cup \{F\}$ C^*-вложено в $b(D)$. Заметим, что $\{F\}$ — P-точка пространства $b(D)$. Пусть $O(F)$ — произвольная окрестность множества F в $\beta(D)$. Тогда $\beta(D) \setminus O(F) \subseteq \overline{S_0}$, где $S_0 \subset D$ и S_0 счетно. Следовательно, если дана последовательность окрестностей $\{O_n(F)\}_{n\in\omega}$, то $\beta(D) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n(F) \subseteq \overline{S}$, где $S \subset D$ и S счетно. Но так как $\overline{S}$ открыто-замкнуто и $\overline{S} \cap F = \varnothing$, то $\beta(D) \setminus \overline{S} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n(F)$ и, следовательно, $\{F\}$ — P-точка пространства $b(D)$. Покажем, что Y C^*-вложено в $b(D)$. Пусть $f \in C^*(Y)$. Тогда множество $V(F) = f^{-1}f(\{F\})$ есть окрестность точки $\{F\}$. Можно считать, что $V(F) = b(D) \setminus \overline{S}$, где S счетно. Тогда функция f постоянна на $V(F)$, и C^*-вложенность этим доказана. Таким образом, пространство $C_\lambda(b(D))$ σ-счетно компактно в силу следствия 1. Так как $\{F\}$ — не изолированная точка, получаем, что пространство $C_\lambda(b(D))$ не является σ-компактным.

Вопрос 1. Пусть X псевдокомпактно и базисно несвязно, множество $X(P)$ всюду плотно в X. Верно ли, что тогда пространство $C_p\,(X(P)|X)$ будет σ-счетно компактным?

Вопрос 2. Пусть расширение $\gamma(D)$ базисно несвязно (D — несчетный дискрет). Верно ли, что тогда пространство $C_p\,(D|\gamma(D))$ будет σ-счетно компактным? Для каких расширений $\gamma(D)$ это будет так?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Архангельский А.В.** Топологические пространства функций. М.: Мир, 1986. 224 с.
2. **Величко Н.В.** О слабой топологии пространств непрерывных функций // Мат. заметки. 1981. Т. 30, № 5. С. 703–712.
3. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. Princeton: D. Van Nostrand Co., Inc., 1960. 300 p. (The University Series in Higher Mathematics.)
4. **Nokhrin S.E.** Some properties of set-open topologies // J. Math. Sci. 2007. Vol. 144, no. 3. P. 4123–4151.
5. **Osipov A.V.** Topological-algebraic properties of function spaces with set-open topologies // Topology Appl. 2012. Vol. 159, no. 3. P. 800–805.
6. **Tkačuk V.V.** The spaces $C_p(X)$: decomposition into a countable union of bounded subspaces and completeness properties // Topology Appl. 1986. Vol. 22, no. 3. P. 241–253.

Осипов Александр Владимирович
Поступила 13.01.2013
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: OAB@list.ru

Пыткеев Евгений Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: pyt@imm.uran.ru

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУППАХ

Э. М. Пальчик

Получена классификация конечных простых групп, факторизуемых π-разрешимой подгруппой и π-подгруппой, где $2 \notin \pi$.

Ключевые слова: конечная простая группа, π-разрешимая группа, факторизация.

E. M. Pal'chik. On finite factorizable groups.

A classification of finite simple groups factorizable by a π-solvable subgroup and a π-subgroup, where $2 \notin \pi$, is obtained.

Keywords: finite simple group, π-solvable group, factorization.

Введение

Рассматриваются только конечные группы и используются стандартные обозначения, которые можно найти в [1–3].

В работе [4, теорема 1] получен следующий результат.

Пусть π — некоторое множество простых чисел и $2 \notin \pi$. Пусть $G = AB$, где $A = A_\pi \times A_{\pi'}$ и $B = B_\pi$ — собственные подгруппы группы G. Тогда $A_\pi \subseteq O_\pi(G)$.

Целью этой работы является описание конечных простых групп G с факторизацией $G = AB$, где A — π-разрешимая подгруппа в G, $2 \notin \pi$, а B — π-подгруппа в G.

Это будет усилением сформулированного выше результата в классе конечных простых групп.

Для дальнейшего нам удобно определить следующее условие.

У с л о в и е $(*)$. Пусть π — некоторое множество нечетных простых чисел. Пусть $G = AB$ — конечная группа, где A — π-разрешимая неразрешимая подгруппа и B — π-подгруппа в G. Пусть D — холлова π'-подгруппа в A (и, следовательно, в G), C — холлова π-подгруппа в A.

З а м е ч а н и е. Если условие $(*)$ выполнено для группы G лиева типа, то оно выполнено для группы $G/Z(G)$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнено условие $(*)$. Если G — известная простая группа, то $C = 1$ и $G = G_{\pi'} \cdot G_\pi$ с $A = G_{\pi'}$, $B = G_\pi$. В частности, справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $G \cong M_{11}$, $A \cong A_6 \,.\, Z_2$, $B \cong Z_{11}$;

2) $G \cong M_{23}$, $A \in \{E_{16} \leftthreetimes A_7\, ;\, L_3(4) \leftthreetimes Z_2\}$, $B \cong Z_{23} \leftthreetimes Z_{11}$ или $A \cong M_{22}$, $B \cong Z_{23}$;

3) $G \cong A_n$, $n \geq 5$, n — простое число, $A \cong A_{n-1}$, $B \cong Z_n$;

4) $G \cong L_2(11)$, $A \cong A_5$, $B \cong Z_{11}$;

5) $G \cong L_2(29)$, $A \cong A_5$, $B \cong Z_{29} \leftthreetimes Z_7$;

6) $G \cong L_2(59)$, $A \cong A_5$, $B \cong Z_{59} \leftthreetimes Z_{29}$;

7) $G \cong L_5(2)$, $A \cong E_{16} \leftthreetimes L_4(2)$, $B \cong Z_{31}$ или $A \cong E_{64} \leftthreetimes (S_3 \times L_2(7))$, $B \cong Z_{31} \leftthreetimes Z_5$;

8) $G \cong L_n(q)$, n — нечетное простое число, $(n,\, q-1) = 1$, A — параболическая максимальная подгруппа в G, $A \cong P_i$, где $i = 1$ или $n-1$, $B \cong Z_m$, где $m = (q^n-1)/(q-1)$.

Отметим, что теорема анонсирована в [5].

1. Определения, обозначения и предварительные результаты

Некоторые обозначения приводятся для удобства чтения.

π — некоторое подмножество множества всех простых чисел;

π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел;

$\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей целого числа n;

n_π — π-часть натурального числа n, т. е. наибольший делитель m числа n такой, что $\pi(m) \subseteq \pi$;

$\pi(G) = \pi(|G|)$;

G_π — холлова π-подгруппа группы G порядка $|G|_\pi$ (если $p \in \pi$, то G_p — силовская p-подгруппа);

$Chev\,(p)$ — множество групп лиева типа над полем характеристики p, $Chev = \cup_p Chev(p)$;

$\widehat{G}$ — универсальная накрывающая группа для неабелевой простой группы $G \cong \widehat{G}/Z(\widehat{G})$;

$(a,\ b)$ — наибольший общий делитель целых чисел a и b;

$M < \cdot\, G$ — подгруппа M максимальна в группе G;

P_i — параболическая подгруппа группы лиева типа, полученная отбрасыванием i-й вершины в стандартной диаграмме Дынкина этой группы;

максимальная факторизация группы G по [3] — факторизация вида $G = AB$, где $A < \cdot\, G$ и $B < \cdot\, G$;

p-сигнализатор группы — любая ее неединичная p'-подгруппа, которую нормализует некоторая силовская p-подгруппа этой группы.

Лемма 1. *Пусть $G = AB$, где A есть π-разрешимая подгруппа конечной группы G, холлова π'-подгруппа D $(= A_{\pi'})$ в A является холловой π'-подгруппой в G, а B — подгруппа, имеющая холлову π'-подгруппу. Тогда $A \cap B$ и B имеют холлову π'-подгруппу, лежащую в D.*

Доказательство. Как известно, $|G| = (|A|\,|B|)/(|A \cap B|)$. Поэтому порядки холловых π'-подгрупп из B и $A \cap B$ совпадают. Ясно, что $A \cap B$ есть π-разрешимая группа. По [6, теорема 1.8.2] в $A \cap B$ есть холлова π'-подгруппа T. Тогда T есть холлова π'-подгруппа и в B. По этой же теореме одна из сопряженных с T подгрупп лежит в D. Лемма доказана.

Лемма 2 [7, лемма 1.3.3]. *Пусть q — целое нечетное число и n — натуральное число. Тогда*

(1) $(q^n + 1)_2 \le (q+1)_2$,

(2) $(q^n - 1)_2 = (q-1)_2\, t$, *где* $t = \begin{cases} (q+1)_2\,(n/2)_2, & \text{если } n = 2k; \\ 1, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$

Лемма 3 [1, лемма I.2.12]. *Пусть G — группа, A, B, L — подгруппы в G, $G = AB$ и $A \subseteq L$. Тогда $L = A(L \cap B)$.*

Лемма 4. *Пусть $G = PSp_{2m}(q)$, $m \ge 2$, $q = p^f$, $p > 2$. Тогда G не имеет факторизации вида $G = MN$, где подгруппа M или N содержит силовскую 2-подгруппу из G.*

Доказательство. Предположим, что $G = MN$ и, например, M содержит некоторую силовскую 2-подгруппу S из G. Тогда существует факторизация G ее максимальными подгруппами A и B такими, что $M \subseteq A$, $N \subseteq B$. Все такие факторизации указаны в [3, табл. 1]. Среди них с точностью до перестановки A и B с нечетным q имеется одна $A \cong PSp_{2a}(q^b)\,.\,Z_b$, где $a \cdot b = m$, b — простое число, $B = P_1$. Подгруппа M не содержится в P_1, так как ввиду [8, теорема 4(в)] 2-сигнализаторы в G являются p'-группами. Поэтому $M \subseteq A \cong PSp_{2a}(q^b)\,.\,Z_b$. По [9, лемма 4.3.2] имеем

$$|S| = 1/2((q^2-1)^m m!\,)_2 = 1/2(q^2-1)_2^{m/2}(q^2-1)_2^{m/2}(m!)_2 = 1/2(q-1)_2^m(q+1)_2^m(m!)_2, \qquad (1)$$

$$|A_2| = 1/2((q^{2b}-1)^{m/b}(m/b)!\,)_2 b_2. \qquad (2)$$

Если $b=2$, то по лемме 2 равенство (2) принимает вид

$$|A_2| = 1/2((q^4-1)^{m/2}(m/2)!\,)_2\; 2 = ((q^2-1)^{m/2}(q^2+1)^{m/2}(m/2)!)_2,$$

причем $(q^2+1)_2 \le (q+1)_2$, а $(q^2-1)_2 = (q-1)_2\;(q+1)_2$. Поэтому $(q^2+1)_2 \le (q^2-1)_2$ и сравнение с (1) дает нам, что $|A_2| < |S|$; противоречие.

Если $b>2$, то по лемме 2

$$|A_2| = 1/2\;(q^b-1)_2^{m/b}(q^b+1)_2^{m/b}(m/b)!\,_2 \le 1/2\;(q-1)_2^{m/b}(q+1)_2^{m/b}(m/b)!\,_2.$$

Опять сравнение с (1) дает $|A_2| < |S|$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5 [2, предложение 2.17; 10, предложения 2.2, 2.3; 11, теорема 2.6.5].
Пусть $G \in Chev(p)$. Тогда

(1) *если $G_p \subseteq K < G$, то существует параболическая максимальная подгруппа P в G такая, что $K \subseteq P$ и $O_p(P) \subseteq O_p(K)$;*

(2) *если m — лиев ранг группы G, то существует точно m классов сопряженных параболических максимальных подгрупп P_i, $1 \le i \le m$, таких, что $P_i = N_G(G_p)\;L_i$, где L_i — центральное произведение групп из множества $Chev\,(p)$, каждая подгруппа P_i находится по стандартной диаграмме Дынкина группы G отбрасыванием вершины i.*

Пусть P — произвольная параболическая подгруппа в G и $Q = O_p(P)$. Тогда

(3) *$P = Q \leftthreetimes HL$, где H — подгруппа Картана группы G ($N_G(G_p) = G_p \leftthreetimes H$), $N_G\,(Q) = P = N_G\,(P)$ и $H \subseteq N_G\,(L)$;*

(4) *L есть центральное произведение подгрупп $L^{(1)},\dots,L^{(r)}$ из $Chev\,(p)$, каждую из которых H нормализует, и H индуцирует на $L^{(j)}$ группу диагональных автоморфизмов для $1 \le j \le r$.*

Лемма 6. *Пусть $G = AB$, где A, B, G — конечные группы. Пусть $1 \ne N \lhd G$, G/N — разрешимая группа, $\overline{A} = AN/N$, $\overline{B} = BN/N$. Если $(|\overline{A}|, |\overline{B}|) = 1$, то $N = (N \cap A)(N \cap B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В G/N имеется нормальная подгруппа M/N простого индекса p. Тогда $G/M \cong Z_p$. По условию p не делит$|\,\overline{A}|$ или p не делит $|\overline{B}|$. Пусть для определенности p не делит $|\overline{A}|$. Тогда $A \subseteq M$ и по лемме 3 $M = A(M \cap B)$. Группа M удовлетворяет условию леммы. Применение индукции к M дает нам, что $N = (N \cap A)(N \cap (M \cap B)) = (N \cap A)(N \cap B)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть выполняется условие $(*)$. Если $G = PSL_n(q)$, $q = p^f$ и $p \in \pi'$, то $C = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию D есть холлова π'-подгруппа в G. По лемме 5(1) A содержится в параболической максимальной подгруппе P из G. Из $G = AB$ следует, что в G имеются максимальные подгруппы M и N такие, что $A \subseteq M$, $B \subseteq N$, $G = MN$. По лемме 5(1) $P = M$. По [3] $P = P_i$, $i = 1$ или $n-1$. По [12, теорема 3.3] D есть параболическая подгруппа в G. Тогда D содержит подгруппу Картана H группы G. Поэтому $\pi(q-1) \subseteq \pi'$ при $n > 2$, и $\pi((q-1)/(2, q-1)) \subseteq \pi'$ при $n = 2$. В любом случае $\pi(q-1) \subseteq \pi'$. Так как $\pi' \cap \pi = \oslash$, то $(|B|,\, q-1) = 1$. Если $C \ne 1$, то $A \subset P$, так как P — не π-разрешимая группа. По лемме 3 $P = A(P \cap B)$. Пусть $P \cap B = B_0$. Из леммы 5(3) следует, что $\overline{P} = P/Q = \overline{HL}$, где $Q = O_p\,(P)$, $\overline{L} \cong SL_{n-1}\,(q)$ ввиду $i = 1$ или $n-1$. В частности, $|\overline{P} : \overline{L}| = (q-1)/(n,\, q-1)$. Так как по [12, теорема 1.2] $(n,\, q-1) = 1$, то $|\overline{P} : \overline{L}|\; = q-1$. Так как $(|B_0|,\, q-1) = 1$, то $B_0 \subset LQ$, $L \cong \overline{L}$ (по лемме 5(3)). По лемме 3 $LQ = B_0\,(LQ \cap A)$, так как $P = B_0A$. Пусть $Z(L) = Z$ и $\widetilde{L} := LQ/ZQ \cong PSL_{n-1}(q)$. Тогда $\widetilde{L} = \widetilde{B}_0(\widetilde{LQ \cap A})$. Так как $LQ \lhd P$, то для $D^* := (LQ \cap A)_{\pi'}$ имеем $|D : D^*| = (q-1)$. Поэтому $\widetilde{L}$ удовлетворяет условию леммы, так как $\widetilde{D}^*$ — неразрешимая холлова π'-подгруппа в $\widetilde{L}$ и $p \in \pi'$. Так как $n-1 < n$, то к $\widetilde{L}$ можно применить предположение индукции и получить, что $(\widetilde{LQ \cap A})_\pi = 1$. Тогда и $A_\pi = C = 1$, так как $|Z|$ делит $(n-1,\, q-1)$, $p \in \pi'$, $\pi \cap \pi(q-1) = \oslash$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть выполняется условие* $(*)$. *Если* $G = PSL_n(q)$, $q = p^f$, $2 < p \notin \pi'$, *то* $C = 1$, $n = 2$, $q \in \{11,\ 29,\ 59\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся индукцией по числу n. Если $n = 2$, то по [7, лемма 1.5.5] условию $(*)$ удовлетворяет лишь случай с $\pi' = \{2,\ 3,\ 5\}$, $D \cong A_5$. Условию факторизации удовлетворяют лишь группы с $q \in \{11,\ 29,\ 59\}$ [3, табл. 3]. У этих групп A_5 есть максимальная подгруппа, поэтому $D \cong A_5$, $C = 1$, $D = A_{\pi'} = A$.

Предположим, что $n > 3$. Пусть утверждение верно для всех $k < n$. Из условия следует, что существуют максимальные подгруппы M и N такие, что $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ и $G = MN$. По [3, табл. 1] могут иметь место только следующие возможности:

1) $M \cong {}^{\wedge}GL_a(q^b)\,.\,Z_b$, где $n = a \cdot b$ и b — простое число;

2) $M \cong P_i$, где $i = 1$ или $n - 1$;

3) $M \cong PSp_n(q)$, $n \geq 4$;

4) $M \cong Stab\,(V_1 \oplus V_{n-1}\,)$.

В случае 1) $G_2 = A_2 \subseteq A \subseteq M$, что невозможно.

Пусть имеет место случай 2). Как и в доказательстве леммы 7, пусть $P \in \{P_1,\, P_{n-1}\}$, $Q = O_p\,(P)$, $\overline{P} = P/Q$, $\overline{P} = \overline{HL}$, H — подгруппа Картана в G, $\overline{L} \cong SL_{n-1}\,(q)$, $LQ \trianglelefteq P$, $A \subset P$ (ввиду $C \neq 1$), $P = A(P \cap B) = AB_0$, где $B_0 = P \cap B$. Пусть $Z = Z(\overline{L})$ и $\widetilde{P} := \overline{P}/\overline{Z}$. Тогда $\widetilde{L} = \overline{L}/\overline{Z} \cong PSL_{n-1}\,(q)$.

Имеем $|G : P| = (q^n - 1)/(q - 1)$. Если n четно, то индекс $|G : P|$ четен и, следовательно, равенство $G_2 = A_2$ не выполняется. Поэтому n — нечетное число. Тогда из $|P : LQ| = (q-1)/(n,\ q-1)$ следует, что 2 делит $|P/LQ|$. Так как $P = AB_0$ и 2 не делит $|B_0|$, то в абелевой группе $P^* := P/LQ$ есть подгруппа $P_0^* := B_0^* \times A_2^*$. (Если $B_0^* = 1^*$, то $\overline{L} = \overline{B}_0(\overline{L} \cap \overline{A}_0)$ по лемме 3). Пусть P_0 — прообраз P_0^*, а A_0 — прообраз A_2^* в группе P. Группы $\overline{P}_0$ и $\overline{A}_0$ содержат $\overline{L}$ и $\overline{P}_0/\overline{L} \cong P_0^*$. По лемме 6 $\overline{L} = (\overline{L} \cap \overline{B}_0)(\overline{L} \cap \overline{A}_0)$, так как $P_0 = B_0A_0$. Итак, $\widetilde{L} = \overline{L}/\overline{Z} \cong PSL_{n-1}\,(q)$ по замечанию удовлетворяет условию $(*)$ с $p \notin \pi'$. Применение индукции дает нам $\widetilde{L}_\pi = \widetilde{1}$ и $n - 1 = 2$. Тогда $n = 3$. По [13] группа $G = PSL_3\,(q)$ при 3 не делит $(q - 1)$ и $q > 3$ имеет факторизации только двух видов: $G = AB$, $|A| = (q+1)q^3(q-1)^2$, $|B| = 3(q^2 + q + 1)$ или $|B| = (q^2 + q + 1)$. В любом случае $p \in \pi'$, что противоречит условию леммы.

Если $q = 2$ или 3, то G не удовлетворяет условию $(*)$. При $3|(q-1)$ $G = PSL_3(q)$ не имеет факторизаций согласно [13].

Пусть имеем случай 3): $A \subseteq M \cong PSp_n(q)$, $n \geq 4$.

Если $A_\pi \neq 1$, то $A \subset M$. По лемме 3 $M = A(M \cap B)$. Так как $G_2 \subseteq A$, то имеем противоречие с леммой 4. Этим случай 3) исключается из рассмотрения.

Пусть, наконец, имеем случай 4): $A \subseteq M = Stab\,(V_1 \oplus V_{n-1})$. В этом случае ввиду [3] $B \subseteq N = PSp_n(q)$. Из $G = AB = AN$ и $B \subset N$ следует $N = B(N \cap A)$ по лемме 3. Так как $\{2,\ 3\} \subseteq \pi(N)$, то по лемме 1 $N \cap A$ имеет холлову π'-подгруппу, которая является холловой π'-подгруппой и в N. Опять имеем противоречие с леммой 4. Этим случай 4) также исключается. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы разобъем на несколько случаев.

1. G — спорадическая группа.

Неразрешимую холлову подгруппу D имеют лишь группы M_{11}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_4 (см. [14, теорема 4.1]). Но только группы M_{11} и M_{23} удовлетворяют условию $(*)$ (см. [3, табл. 6]). У этих групп $C = 1$. Поэтому выполняется утверждение 1) или 2).

2. $G \in \{A_n\,,\ n \geq 5\}$.

Из [15] и [7, теорема 2.2.3] следует, что только группы с простым числом $n > 5$ удовлетворяют условию теоремы с $D \cong A_{n-1}$. У них $C = 1$. Поэтому выполняется утверждение 3).

3. $G \in Chev\,(p)$, $GF(q)$ — поле определения для G, $q = p^f$.

Рассмотрим отдельно возникающие случаи.

3.1. $p \in \pi'$.

Если $3 \notin \pi'$, то согласно [16, теорема 3.1] $p = 2$ и D содержится в подгруппе Бореля группы G. Это противоречит неразрешимости D. Поэтому $\{2,\ 3,\ p\} \subseteq \pi'$ и D не лежит в подгруппе Бореля из G. Из лемм 5, 6 и [12, теоремы 5.2, 1.2] тогда следует, что либо $\widehat{G} \cong D_l\,(2^t)$, где l — простое число Ферма, либо $\widehat{G} \cong {}^2D_l\,(2^t)$, где $l-1$ — простое число Мерсенна, либо $\widehat{G} \cong SL_n(q)$, где $n \in \{4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11\}$ или n — нечетное простое число и $(n,\, q-1) = 1$.

Из лемм 5, 6 и [12, теоремы 5.2 и 1.2] тогда следует, что либо $\widehat{G} \cong D_l\,(2^t)$, где l — простое число Ферма, либо $\widehat{G} \cong {}^2D_l\,(2^t)$, где $(l-1)$ — простое число Мерсенна, либо $G \cong SL_n(q)/Z$, где $n \in \{4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11\}$ или n — нечетное простое число и $(n,\, q-1) = 1$, и Z — подгруппа из $Z(SL_n\,(q))$.

Более того, в первых двух случаях $D \subseteq P_1$ по [12; 2, с. 76], а по [3, с. 11] G имеет одну P_1-факторизацию $G = P_1(^\wedge GU_l(q)\,.\,Z_2)$ с четным l и $G = P_1(^\wedge GU_l(q))$ с нечетным l соответственно. Это противоречит [12], так как в первом случае l — простое число Ферма, а во втором — l — четное число. Поэтому случаи с $D_l(2^t)$ и ${}^2D_l(2^t)$ исключаются из рассмотрения.

Случай с $\widehat{G} \cong SL_n(q)$ исключается из рассмотрения ввиду леммы 7. Поэтому случай 3.1 невозможен.

3.2. $p \notin \pi'$.

Если $3 \notin \pi'$, то по [7, леммы 2.3.1, 2.3.2] D — разрешимая подгруппа в G, что противоречит условию $(*)$. Поэтому далее можно считать, что

$$\{2,\ 3\} \subseteq \pi' \text{ и } p > 3. \tag{3}$$

Рассмотрим все возможности для G.

3.2.1. $G = PSp_{2m}(q)$, $m \geq 2$. Этот случай исключается по лемме 4.

3.2.2. $G = PSL_n(q)$. Этот случай исключается по лемме 8.

3.2.3. $G = PSU_n(q)$.

Если $n = 2k+1$, то по [3, следствие 2] $G = U_3(5) = A_7 \cdot P_1$. По [8, теорема 4(б)] $A \nsubseteq P_1$, так как 2-сигнализатор в G не может быть 5-группой. Кроме того, $|A_7\,|_2 < |U_3(5)|_2$ и поэтому $A \nsubseteq A_7$. Таким образом, случай $n = 2k+1$ невозможен.

Пусть $n = 2k$. Ввиду $p > 3$ по (3) и [3, табл. 1, 3] максимальные подгруппы M и N с $G = MN$ могут быть только следующие: N_1, P_k, $PSp_{2k}(q) = M$. Но так как $|G : N_1|$ и $|G : P_k|$ делятся на 2 по [3, с. 53], то $G_2 \subseteq A \nsubseteq N_1$, и $A \nsubseteq P_k$. Если же $M < \cdot\, G$ и $C \neq 1$, то $A \subset M$ и по лемме 3 $M = A(M \cap B)$, что невозможно по лемме 4.

Таким образом, группы $PSU_n(q)$ исключаются из рассмотрения.

3.2.4. $G = P\Omega^-_{2m}\,(q)$, $m \geq 4$.

По [3, табл. 1] ввиду (3) максимальные подгруппы M и N с $G = MN$ могут быть только следующие: P_1, N_1, $^\wedge GU_m(q)$. Кроме того, по [3] m — нечетное число. Из $G = AB$ следует, что A должна содержаться в одной из таких групп. По [8, теорема 4(г)] $A \nsubseteq P_1$, так как 2-сигнализатор в G есть p'-группа.

По [3, с. 58] ввиду (3) имеем $|G : N_1| = (1/2)\ q^{m-1}(q^m+1)$. Пусть ε — такое число из множества $\{-1, 1\}$, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. Если $\varepsilon = -1$, то 4 делит $(q+1)$. Поэтому 4 делит (q^m+1) и 2 делит $|G : N_1|$, и, следовательно, $G_2 \subseteq A \nsubseteq N_1$. Если $\varepsilon = 1$, то 4 не делит $(q+1)$ и 2 не делит $|G : N_1|$. Но тогда по [3] $G = N_1{}^\wedge GU_m(q) = N_1 PSU_m(q)$. Пусть $PSU_m(q) \cong M$. Из включения $B \subset M$ и леммы 3 следует, что $M = B(M \cap A)$. Эта ситуация исключена сразу после случая 3.2.3. Если $A \subseteq {}^\wedge GU_m(q) = PSU_m(q) = M$, то $M = A(M \cap B)$ и опять эта ситуация исключается, как и в случае 3.2.3 (или $G_2 \ncong M_2$). В остальных случаях $D = G_{\pi'}$ — разрешимая группа [17].

Других факторизаций группа G с нечетным q не имеет по [3].

Этим случай 3.2.4 исключается из рассмотрения.

3.2.5. $G = P\Omega^+_{2m}(q)$, $m \geq 4$.

Пусть сначала $m > 4$. По [3, табл. 1] максимальные подгруппы M и N такие, что $G = MN$ для G могут быть (ввиду $p > 3$ по (3)) только следующие: N_1, N_2^-, P_1, P_m, P_{m-1}, ${}^\wedge GU_m(q) \,.\, Z_2$, $PSp_2(q) \times PSp_m(q)$.

Так как 2 делит $|G : N_1|$ (см. [3, 3.6.1, с. 62]), и 2 делит $|G : N_2^-|$ (см. [3, 3.6.2, с. 67]), то $G_2 \subseteq A \nsubseteq N_1$, N_2^-. Кроме того, по [8, теорема 4(г)] 2-сигнализаторы в G не содержат p-подгрупп и поэтому $G_2 \subseteq A \nsubseteq P_i$, где $i = 1,\ m,\ m-1$. В оставшихся случаях $A \nsubseteq M$ ввиду того, что $G_2 = A_2 \ncong M_2$.

Пусть $m = 4$. В этом случае $D = G_{\pi'} \cong \Omega_8^+(q)$ [17, теорема 8.14(7)]. По [3, табл. 4] и [8, теорема 4(г)] этот случай невозможен. Этим случай 3.2.5 исключается.

3.2.6. $G = P\Omega_{2m+1}(q)$, $m \geq 3$.

По [3, табл. 1] максимальные подгруппы M и N такие, что $G = MN$ для G могут быть только следующие (ввиду $p > 3$ по (3)): N_1^- или P_m. Но по [8, теорема 4(в)] 2-сигнализаторы группы G являются p'-группами. Поэтому $G_2 \subseteq A \nsubseteq P_m$. Из равенств $G = N_1^- P_m$ и $|G : P_m| = (q+1)(q^2+1) \cdot \ldots \cdot (q^m+1)$ [3, с. 58] следует, что $|P_m| = q^{m^2}(q-1)(q^2-1) \cdot \ldots \cdot (q^m-1)$. Рассмотрим порядок $|P_m N_1^-| = (|P_m|\,|N_1^-|)/(|P_m \cap N_1^-|) = |G|$. Отсюда следует, что $|P_m \cap N_1^-| = q^{n^2-m}(q-1)(q^2-1) \cdot \ldots \cdot (q^{m-1}-1)$. По лемме 3 (если $A \subseteq N_1^-$) $P_m = B(P_m \cap N_1^-)$. Но тогда $|B|$ делится на $|P_m : (P_m \cap N_1^-)| = q^m(q^m-1)$. Так как 2 делит (q^m-1), то 2 делит $|B|$, что противоречит условию $(*)$, по которому $2 \notin \pi$ и B — π-группа. Этим случай 3.2.6 также исключается из рассмотрения.

