РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 19, № 2 2013

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 19 № 2 2013

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 19, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. 324 с.

ISSN 0134–4889

СОДЕРЖАНИЕ

К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧЛЕНА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ИВАНА ИВАНОВИЧА ЕРЕМИНА 5

А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова. Линейное программирование и динамика 7

Н. Ю. Антонов. Оценки роста произвольных последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье 26

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере 34

Н. Н. Астафьев. Двойственные системы однородных линейных уравнений 48

В. М. Бадков. Асимптотические свойства нулей ортогональных тригонометрических полиномов полуцелых порядков 54

Н. А. Барабошкина. Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности 71

В. И. Бердышев. Дифференцирование функции скрытости в случае выпуклого затеняющего множества 79

В. В. Васин. Модифицированные процессы ньютоновского типа, порождающие фейеровские аппроксимации регуляризованных решений нелинейных уравнений 85

А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко. Обобщенный метод Ньютона для задач линейной оптимизации с ограничениями-неравенствами 98

Г. А. Дубосарский. Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами и их приложения к задачам математической физики 109

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин. Условия устойчивости многокритериальной булевой задачи минимизации проекций линейных функций 125

И. И. Еремин, Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай. 2-приближенный алгоритм поиска клики с минимальным весом вершин и ребер 134

В. И. Ерохин, А. С. Красников, М. Н. Хвостов. О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений 144

В. Г. Жадан, А. А. Орлов. Прямо-двойственный метод Ньютона для линейной задачи полуопределенного программирования 157

Л. А. Калякин. Устойчивость недиссипативных систем относительно случайных возмущений, малых в среднем 170

Том 19 № 2 2013

(Продолжение)

А. И. Кибзун, В. Р. Соболь. Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции ... 179

А. А. Колоколов, Т. Г. Орловская. Исследование некоторых задач целочисленного программирования на основе унимодулярных преобразований и регулярных разбиений ... 193

А. И. Короткий, Н. А. Артемова, Н. А. Ваганова, О. О. Коврижных, Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов, О. В. Ушакова, М. Ю. Филимонов, И. А. Цепелев. О разработках аналитических и численных методов решения задач механики сплошной среды ... 203

А. О. Леонтьева. Неравенство Бернштейна для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов в l_0 ... 216

Т. О. Логвинова. Обобщение двумерных непрерывных радиальных всплесков ... 224

Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай. Бустинг и полиномиальная аппроксимируемость задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете ... 231

А. А. Махнев, Д. В. Падучих, Л. Ю. Циовкина. Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda = \mu$ ... 237

Л. Д. Попов. Об адаптации метода нагруженного функционала к несобственным задачам математического программирования ... 247

А. И. Роженко. О новом семействе условно положительно-определенных радиальных базисных функций ... 256

В. Д. Скарин. Об оптимальной коррекции противоречивых задач выпуклого программирования ... 267

В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, Г. В. Паршиков. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости ... 275

Р. Т. Файзуллин, В. И. Дулькейт, Ю. Ю. Огородников. Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации ... 285

О. В. Хамисов. Невыпуклая оптимизация с нелинейными опорными функциями ... 295

А. Г. Ченцов. К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств ... 307

Бадков Владимир Михайлович ... 320

Том 19 № 2 2013

К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧЛЕНА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ИВАНА ИВАНОВИЧА ЕРЕМИНА

22 января отметил юбилей главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН академик Иван Иванович Еремин.

И. И. Еремин известен в нашей стране и за рубежом как ведущий специалист в области теории и методов математического программирования и их приложений в экономике, распознавании образов и управлении. Он автор более 200 научных работ, в том числе 18 монографий. Его результаты в области теории линейной и выпуклой оптимизации общепризнанны, они во многом определили направление развития этого современного раздела исследования операций.

Академик И. И. Еремин внес фундаментальный вклад в развитие метода штрафных функций. Функции, использованные им при обосновании сводимости задач линейного и выпуклого программирования к эквивалентным задачам безусловной оптимизации, в настоящее время носят имя точных штрафных функций Еремина — Зангвилла.

Широко известны результаты И. И. Еремина в области нестационарных процессов оптимизации иерархических систем и итерационных методов решения задач математического программирования. Исследованный им специальный класс квазинерастягивающих операторов, названных фейеровскими, лежит в основе обширного семейства одноименных итерационных алгоритмов решения систем линейных и выпуклых неравенств и оптимизационных задач, обладающих рядом важных с вычислительной точки зрения характеристик: устойчивостью к малым изменениям параметров задачи, простотой реализации и высоким внутренним параллелизмом.

Большую известность получили исследования И. И. Еремина в области анализа и оптимальной коррекции противоречивых задач выпуклой оптимизации. Введенное им понятие несобственной задачи математического программирования и развитая стройная теория изучения таких задач обусловили появление нового научного направления в современной теории оптимизации.

Академик И. И. Еремин всегда придавал первостепенное значение развитию теории двойственности — одной из основных фундаментальных компонент современной математической оптимизации. Им построена теория двойственности для несобственных задач линейного и выпуклого программирования, обоснованы схемы симметричной двойственности для лексикографических и Парето-последовательных задач линейной оптимизации, исследована двойственность дизъюнктивных задач кусочно-линейного программирования.

Иван Иванович Еремин — основатель и научный руководитель уральской школы математического программирования и распознавания образов. В 1961 г. он организовал лабораторию линейного программирования в Свердловском отделении Математического института им. В. А. Стеклова (ныне Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН). На протяжении почти сорока лет И. И. Еремин стоял во главе созданного им отдела математического программирования ИММ. Среди его учеников — член-корреспондент РАН, 11 докторов и более 30 кандидатов наук.

Академик И. И. Еремин — председатель Ассоциации математического программирования, член нескольких специализированных советов по защите диссертаций, редакционного совета журнала “Труды Института математики и механики”, редакционных коллегий журналов “Известия вузов” и YuJOR. Долгие годы он возглавляет организационный комитет Всероссийской конференции “Математическое программирование и приложения”.

Особое внимание Иван Иванович уделяет преподаванию и подготовке высокопрофессиональных научных кадров в качестве профессора Уральского федерального университета (ранее Уральского госуниверситета им. А. М. Горького). Организованная им кафедра математической экономики с 1996 г. является одной из выпускающих на математико-механическом факультете университета. В его лекциях по линейным неравенствам и оптимизации математическая строгость доказываемых теорем сочетается с многогранностью описываемых ими экономических моделей и оригинальностью изложения.

Научная и педагогическая деятельность академика И. И. Еремина получила заслуженное признание и отмечена государственными наградами.

Иван Иванович — кавалер орденов “Знак почета” и “Дружбы”, за выдающиеся результаты в области экономико-математических методов он удостоен премии им. Л. В. Канторовича РАН и премии им. А. Ф. Сидорова УрО РАН.

Коллектив Института математики и механики и редколлегия журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН” сердечно поздравляют Ивана Ивановича с юбилеем и желают долгих лет жизни, новых успехов, здоровья и благополучия!

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.977

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ДИНАМИКА[1]

А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова

В гильбертовом пространстве рассматривается линейная краевая задача оптимального управления, в основе которой лежит линейная динамика и терминальная задача линейного программирования на правом конце временного интервала. Предлагается седловой метод ее решения. Доказывается его сходимость.

Ключевые слова: линейное программирование, оптимальное управление, краевые задачи, методы решения, сходимость, устойчивость

A. S. Antipin, E. V. Khoroshilova. Linear programming and dynamics.

A linear boundary value problem of optimal control is considered in a Hilbert space. The problem is based on linear dynamics and a terminal problem of linear programming at the right end of the time interval. A saddle method is proposed for its solution, and its convergence is proved.

Keywords: linear programming, optimal control, boundary value problems, solution methods, convergence, stability.

Введение

Линейное программирование — один из самых мощных и популярных инструментов математического моделирования, охватывающий обширные области человеческой активности, включая экономику, экологию, технологию, сложные сети, научные исследования и многое другое. Линейное программирование имеет различные виды и существует в разнообразных формах. Задачам линейного программирования посвящена значительная часть научной литературы. Заметное место среди этих исследований занимают работы И. И. Еремина, посвященные изучению разнообразных задач линейного и выпуклого программирования, в том числе несобственных и противоречивых задач, задач лексикографической и паретовской оптимизации, задач дизъюнктивного программирования и распознавания образов, игровых задач линейного программирования и других видов задач [1–5]. Заслуга И. И. Еремина заключается в том, что он исследовал все эти задачи в прямой и двойственной формах одновременно [6]. Продолжая эту линию, мы рассматриваем задачи линейного программирования с точки зрения динамики.

В общем задачи линейного программирования являются статичными и описывают состояние системы в фиксированный момент времени. Однако реальные объекты меняются под воздействием различных факторов меняющейся среды. Например, объекты экономики меняются при изменении экономической конъюнктуры. Это значит, что в последующие моменты времени статичные экономические модели не будут адекватны изменившимся реальным объектам. Возникает рассогласование между реальным объектом и его математической моделью. Чтобы устранить эту неадекватность, представляется разумным ввести в математическую модель фактор времени. В данной работе это сделано в рамках теории краевых задач оптимального управления.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00783) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5264.2012.1).

1. Постановка задачи

Рассмотрим простейшую постановку линейной краевой задачи оптимального управления. В случае, когда управления пробегают все множество управлений $u(\cdot) \in U$, линейная управляемая динамика задачи порождает траектории $x(\cdot)$, $t \in [t_0, t_1]$, правые концы которых $x(t_1) = x_1$ описывают терминальное множество $X_1 = X(t_1) \subseteq \mathbb{R}^n$, называемое *множеством достижимости.*

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования в гильбертовом пространстве:

$$x_1^* \in \operatorname{Arg\,min}\big\{\langle \varphi_1, x_1\rangle \mid A_1 x_1 \le a_1,\ x_1 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad t_0 \le t \le t_1, \tag{1.2}$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad x^*(t_1) = x_1^* \in X_1 \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \|u(\cdot)\|_{L_2} \le \text{const}\}\big\}. \tag{1.4}$$

Здесь $D(t)$, $B(t)$ — матричные функции размера $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, непрерывно зависящие от времени; A_1 — фиксированная матрица размера $m \times n$ $(m \le n)$; a_1, x_0 — заданные векторы. Управления $u(\cdot)$ являются элементами пространства $L_2^r[t_0, t_1]$ и удовлетворяют условию (1.4) в точках отрезка $[t_0, t_1]$ с точностью до множества меры нуль. Выпуклое замкнутое (в частности, многогранное) множество допустимых управлений U не зависит от времени. Вектор $\varphi_1 \in \mathbb{R}^n$ фиксирован и определяет нормаль линейной функции.

В качестве решения дифференциальной системы (1.2)–(1.4) будем понимать любую пару $(x(\cdot), u(\cdot)) \in L_2^n[t_0, t_1] \times U$, удовлетворяющую тождественно условию

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \big(D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)\big)d\tau, \qquad t_0 \le t \le t_1. \tag{1.5}$$

Тождество определяет обобщенное решение динамики (1.2)–(1.4). В [7, кн. 1, с. 443] показано, что любому управлению $u(\cdot) \in U$ в линейной дифференциальной системе отвечает единственная траектория $x(\cdot)$, и эта пара удовлетворяет тождеству (1.5). В приложениях управление $u(\cdot)$ часто является кусочно-непрерывной функцией. При этом наличие точек разрыва на управлении $u(\cdot)$ никак не сказывается на значениях траектории $x(\cdot)$. Более того, траектория останется без изменения даже в том случае, если изменить значения функции $u(\cdot)$ на множестве меры нуль. Траектория $x(\cdot)$ в ситуации (1.5) является абсолютно непрерывной функцией [8]. Класс абсолютно непрерывных функций представляет собой линейное многообразие, всюду плотное в $L_2^n[t_0, t_1]$. В дальнейшем этот класс будем обозначать как $AC^n[t_0, t_1] \subset L_2^n[t_0, t_1]$. Для любой пары функций $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$ выполняются формулы Ньютона — Лейбница и, соответственно, формулы интегрирования по частям[2].

Предполагается, что решения задачи $x_1^* \in X_1$, $(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$ всегда существуют. Доказательство существования можно найти в [9].

Система (1.1)–(1.4) работает следующим образом. Линейная управляемая система (1.2)–(1.4) представляет собой линейное ограничение, которое выделяет линейное многообразие функций (процессов) $x(\cdot), u(\cdot)$, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$. Как уже было сказано, правые концы траекторий порождают X_1. На этом множестве определена линейная функция $\langle \varphi_1, x_1\rangle$, которая выделяет одну точку минимума или выпуклое замкнутое множество

[2] Скалярные произведения и нормы во введенных пространствах определяются, соответственно, как $\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), y(t)\rangle dt$, $\|x(\cdot)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt$, где $\langle x(t), y(t)\rangle = \sum_1^n x_i(t)y_i(t)$, $|x(t)|^2 = \sum_1^n x_i^2(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$.

таких точек. Теперь задача выглядит следующим образом: требуется выбрать такое управление $u^*(\cdot) \in U$, чтобы правый конец траектории $x^*(\cdot)$ совпал с решением задачи линейного программирования (1.1), сформулированной на множестве достижимости динамической системы (1.2)–(1.4).

Заметим, что в задаче (1.1)–(1.4) начальное условие $x(t_0) = x_0 \in X_0$ задано в явном виде. В реальных ситуациях это условие может быть определено неявным образом, например как решение задачи линейного программирования типа (1.1), т. е. как $x_0^* \in \operatorname{Arg\,min}\{\langle \varphi_0, x_0 \rangle \mid A_0 x_0 \le a_0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n\}$. В этом случае начальное условие определяется в виде $x(t_0) = x_0^* \in X_0$, а задача трактуется как динамическая система, которая выбором управления переводит с помощью своей траектории линейную задачу из начального состояния в терминальное. Такая конструкция позволяет адаптировать и подстраивать модель некоторого объекта к постоянно меняющемуся реальному объекту, находящемуся в изменчивой среде.

2. Классический лагранжиан

Рассмотренная задача представляет собой задачу линейного программирования, сформулированную в гильбертовом пространстве. В теории линейного программирования в конечномерном пространстве известно, что наряду с прямой задачей всегда существует двойственная задача в сопряженном пространстве. Проводя соответствующие аналогии, можно пытаться получить в явном виде двойственную задачу для системы (1.1)–(1.4). С этой целью скаляризируем систему (1.1)–(1.4) и введем линейную свертку, известную как функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L(p_1, x_1, \psi(\cdot), x(\cdot), u(\cdot)) &= \langle \varphi_1, x_1 \rangle + \langle p_1, A_1 x_1 - a_1 \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \Big\rangle dt, \end{aligned} \tag{2.1}$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$, где $\Psi_2^n[t_0, t_1]$ — линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из пространства, сопряженного к декартовому произведению пространств прямых переменных $L_2^n[t_0, t_1] \times L_2^r[t_0, t_1]$. Это множество всюду плотно в $L_2^n[t_0, t_1]$, т. е. замыкание многообразия $\Psi_2^n[t_0, t_1]$ по норме $L_2^n[t_0, t_1]$ совпадает с $L_2^n[t_0, t_1]$.