3.2.7. G — простая группа исключительного лиева типа.

По [3, теорема B] эти группы не удовлетворяют условию $(*)$ ввиду условия $p > 3$ по (3).

Из равенства $C = 1$ и [18] следует, что выполняется одно из утверждений 4)–8).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967. 793 S.
2. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1982. 352 с.
3. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups. Providence: Amer. Math. Soc, 1990. 151 p. (Mem. Amer. Math. Soc.; vol. 86, no. 432.)
4. **Kazarin L.S., Martines-Pastor A., Perez-Ramos M.D.** On the product of two π-decomposable soluble groups // Publ. Math. 2009. Vol. 53, no. 2. P. 439–456.
5. **Palchik E.M.** On finite factorizable groups // XI Белорус. мат. конф.: тез. докл. Минск, 2012. Ч. 5. С. 67.
6. **Чунихин С.А.** Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964. 154 с.
7. **Ревин Д.О.** Холловы подгруппы конечных групп: дис. ...д-ра физ.-мат.наук: 01.01.06. Новосибирск, 2008. 232 с.
8. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 594–623.
9. **Kleidman P.** A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. (2). 1991. Vol. 133, no. 2. P. 369–428.
10. **Curtis C.W., Kantor W.M., Seitz G.M.** The 2-transitive permutation representations of the finite Chevalley groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 218. P. 1–59.
11. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Providence, 1998. 419 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, no. 3.)
12. **Ревин Д.О.** Холловы π–подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 160–208.
13. **Blaum M.** Factorisations of the simple groups $PSL(3,\ q)$ and $PSU(3,\ q^2)$ // Arch. Math. 1983. Vol. 40, no. 1. P. 8–13.
14. **Ревин Д.О.** Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.

15. **Thompson J.G.** Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. Vol. 1. P. 271–279.
16. **Gross F.** Hall subgroups of order not divisible by 3 // Rocky Mountain J. Math. 1993. Vol. 23, no. 2. P. 569–591.
17. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, вып. 5 (401). С. 3–46.
18. **Arad Z., Fisman E.** On finite factorizable groups // J. Algebra. 1984. Vol. 96, no. 2. P. 522–548.

Пальчик Эдуард Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Полоцкий государственный университет
e-mail: bashunsviat@mail.ru

Поступила 26.01.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

О МАКСИМАЛЬНЫХ АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП[1]

М. В. Селькин, Р. В. Бородич

Подгрупповым m-функтором Θ называется функция, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$, состоящее из выделенных максимальных подгрупп группы G и самой группы G, при этом предполагается, что $\Theta(G^\alpha) = (\Theta(G))^\alpha$ для любого автоморфизма α группы G. Устанавливаются строение функторно-обобщенной подгруппы Фраттини и ее влияние на свойства группы.

Ключевые слова: конечная группа, p-нильпотентная группа, максимальная подгруппа, m-функтор.

M. V. Sel'kin, R. V. Borodich. On maximal abnormal subgroups of finite groups.

A subgroup m-functor Θ is a function that maps each group G to some set $\Theta(G)$ consisting of maximal subgroups of G and the group G itself; it is assumed that $\Theta(G^\alpha) = (\Theta(G))^\alpha$ for any automorphism α of G. We establish the structure of the functor generalized Frattini subgroup and its influence on the properties of the group.

Keywords: finite group, p-nilpotent group, maximal subgroup, m-functor.

Введение

В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, взаимодействия между собой и другими подгруппами позволяет вскрывать новые свойства самих групп. Это и предопределило особый интерес исследователей к максимальным подгруппам еще на рубеже 19–20 веков (Г. Фраттини, О. Ю. Шмидт). Со временем выделилось и стало интенсивно развиваться одно из направлений теории конечных групп — исследование строения группы в зависимости от свойств некоторой системы ее максимальных подгрупп и их пересечений. На первом этапе эти исследования проводились применительно к конкретным классическим группам (О.Ю. Шмидт, Н. Ито, Б. Хупперт, К. Дерк, Р. Картер, Б. Фишер, Т. Хоукс, Л. А. Шеметков, Л. С. Казарин, Ю. А. Корзюков, Дж. Томпсон, Б. Бауман, Ф. Холл, В. Гашюц, В. Дескинс, Д. Барнс и др., см. обзоры [1; 2], В. С. Монахов [3]).

Осознание общности различных конкретных фактов в теории конечных групп привело к возникновению теории формаций (В. Гашюц), которая породила серию новых идей, понятий и позволила получить ряд классических результатов (Р. Картер, Т. Хоукс, Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, М. В. Селькин, А. Болистер-Болиншес, И. Фенг, Б. Чанг, Х. Бетчел, М. Хофман, Д. Бейдлеман, Х. Смит, В.В. Шлык и др., см. монографии [4; 5]).

В 90-е годы 20 в. были найдены новые функциональные подходы к изучению свойств конечных групп. Они позволили посмотреть с единой точки зрения на многие результаты теории групп, объединив их в общей схеме применения подгрупповых функторов и классов групп: формаций, классов Фиттинга, классов Шунка (Д. Барнс, О. Кегель, Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба [6], С. Ф. Каморников, М. В. Селькин и др., см. монографии [4; 5], Р. В. Бородич и М. В. Селькин [7; 8]). Это дало возможность наряду с организующими возможностями подгрупповых функторов использовать их как аппарат исследования этих классов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф 11М-159).

Данная работа является продолжением этих исследований и посвящается юбилею доктора физико-математических наук, профессора, члена-корреспондента РАН Александра Алексеевича Махнева, которому мы искренне благодарны за внимание и ценные советы.

1. Необходимые обозначения и вспомогательные результаты

Подгрупповым m-функтором Θ называется функция, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$, состоящее из выделенных максимальных подгрупп группы G и самой группы G. При этом предполагается, что $\Theta(G^\alpha) = (\Theta(G))^\alpha$ для любого автоморфизма α группы G [4].

Пусть Θ — некоторый подгрупповой m-функтор и $\mathfrak{X}$ — класс групп. Для любой группы G положим $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G) = \cap M$, где $M \in \Theta(G)\backslash\{G\}$ и $M \notin \mathfrak{X}$. Если в группе G нет максимальных подгрупп M с отмеченным выше свойством, то полагаем $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G) = G$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G) = \Phi_\theta(G)$ для любой группы G. Если $\Theta(G)$ содержит все максимальные подгруппы группы G, не принадлежащие $\mathfrak{X}$, то положим $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G) = \Phi^{\mathfrak{X}}(G)$. В случае, когда $\mathfrak{X}$ — формация всех p-нильпотентных групп, будем вместо $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ использовать обозначение $\Phi_\theta^p(G)$.

Согласно [4] подгрупповой m-функтор Θ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) из $N \trianglerighteq G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Если Θ — подгрупповой m-функтор и $M \in \Theta(G)$, то M будем называть Θ-*подгруппой* группы G.

В дальнейшем m-функтор Θ будем называть *абнормально полным*, если для любой группы G множество $\Theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G.

Заметим, что для максимальной подгруппы понятие абнормальной и ненормальной подгруппы совпадают.

Подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G.

Формация — это класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и конечных подпрямых произведений. Если выполняется только первое условие, то такой класс групп называют *гомоморфом*.

Используемые в работе определения можно найти в монографиях [4; 5; 9].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф, Θ — m-функтор. Если $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G)$, то выполняются следующие утверждения*:

1) *$G = \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G)M$, где M — Θ-подгруппа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}$*;

2) *если G разрешима и Θ — абнормально полный регулярный m-функтор, то $G = QM$, где Q — нормальная q-подгруппа группы G, q — простое число и M — Θ-подгруппа группы G, принадлежащая классу $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Так как $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G)$, то найдется подгруппа M из $\Theta(G)$, принадлежащая $\mathfrak{X}$, такая, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G) \nsubseteq M$. Следовательно, $G = M\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G)$.

Докажем второе утверждение. Пусть G разрешима. Рассмотрим $G/\Phi_\theta(G)$. Так как группа $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_\theta(G)$ разрешима, то в $\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_\theta(G)$ найдется неединичная характеристическая q-подгруппа $Q/\Phi_\theta(G)$ для некоторого простого $q \in \pi(\Phi_\theta^{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_\theta(G))$. Если предположить, что $Q/\Phi_\theta(G)$ содержится во всех Θ-подгруппах, принадлежащих $\mathfrak{X}$, то $Q/\Phi_\theta(G) \subseteq \Phi_\theta(G)/\Phi_\theta(G)$. Получили противоречие. Значит, найдется такая Θ-подгруппа $M/\Phi_\theta(G)$, принадлежащая $\mathfrak{X}$, что $M/\Phi_\theta(G)\cdot Q/\Phi_\theta(G) = G/\Phi_\theta(G)$. Отсюда получаем, что $G = MQ$. Из регулярности m-функтора Θ следует, что $M \in \Theta(G)$. Если предположить, что $M \notin \mathfrak{X}$, то $M \supseteq Q$ и $G = M$. Значит, $M \in \mathfrak{X}$. Далее $Q = Q_1\Phi_\theta(G)$, где Q_1 — силовская q-подгруппа в Q.

По лемме Фраттини $G = QN_G(Q_1) = Q_1\Phi_\theta(G)N_G(Q_1) = \Phi_\theta(G)N_G(Q_1)$. Предположим, что $N_G(Q_1) \neq G$. Тогда $N_G(Q_1)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной подгруппе K

группы G. Ввиду того, что Θ — абнормально полный m-функтор, имеем $G = \Phi_\theta(G)K = K$. Получили противоречие. Следовательно, Q_1 — нормальная q-подгруппа группы G. Лемма доказана.

Лемма 2 [10]. *Пусть p — простое нечетное число. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P, характеристической в некоторой силовской p-подгруппе группы G, $N_G(P)/C_G(P)$ — p-подгруппа.*

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор и G — разрешимая группа такая, что $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \subset G$. Если все максимальные подгруппы из $\Theta(G)$, принадлежащие $\mathfrak{F}$, сопряжены в G, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = QN$, где Q — нормальная q-подгруппа, q — простое число и N — нильпотентная подгруппа.*

Доказательство. По лемме 1 $G = QM$, где M — Θ-подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$, Q — нормальная q-подгруппа (q — некоторое простое число) группы G, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$.

Пусть M_0 — добавление к Q в G. Тогда $Q \cap M_0 \subseteq \Phi(M_0)$. По тождеству Дедекинда получаем, что

$$\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap QM_0 = Q(\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap M_0).$$

Если $T = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap M_0 \nsubseteq \Delta(M_0)$, то найдется такая абнормальная максимальная подгруппа H в M_0, что $M_0 = TH$. Покажем, что QH — максимальная подгруппа группы G. Предположим противное. Пусть в G имеется максимальная подгруппа S такая, что $QH \subset S \subset G$. Тогда $S = QM_0 \cap S = Q(M_0 \cap S)$. Так как $M_0 \cap S \supseteq H$ и H — максимальная подгруппа группы M_0, получаем, что $M_0 \cap S = H$ или $M_0 \cap S = M_0$. В первом случае имеем, что $S = QH$, во втором — $S = G$. Получили противоречие с выбором S. Следовательно, QH —максимальная подгруппа в G. Так как H абнормальна в M_0, то QH абнормальна в G, а значит, $QH \in \Theta(G)$. Из $Q \nsubseteq M$ по теореме Оре следует, что QH не сопряжена с M. Поэтому $QH \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, $QH \supseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \supseteq T$. Поэтому $G = QM_0 = QTH = QH$, получили противоречие. Значит, $T \subseteq \Delta(M_0)$. Отсюда следует, что T — нильпотентная подгруппа. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп, а $\Theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, в качестве следствия теоремы 1 получаем результат из [11].

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и Θ — абнормально полный m-функтор. Если G — разрешимая группа и $\Phi_\theta(G) \subset \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq F(G) \subset G$, то $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)$ — главный фактор группы G, дополняемый максимальной подгруппой, принадлежащей формации $\mathfrak{F}$, и $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G)$.*

Доказательство. Пусть разрешимая группа G удовлетворяет условиям теоремы. Если $G \in \mathfrak{F}$, то нетрудно видеть, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = G$, а это противоречит включениям $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq F(G) \subset G$. Будем считать, что G не принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $H/\Phi_\theta(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G)$, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)$. Тогда найдется такая максимальная подгруппа M в группе G, что $M \in \Theta(G)$, $G = HM$ и $H \cap M = \Phi_\theta(G)$. Так как $G = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)M$ и $M \in \mathfrak{F}$, то $G/H = MH/H \simeq M/(M \cap N) \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K/\Phi_\theta(G)$ — минимальная нормальная в $G/\Phi_\theta(G)$ подгруппа, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)$ и отличная от $H/\Phi_\theta(G)$. Рассуждая, как и выше, получаем, что $G/K \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G/(K \cap H) = G/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$. Из включения $\Phi(G) \subseteq \Phi_\theta(G)$ и насыщенности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Таким образом, $H/\Phi_\theta(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G)$, содержащаяся в $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)$. Учитывая, что $\Phi(G) \subseteq \Phi_\theta(G)$ и $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq F(G)$, получаем, что $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)$ — абелева p-группа для некоторого простого числа p.

Несложно заметить, что $(\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)) \cap (M/\Phi_\theta(G)) = (\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap M)/\Phi_\theta(G)$ — нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G)$.

Так как $H \nsubseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap M$, то $\Phi_\theta(G)^{\mathfrak{F}} \cap M = \Phi_\theta(G)$. Следовательно, $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = H$.

Из предыдущих рассуждений следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $(G/\Phi_\theta(G))^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G)/\Phi_\theta(G)$ совпадает с $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)$, т.е. $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi_\theta(G)$. Теорема доказана.

Если $\Theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G и $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех сверхразрешимых групп, то из теоремы 2 следует теорема 4 из [11].

Теорема 3. *Пусть Θ — абнормально полный m-функтор и p — простое нечетное число. Тогда либо $\Phi_\theta^p(G) = \Phi_\theta(G)$, либо G является p-разрешимой группой.*

Доказательство. Положим $D = \Phi_\theta^p(G)$. Пусть G — не p-разрешимая группа. Если в $\Theta(G)$ нет p-нильпотентных максимальных подгрупп, то $D = \Phi_\theta(G)$. Если $\Theta(G) = \{G\}$, то из свойства абнормальной полноты функтора Θ следует, что в группе G нет абнормальных максимальных подгрупп. Следовательно, G нильпотентна, а значит, и p-разрешима. Получили противоречие. Таким образом, можно считать, что в G существует p-нильпотентная максимальная подгруппа $M \in \Theta(G)$ и $M \neq G$. Так как $D \nsubseteq M$, то $G = DM$. Тогда группа $G/D \simeq M/M \cap D$ является p-нильпотентной, в частности, p-разрешимой группой. Если D является p'-группой, то G p-разрешима. Получили противоречие. Следовательно, $p \in \pi(D)$.

Пусть P — силовская p-подгруппа из D. По лемме Фраттини $G = DN_G(P)$. Если $N_G(P) = G$, то $P \trianglelefteq G$. Отсюда и из p-разрешимости G/D следует p-разрешимость группы G. Получили противоречие.

Будем считать, что $N_G(P) \neq G$. Пусть R — максимальная подгруппа группы G такая, что $N_G(P) \subseteq R$. Из абнормальности подгруппы $N_G(P)$ следует, что $R \in \Theta(G)$. Так как $G = DR$, то R p-нильпотентна. Следовательно, $N_G(P)$ — p-нильпотентная подгруппа.

Если подгруппа D p-нильпотентна, то нетрудно видеть, что группа G p-разрешима. Получили противоречие с предположением.

Будем считать, что D — не p-нильпотентная подгруппа. Тогда по лемме 2 найдется такая характеристическая подгруппа P^* из P, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ — не p-группа. Так как $N_G(P) \subseteq N_G(P^*)$, то $G = DN_G(P^*)$.

Возможны случаи: либо $N_G(P^*) = G$, либо $N_G(P^*)$ — p-нильпотентная подгруппа. Так как $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ — не p-группа, то второй случай невозможен. Остается принять, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ — не p-группа и $P^* \triangleleft G$.

Пусть P^* — максимальная среди характеристических подгрупп группы P, обладающая отмеченными выше свойствами. Так как $N_G(P)$ — p-нильпотентная подгруппа, то $P^* \subset P$. Пусть P_0/P^* — неединичная характеристическая подгруппа группы P/P^*.Тогда P_0 характеристична в P и $P^* \subset P_0$. Ввиду выбора подгруппы P^* получаем, что $N_D(P_0)/C_D(P_0)$ — p-группа.

Заметим, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*) = N_D(P_0)/P^*$ и $C_D(P_0)P^*/P^* \subseteq C_{D/P^*}(P_0/P^*)$. Отсюда получаем, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$ — p-группа. Следовательно, по лемме 2 группа D/P^* является p-нильпотентной. Так как D является p-разрешимой группой, то из p-разрешимости G/D следует p-разрешимость и самой группы G. Теорема доказана.

В случае, когда $\Theta(G)\backslash\{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп для любой группы G, из теоремы 3 вытекает соответствующий результат В.В. Шлыка из [12].

Теорема 4. *Пусть Θ — абнормально полный m-функтор. Если $\Phi_\theta^p(G)$ не является p-нильпотентной группой для некоторого нечетного числа $p \in \pi(G)$, то $G = O_p(\Phi_\theta^p(G))M$, где M — p-нильпотентная Θ-подгруппа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 3 нетрудно видеть, что G является p-разрешимой группой. Пусть $D = \Phi_\theta^p(G)$. Так как D не p-нильпотентна, то по лемме 2 существует характеристическая подгруппа P^* в силовской p-подгруппе P группы D такая, что $N_D(P)/C_D(P)$ не является p-группой. Можно считать, что P^* — максимальная подгруппа с указанными выше свойствами.

Учитывая, что m-функтор Θ является абнормально полным и $N_G(P^*)$ — абнормальная подгруппа в G, имеем $N_G(P^*) = G$. Отсюда следует, что $P^* \subseteq O_p(D)$. Предположим, что $P^* \subset O_p(D)$, тогда $N_D(O_p(D))/C_D(O_p(D))$ — p-группа, а значит, $D/C_D(O_p(D))$ — p-группа. Из $C_D(O_p(D)) \subseteq O_p(D)$ получаем, что $D/O_p(G)$ — p-группа, значит, D — p-группа, противоречие. Следовательно, $P^* = O_p(D)$.

Если $D/O_p(D)$ p-нильпотентна, то в $D/O_p(D)$ имеется нормальная холловская p'-подгруппа $K/O_p(D)$. Тогда подгруппа K нормальна в G и подгруппа $O_p(D)$ нормальна в K. По теореме Шура — Цассенхауза существует холловская p'-подгруппа A из K такая, что $K = O_p(D)A$. По лемме Фраттини $G = KN_G(A)$.

Если $O_p(D) \subseteq \Phi(G)$, то $G = KN_G(A) = O_p(D)AN_G(A) = N_G(A)$. Следовательно, A нормальна в G. Но A — холловская p'-подгруппа в D, значит, D p-нильпотентна. Противоречие. Следовательно, $O_p(D) \nsubseteq \Phi(G)$, и поэтому $G = O_p(D)M$, где M — максимальная p-нильпотентная Θ-подгруппа группы G. Теорема доказана.

Если $\Theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, то из теоремы 4 получаем теорему 2 из [13].

Теорема 5. *Пусть Θ — абнормально полный m-функтор. Тогда либо $\Phi_\theta^{\mathfrak{N}}(G) = \Phi_\theta(G)$, либо $G = QM$, где Q — нормальная q-подгруппа группы G, q — простое число и M — нильпотентная Θ-подгруппа группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несложно заметить, что

$$\Phi_\theta^p(G) \supseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{N}}(G) \supseteq \Phi_\theta(G).$$

Если G не разрешима, то G не p-разрешима для некоторого $p \in \pi(G)$. Если $p > 2$, то по теореме 1 $\Phi_\theta^p(G) = \Phi_\theta(G)$, следовательно, $\Phi_\theta^{\mathfrak{N}}(G) = \Phi_\theta(G)$. Пусть G p-разрешима для любого нечетного числа $p \in \pi(G)$. Нетрудно видеть, что в этом случае G является разрешимой. Теперь, применяя лемму 1, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Если $\Theta(G)$ содержит множество всех максимальных подгрупп для любой группы G, то из теоремы 5 получаем соответствующий результат Л.И. Шидова из [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чунихин С.А., Шеметков Л.А.** Конечные группы // Итоги науки и техники: сб. ст. / ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: ВИНИТИ, 1969. Т. 8. С. 7–70. (Алгебра. Топология. Геометрия.)
2. **Кондратьев А.С., Махнев А.А., Старостин А.И.** Конечные группы // Итоги науки и техники: сб. ст. / ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 24. С. 3–120. (Алгебра. Топология. Геометрия.)
3. **Монахов В.С.** Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2004. № 6 (27). С. 81–87.
4. **Селькин М.В.** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 1997. 144 с.
5. **Каморников С.Ф., Селькин М.В.** Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск.: Бел. навука, 2003. 254 с.
6. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Формации алгебраических систем. Современная алгебра. М.: Наука, 1989. 256 с.
7. **Селькин М.В., Бородич Р.В.** О пересечении максимальных подгрупп конечных групп // Вест. Самарск. гос. ун-та. 2009. № 8 (74). С. 67–77.

8. **Селькин М.В., Бородич Р.В.** Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах конечных групп // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 727–735.
9. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
10. **Thompson J.G.** Normal p-complements for finite groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1, no. 1. P. 43–46.
11. **Gilotti A., Tiberio U.** On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 8. 2000. Vol. 3-B, no. 3. P. 691–698.
12. **Шлык В.В.** О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1973. Vol. 14, № 3. С. 429–439.
13. **Gilotti A., Tiberio U.** On the intersection of certain class of maximal subgroups of a finite group // Arch. Math. 1998. Vol. 71, no. 2. P. 89–94.
14. **Шидов Л.И.** О максимальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 3. С. 682–683.

Селькин Михаил Васильевич
д-р. физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Selkin@gsu.by

Поступила 15.01.2013

Бородич Руслан Викторович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Borodich@gsu.by

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕЗОНАНСА ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМУЩЕНИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ В СРЕДНЕМ[1]

О. А. Султанов

Данная работа посвящена исследованию устойчивости растущих решений нелинейных уравнений, связанных с явлением авторезонанса. Проводится анализ устойчивости этих решений при постоянно действующих возмущениях. Вводится в рассмотрение класс возмущений, и описываются его свойства, которые гарантируют устойчивость авторезонанса. Все проводимые здесь рассуждения опираются на наличие функции Ляпунова для невозмущенных систем.

Ключевые слова: авторезонанс, устойчивость, асимптотика, возмущения.

O. A. Sultanov. Stability of autoresonance models under perturbations that are bounded in the mean.

The paper is devoted to investigating the stability of growing solutions of nonlinear equations related to the autoresonance phenomenon. The stability of these solutions under persistent perturbations is analyzed. A class of perturbations is introduced, and its properties that provide the stability of autoresonance are described. The argument is based on the existence on the Lyapunov function of the unperturbed systems.

Keywords: autoresonance, stability, asymptotics, perturbations.

Введение

Цель работы — исследование устойчивости так называемых авторезонансных решений для модельных систем уравнений главного резонанса:

$$\frac{dr}{dt} = \sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t\Big] = b\cos\psi; \tag{0.1}$$

$$\frac{dr}{dt} = r\sin\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t = b\cos\psi. \tag{0.2}$$

Здесь $\lambda, b = \mathrm{const} \neq 0$, $\lambda > 0$. Такие уравнения возникают в теории колебаний при использовании метода усреднения [1]. Неизвестные функции $r(t)$, $\psi(t)$ имеют смысл медленно меняющихся амплитуды и сдвига фазы быстрых гармонических колебаний. В частности, в задачах с медленно меняющейся частотой внешней накачки появляются неавтономные уравнения типа (0.1) либо (0.2) с $\lambda \neq 0$. Интерес представляют решения с неограниченной амплитудой, которые в приложениях связывают с явлением авторезонанса [2]. В данной работе исследуется устойчивость таких решений при постоянно действующих возмущениях [3–6]. Как правило, реальным физическим процессам соответствуют именно устойчивые решения.

Для уравнений (0.1) и (0.2) явное решение не выписывается, однако довольно просто строится асимптотическое решение с растущей амплитудой в виде степенных рядов:

$$r(t) = \sqrt{\lambda t} + r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n t^{-n/2}, \quad \psi(t) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n t^{-n/2}, \quad t \to \infty. \tag{0.3}$$

На этом пути определяются несколько решений, отличия которых связаны с выбором одного из корней уравнения: $\sin\psi_0 = 0$, а именно $\psi_0 = 0$ либо $\psi_0 = \pi$. Обоснование асимптотик в

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00199, 11-02-97003).

виде степенных рядов с постоянными коэффициентами следует из [7; 8]. Здесь исследуется устойчивость решений с такой асимптотикой.

Наряду с системами (0.1) и (0.2) будем рассматривать возмущенные уравнения

$$\frac{dr}{dt} = (1+\mu\, p)\sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t + \mu\,\varphi\Big] = b(1+\mu\, q)\cos\psi; \tag{0.4}$$

$$\frac{dr}{dt} = r(1+\mu\, p)\sin\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t + \mu\,\varphi = b(1+\mu\, q)\cos\psi. \tag{0.5}$$

Параметр $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \ll 1$, входящий в виде множителя, характеризует малость возмущений. В исходной задаче (до усреднения) функции $p(r,\psi,t)$ и $q(r,\psi,t)$ задают возмущение амплитуды, $\varphi(r,\psi,t)$ — возмущение фазы накачки. Проблема состоит в идентификации класса возмущений (p,q,φ), относительно которого растущее решение будет устойчиво.

Предполагается, что функции $p(r,\psi,t), q(r,\psi,t), \varphi(r,\psi,t)$ определены в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \times [1,\infty)$, которая содержит растущие решения уравнений (0.1) и (0.2). Будем считать, что для возмущенных систем выполнены все условия теоремы существования решения на полуоси [9, с. 19; 5, с. 20].

Для анализа устойчивости рассматриваемых решений необходимо уточнить поведение возмущений при $t \to \infty$. Будем рассматривать класс возмущений $\mathfrak{M}$, в котором для любых $(p,q,\varphi) \in \mathfrak{M}$ существует мажоранта $\gamma(\tau)$ в области Ω:

$$|p(r,\psi,t)| \le t^{-v}\,\gamma(\tau), \quad |q(r,\psi,t)| \le t^{-u}\,\gamma(\tau), \quad |\varphi(r,\psi,t)| \le t^{-1}\,\gamma(\tau).$$

Здесь $\tau = \kappa\, t^{\nu}$, $v, u, \kappa, \nu = \mathrm{const} > 0$. При этом от функции $\gamma(\tau)$ требуется ограниченность среднего значения:

$$\exists\, T, m > 0: \quad J_\gamma(t) \equiv \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \gamma(\xi)d\xi \le m \quad \forall\, t > 0. \tag{0.6}$$

Класс $\mathfrak{M}$ определяется параметрами v, u, κ, ν и оказывается разным в различных задачах. Множество функций (p,q,φ), для которых $J_\gamma(t) \le m$, обозначим через $\mathfrak{M}_m$. Такие функции могут принимать сколь угодно большие значения на достаточно коротких временных интервалах. Будем называть такие возмущения ограниченными в среднем, следуя [6]. Присутствие убывающих множителей t^{-v}, t^{-u}, t^{-1} в оценках возмущений объясняется спецификой исследуемых уравнений. Параметры v, u, κ, ν и область определения Ω будут уточняться в каждой задаче.

Похожие возмущения, малые в среднем, рассматривались в [10;11] для систем общего вида. Другой класс, состоящий из интегрируемых на полуоси функций, был исследован в [12]. Однако все эти результаты непосредственно здесь неприменимы из-за специфики рассматриваемых систем.

В исследованиях устойчивости решений систем (0.1), (0.2) и других похожих уравнений можно выделить общую часть, которую удобно излагать отдельно, что делается в первом разделе. Основная (вторая) часть работы посвящена моделям авторезонанса. Результаты данной работы опираются на конструкцию функции Ляпунова, приведенную в [13; 14].

1. Общие системы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на полуоси

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \tau > 0, \tag{1.1}$$

которая имеет тривиальное решение: $\mathbf{x}(\tau) \equiv 0$.

Для системы (1.1) предполагается наличие функции Ляпунова $V(\mathbf{x},\tau)$, для которой имеют место оценки

$$A|\mathbf{x}|^2 \le V(\mathbf{x},\tau) \le B|\mathbf{x}|^2, \quad \Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big| \le C|\mathbf{x}|, \quad \frac{dV}{d\tau}\Big|_{(1.1)} \le -\tau^{-\alpha}|\mathbf{x}|^2. \tag{1.2}$$

Эти неравенства выполняются равномерно в области $D(\rho_0,\tau_0) = \{(\mathbf{x},\tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\mathbf{x}| < \rho_0, \tau > \tau_0\}$ при некоторых константах $0 < \alpha \le 1$, $0 < A, B, C, \rho_0, \tau_0 < \infty$. Специфика рассматриваемой задачи заключается в наличии убывающего множителя $\tau^{-\alpha}$ в оценке (1.2). Функции Ляпунова, обладающие такими свойствами, возникают при исследовании устойчивости авторезонанса относительно возмущений начальных данных [13–15].

Вместе с системой (1.1) будем рассматривать возмущенные уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\tau) + \mu\,\mathbf{P}(\mathbf{x},\tau), \quad |\mu| \ll 1, \quad \tau > 0. \tag{1.3}$$

Вектор-функции $\mathbf{P}(\mathbf{x},\tau)$ соответствуют возмущениям. Предполагается, что для возмущенной системы выполнены условия теоремы существования решения на полуоси. Ставится вопрос о выделении класса возмущений $\mathbf{P}(\mathbf{x},\tau)$, при котором тривиальное решение устойчиво.