Седловая точка $(p_1^*, \psi^*(\cdot);\ x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ функции Лагранжа, образованная прямыми $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ и двойственными $(p_1^*, \psi^*(\cdot))$ наборами векторов, которые являются решениями задачи (1.1)–(1.4), по определению удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{aligned} &\langle \varphi_1, x_1^* \rangle + \langle p_1, A_1 x_1^* - a_1 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \Big\rangle dt \\ &\le \langle \varphi_1, x_1^* \rangle + \langle p_1^*, A_1 x_1^* - a_1 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \Big\rangle dt \\ &\le \langle \varphi_1, x_1 \rangle + \langle p_1^*, A_1 x_1 - a_1 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \Big\rangle dt \end{aligned} \tag{2.2}$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$, $x(t_0) = x_0$.

Итак, если исходная задача (1.1)–(1.4) имеет прямое и двойственное решение, то эта пара является седловой точкой функции Лагранжа. Здесь, как и в конечномерном случае, двойственным решением называется нормаль линейного функционала, который является опорным в точке минимума, удовлетворяющей линейным ограничениям (1.2).

Покажем, что верно обратное утверждение: седловая точка функции Лагранжа (2.1) является прямым и двойственным решением исходной задачи (1.1)–(1.4).

Левое неравенство системы (2.2) представляет собой задачу максимизации линейной функции по переменным $(p_1, \psi(\cdot))$ на всем пространстве $\mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$ определения этой функции:

$$\langle p_1 - p_1^*, A_1x_1^* - a_1\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t) - \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t)\Big\rangle dt \le 0, \tag{2.3}$$

где $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$, $\psi(\cdot) \in \Psi^n_2[t_0, t_1]$. Из неравенства (2.3) следует, что

$$\langle p_1 - p_1^*, A_1x_1^* - a_1\rangle \le 0, \quad D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) = 0, \quad x^*(t_0) = x_0$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$. Полагая сначала $p_1 = 0$, а затем $p_1 = 2p_1^*$, получим

$$\langle p_1^*, A_1x_1^* - a_1\rangle = 0, \quad A_1x_1^* - a_1 \le 0, \quad D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) = 0, \quad x^*(t_0) = x_0. \tag{2.4}$$

Правое неравенство системы (2.2) представляет собой задачу минимизации функции Лагранжа по переменным $x_1, x(\cdot), u(\cdot)$ при фиксированных значениях $p_1 = p_1^*$, $\psi(\cdot) = \psi^*(\cdot)$. Покажем, что система векторов $(p_1^*, x_1^*, \psi^*(\cdot), x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ является решением (1.1)–(1.4). С учетом (2.4) из правого неравенства системы (2.2) имеем

$$\langle \varphi_1, x_1^*\rangle \le \langle \varphi_1, x_1\rangle + \langle p_1^*, A_1x_1 - a_1\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle dt \tag{2.5}$$

для всех $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$.

Рассмотрим неравенство (2.5) при дополнительных скалярных ограничениях

$$\langle p_1^*, A_1x_1 - a_1\rangle \le 0, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle dt = 0.$$

Тогда получим задачу оптимизации $\langle \varphi_1, x_1^*\rangle \le \langle \varphi_1, x_1\rangle$ при ограничениях

$$\langle p^*, A_1x_1 - a_1\rangle \le 0, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle dt = 0 \tag{2.6}$$

для всех $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$.

Из (2.4) следует, что решение $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ принадлежит более узкому множеству, чем (2.6). Поэтому указанная точка остается минимумом и на подмножестве решений системы (2.4), т. е.

$$\langle \varphi_1, x_1^*\rangle \le \langle \varphi_1, x_1\rangle, \qquad A_1x_1 \le a_1, \qquad \frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t)$$

для всех $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$. Таким образом, если функция Лагранжа (2.1) имеет седловую точку, то ее вектор прямых компонент является решением исходной задачи выпуклого программирования в бесконечномерном пространстве.

Двойственный лагранжиан. Покажем, что функция Лагранжа играет роль “мостика”, по которому можно перейти от исходной задачи в прямом пространстве к двойственной задаче в сопряженном пространстве. Используя формулы перехода к сопряженным линейным операторам

$$\langle \psi, Dx\rangle = \langle D^T\psi, x\rangle, \qquad \langle \psi, Bu\rangle = \langle B^T\psi, u\rangle$$

и формулу интегрирования по частям на отрезке $[t_0, t_1]$

$$\langle \psi(t_1), x(t_1)\rangle - \langle \psi(t_0), x(t_0)\rangle = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle \frac{d}{dt}\psi(t), x(t)\Big\rangle dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle \psi(t), \frac{d}{dt}x(t)\Big\rangle dt,$$

выпишем сопряженную по отношению к (2.1) функцию Лагранжа и седловую систему (2.2) в сопряженном виде

$$\mathcal{L}(p_1, x_1, \psi(\cdot), x(\cdot), u(\cdot)) = \langle \varphi_1 + A_1^T p_1, x_1\rangle - \langle a_1, p_1\rangle$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x(t)\Big\rangle dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi(t), u(t)\rangle dt - \langle \psi_1, x_1\rangle + \langle \psi_0, x_0\rangle$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$, $x_0 = x(t_0)$, $\psi_0 = \psi(t_0)$, $\psi_1 = \psi(t_1)$.

Оба лагранжиана (прямой и двойственный) имеют одну и ту же седловую точку $(p_1^*, \psi^*(\cdot); x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, которая удовлетворяет седловой сопряженной системе

$$\langle \varphi_1 + A_1^T p_1, x_1^*\rangle - \langle a_1, p_1\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t)\Big\rangle dt$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi(t), u^*(t)\rangle dt - \langle \psi_1, x_1^*\rangle + \langle \psi_0, x_0^*\rangle$$

$$\leq \langle \varphi_1 + A_1^T p_1^*, x_1^*\rangle - \langle a_1, p_1^*\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t)\Big\rangle dt$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t)\rangle dt - \langle \psi_1^*, x_1^*\rangle + \langle \psi_0^*, x_0^*\rangle$$

$$\leq \langle \varphi_1 + A_1^T p_1^*, x_1\rangle - \langle a_1, p_1^*\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x(t)\Big\rangle dt$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u(t)\rangle dt - \langle \psi_1^*, x_1\rangle + \langle \psi_0^*, x_0\rangle \tag{2.7}$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^n_+$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$.

Из правого неравенства системы (2.7) с учетом $x_0^* = x_0$ имеем

$$\langle \varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1^* - x_1\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t) - x(t)\Big\rangle dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t)-u(t)\rangle dt \le 0$$

для всех $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $(x(\cdot),u(\cdot)) \in AC^n[t_0,t_1]\times U$. При $u(\cdot)=u^*(\cdot)$ из полученного неравенства выводим

$$\langle \varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1^* - x_1\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t)-x(t)\Big\rangle dt \le 0 \tag{2.8}$$

для всех $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x(\cdot)\in AC^n[t_0,t_1]$. При $x(\cdot)=x^*(\cdot)$ получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t)-u(t)\rangle dt \le 0 \tag{2.9}$$

для всех $u(\cdot)\in U$.

Учитывая, что (2.8) представляет собой задачу максимизации линейной функции на всем пространстве по переменным $(x_1, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times AC^n[t_0,t_1]$, пару (2.8), (2.9) можно переписать в форме

$$D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0, \qquad \varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^* = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t)-u(t)\rangle dt \le 0, \qquad u(\cdot)\in U. \tag{2.10}$$

Из левого неравенства (2.7) с учетом (2.10) и $\psi_0 = 0$ имеем

$$\langle \varphi_1 + A_1^T p_1 - \psi_1, x_1^*\rangle - \langle a_1, p_1\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t)\Big\rangle dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi(t), u^*(t)\rangle dt + \langle \psi_0, x_0\rangle \le -\langle a_1, p_1^*\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t)\rangle dt + \langle \psi_0^*, x_0\rangle.$$

Рассмотрим это неравенство при условии выполнения пары скалярных ограничений

$$\langle \varphi_1 + A_1^T p_1 - \psi_1, x_1^*\rangle = 0, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t)\Big\rangle dt = 0.$$

Тогда получим задачу максимизации скалярной функции

$$-\langle a_1, p_1\rangle + \langle \psi_0, x_0\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), B(t)u^*(t)\rangle dt \le -\langle a_1, p_1^*\rangle + \langle \psi_0^*, x_0\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi^*(t), B(t)u^*(t)\rangle dt$$

на паре скалярных ограничений

$$\langle \varphi_1 + A_1^T p_1 - \psi_1, x_1^*\rangle = 0, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t)\Big\rangle dt = 0,$$

откуда приходим к двойственной задаче относительно двойственных переменных при наличии векторных ограничений:

$$p_1^*,\ \psi^*(\cdot) \in \operatorname{Arg\,max}\Big\{ -\langle a_1, p_1\rangle + \langle \psi_0, x_0\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), B(t)u^*(t)\rangle dt \Big\}, \tag{2.11}$$

$$\varphi_1 + A_1^T p_1 - \psi_1 = 0, \qquad D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t) = 0 \tag{2.12}$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$. Таким образом, можно видеть, что задача (2.11), (2.12) является двойственной по отношению к задаче (1.1)–(1.4).

3. Взаимно двойственные задачи

Выпишем пару взаимно двойственных задач:

$$x_1^* \in \operatorname{Arg\,min}\Big\{ \langle \varphi_1, x_1\rangle \mid A_1x_1 \le a_1,\ x_1 \in \mathbb{R}^n,\ \frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t),\ t_0 \le t \le t_1,$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,\ x^*(t_1) = x_1^* \in \mathbb{R}^n,\ u(\cdot) \in U \Big\}; \tag{3.1}$$

$$p_1^*,\ \psi^*(\cdot) \in \operatorname{Arg\,max}\Big\{ \langle -a_1, p_1\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), B(t)u^*(t)\rangle dt \mid p_1 \ge 0,\ \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1],$$

$$\varphi_1 + A_1^T p_1 - \psi_1 = 0,\ D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t) = 0 \Big\}, \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t)\rangle dt \le 0, \qquad u(\cdot) \in U. \tag{3.3}$$

Если в системе (3.1)–(3.3) динамика отсутствует, то система принимает форму прямой и двойственной задач линейного программирования, хорошо известной в конечномерной оптимизации:

$$x_1^* \in \operatorname{Arg\,min}\{ \langle \varphi_1, x_1\rangle \mid A_1x_1 \le a_1,\ x_1 \in \mathbb{R}^n\},$$

$$p_1^* \in \operatorname{Arg\,max}\{ \langle -a_1, p_1\rangle \mid \varphi_1 + A_1^T p_1 = 0,\ p_1 \ge 0\}.$$

Каждая из задач системы (3.1)-(3.3) в отдельности или в совокупности могут стать основой для разработки целого семейства методов вычисления седловой точки прямой или двойственной функций Лагранжа [10–14]. Еще одно семейство методов можно получить, если комбинировать левые неравенства седловых систем одной функции Лагранжа (прямой) с правыми неравенствами другой функции (сопряженной). При этом можно конструировать седловые методы, которые будут сходиться монотонно по норме пространства к седловым точкам функций Лагранжа. Применительно к исходным краевым задачам оптимального управления это будет означать слабую сходимость по управлениям, сильную по траекториям, сопряженным траекториям и по терминальным переменным.

В данной работе мы рассмотрим итеративный процесс для решения краевой дифференциальной системы, которая, с одной стороны, будет получена из наших седловых неравенств (по схеме последнего семейства), а с другой стороны, будет близка к краевой дифференциальной системе, как если бы последняя была получена из условия принципа максимума Понтрягина.

4. Краевая дифференциальная система

Рассмотрим вместе левое неравенство седловой системы (2.2) классического лагранжиана и правое неравенство седловой системы (2.7) сопряженного лагранжиана. В рамках этих систем были определены как следствие частные подсистемы (2.4) и (2.10). Объединяя их вместе, выпишем общую систему

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \qquad x^*(t_0) = x_0,$$

$$\langle p_1 - p_1^*, A_1x_1^* - a_1\rangle \le 0, \qquad D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0, \qquad \varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^* = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t)\rangle dt \le 0, \qquad u(\cdot) \in U \tag{4.1}$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$, $u(\cdot) \in U$.

Терминальную краевую систему (4.1) получаем, отправляясь от необходимых и достаточных условий для седловой точки функции Лагранжа. В равной мере аналогичную систему можно вывести, исходя из принципа максимума Понтрягина. В силу линейной динамики рассматриваемой задачи гамильтониан задачи оптимального управления принимает форму вариационного неравенства. С учетом выпуклости множества U принцип максимума Понтрягина можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \qquad x^*(t_0) = x_0,$$

$$\langle p_1 - p_1^*, A_1x_1^* - a_1\rangle \le 0, \qquad D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0, \qquad \varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^* = 0,$$

$$\langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t)\rangle \le 0 \tag{4.2}$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}^m_+$, $u(\cdot) \in U$ и почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

Можно видеть, что вариационные неравенства (4.1) и (4.2) относительно переменной $u(\cdot)$ суть разные неравенства. Первое представляет собой задачу максимизации линейной функции в функциональном пространстве на множестве $U \subset L_2^r[t_0, t_1]$, второе неравенство — это семейство конечномерных вариационных неравенств, зависящих от параметра $t \in [t_0, t_1]$, каждое из которых является конечномерной задачей максимизации линейной функции по переменной u. Без сомнения, система (4.2) — более универсальное утверждение, чем (4.1), но (4.1) четко подчеркивает свою седловую природу и позволяет строить методы (в рамках гильбертовых пространств), которые сходятся к решению задачи по всем своим переменным: управлениям, траекториям, сопряженным функциям, а также по прямым и двойственным переменным терминальных задач. Аналогичные методы, основанные на принципе максимума, нам не известны. Вариационное неравенство относительно управлений из (4.1) называют интегральным принципом максимума [7, кн. 2, с. 450].

Вернемся к системе (4.1). Вариационные неравенства этой системы можно переписать в эквивалентной форме операторных уравнений с операторами проектирования на соответствующие выпуклые замкнутые множества. Тогда получим систему дифференциальных и операторных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \qquad x^*(t_0) = x_0, \tag{4.3}$$

$$p_1^* = \pi_+(p_1^* + \alpha(A_1x_1^* - a_1)), \tag{4.4}$$

$$D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0, \qquad \varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^* = 0, \tag{4.5}$$

$$u^*(t) = \pi_U(u^*(t) - \alpha B^T(t)\psi^*(t)), \tag{4.6}$$

где $\pi_+(\cdot)$, $\pi_U(\cdot)$ — операторы проектирования на положительный ортант пространства $\mathbb{R}^m_+$ и на множество управлений U, $\alpha > 0$. Здесь $p_1^*, x_1^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)$ — совокупность векторов, являющихся решением системы (4.3)–(4.6).