Будем рассматривать класс возмущений, в котором для каждой функции $\mathbf{P}(\mathbf{x},\tau)$ в области $D(\rho_0,\tau_0)$ существует мажоранта $\gamma(\tau)$ такая, что выполняется оценка $|\mathbf{P}(\mathbf{x},\tau)| \le \tau^{-\alpha}\gamma(\tau)$ для всех $(\mathbf{x},\tau) \in D(\rho_0,\tau_0)$, и существуют константы T, $m > 0$: $J_\gamma(\tau) \le m$, $\forall \tau > 0$. Такой класс функций обозначим через $\mathfrak{P}$, а каждому значению $m > 0$ поставим в соответствие подмножество $\mathfrak{P}_m$ класса $\mathfrak{P}$.

Дадим определение устойчивости относительно постоянно действующих возмущений.

О п р е д е л е н и е 1. Тривиальное решение $\mathbf{x}(\tau) \equiv 0$ системы (1.1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе $\mathfrak{N}$, если

$$\exists\, \tau_* > 0\colon \quad \forall\, \tau_s > \tau_*, \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta, \eta > 0\colon \quad \forall\, |\mathbf{x}_s| < \delta, \ \ \forall\, |\mu| < \eta$$

решение $\mathbf{x}(\tau)$ возмущенных уравнений (1.3): $\mathbf{x}(\tau_s) = \mathbf{x}_s$ удовлетворяет неравенству $|\mathbf{x}(\tau)| < \varepsilon$ при всех $\tau > \tau_s$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x},\tau) \in \mathfrak{N}$.

Обычно устойчивость при постоянно действующих возмущениях является следствием равномерной асимптотической устойчивости. Например, в [6] было показано, что для устойчивости достаточно найти функцию Ляпунова с отрицательно определенной полной производной, в нашем случае это соответствует условию $\alpha = 0$. Оказывается, что похожий результат можно получить и при $\alpha > 0$.

Следует отметить, что в рассматриваемых уравнениях (1.1) с функцией Ляпунова типа (1.2) можно сделать замену $t = t(\tau)$ такую, что в новых переменных $(\mathbf{x}, t)$ оценка для производной функции V примет вид $dV/dt \le -|\mathbf{x}|^2$. Так, например, в случае $\alpha = 1$ замена следующая: $t = \ln\tau$. После этого для преобразованной системы можно применить известные результаты об устойчивости в среднем [6], где рассматривались возмущения $|\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)| \le \gamma(t)$ с функцией $\gamma(t)$, обладающей свойством (0.6). Однако в исходных переменных $(\mathbf{x},\tau)$ такой класс возмущений деформируется и становится неудобным для практического использования. Например, при $\alpha = 1$ для возмущений появляется следующее ограничение: $|\mathbf{P}(\mathbf{x},\tau)| \le \tau^{-1}\gamma(\ln\tau)$. По этой причине здесь мы фактически воспроизводим результат [6] с условиями на производную в форме (1.2).

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений* (1.1) *существует функция Ляпунова, обладающая свойством* (1.2). *Тогда* $\forall\, m > 0$ *нулевое решение* $\mathbf{x}(\tau) \equiv 0$ *невозмущенной системы* (1.1) *является устойчивым при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе* $\mathfrak{P}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к построению функции Ляпунова для возмущенной системы на основе функции $V(\mathbf{x},\tau)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \rho_0$), тогда $\inf_{|\mathbf{x}|=\varepsilon, \tau>\tau_0} V(\mathbf{x},\tau) \geq A\varepsilon^2$. Из оценки (1.2) для частных производных функции $V(\mathbf{x},\tau)$ следует справедливость неравенства

$$\sup_{|\mathbf{x}|\leq\delta,\,\tau>\tau_0} V(\mathbf{x},\tau) \leq \frac{A\varepsilon^2}{2e^2}, \quad \delta \equiv \frac{\varepsilon}{e}\sqrt{\frac{A}{2nC}} < \varepsilon.$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим $U(\mathbf{x},\tau) \equiv V(\mathbf{x},\tau)e^{\phi(\tau)}$ с дифференцируемой функцией $\phi(\tau)$, которая определяется ниже. Вычислим полную производную функции $U(\mathbf{x},\tau)$ вдоль траекторий возмущенной системы:

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)} = \Big(\phi'(\tau) + \frac{1}{V}\Big[\frac{dV}{d\tau}\Big|_{(1.1)} + \mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}P_i\Big]\Big)U.$$

В кольце $\delta \leq |\mathbf{x}| \leq \varepsilon$ при $\tau > \tau_0$ выполняется оценка

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)} \leq \Big(\phi'(\tau) + \tau^{-\alpha}\Big[-\frac{1}{B} + \frac{|\mu|nC}{\delta A}\gamma(\tau)\Big]\Big)U.$$

Если $|\mu| < \eta \equiv \delta A\mu_\alpha/(nCBm)$, то последнее неравенство примет вид

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)} \leq \Big(\phi'(\tau) + \tau^{-\alpha}\frac{1}{Bm}\big[-m + \mu_\alpha\gamma(\tau)\big]\Big)U.$$

Определим функцию $\theta(\zeta)$ таким образом, чтобы выполнялось интегральное соотношение

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T}\theta(\zeta)d\zeta = \int\limits_{kT}^{(k+1)T}\zeta^{-\alpha}\big[(1-q)m - \mu_\alpha\gamma(\zeta)\big]\,d\zeta \tag{1.4}$$

при всех целых $k \geq 1$ и некотором $q \in (0;1)$. Обозначим через $I_{\alpha,k}$ интеграл, стоящий в правой части формулы (1.4), и покажем, что $I_{\alpha,k} \geq 0$, $\forall k \geq 1$. Для этого заметим, что числовые последовательности

$$\sigma_k \equiv \ln(1+\frac{1}{k})^k, \quad s_k \equiv k^\alpha(1+k)^{1-\alpha} - k, \quad 0<\alpha<1, \quad k = 1,2,\dots$$

монотонно возрастают и ограниченны: $\ln 2 \leq \sigma_k \leq \ln 3$, $(2^{1-\alpha}-1) \leq s_k \leq (1-\alpha)\ \forall\, k \geq 1$. Тогда $I_{\alpha,k}$ можно оценить снизу при всех $k \geq 1$. Если $\alpha = 1$, то такая оценка имеет вид

$$I_{1,k} = (1-q)m\frac{\sigma_k}{k} - \mu_1\int\limits_{kT}^{(k+1)T}\zeta^{-1}\gamma(\zeta)d\zeta \geq (1-q)\frac{\ln 2}{k}\Big[m - \frac{\mu_1 J_\gamma(kT)}{(1-q)\ln 2}\Big].$$

Положим $\mu_1 \equiv (1-q)\ln 2$, тогда $I_{1,k} \geq 0$ при всех целых $k \geq 1$. Аналогичные рассуждения проводятся и в случае $0 < \alpha < 1$:

$$I_{\alpha,k} = \frac{(1-q)mTs_k}{(1-\alpha)(kT)^\alpha} - \mu_\alpha\int\limits_{kT}^{(k+1)T}\zeta^{-\alpha}\gamma(\zeta)d\zeta \geq \frac{(1-q)Ts_1}{(1-\alpha)(kT)^\alpha}\Big[m - \frac{\mu_\alpha(1-\alpha)J_\gamma(kT)}{(1-q)(2^{1-\alpha}-1)}\Big].$$

Если здесь положить $\mu_\alpha \equiv (1-q)(2^{1-\alpha}-1)/(1-\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$, то $I_{\alpha,k} \geq 0$ при всех целых $k \geq 1$.

Таким образом, интеграл, стоящий в правой части формулы (1.4), будет неотрицательным $\forall k \geq 1$. Следовательно, в качестве $\theta(\zeta)$ можно взять непрерывную неотрицательную функцию, удовлетворяющую равенству (1.4). Функцию $\phi(\tau)$ теперь определим следующим образом:

$$\phi(\tau) \equiv \frac{1}{Bm}\int\limits_{T}^{\tau}\big(-\theta(\zeta) + \zeta^{-\alpha}\big[(1-q)m - \mu_\alpha\gamma(\zeta)\big]\big)d\zeta. \tag{1.5}$$

Отсюда следует оценка для полной производной в кольце $\delta \le |\mathbf{x}| \le \varepsilon$ при $\tau > \tau_* \equiv \max\{\tau_0; T\}$:

$$\frac{dU}{d\tau}\Big|_{(1.3)} \le -\frac{1}{Bm}\big(\tau^{-\alpha}qm + \theta(\tau)\big)U \le -\tau^{-\alpha}\frac{q}{B}U.$$

Из определения функции $\phi(\tau)$ вытекает, что $\phi(kT) = 0$ для любого целого $k \ge 1$. Отсюда с учетом (1.4) и (1.5) справедлива оценка $|\phi(\tau)| \le 3(1-q)M/B$ при $\tau > \tau_*$, $M \equiv \max\{T^{1-\alpha}; \ln 3\}$. Если зафиксировать положительное q: $1 - B/(3M) \le q < 1$, то $|\phi(\tau)| \le 1$ при $\tau > \tau_*$, и справедливы неравенства $Ve^{-1} \le U \le Ve$ $\forall(\mathbf{x}, \tau) \in D(\rho_0, \tau_*)$.

Таким образом, верны оценки

$$\sup_{|\mathbf{x}|\le\delta, \tau>\tau_*} U(\mathbf{x}, \tau) \le \frac{A\varepsilon^2}{2e} < \frac{A\varepsilon^2}{e} \le \inf_{|\mathbf{x}|=\varepsilon, \tau>\tau_*} U(\mathbf{x}, \tau).$$

Отсюда и из оценки для полной производной функции $U(\mathbf{x}, \tau)$ имеем, что всякая траектория системы (1.3) с начальными данными из δ-окрестности равновесия $|\mathbf{x}(\tau_s)| < \delta$, останется внутри шара $|\mathbf{x}(\tau)| < \varepsilon$ при $\tau > \tau_s > \tau_*$. Следовательно, решение $\mathbf{x}(\tau) \equiv 0$ устойчиво. Теорема доказана.

2. Устойчивость моделей авторезонанса

В работе исследуется устойчивость решения только в окрестности бесконечности. Устойчивость на любом конечном промежутке следует из теоремы о непрерывности решения задачи Коши относительно параметров уравнений. Дадим определение устойчивости на примере системы (0.1).

Определение 2. Решение $r(t)$, $\psi(t)$ невозмущенных уравнений (0.1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе $\mathfrak{N}$, если $\exists\, t_* > 1$: $\forall\, t_s > t_*, \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta, \eta > 0:$

$$\forall\, r_s, \psi_s\colon\ |r(t_s) - r_s| < \delta,\ \ |\psi(t_s) - \psi_s| < \delta \quad \forall\, |\mu| < \eta$$

решение $\widehat{r}(t)$, $\widehat{\psi}(t)$ возмущенных уравнений (0.4) $\widehat{r}(t_s) = r_s$, $\widehat{\psi}(t_s) = \psi_s$ удовлетворяет неравенствам $|r(t) - \widehat{r}(t)| < \varepsilon$, $|\psi(t) - \widehat{\psi}(t)| < \varepsilon$ при всех $t > t_s$ и $(p, q, \varphi) \in \mathfrak{N}$.

2.1. Уравнения главного резонанса

Для невозмущенных уравнений (0.1) рассматривается решение с асимптотикой типа (0.3):

$$R_0(t) = \sqrt{\lambda t} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - t^{-1/2}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \to \infty. \tag{2.1}$$

В уравнениях (0.1) и (0.4) можно сделать замену:

$$r(t) = R_0(t) + \frac{R(\tau)}{\sqrt{2R_0}}, \quad \psi(t) = \Psi_0(t) + \Psi(\tau), \quad \tau = t^{5/4}\frac{\lambda^{1/4}4\sqrt{2}}{5}, \tag{2.2}$$

и для новых функций $R(\tau), \Psi(\tau)$ исследовать задачу об устойчивости положения равновесия (0;0). Тогда невозмущенное движение в новых переменных будет описываться системой дифференциальных уравнений, близкой к гамильтоновой:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\partial_\Psi H(R, \Psi, \tau), \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \partial_R H(R, \Psi, \tau) + F(R, \Psi, \tau), \tag{2.3}$$

с гамильтонианом

$$H(R, \Psi, \tau) = \Big[\cos(\Psi + \Psi_0) + \Psi \sin\Psi_0 - \cos\Psi_0 + \frac{R^2}{2}\Big]\frac{\sqrt{R_0}}{(\lambda t)^{1/4}} + \Big[\frac{R^2}{3} - R_0'\Psi\Big]\frac{R}{2\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}R_0}$$

и негамильтоновой компонентой

$$F(R,\Psi,\tau)=\frac{b}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}}\Big(\frac{\cos(\Psi+\Psi_0)}{R_0+R/\sqrt{2R_0}}-\frac{\cos\Psi_0}{R_0}\Big)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{R_0'}{(\lambda t)^{1/4}R_0}\Psi.$$

Уравнения возмущенной системы (0.4) для новых функций $R(\tau),\Psi(\tau)$ имеют вид

$$\frac{dR}{d\tau}=-\partial_\Psi H+\mu P,\quad \frac{d\Psi}{d\tau}=\partial_R H+F+\mu Q.$$

Функции возмущений $P(R,\Psi,\tau)$ и $Q(R,\Psi,\tau)$ определяются следующими формулами:

$$P(R,\Psi,\tau)=\widetilde{p}\,\sin(\Psi_0+\Psi)\frac{\sqrt{R_0}}{(\lambda t)^{1/4}},\quad Q(R,\Psi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}}\Big[\frac{b\,\widetilde{q}\cos(\Psi+\Psi_0)}{R_0+R/\sqrt{2R_0}}-\widetilde{\varphi}\Big].$$

Здесь $\widetilde{p}(R,\Psi,\tau)\equiv p(R_0+R/\sqrt{2R_0},\Psi_0+\Psi,c\tau^{4/5})$, $\widetilde{q}(R,\Psi,\tau)\equiv q(R_0+R/\sqrt{2R_0},\Psi_0+\Psi,c\tau^{4/5})$, $\widetilde{\varphi}(R,\Psi,\tau)\equiv\varphi(R_0+R/\sqrt{2R_0},\Psi_0+\Psi,c\tau^{4/5})$, $c=5^{4/5}/(4\lambda^{1/5})$.

Исследование устойчивости растущих решений разбивается на несколько этапов. Сначала строится функция Ляпунова для редуцированных уравнений (2.3) и устанавливается устойчивость тривиального решения при постоянно действующих возмущениях. При этом описываются ограничения на возмущения P и Q. Затем определяются параметры возмущений в уравнениях (0.4), которые гарантируют устойчивость растущих решений в системе (0.1).

Далее будем использовать обозначение

$$\mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)\equiv\big\{(R,\Psi,\tau)\in\mathbb{R}^3\colon \rho=\sqrt{R^2+\Psi^2}<\rho_0,\tau>\tau_0\big\}.$$

Лемма 1. *Если в системе* (2.3) *коэффициент* $b>1/2$, *тогда существует функция Ляпунова* $V(R,\Psi,\tau)$ *такая, что* $\exists\,\epsilon,\rho_0,\tau_0=\mathrm{const}$, $0<\rho_0,\tau_0<\infty$, $0<\epsilon<\min\{\beta;1\}$:

$$\Big(\frac{1-\epsilon}{2}\Big)\rho^2\le V(R,\Psi,\tau)\le\Big(\frac{1+\epsilon}{2}\Big)\rho^2,\quad \Big|\frac{\partial V}{\partial R}\Big|,\Big|\frac{\partial V}{\partial\Psi}\Big|\le(1+\epsilon)\rho,\quad \frac{dV}{d\tau}\Big|_{(2.3)}\le-\Big(\frac{\beta-\epsilon}{2}\Big)\tau^{-1}\rho^2 \tag{2.4}$$

для всех $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)$ *с константой* $\beta=(2b-1)/5>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к предъявлению функции Ляпунова. Она строится на основе гамильтониана с дополнительными слагаемыми

$$V(R,\Psi,\tau)=H(R,\Psi,\tau)+V_1(R,\Psi,\tau)+V_2(R,\Psi,\tau),$$

$$V_1=a\tau^{-3/5}\Big[R(1-\cos\Psi)+\frac{R^3}{3}\Big],\quad V_2=-\frac{\beta}{2}\tau^{-1}R\Psi,\quad a=2b/(5\lambda)^{3/5}.$$

Детали доказательства приведены в [14].

Следующее утверждение устанавливает устойчивость равновесия в системе (2.3).

Лемма 2. *Пусть в системе* (2.3) *коэффициент* $b>1/2$ *и функции* $(P,Q)\in\mathfrak{P}$ *при* $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_1)$, $\tau_1\ge\tau_0$. *Тогда* $\forall\,m>0$ *тривиальное решение* $R(\tau)\equiv0$, $\Psi(\tau)\equiv0$ *уравнений* (2.3) *является устойчивым при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе* $\mathfrak{P}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует существование функции Ляпунова $V(R,\Psi,\tau)$. Определим функцию $W(R,\Psi,\tau)=2V(R,\Psi,\tau)/(\beta-\epsilon)$ для всех $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)$. Тогда $W(R,\Psi,\tau)$ обладает оценками (1.2) с $\alpha=1$, $A=(1-\epsilon)/(\beta-\epsilon)$, $B=(1+\epsilon)/(\beta-\epsilon)$, $C=2B$. Отсюда и из теоремы 1 следует устойчивость тривиального решения. Лемма доказана.

Уточним область определения возмущений исходных уравнений (0.1). Множеству $\mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)$, в котором выполняются оценки (2.4), в исходных переменных (r,ψ,t) соответствует Ω_0:

$$\Omega_0=\Big\{(r,\psi,t)\in\mathbb{R}^3\colon |r-R_0|<\frac{\rho_0}{\sqrt{2R_0}},\,|\psi-\Psi_0|<\rho_0,\,t>t_0\Big\},\quad t_0\equiv\frac{(5\tau_0)^{4/5}}{4\lambda^{1/5}}.$$

Учитывая структуру асимптотики (2.1), в качестве области определения возмущений $p(r,\psi,t)$, $q(r,\psi,t)$, $\varphi(r,\psi,t)$ будем рассматривать следующее множество:

$$\Omega=\Big\{(r,\psi,t)\in\mathbb{R}^3\colon |r-\sqrt{\lambda t}|<\frac{\varrho_0}{t^{1/4}},\,|\psi-\pi|<\varrho_0,\,t>t_0\Big\}$$

с положительной константой ϱ_0, при которой $\Omega_0\subseteq\Omega$.

Лемма 3. *Пусть в системе* (0.4) *возмущения p, q, φ в области Ω удовлетворяют оценкам:*

$$|p(r,\psi,t)|\le t^{-5/4}\gamma(\tau),\quad |q(r,\psi,t)|\le t^{-1/2}\gamma(\tau),\quad |\varphi(r,\psi,t)|\le t^{-1}\gamma(\tau)\tag{2.5}$$

с неотрицательной функцией $\gamma(\tau)$, $\tau=t^{5/4}\lambda^{1/4}4\sqrt{2}/5$, определенной при $\tau>\tau_0$. Тогда существует $\tau_1\ge\tau_0$ такое, что для $P(R,\Psi,\tau)$ и $Q(R,\Psi,\tau)$ справедливы оценки $|P(R,\Psi,\tau)|\le M\tau^{-1}\gamma(\tau)$, $|Q(R,\Psi,\tau)|\le M\tau^{-1}\gamma(\tau)$, $\forall(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_1)$ с положительной константой M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из структуры функций P и Q выводим оценки при $\tau\to\infty$

$$|P(R,\Psi,\tau)|\le|\widetilde{p}|\,[1+M_1t^{-3/2}],\quad |Q(R,\Psi,\tau)|\le\frac{|\widetilde{\varphi}|}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}}+\frac{|b||\widetilde{q}|}{\sqrt{2}(\lambda t)^{3/4}}[1+M_2t^{-3/2}],$$

с константами $0<M_1,M_2<\infty$ для всех R,Ψ из круга $\rho<\rho_0$. Заметим, что для функций $\widetilde{p}(R,\Psi,\tau)$, $\widetilde{q}(R,\Psi,\tau)$, $\widetilde{\varphi}(R,\Psi,\tau)$ в области $\mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)$ справедливы оценки (2.5). Отсюда следует, что существует $\tau_1\ge\tau_0$ и в области $\mathcal{D}(\rho_0,\tau_1)$ справедливы неравенства

$$|P(R,\Psi,\tau)|\le\frac{8\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}}{5}\tau^{-1}\gamma(\tau),\quad |Q(R,\Psi,\tau)|\le\frac{8}{5}\Big[\frac{1}{2}+\frac{|b|}{\sqrt{\lambda}}\Big]\tau^{-1}\gamma(\tau).$$

Если в последних оценках обозначить через M максимальный из двух множителей перед $\tau^{-1}\gamma(\tau)$, то утверждение доказано. Лемма доказана.

Уточним класс возмущений для уравнений главного резонанса. Пусть в области Ω возмущения (p,q,φ) принадлежат классу $\mathfrak{M}$ с параметрами $v=5/4$, $u=1/2$, $\kappa=\lambda^{1/4}4\sqrt{2}/5$, $\nu=5/4$, $\alpha=1$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует устойчивость растущих решений для системы главного резонанса и справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если в системе* (0.1) *коэффициент $b>1/2$, то $\forall\, m>0$ решение $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ с асимптотикой* (2.1) *является устойчивым при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе $\mathfrak{M}_m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения класса возмущений $\mathfrak{M}$ и леммы 3 следует, что $(P,Q)\in\mathfrak{P}$ при $(R,\Psi,\tau)\in\mathcal{D}(\rho_0,\tau_1)$. Тогда из леммы 2 следует, что $\forall\, m>0$ тривиальное решение системы (2.3) устойчиво при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе $\mathfrak{P}_m$. Отсюда с учетом замены (2.2) следует устойчивость решения $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ с асимптотикой (2.1) равномерно в классе $\mathfrak{M}_m$.

2.2. Уравнения параметрического авторезонанса

Для системы уравнений (0.2) рассматривается решение с асимптотикой, имеющей структуру (0.3):

$$R_0(t) = \sqrt{\lambda t} + t^{-1/2}\frac{b}{2\sqrt{\lambda}} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - t^{-1}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \to \infty. \tag{2.6}$$

На основе этого решения в уравнениях (0.2) и (0.5) проводится замена:

$$r(t) = R_0(t) + \frac{R(\tau)}{\sqrt{2}}, \quad \psi(t) = \Psi_0(t) + \Psi(\tau), \quad \tau = t^{3/2}\frac{2\sqrt{2\lambda}}{3},$$

и для новых функций $R(\tau), \Psi(\tau)$ исследуется задача об устойчивости положения равновесия (0;0). Уравнения невозмущенной системы для этих функций можно представить в форме

$$\frac{dR}{d\tau} = -\partial_\Psi H(R,\Psi,\tau), \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \partial_R H(R,\Psi,\tau) + F(R,\Psi,\tau). \tag{2.7}$$

Здесь гамильтониан задается соотношением

$$H = \frac{R_0}{\sqrt{\lambda t}}\Big[\cos(\Psi+\Psi_0) + \Psi\sin\Psi_0 - \cos\Psi_0 + \frac{R^2}{2}\Big] + \frac{1}{\sqrt{2\lambda t}}\Big[R\big(\cos(\Psi+\Psi_0) - \cos\Psi_0\big) + \frac{R^3}{6}\Big].$$

Негамильтонова часть определяется функцией $F = (b-1)\big[\cos(\Psi+\Psi_0) - \cos\Psi_0\big]/\sqrt{2\lambda t}$. Уравнения возмущенной системы (0.5) для функций $R(\tau), \Psi(\tau)$ принимают вид

$$\frac{dR}{d\tau} = -\partial_\Psi H + \mu P, \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \partial_R H + F + \mu Q.$$

Функции $P(R,\Psi,\tau)$ и $Q(R,\Psi,\tau)$ соответствуют возмущениям в исходных уравнениях (0.5):

$$P(R,\Psi,\tau) = \frac{\widetilde{p}}{\sqrt{\lambda t}}\Big(R_0 + \frac{R}{\sqrt{2}}\Big)\sin(\Psi+\Psi_0), \quad Q(R,\Psi,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda t}}[\,b\,\widetilde{q}\cos(\Psi+\Psi_0) - \widetilde{\varphi}\,].$$

Здесь $\widetilde{p}(R,\Psi,\tau) \equiv p(R_0 + R/\sqrt{2}, \Psi_0 + \Psi, c\tau^{2/3})$, $\widetilde{q}(R,\Psi,\tau) \equiv q(R_0 + R/\sqrt{2}, \Psi_0 + \Psi, c\tau^{2/3})$, $\widetilde{\varphi}(R,\Psi,\tau) \equiv \varphi(R_0 + R/\sqrt{2}, \Psi_0 + \Psi, c\tau^{2/3})$, $c = 3^{2/3}/(2\lambda^{1/3})$.

Лемма 4. *Если в системе* (2.7) *коэффициент* $b > 1$*, тогда существует функция Ляпунова* $V(R,\Psi,\tau)$ *такая, что* $\exists\, \epsilon, \rho_0, \tau_0 = \mathrm{const}$, $0 < \rho_0, \tau_0 < \infty$, $0 < \epsilon < \min\{\beta; 1\}$:

$$\Big(\frac{1-\epsilon}{2}\Big)\rho^2 \le V(R,\Psi,\tau) \le \Big(\frac{1+\epsilon}{2}\Big)\rho^2, \quad \Big|\frac{\partial V}{\partial R}\Big|, \Big|\frac{\partial V}{\partial \Psi}\Big| \le (1+\epsilon)\rho, \quad \frac{dV}{d\tau}\Big|_{(2.7)} \le -\Big(\frac{\beta-\epsilon}{2}\Big)\tau^{-1}\rho^2$$

для всех $(R,\Psi,\tau) \in \mathcal{D}(\rho_0,\tau_0)$ *с константой* $\beta = (b-1)/3 > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к построению функции Ляпунова в виде

$$V(R,\Psi,\tau) = H(R,\Psi,\tau) + V_1(R,\Psi,\tau) + V_2(R,\Psi,\tau),$$

$$V_1 = \frac{(b-1)}{\sqrt{2\lambda c}}\tau^{-1/3}R\Big[1 - \cos\Psi + \frac{R^2}{3} - \frac{\tau^{-1/3}R^3}{8\sqrt{2\lambda c}}\Big] - \frac{b(b-1)}{\lambda c}\tau^{-2/3}\sin^4\frac{\Psi}{2}, \quad V_2 = -\frac{\beta}{2}\tau^{-1}R\Psi.$$

Детали доказательства можно найти в [14].

Устойчивость тривиального решения в уравнениях (2.7) при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5. *Пусть в системе* (2.7) *коэффициент* $b > 1$ *и функции* $(P, Q) \in \mathfrak{P}$ *при* $(R, \Psi, \tau) \in \mathcal{D}(\rho_0, \tau_1)$, $\tau_1 \geq \tau_0$. *Тогда* $\forall\, m > 0$ *тривиальное решение* $R(\tau) \equiv 0$, $\Psi(\tau) \equiv 0$ *уравнений* (2.7) *является устойчивым при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе* $\mathfrak{P}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 4 следует существование функции Ляпунова $V(R, \Psi, \tau)$. Также, как и в лемме 2, определим функцию $W(R, \Psi, \tau) = 2V(R, \Psi, \tau)/(\beta - \epsilon)$ для всех $(R, \Psi, \tau) \in \mathcal{D}(\rho_0, \tau_0)$, которая обладает оценками (1.2) с $\alpha = 1$, $A = (1 - \epsilon)/(\beta - \epsilon)$, $B = (1 + \epsilon)/(\beta - \epsilon)$, $C = 2B$. Затем из теоремы 1 следует устойчивость тривиального решения. Лемма доказана.

Уточним область определения возмущений p, q, φ уравнений (0.2). Области $\mathcal{D}(\rho_0, \tau_0)$ в исходных переменных (r, ψ, t) соответствует Ω_0:

$$\Omega_0 = \Big\{(r, \psi, t) \in \mathbb{R}^3 \colon |r - R_0| < \frac{\rho_0}{\sqrt{2}}, |\psi - \Psi_0| < \rho_0, t > t_0\Big\}, \quad t_0 \equiv \frac{(3\tau_0)^{2/3}}{2\lambda^{1/3}}.$$

В качестве области определения возмущений будем рассматривать множество

$$\Omega = \big\{(r, \psi, t) \in \mathbb{R}^3 \colon |r - \sqrt{\lambda t}| < \varrho_0,\ |\psi - \pi| < \varrho_0,\ t > t_0\big\}$$

с константой $\varrho_0 > 0$: $\Omega_0 \subseteq \Omega$.

Лемма 6. *Пусть в системе* (0.5) *возмущения* p, q, φ *в области* Ω *удовлетворяют оценкам*

$$|p(r, \psi, t)| \leq t^{-3/2}\gamma(\tau), \quad |q(r, \psi, t)| \leq t^{-1}\gamma(\tau), \quad |\varphi(r, \psi, t)| \leq t^{-1}\gamma(\tau) \tag{2.8}$$

с неотрицательной функцией $\gamma(\tau)$, $\tau = t^{3/2} 2\sqrt{2\lambda}/3$, *определенной при* $\tau > \tau_0$. *Тогда существует* $\tau_1 \geq \tau_0$ *такое, что для* $P(R, \Psi, \tau)$ *и* $Q(R, \Psi, \tau)$ *справедливы оценки* $|P(R, \Psi, \tau)| \leq M\tau^{-1}\gamma(\tau)$, $|Q(R, \Psi, \tau)| \leq M\tau^{-1}\gamma(\tau)$, $\forall (R, \Psi, \tau) \in \mathcal{D}(\rho_0, \tau_1)$ *с положительной константой* M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функций P и Q имеют место оценки $|P(R, \Psi, \tau)| \leq |\widetilde{p}\,|\,[1 + M_1 t^{-1}]$, $|Q(R, \Psi, \tau)| \leq (b|\widetilde{q}\,| + |\widetilde{\varphi}\,|)/\sqrt{2\lambda t}$ при $\tau \to \infty$, $\rho < \rho_0$ с константой $0 < M_1 < \infty$. Заметим, что функции $\widetilde{p}(R, \Psi, \tau)$, $\widetilde{q}(R, \Psi, \tau)$, $\widetilde{\varphi}(R, \Psi, \tau)$ в области $\mathcal{D}(\rho_0, \tau_0)$ обладают оценками (2.8). Тогда существует $\tau_1 \geq \tau_0$ и для функций P и Q в области $\mathcal{D}(\rho_0, \tau_1)$ справедливы оценки

$$|P(R, \Psi, \tau)| \leq \frac{4\sqrt{2\lambda}}{3}\tau^{-1}\gamma(\tau), \quad |Q(R, \Psi, \tau)| \leq \frac{2(|b| + 1)}{3}\tau^{-1}\gamma(\tau).$$

Отсюда выводим требуемые оценки с константой $M = \max\{4\sqrt{2\lambda}/3; 2(|b| + 1)/3\}$. Лемма доказана.

Уточним класс возмущений $\mathfrak{M}$ для модели параметрического авторезонанса. Будем считать, что возмущения (p, q, φ) определены на Ω и принадлежат классу $\mathfrak{M}$ с параметрами $v = 3/2$, $u = 1$, $\kappa = 2\sqrt{2\lambda}/3$, $\nu = 3/2$, $\alpha = 1$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если в системе* (0.2) *коэффициент* $b > 1$, *то* $\forall\, m > 0$ *решение* $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ *с асимптотикой* (2.6) *является устойчивым при постоянно действующих возмущениях равномерно в классе* $\mathfrak{M}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из лемм 5 и 6 аналогично теореме 2.

3. Заключение

Таким образом, проведено исследование устойчивости авторезонансных решений уравнений главного и параметрического резонансов. Для каждой системы описан класс возмущений при котором имеет место устойчивость рассматриваемых решений. Также для более общих систем доказано утверждение об устойчивости равновесия относительно постоянно действующих возмущений, ограниченных в среднем, при условии, что для невозмущенной системы существует подходящая функция Ляпунова.

Полученные результаты дают основу для анализа устойчивости авторезонанса при случайных возмущениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 408 с.
2. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 3–72.
3. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 432 с.
4. **Хапаев М.М.** Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высш.шк., 1988. 184 с.
5. **Хасьминский Р.З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
6. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
7. **Кузнецов А.Н.** О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функц. анализ и его приложения. 1989. Т. 23, вып. 4. С. 63–74.
8. **Козлов В.В., Фурта С.Д.** Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М:. Изд-во Моск. ун-та, 1996. 244 с.
9. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений М.: Едиториал, 2004. 552 с.
10. **Гермаидзе В.Е.** Об асимптотической устойчивости по первому приближению // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 1. С. 133–135.
11. **Гермаидзе В.Е., Красовский Н.Н.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 769–774.
12. **Вркоч И.** Интегральная устойчивость // Чехословацкий мат. журн. 1959. Т. 9, № 1. С. 71–129.
13. **Султанов О.А.** Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым // Уфим. мат. журн. 2010. Т. 2, № 4. С. 98–108.
14. **Калякин Л.А., Султанов О.А.** Устойчивость моделей авторезонанса // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 279–293.
15. **Калякин Л.А., Султанов О.А., Шамсутдинов М.А.** Асимптотический анализ модели ядерного магнитного авторезонанса // Теорет. и мат. физика. 2011. Т. 167, № 3. С. 419–430.

Султанов Оскар Анварович
аспирант
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: osa-uf@rambler.ru

Поступила 23.04.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.54

О РАВНОМЕРНЫХ ПОДСТАНОВКАХ С КОНЕЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РАССЕИВАНИЯ[1]

Н. М. Сучков, Ю. С. Тарасов

Изучается группа G равномерных подстановок множества целых чисел с конечными параметрами рассеивания. Доказано, что каждое конечное подмножество из G содержится в подгруппе вида $Q = AB$, где A и B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы из G.

Ключевые слова: группа, равномерная подстановка, параметр рассеивания.

N. M. Suchkov, Yu. S. Tarasov. On uniform permutations with finite dispersion parameters.

We study the group G of uniform permutations of the set of integers with finite dispersion parameters. We prove that every finite subset of G lies in a subgroup of the form $Q = AB$, where A and B are locally finitely approximable subgroups of G.

Keywords: group, uniform permutation, dispersion parameter.

Введение

Пусть $S(\mathbb{Z})$ — группа всех подстановок множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Подстановка $g \in S(\mathbb{Z})$ называется ограниченной, если

$$w(g) = \max_{\alpha\in\mathbb{Z}} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Очевидно, что множество F всех ограниченных подстановок множества $\mathbb{Z}$ является группой. Эта группа изучалась в работах [2; 3] первого из авторов. Доказано, что смешанная подгруппа K, порожденная всеми элементами конечных порядков из F, представима в виде произведения двух локально конечных подгрупп. При этом в K изоморфно вложимы любая счетная свободная группа и 2-группа Алешина [1, с. 218]. Для любой подстановки $g \in S(\mathbb{Z})$ определим ее параметр рассеивания $\lambda(g)$. Для каждого целого числа α определим множества

$$M_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in \mathbb{Z},\, \beta \leqslant \alpha,\, \beta^g > \alpha\}, \quad L_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in \mathbb{Z}, \beta > \alpha,\, \beta^g \leqslant \alpha\}.$$

Полагаем теперь

$$t(g) = \max_{\alpha\in\mathbb{Z}} |M_\alpha(g)|, \quad s(g) = \max_{\alpha\in\mathbb{Z}} |L_\alpha(g)|, \quad \lambda(g) = \max(t(g), s(g)).$$

Нетрудно понять, что множество

$$H = \{g \mid g \in S(\mathbb{Z}),\, \lambda(g) < \infty\}$$

всех подстановок множества $\mathbb{Z}$ с конечными параметрами рассеивания является группой. Из легко проверяемого неравенства $\lambda(g) \leqslant w(g)$ немедленно следует, что F — подгруппа группы H. Заметим, что подстановки из H уже не связаны с расстоянием между точками и их образами, а связаны лишь с естественным упорядочением множества $\mathbb{Z}$. Если, например, $x = (3\,4)(5\,8)\ \ldots\ (2^n+1\ \ 2^{n+1})\ \ldots$, то $\lambda(x) = 1$, $w(x) = \infty$. Поэтому группа H существенно больше группы F.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00509).

Понятие параметра рассеивания подстановки введено в работе [4], в которой изучалась группа подстановок множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел с конечными параметрами рассеивания. Там же подстановка g группы $S(\mathbb{Z})$ названа равномерной, если $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$ при любом $\alpha \in \mathbb{Z}$, и доказано (лемма 5), что множество R всех равномерных подстановок множества $\mathbb{Z}$ является группой. Заметим, что любая подстановка множества $\mathbb{N}$ является равномерной, а группа H не исчерпывается равномерными подстановками. Так, например, если d — сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}$, то $|M_\alpha(d)| = 1$, $|L_\alpha(d)| = 0$. Значит, $d \in H$ и $d \notin R$.

В настоящей статье найдена связь между группой H и группой $G = H \cap R$ всех равномерных подстановок множества $\mathbb{Z}$ с конечными параметрами рассеивания.

Теорема 1. $H = G \leftthreetimes \langle d \rangle$.

Основным же результатом работы является

Теорема 2. *Каждое конечное подмножество элементов группы G содержится в подгруппе вида $Q = AB$, где A и B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы группы G.*

Доказательство теоремы 2 конструктивное. Подгруппа A является объединением возрастающей цепочки подгрупп A_n $(n = 1, 2, \dots)$. Для целых чисел $\alpha < \beta$ множество

$$[\alpha, \beta] = \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}, \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta\}$$

будем называть *отрезком целых чисел.* При фиксированном n подстановки из A_n оставляют на месте компоненты некоторого разбиения множества $\mathbb{Z}$ на отрезки целых чисел, а значит, A_n — финитно аппроксимируемая подгруппа с понятным действием на $\mathbb{Z}$. Подгруппа B устроена аналогично, и согласно теореме 2 мы имеем ясное представление элементов конечно порожденной подгруппы группы G.

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны [1].

1. Равномерные подстановки

В данном разделе работы мы установим два критерия равномерности подстановки множества $\mathbb{Z}$ и докажем теорему 1.

Лемма 1. *Пусть $x \in S(\mathbb{Z})$. Если $M_\gamma(x) = L_\gamma(x) = \varnothing$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{Z}$, то $x \in R$.*

Доказательство. Мы должны показать, что $|M_\alpha(x)| = |L_\alpha(x)| < \infty$ при любом целом α. Если $\alpha = \gamma$, то это верно по условию. Предположим, что $\alpha > \gamma$, и рассмотрим множество $T = \{\beta \mid \beta \in \mathbb{Z}, \gamma < \beta \leqslant \alpha\}$. В силу условия леммы и определения множества $M_\alpha(x)$ справедливы равенства

$$T = M_\alpha(x) \cup (T \cap T^{x^{-1}}), \quad M_\alpha(x) \cap T \cap T^{x^{-1}} = \varnothing. \tag{1.1}$$

Поскольку условие леммы выполняется и для элемента x^{-1}, то аналогично получаем

$$T = M_\alpha(x^{-1}) \cup (T \cap T^{x}), \quad M_\alpha(x^{-1}) \cap T \cap T^{x} = \varnothing. \tag{1.2}$$

Заметим, что $(T \cap T^{x^{-1}})^x = T \cap T^x$, а так как x — подстановка, то $|T \cap T^{x^{-1}}| = |T \cap T^x|$. Отсюда и из равенств (1.1) и (1.2) выводим, что $|M_\alpha(x)| = |M_\alpha(x^{-1})|$. С другой стороны, из определений непосредственно следует, что $M_\alpha(x^{-1}) = (L_\alpha(x))^x$. Таким образом, $|M_\alpha(x)| = |L_\alpha(x)| < \infty$. Это остается справедливым и для случая $\alpha < \gamma$, что можно установить небольшой модификацией приведенных выше рассуждений. Лемма доказана.

Напомним, что подстановка g любого непустого множества M называется финитарной, если множество $\{\alpha \mid \alpha \in M, \alpha^g \neq \alpha\}$ конечно. Очевидно, что все такие подстановки образуют в группе всех подстановок множества M нормальную подгруппу. Обозначим через $Fin(\mathbb{Z})$ группу всех финитарных подстановок множества $\mathbb{Z}$. В силу леммы 1 имеет место включение $Fin(\mathbb{Z}) \subset R$.

Лемма 2. *Пусть $x \in S(\mathbb{Z})$ и $|M_\gamma(x)| = |N_\gamma(x)| < \infty$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{Z}$. Тогда $x \in R$.*

Доказательство. Покажем, что найдется такая финитарная подстановка y, что $M_\gamma(xy) = N_\gamma(xy) = \varnothing$. Действительно, если $M_\gamma(x) = \varnothing$, то достаточно взять $y = 1$. Пусть $M_\gamma(x) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}, N_\gamma(x) = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$. Прямая проверка показывает, что подстановка

$$y = (\alpha_1^x \beta_1^x) \ldots (\alpha_r^x \beta_r^x)$$

является искомой. Теперь по лемме 1 имеем $xy \in R$. Так как $y \in R$, то и $x \in R$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для произвольных $x \in S(\mathbb{Z})$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие утверждения*:
1) $\alpha^{x^{-1}} \leqslant \alpha \Rightarrow M_\alpha(xd) = M_\alpha(x) \cup \{\alpha^{x^{-1}}\}$, $N_\alpha(xd) = N_\alpha(x)$;
2) $\alpha^{x^{-1}} > \alpha \Rightarrow M_\alpha(xd) = M_\alpha(x)$, $N_\alpha(xd) = N_\alpha(x) \setminus \{\alpha^{x^{-1}}\}$;
3) $(\alpha+1)^{x^{-1}} \leqslant \alpha \Rightarrow M_\alpha(xd^{-1}) = M_\alpha(x) \setminus \{(\alpha+1)^{x^{-1}}\}$, $N_\alpha(xd^{-1}) = N_\alpha(x)$;
4) $(\alpha+1)^{x^{-1}} > \alpha \Rightarrow M_\alpha(xd^{-1}) = M_\alpha(x)$, $N_\alpha(xd^{-1}) = N_\alpha(x) \cup \{(\alpha+1)^{x^{-1}}\}$.

Доказательство. Непосредственная проверка.

По определению $M + \varepsilon = \{m + \varepsilon \mid m \in M\}$ для $M \subseteq \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}$. Простая проверка показывает, что верна

Лемма 4. *Для произвольных $x \in S(\mathbb{Z})$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие утверждения*:
1) $(\alpha+1)^x > \alpha \Rightarrow M_\alpha(dx) = (M_\alpha(x) - 1) \cup \{\alpha\}$, $N_\alpha(dx) = N_\alpha(x) - 1$;
2) $(\alpha+1)^x \leqslant \alpha \Rightarrow M_\alpha(dx) = M_\alpha(x) - 1$, $N_\alpha(dx) = (N_\alpha(x) - 1) \setminus \{\alpha\}$;
3) $\alpha^x > \alpha \Rightarrow M_\alpha(d^{-1}x) = (M_\alpha(x) + 1) \setminus \{\alpha + 1\}$, $N_\alpha(d^{-1}x) = N_\alpha(x) + 1$;
4) $\alpha^x \leqslant \alpha \Rightarrow M_\alpha(d^{-1}x) = M_\alpha(x) + 1$, $N_\alpha(d^{-1}x) = (N_\alpha(x) + 1) \cup \{\alpha + 1\}$.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1. Фиксируем целое число γ и элемент $h \in H$. Покажем, что

$$|M_\gamma(h)| - |N_\gamma(h)| = k \Leftrightarrow h \in Gd^k. \tag{1.3}$$

В самом деле, пусть $|M_\gamma(h)| - |N_\gamma(h)| = k$. Если $k = 0$, то в силу леммы 2 имеем $h \in R \cap H = G = Gd^0$. Пусть $k > 0$. Применяя k раз в зависимости от ситуации утверждения 3) или 4) леммы 3, мы придем к равенству

$$|M_\gamma(hd^{-k})| = |N_\gamma(hd^{-k})|.$$

Ввиду леммы 2 имеем $hd^{-k} \in H \cap R = G$, т. е. $h \in Gd^k$. Если $k < 0$, то последнее включение доказывается аналогично применением $|k|$ раз утверждений 1) или 2) леммы 3.

Обратно, пусть $h = gd^k$, где $g \in G$. Если $k = 0$, то h — равномерная подстановка и $|M_\gamma(h)| - |N_\gamma(h)| = 0$. Если же $|k| > 0$, то равенство $|M_\gamma(h)| - |N_\gamma(h)| = k$ устанавливается применением $|k|$ раз соответствующих утверждений леммы 3.

Далее, подобно вышеизложенному с использованием леммы 4 доказывается, что

$$|M_\gamma(h)| - |N_\gamma(h)| = k \Leftrightarrow h \in d^k G. \tag{1.4}$$

Завершим доказательство теоремы 1. Из (1.3), (1.4) следует, что $H = \langle G, d \rangle$ и $G \lhd H$. Теперь из очевидного равенства $G \cap \langle d \rangle = 1$ вытекает, что $H = G \leftthreetimes \langle d \rangle$. Теорема 1 доказана.

2. Предварительная факторизация конечных подмножеств группы G

Приступим к доказательству теоремы 2. Итак, пусть G — группа всех равномерных подстановок множества $\mathbb{Z}$ с конечными параметрами рассеивания, T — произвольное конечное подмножество группы G. Понятно, что мы можем предполагать, что T замкнуто относительно взятия обратных элементов, т. е. $T^{-1} = T$. Если $V \subseteq \mathbb{Z}$, то через V^T будет обозначаться множество $\{m^t \mid m \in V, t \in T\}$. Зададим некоторые разбиения множества $\mathbb{Z}$ на отрезки целых чисел. Начнем с разбиения

$$V_1^0, V_1^1, V_1^{-1}, \ldots, V_1^k, V_1^{-k}, \ldots,$$

которое определим следующим образом: $V_1^0 = [1, 2m_0]$, где m_0 — такое натуральное число, что $m_0 > 1$ и V_1^0 содержит множество $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})^T \cap \mathbb{N}$ (это пересечение конечно, так как является объединением конечного числа конечных множеств $M_0(t), t \in T$); $V_1^1 = [2m_0+1, 2m_1]$, $m_1 > m_0+1$, V_1^1 содержит множество $(V_1^0)^T \setminus \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}, \gamma \leqslant 2m_0\}$; $V_1^{-1} = [-2s_0+1, 0]$, где s_0 — такое натуральное число > 1, что V_1^{-1} содержит конечное множество $\mathbb{N}^T \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, являющееся объединением конечных множеств $L_0(t)$, $t \in T; \ldots$; $V_1^k = [2m_{k-1}+1, 2m_k]$, $m_k > m_{k-1}+1$, V_1^k содержит множество $(V_1^{k-1})^T \setminus \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}, \gamma \leqslant 2m_{k-1}\}$; $V_1^{-k} = [-2s_{k-1}+1, -2s_{k-2}]$, $s_{k-1} > s_{k-2}+1$, V_1^{-k} содержит множество $(V_1^{-k+1})^T \setminus \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z},\ \gamma > -2s_{k-2}\}; \ldots$.

Непосредственно из определения этих отрезков вытекает

Предложение 1. *Для каждого целого числа r выполняется включение*

$$(V_1^r)^T \subset (V_1^{r-1} \cup V_1^r \cup V_1^{r+1}).$$

Следующее разбиение множества $\mathbb{Z}$ получается из предыдущего объединением каждых трех последовательных отрезков, т. е. это разбиение составляют отрезки целых чисел $V_2^r (k \in \mathbb{Z})$, где

$$V_2^r = V_1^{3r} \cup V_1^{3r+1} \cup V_1^{3r+2}.$$

Рассмотрим еще два разбиения множества $\mathbb{Z}$, которые тесно связаны с предыдущими. Первое из них зададим отрезками $U_1^0 = [-s_0+1,\ m_0]$, $U_1^1 = [m_0+1,\ m_0+m_1]$, $U_1^{-1} = [-s_0-s_1+1,\ s_0], \ldots, U_1^k = [m_{k-2}+m_{k-1}+1,\ m_{k-1}+m_k]$, $U_1^{-k} = [-s_k-s_{k-1}+1,\ -s_{k-1}-s_{k-2}], \ldots$. Второе разбиение получается из первого следующим образом:

$$U_2^r = U_1^{3r-1} \cup U_1^{3r} \cup U_1^{3r+1}, \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Сформулируем два предложения, которые являются простыми следствиями предыдущих построений. Если отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит $2n$ чисел $(n > 1)$, то под его левой (соответственно, правой) половиной будем понимать отрезок $[\alpha, \alpha+n-1]$ (соответственно, $[\alpha+n, \beta]$).

Предложение 2. *Для каждого целого числа r отрезок U_2^r состоит из правой половины отрезка V_1^{r-1} и левой половины отрезка V_1^r.*

Предложение 3. *Для каждого целого числа r отрезок U_1^r состоит из непересекающихся отрезков $U_2^r \cap V_2^{r-1}$ и $U_2^r \cap V_2^r$, первый из которых является объединением отрезка V_1^{3r-1} и правой половины отрезка V_1^{3r-2}, а второй — объединением отрезка V_1^{3r} и левой половины отрезка V_1^{3r+1}.*

Положим

$$B_2 = \{x \mid x \in G,\ (V_2^r)^x = V_2^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\},$$

$$A_2 = \{x \mid x \in G,\ (U_2^r)^x = U_2^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\}.$$

Очевидно, B_2, A_2 — подгруппы группы G. Установим важный вспомогательный результат.

Лемма 5. $T \subset B_2A_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть t — произвольный элемент множества T. Определим подстановку $a \in A_2$ действием на компонентах разбиения (2.1) множества $\mathbb{Z}$, элементы которого будем записывать в виде α^t ($\alpha \in \mathbb{Z}$). Фиксируем целое число r и определим действие a на отрезке U_2^r. Обозначим через γ правый конец отрезка V_2^{r-1}, и пусть $\alpha_1^t, \dots, \alpha_m^t$ — все такие элементы множества $\{\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}, \varepsilon \leqslant \gamma\}$, что $\alpha_1 > \gamma, \dots, \alpha_m > \gamma$. Так как t — равномерная подстановка, то найдутся точно m элементов $\beta_1, \dots, \beta_m$ этого множества, для которых $\beta_1^t > \gamma, \dots, \beta_m^t > \gamma$. В силу предложений 1–3 и равенства (2.1) все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_1^t, \dots, \alpha_m^t, \beta_1^t, \dots, \beta_m^t$ содержатся в U_2^r. Полагаем $(\alpha_i^t)^a = \beta_i^t$, $(\beta_i^t)^a = \alpha_i^t$ $(i = 1, \dots, m)$, причем a действует тождественно на остальных точках отрезка U_2^r. Непосредственно из определения параметра рассеивания следует, что $m \leqslant \lambda(t)$, а значит, $\lambda(a) \leqslant \lambda(t)$. Отсюда заключаем, что $a \in A_2$. Заметим теперь, что в силу определения подгруппы B_2 она содержит элемент $b = ta$. Таким образом, $t = ba^{-1} \in B_2A_2$. Следовательно, $T \subset B_2A_2$. Лемма доказана.

3. Окончание доказательства теоремы 2

Завершим доказательство теоремы 2. Для каждого натурального числа n определим индуктивно разбиение множества $\mathbb{Z}$ на попарно не пересекающиеся отрезки $V_n^0, V_n^1, V_n^{-1}, \dots, V_n^r, V_n^{-r}, \dots$. При $n = 1, 2$ эти разбиения определены в предыдущем разделе. Пусть $n > 2$. Для каждого целого числа r полагаем

$$V_n^r = V_{n-1}^{3r} \cup V_{n-1}^{3r+1} \cup V_{n-1}^{3r+2}. \tag{3.1}$$

Далее, исходя из разбиения (2.1), зададим индуктивно при каждом $n > 2$ разбиение множества $\mathbb{Z}$ на попарно не пересекающиеся отрезки

$$U_n^r = U_{n-1}^{3r-1} \cup U_{n-1}^{3r} \cup U_{n-1}^{3r+1}, \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Из предложений 2, 3 и равенств (3.1), (3.2) непосредственно следует

Предложение 4. *Для произвольных целых чисел r и $n > 1$ отрезок U_n^r разбивается на два отрезка $U_n^r \cap V_n^{r-1}$ и $U_n^r \cap V_n^r$. Первый из этих отрезков есть объединение отрезков V_{n-1}^{3r-1} и $U_n^r \cap V_{n-1}^{3r-2}$, а второй — объединение отрезков V_{n-1}^{3r} и $U_n^r \cap V_{n-1}^{3r+1}$.*

Для каждого целого числа $n > 2$ определим группы

$$A_n = \{g \mid g \in G, (U_n^r)^g = U_n^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\},$$

$$B_n = \{g \mid g \in G, (V_n^r)^g = V_n^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\}.$$

Лемма 6. $A_{n-1} < A_n$, $B_{n-1} < B_n$, $A_{n-1}B_{n-1} \subset B_nA_n$ *для всех* $n > 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два включения непосредственно следуют из равенств (3.1), (3.2) и определения групп $A_{n-1}, A_n, B_{n-1}, B_n$. Установим третье включение. Пусть $a \in A_{n-1}$, $b \in B_{n-1}$. Считаем, что $n > 2$ и целое число r фиксированы. Обозначим через γ правый конец отрезка V_n^{r-1}. Если $\alpha \leqslant \gamma$, $\alpha^{ab} > \gamma$, то $\alpha \in (U_n^r \cap V_n^{r-1})$ в силу определения подгрупп A_{n-1}, B_{n-1}, равенств (3.1), (3.2) и предложения 4. Аналогично, если $\beta > \gamma$ и $\beta^{ab} \leqslant \gamma$, то $\beta \in (U_n^r \cap V_n^r)$. Положим $c = ab$, $M_n^r = U_n^r \cap V_n^{r-1}$, $L_n^r = U_n^r \cap V_n^r$. Определим теперь подстановку $x \in A_n$ действием на компоненте U_n^r разбиения (3.2) множества $\mathbb{Z}$. Нам будет удобно записывать целые числа в виде α^c ($\alpha \in \mathbb{Z}$). Пусть $\alpha_1^c, \dots, \alpha_m^c$ — все числа из отрезка M_n^r, для которых $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in L_n^r$. В силу равномерности подстановки c и вышеизложенного найдутся точно m чисел $\beta_1^c, \dots, \beta_m^c$ из отрезка L_n^r, для которых $\beta_1, \dots, \beta_m \in M_n^r$. Полагаем

$$(\alpha_i^c)^x = \beta_i^c, \ (\beta_i^c)^x = \alpha_i^c \ (i = 1, \dots, m)$$

и считаем, что x действует тождественно на остальных числах из отрезка U_n^r. Поскольку m не превосходит параметр рассеивания $\lambda(c)$, то $x \in A_n$. В силу определения подстановки x заключаем, что элемент cx оставляет на месте все компоненты разбиения (3.1), а потому $cx = abx = y \in B_n$. Таким образом, $ab = yx^{-1} \in B_n A_n$. Лемма доказана.

Согласно лемме 6 мы можем образовать в G две возрастающие цепочки подгрупп

$$A_2 < A_3 < \ldots < A_n < \ldots,$$

$$B_2 < B_3 < \ldots < B_n < \ldots .$$

Обозначим через A объединение подгрупп первой цепочки, через B — второй.

Лемма 7. *A и B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы группы G, $Q = AB$ — подгруппа группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу определения подгруппы A каждое ее конечное подмножество содержится в некоторой подгруппе A_n группы G. Согласно определению A_n является подгруппой группы D_n всех подстановок множества $\mathbb{Z}$, которые оставляют на месте конечные отрезки целых чисел (3.2), составляющие разбиение множества $\mathbb{Z}$, и, следовательно, D_n изоморфна декартову произведению конечных симметрических групп. Таким образом, A — локально финитно аппроксимируемая группа. Подобными рассуждениями устанавливается, что этим свойством обладает и группа B.

Далее, по лемме 6 $A_{n-1}B_{n-1} \subset B_n A_n$ для каждого целого числа $n > 2$. Отсюда сразу следует, что $AB \subseteq BA$. Исходя из этого включения, нетрудно установить и обратное включение. В самом деле, мы имеем $(AB)^{-1} \subseteq (BA)^{-1}$, т. е. $B^{-1}A^{-1} \subseteq A^{-1}B^{-1}$ и $BA \subseteq AB$. Следовательно, $Q = AB = BA$ — подгруппы группы G. Лемма доказана.

Теорема 2 является непосредственным следствием лемм 5–7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. **Сучков Н.М.** Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 573–577.
3. **Сучков Н.М.** О подгруппах произведения локально конечных групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 4. С. 408–413.
4. **Сучков Н.М., Маньков А.А., Тарасов Ю.С.** Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания // Журн. Сиб. федер. ун-та. 2012. Т. 5, № 1. С. 116–121. (Математика и физика.)

Сучков Николай Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: ns7654321@mail.ru

Поступила 23.05.2012

Тарасов Юрий Сергеевич
ст. науч. сотрудник
Отд. Академии экологии и природопользования, г. Красноярск
e-mail: gig-torus@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.54+519.17+548.1

КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА СИММЕТРИЧЕСКИХ 2-РАСШИРЕНИЙ d-МЕРНОЙ РЕШЕТКИ И СХОДНЫХ С НЕЙ ГРАФОВ[1]

В. И. Трофимов

Доказывается конечность числа симметрических 2-расширений локально конечного графа в представляющем интерес для приложений случае, когда группа автоморфизмов этого графа содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Получены также некоторые уточнения и обобщения этого результата.

Ключевые слова: граф, группа автоморфизмов, симметрическое расширение графов.

V. I. Trofimov. The finiteness of the number of symmetrical 2-extensions of the d-dimensional lattice and similar graphs.

We prove that there are only finitely many symmetrical 2-extensions of a locally finite graph whenever the automorphism group of the graph has an abelian subgroup of finite index (this case is of interest for certain applications). Some refinements and generalizations of this result are also given.

Keywords: graph, group of automorphisms, symmetrical extension of graphs.

1. Введение

В этой работе будут использоваться следующие, в основном стандартные, обозначения и терминология.

Если Γ — граф (под графом всюду в этой работе понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер), то $V(\Gamma)$ — множество его вершин, $E(\Gamma)$ — множество его ребер. Мы рассматриваем ребра графа Γ как двухэлементные подмножества множества $V(\Gamma)$. Граф Γ' называется подграфом графа Γ, если $V(\Gamma') \subseteq V(\Gamma)$ и $E(\Gamma') \subseteq E(\Gamma)$. Для произвольного непустого подмножества X множества вершин графа Γ подграфом графа Γ, порожденным X, называется граф, у которого множество вершин есть X, а множество ребер есть множество содержащихся в X ребер графа Γ.

Для произвольной вершины v графа Γ через $\Gamma(v)$ обозначается ее окрестность $\{w \in V(\Gamma) : \{v, w\} \in E(\Gamma)\}$ в графе Γ; таким образом, $|\Gamma(v)|$ есть валентность вершины v. Граф Γ называется локально конечным, если валентности всех его вершин конечны.

Для произвольного разбиения σ множества вершин графа Γ через Γ/σ обозначается фактор-граф графа Γ по σ, т. е. граф, у которого множество вершин совпадает с множеством элементов σ, а ребрами являются все такие двухэлементные подмножества $\{X, Y\}$ множества σ, что $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ для некоторых $x \in X, y \in Y$. Если σ — разбиение множества вершин графа Γ и $x \in V(\Gamma)$, то через x^σ обозначается элемент σ, содержащий x.