5. Седловой метод решения краевой задачи оптимального управления

На основе системы (4.3)–(4.6) построим итерационный процесс. Если взять произвольные значения двойственной переменной $p_1 = p_1^k \in \mathbb{R}^m_+$ и управления $u(\cdot) = u^k(\cdot) \in U$, которые будем трактовать как некоторое приближение, то можем решить дифференциальное уравнение (4.3) и найти траекторию $x^k(\cdot)$. Затем вычислим терминальное значение $x^k(t_1) = x_1^k$ траектории в момент времени $t = t_1$. Используя p_1^k и x_1^k, реализуем итерацию (4.4). Далее, используя условие трансверсальности, вычислим терминальное условие $\psi_1^k = \varphi_1 + A_1^T p_1^k$ сопряженной системы (4.5), решая которую найдем сопряженную траекторию. Используя последнюю и управление $u^k(\cdot)$, реализуем итерацию по управлению (4.6) и находим следующее управление с номером $u^{k+1}(\cdot) \in U$. Формально процесс имеет вид

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \qquad x(t_0) = x_0^k, \tag{5.1}$$

$$p_1^{k+1} = \pi_+(p_1^k + \alpha(A_1 x_1^k - a_1)), \tag{5.2}$$

$$D^T(t)\psi^k(t) + \frac{d}{dt}\psi^k(t) = 0, \qquad \psi_1^k = \varphi_1 + A_1^T p_1^k, \tag{5.3}$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\psi^k(t)), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.4}$$

Здесь проведение каждой очередной итерации фактически сводится к решению двух систем дифференциальных уравнений (5.1), (5.3).

Процесс (5.1)–(5.4) относится к методам простой итерации и является наиболее простым из известных вычислительных процессов. В случае, если выполняются условия строго сжимающего отображения, такой процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии. Однако в нашем случае мы имеем дело с седловой задачей, про которую известно, что методы типа простой итерации не сходятся к седловой точке задачи (сходятся только их аналоги в оптимизации — методы проекции градиента). Поэтому для решения седловой задачи мы используем седловой экстраградиентный подход, развитый в [15; 16]. Другие подходы градиентного типа рассматривались многими авторами в основном применительно к методам решения вариационных неравенств, в частности отметим [17; 18].

Экстраградиентный метод для решения задачи (4.3)–(4.6) представляет собой управляемый процесс (5.1)–(5.4), каждая итерация которого распадается на два полушага. Формулы этого итеративного метода имеют следующий вид:

1. Прогнозный полушаг:

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \qquad x^k(t_0) = x_0, \tag{5.5}$$

$$\bar{p}_1^k = \pi_+(p_1^k + \alpha(A_1 x_1^k - a_1)), \tag{5.6}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^T(t)\psi^k(t) = 0, \qquad \psi_1^k = \varphi_1 + A_1^T p_1^k, \tag{5.7}$$

$$\bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\psi^k(t)). \tag{5.8}$$

2. Основной полушаг:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^k(t) = D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \qquad \bar{x}^k(t_0) = x_0, \tag{5.9}$$

$$p_1^{k+1} = \pi_+(p_1^k + \alpha(A_1\bar{x}_1^k - a_1)), \tag{5.10}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^k(t) + D^T(t)\bar{\psi}^k(t) = 0, \qquad \bar{\psi}_1^k = \varphi_1 + A_1^T\bar{p}_1^k, \tag{5.11}$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\bar{\psi}^k(t)), \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{5.12}$$

Здесь на каждом полушаге решаются два дифференциальных уравнения и осуществляется итеративный шаг по управлениям. Отметим, что в этом процессе итерации по прямым переменным $(x^k(\cdot), u^k(\cdot))$ при всех k всегда принадлежат допустимым множествам, т. е. являются решениями дифференциальных уравнений (5.5), (5.7) и (5.9), (5.11). Этот процесс можно считать внутренним, или допустимым, поскольку каждый член итеративной последовательности всегда принадлежит допустимому множеству.

Из формул этого процесса видно, что дифференциальные уравнения (5.5), (5.7) и (5.9), (5.11) используются только для вычисления функций $x^k(t)$ и $\bar{x}^k(t)$, $\psi^k(t)$ и $\bar{\psi}^k(t)$, поэтому процесс можно записать в более компактном виде:

$$\bar{p}_1^k = \pi_+(p_1^k + \alpha(A_1x_1^k - a_1)), \qquad \bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\psi^k(t)),$$

$$p_1^{k+1} = \pi_+(p_1^k + \alpha(A_1\bar{x}_1^k - a_1)), \qquad u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\bar{\psi}^k(t)),$$

где $t \in [t_0, t_1]$, $x^k(t)$, $\bar{x}^k(t)$, $\psi^k(t)$ и $\bar{\psi}^k(t)$ вычисляются в (5.5), (5.9) и (5.7), (5.11).

Для получения вспомогательных оценок представим операторные уравнения (5.5)–(5.12) в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{p}_1^k - p_1^k - \alpha(A_1x_1^k - a_1), p_1 - \bar{p}_1^k \rangle \geq 0, \tag{5.13}$$

$$\langle p_1^{k+1} - p_1^k - \alpha(A_1\bar{x}_1^k - a_1), p_1 - p_1^{k+1} \rangle \geq 0, \tag{5.14}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}^k(t) - u^k(t) + \alpha B^T(t)\psi^k(t), u(t) - \bar{u}^k(t) \rangle dt \geq 0, \tag{5.15}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle u^{k+1}(t) - u^k(t) + \alpha B^T(t)\bar{\psi}^k(t), u(t) - u^{k+1}(t) \rangle dt \geq 0 \tag{5.16}$$

для всех $p_1 \in \mathbb{R}_+^m$, $u(\cdot) \in U$. Из операторных уравнений (5.13)–(5.16), очевидно, следуют оценки

$$|\bar{p}_1^k - p_1^{k+1}| \leq \alpha\, |A_1(x_1^k - \bar{x}_1^k)| \leq \alpha\, \|A_1\|\, |x_1^k - \bar{x}_1^k|, \tag{5.17}$$

$$\|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\| \leq \alpha\, \|B^T(t)(\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot))\| \leq \alpha\, B_{\max}\|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\|, \tag{5.18}$$

где $B_{\max} = \max\|B(t)\|$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, $\alpha > 0$.

При доказательстве теоремы о сходимости метода нам понадобятся еще две оценки, которые имеет смысл привести здесь, — это величины отклонений векторов $|x^k(t) - \bar{x}^k(t)|$ и $|\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)|$, $t \in [t_0, t_1]$.

Оценка величины отклонения вектора $|x^k(t) - \bar{x}^k(t)|$, $t \in [t_0, t_1]$. В силу линейности уравнений (5.5) и (5.9) имеем

$$\frac{d}{dt}\Big(x^k(t) - \bar{x}^k(t)\Big) = D(t)(x^k(t) - \bar{x}^k(t)) + B(t)(u^k(t) - \bar{u}^k(t)), \qquad x^k(t_0) - \bar{x}^k(t_0) = 0.$$

Проинтегрируем полученное тождество от t_0 до t:

$$(x^k(t) - \bar{x}^k(t)) - (x^k(t_0) - \bar{x}^k(t_0)) = \int_{t_0}^{t} D(\tau)(x^k(\tau) - \bar{x}^k(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau)(u^k(\tau) - \bar{u}^k(\tau))d\tau.$$

Из последнего равенства получим оценку

$$|x^k(t) - \bar{x}^k(t)| \le D_{\max} \int\limits_{t_0}^{t} |x^k(\tau) - \bar{x}^k(\tau)| d\tau + B_{\max} \int\limits_{t_0}^{t_1} |u^k(\tau) - \bar{u}^k(\tau)| d\tau, \tag{5.19}$$

где $D_{\max} = \max \|D(t)\|$, $t \in [t_0, t_1]$. Применим лемму Гронуолла [7, кн. 1, с. 472] в следующей формулировке: из неравенства $0 \le \varphi(t) \le a \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau + b$, $t_0 \le t \le t_1$, следует неравенство $\varphi(t) \le b e^{a(t_1 - t_0)}$, $t_0 \le t \le t_1$, где $\varphi(t)$ непрерывна, $a \ge 0$, $b \ge 0$ — константы. Используя эту лемму, из (5.19) получим

$$|x^k(t) - \bar{x}^k(t)| \le B_{\max} e^{D_{\max}(t_1 - t_0)} \int\limits_{t_0}^{t_1} |u^k(t) - \bar{u}^k(t)| dt.$$

Оценивая интеграл в правой части последнего неравенства с помощью неравенства Коши — Буняковского, имеем

$$|x^k(t) - \bar{x}^k(t)|^2 \le B_{\max}^2 e^{2D_{\max}(t_1 - t_0)} (t_1 - t_0) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2. \tag{5.20}$$

Отсюда при $t = t_1$ найдем отклонения терминальных значений траекторий

$$|x_1^k - \bar{x}_1^k|^2 \le B_{\max}^2 e^{2D_{\max}(t_1 - t_0)} (t_1 - t_0) \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2. \tag{5.21}$$

В дальнейшем нам понадобится ограниченность последовательности $\{x^k(\cdot)\}$. Чтобы доказать это, мы фактически должны повторить вышеприведенные рассуждения. Напомним основные моменты. Выпишем разность двух линейных уравнений (5.5) и (4.3):

$$\frac{d}{dt}\big(x^k(t) - x^*(t)\big) = D(t)(x^k(t) - x^*(t)) + B(t)(u^k(t) - u^*(t)), \qquad x^k(t_0) - x^*(t_0) = 0.$$

Переходя от этой разности к аналогу (5.19), имеем

$$|x^k(t) - x^*(t)| \le D_{\max} \int\limits_{t_0}^{t} |x^k(\tau) - x^*(\tau)| d\tau + B_{\max} \int\limits_{t_0}^{t_1} |u^k(\tau) - u^*(\tau)| d\tau.$$

Завершая эти рассуждения, получим оценку, аналогичную (5.20):

$$|x^k(t) - x^*(t)|^2 \le B_{\max}^2 e^{2D_{\max}(t_1 - t_0)} (t_1 - t_0) \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2. \tag{5.22}$$

Оценка величины отклонения вектора $|\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)|$, $t \in [t_0, t_1]$. Наконец, получим из уравнений (5.7), (5.11) аналогичные оценки для сопряженных траекторий $|\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)|$:

$$\frac{d}{dt}\left(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)\right) + D^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)) = 0, \tag{5.23}$$

где $\psi_1^k - \bar{\psi}_1^k = A_1^T(p_1^k - \bar{p}_1^k)$. Проинтегрируем (5.23) от t до t_1:

$$\int\limits_{t}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)\right) dt + \int\limits_{t}^{t_1} D^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)) dt = 0,$$

откуда

$$\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t) = \int\limits_{t}^{t_1} D^T(t)(\psi^k(t) - \bar{\psi}^k(t)) dt + \psi_1^k - \bar{\psi}_1^k.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|\psi^k(t)-\bar\psi^k(t)| \le \int\limits_t^{t_1} |D^T(t)(\psi^k(t)-\bar\psi^k(t))|dt + |\psi_1^k-\bar\psi_1^k| \le D_{\max}\int\limits_t^{t_1}|\psi^k(t)-\bar\psi^k(t)|dt + b, \quad (5.24)$$

где $t\in[t_0,t_1]$, $b=|\psi_1^k-\bar\psi_1^k|$. Здесь также воспользуемся леммой Гронуолла [7, кн. 1, с. 472]: если верно неравенство $0\le\varphi(t)\le a\int_t^{t_1}\varphi(\tau)d(\tau)+b$, $t_0\le t\le t_1$, то верно неравенство $\varphi(t)\le be^{a(t_1-t)}$, где $\varphi(t)$ непрерывна, $a\ge 0$, $b\ge 0$ — константы. Опираясь на это утверждение, из (5.24) получим

$$|\psi^k(t)-\bar\psi^k(t)|^2 \le |\psi_1^k-\bar\psi_1^k|^2 e^{2D_{\max}(t_1-t)}. \quad (5.25)$$

Для терминальных значений из (5.7) и (5.11) имеем

$$|\psi_1^k-\bar\psi_1^k|^2 = |A_1^T(p_1^k-\bar p_1^k)|^2 \le \|A_1^T\|^2\,|p_1^k-\bar p_1^k|^2. \quad (5.26)$$

Подставив (5.26) в (5.25), получим $|\psi^k(t)-\bar\psi^k(t)|^2\le\|A_1^T\|^2e^{2D_{\max}(t_1-t)}|p_1^k-\bar p_1^k|^2$. Проинтегрируем неравенство от t_0 до t_1:

$$\|\psi^k(\cdot)-\bar\psi^k(\cdot)\|^2 \le \|A_1^T\|^2/(2D_{\max})\big(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}-1\big)|p_1^k-\bar p_1^k|^2. \quad (5.27)$$

Аналогично докажем ограниченность сопряженных траекторий $|\psi^k(t)-\psi^*(t)|$. Из (5.7) и (4.5) имеем $\frac{d}{dt}\big(\psi^k(t)-\psi^*(t)\big)+D^T(t)(\psi^k(t)-\psi^*(t))=0$. Переходя от этой разности к аналогам оценок (5.24)–(5.27), получим

$$\|\psi^k(\cdot)-\psi^*(\cdot)\|^2 \le \|A_1^T\|^2/(2D_{\max})\big(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}-1\big)|p_1^k-p_1^*|^2. \quad (5.28)$$

6. Доказательство сходимости метода

Покажем, что процесс (5.5)–(5.12) сходится монотонно по норме пространства управлений и двойственных конечномерных переменных к одному из решений исходной задачи. Обозначим

$$K_1^2 = B_{\max}^2\|A_1^T\|^2/(2D_{\max})\big(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}-1\big), \qquad K_2^2=\|A_1\|^2B_{\max}^2e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(t_1-t_0).$$

Теорема. *Если множество решений задачи* (4.3)–(4.6) *не пусто и принадлежит пространству* $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+\times AC^n[t_0,t_1]\times U\times\Psi_2^n[t_0,t_1]$, *терминальная задача на правом конце представляет собой задачу линейного программирования, то последовательность* $(x_1^k,p_1^k,x^k(\cdot),u^k(\cdot),\psi^k(\cdot))$, *порожденная методом* (5.5)–(5.12) *с длиной шага, выбранной из условия* $0<\alpha<1/\sqrt{2K}$, *где* $K=\max(K_1,K_2)$, *слабо сходится к решению задачи по управлениям, траекториям, сопряженным траекториям, а также к решению терминальной задачи на правом конце временного интервала. В частности, последовательность* $\big\{\|u^k(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2+|p_1^k-p_1^*|^2\big\}$ *монотонно убывает на декартовом произведении* $L_2^r[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^m_+$.

Доказательство. Основные усилия в теореме направлены на получение оценок $|u^k(t)-u^*(t)|^2$ и $|p_1^k-p_1^*|^2$. Для этого мы будем использовать вариационные неравенства. В нашем процессе часть формул записана в виде вариационных неравенств, другая часть — в виде дифференциальных уравнений, поэтому в целях единообразного рассуждения дифференциальные уравнения мы будем также записывать в форме вариационных неравенств.

1. Запишем уравнение (5.11) в виде вариационного неравенства:

$$\langle\varphi_1+A_1^T\bar p_1^k-\bar\psi_1^k, x_1^*-\bar x_1^k\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle D^T(t)\bar\psi^k(t)+\frac{d}{dt}\bar\psi^k(t), x^*(t)-\bar x^k(t)\Big\rangle dt \ge 0.$$

Аналогично поступим с уравнением (4.5):

$$-\langle\varphi_1 + A_1^T p_1^* - \psi_1^*, x_1^* - \bar{x}_1^k\rangle - \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t) - \bar{x}^k(t)\Big\rangle dt \ge 0.$$

Сложим полученные неравенства:

$$\big\langle A_1^T\bar{p}_1^k - A_1^T p_1^* - (\bar{\psi}_1^k - \psi_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k\big\rangle$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle D^T(t)(\bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t)) + \frac{d}{dt}(\bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t)), x^*(t) - \bar{x}^k(t)\Big\rangle dt \ge 0. \tag{6.1}$$

Используя формулу интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \frac{d}{dt}(\bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t)), x^*(t) - \bar{x}^k(t)\Big\rangle dt$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), \frac{d}{dt}(x^*(t) - \bar{x}^k(t))\Big\rangle dt + \langle\bar{\psi}_1^k - \psi_1^*, x_1^* - \bar{x}_1^k\rangle,$$

преобразуем дифференциальный член левой части (6.1) (это преобразование означает переход к сопряженному дифференциальному оператору):

$$\langle A_1^T\bar{p}_1^k - A_1^T p_1^*, x_1^* - \bar{x}_1^k\rangle - \langle\bar{\psi}_1^k - \psi_1^*, x_1^* - \bar{x}_1^k\rangle$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t)(x^*(t) - \bar{x}^k(t)) - \frac{d}{dt}(x^*(t) - \bar{x}^k(t))\Big\rangle dt + \langle\bar{\psi}_1^k - \psi_1^*, x_1^* - \bar{x}_1^k\rangle \ge 0.$$

Сокращая подобные члены, после умножения на α получим неравенство

$$\alpha\langle A_1^T(\bar{p}_1^k - p_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^k\rangle + \alpha\int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \bar{\psi}^k(t) - \psi^*(t), D(t)(x^*(t) - \bar{x}^k(t)) - \frac{d}{dt}(x^*(t) - \bar{x}^k(t))\Big\rangle dt \ge 0. \tag{6.2}$$

2. Получим аналогичное неравенство по отношению к переменной p_1. Для этого положим $p_1 = p_1^{k+1}$ в (5.13): $\langle\bar{p}_1^k - p_1^k - \alpha(A_1x_1^k - a_1), p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle \ge 0$. Добавим и вычтем величину $\alpha A_1\bar{x}_1^k$:

$$\langle\bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle - \alpha\langle A_1(-\bar{x}_1^k + x_1^k), p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle - \alpha\langle A_1\bar{x}_1^k - a_1, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle \ge 0.$$

Положив $p_1 = p_1^*$ в (5.14), имеем $\langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1}\rangle - \alpha\langle A_1\bar{x}_1^k - a_1, p_1^* - p_1^{k+1}\rangle \ge 0$. Сложив полученные неравенства, получаем

$$\langle\bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle + \langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1}\rangle - \alpha\langle A_1\bar{x}_1^k - a_1, p_1^* - \bar{p}_1^k\rangle - \alpha\langle A_1(x_1^k - \bar{x}_1^k), p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle \ge 0.$$

Полагая $p_1 = \bar{p}_1^k$ во втором неравенстве системы (4.1), имеем $\alpha\langle p_1^* - \bar{p}_1^k, A_1x_1^* - a_1\rangle \ge 0$. Суммируем два последних неравенства:

$$\langle\bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle + \langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1}\rangle - \alpha\langle A_1(\bar{x}_1^k - x_1^*), p_1^* - \bar{p}_1^k\rangle + \alpha\langle A_1(\bar{x}_1^k - x_1^k), p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle \ge 0.$$

Наконец, сложив полученное неравенство с (6.2), имеем

$$\langle\bar{p}_1^k - p_1^k, p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle + \langle p_1^{k+1} - p_1^k, p_1^* - p_1^{k+1}\rangle + \alpha\langle A_1(\bar{x}_1^k - x_1^k), p_1^{k+1} - \bar{p}_1^k\rangle$$

$$+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar\psi^k(t)-\psi^*(t),D(t)(x^*(t)-\bar x^k(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar x^k(t))\Big\rangle dt\geq 0. \tag{6.3}$$

3. Рассмотрим неравенства относительно управлений. Положим $u(\cdot)=u^{k+1}(\cdot)$ в (5.15):

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar u^k(t)-u^k(t)+\alpha B^T(t)\psi^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt\geq 0.$$

Добавим и вычтем $\bar\psi^k(t)$ под знаком скалярного произведения:

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar u^k(t)-u^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt-\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)(\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt$$

$$+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)\bar\psi^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt\geq 0. \tag{6.4}$$

Положим $u=u^*(\cdot)$ в (5.16):

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle u^{k+1}(t)-u^k(t)+\alpha B^T(t)\bar\psi^k(t),u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt\geq 0. \tag{6.5}$$

Сложим (6.4) и (6.5), тогда

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar u^k(t)-u^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle u^{k+1}(t)-u^k(t),u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt$$

$$-\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)(\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)\bar\psi^k(t),u^*(t)-\bar u^k(t)\rangle dt\geq 0. \tag{6.6}$$

Подставляя $u(t)=\bar u^k(t)$ в вариационное неравенство системы (4.1), имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)\psi^*(t),\bar u^k(t)-u^*(t)\rangle dt\geq 0. \tag{6.7}$$

Суммируем (6.6) и (6.7), имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar u^k(t)-u^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle u^{k+1}(t)-u^k(t),u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt$$

$$-\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)(\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar\psi^k(t)-\psi^*(t),B(t)(u^*(t)-\bar u^k(t))\rangle dt\geq 0. \tag{6.8}$$

4. Суммируя (6.3) и (6.8), получим

$$\langle\bar p_1^k-p_1^k,p_1^{k+1}-\bar p_1^k\rangle+\langle p_1^{k+1}-p_1^k,p_1^*-p_1^{k+1}\rangle+\alpha\langle A_1(\bar x_1^k-x_1^k),p_1^{k+1}-\bar p_1^k\rangle$$

$$+\alpha\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\bar\psi^k(t)-\psi^*(t),D(t)(x^*(t)-\bar x^k(t))+B(t)(u^*(t)-\bar u^k(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar x^k(t))\Big\rangle dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar u^k(t)-u^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle u^{k+1}(t)-u^k(t),u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt$$

$$-\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)(\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt\ge 0. \tag{6.9}$$

5. Оценки, полученные в доказательствах п. 1–4 этой теоремы, следуют из правого неравенства системы (2.2). Получим аналогичную оценку из левого неравенства этой системы. Вычтем из (4.3) уравнение (5.9):

$$D(t)(x^*(t)-\bar x^k(t))+B(t)(u^*(t)-\bar u^k(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar x^k(t))=0.$$

В силу последнего уравнения четвертый член в неравенстве (6.9) обнуляется, и в результате имеем

$$\langle\bar p_1^k-p_1^k,p_1^{k+1}-\bar p_1^k\rangle+\langle p_1^{k+1}-p_1^k,p_1^*-p_1^{k+1}\rangle+\alpha\langle A_1(\bar x_1^k-x_1^k),p_1^{k+1}-\bar p_1^k\rangle$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar u^k(t)-u^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle u^{k+1}(t)-u^k(t),u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt$$

$$-\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle B^T(t)(\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt\ge 0. \tag{6.10}$$

Оценивая с учетом (5.17), (5.18) третье и последнее слагаемые в левой части (6.10), получим

$$\langle\bar p_1^k-p_1^k,p_1^{k+1}-\bar p_1^k\rangle+\langle p_1^{k+1}-p_1^k,p_1^*-p_1^{k+1}\rangle+(\alpha||A_1||)^2|\bar x_1^k-x_1^k)|^2$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\langle\bar u^k(t)-u^k(t),u^{k+1}(t)-\bar u^k(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle u^{k+1}(t)-u^k(t),u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt$$

$$+(\alpha B_{\max})^2\int_{t_0}^{t_1}|\bar\psi^k(t)-\psi^k(t)|^2dt\ge 0. \tag{6.11}$$

6. Используя тождество $|y_1-y_2|^2=|y_1-y_3|^2+2\langle y_1-y_3,y_3-y_2\rangle+|y_3-y_2|^2$, разложим скалярные произведения из (6.11) в сумму (разность) квадратов

$$|p_1^k-p_1^*|^2-|p_1^{k+1}-\bar p_1^k|^2-|\bar p_1^k-p_1^k|^2-|p_1^{k+1}-p_1^*|^2+2(\alpha\|A_1\|)^2|\bar x_1^k-x_1^k|^2+\|u^k(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2$$

$$-\|u^k(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|^2-\|\bar u^k(\cdot)-u^{k+1}(\cdot)\|^2-\|u^{k+1}(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2+2(\alpha B_{\max})^2\|\bar\psi^k(\cdot)-\psi^k(\cdot)\|^2\ge 0. \tag{6.12}$$

Перепишем (6.12) в форме

$$|p_1^{k+1}-p_1^*|^2+|p_1^k-\bar p_1^k|^2+|\bar p_1^k-p_1^{k+1}|^2-2(\alpha\|A_1\|)^2|\bar x_1^k-x_1^k|^2+\|u^{k+1}(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2$$

$$+\|u^k(\cdot)-\bar u^k(\cdot)\|^2+\|\bar u^k(\cdot)-u^{k+1}(\cdot)\|^2-2(\alpha B_{\max})^2\|\bar\psi^k(\cdot)-\psi^k(\cdot)\|^2$$

$$\le\|u^k(\cdot)-u^*(\cdot)\|^2+|p_1^k-p_1^*|^2. \tag{6.13}$$

Отдельно оценим, учитывая (5.21) и (5.28), четвертое и последнее слагаемые в левой части неравенства (6.13):

$$2(\alpha\|A_1\|)^2|\bar{x}_1^k - x_1^k|^2 \le 2(\alpha\|A_1\|)^2 B_{\max}^2 e^{2D_{\max}(t_1-t_0)}(t_1-t_0)\|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2;$$

$$2(\alpha B_{\max})^2\|\bar{\psi}^k(\cdot) - \psi^k(\cdot)\|^2 \le 2(\alpha B_{\max})^2\|A_1\|^2/(2D_{\max})\big(e^{2D_{\max}(t_1-t_0)} - 1\big)|p_1^k - \bar{p}_1^k|^2.$$

Подставляя эти оценки в (6.13), окончательно получим

$$|p_1^{k+1} - p_1^*|^2 + |\bar{p}_1^k - p_1^{k+1}|^2 + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2$$
$$+ d_1|p_1^k - \bar{p}_1^k|^2 + d_2\|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 \le |p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2, \tag{6.14}$$

где $d_1 = 1 - 2\alpha^2K_1^2$, $d_2 = 1 - 2\alpha^2K_2^2$.

Пусть $K = \max(K_1, K_2)$, тогда при условии $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, т. е. $0 < \alpha < 1/\sqrt{2K}$, из (6.14) следует монотонное убывание последовательности $\big\{\|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + |p_1^k - p_1^*|^2\big\}$ на декартовом произведении $L_2^r[t_0,t_1] \times \mathbb{R}_+^m$: $|p_1^{k+1} - p_1^*|^2 + \|u^{k+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 \le |p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2$.

7. Просуммируем неравенство (6.14) от $k = 0$ до $k = N$:

$$|p_1^{N+1} - p_1^*|^2 + \|u^{N+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 + \sum_{k=0}^{N}|\bar{p}_1^k - p_1^{k+1}|^2 + \sum_{k=0}^{N}\|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2$$

$$+ d_1\sum_{k=0}^{N}|p_1^k - \bar{p}_1^k|^2 + d_2\sum_{k=0}^{N}\|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 \le |p_1^0 - p_1^*|^2 + \|u^0(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2.$$

Из полученного неравенства при условии $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ $\Big(0 < \alpha < 1/\sqrt{2K}\Big)$ вытекает ограниченность последовательности при любом N

$$|p_1^{N+1} - p_1^*|^2 + \|u^{N+1}(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2 \le |p_1^0 - p_1^*|^2 + \|u^0(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2, \tag{6.15}$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{p}_1^k - p_1^{k+1}|^2 < \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}\|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 < \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}|p_1^k - \bar{p}_1^k|^2 < \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}\|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 < \infty.$$

Отсюда следует стремление к нулю величин

$$|\bar{p}_1^k - p_1^{k+1}| \to 0, \quad \|\bar{u}^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\|^2 \to 0, \quad |p_1^k - \bar{p}_1^k| \to 0, \quad \|u^k(\cdot) - \bar{u}^k(\cdot)\|^2 \to 0. \tag{6.16}$$

Используя неравенство треугольника, получим $|p_1^k - p_1^{k+1}| \to 0$, $\|u^k(\cdot) - u^{k+1}(\cdot)\| \to 0$, $k \to \infty$. Из (5.21) и (5.28) выводим, что $|x^k(t) - \bar{x}^k(t)| \to 0$, $|x_1^k - \bar{x}_1^k| \to 0$, $\|\psi^k(\cdot) - \bar{\psi}^k(\cdot)\| \to 0$, $k \to \infty$.

Кроме того, из (6.15) следует ограниченность последовательностей $|p_1^k - p_1^*| \le \text{const}$, $\|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\| \le \text{const}$, а из (5.22) и (5.28) — ограниченность последовательностей по другим переменным: $|x^k(t) - x^*(t)| \le \text{const}$, $|x_1^k - x_1^*| \le \text{const}$, $\|\psi^k(\cdot) - \psi^*(\cdot)\| \le \text{const}$.

8. Поскольку последовательность $(x_1^k, p_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot), \psi^k(\cdot))$ ограничена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times AC^n[t_0, t_1] \times U \times \Psi_2^n[t_0,t_1]$, то она слабо компактна [19]. Последнее означает, что существуют подпоследовательность и точка $(x_1', p_1', x'(\cdot), u'(\cdot), \psi'(\cdot))$, которая является слабым пределом этой подпоследовательности. Слабая сходимость понимается в смысле поточечной сходимости линейных функционалов

$$\langle x_1^{k_i}, x\rangle, \quad \langle p_1^{k_i}, p_1\rangle, \quad \int_{t_0}^{t_1}\langle x^{k_i}(t), x(t)\rangle dt, \quad \int_{t_0}^{t_1}\langle u^{k_i}(t), u(t)\rangle dt, \quad \int_{t_0}^{t_1}\langle \psi^{k_i}(t), \psi(t)\rangle dt$$

к значениям

$$\langle x_1^{'}, x\rangle, \quad \langle p_1^{'}, p_1\rangle, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle x^{'}(t), x(t)\rangle dt, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle u^{'}(t), u(t)\rangle dt, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \psi^{'}(t), \psi(t)\rangle dt$$

на декартовом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times AC^n[t_0, t_1] \times U \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$ для любого фиксированного элемента $(x_1, p_1, x(\cdot), u(\cdot), \psi(\cdot))$ при $i \to \infty$.

Отметим сразу, что в конечномерных (евклидовых) пространствах слабые и сильные (по норме пространства) сходимости совпадают [19].