Если Γ_1, Γ_2 — графы, то под изоморфизмом Γ_1 на Γ_2 мы понимаем биекцию $V(\Gamma_1)$ на $V(\Gamma_2)$, индуцирующую биекцию $E(\Gamma_1)$ на $E(\Gamma_2)$. Соответственно под автоморфизмом графа Γ мы понимаем подстановку на $V(\Gamma)$, индуцирующую подстановку на $E(\Gamma)$. Группа всех автоморфизмов графа Γ обозначается через $Aut(\Gamma)$. (Таким образом, мы рассматриваем $Aut(\Gamma)$ как группу подстановок на $V(\Gamma)$.) Для группы G автоморфизмов графа Γ (т. е. для $G \leq Aut(\Gamma)$)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

и $v \in V(\Gamma)$ через G_v обозначается стабилизатор v в G. Системой импримитивности группы G автоморфизмов графа Γ нам будет удобно называть произвольное G-допустимое разбиение σ множества $V(\Gamma)$ (G-допустимость разбиения σ означает, что для всех $g \in G$ и всех $X \in \sigma$ справедливо $g(X) \in \sigma$). Заметим, что мы рассматриваем разбиение $V(\Gamma)$ на одноэлементные подмножества и разбиение $V(\Gamma)$, состоящее лишь из $V(\Gamma)$, также как системы импримитивности группы G. Элементы системы импримитивности σ называются блоками σ. Если G — группа автоморфизмов графа Γ и σ — ее система импримитивности, то произвольный элемент g группы G индуцирует подстановку на σ, которую мы обозначаем через g^σ, и соответственно группа G индуцирует на σ группу подстановок, которую мы обозначаем через G^σ. Ясно, что при этом $G^\sigma \leq Aut(\Gamma/\sigma)$.

Пусть Γ и Δ — графы. Тогда (см. [1]) связный граф $\tilde{\Gamma}$ называется *симметрическим расширением* графа Γ посредством графа Δ, если найдутся такие вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа $\tilde{\Gamma}$ и ее система импримитивности σ, что, во-первых, существует изоморфизм φ графа $\tilde{\Gamma}/\sigma$ на граф Γ и, во-вторых, подграф графа $\tilde{\Gamma}$, порожденный блоком σ, изоморфен Δ (ясно, что различные блоки σ порождают изоморфные подграфы). Четверку $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ с указанными компонентами мы будем при этом называть *реализацией симметрического расширения* графа Γ посредством графа Δ.

Заметим, что если существует симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ, то графы Γ и Δ допускают вершинно-транзитивные группа автоморфизмов, причем граф Γ связен. Действительно, если $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ — реализация симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ, то $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, стабилизатор блока $X \in \sigma$ в группе G индуцирует на X вершинно-транзитивную группу автоморфизмов изоморфного Δ подграфа графа $\tilde{\Gamma}$, порожденного X, и, наконец, Γ связен, поскольку изоморфен фактор-графу $\tilde{\Gamma}/\sigma$ связного графа $\tilde{\Gamma}$.

Если, помимо графов Γ и Δ, задана вершинно-транзитивная группа H автоморфизмов графа Γ, то (см. [1]) связный граф $\tilde{\Gamma}$ называется *H-симметрическим расширением* графа Γ посредством графа Δ, если найдутся такие вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа $\tilde{\Gamma}$ и ее система импримитивности σ, что, во-первых, существует изоморфизм φ графа $\tilde{\Gamma}/\sigma$ на граф Γ такой, что $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = H$, и, во-вторых, подграф графа $\tilde{\Gamma}$, порожденный блоком σ, изоморфен Δ. (Каждое H-симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ, где H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Γ, является, таким образом, симметрическим расширением Γ посредством Δ.) Четверку $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ с указанными компонентами мы будем при этом называть *реализацией H-симметрического расширения* графа Γ посредством графа Δ.

Для произвольного натурального числа q симметрическое расширение графа Γ посредством любого графа Δ, имеющего q вершин, называется *симметрическим q-расширением* графа Γ.

Естественно рассматривать реализации симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ с точностью до определяемой следующим образом эквивалентности. Назовем реализации $(\tilde{\Gamma}_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\tilde{\Gamma}_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений графа Γ посредством графа Δ *эквивалентными*, если найдется изоморфизм графа $\tilde{\Gamma}_1$ на граф $\tilde{\Gamma}_2$, переводящий σ_1 в σ_2. Про любой изоморфизм с этим свойством будем говорить, что он *осуществляет* эквивалентность реализаций $(\tilde{\Gamma}_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $(\tilde{\Gamma}_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ симметрических расширений Γ посредством Δ.

Исследование симметрических расширений определенных графов Γ посредством определенных графов Δ представляет интерес для геометрической теории групп, теории графов и кристаллографии (см. [1]). В последнем случае Δ интерпретируется как “молекула”, из которых построен “кристалл”, Γ — как “решетка молекул кристалла”, а симметрическое расширение Γ посредством Δ — уже как “решетка атомов кристалла”. Соответственно для кристаллографии интерес представляют графы Γ типа d-мерной (прежде всего, 3-мерной) кубической решетки, причем (как уяснил автор из общения с кристаллографами) едва ли не наибольший интерес представляют симметрические 2-расширения таких графов Γ (т. е. случай, когда Δ — граф на двух вершинах).

Первоначально нашей целью было получение доказательства конечности числа попарно неизоморфных симметрических 2-расширений d-мерной (кубической) решетки для произвольного фиксированного натурального числа d, причем, по возможности, такого доказательства, чтобы из него можно было извлечь алгоритм построения всех (с точностью до изоморфизма) симметрических 2-расширений d-мерной решетки. Полученное в результате такое доказательство оказалось, однако, возможным без существенных изменений перенести на значительно более общий случай симметрических 2-расширений произвольного локально конечного графа, группа автоморфизмов которого содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Не только d-мерная решетка, но и многие другие представляющие интерес для кристаллографии графы удовлетворяют последнему условию. Более того, удалось доказать конечность числа попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений таких графов как посредством графа K_2 (полного графа на двух вершинах), так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$ (дополнительного к K_2 графа).

Теорема 1. *Пусть Γ — локально конечный граф такой, что группа $Aut(\Gamma)$ содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Тогда Γ имеет лишь конечное число попарно неизоморфных симметрических 2-расширений. Более того, имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений графа Γ как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$.*

Теорема 1 доказывается в разд. 3, а в разд. 2 содержатся результаты, используемые при доказательстве теоремы 1. Приводимое доказательство теоремы 1 конструктивно в том смысле, что для заданного (связного) графа Γ, удовлетворяющего условию теоремы 1, оно позволяет, в принципе, найти, с точностью до эквивалентности, все реализации его симметрических расширений как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$. Мы стремились дать доказательство, которое бы, более того, приводило к по возможности простому алгоритму для нахождения, с точностью до эквивалентности, всех реализаций симметрических расширений графа Γ как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$. (Отметим в связи с этим, что уже для нахождения всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических расширений 3-мерной решетки посредством графа K_2 или посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$, требуются компьютерные вычисления, причем уже в этих случаях число получающихся попарно неэквивалентных реализаций весьма велико.)

Приводимое доказательство теоремы 1 может быть легко модифицировано, как это объяснено в разд. 4, в доказательство, по существу, значительно более общей теоремы 2, формулируемой ниже. Наше “нежелание” получать теорему 1 как следствие теоремы 2 объясняется уже отмеченным стремлением дать по возможности просто алгоритмизируемое доказательство именно представляющей интерес для приложений теоремы 1.

Прежде, чем формулировать теорему 2, напомним, что для графа Γ и вершинно-транзитивной группы H его автоморфизмов могут быть легко указаны все H-допустимые подграфы графа Γ (либо в терминах орбиталов группы H, либо, как это сделано в предложении 1 ниже, в терминах орбит стабилизатора вершины графа Γ в группе H на окрестности этой вершины).

Теорема 2. *Пусть Γ — локально конечный граф и H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ. Предположим, что, во-первых, стабилизатор вершины графа Γ в группе H конечно порожден и, во-вторых, для каждого H-допустимого подграфа графа Γ группа, индуцируемая на множестве вершин его связной компоненты стабилизатором этого множества в H, конечно определена. Тогда имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций H-симметрических расширений графа Γ как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$.*

Теорема 1 легко выводится из теоремы 2, для чего следует воспользоваться предложением 3. Отметим, что несложно получить обобщение предложения 3, в котором условие наличия в $Aut(\Gamma)$ абелевой подгруппы конечного индекса заменяется более слабым условием наличия в $Aut(\Gamma)$ нильпотентной подгруппы конечного индекса. С использованием этого обобщения предложения 3 из теоремы 2 легко выводится, что в теореме 1 условие абелевости некоторой подгруппы конечного индекса группы $Aut(\Gamma)$ можно заменить более слабым условием нильпотентности некоторой такой подгруппы. Отметим также, что заменить последнее условие еще более слабым условием разрешимости некоторой подгруппы конечного индекса группы $Aut(\Gamma)$ уже нельзя. Действительно, можно привести пример таких связного локально конечного графа Γ и вершинно-транзитивной двуступенно разрешимой группы H его автоморфизмов с единичным стабилизатором вершины, что имеется бесконечно много попарно неизоморфных H-симметрических расширений Γ как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$ (и, тем более, попарно неэквивалентных реализаций H-симметрических расширений Γ как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$).

Для геометрической теории групп может представлять интерес частный случай теоремы 2, формулируемый ниже как следствие 1. Напомним, что для группы G и ее порождающего множества X такого, что $X = X^{-1}$ и $1 \notin X$, графом Кэли G, построенным по X, называется граф $\Gamma_{G,X}$ с G в качестве множества вершин и $\{\{g_1, g_2\} : g_1, g_2 \in G, g_1^{-1}g_2 \in X\}$ в качестве множества ребер. Обозначая через λ_G действие группы G на множестве своих элементов левым сдвигом, получаем, что $\lambda_G(G)$ — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа $\Gamma_{G,X}$ с единичным стабилизатором вершины. Отметим также, что $\Gamma_{G,X}$ — связный граф валентности $|X|$. Кроме того, множества вершин связных компонент, содержащих вершину 1, всевозможных $\lambda_G(G)$-допустимых подграфов графа $\Gamma_{G,X}$ есть в точности подгруппы группы G, порожденные подмножествами множества X, а стабилизаторы этих подгрупп в группе $\lambda_G(G)$ есть в точности их образы при действии λ_G.

Следствие 1. *Пусть $\Gamma_{G,X}$ — граф Кэли группы G, построенный по ее конечному порождающему множеству X, $X = X^{-1}$, $1 \notin X$. Предположим, что любое подмножество множества X порождает конечно определенную подгруппу группы G. Тогда имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций $\lambda_G(G)$-симметрических расширений графа $\Gamma_{G,X}$ как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$.*

В связи со следствием 1 заметим, что, как показывает упомянутый выше пример, найдется такая двуступенно разрешимая группа G с конечным порождающим множеством X, $X = X^{-1}$, $1 \notin X$, что имеется бесконечно много попарно неизоморфных $\lambda_G(G)$-симметрических расширений графа $\Gamma_{G,X}$ как посредством графа K_2, так и посредством графа $\bar{\mathrm{K}}_2$.

Важно отметить, что теоремы 1, 2 и следствие 1 остаются справедливыми, если заменить в них 2-расширения и расширения посредством графа K_2 или графа $\bar{\mathrm{K}}_2$ соответственно на p-расширения и на расширения посредством произвольного фиксированного графа на p вершинах, где p — простое число. Однако доказательства в этом более общем случае становятся технически сложнее и, что принципиально для нас в этой работе (см. выше), хотя и остаются алгоритмизируемыми, но, скорее, в представляющем лишь теоретический интерес смысле. Мы рассмотрим этот более общий случай в другой работе.

2. Вспомогательные результаты

Результаты этого раздела используются при доказательстве теоремы 1 в разд. 3 и доказательстве теоремы 2 в разд. 4. Некоторые из них формулируются и доказываются в большей, чем это необходимо для доказательства теорем 1 и 2, общности, поскольку, как представляется, могут найти и другие применения.

Следующие предложения 1 и 2, по существу, очевидны. Напомним, что если G — транзитивная группа подстановок на множестве V, $v \in V$ и O — G_v-орбита, то подмножество $\{g^{-1}(v) : g \in G, g(v) \in O\}$ множества V также есть G_v-орбита, которая называется спаренной с O.

Предложение 1. *Пусть Γ — граф и G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ. Пусть, кроме того, v — вершина графа Γ и $\mathcal{X}$ — множество всех подмножеств множества $\Gamma(v)$, которые могут быть представлены как объединение такого (возможно, пустого) набора G_v-орбит на $\Gamma(v)$, что G_v-орбиты на $\Gamma(v)$ входят в этот набор лишь вместе со своими спаренными (ясно, что G_v-орбита, спаренная с G_v-орбитой на $\Gamma(v)$, также содержится в $\Gamma(v)$). Для каждого $X \in \mathcal{X}$ обозначим через Γ_X подграф графа Γ с $V(\Gamma)$ в качестве множества вершин и $\{\{g(v), g(w)\} : w \in X, g \in G\}$ в качестве множества ребер. Тогда сопоставление каждому $X \in \mathcal{X}$ подграфа Γ_X графа Γ есть биекция множества $\mathcal{X}$ на множество подграфов графа Γ, допускающих G в качестве группы автоморфизмов, причем для каждого $X \in \mathcal{X}$ имеем $\Gamma_X(v) = X$.*

В частности, если Γ — локально конечный граф и G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, то имеется лишь конечное число подграфов графа Γ, допускающих G в качестве группы автоморфизмов.

Предложение 2. *Пусть для каждого $i \in \{1, 2\}$ имеются граф Γ_i, вершинно-транзитивная группа G_i автоморфизмов графа Γ_i, система импримитивности σ_i группы G_i, вершина u_i графа Γ_i и такой набор $\{g_{i,j} : j \in J\}$ элементов группы G_i, что вершины $g_{i,j}(u_i)$, $j \in J$, попарно различны и составляют множество $\Gamma_i(u_i)$. Пусть, кроме того, имеется изоморфизм α группы G_1 на группу G_2, который отображает стабилизатор вершины u_1 в группе G_1 на стабилизатор вершины u_2 в группе G_2, отображает стабилизатор множества $u_1^{\sigma_1}$ в группе G_1 на стабилизатор множества $u_2^{\sigma_2}$ в группе G_2 и, наконец, для каждого $j \in J$ отображает элемент $g_{1,j}$ в элемент $g_{2,j}$. Тогда, сопоставляя образу вершины u_1 под действием произвольного элемента $g \in G_1$ образ вершины u_2 под действием элемента $\alpha(g)$, мы получим корректно определенное отображение $V(\Gamma_1)$ на $V(\Gamma_2)$, которое является изоморфизмом Γ_1 на Γ_2, переводящим σ_1 в σ_2.*

При формулировании предложения 3 нами используется следующее простое наблюдение: если G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов связного локально конечного графа Γ и стабилизатор вершины графа Γ в группе G конечен, то G конечно порождена и имеет лишь конечное число вершинно-транзитивных подгрупп. Чтобы убедиться в справедливости этого наблюдения достаточно заметить, что если v — вершина графа Γ, то, во-первых, для каждой вершины w графа Γ в группе G имеется в точности $|G_v|$ элементов, отображающих v в w (они составляют левый смежный класс G по G_v), и, во-вторых, при $\Gamma(v) = \{w_1, \ldots, w_m\}$, где m — валентность Γ, каждая вершинно-транзитивная подгруппа группы G порождается объединением некоторой подгруппы группы G_v и некоторого подмножества $\{g_1, \ldots, g_m\}$ группы G, где $g_k(v) = w_k$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Предложение 3. *Пусть Γ — связный локально конечный граф такой, что группа $Aut(\Gamma)$ вершинно-транзитивна и содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Тогда стабилизатор вершины графа Γ в группе $Aut(\Gamma)$ конечен и, следовательно, $Aut(\Gamma)$ конечно порождена и имеет лишь конечное число вершинно-транзитивных подгрупп.*

Доказательство. Если A — абелева подгруппа конечного индекса группы $Aut(\Gamma)$, то (поскольку $Aut(\Gamma)$ вершинно-транзитивна) A имеет конечное число, скажем t, орбит на $V(\Gamma)$. При этом на каждой из своих орбит A, будучи абелевой группой, индуцирует регулярную группу подстановок (или, другими словами, для произвольной вершины v графа Γ группа A_v индуцирует единичную группу на A-орбите, содержащей v). Поэтому, если $v_1, \ldots, v_t$ — представители A-орбит на $V(\Gamma)$, то $A_{v_1} \cap \ldots \cap A_{v_t} = 1$. Но в силу связности и локальной конечности графа Γ индекс $|A_{v_1} : A_{v_1} \cap \ldots \cap A_{v_t}|$ конечен. Таким образом, группа A_{v_1} конечна, что в силу $|G_{v_1}| = |G_{v_1} : A_{v_1}||A_{v_1}| \leq |G : A||A_{v_1}|$ влечет конечность группы G_{v_1}. Предложение доказано.

Следующее простое предложение выявляет важную для доказательства теорем 1 и 2 специфику симметрических расширений графов посредством графов на двух вершинах.

Предложение 4. *Пусть Γ — граф и σ — система импримитивности с двухэлемент-*

ными блоками некоторой вершинно-транзитивной группы автоморфизмов графа Γ. *Тогда следующие условия равносильны.*

а) *Существует неединичный автоморфизм* g *графа* Γ, *оставляющий на месте все блоки системы импримитивности* σ.

б) *Подстановка на* $V(\Gamma)$, *которая одновременно меняет местами вершины внутри всех блоков системы импримитивности* σ, *является автоморфизмом графа* Γ.

в) *Если* $\{w, w'\}$ — *ребро графа* Γ/σ, $w = \{x_1, x_2\}$, $w' = \{x'_1, x'_2\}$ (*где* x_1, x_2, x'_1, x'_2 — *вершины графа* Γ), *то справедливо одно из следующих утверждений*:

(в1) *в графе* Γ *каждая из вершин* x_1, x_2 *смежна в точности с одной из вершин* x'_1, x'_2 *и каждая из вершин* x'_1, x'_2 *смежна в точности с одной из вершин* x_1, x_2;

(в2) *в графе* Γ *каждая из вершин* x_1, x_2 *смежна с каждой из вершин* x'_1, x'_2.

Доказательство. Очевидным образом б) влечет а), а в) влечет б). Покажем, что а) влечет в). Поскольку σ — система импримитивности (с двухэлементными блоками) некоторой вершинно-транзитивной группы автоморфизмов графа Γ, то следствием нашего предположения о выполнении условия а) является наличие для произвольного блока X системы импримитивности σ такого автоморфизма g_X графа Γ, что g_X меняет местами вершины из X и оставляет на месте все блоки системы импримитивности σ. Если теперь $\{w, w'\}$ — произвольное ребро графа Γ/σ, $w = \{x_1, x_2\}$ и $w' = \{x'_1, x'_2\}$ (где x_1, x_2, x'_1, x'_2 — вершины графа Γ), то наличие автоморфизмов $g_{\{x_1,x_2\}}$ и $g_{\{x'_1,x'_2\}}$ графа Γ влечет, что в графе Γ либо каждая из вершин x_1, x_2 смежна в точности с одной из вершин x'_1, x'_2 и каждая из вершин x'_1, x'_2 смежна в точности с одной из вершин x_1, x_2, либо каждая из вершин x_1, x_2 смежна с каждой из вершин x'_1, x'_2. Следовательно, а) влечет в), что завершает доказательство предложения.

Следующее очевидное предложение делает возможным при рассмотрении (с точностью до эквивалентности) реализаций симметрических 2-расширений графа ограничиться рассмотрением реализаций симметрических расширений этого графа посредством графа K_2.

Предложение 5. *Пусть* Γ — *граф и* n — *натуральное число. Для произвольной реализации* $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ *симметрического расширения графа* Γ *посредством графа* $\bar{\mathrm{K}}_n$ (*графа, дополнительного к полному графу на* n *вершинах* K_n) *обозначим через* $\tilde{\Gamma}_\sigma$ *граф, множество вершин которого совпадает с* $V(\tilde{\Gamma})$, *а множество ребер есть* $E(\tilde{\Gamma}) \cup \{\{x_1, x_2\} : x_1, x_2 \in V(\tilde{\Gamma}), x_1 \neq x_2, x_1^\sigma = x_2^\sigma\}$. *Тогда* $(\tilde{\Gamma}_\sigma, G, \sigma, \varphi)$ *есть реализация симметрического расширения графа* Γ *посредством графа* K_n. *Более того, при таком сопоставлении реализациям* $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ *симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* $\bar{\mathrm{K}}_n$ *реализаций* $(\tilde{\Gamma}_\sigma, G, \sigma, \varphi)$ *симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* K_n *эквивалентные реализации переходят в эквивалентные, а неэквивалентные реализации — в неэквивалентные.*

Наконец, нам потребуется ряд результатов относительно того, что условно можно назвать координатизацией реализаций симметрических расширений графов. В предложениях 6 и 7 мы сопоставим произвольной реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ симметрического расширения какого-либо графа Γ посредством какого-либо графа Δ эквивалентную ей реализацию, компоненты которой определяются в терминах группы G (и некоторых ее подгрупп и подмножества). Это можно интерпретировать как своего рода координатизацию реализации $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ посредством группы G. Такая координатизация делает возможным (как будет продемонстрировано далее при доказательстве теорем 1 и 2) весьма эффективным образом использовать теорию групп для изучения симметрических расширений графов.

Для группы A и ее подгруппы B мы будем обозначать через A/B множество (всех) левых смежных классов A по B, а через $\lambda_{A/B}$ действие группы A на A/B левым сдвигом.

Пусть G — группа и L — подгруппа группы G. Пусть, кроме того, $\mathcal{P}$ — некоторое множество двухэлементных подмножеств множества G/L вида $\{L, gL\}$, $g \in G$. Тогда через $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ мы обозначаем граф с множеством вершин G/L и множеством ребер $\{\lambda_{G/L}(g)(P) : P \in \mathcal{P}, g \in G\}$. Заметим, что $\lambda_{G/L}(G)$ — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$.

Если K — содержащая L подгруппа группы G, то

$$\sigma_{G,K,L} := \{\lambda_{G/L}(g)(K/L) : g \in G\}$$

есть система импримитивности группы $\lambda_{G/L}(G)$ на G/L. При этом подграф графа $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$, порожденный блоком K/L этой системы импримитивности, есть, очевидно, $\Gamma_{K,L,\mathcal{P}_K}$, где $\mathcal{P}_K$ состоит из тех элементов $\mathcal{P}$, которые содержатся в K/L. Кроме того, естественное отображение

$$\varphi_{G,K,L} : \sigma_{G,K,L} \to G/K, \varphi_{G,K,L}(\lambda_{G/L}(g)(K/L)) = gK \text{ для всех } g \in G,$$

есть изоморфизм графа $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}/\sigma_{G,K,L}$ на граф $\Gamma_{G,K,\mathcal{P}_{G/K}}$, где

$$\mathcal{P}_{G/K} := \Big\{\{K, X\} : X \in G/K, \{L, xL\} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_K \text{ для некоторого } x \in X\Big\}.$$

Таким образом, если граф $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ связен, то он является симметрическим расширением графа $\Gamma_{G,K,\mathcal{P}_{G/K}}$ посредством графа $\Gamma_{K,L,\mathcal{P}_K}$, причем $(\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}, \lambda_{G/L}(G), \sigma_{G,K,L}, \varphi_{G,K,L})$ есть реализация этого расширения.

Как показывает несложная проверка, справедливо следующее предложение.

Предложение 6. *Пусть* $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ *— произвольная реализация симметрического расширения графа* Γ *посредством графа* Δ, u *— некоторая вершина графа* $\tilde{\Gamma}$, $L := G_u$ *— стабилизатор* u *в* G, K *— стабилизатор множества* u^σ *в* G *и* $\{g_j : j \in J\}$ *— такой набор элементов группы* G, *что вершины* $g_j(u), j \in J$, *попарно различны и составляют множество* $\tilde{\Gamma}(u)$. *Тогда (во введенных выше обозначениях) для* $\mathcal{P} := \{\{L, g_jL\} : j \in J\}$ *отображение*

$$\psi_{G,L,u} : G/L \to V(\tilde{\Gamma}), \psi_{G,L,u}(gL) = g(u) \text{ для всех } g \in G,$$

есть изоморфизм графа $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ *на граф* $\tilde{\Gamma}$, *отображающий блоки системы импримитивности* $\sigma_{G,K,L}$ *группы* $\lambda_{G/L}(G)$ *автоморфизмов графа* $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ *на блоки системы импримитивности* σ *группы* G *автоморфизмов графа* $\tilde{\Gamma}$. *При этом для произвольного* $g \in G$ *имеет место равенство* $g\psi_{G,L,u} = \psi_{G,L,u}\lambda_{G/L}(g)$ *отображений из* G/L *в* $V(\tilde{\Gamma})$.

Непосредственным следствием предложения 6 является следующее предложение.

Предложение 7. *Пусть выполнено условие предложения* 6. *Тогда (во введенных выше обозначениях) справедливы следующие утверждения*:

1) *отображение*

$$\pi : G/K \to V(\Gamma), \pi(gK) = \varphi(g(u)^\sigma) \text{ для всех } g \in G,$$

есть изоморфизм графа $\Gamma_{G,K,\mathcal{P}_{G/K}}$ *на граф* Γ;

2) *отображение*

$$\chi : K/L \to u^\sigma, \chi(gL) = g(u) \text{ для всех } g \in K,$$

есть изоморфизм графа $\Gamma_{K,L,\mathcal{P}_K}$ *на (изоморфный* Δ*) подграф графа* $\tilde{\Gamma}$, *порожденный множеством вершин* u^σ;

3) *изоморфизм* $\psi_{G,L,u}$ *графа* $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ *на граф* $\tilde{\Gamma}$ *осуществляет эквивалентность реализаций* $(\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}, \lambda_{G/L}(G), \sigma_{G,K,L}, \pi\varphi_{G,K,L})$ *и* $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$*-симметрических расширений графа* Γ *посредством графа* Δ.

Следующее предложение легко может быть получено с использованием предложений 6 и 7.

Предложение 8. *Пусть* $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ *— такая реализация симметрического расширения графа* Γ *посредством графа* Δ, *что ядро индуцированного действия* $G \to G^\sigma$ *единично. Обозначим через* H *вершинно-транзитивную подгруппу* $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ *группы* $Aut(\Gamma)$. *Пусть, далее,* v *— некоторая вершина графа* Γ, $K := H_v$ *— стабилизатор* v *в* H *и* $\{h_j : j \in J\}$ *— такой набор элементов группы* H, *что вершины* $h_j(v), j \in J$, *попарно различны и составляют множество* $\Gamma(v)$ *(таким образом,* $|J| = |\Gamma(v)|$*). Тогда для некоторой подгруппы* L *индекса* $|V(\Delta)|$

группы K и произвольной системы представителей M левых смежных классов K по L найдутся такое подмножество P множества M, не содержащее представителя L, и такие подмножества $P_j, j \in J$, множества M, что (во введенных выше обозначениях) для

$$\mathcal{P} := \{\{L, gL\} : g \in P\} \cup \{\{L, h_j gL\} : j \in J, g \in P_j\}$$

граф $\Gamma_{H,K,\mathcal{P}_{H/K}}$ изоморфен графу Γ, граф $\Gamma_{K,L,\mathcal{P}_K}$ изоморфен графу Δ и реализация $(\tilde{\Gamma}, G, \sigma, \varphi)$ H-симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ эквивалентна реализации $(\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}, \lambda_{H/L}(H), \sigma_{H,K,L}, \pi\varphi_{H,K,L})$, где π — некоторый изоморфизм графа $\Gamma_{H,K,\mathcal{P}_{H/K}}$ на граф Γ, H-симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ.

3. Доказательство теоремы 1

Согласно предложению 5 для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что для каждого графа Γ, удовлетворяющего условию теоремы 1, имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций симметрических расширений Γ посредством графа K_2.

Пусть Γ — произвольный граф, удовлетворяющий условию теоремы 1, и $\{(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i) : i \in I\}$ — некоторая система представителей (всех) классов эквивалентных между собой реализаций симметрических расширений Γ посредством графа K_2. Наша цель — доказать, что множество I конечно.

Если Γ несвязен, то $I = \varnothing$. Будем поэтому предполагать, что Γ — связный граф.

Согласно предложению 3 в группе $Aut(\Gamma)$ имеется лишь конечное число вершинно-транзитивных подгрупп и, тем более, лишь конечное число, скажем k, классов сопряженных вершинно-транзитивных подгрупп. Пусть $\{H_1, \ldots, H_k\}$ — некоторая система представителей этих классов. Так как для каждого $i \in I$ подгруппа $\varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1}$ группы $Aut(\Gamma)$ вершинно-транзитивна, то, заменяя для $i \in I$ в случае необходимости $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ на реализацию, получаемую из нее домножением изоморфизма φ_i слева на подходящий автоморфизм графа Γ (получаемая таким образом реализация, очевидно, эквивалентна $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$), мы будем, не теряя общности, предполагать, что $\varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1} \in \{H_1, \ldots, H_k\}$ для всех $i \in I$. Теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что для произвольной подгруппы H из множества $\{H_1, \ldots, H_k\}$ подгрупп группы $Aut(\Gamma)$ множество

$$I_H := \{i \in I : \varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1} = H\} \tag{3.1}$$

конечно.

Итак, пусть $H \in \{H_1, \ldots, H_k\}$ и I_H — множество, определенное согласно (3.1). Зафиксируем некоторую вершину v графа Γ. Согласно предложению 3 группа H_v (стабилизатор вершины v в группе H) конечна. Зафиксируем некоторое порождающее множество $\{a_1, \ldots, a_s\}$ (s — целое положительное число) группы H_v и некоторый набор $\{h_j : j \in J\}$ элементов группы H такой, что вершины $h_j(v), j \in J$, попарно различны и составляют множество $\Gamma(v)$ (таким образом, $|J| = |\Gamma(v)|$). Ясно, что в силу связности графа Γ группа H порождается множеством $\{a_1, \ldots, a_s, h_j : j \in J\}$.