Теперь мы можем показать, что набор компонент $(x_1^{'}, p_1^{'}, x^{'}(\cdot), u^{'}(\cdot), \psi^{'}(\cdot))$ является решением системы (4.3)–(4.6). Для этого сначала отметим, что пара уравнений (5.8), (5.12) и вариационные неравенства (5.15), (5.16) эквивалентны, поскольку оператор проектирования представляет собой задачу минимизации квадратичной функции $1/2\,|u(t) - (u^{k_i}(t) - \alpha B^T(t)\psi^{k_i}(t))|^2$ на множестве $u \in U$. Вариационные неравенства (5.15), (5.16) являются необходимыми и достаточными условиями минимума квадратичной функции. В [7, кн. 2, с. 651] показано, что линейный оператор является слабо непрерывным, а квадратичная функция — слабо полунепрерывной снизу, т. е. если $u^{k_i}(\cdot) \to u^{'}(\cdot)$ (слабо), то для линейного оператора имеем $F(t)u^{k_i}(\cdot) \to F(t)u^{'}(\cdot)$ (слабо) и, соответственно, для квадратичного функционала получаем

$$\frac{1}{2}\|u(t) - F(t)u^{'}(t)\|^2 \leq \underline{\lim}\frac{1}{2}\|u(t) - F(t)u^k(t)\|^2.$$

Из (5.8) имеем

$$\frac{1}{2}\|\bar{u}^{k_i}(t) - u^{k_i}(t) + \alpha\, B^T(t)\psi^{k_i}(t))\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u(t) - u^{k_i}(t) + \alpha\, B^T(t)\psi^{k_i}(t))\|^2$$

для всех $u \in U$. Левая часть этого неравенства представляет собой константу, а правая часть — квадратичную функцию, ограниченную снизу этой константой при всех $k_i \to \infty$. В силу слабой полунепрерывности снизу квадратичной функции и оценки (6.16) для $\bar{u}^{k_i}(t) - u^{k_i}(t)$ при $i \to \infty$ получим

$$\frac{1}{2}\|u^{'}(t) - u^{'}(t) + \alpha\, B^T(t)\psi^{'}(t))\|^2 \leq \underline{\lim}\frac{1}{2}\|u(t) - u^{'}(t) + \alpha\, B^T(t)\psi^{'}(t))\|^2. \qquad (6.17)$$

С другой стороны, по определению нижнего предела квадратичной функции для любого $u(t) \in U$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (6.17). Отсюда имеем

$$\frac{1}{2}\|u^{'}(t) - u^{'}(t) + \alpha\, B^T(t)\psi^{'}(t))\|^2 = \underline{\lim}\frac{1}{2}\|u(t) - u^{'}(t) + \alpha\, B^T(t)\psi^{'}(t))\|^2.$$

Последнее утверждение эквивалентно $u^{'}(t) = \pi_U(u^{'}(t) - \alpha\, B^T(t)\psi^{'}(t))$. Переходя к пределу по подпоследовательности $k_i \to \infty$ в системе (5.5)–(5.12), с учетом выше сказанного получим

$$\frac{d}{dt}x^{'}(t) = D(t)x^{'}(t) + B(t)u^{'}(t), \qquad x^{'} = x_0, \qquad p_1^{'} = \pi_+(p_1^{'} + \alpha(A_1x_1^{'} - a_1)),$$

$$D^T(t)\psi^{'}(t) + \frac{d}{dt}\psi^{'}(t) = 0, \qquad \varphi_1 + A_1^T p_1^{'} - \psi_1^{'} = 0, \qquad u^{'}(t) = \pi_U(u^{'}(t) - \alpha B^T(t)\psi^{'}(t)).$$

Эта система совпадает с (4.3)–(4.6), отсюда $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot), p_1^*, \psi^*(\cdot)) = (x_1^{'}, x^{'}(\cdot), u^{'}(\cdot), p_1^{'}, \psi^{'}(\cdot))$. Другими словами, любая слабо предельная точка является решением исходной задачи.

Теорема доказана.

Таким образом, доказано, что процесс (5.5)–(5.12) порождает последовательность, которая имеет слабо предельные точки. Все эти точки являются решениями системы (4.3)–(4.6). При этом процесс монотонно убывает по норме пространства на прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times AC[t_0, t_1] \times U \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$ в смысле неравенства

$$|p_1^{k+1} - p_1^*|^2 + \int\limits_{t_0}^{t_1} |u^{k+1}(t) - u^*(t)|^2 dt \le |p_1^k - p_1^*|^2 + \int\limits_{t_0}^{t_1} |u^k(t) - u^*(t)|^2 dt.$$

Здесь $(k+1)$-я итерация вложена в шар k-й итерации. Компонента $\int_{t_0}^{t_1} |u^{k+1}(t) - u^*(t)|^2 dt$ в силу слабой сходимости может не стремиться к нулю при $k \to \infty$.

Наряду с функциональным пространством в рамках общего процесса развивается подпроцесс в терминальном пространстве на множестве достижимости. Этот подпроцесс описан формулами (5.6), (5.10) и протекает в конечномерном евклидовом пространстве. В рамках общей схемы этот подпроцесс сходится к седловой точке функции Лагранжа $l(p_1, x_1) = \langle \varphi_1, x_1 \rangle + \langle p_1, A_1 x_1 - a_1 \rangle$ задачи выпуклого программирования, сформулированной на множестве достижимости. Сходимость подпроцесса к седловой точке функции Лагранжа — сильная, поскольку слабая и сильная сходимости в конечномерном пространстве совпадают.

7. Заключение

В работе краевая задача оптимального управления трактуется как седловая задача. Из системы седловых неравенств получены необходимые и достаточные условия, которые представляют собой дифференциальную систему, близкую к той, которую обычно получают, исходя из принципа максимума Понтрягина. На основе этой системы сформулирован седловой процесс, доказана его слабая сходимость к седловой точке функции Лагранжа, т. е. доказана сходимость процесса к оптимальным управлению, траектории и сопряженной функции, а также к решению конечномерной задачи на множестве достижимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
3. **Еремин И.И.** Двойственность для Парето-последовательных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 245–261.
4. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
5. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д.** Вопросы оптимизации и распознавания образов. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1979. 64 с.
6. **Еремин И.И.** Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. 195 с.
7. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2 кн. Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
8. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. 552 с.
9. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
10. **Васильев Ф.П., Хорошилова Е.В.** Экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Вестн. Моск. ун-та. 2010. № 3. С. 18–23. (Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика.)
11. **Васильев Ф.П., Хорошилова Е.В., Антипин А.С.** Регуляризованный экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 27–37.
12. **Хорошилова Е.В.** Экстраградиентный метод в задаче оптимального управления с терминальными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 117–133.

13. **Khoroshilova E.V.** Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function // Optim. Lett. [Publised online 23 May 2012.] New York: Springer-Verlag, 2012. 22 p. DOI: 10.1007/s11590-012-0496-2.
14. **Антипин А.С.** Метод модифицированной функции Лагранжа для задач оптимального управления со свободным правым концом // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2011. Т. 4, № 2. С. 27–44.
15. **Корпелевич Г.М.** Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и мат. методы. 1976. Т. 12, вып. 6. С. 747–756.
16. **Антипин А.С.** Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа // Экономика и мат. методы. 1977. Т. 13, вып. 3. С. 560–565.
17. **Facchinei F., Pang J.-S.** Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. New York: Springer-Verlag, 2003. Vol. 1. 728 p.
18. **Konnov I.V.** Equilibrium models and variational inequalities. Amsterdam, 2007. Vol. 210. 248 p. (Ser. Mathematics in Science and Engineering.)
19. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Поступила 12.02.2013

Антипин Анатолий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: asantip@yandex.ru

Хорошилова Елена Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: khorelena@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.518

ОЦЕНКИ РОСТА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов

Получены оценки роста на множестве полной меры произвольных последовательностей прямоугольных частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье.

Ключевые слова: тригонометрические ряды Фурье, порядок роста почти всюду.

N. Yu. Antonov. Growth estimates for arbitrary sequences of multiple rectangular Fourier sums.

Growth estimates are obtained on a set of full measure for arbitrary sequences of rectangular partial sums of multiple trigonometric Fourier sums.

Keywords: trigonometric Fourier series, growth order almost everywhere.

Пусть d — натуральное число, $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$ — d-мерный тор, $\varphi\colon\ [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ множество всех определенных на $\mathbb{T}^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \infty.$$

Пусть $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{k} = (k^1, k^2, \ldots, k^d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx} = k^1x^1 + k^2x^2 + \ldots + k^dx^d$,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \qquad (1)$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье функции f. Пусть $\mathbf{n} = (n^1, n^2, \ldots, n^d)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Обозначим через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы ряда (1):

$$S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} = (k^1, \ldots, k^d)\colon\ |k^j| \leqslant n^j,\ 1 \leqslant j \leqslant d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}}.$$

Через $\mathrm{mes}E$ будем обозначать лебегову меру множества E, будем также полагать $\ln^+ u = \ln(u + e)$, $u \geqslant 0$.

Сто лет назад Г.Харди [1] получил следующую оценку порядка роста сумм Фурье функций одной переменной: для произвольной функции $f \in L(\mathbb{T})$ для почти всех $x \in \mathbb{T}$ имеет место соотношение

$$S_n(f, x) = o(\ln n). \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-T-1-1003/5), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

К. И. Осколковым [2] оценка (2) была обобщена на случай произвольной подпоследовательности последовательности сумм Фурье: для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любой функции $f \in L(\mathbb{T})$

$$S_{n_k}(f, x) = o(\ln k) \quad \text{п.в.} \tag{3}$$

В случае $d = 2$ Г. А. Карагулян [3] получил следующий двумерный аналог оценки (3): для произвольной последовательности $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2)$, $k \in \mathbb{N}$, и для каждой функции $f \in L \ln^+ L(\mathbb{T}^2)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\ln^2 k) \quad \text{п.в.} \tag{4}$$

Автором получено обобщение оценки (4) на случай произвольных последовательностей двойных прямоугольных сумм Фурье функций из классов $\varphi(L)$, промежуточных между классами $L \ln^+ L(\mathbb{T}^2)$ и $L(\ln^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема A [4]. *Пусть $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность двумерных векторов с натуральными компонентами. Предположим, что функция $\psi\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$\psi(u)$ не убывает на $[0, +\infty)$;*

2) *функция $(\ln u)/(\psi(u))$ не убывает на $[u_0, +\infty)$ для некоторого $u_0 \geqslant e$.*

Тогда для любой функции f из класса $L(\ln^+ L)\psi(L)(\mathbb{T}^2)$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o\Big(\frac{\ln^2 k}{\psi(k)}\Big) \quad \text{п.в.}$$

В настоящей работе получен d-мерный (при $d > 2$) аналог теоремы A. Будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $d \geqslant 2$, $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность d-мерных векторов с натуральными компонентами. Предположим, что функция $\psi\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$\psi(u)$ не убывает на $[0, +\infty)$, а функция $(\ln u)/(\psi(u))$ не убывает на $[u_0, +\infty)$ для некоторого $u_0 \geqslant e$;*

2) *функция $u(\ln^+ u)^d \psi(u)$ выпуклая, а функция $\sqrt{u}(\ln^+ \sqrt{u})^d \psi(\sqrt{u})$ вогнутая на $[0, +\infty)$.*

Тогда для любой функции f из класса $L(\ln^+ L)^{d-1}\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o\Big(\frac{\ln^d k}{\psi(k)}\Big) \quad \text{п.в.} \tag{5}$$

В процессе доказательства теоремы мы будем использовать следующие вспомогательные утверждения.

Лемма A [2, доказательство теоремы 1]. *Пусть $g \in L(\mathbb{T})$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность суммируемых функций на периоде $\mathbb{T}$ таких, что $|g_k(x)| \leqslant |g(x)|$,*

$$\widetilde{g}_k(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u - x}{2} g_k(u) du, \quad k \in \mathbb{N},$$

— функции, тригонометрически сопряженные к функциям g_k. Тогда функция

$$G(x) = G(\{g_k\}, x) = \sup_{k \geqslant 2} \frac{|\widetilde{g}_k(x)|}{\ln k}$$

конечна для почти всех $x \in \mathbb{T}$.

Оператор $V\colon L(\mathbb{T}^d) \to L(\mathbb{T}^d)$ называется оператором типа (φ, φ), если существует константа $A > 0$ такая, что для всех $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|V(f, \mathbf{x})|) d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(A|f(\mathbf{x})|) d\mathbf{x}.$$

Оператор V инвариантен относительно сдвига, если

$$V(f(\cdot+\mathbf{s}),\mathbf{x}) = V(f(\cdot),\mathbf{x}+\mathbf{s}), \quad \mathbf{x},\mathbf{s}\in\mathbb{T}^d.$$

Теорема B [5, теорема 3]. *Пусть $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность линейных операторов из $L(\mathbb{T}^d)$ в $L(\mathbb{T}^d)$, каждый из которых является оператором типа (φ,φ) и инвариантен относительно сдвига. Пусть φ удовлетворяет условиям*

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(u) \ \text{выпуклая и возрастающая на } [0,+\infty), \\ \varphi(u^{1/2}) \ \text{вогнутая на } [0,+\infty).$$

Предположим, что для каждой функции $g\in\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$

$$\limsup_{k\to\infty}|V_k(g,\mathbf{x})|<\infty \tag{6}$$

для всех $\mathbf{x}$ из некоторого (зависящего от g) множества положительной меры. Пусть

$$V^*(g,\mathbf{x})=\sup_{k\geqslant1}|V_k(g,\mathbf{x})|.$$

Тогда найдется положительное число C такое, что для всех $g\in\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ и любых $z>0$

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x}\colon V^*(g,\mathbf{x})>z\}\leqslant\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi\Big(\frac{C|g(\mathbf{x})|}{z}\Big)d\mathbf{x}.$$

Зафиксируем последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{n}_k=(n_1^k,n_2^k,\dots,n_d^k)$, $k\in\mathbb{N}$. Пусть $f\in L(\mathbb{T}^d)$. Обозначим

$$M(f,\mathbf{x})=M(f,\mathbf{x},\{\mathbf{n}_k\},\psi)=\sup_{k\geqslant2}\frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})|\psi(k)}{\ln^d k}.$$

Лемма 1. *Пусть для заданной фиксированной размерности d ($d\geqslant2$) теорема 1 справедлива. Тогда для любой функции $f\in L(\ln^+L)^d\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ мажоранта $M(f,\mathbf{x})$ интегрируема на $\mathbb{T}^d$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}M(f,\mathbf{x})d\mathbf{x}\leqslant K_d\int\limits_{\mathbb{T}^d}|f(\mathbf{x})|\psi(|f(\mathbf{x})|)\left(\ln^+(|f(\mathbf{x})|)\right)^d d\mathbf{x}+K_d,$$

где величина $K_d>0$ не зависит от f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим для краткости

$$\varphi_m(u)=u(\ln^+u)^m\psi(u), \quad m\geqslant0.$$

Зафиксируем $d\geqslant2$. Ясно, что операторы

$$V_k(f,\mathbf{x})=\frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})\psi(k)}{\ln^d k}, \quad k\geqslant2,$$

являются операторами типа $(\varphi_{d-1},\varphi_{d-1})$. Согласно (5) если $f\in\varphi_{d-1}(\mathbb{T}^d)$, то мажоранта $M(f,\mathbf{x})$ конечна для почти всех $\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d$. То есть для оператора

$$V^*(f,\mathbf{x})=\sup_{k\geqslant1}|V_k(f,\mathbf{x})|=M(f,\mathbf{x})$$

выполняются условия теоремы B. Применяя теорему B, а также используя выпуклость $\varphi_{d-1}(u)$ и свойство $\varphi_{d-1}(0)=0$, получаем

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d : M(f,\mathbf{x})>y\}\leqslant\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi_{d-1}\Big(\frac{C|f(\mathbf{x})|}{y}\Big)d\mathbf{x}$$

$$\leqslant \frac{C}{y}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi_{d-1}\left(|f(\mathbf{x})|\right)d\mathbf{x},\quad y>C,\quad f\in\varphi_{d-1}(L)(\mathbb{T}^d).\tag{7}$$

Применяя теорему B к той же самой последовательности операторов $\{V_k(f,\mathbf{x})\}$ и к функции $\varphi(u)=u^2$, получаем, что оператор $M(f,\mathbf{x})$ является также оператором слабого типа (2,2), т. е.