Обозначим через $I_{H,1}$ множество таких $i \in I_H$, что лишь единичный автоморфизм графа Γ_i оставляет на месте каждый блок системы импримитивности σ_i (группы G_i на $V(\Gamma_i)$), и положим $I_{H,2} := I_H \setminus I_{H,1}$. Мы докажем конечность каждого из множеств $I_{H,1}$, $I_{H,2}$.

Докажем конечность множества $I_{H,1}$. Для каждого $i \in I_{H,1}$ ядро индуцированного действия $G_i \to G_i^{\sigma_i}$ единично, что в силу (3.1) и предложения 8 влечет эквивалентность $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ и $(\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}, \lambda_{H/L}(H), \sigma_{H,K,L}, \pi\varphi_{H,K,L})$, где $K = H_v$, L — некоторая подгруппа индекса 2 группы K и, если $\{1, a\}$ — система представителей левых смежных классов K по L, то $\mathcal{P} = \{\{L, aL\}\} \cup \{\{L, h_j gL\} : j \in J, g \in P_j\}$ для некоторых подмножеств $P_j, j \in J$, множества $\{1, a\}$, а π — некоторый изоморфизм $\Gamma_{H,K,\mathcal{P}_{H/K}}$ на Γ. Так как согласно предложению 3 подгруппа $K = H_v$ группы H конечна, отсюда следует конечность множества $I_{H,1}$.

Докажем конечность множества $I_{H,2}$, что завершит доказательство теоремы. Предварительно заметим, что согласно предложению 4 для каждого $i \in I_{H,2}$ имеется автоморфизм c_i графа Γ_i, который одновременно меняет местами вершины внутри всех блоков системы импримитивности σ_i (группы G_i на $V(\Gamma_i)$). Ясно, что c_i имеет порядок 2 и централизует G_i. Поскольку (для $i \in I_{H,2}$) $(\Gamma_i, \langle G_i, c_i\rangle, \sigma_i, \varphi_i)$ есть, очевидно, реализация симметрического расширения графа Γ посредством графа K_2, эквивалентная $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$, то, не теряя общности, будем в дальнейшем считать, что для каждого $i \in I_{H,2}$ имеет место включение $c_i \in G_i$. Далее, согласно предложению 4 для любого $i \in I_{H,2}$, если $\{w, w'\}$ — ребро графа Γ_i/σ_i, $w = \{x_1, x_2\}$, $w' = \{x'_1, x'_2\}$ (где x_1, x_2, x'_1, x'_2 — вершины графа Γ_i), то справедливо одно из следующих утверждений:

(1) в графе Γ_i каждая из вершин x_1, x_2 смежна в точности с одной из вершин x'_1, x'_2 и каждая из вершин x'_1, x'_2 смежна в точности с одной из вершин x_1, x_2;

(2) в графе Γ_i каждая из вершин x_1, x_2 смежна с каждой из вершин x'_1, x'_2.

Соответственно, в зависимости от того, какое из утверждений (1) или (2) имеет место, мы будем говорить, что ребро $\{w, w'\}$ графа Γ_i/σ_i имеет тип 1 или тип 2.

Для каждого $i \in I_{H,2}$ обозначим через $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ подграф графа Γ_i/σ_i с множеством вершин, равным $V(\Gamma_i/\sigma_i)$, ребрами которого являются в точности все ребра типа 1 графа Γ_i/σ_i. Ясно, что при этом $G_i^{\sigma_i} \le Aut((\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)})$, откуда с учетом (3.1) следует, что φ_i есть изомофизм графа $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ на подграф графа Γ, допускающий H в качестве группы автоморфизмов. Но согласно предложению 1 имеется лишь конечное число подграфов графа Γ, допускающих H в качестве группы автоморфизмов. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что для произвольного допускающего H в качестве группы автоморфизмов подграфа Σ графа Γ множество $I_{H,2,\Sigma}$, определяемое как множество всех тех $i \in I_{H,2}$, для которых φ_i есть изомофизм графа $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ на граф Σ, конечно.

Итак, пусть Σ — произвольный подграф графа Γ, допускающий H в качестве группы автоморфизмов. Положим $J_\Sigma := \{j \in J : h_j(v) \in \Sigma(v)\}$. Заметим, что согласно предложению 1 множество $\{h_j(v) : j \in J_\Sigma\} = \Sigma(v)$ есть объединение некоторого множества H_v-орбит на $\Gamma(v)$, причем H_v-орбиты входят в это множество лишь вместе со своими спаренными (в H). Обозначим через Σ^v подграф графа Σ, являющийся его связной компонентой, содержащей вершину v. Ясно, что подгруппа Q группы H, порожденная $\{a_1, \ldots, a_s, h_j : j \in J_\Sigma\}$, имеет множество $V(\Sigma^v)$ в качестве своей орбиты и совпадает со стабилизатором этого множества в группе H. Обозначим через ρ гомоморфизм ограничения группы Q (как группы подстановок на $V(\Gamma)$) на множество $V(\Sigma^v)$. Группа $\rho(Q)$, таким образом, является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа Σ^v, порожденной множеством $\{\rho(a_1), \ldots, \rho(a_s), \rho(h_j) : j \in J_\Sigma\}$. Так как по условию группа $Aut(\Gamma)$ содержит абелеву подгруппу конечного индекса, то этим свойством обладает и группа $\rho(Q)$ (как гомоморфный образ подгруппы группы $Aut(\Gamma)$). В частности, найдется конечное множество слов

$$\{W_1, \ldots, W_r\}$$

над алфавитом

$$\Big\{\rho(a_1), \rho(a_1)^{-1}, \ldots, \rho(a_s), \rho(a_s)^{-1}, \rho(h_j), \rho(h_j)^{-1} : j \in J_\Sigma\Big\},$$

которое является множеством определяющих соотношений группы $\rho(Q)$ для ее порождающего множества $\{\rho(a_1), \ldots, \rho(a_s), \rho(h_j) : j \in J_\Sigma\}$.

Для каждого $i \in I_{H,2,\Sigma}$ выберем произвольным образом вершину $v_i \in \varphi_i^{-1}(v)$ и обозначим через Σ_i подграф графа Γ_i с множеством вершин, равным $V(\Gamma_i)$, ребрами которого являются в точности все такие ребра $\{x, x'\}$ графа Γ_i, что либо $x^{\sigma_i} = (x')^{\sigma_i}$, либо $\{x^{\sigma_i}, (x')^{\sigma_i}\}$ — ребро типа 1 графа Γ_i/σ_i. Таким образом, граф Σ_i/σ_i совпадает с графом $(\Gamma_i/\sigma_i)_{(1)}$ и φ_i есть изоморфизм графа Σ_i/σ_i на граф Σ. Ясно, кроме того, что $G_i \le Aut(\Sigma_i)$ и, в частности, $c_i \in Aut(\Sigma_i)$, где, напомним, c_i — автоморфизм графа Γ_i, который одновременно меняет местами вершины внутри всех блоков системы импримитивности σ_i (группы G_i на $V(\Gamma_i)$). Определим гомоморфизм α_i группы G_i на группу $H = \varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1}$, полагая

$$\alpha_i(g) = \varphi_i g^{\sigma_i} \varphi_i^{-1} \text{ для всех } g \in G_i.$$

Заметим, что c_i принадлежит ядру α_i. Пусть $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}$ — некоторые прообразы при гомоморфизме α_i элементов $a_1, \ldots, a_s$ соответственно. Поскольку каждый из элементов $a_1, \ldots, a_s$ стабилизирует вершину v, то для каждого из элементов $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}$ справедливо, что либо он сам, либо он, домноженный на элемент c_i, стабилизирует вершину v_i. Домножая в случае необходимости некоторые из элементов $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}$ на элемент c_i, мы, не теряя общности, будем в дальнейшем предполагать, что каждый из элементов $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}$ стабилизирует вершину v_i. Далее, пусть $h_{i,j}, j \in J_\Sigma$, — некоторые прообразы при гомоморфизме α_i элементов $h_j, j \in J_\Sigma$, соответственно. Тогда, поскольку вершины $h_j(v), j \in J_\Sigma$, графа Γ попарно различны и составляют множество $\Sigma(v)$, вершины $(h_{i,j}(v_i))^{\sigma_i} = \varphi_i^{-1}(h_j(v)), j \in J_\Sigma$, графа Γ_i/σ_i попарно различны и составляют множество $\Sigma_i/\sigma_i(v_i^{\sigma_i})$. При этом в силу того, что ребра графа Σ_i/σ_i являются ребрами типа 1 графа Γ_i/σ_i, для каждого $j \in J_\Sigma$ вершина v_i смежна в графе Σ_i в точности с одной из вершин $h_{i,j}(v_i), c_i h_{i,j}(v_i)$. Домножая в случае необходимости некоторые из элементов $h_{i,j}, j \in J_\Sigma$, на элемент c_i, мы, не теряя общности, будем в дальнейшем предполагать, что вершины $c_i(v_i), h_{i,j}(v_i), j \in J_\Sigma$, графа Γ_i попарно различны и составляют множество $\Sigma_i(v_i)$.

Для каждого $i \in I_{H,2,\Sigma}$ обозначим через $\Sigma_i^{v_i}$ подграф графа Σ_i, являющийся его связной компонентой, содержащей вершину v_i. Произвольный блок системы импримитивности σ_i (группы G_i на $V(\Gamma_i)$) либо пересекается с $V(\Sigma_i^{v_i})$ по пустому множеству, либо содержится в $V(\Sigma_i^{v_i})$ (поскольку порождает в Σ_i подграф, изоморфный K_2). Обозначим через $\hat{\sigma}_i$ разбиение множества $V(\Sigma_i^{v_i})$, состоящее из содержащихся в нем блоков σ_i. Пусть, кроме того, $\hat{\varphi}_i$ — ограничение изоморфизма φ_i на подмножество $V(\Sigma_i^{v_i}/\hat{\sigma}_i)$ множества $V(\Sigma_i/\sigma_i)$. Очевидным образом $\hat{\varphi}_i$ является изоморфизмом графа $\Sigma_i^{v_i}/\hat{\sigma}_i$ на граф Σ^v.

Для каждого $i \in I_{H,2,\Sigma}$ обозначим через Q_i подгруппу группы G_i, порожденную множеством $\{c_i, a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}, h_{i,j} : j \in J_\Sigma\}$. По нашему выбору элементов $c_i, a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}, h_{i,j}$, $j \in J_\Sigma$, подгруппа Q_i группы G_i имеет множество $V(\Sigma_i^{v_i})$ в качестве своей орбиты и совпадает на $V(\Sigma_i^{v_i})$ со стабилизатором этого множества в группе G_i. Обозначим через ρ_i гомоморфизм ограничения группы Q_i (как группы подстановок на $V(\Gamma_i)$) на множество $V(\Sigma_i^{v_i})$. Группа $\rho_i(Q_i)$, таким образом, является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа $\Sigma_i^{v_i}$, порожденной множеством элементов $\{\rho_i(c_i), \rho_i(a_{i,1}), \ldots, \rho_i(a_{i,s}), \rho_i(h_{i,j}) : j \in J_\Sigma\}$. Определим гомоморфизм $\hat{\alpha}_i$ группы $\rho_i(Q_i)$ на группу $\rho(Q) = \hat{\varphi}_i \rho_i(Q_i)^{\hat{\sigma}_i} \hat{\varphi}_i^{-1}$, полагая

$$\hat{\alpha}_i(g) = \hat{\varphi}_i g^{\hat{\sigma}_i} \hat{\varphi}_i^{-1} \text{ для всех } g \in \rho_i(Q_i).$$

По выбору элементов $c_i, a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}, h_{i,j}, j \in J_\Sigma$, имеем

$$\hat{\alpha}_i(\rho_i(c_i)) = 1,$$

$$\hat{\alpha}_i(\rho_i(a_{i,1})) = \rho(a_1),$$

$$\ldots$$

$$\hat{\alpha}_i(\rho_i(a_{i,s})) = \rho(a_s),$$

$$\hat{\alpha}_i(\rho_i(h_{i,j})) = \rho(h_j) \text{ для всех } j \in J_\Sigma.$$

При этом ядро $Ker(\hat{\alpha}_i)$ гомоморфизма $\hat{\alpha}_i$ есть подгруппа $\langle \rho_i(c_i) \rangle$ порядка 2 из центра группы $\rho_i(Q_i)$. Действительно, поскольку ребра связного графа $\Sigma_i^{v_i}/\hat{\sigma}_i$ являются ребрами типа 1 графа Γ_i/σ_i, то лишь единичный элемент из $Ker(\hat{\alpha}_i)$ стабилизирует вершину v_i, и остается заметить, что для каждого элемента из $Ker(\hat{\alpha}_i)$ либо он сам, либо он, домноженный на элемент $\rho_i(c_i)$, стабилизирует вершину v_i. В качестве следствия получаем, что стабилизатором вершины v_i и стабилизатором множества $v_i^{\sigma_i}$ в группе $\rho_i(Q_i)$ являются соответственно подгруппы $\langle \rho_i(a_{i,1}), \dots, \rho_i(a_{i,s})\rangle$ и $\langle \rho_i(c_i)\rangle \times \langle \rho_i(a_{i,1}), \dots, \rho_i(a_{i,s})\rangle$. Далее, так как множество слов

$$\{W_1, \dots, W_r\}$$

над алфавитом

$$\Big\{\rho(a_1), \rho(a_1)^{-1}, \dots, \rho(a_s), \rho(a_s)^{-1}, \rho(h_j), \rho(h_j)^{-1} : j \in J_\Sigma\Big\}$$

является множеством определяющих соотношений группы $\rho(Q)$ для ее порождающего множества $\{\rho(a_1), \dots, \rho(a_s), \rho(h_j) : j \in J_\Sigma\}$, то в качестве другого следствия получаем следующее утверждение: обозначая для каждого $l \in \{1, \dots, r\}$ через $W_{i,l}$ слово над алфавитом

$$\Big\{\rho_i(a_{i,1}), \rho(a_{i,1})^{-1}, \dots, \rho_i(a_{i,s}), \rho_i(a_{i,s})^{-1}, \rho_i(h_{i,j}), \rho_i(h_{i,j})^{-1} : j \in J_\Sigma\Big\},$$

получающееся из слова W_l заменой в нем каждого $\rho(a_1)$ на $\rho_i(a_{i,1})$, каждого $\rho(a_1)^{-1}$ на $\rho_i(a_{i,1})^{-1}$, $\dots$, каждого $\rho(a_s)$ на $\rho_i(a_{i,s})$, каждого $\rho(a_s)^{-1}$ на $\rho_i(a_{i,s})^{-1}$, каждого $\rho(h_j)$ на $\rho_i(h_{i,j})$ для всех $j \in J_\Sigma$ и каждого $\rho(h_j)^{-1}$ на $\rho_i(h_{i,j})^{-1}$ для всех $j \in J_\Sigma$, мы можем так подобрать числа $\varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,r} \in \{0,1\}$, что множество слов

$$\begin{aligned}&\{\rho_i(c_i)^2\} \cup \big\{\rho_i(c_i)^{-1}\rho_i(a_{i,1})^{-1}\rho_i(c_i)\rho_i(a_{i,1}), \dots, \rho_i(c_i)^{-1}\rho_i(a_{i,s})^{-1}\rho_i(c_i)\rho_i(a_{i,s})\big\}\\ &\cup \big\{\rho_i(c_i)^{-1}\rho_i(h_{i,j})^{-1}\rho_i(c_i)\rho_i(h_{i,j}) : j \in J_\Sigma\big\} \cup \big\{W_{i,1}\rho_i(c_i)^{\varepsilon_{i,1}}, \dots, W_{i,r}\rho_i(c_i)^{\varepsilon_{i,r}}\big\}\end{aligned}$$

над алфавитом

$$\Big\{\rho_i(c_i), \rho_i(c_i)^{-1}, \rho_i(a_{i,1}), \rho(a_{i,1})^{-1}, \dots, \rho_i(a_{i,s}), \rho_i(a_{i,s})^{-1}, \rho_i(h_{i,j}), \rho_i(h_{i,j})^{-1} : j \in J_\Sigma\Big\}$$

является множеством определяющих соотношений группы $\rho_i(Q_i)$ для ее порождающего множества $\{\rho_i(c_i), \rho_i(a_{i,1}), \dots, \rho_i(a_{i,s}), \rho_i(h_{i,j}) : j \in J_\Sigma\}$. Мы покажем, что так введенные числа $\varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,r} \in \{0,1\}$ определяют (при $i \in I_{H,2,\Sigma}$) реализацию $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ симметрического расширения графа Γ посредством графа K_2 с точностью до эквивалентности, откуда будет следовать требуемая для завершения доказательства теоремы конечность множества $I_{H,2,\Sigma}$ (и даже неравенство $|I_{H,2,\Sigma}| \le 2^r$).

Предположим, что, напротив, найдутся различные $i, i' \in I_{H,2,\Sigma}$, для которых

$$\varepsilon_{i,1} = \varepsilon_{i',1}, \dots, \varepsilon_{i,r} = \varepsilon_{i',r}.$$

Тогда имеется изоморфизм $\hat\alpha_{i,i'}$ группы $\rho_i(Q_i)$ на группу $\rho_{i'}(Q_{i'})$ такой, что

$$\hat\alpha_{i,i'}(\rho_i(c_i)) = \rho_{i'}(c_{i'}),$$

$$\hat\alpha_{i,i'}(\rho_i(a_{i,1})) = \rho_{i'}(a_{i',1}),$$

$$\dots$$

$$\hat\alpha_{i,i'}(\rho_i(a_{i,s})) = \rho_{i'}(a_{i',s}),$$

$$\hat\alpha_{i,i'}(\rho_i(h_{i,j})) = \rho_{i'}(h_{i',j}) \text{ для всех } j \in J_\Sigma.$$

Учитывая, что, во-первых, стабилизаторами вершины v_i и множества $v_i^{\sigma_i}$ в группе $\rho_i(Q_i)$ являются соответственно подгруппы $\langle \rho_i(a_{i,1}), \dots, \rho_i(a_{i,s})\rangle$ и $\langle \rho_i(c_i)\rangle \times \langle \rho_i(a_{i,1}), \dots, \rho_i(a_{i,s})\rangle$, а стабилизаторами вершины $v_{i'}$ и множества $v_{i'}^{\sigma_{i'}}$ в группе $\rho_{i'}(Q_{i'})$ являются соответственно подгруппы $\langle \rho_{i'}(a_{i',1}), \dots, \rho_i(a_{i',s})\rangle$ и $\langle \rho_{i'}(c_{i'})\rangle \times \langle \rho_{i'}(a_{i',1}), \dots, \rho_{i'}(a_{i',s})\rangle$, и, во-вторых, элементы $\rho_i(c_i)$ и $\rho_i(h_{i,j})$, $j \in J_\Sigma$, группы $\rho_i(Q_i)$ таковы, что вершины $\rho_i(c_i)(v_i)$ и $\rho_i(h_{i,j})(v_i)$, $j \in J_\Sigma$, попарно различны и составляют множество $\Sigma_i^{v_i}(v_i)$, а элементы $\rho_{i'}(c_{i'})$ и $\rho_{i'}(h_{i',j})$, $j \in J_\Sigma$, группы $\rho_{i'}(Q_{i'})$

таковы, что вершины $\rho_{i'}(c_{i'})(v_{i'})$ и $\rho_{i'}(h_{i',j})(v_{i'})$, $j \in J_\Sigma$, попарно различны и составляют множество $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}(v_{i'})$, на основании предложения 2 заключаем, что имеется изоморфизм $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ со следующими свойствами:

(i) для каждого $g \in \rho_i(Q_i)$ вершина $\hat{\varphi}_{i,i'}(g(v_i))$ совпадает с образом вершины $v_{i'}$ под действием $\hat{\alpha}_{i,i'}(g)$;

(ii) $\hat{\varphi}_{i,i'}$ переводит $\hat{\sigma}_i$ в $\hat{\sigma}_{i'}$.

Мы следующим образом продолжим изоморфизм $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ до изоморфизма $\varphi_{i,i'}$ графа Σ_i на граф $\Sigma_{i'}$ (напомним, что $\Sigma_i^{v_i}$ — связная компонента графа Σ_i, содержащая v_i, и $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ — связная компонента графа $\Sigma_{i'}$, содержащая $v_{i'}$). Для каждой связной компоненты Σ_i^* графа Σ_i, отличной от $\Sigma_i^{v_i}$, зафиксируем некоторый элемент $g_{\Sigma_i^*}$ группы G_i, отображающий $V(\Sigma_i^{v_i})$ на $V(\Sigma_i^*)$, и некоторый элемент $g'_{\Sigma_i^*}$ группы $G_{i'}$, для которого $\alpha_{i'}(g'_{\Sigma_i^*}) = \alpha_i(g_{\Sigma_i^*})$. (Поскольку G_i — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Σ_i и $\alpha_i(G_i) = H = \alpha_{i'}(G_{i'})$ согласно (3.1), то такие элементы $g_{\Sigma_i^*}$ и $g'_{\Sigma_i^*}$ найдутся.) Положим, кроме того, $g_{\Sigma_i^{v_i}} = 1$ и $g'_{\Sigma_i^{v_i}} = 1$ (так что $\alpha_{i'}(g'_{\Sigma_i^{v_i}}) = \alpha_i(g_{\Sigma_i^{v_i}})$). Теперь для произвольной вершины w графа Σ_i полагаем

$$\varphi_{i,i'}(w) = g'_{\Sigma_i^*}(\hat{\varphi}_{i,i'}(g_{\Sigma_i^*}^{-1}(w))),$$

где Σ_i^* — связная компонента графа Σ_i, содержащая вершину w. Легко видеть, что так определенное отображение $\varphi_{i,i'}$ множества $V(\Sigma_i) = V(\Gamma_i)$ на множество $V(\Sigma_{i'}) = V(\Gamma_{i'})$ есть изоморфизм графа Σ_i на граф $\Sigma_{i'}$, продолжающий изоморфизм $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ и (в силу свойства (ii) изоморфизма $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$) переводящий σ_i в $\sigma_{i'}$. Покажем, что отображение $\varphi_{i,i'}$ (переводящее σ_i в $\sigma_{i'}$) есть изоморфизм графа Γ_i на граф $\Gamma_{i'}$, что даст требуемое для завершения доказательства теоремы противоречие, поскольку влечет эквивалентность реализаций $(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ и $(\Gamma_{i'}, G_{i'}, \sigma_{i'}, \varphi_{i'})$ симметрических расширений графа Γ посредством графа K_2, вопреки их выбору.

Так как $\varphi_{i,i'}$ есть изоморфизм графа Σ_i на граф $\Sigma_{i'}$, переводящий σ_i в $\sigma_{i'}$, то с учетом определения ребер типа 2 графов Γ_i/σ_i и $\Gamma_{i'}/\sigma_{i'}$ для доказательства того, что $\varphi_{i,i'}$ есть изоморфизм графа Γ_i на граф $\Gamma_{i'}$, достаточно доказать, что $\varphi_{i,i'}$ индуцирует изоморфизм графа Γ_i/σ_i на граф $\Gamma_{i'}/\sigma_{i'}$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\varphi_{i,i'}$ индуцирует изоморфизм $\varphi_{i'}^{-1}\varphi_i$ графа Γ_i/σ_i на граф $\Gamma_{i'}/\sigma_{i'}$.

Предварительно заметим, что имеет место равенство $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{i'}\hat{\alpha}_{i,i'}$ гомоморфизмов группы $\rho_i(Q_i)$ на группу $\rho(Q)$, поскольку совпадают значения этих гомоморфизмов на элементах порождающего множества $\{\rho_i(c_i),\ \rho_i(a_{i,1}), \ldots, \rho_i(a_{i,s}), \rho_i(h_{i,j}) : j \in J_\Sigma\}$ группы $\rho_i(Q_i)$. Из равенства $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{i'}\hat{\alpha}_{i,i'}$ с учетом определений $\hat{\alpha}_i$ и $\hat{\alpha}_{i'}$ следует справедливость для любого $g \in Q_i$ равенства

$$\hat{\varphi}_{i'}^{-1}\hat{\varphi}_i(\rho_i(g))^{\hat{\sigma}_i} = (\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(g)))^{\hat{\sigma}_{i'}}\hat{\varphi}_{i'}^{-1}\hat{\varphi}_i,$$

которое в силу

$$\varphi_{i'}^{-1}\varphi_i g^{\sigma_i}(v_i^{\sigma_i}) = \hat{\varphi}_{i'}^{-1}\hat{\varphi}_i(\rho_i(g))^{\hat{\sigma}_i}(v_i^{\sigma_i})$$

и

$$\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(g))(v_{i'}^{\sigma_{i'}}) = (\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(g)))^{\hat{\sigma}_{i'}}\hat{\varphi}_{i'}^{-1}\hat{\varphi}_i(v_i^{\sigma_i})$$

влечет

$$\varphi_{i'}^{-1}\varphi_i g^{\sigma_i}(v_i^{\sigma_i}) = \hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(g))(v_{i'}^{\sigma_{i'}}). \tag{3.2}$$

Заметим, кроме того, что для любой связной компоненты Σ_i^* графа Σ_i по выбору элементов $g_{\Sigma_i^*}$ и $g'_{\Sigma_i^*}$ имеет место равенство $\alpha_i(g_{\Sigma_i^*}) = \alpha_{i'}(g'_{\Sigma_i^*})$, следствием которого является равенство

$$\varphi_{i'}^{-1}\varphi_i(g_{\Sigma_i^*})^{\sigma_i}\varphi_i^{-1}\varphi_{i'} = (g'_{\Sigma_i^*})^{\sigma_{i'}}. \tag{3.3}$$

Итак, покажем, что для произвольной вершины w графа Γ_i справедливо равенство

$$\varphi_{i,i'}(w^{\sigma_i}) = \varphi_{i'}^{-1}\varphi_i(w^{\sigma_i}).$$

Пусть Σ_i^* — связная компонента графа Σ_i, содержащая вершину w. Тогда $g_{\Sigma_i^*}^{-1}(w) \in V(\Sigma_i^{v_i})$ и, следовательно, $g_{\Sigma_i^*}^{-1}(w) = g(v_i)$ для некоторого элемента g группы Q_i. Теперь, с одной стороны, согласно определению $\varphi_{i,i'}$ и свойству (i) изоморфизма $\hat{\varphi}_{i,i'}$ графа $\Sigma_i^{v_i}$ на граф $\Sigma_{i'}^{v_{i'}}$ имеем

$$\varphi_{i,i'}(w) = g'_{\Sigma_i^*}(\hat{\varphi}_{i,i'}(g_{\Sigma_i^*}^{-1}(w))) = g'_{\Sigma_i^*}(\hat{\varphi}_{i,i'}(g(v_i))) = g'_{\Sigma_i^*}(\hat{\varphi}_{i,i'}(\rho_i(g)(v_i))) = g'_{\Sigma_i^*}(\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(g))(v_{i'}))$$

и, следовательно,

$$\varphi_{i,i'}(w^{\sigma_i}) = g'_{\Sigma_i^*}(\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(g))(v_{i'}^{\sigma_{i'}})).$$

С другой стороны, (3.2) и (3.3) влекут

$$\varphi_{i'}^{-1}\varphi_i(w^{\sigma_i}) = \varphi_{i'}^{-1}\varphi_i(g_{\Sigma_i^*}g(v_i^{\sigma_i})) = \varphi_{i'}^{-1}\varphi_i(g_{\Sigma_i^*})^{\sigma_i}\varphi_i^{-1}\varphi_{i'}\varphi_{i'}^{-1}\varphi_i g^{\sigma_i}(v_i^{\sigma_i}) = (g'_{\Sigma_i^*})^{\sigma_{i'}}(\hat{\alpha}_{i,i'}(\rho_i(g))(v_{i'}^{\sigma_{i'}})).$$

Таким образом, $\varphi_{i,i'}(w^{\sigma_i})$ совпадает с $\varphi_{i'}^{-1}\varphi_i(w^{\sigma_i})$ для произвольной вершины w графа Γ_i, что завершает доказательство теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 может быть получено посредством модификации доказательства теоремы 1, приведенного в разд. 3.

Итак, пусть для графа Γ и группы его автоморфизмов H выполнено условие теоремы 2. Если Γ несвязен, то он не имеет симметрических 2-расширений. Будем поэтому предполагать, что Γ — связный граф. Согласно предложению 5 для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных реализаций H-симметрических расширений Γ посредством графа K_2. Пусть $\{(\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i) : i \in I_H\}$ — некоторая система представителей (всех) классов эквивалентных между собой реализаций H-симметрических расширений Γ посредством графа K_2. Наша цель — доказать, что множество I_H конечно.

Дальнейшее доказательство теоремы 2 может быть получено почти дословным, с немногими указываемыми ниже изменениями, повторением части приводимого в разд. 3 доказательства теоремы 1, начинающейся с места, где фиксируется некоторое порождающее множество $\{a_1, \ldots, a_s\}$ (s — целое положительное число) группы H_v, и заканчивающейся окончанием доказательства теоремы 1.

Упомянутые изменения сводятся, по существу, к следующим.

В указанной части разд. 3 следует вместо реализаций симметрических расширений графа Γ посредством графа K_2 говорить о реализациях H-симметрических расширений графа Γ посредством графа K_2.

В указанной части разд. 3 ссылки на (3.1) следует заменить ссылками на условие

$$\varphi_i G_i^{\sigma_i} \varphi_i^{-1} = H \text{ для всех } i \in I_H.$$

Наконец, при доказательстве теоремы 2 мы не можем утверждать, как мы делали это со ссылкой на предложение 3 в указанной части разд. 3, что группа H_v конечна. Однако в указанной части разд. 3 конечность группы H_v используется (всего в двух местах) только для обоснования, во-первых, возможности выбора у группы H_v конечного порождающего множества (множества $\{a_1, \ldots, a_s\}$), во-вторых, существования у группы H_v лишь конечного числа подгрупп индекса 2 (при доказательстве конечности множества $I_{H,1}$). При доказательстве теоремы 2 для обоснования как первого, так и второго следует сослаться на конечную порожденность группы H_v, которая имеет место согласно условию теоремы 2. Действительно, согласно известной теореме М. Холла (см. [2]) в конечно порожденной группе H_v имеется лишь конечное число подгрупп индекса 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Trofimov V.I.** Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 316-320.
2. **Hall M.** A topology for free groups and related topics // Ann. Math. 1950. Vol. 52. P. 127–139.

Трофимов Владимир Иванович
Поступила 20.07.2013
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С БИЦИКЛИЧЕСКИМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ В ФИТТИНГОВЫХ ФАКТОРАХ

А. А. Трофимук

Получены оценки производной длины, нильпотентной длины и p-длины конечной разрешимой группы G, у которой силовские подгруппы в факторах цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ нормальных в G подгрупп являются бициклическими, т.е. факторизуются двумя циклическими подгруппами. Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, а $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а p-длина группы G не превышает 2 для любого простого числа p.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, подгруппа Фраттини, подгруппа Фиттинга, производная длина, нильпотентная длина, p-длина, A_4-свободная группа.

A. A. Trofimuk. Finite groups with bicyclic Sylow subgroups in Fitting factors.

Estimates of the derived length, nilpotent length, and p-length are obtained for a finite solvable group G in which Sylow subgroups in factors of the chain $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ of subgroups normal in G are bicyclic, i.e., are factorized by two cyclic subgroups. Here, $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G and $F(G)$ is the Fitting subgroup of G. In particular, the derived length of $G/\Phi(G)$ is at most 5, the nilpotent length of G is at most 4, and the p-length of G is at most 2 for every prime p.

Keywords: finite solvable group, Frattini subgroup, Fitting subgroup, derived length, nilpotent length, p-length, A_4-free group.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Нормальным рядом* группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* нормального ряда (1). Если силовские подгруппы в факторах циклические, то из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] вытекает сверхразрешимость группы G. В работе [2] получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и p-длины) разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, силовские подгруппы в факторах которого являются бициклическими. Напомним, что *бициклической* называют группу, факторизуемую двумя циклическими подгруппами.

Хорошо известен следующий результат Бэра.

Теорема Бэра [1, с. 720; 3]. *Если в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп*

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G) \tag{2}$$

такая, что G_i нормальна в G и $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i, то G сверхразрешима.

Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, а $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Легко проверить, что группа останется сверхразрешимой, если силовские подгруппы в факторах цепочки вида (2) будут циклическими.

Поэтому вполне естественно исследовать разрешимые группы, у которых силовские подгруппы в факторах цепочки вида (2) являются бициклическими. Нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа. Предположим, что в G существует цепочка подгрупп вида* (2) *такая, что G_i нормальны в G и силовские подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i являются бициклическими для всех i. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает* 4, *а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает* 5.

2. $l_p(G) \leq 2$ *для всех простых чисел p.*

3. *Если группа G A_4-свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает* 3.

Здесь $l_p(G)$ — p-длина группы G. Напомним, что группа G называется *A_4-свободной*, если она не имеет секций, изоморфных знакопеременной группе A_4.

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Обозначения некоторых конкретных групп: 1 — единичная группа; Z_n и D_n — циклическая и диэдральная группы порядка n соответственно; A_n и S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно.

Дисперсивной по Оре называют группу G порядка $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$, где $p_1 > p_2 > \ldots > p_m$, у которой имеется нормальный ряд

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$$

такой, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ фактор-группа G_i/G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G.

В доказательстве теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций, см. [4; 5]. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация групп и G — группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — *$\mathfrak{F}$-корадикал* группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [5, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация — эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Лемма доказана.

Лемма 2 [1, теоремы II.6.14, II.8.27]. *Если H — подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$.*

Лемма 3. *Предположим, что в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида* (2) *такая, что G_i нормальны в G и силовские подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i являются бициклическими для всех i. Тогда индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами, квадратами простых чисел или равны 8.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уплотним цепочку (2) между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга до отрезка главного ряда группы G следующим образом. Пусть $\overline{N} = N/G_i$ содержится в подгруппе $\overline{G_{i+1}} = G_{i+1}/G_i \leq F(G)/G_i$ и является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\overline{G} = G/G_i$. Так как $\overline{G}$ разрешима, то $\overline{N}$ — элементарная абелева

p-подгруппа для некоторого простого числа $p \in \pi(G)$. Так как силовская p-подгруппа $(\overline{G_{i+1}})_p$ группы $\overline{G_{i+1}}$ бициклическая и $\overline{N}$ содержится в $(\overline{G_{i+1}})_p$, то по [2, лемма 2.1] либо $\overline{N}$ метациклическая порядка p или p^2, либо $|\overline{N}| = 8$. Заменяя в (2) отрезок $G_i \leq G_{i+1}$ на $G_i \leq N \leq G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге уплотним цепочку (2) до цепочки, факторы которой имеют порядки p, q^2 или 8.

Итак, можно считать, что факторы ряда (2) имеют порядки p, q^2 или 8. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая $F(G)$. Очевидно, что $\Phi(G) = G_0 \subseteq M$, а $G_m = F(G) \nsubseteq M$. Поэтому обязательно найдется такое i, что $G_i \subseteq M$, но $G_{i+1} \nsubseteq M$. Так как M — максимальная подгруппа группы G, то $G_{i+1}M = G$ и $|G : M| = |G_{i+1} : G_{i+1} \cap M|$. Поскольку $G_i \subseteq G_{i+1} \cap M$, то

$$|G_{i+1} : G_{i+1} \cap M| = \frac{|G_{i+1} : G_i|}{|G_{i+1} \cap M : G_i|}$$

и $|G : M|$ является простым числом, квадратом простого числа или 8. Лемма доказана.

Лемма 4 [6, лемма 12]. *Пусть H — неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$, где p — простое число. Тогда $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.*

Лемма 5 [6, лемма 13]. *Если H — разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, где p — простое число, то H метабелева.*

2. Доказательство теоремы

1. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и

$$\Phi(G/\Phi(G)) = G_0/\Phi(G) \subset G_1/\Phi(G) \subset \ldots \subset G_m/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$$

— отрезок нормального ряда фактор-группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $G_0 = \Phi(G)$, а по [1, теорема III.4.2] $G_m = F(G)$. Поэтому для произвольной подгруппы G_i, $i = \overline{0, m}$, верно, что $\Phi(G) \subseteq G_i \subseteq F(G)$. Поскольку

$$(G_{i+1}/\Phi(G))/(G_i/\Phi(G)) \simeq G_{i+1}/G_i,$$

то $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как по лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По [1, теорема III.4.5] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \leq i \leq k$. Поэтому по [1, теорема I.4.5] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы $\mathrm{Aut}(F_i)$. По [1, лемма I.9.6] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F \quad \text{и} \quad G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F.$$

Далее, F_i — элементарная абелева p_i-подгруппа, где p_i — простое число. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i, то M_i не содержит F. Значит по лемме 3 порядок $|F_i|$ равен либо p_i, либо p_i^2, либо 8.

Поэтому возможны следующие варианты:

1) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;

2) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$;

3) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3,p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2,p_i)$ и по лемме 4 $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,2)$, и из леммы 2 следует, что

$$G/C_G(F_i) \in \{1,\ Z_2,\ Z_3,\ Z_7,\ Z_2 \times Z_2,\ Z_4,\ D_8,\ S_3,\ A_4,\ S_4,\ [Z_7]Z_3\}.$$

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^3 \subseteq \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Так как $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ — формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Поскольку $F/\Phi(G)$ — абелева фактор-группа и

$$(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \simeq G/F,$$

то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

2. Учитывая тот факт, что p-длина метанильпотентной группы не превышает 1, из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого числа p.

3. Пусть группа G является A_4-свободной. Тогда, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 5, получим, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^3$. Поэтому производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967. 793 S.
2. **Monakhov V.S., Trofimuk A.A.** On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups // Commun. in Algebra. 2011. Vol. 39, no. 9. P. 3178–3186.
3. **Baer R.** Supersolvable immersion // Can. J. Math. 1959. Vol 11. P. 353–369.
4. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
5. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
6. **Монахов В.С., Трофимук А.А.** О конечных разрешимых группах фиксированного ранга // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1123–1137.

Трофимук Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук
Брестский гос. ун-т им. А.С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Поступила 01.02.2013

Том 19 № 3 2013

УДК 517.968.74

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Х. А. Хачатрян

Статья посвящена изучению одной начально-краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Гаммерштейна — Немыцкого с разностным ядром на полуоси. Указанная задача кроме чисто теоретического интереса имеет прикладное значение в теории распределения дохода в однопродуктовой экономике.

Ключевые слова: Начально-краевая задача, условие Каратеодори, пространство Соболева, итерации, монотонность.

Kh. A. Khachatryan. On the solvability of an initial–boundary value problem for a nonlinear integro-differential equation with a noncompact operator of Hammerstein type.

We study an initial–boundary value problem for a nonlinear integro-differential equation of Hammerstein–Nemytskii type with a difference kernel on a half-line. This problem, in addition to being theoretically interesting, can be applied in the theory of revenue distribution in a single-product economy.

Keywords: initial-boundary value problem, Carathéodory condition, Sobolev space, iteration, monotonicity.

1. Введение

В настоящей работе исследуется следующая начально-краевая задача на полуоси

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \lambda y(x) = \mu_0(x, y(x)) + \displaystyle\int_0^\infty K(x-t)\mu_1(t, y(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, & (1) \\ y(0) = \eta_0 > 0, \quad y(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\mathbb{R}^+) \equiv \Big\{\varphi\colon \varphi \in W^1_\infty(\mathbb{R}^+),\ \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\varphi\prime(x) = 0\Big\} & (2) \end{cases}$$

относительно искомой функции $y(x)$, где $\mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$, а $W^1_\infty(\mathbb{R}^+) \equiv \{\varphi\colon \varphi^{(j)} \in L_\infty(\mathbb{R}^+),$ $j = \{0, 1\}\}$ ($\varphi^{(j)}$ — j-я производная функции φ).

Здесь $\lambda > 0$ — числовой коэффициент уравнения, $\mu_0(x, z)$ и $\mu_1(t, u)$ — определенные на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ измеримые и вещественные функции, удовлетворяющие определенным условиям. Ядро $K(\tau)$ — определенная на всей оси измеримая функция, причем

$$K(\tau) \geq 0, \quad \tau \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)\,d\tau = \lambda. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) возникает в теории распределения богатства в однопродуктовой экономике (см. [1]).

В том случае, когда $\mu_0 \equiv 0$, $\mu_1(t, u) = u$, уравнение (1) исследовалось в работах [2; 3] в пространстве $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$. В случае, когда $\mu_0 \equiv 0$, $\mu_1(t, u) = u(1 - \omega(t, u))$ (где ω имеет особую структуру), изучению уравнения (1) в $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$ посвящена работа [4]. В недавней работе [5] мы рассматривали задачу о построении положительного решения уравнения (1) в пространстве $W^1_1(\mathbb{R}^+)$ в том случае, когда:

1) $\mu_0(x,z) = \lambda z - \lambda_0(x)z$, где $\operatorname*{essinf}_{x\in\mathbb{R}^+} \lambda_0(x) \equiv \lambda > 0$, $\operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}^+} \lambda_0(x) \equiv b < +\infty$;

2) ядро K удовлетворяет условию (3), причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xK(x)\,dx < -1$ (сходимость последнего интеграла понимается в смысле абсолютной сходимости);

3) $\mu_1(t,u) \equiv G(u)$, где $G(u) \uparrow$ по u на некотором отрезке $[0,\eta]$ $(\eta > \eta_0)$, $G \in C[0,\eta]$, $G(u) \not\equiv 0$, $u \in u \in [0,\eta]$, $0 \le G(u) \le u$, $u \in [0,\eta]$.

В данной работе мы займемся исследованием задачи (1)–(3) в этой общей постановке, причем относительно ядра K потребуем только выполнение условия (3), а от функций μ_0 и μ_1 — достаточно общие условия (слабые по сравнению с условиями работы [5]). В конце приведем конкретные примеры для иллюстрации сформулированных теорем.

2. Вспомогательные факты

Пусть $H(z)$ — определенная на $\mathbb{R}$ измеримая вещественнозначная функция, причем существует число $\eta > 0$ такое, что сужение функции H на отрезке $[0,\eta]$ удовлетворяет условиям:

a) $h(z) \uparrow$ по z на отрезке $[0,\eta]$, $h \in C[0,\eta]$,

b) $h(z) \not\equiv 0$, $h(z) \ge 0$, $z \in [0,\eta]$, $h(\eta) = \eta$ (где h — сужение H на $[0,\eta]$).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$F(x) = \int\limits_0^{\infty} K(x-t)h\left((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}F(z)\,dz\right)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0,+\infty) \tag{4}$$

относительно искомой функции $F(x)$.

Имеет место

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (3), *a*), *b*) *и* $\eta > \eta_0 > 0$. *Тогда уравнение* (4) *имеет положительное и ограниченное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующие итерации:

$$F_{n+1}(x) = \int\limits_0^{\infty} K(x-t)h\left((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}F_n(z)\,dz\right)dt, \tag{5}$$

где $F_0(x) \equiv 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, $x \in \mathbb{R}^+$. Докажем, что

$$\circ \quad F_n(x) \uparrow \text{ по } n, \qquad \circ \quad F_n(x) \le \lambda\eta, \quad n = 0,1,2,\ldots\,. \tag{6}$$

Имеем

$$F_1(x) = \int\limits_0^{\infty} K(x-t)h((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t})\,dt \ge 0 = F_0(x),$$

$$F_1(x) \le \int\limits_0^{\infty} K(x-t)h(\eta e^{-\lambda t})\,dt \le h(\eta)\int\limits_{-\infty}^{x} K(\tau)\,d\tau \le \eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)\,d\tau = \lambda\eta.$$

Предположим, что $F_n(x) \ge F_{n-1}(x)$, $F_n(x) \le \lambda\eta$. Тогда с учетом условий (3), *a*), *b*) из (5) получим

$$F_{n+1}(x) \ge \int\limits_0^{\infty} K(x-t)h\left((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F_{n-1}(\tau)\,d\tau\right)dt = F_n(x),$$

$$F_{n+1}(x)=\int_0^\infty K(x-t)h\biggl((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t}+\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F_n(\tau)\,d\tau\biggr)\,dt$$

$$\le\int_0^\infty K(x-t)h(\eta e^{-\lambda t}-\eta_0 e^{-\lambda t}+\eta-\eta e^{-\lambda t})\,dt\le\eta\int_{-\infty}^x K(z)\,dz\le\lambda\eta.$$

Утверждения (6) доказаны.

Следовательно, последовательность функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n\to\infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)\le\lambda\eta$, причем предельная функция удовлетворяет уравнению (4) по известной теореме Б. Леви (см. [6, с. 303]).

Лемма доказана.

Справедлива также следующая

Лемма 2. *При условиях* (3), *a*), *b*) *и* $\eta>\eta_0>0$ *построенное решение уравнения* (4) *обладает свойством монотонности.*

Доказательство. Запишем итерации (5) в следующем виде:

$$F_{n+1}(x)=\int_0^\infty K(x-t)h\biggl(\eta-\eta_0+\int_0^t e^{-\lambda(t-z)}(F_n(z)-\lambda(\eta-\eta_0))\,dz\biggr)dt, \tag{7}$$

где $F_0(x)\equiv 0$, $n=0,1,2,\ldots$, $x\in\mathbb{R}^+$. Обозначим $x-t=\tau$, тогда из (7) получим

$$F_{n+1}(x)=\int_{-\infty}^x K(\tau)h\biggl(\eta-\eta_0+\int_0^{x-\tau}e^{-\lambda(x-\tau-z)}(F_n(z)-\lambda(\eta-\eta_0))\,dz\biggr)\,dt$$

$(F_0(x)\equiv 0$, $n=0,1,2,\ldots$, $x\in\mathbb{R}^+)$ или

$$F_{n+1}(x)=\int_{-\infty}^x K(\tau)h\biggl(\eta-\eta_0+\int_0^{x-\tau}e^{-\lambda y}(F_n(x-\tau-y)-\lambda(\eta-\eta_0))\,dy\biggr)\,d\tau \tag{8}$$

$(F_0(x)\equiv 0$, $n=0,1,2,\ldots$, $x\in\mathbb{R}^+)$.

Пусть $x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$, $x_1>x_2$ — произвольные числа. Предположим, что при некотором $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $F_n(x_1)\ge F_n(x_2)$. Используя свойства функции h и последовательности $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$, в (8) будем иметь

$$F_{n+1}(x_1)-F_{n+1}(x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}K(\tau)h\biggl(\eta-\eta_0+\int_0^{x_1-\tau}e^{-\lambda y}(F_n(x_1-\tau-y)-\lambda(\eta-\eta_0))\,dy\biggr)\,d\tau$$

$$-\int_{-\infty}^{x_2}K(\tau)h\biggl(\eta-\eta_0+\int_0^{x_2-\tau}e^{-\lambda y}(F_n(x_2-\tau-y)-\lambda(\eta-\eta_0))\,dy\biggr)\,d\tau$$

$$\ge\int_{-\infty}^{x_2}K(\tau)h\biggl(\eta-\eta_0+\int_0^{x_2-\tau}e^{-\lambda y}(F_n(x_1-\tau-y)-\lambda(\eta-\eta_0))\,dy\biggr)\,d\tau$$

$$-\int_{-\infty}^{x_2}K(\tau)h\biggl(\eta-\eta_0+\int_0^{x_2-\tau}e^{-\lambda y}(F_n(x_2-\tau-y)-\lambda(\eta-\eta_0))\,dy\biggr)\,d\tau\ge 0,$$

т. е. $F_{n+1}(x_1) \geq F_{n+1}(x_2)$. Следовательно, предельная функция $F(x)$ также обладает свойством монотонности.

Лемма доказана.

Из доказанных лемм следует, что решение $F(x)$ уравнения (4) является положительной, ограниченной и монотонно возрастающей функцией, причем $0 \leq F(x) \leq \lambda\eta$.

Имеет место

Лемма 3. *Пусть выполнены все условия леммы* 2. *Тогда если число* η *является первой положительной неподвижной точкой для функции* $h(z)$, *то для решения* $F(x)$ *уравнения* (4) *справедливо также следующее соотношение:* $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lambda\eta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказанных лемм следует, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = c \leq \lambda\eta$. В (4), используя известные свойства операций свертки (см., например, [7, с. 26]), будем иметь

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)\,d\tau \lim_{t\to\infty} h\bigg((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-z)}F(z)\,dz\bigg)$$

$$= \lambda \lim_{t\to\infty} h\bigg((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-z)}F(z)\,dz\bigg). \tag{9}$$

Поскольку $0 \leq (\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F(\tau)\,d\tau \leq \eta$ и $h \in C[0,\eta]$, то из (9) получим

$$c = \lambda h\bigg(\lim_{t\to\infty}\bigg((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-z)}F(z)\,dz\bigg)\bigg) = \lambda h\bigg(\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\lambda(t-z)}F(z)\,dz\bigg) = \lambda h\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

или $h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{c}{\lambda}$. Так как η — первый положительный корень уравнения $h(x) = x$, то $c = \lambda\eta$.

Лемма доказана.

Комбинируя доказанные леммы, можно утверждать следующее.

Теорема 1. *Пусть выполнены все условия леммы* 3. *Тогда уравнение* (4) *обладает положительным монотонно возрастающим и ограниченным решением* $F(x)$, *причем*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lambda\eta.$$

Оказывается, что при дополнительном предположении относительно функции h, можно доказать единственность решения уравнения (4) в определенном классе функций.

Лемма 4. *Пусть выполнены все условия леммы* 3. *Тогда если* $h \in C^1[0,\eta]$, $\max\limits_{0\leq z\leq\eta} h'(z) < 1$, *то решение уравнения* (4) *единственно в следующем классе функций*:

$$P = \{\varphi\colon 0 \leq \varphi(x) \leq \lambda\eta,\ x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F_1, F_2 \in P$ — разные решения уравнения (4). Тогда с использованием формулы Лагранжа о конечных приращениях будем иметь

$$|F_1(x) - F_2(x)| \leq \int_0^\infty K(x-t)\,\bigg|h\bigg((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-z)}F_1(z)\,dz\bigg)$$

$$- h\Big((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}F_2(z)\,dz\Big)\Big|\,dt$$

$$\leq \int\limits_0^\infty K(x-t)\Big|\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}F_1(z) - F_2(z)dz\Big|\,dt \max_{0\leq\tau\leq\eta} h'(\tau)$$

$$\leq \max_{0\leq\tau\leq\eta} h'(\tau) \sup_{z\in\mathbb{R}^+}|F_1(z)-F_2(z)|\,\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^x K(u)\,du \leq \max_{0\leq\tau\leq\eta} h'(\tau) \sup_{z\in\mathbb{R}^+}|F_1(z)-F_2(z)|.$$

Из последнего следует, что

$$\Big(1-\max_{0\leq\tau\leq\eta} h'(\tau)\Big)\sup_{z\in\mathbb{R}^+}|F_1(z)-F_2(z)| \leq 0. \tag{10}$$

Так как $\max\limits_{0\leq\tau\leq\eta} h'(\tau) < 1$, то из (10) следует, что $F_1(z) = F_2(z)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$.

Лемма доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая

Лемма 5. *При выполнении условий леммы* 4 *решение* $F(x)$ *уравнения* (4) *обладает следующим дополнительным свойством* $\lambda\eta - F \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Теперь приведем несколько примеров функции h.

a) Примеры функции h для лемм 1–3:

a_1) $h(z) = \dfrac{z^p}{\eta^{p-1}}$, $p > 0$; a_2) $h(z) = z + \sin^2 z$, $\eta = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Примеры функции h для лемм 4–5:

b_1) $h(z) = \sqrt{z+2}$, $\eta = 2$, $z \in [0,\eta]$; b_2) $h(z) = \ln(z+e-1)$ $z \in [0,1]$, $\eta = 1$.

В примерах b_1) и b_2) число η определяется единственным образом. В примере a_1) $\eta > \eta_0$ — любое положительное число, а в a_2) получаем счетное число неподвижных точек для функции $h(z)$.

3. Разрешимость задачи (1)–(3)

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть ядро* K *удовлетворяет условию* (3). *Предположим далее, что*

i_1) $0 \leq \mu_1(x,z) \leq \eta - h(\eta - z)$, $(x,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, *где функция* h *удовлетворяет условиям леммы* 3;

i_2) $\mu_j(x,z)$ *удовлетворяют условию Каратеодори на множестве* $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$ *по второму аргументу,* $j = 0,1$;

i_3) $\mu_0(x,\eta) \leq \eta \int\limits_x^\infty K(u)\,du$, $\mu_0(x,z) \geq 0$, $(x,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$;

i_4) $\mu_j(x,z) \uparrow$ *по* z *на отрезке* $[0,\eta]$ *при каждом фиксированном* $x \in \mathbb{R}^+$, $j = 0,1$, *где число* $\eta > \eta_0 > 0$ *определяется из условий леммы* 3.

Тогда задача (1), (2) *имеет положительное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через

$$f(x)=\frac{dy}{dx}+\lambda y(x),\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{11}$$

Тогда из (1) с учетом (2) приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$f(x)=\mu_0\Bigl(x,\eta_0e^{-\lambda x}+\int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)}f(t)\,dt\Bigr)$$
$$+\int\limits_0^\infty K(x-t)\mu_1\Bigl(t,\eta_0e^{-\lambda t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}f(z)\,dz\Bigr)\,dt,\quad x\ge 0. \tag{12}$$

Рассмотрим следующие итерации:

$$f_{n+1}(x)=\mu_0\Bigl(x,\eta_0e^{-\lambda x}+\int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)}f_n(t)\,dt\Bigr)$$
$$+\int\limits_0^\infty K(x-t)\mu_1\Bigl(t,\eta_0e^{-\lambda t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}f_n(z)\,dz\Bigr)\,dt,\quad f_0\equiv 0,\quad n=0,1,2,\dots,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Сначала докажем, что

$$j_1)\ \ 0\le f_n(x)\le \lambda\eta-F(x),\quad n=0,1,2,\dots,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{14}$$

$$j_2)\ \ f_n(x)\not\equiv 0,\quad n=1,2,\dots,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{15}$$

Пусть $n=0$, тогда (14) очевидным образом выполняется. Предположим (14) имеет место при некотором $n\in\mathbb{N}$. Тогда, используя неравенство $0\le f_n(x)\le\lambda\eta$, получим, что

$$0\le\eta_0e^{-\lambda x}+\int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)}f_n(t)dt\le\eta,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{16}$$

Следовательно, учитывая условия $i_1)$–$i_4)$, будем иметь

$$f_{n+1}(x)\ge\int\limits_0^\infty K(x-t)\mu_1(t,\eta_0e^{-\lambda t})\,dt\ge 0,$$

$$f_{n+1}(x)\le\mu_0\Bigl(x,\eta_0e^{-\lambda x}+\int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)}(\lambda\eta-F(t))\,dt\Bigr)$$
$$+\int\limits_0^\infty K(x-t)\mu_1\Bigl(t,\eta_0e^{-\lambda t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}(\lambda\eta-F(z))\,dz\Bigr)\,dt$$
$$\le\mu_0(x,\eta_0e^{-\lambda x}+\eta-\eta e^{-\lambda x})+\int\limits_0^\infty K(x-t)\mu_1\Bigl(t,\eta_0e^{-\lambda t}+\eta-\eta e^{-\lambda t}-\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}F(z)\,dz\Bigr)\,dt$$
$$\le\mu_0(x,\eta)+\int\limits_0^\infty K(x-t)\Bigl[\eta-h\Bigl((\eta-\eta_0)e^{-\lambda t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-z)}F(z)\,dz\Bigr)\Bigr]\,dt$$

$$\leq \eta \int\limits_x^\infty K(t)\,dt + \eta \int\limits_{-\infty}^x K(t)\,dt - F(x) = \lambda\eta - F(x).$$

Теперь докажем, что $f_n(x) \not\equiv 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^+$. Поскольку $\mu_1(x,z) \not\equiv 0$, $(x,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, выполняется условие (3), то $f_1 \not\equiv 0$. Предполагая, что $f_n(x) \not\equiv 0$ при некотором $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, и используя свойства функции $\mu_1(x,z)$, из (13) получим, что $f_{n+1}(x) \not\equiv 0$.

Далее убедимся, что

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n.$$

Неравенство $f_1(x) \geq f_0(x)$ сразу следует из (13). Пусть $f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (16) и монотонность функций $\mu_j(x,z)$ по z на отрезке $[0,\eta]$, из (13) получим

$$f_{n+1}(x) \geq \mu_0\left(x, \eta_0 e^{-\lambda x} + \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} f_{n-1}(t)\,dt\right)$$

$$+ \int\limits_0^\infty K(x-t)\mu_1\left(t, \eta_0 e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-y)} f_{n-1}(y)\,dy\right)dt = f_n(x).$$

Таким образом, последовательность функций $\{f_n(x)\}_0^\infty$ имеет поточечный предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

причем согласно теореме Б. Леви с учетом условий i_2) $f(x)$ удовлетворяет уравнению (12). Из (14) и (15) следует также, что

$$f(x) \not\equiv 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \lambda\eta - F(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{17}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lambda\eta$ (см. лемму 3), то из (17) следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Решая уравнение (11) с начальным условием (2), получим

$$y(x) = \eta_0 e^{-\lambda x} + \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то $y \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Теорема 2 доказана.

Используя лемму 5, аналогичным образом доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2. *Тогда если* $h \in C^1[0,\eta]$ *и*

$$\max_{0\leq z\leq\eta} h'(z) < 1,$$

то задача (1), (2) *имеет положительное решение из пространства Соболева* $W_1^1(\mathbb{R}^+)$.

Справедлива также следующая теорема о единственности.

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы* 3. *Тогда если* $\mu_0(x,z) \equiv 0$ *и* $\mu_1(x,z) = \eta - h(\eta - z)$, *то решение задачи* (1), (2) *единственно в следующем классе функций*

$$\mathfrak{M} = \{\varphi\colon 0 \leq \varphi(x) \leq \eta,\ x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4 аналогично доказательству леммы 4.

В конце работы приведем несколько примеров функций $\mu_j(x,z)$, $j=0,1$.

$a)$ $\mu_0(x,z)=\dfrac{z^p}{\eta^{p-1}}\displaystyle\int\limits_x^\infty K(u)\,du,\quad (x,z)\in\mathbb{R}^+\times[0,\eta],\quad p>1.$

$b)$ $\mu_0(x,z)=\eta e^{z-\eta}\displaystyle\int\limits_x^\infty K(u)\,du,\quad (x,z)\in\mathbb{R}^+\times[0,\eta].$

$c)$ $\mu_1(x,z)=\dfrac{(\eta-h(\eta-z))^p}{\eta^{p-1}},\quad (x,z)\in\mathbb{R}^+\times[0,\eta],\quad p>1.$

$d)$ $\mu_1(x,z)=q(x)\sin(\eta-h(\eta-z)),\ \ 0<\eta\leq\pi,\ \ 0\leq q(x)\leq 1,\ \ q\in C(\mathbb{R}^+),\ \ (x,z)\in\mathbb{R}^+\times[0,\eta].$

Выражаю благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за обсуждения статьи, а также рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sargan I.D.** The distribution of wealth // Econometrics. 1957. Vol. 25, № 4. P. 568–590.
2. **Хачатрян Э.А.** О разрешимости одного интегро-дифференциального уравнения с частными производными на полуоси // Изв. НАН Армении. Математика. 2008. Т. 43, № 5. С. 73–82.
3. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения богатства страны // Экономика и мат. методы. 2009. Т. 45, № 4. С. 84–96.
4. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в задаче распределения дохода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, №10. С. 1793–1802.
5. **Khachatryan A., Khachatryan Kh.** On solvability of a nonlinear problem in theory of income distribution // Eurasian Math. J. 2011. Vol. 2, № 2. P. 75–88.
6. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 542 с.
7. **Енгибарян Н.Б.** Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1996. Т. 60, № 2. С. 21–48.