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d\colon M(f,\mathbf{x})>y\}\leqslant\frac{C}{y^2}\int\limits_{\mathbb{T}^d}|f(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x},\quad y>0,\quad f\in L^2(L)(\mathbb{T}^d).\tag{8}$$

Пусть $f\in\varphi_d(L)(\mathbb{T}^d)$, $y>0$. Положим

$$g(\mathbf{x})=g_y(\mathbf{x})=\begin{cases}f(\mathbf{x}), & |f(\mathbf{x})|>y,\\ 0, & |f(\mathbf{x})|\leqslant y,\end{cases}\qquad h(\mathbf{x})=h_y(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}).$$

Обозначим $\lambda_f(y)=\operatorname{mes}\{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d\colon\ M(f,\mathbf{x})>y\}$. Тогда

$$\lambda_f(y)\leqslant\operatorname{mes}\{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d\colon\ M(g,\mathbf{x})>y/2\}+\operatorname{mes}\{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d\colon M(h,\mathbf{x})>y/2\}=\lambda_g(y/2)+\lambda_h(y/2).\tag{9}$$

Используя равенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}M(f,\mathbf{x})d\mathbf{x}=-\int\limits_0^\infty y\,d\lambda_f(y)=\int\limits_0^\infty\lambda_f(y)\,dy,$$

неравенство (9), а также оценки (7) и (8), примененные к функциям $g_y(\mathbf{x})$ и $h_y(\mathbf{x})$ соответственно, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}M(f,\mathbf{x})d\mathbf{x}\leqslant 2(2\pi)^dC+\int\limits_{2C}^\infty\lambda_f(y)dy\leqslant 2(2\pi)^dC+\int\limits_{2C}^\infty\lambda_g\Big(\frac{y}{2}\Big)dy+\int\limits_{2C}^\infty\lambda_h\Big(\frac{y}{2}\Big)dy$$

$$\leqslant 2(2\pi)^dC+2C\int\limits_{2C}^\infty\left(\frac{1}{y}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{T}^d\colon\ |f(\mathbf{t})|>y\}}\varphi_{d-1}\left(|f(\mathbf{t})|\right)d\mathbf{t}\right)dy$$

$$+\ 4C\int\limits_{2C}^\infty\left(\frac{1}{y^2}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{T}^d\colon\ |f(\mathbf{t})|\leqslant y\}}|f(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t}\right)dy$$

$$\leqslant 2C\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{T}^d\colon\ |f(\mathbf{t})|>2C\}}\varphi_0(|f(\mathbf{t})|)(\ln^+|f(\mathbf{t})|)^{d-1}\left(\int\limits_{2C}^{|f(\mathbf{t})|}\frac{dy}{y}\right)d\mathbf{t}$$

$$+\ 4C\int\limits_{\mathbb{T}^d}|f(\mathbf{t})|^2\left(\int\limits_{|f(\mathbf{t})|}^\infty\frac{dy}{y^2}\right)d\mathbf{t}+2(2\pi)^dC,$$

откуда очевидно вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 будем проводить индукцией по d. База индукции, $d=2$, имеет место в силу теоремы A.

Пусть $d>2$. Предположим, что при $d-1$ утверждение теоремы имеет место. Зафиксируем последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^\infty$, $\mathbf{n}_k=(n_1^k,n_2^k,...,n_d^k)$, $k\in\mathbb{N}$. Пусть $f\in L(\ln^+L)^{d-1}\psi(L)(\mathbb{T}^d)$.

Через $D_n(t)$ будем обозначать ядро Дирихле

$$D_n(t)=\frac{\sin\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}.$$

Для произвольных $\mathbf{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^d)\in\mathbb{T}^d$, $\mathbf{u}=(u^1,u^2,\ldots,u^d)\in\mathbb{T}^d$ и $\mathbf{n}_k=(n_1^k,n_2^k,\ldots,n_d^k)$, $k\in\mathbb{N}$, обозначим $\tilde{\mathbf{x}}=\left(x^2,\ldots,x^d\right)$, $\tilde{\mathbf{u}}=\left(u^2,\ldots,u^d\right)$, $\tilde{\mathbf{n}}_k=\left(n_2^k,\ldots,n_d^k\right)$. Тогда $f(\mathbf{x})=f(x^1,x^2,\ldots,x^d)=f(x^1,\tilde{\mathbf{x}})$ и

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})=\frac{1}{\pi^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}D_{n_k^1}(u^1-x^1)D_{n_k^2}(u^2-x^2)\ldots D_{n_k^d}(u^d-x^d)f(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}D_{n_k^1}(u^1-x^1)\left(\frac{1}{\pi^{d-1}}\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}}D_{n_k^2}(u^2-x^2)\ldots D_{n_k^d}(u^d-x^d)f(u^1,\tilde{\mathbf{u}})d\tilde{\mathbf{u}}\right)du^1$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\sin\left(n_k^1+\dfrac12\right)(u^1-x^1)}{2\sin\dfrac{u^1-x^1}{2}}\;S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)du^1,$$

где $S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)$ — значение в точке $\tilde{\mathbf{x}}=\left(x^2,\ldots,x^d\right)$ $\tilde{\mathbf{n}}_k$-й прямоугольной частичной суммы $(d-1)$-кратного ряда Фурье функции f как функции $d-1$ переменных $x^2,\ldots,x^d$ при фиксированном u^1.

Отсюда, используя тригонометрическое тождество

$$\frac{\sin\left(n_k^1+\dfrac12\right)(u^1-x^1)}{2\sin\dfrac{u^1-x^1}{2}}=\frac12\operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}(\sin n_k^1u^1\,\cos n_k^1x^1-\cos n_k^1u^1\,\sin n_k^1x^1)+\frac12\cos n_k^1(u^1-x^1)$$

и понимая ниже интегралы в смысле главного значения, т. е. как предел при $\varepsilon\to+0$ интеграла по множеству $\mathbb{T}\backslash(x^1-\varepsilon,x^1+\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})&=\cos n_k^1x^1\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\sin n_k^1u^1\,S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)du^1\\&-\sin n_k^1x^1\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\cos n_k^1u^1\,S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)du^1\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\cos n_k^1(u^1-x^1)\,S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)du^1.\end{aligned}\tag{10}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sup_{k\geqslant2}\frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})|\psi(k)}{\ln^dk}&\leqslant\sup_{k\geqslant2}\frac{\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\dfrac{u^1-x^1}{2}\,\sin n_k^1u^1\,S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)du^1\right|\psi(k)}{\ln^dk}\\&+\sup_{k\geqslant2}\frac{\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\dfrac{u^1-x^1}{2}\,\cos n_k^1u^1\,S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)du^1\right|\psi(k)}{\ln^dk}\\&+\sup_{k\geqslant2}\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}}\left|S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1,\cdot),\tilde{\mathbf{x}}\right)\right|du^1\,\psi(k)}{\ln^dk}.\end{aligned}\tag{11}$$

Покажем, что каждое из трех слагаемых в правой части (11) конечно для почти всех $\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d$.

Рассмотрим первое слагаемое. Зафиксируем $u^1 \in \mathbb{T}$. Применяя лемму 1 при $d-1$ вместо d к $f(u^1, \tilde{\mathbf{x}})$ как функции $(d-1)$-мерного аргумента $\tilde{\mathbf{x}}$ и к последовательности $(d-1)$-мерных векторов $\{\tilde{\mathbf{n}}_k\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \sup_{k\geqslant 2} \left| \frac{S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right)\ \psi(k)}{\ln^{d-1} k} \right| d\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\leqslant K_{d-1} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} |f(u^1, \tilde{\mathbf{x}})| \left(\ln^+ |f(u^1, \tilde{\mathbf{x}})|\right)^{d-1} \psi(|f(u^1, \tilde{\mathbf{x}})|) d\tilde{\mathbf{x}} + K_{d-1}. \tag{12}$$

Проинтегрируем (12) по $u^1 \in \mathbb{T}$. Получим

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \sup_{k\geqslant 2} \left| \frac{S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right)\ \psi(k)}{\ln^{d-1} k} \right| d\tilde{\mathbf{x}} du^1$$

$$\leqslant K_{d-1} \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} |f(u^1, \tilde{\mathbf{x}})| \left(\ln^+ |f(u^1, \tilde{\mathbf{x}})|\right)^{d-1} \psi(|f(u^1, \tilde{\mathbf{x}})|) d\tilde{\mathbf{x}} du^1 + 2\pi K_{d-1}$$

$$= K_{d-1} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})| \left(\ln^+ |f(\mathbf{x})|\right)^{d-1} \psi(|f(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} + 2\pi K_{d-1}. \tag{13}$$

Согласно условиям теоремы правая часть (13) конечна. Отсюда, используя теорему Фубини, получаем, что для почти всех $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}^{d-1}$

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{k\geqslant 2} \left| \frac{S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right)\ \psi(k)}{\ln^{d-1} k} \right| du^1 < \infty. \tag{14}$$

Зафиксируем точку $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}^{d-1}$, удовлетворяющую условию (14). Применяя лемму A к функциям

$$g_k(x^1) = \frac{\sin n_k^1 x^1\, S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(x^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right) \psi(k)}{\ln^{d-1} k}, \quad k \geqslant 2,$$

и

$$g(x^1) = \sup_{k\geqslant 2} \left| \frac{S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(x^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right)\ \psi(k)}{\ln^{d-1} k} \right|,$$

имеем

$$\sup_{k\geqslant 2} \frac{|g_k(u)|}{\ln k} = \sup_{k\geqslant 2} \frac{\left| \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u^1 - x^1}{2}\ \sin n_k^1 u^1\, S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right) du^1 \right| \psi(k)}{\ln^d k} < \infty \quad \text{п.в.}$$

Отсюда, учитывая, что (14) выполняется для почти всех $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}^{d-1}$, заключаем, что первое слагаемое в правой части (11) конечно для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$. Конечность почти всюду второго слагаемого в правой части (11) доказывается аналогично.

Рассмотрим третье слагаемое. С помощью неравенства

$$\sup_{k\geqslant 2} \frac{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \left|S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right)\right| du^1\, \psi(k)}{\ln^d k} \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{k\geqslant 2} \left| \frac{S_{\tilde{\mathbf{n}}_k}\left(f(u^1, \cdot), \tilde{\mathbf{x}}\right)\ \psi(k)}{\ln^{d-1} k} \right| du^1$$

и (14), получаем, что при почти всех $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}^{d-1}$ независимо от x^1 третье слагаемое в правой части (11) конечно почти всюду.

Таким образом, все три слагаемых в правой части (11) конечны почти всюду. Следовательно, левая часть (11) также конечна при почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, или

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = O\Big(\frac{\ln^d k}{\psi(k)}\Big) \quad \text{п.в.} \tag{15}$$

Нам осталось показать, что O-большое в оценке (15) можно заменить на o-малое.

Опять, как и при доказательстве леммы 1, применим теорему B к функции $\varphi_{d-1}(u) = u(\ln^+ u)^{d-1}\psi(u)$ и последовательности операторов

$$V_k(f, \mathbf{x}) = \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})\psi(k)|}{\ln^d k}, \quad k \geqslant 2.$$

В силу (15) условие (6) теоремы B выполняется. Применяя теорему B, для всех $f \in \varphi_{d-1}(L)(\mathbb{T}^d)$ и $z > C$ имеем

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : M(f, \mathbf{x}) > z\} \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi_{d-1}\Big(\frac{C|f(\mathbf{x})|}{z}\Big) d\mathbf{x} \leqslant \frac{C}{z} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi_{d-1}\left(|f(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x}. \tag{16}$$

Зафиксируем $z > 0$. Для любого сколь угодно большого $\alpha > 0$ найдется кратный (d-мерный) тригонометрический полином $h(\mathbf{x})$ такой, что $\int_{\mathbb{T}^d} \varphi_{d-1}(|\alpha f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} < 1$. Применяя (16) к функции $\alpha f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})$ и используя тот факт, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(h, \mathbf{x})|\, \psi(k)}{\ln^d k} = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d,$$

получаем

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d\colon \limsup_{k\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})|\, \psi(k)}{\ln^d k} > z\Big\}$$

$$= \operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d\colon \limsup_{k\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(\alpha f - h, \mathbf{x})|\, \psi(k)}{\ln^d k} > \alpha z\Big\}$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d\colon \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(\alpha f - h, \mathbf{x})|\, \psi(k)}{\ln^d k} > \alpha z\Big\} < \frac{C}{\alpha z}, \qquad \alpha z > C.$$

Таким образом, для любого $\alpha > C/z$

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d\colon \limsup_{k\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})|\, \psi(k)}{\ln^d k} > z\Big\} < \frac{C}{\alpha z}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\alpha \to +\infty$, имеем

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d\colon \limsup_{k\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})|\, \psi(k)}{\ln^d k} > z\Big\} = 0$$

для любого $z > 0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})|\, \psi(k)}{\ln^d k} = 0 \qquad \text{для почти всех } \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hardy G.H.** On the summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 12. P. 365–372.
2. **Осколков К.И.** Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.
3. **Карагулян Г.А.** Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 3. С. 55–74.
4. **Антонов Н.Ю.** О порядке роста последовательностей двойных прямоугольных сумм Фурье функций из классов $\varphi(L)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 26–34.
5. **Stein E.M.** On limits of sequences of operators // Ann. Math. 1961. Vol. 74, no. 1. P. 140–170.

Поступила 03.02.2013

Антонов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Том 19 № 2 2013

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОГОМЕРНОЙ ЕВКЛИДОВОЙ СФЕРЕ[1]

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова

Изучается точное неравенство Никольского между равномерной и L_q-нормами алгебраических многочленов заданного порядка $n \geq 1$ (по совокупности переменных) на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ при $1 \leq q < \infty$. Доказано, что многочлен ϱ_n одного переменного с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^\psi(-1,1)$ функций f, у которых степень $|f|^q$ суммируема на $(-1,1)$ с весом Якоби $\psi(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha = (m-1)/2$, $\beta = (m-3)/2$, как зональный многочлен одного переменного $t = \xi_m$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является (в определенном смысле единственным) экстремальным в неравенстве Никольского на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$. Обсуждаются соответствующие одномерные неравенства для алгебраических многочленов на отрезке.

Ключевые слова: многомерная евклидова сфера; алгебраические многочлены; неравенство Никольского; многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля.