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Армении
e-mail: Khach82@rambler.ru

Поступила 17.12.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542.6

О $\mathfrak{F}$-КОРАДИКАЛЕ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Л. А. Шеметков

Пусть π — некоторое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. Формация $\mathfrak{F}$ называется π'-насыщенной, если из $G/O_{\pi'}(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. В статье доказано, что если $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая π'-насыщенная формация π-разрешимых групп, то $(A \otimes B)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} \otimes B^{\mathfrak{F}}$ для любых конечных групп A и B. В случае $\pi = \mathbb{P}$ этот результат был доказан К. Дёрком и Т. Хоуксом в 1978 г.

Ключевые слова: конечная группа, прямое произведение, формация, $\mathfrak{F}$-корадикал.

L. A. Shemetkov. On the $\mathfrak{F}$-residual of the direct product of finite groups.

Let π be a subset of the set $\mathbb{P}$ of all primes, and let $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. A formation $\mathfrak{F}$ is called π'-saturated if $G/O_{\pi'}(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ implies $G \in \mathfrak{F}$. If $\mathfrak{F}$ is a nonempty π'-saturated formation of π-soluble groups, then it is proved that $(A \otimes B)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} \otimes B^{\mathfrak{F}}$ for any finite groups A and B. In the case $\pi = \mathbb{P}$, this result was proved by K. Doerk and T. Hawkes in 1978.

Keywords: finite group, direct product, formation, $\mathfrak{F}$-residual.

Посвящается А. А. Махневу в связи с его шестидесятилетием

В работе рассматриваются только конечные группы. Мы используем стандартные обозначения (см. [1]). Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений конечного числа групп. Другими словами, если $\mathfrak{F}$ — такой класс групп, что из $G \in \mathfrak{F}$ и $K \trianglelefteq G$ следует $G/K \in \mathfrak{F}$, а из $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует $G/A \cap B \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ — формация (пустое множество по определению является формацией). Если $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ — формация, то $G^{\mathfrak{F}}$ — это пересечение всех тех нормальных подгрупп K из G, для которых $G/K \in \mathfrak{F}$. Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G.

В 1978 г. К. Дёрк и Т. Хоукс опубликовали замечательную работу [2], в которой исследовался следующий вопрос.

Вопрос К. Дёрка и Т. Хоукса. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая фиксированная непустая формация. Верно ли, что $(A \otimes B)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} \otimes B^{\mathfrak{F}}$ для любых групп A и B?*

К. Дёрк и Т. Хоукс доказали, что ответ на вопрос положителен в случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп. В то же время они построили пример формации, для которой ответ на вопрос отрицателен. Цель настоящей работы — найти формации, не содержащиеся в $\mathfrak{S}$, для которых ответ на вопрос К. Дёрка и Т. Хоукса положителен. Мы докажем в теореме 2, что к числу таких формаций относятся все π'-насыщенные формации, которые состоят из π-разрешимых групп.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, π — некоторое подмножество из $\mathbb{P}$. Через π' обозначается, как обычно, множество $\mathbb{P}\backslash\pi$. Наибольшая нормальная π-подгруппа группы G обозначается через $O_\pi(G)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *p-насыщенной* (p — простое число), если из $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Если $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и формация $\mathfrak{F}$ p-насыщена для любого $p \in \omega$, то $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной* формацией (подробную информацию о ω-насыщенных формациях можно найти в [3]). Через $\mathrm{E}_\Phi\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп H таких, что $H/\Phi(H) \in \mathfrak{F}$. $\mathrm{E}_{\Phi_{\pi'}}\mathfrak{F}$ — это подкласс из $\mathrm{E}_\Phi\mathfrak{F}$, определяемый так: группа H принадлежит $\mathrm{E}_{\Phi_{\pi'}}\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда в H существует такая нормальная π'-подгруппа K, что $K \leq \Phi(H)$ и $H/K \in \mathfrak{F}$. Символы $\times$ и $\otimes$ используются соответственно для обозначения внутреннего и внешнего прямого произведения групп.

Сформулируем леммы, которые будут использоваться при доказательстве результатов настоящей статьи.

Напомним, что группа H называется *π-нильпотентной*, если она p-нильпотентна для любого $p \in \pi$. Произведение всех π-нильпотентных нормальных подгрупп группы G обозначается через $F_\pi(G)$.

Лемма 1 [4, следствие 4.1.2]. *Если G — π-разрешимая группа, то $C_G(F_\pi(G)) \leq F_\pi(G)$.*

Лемма 2. *Пусть G — π-разрешимая группа. Предположим, что $\Phi(G) = O_{\pi'}(G) = 1$. Пусть $\mathrm{Soc}(G) = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$, где L_i — минимальная нормальная подгруппа группы G, $i = 1, 2, \dots, n$. Если $L_i \leq Z(G)$ для любого i, то G нильпотентна.*

Доказательство. Ввиду условия $\mathrm{Soc}(G)$ совпадает с $F_\pi(G) = F(G)$. Пусть $C = C_G(\mathrm{Soc}(G))$. Согласно [4, теорема 9.3] (см. также [1, теорема IV.6.9]) группа G/C нильпотентна. Но так как по лемме 1 подгруппа C совпадает с $\mathrm{Soc}(G)$, то мы получаем, что G нильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $G = A \times B, A_1 \trianglelefteq A, B_1 \trianglelefteq B$. Тогда группы G/A_1B_1 и $A/A_1 \otimes B/B_1$ изоморфны.*

Доказательство. Это известный факт, но для удобства читателя мы дадим его доказательство. Возьмем элемент $x = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Теперь рассмотрим отображение $\alpha : G/A_1B_1 \to A/A_1 \otimes B/B_1$ такое, что $\alpha : xA_1B_1 = abA_1B_1 \mapsto (aA_1, bB_1)$. Ясно, что α — сюрьекция. Возьмем еще один элемент $y = a_1b_1$, где $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Так как $G = A \times B$, то $xy = aa_1bb_1$. Поэтому $(xy)^\alpha = (aa_1A_1, bb_1B_1) = (aA_1, bB_1)(a_1A_1, b_1B_1) = x^\alpha y^\alpha$. Значит, α — эпиморфизм. Если $x \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, то $x^\alpha = (aA_1, bB_1) = (A_1, B_1)$, откуда следует $x \in A_1B_1$. Значит, α — изоморфизм. Лемма доказана.

К. Дёрк и Т. Хоукс каждой непустой формации $\mathfrak{F}$ сопоставили класс $\mathfrak{F}^0$ следующим образом:

$$\mathfrak{F}^0 = \{G \mid (G \otimes G)^{\mathfrak{F}} \cap (G \otimes 1) = 1\}$$

(см. [2, определение 3.2]). Существует другое, эквивалентное определение класса $\mathfrak{F}^0$:

$$G \in \mathfrak{F}^0 \text{ тогда и только тогда, когда } (G \otimes G)/\{(g, g) \mid g \in Z(G)\} \in \mathfrak{F}$$

(см. [2, предложение 3.11]).

Лемма 4 (см. [2, теорема 3.5, теорема 3.9, предложение 3.16, лемма 3.6]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда*:
1) $\mathfrak{F}^0$ *— формация*;
2) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^0$;
3) $\mathfrak{F}^0 \subseteq \mathrm{E}_\Phi\mathfrak{F}$;
4) *если $G \in \mathfrak{F}^0$, то* $[G^{\mathfrak{F}}, \mathrm{Aut}(G)] = 1$;
5) *если $G \in \mathfrak{F}^0$, то $G^{\mathfrak{F}} \leq Z(G)$.*

Лемма 5 (см. [2, теорема 3.10]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Следующие условия эквивалентны*:
(*a*) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0$;
(*b*) $(A \otimes B)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} \otimes B^{\mathfrak{F}}$ *для любых групп A и B.*

Теорема 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Пусть $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы в G и группа $A/A \cap G^{\mathfrak{F}}$ π-разрешима. Если $G^{\mathfrak{F}}$ — π-группа, то $G^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Предположим, что $(G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B) = S \neq 1$, и рассмотрим G/S. По условию группа $AG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \simeq A/A \cap G^{\mathfrak{F}}$ π-разрешима. Учитывая равенство $G^{\mathfrak{F}}/S = (G/S)^{\mathfrak{F}}$, получаем

$$(AS/S)(G^{\mathfrak{F}}/S)/(G^{\mathfrak{F}}/S) = (AG^{\mathfrak{F}}/S)/(G^{\mathfrak{F}}/S) \simeq AG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \simeq A/A \cap G^{\mathfrak{F}}.$$

Мы видим, что для группы G/S условие теоремы выполняется, а значит, для нее теорема верна. Поэтому

$$G^{\mathfrak{F}}/S = (G^{\mathfrak{F}}/S \cap AS/S)(G^{\mathfrak{F}}/S \cap BS/S) = (S(G^{\mathfrak{F}} \cap A)/S)(S(G^{\mathfrak{F}} \cap B)/S).$$

Отсюда следует, что

$$G^{\mathfrak{F}} = S(G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B) = (G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B),$$

и мы приходим к противоречию. Поэтому

$$G^{\mathfrak{F}} \cap A = G^{\mathfrak{F}} \cap B = 1. \tag{1}$$

Предположим теперь, что $A \cap B = D \neq 1$, и рассмотрим G/D. Согласно [4, лемма 1.2] $(G/D)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}D/D$. Проверим выполнимость условия теоремы для G/D:

$$((A/D)(G^{\mathfrak{F}}D/D))/(G^{\mathfrak{F}}D/D) = (AG^{\mathfrak{F}}/D)/(G^{\mathfrak{F}}D/D) \simeq AG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}D = ADG^{\mathfrak{F}}/DG^{\mathfrak{F}}$$

$$\simeq A/D(A \cap G^{\mathfrak{F}}) \simeq (A/A \cap G^{\mathfrak{F}})(D(A \cap G^{\mathfrak{F}}))/(A \cap G^{\mathfrak{F}})/(D(A \cap G^{\mathfrak{F}}))/(A \cap G^{\mathfrak{F}}).$$

Мы видим, что условие теоремы для G/D выполняется, а значит, теорема для G/D верна. Таким образом,

$$G^{\mathfrak{F}}D/D = ((G^{\mathfrak{F}}D/D \cap A/D))((G^{\mathfrak{F}}D/D \cap B/D)) = (G^{\mathfrak{F}}D \cap A)/D)(G^{\mathfrak{F}}D \cap B)/D).$$

Но тогда

$$G^{\mathfrak{F}}D = (G^{\mathfrak{F}}D \cap A)(G^{\mathfrak{F}}D \cap B) = D(G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B).$$

Отсюда ввиду (1) получаем, что $G^{\mathfrak{F}}D = D$, а значит, $G^{\mathfrak{F}} \leq D = A \cap B$. Очевидно, в этом случае теорема верна.

Таким образом, в дальнейшем будем считать, что $A \cap B = 1$ и $G = A \times B$. Следовательно, $[A, G^{\mathfrak{F}}] \leq A \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$, $[B, G^{\mathfrak{F}}] \leq B \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$, и мы получаем

$$G^{\mathfrak{F}} \leq Z(G) = Z(A) \times Z(B). \tag{2}$$

Из (2) и π-разрешимости группы $A/A \cap G^{\mathfrak{F}}$ следует, что A π-разрешима.

Предположим, что $O_{\pi'}(A) = R \neq 1$, и рассмотрим группу G/R. Так как группа A π-разрешима, то и группа $(AR/R)/(AR/R) \cap ((G^{\mathfrak{F}}R/R)$ тоже π-разрешима. Значит, ввиду выбора G теорема для G/R верна, т. е. $G^{\mathfrak{F}}R/R = (G^{\mathfrak{F}}R/R \cap A/R)(G^{\mathfrak{F}}R/R \cap BR/R)$. Отсюда получаем равенство

$$G^{\mathfrak{F}}R = (G^{\mathfrak{F}}R \cap A)(G^{\mathfrak{F}}R \cap BR) = R(G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap BR).$$

Используя (1), получаем равенство $G^{\mathfrak{F}}R = R(G^{\mathfrak{F}} \cap BR)$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — π-группа, а R — π'-группа, то мы приходим к тому, что $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} \cap BR$, $G^{\mathfrak{F}} \leq B$. Следовательно,

$$G^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B) = 1 \cdot G^{\mathfrak{F}},$$

а это означает, что для G теорема верна. Получили противоречие.

Таким образом, будем считать, что

$$O_{\pi'}(A) = 1. \tag{3}$$

Из (3) и известной теоремы Гашюца [5, теорема 3.4.2] следует, что группа $\mathrm{Soc}(A/\Phi(A)) = T/\Phi(A)$ является π-группой, а подгруппа T совпадает с $F(A)$. Предположим, что $T \neq A$. Тогда согласно лемме 2 G имеет эксцентральный дополняемый главный фактор $S/\Phi(A)$. Пусть M — такая максимальная подгруппа из A, что $MS = A$ и $M \cap S = \Phi(A)$. Ясно, что M не является нормальной подгруппой в A и $M \geq Z(A)$. Рассмотрим $G_0 = M \times B$. Имеем следующие включения: $G_0 \geq Z(G) \geq G^{\mathfrak{F}}$. Кроме того, $G = A \times B = F(A)MB = F(G)G_0$ и $G/G^{\mathfrak{F}} = (F(G)/G^{\mathfrak{F}})(G_0/G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$. Отсюда ввиду теоремы Брайанта — Брайса — Хартли [2, теорема IV.1.14] получаем, что $G_0/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $(G_0)^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$. Но тогда, учитывая (1) и то, что теорема для G_0 верна, получаем, что $(G_0)^{\mathfrak{F}} = ((G_0)^{\mathfrak{F}} \cap M)((G_0)^{\mathfrak{F}} \cap B) = 1$. Значит, $(G_0)^{\mathfrak{F}} \cap M = (G_0)^{\mathfrak{F}} \cap B = 1$ и $G_0 \in \mathfrak{F}$. Теперь из $G_0 = M \times B \in \mathfrak{F}$ следует, что $B \in \mathfrak{F}$, т. е. $B \cong G/A \in \mathfrak{F}$, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap G^{\mathfrak{F}}$, и поэтому ввиду (1) имеем $G^{\mathfrak{F}} = 1$. Пришли к противоречию.

Теперь мы рассмотрим случай, когда A — нильпотентная π-группа. Из равенства $G/G^{\mathfrak{F}} = (AG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}})\,(BG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$ ввиду теоремы Брайанта — Брайса — Хартли вытекает изоморфизм

$$B \cong BG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

т. е. $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$, а из $G^{\mathfrak{F}} \cap A = 1$ получаем $G^{\mathfrak{F}} = 1$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы в G, причем $G^{\mathfrak{F}}$ — π-группа. Предположим, что либо G π-разрешима, либо $\mathfrak{F}$ состоит из π-разрешимых групп. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B)$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы в G. Предположим, что либо G разрешима, либо $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B)$.*

Следствие 3 (см. [2, предложение 1.1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и $G = A \times B$ — разрешимая группа. Если $G^{\mathfrak{F}} \cap A = G^{\mathfrak{F}} \cap B = 1$, то $G^{\mathfrak{F}} = 1$.*

Следствие 4. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация и $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Предположим, что либо G π-разрешима, либо $\mathfrak{F}$ состоит из π-разрешимых групп. Предположим также, что $G^{\mathfrak{F}}$ является π-группой. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} \times A_2^{\mathfrak{F}} \times \cdots \times A_n^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Используя индукцию по числу прямых факторов, мы сводим доказательство к случаю $n = 2$. Итак, пусть $G = A \times B$. Согласно теореме 1, справедливо равенство $G^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B)$. Применяя лемму 3, получаем изоморфизм

$$G/(G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B) \simeq (A/(G^{\mathfrak{F}} \cap A) \otimes (B/(G^{\mathfrak{F}} \cap B)).$$

Группа $G/(G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B)$ принадлежит $\mathfrak{F}$, поскольку $(G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B) = G^{\mathfrak{F}}$. Но тогда группы $A/(G^{\mathfrak{F}} \cap A)$ и $B/(G^{\mathfrak{F}} \cap B)$ также принадлежат $\mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $A^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}} \cap A$ и $B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}} \cap B$, а значит, $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

Снова применяя лемму 3, получаем изоморфизм

$$G/A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \simeq (A/A^{\mathfrak{F}}) \otimes (B/B^{\mathfrak{F}}).$$

Так как $(A/A^{\mathfrak{F}}) \otimes (B/B^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$, то $G/A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \geq G^{\mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}} \cap A)(G^{\mathfrak{F}} \cap B)$. Учитывая полученное ранее включение $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$, получаем требуемое равенство $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$.

Следствие доказано.

Следствие 5 (см. [2, теорема 1.2]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— некоторая непустая формация, состоящая из разрешимых групп и* $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. *Тогда* $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} \times A_2^{\mathfrak{F}} \times \cdots \times A_n^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 6. *Пусть* π *— некоторое множество простых чисел, и* $\mathfrak{F}$ *— некоторая непустая формация, состоящая из* π*-разрешимых групп. Тогда* $\mathfrak{F}^0 \subseteq \mathrm{E}_{\Phi_{\pi'}}\mathfrak{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 4 $\mathfrak{F}^0$ — формация, содержащая $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп, то в этом случае без ограничения общности можно считать, что $\pi' = \varnothing$. Но тогда из следствия 4 и леммы 5 вытекает, что $\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}$. Таким образом, нам надо рассмотреть только случай, когда $2 \in \pi'$ и в $\mathfrak{F}$ есть неразрешимые группы.

Согласно лемме 4 $\mathfrak{F}^0 \subseteq \mathrm{E}_\Phi\mathfrak{F}$. Предполагая, что лемма неверна, рассмотрим группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^0 \setminus \mathrm{E}_{\Phi_{\pi'}}\mathfrak{F}$. Если $O_{\pi'}(\Phi(G)) \neq 1$, то, учитывая выбор G, получаем $G/O_{\pi'}(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $O_{\pi'}(\Phi(G)) = 1$. Ввиду утверждения 5) леммы 4 $G^{\mathfrak{F}} \subseteq Z(G) \cap \Phi(G)$. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $|K| = p$ — простое число и $G/K \in \mathrm{E}_{\Phi_{\pi'}}\mathfrak{F}$. Если $G/K \notin \mathfrak{F}$, то это противоречит равенству $O_{\pi'}(\Phi(G)) = 1$. Поэтому $p \in \pi$, $|\Phi(G)| = p > 2$ и $K = G^{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим группу $G \otimes G$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — π-группа, то, применяя следствие 4, получаем $(G \otimes G)^{\mathfrak{F}} = K \otimes K$. Пусть f — автоморфизм группы $G \otimes G$, переставляющий ее прямые сомножители, т. е. $f : (x, y) \mapsto (y, x)$ для любых $x, y \in G$. По лемме 4 f действует тождественно на $K \otimes K$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* π *— некоторое множество простых чисел и* $\mathfrak{F}$ *— некоторая непустая* π'*-насыщенная формация, состоящая из* π*-разрешимых групп. Тогда* $\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}$, *и если какая-то группа* G *имеет вид* $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *то* $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} \times A_2^{\mathfrak{F}} \times \cdots \times A_n^{\mathfrak{F}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя индукцию по числу прямых факторов, мы сводим доказательство к случаю $n = 2$. Применяя лемму 6 и учитывая, что $\mathfrak{F}$ π'-насыщена, получаем равенство $\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}$. Теперь результат следует из леммы 5. Теорема доказана.

Формация называется *насыщенной*, если она p-насыщена для любого простого числа p. При $\pi = \varnothing$ из теоремы 2 вытекает следующий результат К. Дёрка и Т. Хоукса [2].

Следствие 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— некоторая непустая насыщенная формация. Предположим, что группа* G *имеет вид* $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. *Тогда* $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} \times A_2^{\mathfrak{F}} \times \cdots \times A_n^{\mathfrak{F}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Doerk K., Hawkes T.O.** Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
2. **Doerk K., Hawkes T.O.** On the residual of a direct product // Arch. Math. 1978. Vol. 30, no. 5. P. 458–468.
3. **Шеметков Л.А.** Локальные задания формаций конечных групп // Фундамент. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 8. С. 229–244.
4. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
5. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; New York: Springer, 1967. 793 S.

Шеметков Леонид Александрович
Поступила 10.12.2012
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. НАН Беларуси
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: shemet37@gmail.com

Том 19 № 3 2013

УДК 512.54 +519.17

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Е. А. Неганова

В текст моей статьи [1] должны быть внесены следующие изменения.

На с. 223, строка 2 снизу, вместо $\Gamma^{1,4}_{\bar{1},1}=\Gamma^{1,4}_{33},\Gamma^{1,4}_{\bar{2},1}=\Gamma^{1,4}_{10}$ должно быть $\Gamma^{1,4}_{\bar{1},4}=\Gamma^{1,4}_{33},\Gamma^{1,4}_{\bar{2},4}=\Gamma^{1,4}_{10}$.

На с. 227 в табл. 1.2 после графа $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$ следует добавить графы

$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11a}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,4)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 3)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,4)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},$ $\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,1)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},$ $\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\}$

На с. 228 в табл. 1.2 после графа $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19}$ следует добавить граф

$\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19a}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11a})$

В связи с этим на с. 229 первый абзац после табл. 1.2 нужно заменить на следующий абзац.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,t}$, $8\le t\le 10$ и графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11a}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$ попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку периоды графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11a}$ совпадают, но отличны от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11a}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$. Поскольку периоды графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$ совпадают, но отличны от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$. Поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},1,1,8}$ несвязный, а графы $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},1,1,10}$ связные, то граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$. Далее заметим, что граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$,

$(3,0)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$ не изоморфны. Поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,3)$, $(1,2)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11a}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,3)$, $(1,2)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ и не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11a}$ попарно не изоморфны. Наконец, графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$ и $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$ попарно не изоморфны, так как граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11c}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,3)$, $(1,2)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11b}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,3)$, $(1,2)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ и не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

На с. 230 к списку частично дополнительных графов к графам из табл. 1.2 (строки 21-11 снизу) требуется добавить следующие графы:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^{2,4}_{\overline{1},1,1,11a};\ \Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},1,11a};\ \Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},\overline{1},11a};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},1,11a};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},\overline{1},11a};\\
\Gamma^{2,4}_{\overline{1},1,1,11b};\ \Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},1,11b};\ \Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},\overline{1},11b};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},1,11b};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},\overline{1},11b};\\
\Gamma^{2,4}_{\overline{1},1,1,11c};\ \Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},1,11c};\ \Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},\overline{1},11c};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},1,11c};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},\overline{1},11c};\\
\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,2,19a};\ \Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},2,19a};\ \Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{2},19a};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},2,19a};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{2},19a}.
\end{gathered}
$$

Наконец, на с. 231 в табл. 1.3 описание множества $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,1,1,34})$ должно быть заменено на “совпадает с множеством $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,31})$”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Неганова Е.А.** $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрические 4-расширения 2-мерной решетки Λ^2 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 222–243.

Поступила 1.07.2013

Неганова Елена Александровна

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: nega-le@yandex.ru

Том 19 № 3 2013

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ “АЛГЕБРА И КОМБИНАТОРИКА”, ПОСВЯЩЕННАЯ 60-ЛЕТИЮ А.А. МАХНЕВА

В. В. Кабанов, А. С. Кондратьев

V. V. Kabanov, A. S. Kondrat'ev. International Conference on Algebra and Combinatorics Dedicated to the 60th Birthday of A.A. Makhnev.

Международная конференция “Алгебра и комбинаторика”, проходившая в Екатеринбурге 3–7 июня 2013 г., была посвящена 60-летию со дня рождения выдающегося российского математика члена-корреспондента РАН А. А. Махнева.

Конференция была организована Институтом математики и механики им. Н. Н. Красовского РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-06054-г).

Оргкомитет конференции: В. В. Кабанов (председатель), В. И. Бердышев, М. В. Волков, А. Л. Гаврилюк, В. И. Зенков, А. В. Коныгин, Н. В. Маслова, Е. А. Неганова.

Программный комитет конференции: А. С. Кондратьев (председатель), Р. Ж. Алеев, В. А. Белоногов, И. Н. Белоусов (ученый секретарь), В. В. Блудов, Н. А. Вавилов, Е. М. Вечтомов, Ю. Л. Ершов, А. Х. Журтов, Л.С. Казарин, В. А. Койбаев, В. В. Кораблева, В. Н. Латышев, В. М. Левчук, В. Д. Мазуров, А. В. Михалев, В. С. Монахов, А. Ю. Ольшанский, В. Н. Ремесленников, А. В. Рожков, В. И. Трофимов, Н. С. Черников, Л. А. Шеметков, А. Л. Шмелькин.

В работе конференции приняли участие 130 человек из 30 городов Российской Федерации, в том числе один член-корреспондент РАН, 44 доктора и 46 кандидатов наук, а также студенты, магистранты, аспиранты и молодые сотрудники научно-исследовательских институтов. Шесть зарубежных участников прибыли в Екатеринбург из Беларуси, Израиля, Канады, США и Украины. На конференции обсуждались современные достижения в области алгебры (прежде всего теории групп) и ее приложений, а также в области комбинаторики (прежде всего теории графов). Тематика докладов охватывает широкий спектр исследований по современным направлениям фундаментальной и прикладной математики. В сборнике тезисов докладов[1] опубликовано 70 работ.

На открытии конференции, 7 августа, выступили директор ИММ УрО РАН академик РАН В. И. Бердышев, член-корреспондент РАН А. А. Махнев, профессор М. В. Селькин.

По регламенту конференции первая половина дня посвящалась пленарным докладам (45 мин), во второй половине дня заслушивались краткие секционные сообщения (15–20 мин).

На конференции были представлены 25 пленарных докладов:

M. Muzychuk “On systems of linked block designs”;

C. K. Gupta “Some different topics: identities, automorphisms, test sets, polynilpotent series, equationally Notherian, partially commutative nilpotent metabelian groups, certain linear groups”;

[1]Алгебра и комбинаторика: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 60-летию А. А. Махнева. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2013. 178 с.

A. Yu. Ol'shansky “Asymptotics of relations in groups and complexity of word problem”;

Р. Ж. Алеев “О рангах групп центральных единиц”;

В. А. Белоногов “О контроле простого спектра конечной простой группы”;

В. В. Беляев “Группы финитарных подстановок”;

Б. М. Верников “Специальные элементы решеток многообразий полугрупп”;

М. В. Волков “Матричные тождества с операциями умножения и транспонирования”;

А. В. Васильев “О неабелевых группах Шура”;

Е. П. Вдовин “О пересечении разрешимых холловых подгрупп в конечных группах”;

А. Л. Гаврилюк “Классы прямых Камерона — Либлера в проективной геометрии PG(n,4)”;

В. И. Зенков “О пересечениях примарных подгрупп в конечных группах”;

А. С. Кондратьев “О распознавании конечных групп по графу простых чисел”;

В. В. Кораблева “О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа”;

А. А. Кузнецов “Компьютерные вычисления в периодических группах”;

В. М. Левчук “Вопросы классификации конечных полуполевых плоскостей, QF-схем и квадрик проективных пространств”;

Д. В. Лыткина “О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах”;

А. А. Махнев “Дистанционно регулярные графы с сильно регулярными окрестностями вершин”;

Я. Н. Нужин “Подгруппы групп лиева типа, определяемые наборами аддитивных подгрупп основного кольца”;

Д. В. Падучих “Об исключительных сильно регулярных графах и их расширениях”;

И. Н. Пономаренко “Об абелевых группах Шура”;

Д. О. Ревин “Формационные и фиттинговы свойства классов, определяемых холловыми подгруппами”;

М. В. Селькин “Применение групповых функторов в конечных группах”;

А. И. Созутов “Фробениусовы подгруппы в бесконечных группах”;

В. И. Трофимов “Симметрические расширения графов”;

Н. С. Черников “Группы с широкими системами дополняемых абелевых подгрупп”;

А. К. Шлепкин “Группы с условием насыщенности”.

На секционных заседаниях были заслушаны 23 кратких сообщения.

В числе наиболее сильных результатов, представленных на конференции, следует отметить результаты А. Ю. Ольшанского об асимптотике соотношений в группах, В. И. Трофимова о симметрических расширениях графов, А. В. Васильева и И. Н. Пономаренко о группах Шура, А. Х. Журтова, Д. В. Лыткиной, В. Д. Мазурова и А. И. Созутова о периодических группах, свободно действующих на абелевых группах.

В связи с кончиной члена-корреспондента НАН Беларуси Л. А. Шеметкова (март 2013 г.) на одном из пленарных заседаний был показан фильм, посвященный его научно-организационной деятельности. На протяжении многих лет возглавляемая им гомельская школа по теории групп тесно сотрудничает с уральской алгебраической школой.

Программой конференции был предусмотрен свободный день, в течение которого участники конференции могли ознакомиться с достопримечательностями Екатеринбурга.

Участники международной конференции “Алгебра и комбинаторика”, посвященной 60-летию А.А. Махнева.

Закрытие конференции состоялось 7 июня. По традиции А. А. Махнев сообщил об алгебраических конференциях, запланированных на 2014 г. Это конференция, посвященная 70-летию со дня рождения В. Д. Мазурова (Новосибирск, июль), конференция, посвященная 80-летию со дня рождения В. П. Шункова (Красноярск, июль) и "Мальцевские чтения" (Новосибирск, ноябрь). После закрытия была сделана фотография участников конференции.

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук
зам. директора
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Поступила 1.07.2013

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TEX-редактор Н. Н. Моргунова

Фото на с. 4 И. Зиганшин

Фото на с. 325 Н. Маслова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 29.08.13. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38,4. Уч.-изд. л. 30,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226