V. V. Arestov, M. V. Deikalova. Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere.

We study the sharp Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q norm of algebraic polynomials of a given (total) degree $n \geq 1$ on the unit sphere $\mathbb{S}^{m-1}$ of the Euclidean space $\mathbb{R}^m$ for $1 \leq q < \infty$. We prove that the polynomial ϱ_n in one variable with unit leading coefficient, that deviates least from zero in the space $L_q^\psi(-1,1)$ of functions f such that $|f|^q$ is summable on $(-1,1)$ with the Jacobi weight $\psi(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha = (m-1)/2$, $\beta = (m-3)/2$, as a zonal polynomial in one variable $t = \xi_m$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, is (in a certain sense, unique) extremal in the Nikol'skii inequality on the sphere $\mathbb{S}^{m-1}$. The corresponding one-dimensional inequalities for algebraic polynomials on a closed interval are discussed.

Keywords: multidimensional Euclidean sphere, algebraic polynomials, Nikol'skii inequality, polynomials that deviate least from zero.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, есть m-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $xy = (x,y) = \sum_{k=1}^m \xi_k\eta_k$ точек $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ из $\mathbb{R}^m$ и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. Пусть, далее, $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| = 1\}$ есть единичная сфера пространства $\mathbb{R}^m$.

Обозначим через $\mathscr{P}_{n,m}$ множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leq n,\\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m}} c(\alpha) x^\alpha, \tag{1.1}$$

$$x^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_m^{\alpha_m}, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m,$$

степени не выше n от m переменных с вещественными коэффициентами $c(\alpha)$. В данной работе изучается неравенство

$$\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} \leq C(n,m)\,\|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^{m-1})}, \qquad P_n \in \mathscr{P}_{n,m}, \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011).

с наименьшей константой $C(n,m)=C(n,m)_q$ между равномерной нормой

$$\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})}=\max\{|P_n(x)|\colon x\in\mathbb{S}^{m-1}\} \tag{1.3}$$

и L_q-нормой

$$\|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^{m-1})}=\left(\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}}|P_n(x)|^q dx\right)^{1/q}, \qquad 1\le q<\infty, \tag{1.4}$$

многочленов заданного порядка $n\ge 0$ на единичной сфере.

При любом ортогональном преобразовании $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^m$ сфера $\mathbb{S}^{m-1}$ переходит на себя, многочлен $P_n\in\mathscr{P}_{n,m}$ преобразуется в многочлен $P_n^{\mathcal{A}}(x)=P_n(\mathcal{A}x)$ из $\mathscr{P}_{n,m}$, причем нормы (1.3) и (1.4) многочленов сохраняются. Поэтому в (1.2) можно ограничиться многочленами, у которых равномерная норма (1.3) достигается в “северном полюсе” $e_m=(0,\ldots,0,1)$ сферы $\mathbb{S}^{m-1}$. Следовательно, неравенство (1.2) эквивалентно неравенству

$$|P_n(e_m)|\le C(n,m)\,\|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^{m-1})}, \qquad P_n\in\mathscr{P}_{n,m}. \tag{1.5}$$

Многочлен $P_n^*\in\mathscr{P}_{n,m},\ P_n^*\not\equiv 0$, на котором неравенства (1.2) или (1.5) обращаются в равенства, называют *экстремальным многочленом* соответствующего неравенства. В силу конечномерности задач такие многочлены существуют. Вопрос о единственности экстремального многочлена в данном случае имеет особенности. Ясно, что если многочлен P_n^* экстремальный, то для любой константы $c\ne 0$ многочлен cP_n^* также является экстремальным. Помимо того, в неравенствах (1.2) и (1.5) участвуют значения многочлена лишь на сфере. Продолжение же многочлена со сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ на все пространство $\mathbb{R}^m$ не единственное; в самом деле, при $n\ge 2$ для многочлена $P_n\in\mathscr{P}_{n,m}$ многочлен $\widetilde{P}_n(x)=P_n(x)+(|x|^2-1)Q_{n-2}(x)$ при любом $Q_{n-2}\in\mathscr{P}_{n-2,m}$ также принадлежит множеству $\mathscr{P}_{n,m}$ и совпадает с P_n на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$. В связи с такими особенностями задачи будем говорить, что многочлен P_n^* является единственным экстремальным многочленом неравенства (1.2), если он является экстремальным многочленом неравенства (1.2) и любой другой экстремальный многочлен P_n^{**} представим (на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$) в виде $P_n^{**}(x)=cP_n^*(\mathcal{A}x),\ x\in\mathbb{S}^{m-1}$, где $\mathcal{A}$ — некоторое ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^m$, а $c\in\mathbb{R},\ c\ne 0$. Аналогично определяется свойство единственности экстремального многочлена неравенства (1.5).

1.2. Предыстория. В случае $m=2$ неравенство (1.2) сводится к точному неравенству

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}}\le C(n)_q\,\|f_n\|_{\widetilde{L}_q}, \qquad f_n\in\mathscr{T}_n, \tag{1.6}$$

между равномерной нормой и интегральной q-нормой

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}}=\max\{|f_n(t)|:\ t\in\mathbb{R}\}, \qquad \|f_n\|_{\widetilde{L}_q}=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f_n(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

на множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов

$$f_n(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \tag{1.7}$$

заданного порядка $n\ge 1$ с вещественными коэффициентами.

В самом деле, многочлен (1.1) при $m=2$ имеет вид

$$P_n(x)=P_n(\xi_1,\xi_2)=\sum_{\substack{k_1+k_2\le n,\\ k_1,k_2\ge 0}}c(k_1,k_2)\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}, \qquad x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2. \tag{1.8}$$

Нас интересуют значения многочлена (1.8) на единичной окружности $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Воспользуемся классической параметризацией окружности: $\xi_1 = \cos t,\ \xi_2 = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$. Для многочлена (1.8) имеем

$$P_n(\cos t, \sin t) = \sum_{\substack{k_1 + k_2 \le n, \\ k_1, k_2 \ge 0}} c(k_1, k_2)(\cos t)^{k_1}(\sin t)^{k_2} = f_n(t); \tag{1.9}$$

очевидно, (1.9) есть (вещественный) тригонометрический полином порядка n; при этом

$$\|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^1)} = \left(\int\limits_{\mathbb{S}^1} |P_n(x)|^q dx\right)^{1/q} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f_n(t)|^q dt\right)^{1/q} = \pi^{1/q}\, \|f_n\|_{\widetilde{L}_q}.$$

Обратно, тригонометрический полином (1.7) можно представить в виде

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt + \sin t \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\sin kt}{\sin t} = U_n(\cos t) + \sin t\ V_{n-1}(\cos t),$$

где U_n и V_{n-1} — алгебраические многочлены одного переменного, соответственно, степени n и $n-1$. Функция $P_n(\xi_1, \xi_2) = U_n(\xi_1) + \xi_2 V_{n-1}(\xi_1)$ является алгебраическим многочленом двух переменных порядка n. Этому многочлену по формуле (1.9) соответствует именно полином (1.7). Отсюда следует, что константы в неравенстве (1.2) при $m = 2$ и в неравенстве (1.6) связаны соотношением

$$C(n, 2)_q = \pi^{-1/q}\, C(n)_q.$$

Задача исследования константы $C(n)_q$ восходит к Д. Джексону [1]. Наиболее полно изучено неравенство (1.6) при $q = 1$. Как показал С. Б. Стечкин (см. [2; 3]), для константы $C(n) = C(n)_1$ существует конечный предел $c = \lim\limits_{n\to\infty} C(n)/n$. Л. В. Тайков [2] (см. также [3]) получил для величины c близкие между собой оценки сверху и снизу. Лучшие на данный момент результаты относительно константы $C(n)$ получены в работах В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанова, С. А. Пичугова [4] и Д. В. Горбачева [5] (см. также [6]); Д. В. Горбачев, в частности, установил [5; 6] связь этой задачи с другими экстремальными задачами теории функций.

Неравенство (1.6) есть частный случай неравенств разных метрик, обстоятельное изучение которых было начато С. М. Никольским [7]. Точным неравенствам для тригонометрических полиномов в настоящее время посвящено большое число исследований. Такие неравенства изучали С. Н. Бернштейн, M. Riesz, G. Szegö, A. Zygmund, С. Б. Стечкин, A. P. Calderon, G. Klein, Л. В. Тайков, P. Nevai, Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, В. И. Иванов, С. В. Конягин, А. И. Козко, Q.I. Rahman, Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, А. Г. Бабенко, В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина и многие другие; см. монографии [8, гл. 10; 9; 10], работы [11–18] и приведенную там библиографию.

При $m \ge 3$ неравенство (1.2) изучено в существенно меньшей степени (см. работы [19–21] и приведенную там библиографию).

1.3. Связь с задачей о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке. Для веса

$$\psi(t) = \psi_m(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \qquad \alpha = (m-1)/2, \qquad \beta = (m-3)/2, \tag{1.10}$$

и параметра $q,\ 1 \le q < \infty$, рассмотрим пространство $L_q^{\psi}(-1,1)$ измеримых на интервале $(-1,1)$ функций f таких, что функция $|f|^q$ суммируема на $(-1,1)$ с весом (1.10); это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{L_q^{\psi}(-1,1)} = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^q\, \psi(t)\, dt\right)^{1/q}, \qquad f \in L_q^{\psi}(-1,1). \tag{1.11}$$

При $n \ge 1$ обозначим через $\varrho_n = \varrho_{n,\psi,q}$ многочлен порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^{\psi}(-1,1)$, т. е. многочлен ϱ_n, являющийся решением задачи

$$\min\{\|p_n\|_{L_q^{\psi}(-1,1)} \colon p_n \in \mathscr{P}_n^1\} = \|\varrho_n\|_{L_q^{\psi}(-1,1)}, \tag{1.12}$$

где $\mathscr{P}_n^1$ есть множество многочленов $p_n(t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ порядка n, старший коэффициент которых равен 1. Одним из основных в данной работе является следующее утверждение, содержащееся в приведенной ниже теореме 2.

Теорема. *При любых $m \ge 3,\ n \ge 1,\ 1 \le q < \infty$, многочлен ϱ_n, наименее уклоняющийся от нуля на промежутке* $(-1,1)$ *относительно нормы* (1.11), *как зональный многочлен одного переменного $t = \xi_m,\ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является единственным экстремальным многочленом в неравенстве* (1.2).

При $q = 1$ эта теорема (без утверждения о единственности экстремального многочлена) доказана в работе [21].

2. Две экстремальные задачи для алгебраических многочленов на отрезке

Неравенство (1.2) сводится к двум экстремальным задачам для алгебраических многочленов одного переменного на отрезке. Одна из них — задача о точной константе в неравенстве Никольского для алгебраических многочленов на отрезке, а вторая — сформулированная выше задача (1.12) о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. В данном разделе будут рассмотрены эти две экстремальные задачи для многочленов одного переменного.

2.1. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке с ультрасферическим весом. На множестве $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}_{n,1}$ алгебраических многочленов (одного переменного) порядка n на отрезке $[-1,1]$ будем рассматривать равномерную норму

$$\|p\|_{C[-1,1]} = \max\{|p(t)| \colon t \in [-1,1]\}$$

и интегральную q-норму

$$\|p\|_{L_q^{\phi}(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1} |p(t)|^q\, \phi(t)\, dt\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad 1 \le q < \infty, \tag{2.1}$$

с ультрасферическим весом

$$\phi(t) = \phi_m(t) = (1-t^2)^{\alpha}, \qquad \alpha = \alpha_m = \frac{m-3}{2}.$$

Обозначим через $M(n,\phi) = M(n,\phi)_q$ и $\widetilde{M}(n,\phi) = \widetilde{M}(n,\phi)_q$ наименьшие (наилучшие) константы в неравенствах

$$\|p\|_{C[-1,1]} \le M(n,\phi)\, \|p\|_{L_q^{\phi}(-1,1)}, \qquad p \in \mathscr{P}_n, \tag{2.2}$$

$$|p(1)| \le \widetilde{M}(n,\phi)\, \|p\|_{L_q^{\phi}(-1,1)}, \qquad p \in \mathscr{P}_n, \tag{2.3}$$

соответственно. Ясно, что $\widetilde{M}(n,\phi) \le M(n,\phi)$; как будет показано ниже, на самом деле имеет место равенство $\widetilde{M}(n,\phi) = M(n,\phi)$.

Неравенство (2.2) есть аналог неравенства Никольского [7] для алгебраических многочленов на отрезке. Такие неравенства и более общие неравенства для равномерной нормы и интегральных норм с весами (в особенности с ультарасферическими весами) производных алгебраических многочленов и самих многочленов изучали А. А. Марков, В. А. Марков, С. Н. Бернштейн, М. К. Потапов, И. К. Даугавет, С. З. Рафальсон, В. И. Иванов, С. В. Конягин, Б. Боянов, П. Ю. Глазырина, И. Е. Симонов и многие другие математики; см. монографии [9; 10; 22–24], работы [11; 12; 25–31] и приведенную там библиографию. В частности, в работе [26] содержится порядок поведения величины $M(n,\phi)_q$ по n при $n\to\infty$, а именно

$$M(n,\phi)_q \asymp n^{\gamma}, \qquad \gamma=\frac{m-1}{q}.$$

2.2. Неравенство Никольского на отрезке с произвольным весом. Наша ближайшая цель — изучение неравенства (2.3), а точнее, его аналога для произвольного веса.

Пусть υ есть функция, суммируемая, неотрицательная, почти всюду отличная от нуля, т. е. вес на $(-1,1)$. Обозначим через $L_q^{\upsilon}(-1,1)$, $1\le q<\infty$, пространство измеримых на $(-1,1)$ функций f таких, что произведение $|f|^q\upsilon$ суммируемо на $(-1,1)$; это есть банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L_q^{\upsilon}(-1,1)}=\left(\int_{-1}^{1}|f(t)|^q\upsilon(t)\,dt\right)^{1/q}, \qquad f\in L_q^{\upsilon}(-1,1).$$

Целью данного параграфа является исследование точного неравенства

$$|p_n(1)|\le \widetilde{M}(n,\upsilon)_q\,\|p_n\|_{L_q^{\upsilon}(-1,1)}, \qquad p_n\in\mathscr{P}_n. \tag{2.4}$$

Наряду с неравенством (2.4) представляют интерес более общее поточечное неравенство

$$|p_n(z)|\le \widetilde{M}(n,\upsilon,z)_q\,\|p_n\|_{L_q^{\upsilon}(-1,1)}, \qquad p_n\in\mathscr{P}_n, \tag{2.5}$$

для $z\in\mathbb{C}$ и родственное неравенство

$$\|p_n\|_{C[-1,1]}\le M(n,\upsilon)_q\,\|p_n\|_{L_q^{\upsilon}(-1,1)}, \qquad p_n\in\mathscr{P}_n. \tag{2.6}$$

К настоящему времени неравенствам (2.5) и (2.6) посвящено большое число исследований, см. монографии [9, § 6.1; 10, гл. 4; 23, § 7.71].

Наиболее полно неравенства (2.5), (2.6) исследованы при $q=2$; см. [22, Т. II, отд. VI, § 12; 23, § 7.71]. Пусть $\{p_n^{\upsilon}\}_{n=0}^{\infty}$ есть система многочленов, ортонормированная с весом υ на $(-1,1)$. Тогда при $z\in[-1,1]$ для квадрата наилучшей константы в (2.5) при $q=2$ имеет место формула (см., к примеру, [23, § 3.1, теорема 3.1.3])

$$\widetilde{M}^2(n,\upsilon,z)_2=\sum_{k=0}^{n}(p_n^{\upsilon}(z))^2 \tag{2.7}$$

и многочлен

$$\rho_n(t)=\sum_{k=0}^{n}p_k^{\upsilon}(z)p_k^{\upsilon}(t) \tag{2.8}$$

является экстремальным. Как следствие (2.7), справедлива формула

$$\widetilde{M}^2(n,\upsilon)_2=\max\left\{\sum_{k=0}^{n}(p_n^{\upsilon}(z))^2:\ z\in[-1,1]\right\}. \tag{2.9}$$

Многочлены Якоби $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}$, ортонормированные на $(-1,1)$ с весом Якоби

$$\phi^{(\alpha,\beta)}(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \tag{2.10}$$

при $\alpha \ge \beta \ge -1/2$ обладают свойством (см., например, [23, § 7.32, теорема 7.32.1; § 4.1, формула (4.1.1)])

$$\max\{|p_k^{(\alpha,\beta)}(t)| : \ t \in [-1,1]\} = |p_k^{(\alpha,\beta)}(1)|, \qquad k \ge 0.$$

Отсюда в силу (2.9) и (2.7) следует, что для веса Якоби (2.10) при $\alpha \ge \beta \ge -1/2$, $q = 2$ константы в неравенствах (2.6) и (2.4) совпадают:

$$M\left(n, \phi^{(\alpha,\beta)}\right)_2 = \widetilde{M}\left(n, \phi^{(\alpha,\beta)}\right)_2$$

и квадрат их общего значения равен величине (см., например, [22, Т. II, отд. VI, § 12, теорема 105]

$$\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta+1)}.$$

Экстремальным в неравенствах (2.4) и (2.6) при $q = 2$ для веса Якоби (2.10) со значениями параметров $\alpha \ge \beta \ge -1/2$ является многочлен (см. (2.8))

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^{(\alpha,\beta)}(1) p_k^{(\alpha,\beta)}(t);$$

этот многочлен с точностью до мультипликативной константы совпадает [23, § 4.5, формулы (4.5.2), (4.5.3)] с многочленом Якоби $p_n^{(\alpha+1,\beta)}$, соответствующим весу $(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta}$.

Приведенный сейчас результат для веса Якоби содержит равенство наилучших констант в неравенствах (2.2), (2.3), выражение для их общего значения и экстремальный многочлен этих неравенств при $q = 2$ для всех $m \ge 2$. Ниже в теореме 2, в частности, доказано равенство наилучших констант в неравенствах (2.2), (2.3) и описаны экстремальные многочлены этих неравенств при всех $1 \le q < \infty$ для $m \ge 3$; для обоснования этих результатов будут использоваться другие соображения.

Обсудим понятие единственности экстремальных многочленов неравенств (2.4) и (2.6). Ясно, что если многочлен ρ_n — экстремальный, то для любой константы $c \ne 0$ многочлен $c\rho_n$ также является экстремальным. Экстремальный многочлен ρ_n неравенства (2.4) будем называть *единственным экстремальным*, если $c\rho_n, \ c \ne 0$, есть все множество экстремальных многочленов.

Свойство единственности экстремального многочлена неравенства (2.6) имеет особенности. Допустим, что вес υ четный. Тогда вместе с многочленом ρ_n многочлен $\rho_n(-t)$ также будет экстремальным в (2.6). В связи с этим в данном случае многочлен ρ_n будем называть *единственным экстремальным* в (2.6), если любой другой экстремальный многочлен имеет вид $c\rho_n(\pm t), \ c \ne 0$.

2.3. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля. Исходя из веса υ, определим на интервале $(-1,1)$ вес

$$w(t) = (1-t)\upsilon(t). \tag{2.11}$$

Обозначим через $\varrho_n = \varrho_{n,w,q}$ многочлен порядка $n \ge 1$ с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^w(-1,1)$; этот многочлен является решением задачи

$$\min\{\|p_n\|_{L_q^w(-1,1)} : p_n \in \mathscr{P}_n^1\} = \|\varrho_n\|_{L_q^w(-1,1)}. \tag{2.12}$$

Многочлен ϱ_n характеризуется свойством ортогональности функции $|\varrho_n|^{q-1} \operatorname{sign} \varrho_n$ пространству $\mathscr{P}_{n-1}$ (см., например, [32, гл. 3, § 3.3, теоремы 3.3.1, 3.3.2]):

$$\int_{-1}^{1} w(t)\, p_{n-1}(t) |\varrho_n(t)|^{q-1} \operatorname{sign} \varrho_n(t)\, dt = 0, \qquad p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}. \tag{2.13}$$

Отсюда, в частности, легко следует, что все n нулей многочлена ϱ_n простые и лежат на интервале $(-1,1)$.

2.4. Характеризация экстремального многочлена неравенства (2.4)**.** В следующем утверждении будет показано, что задачи (2.12) и (2.4) имеют одно и то же решение. При $q=1$ это утверждение доказано в [21].

Теорема 1. *При $1 \le q < \infty$, $n \ge 1$ многочлен ϱ_n порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^w(-1,1)$ с весом* (2.11)*, является единственным экстремальным многочленом неравенства* (2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ϱ_n есть многочлен порядка n, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^w(-1,1)$. Для произвольного многочлена $p_n \in \mathscr{P}_n$ имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(t)\,\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)\,dt$$

$$=\int\limits_{-1}^{1} r_{n-1}(t)(1-t)\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)dt + p_n(1)\int\limits_{-1}^{1}\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)dt,$$

где

$$r_{n-1}(t)=\frac{p_n(t)-p_n(1)}{1-t}$$

есть многочлен порядка $n-1$. Отсюда в силу (2.13) следует равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(t)\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)dt = p_n(1)\int\limits_{-1}^{1}\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)dt, \qquad p_n\in\mathscr{P}_n. \tag{2.14}$$

Выясним знак интеграла

$$I(n,q)=\int\limits_{-1}^{1}\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)dt.$$

Подставив в (2.14) многочлен $p_n=\varrho_n$, получаем равенство

$$\int\limits_{-1}^{1}\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q}dt = \varrho_n(1)\int\limits_{-1}^{1}\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)dt. \tag{2.15}$$

Все нули многочлена ϱ_n лежат на интервале $(-1,1)$ и его старший коэффициент положительный, поэтому $\varrho_n(1)>0$. В силу (2.15) можно утверждать, что имеет место свойство

$$I(n,q)=\int\limits_{-1}^{1}\upsilon(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)\,dt>0.$$

Соотношение (2.14) можно теперь переписать в виде

$$p_n(1)=\frac{1}{I(n,q)}\int\limits_{-1}^{1}\upsilon(t)p_n(t)|\varrho_n(t)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(t)dt, \qquad p_n\in\mathscr{P}_n. \tag{2.16}$$

С помощью неравенства Гельдера из (2.16) получаем оценку

$$|p_n(1)| \le \frac{1}{I(n,q)} \left(\int_{-1}^{1} \upsilon(t)|p_n(t)|^q dt \right)^{1/q} \left(\int_{-1}^{1} \upsilon(t)|\varrho_n(t)|^q dt \right)^{(q-1)/q}, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{2.17}$$

На многочлене ϱ_n неравенство (2.17) обращается в равенство; в этом легко убедиться, к примеру, с помощью тождества (2.16). Следовательно, неравенство (2.17) и есть неравенство (2.4), причем

$$\widetilde{M}(n,\upsilon)_q = \frac{\left(\|\varrho_n\|_{L_q^\upsilon(-1,1)} \right)^{q-1}}{I(n,q)}.$$

Исходя из условий, при которых неравенство Гельдера обращается в равенство, нетрудно сделать вывод, что при всех q, $1 \le q < \infty$, неравенство (2.17) обращается в равенство лишь на многочленах $c\varrho_n$, $c \in \mathbb{R}$. Таким образом, многочлен ϱ_n является единственным экстремальным в неравенстве (2.4). Теорема 1 доказана. □

3. Редукция неравенства Никольского для алгебраических многочленов на сфере к экстремальным задачам для многочленов на отрезке

3.1. Связь между неравенствами Никольского для алгебраических многочленов на сфере и отрезке. Следующее утверждение сводит задачу исследования многомерного неравенства (1.2) к исследованию одномерных неравенств (2.2), (2.3) и задачи (1.12) о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля. В теореме 2 и ниже через $|\mathbb{S}^{m-2}|$ обозначена “площадь” сферы $\mathbb{S}^{m-2}$.

Теорема 2. *При* $n \ge 1$, $m \ge 3$, $1 \le q < \infty$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Для наилучших констант в неравенствах* (1.2), (2.2) *и* (2.3) *имеют место равенства*

$$\widetilde{M}(n,\phi) = M(n,\phi) = |\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}\, C(n,m). \tag{3.1}$$

2. *Многочлен* ϱ_n, *наименее уклоняющийся от нуля на* $(-1,1)$ *относительно нормы* (1.11), *как зональный многочлен одного переменного* $t = \xi_m$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, *является единственным экстремальным многочленом неравенства* (1.5).

3. *Многочлен* ϱ_n *является единственным экстремальным многочленом как неравенства* (2.3), *так и неравенства* (2.2).

При $q = 1$ первое утверждение теоремы доказано в [20], а второе (без обсуждения свойств единственности экстремальных многочленов) — в [21]. Второе утверждение теоремы означает, в частности, что экстремальный многочлен неравенства (1.2) единственный и он зональный.

3.2. Вспомогательные утверждения. Доказательству теоремы 2 предпошлем несколько вспомогательных построений и утверждений. Следующая лемма есть вариант теоремы Фубини; подробное обоснование этого утверждения с помощью перехода к полярным координатам на сфере можно найти, например, в [19].

Лемма 1. *Для суммируемой на сфере* $\mathbb{S}^{m-1}$ *функции* f *имеет место формула*

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x)dx = |\mathbb{S}^{m-2}| \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{(m-3)/2} F(t)\, dt, \tag{3.2}$$

в которой

$$F(t) = F(t,f) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} f(ru,t)\, du, \qquad r = r(t) = \sqrt{1-t^2}, \qquad t \in (-1,1). \tag{3.3}$$

Следующая лемма описывает структуру функции (3.3) в случае, когда f есть многочлен. Доказательство леммы 2 также можно найти в работе [19].

Лемма 2. *При $n \geq 1,\ m \geq 3$ для любого многочлена $P_n \in \mathscr{P}_{n,m}$ функция*

$$F_n(t) = F_n(t, P_n) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} P_n\,(ru, t)\, du, \qquad r = r(t) = \sqrt{1-t^2}, \tag{3.4}$$

является многочленом (одного) переменного $t = \xi_m$ порядка n.

3.3. Доказательство теоремы 2. Обоснование теоремы проведем в несколько этапов.

(1) Обоснуем первое утверждение теоремы. Произвольному многочлену $P_n \in \mathscr{P}_{n,m}$ по формуле (3.4) сопоставим многочлен $F_n \in \mathscr{P}_n$. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|F_n(t)| \leq \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} |P_n\,(ru,t)\,|\, du \leq \left(\frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} |P_n\,(ru,t)\,|^q du \right)^{1/q}; \tag{3.5}$$

здесь $r = r(t) = \sqrt{1-t^2}$. Следовательно, для нормы (2.1) многочлена (3.4) справедливо неравенство

$$\|F_n\|^q_{L^\phi_q(-1,1)} = \int\limits_{-1}^{1} |F_n(t)|^q\, \phi(t)\, dt \leq \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} |P_n\,(ru,t)\,|^q du\, \phi(t)\, dt. \tag{3.6}$$

В силу формул (3.2) и (3.3)

$$\int\limits_{-1}^{1} \phi(t) \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} |P_n\,(ru,t)\,|^q\, du\, dt = \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} |P_n(x)|^q dx.$$

Так что неравенство (3.6) можно переписать в виде

$$\|F_n\|_{L^\phi_q(-1,1)} \leq \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}}\, \|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^{m-1})}. \tag{3.7}$$

Помимо того, в силу (3.4) выполняется равенство

$$F_n(1) = P_n(e_m). \tag{3.8}$$

Подставив многочлен F_n в неравенство (2.3) и учитывая (3.8) и (3.7), получаем цепочку соотношений

$$|P_n(e_m)| = |F_n(1)| \leq \widetilde{M}(n,\phi)\, \|F_n\|_{L^\phi_q(-1,1)} \leq \frac{\widetilde{M}(n,\phi)}{|\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}}\, \|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^{m-1})}. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$C(n,m) \leq \frac{\widetilde{M}(n,\phi)}{|\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}}$$

или

$$|\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q} C(n,m) \leq \widetilde{M}(n,\phi)\,.$$

Пусть $p_n \in \mathscr{P}_n$. Введем многочлен

$$P_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = p_n(\xi_m) \tag{3.10}$$

от m переменных порядка n. В силу (3.2) и (3.4) имеем

$$\|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^{m-1})} = |\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}\, \|p_n\|_{L_q^\phi(-1,1)}. \tag{3.11}$$

Кроме того, очевидно,

$$\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} = \|p_n\|_{C[-1,1]}. \tag{3.12}$$

Подставив многочлен (3.10) в (1.2), в силу (3.11), (3.12) получаем неравенство

$$\|p_n\|_{C[-1,1]} \le C(n,m)\, |\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}\, \|p_n\|_{L_q^\phi(-1,1)}, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n.$$

Отсюда следует оценка

$$M(n,\phi) \le |\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}\, C(n,m).$$

Итак, мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$|\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}\, C(n,m) \le \widetilde{M}(n,\phi) \le M(n,\phi) \le |\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}\, C(n,m),$$

которая влечет утверждение (3.1).

Далее нам предстоит убедиться, что многочлен ϱ_n, наименее уклоняющийся от нуля на $(-1,1)$ относительно нормы (1.11), является экстремальным, более того, единственным экстремальным в обсуждаемых неравенствах. Относительно неравенства (2.3) этот факт содержится в теореме 1.

(2) Убедимся, что многочлен ϱ_n является экстремальным в неравенствах (2.2) и (1.5). Имеем

$$\widetilde{M}(n,\phi)\, \|\varrho_n\|_{L_q^\phi(-1,1)} = |\varrho_n(1)| \le \|\varrho_n\|_{C[-1,1]} \le M(n,\phi)\, \|\varrho_n\|_{L_q^\phi(-1,1)}.$$

Отсюда с учетом (3.1) следует, что $\|\varrho_n\|_{C[-1,1]} = |\varrho_n(1)|$ и многочлен ϱ_n является экстремальным в неравенстве (2.2). В силу (3.11), (3.12) и (3.1) этот многочлен как зональный многочлен

$$P_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m) = \varrho_n(\xi_m), \qquad (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m) \in \mathbb{R}^m,$$

от m переменных будет экстремальным и в неравенствах (1.2), (1.5).

(3) Выясним вид экстремальных многочленов в неравенстве (1.5). Пусть $P_n \in \mathscr{P}_{n,m}$ — один из таких многочленов. В силу (3.1) на многочлене P_n оба неравенства в (3.9) обращаются в равенство. Отсюда следует, что многочлен F_n, определенный соотношением (3.4), является экстремальным в неравенстве (2.3); по теореме 1 он имеет вид

$$F_n = c\varrho_n, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c \not\equiv 0. \tag{3.13}$$

Второе неравенство в (3.9), т. е. неравенство (3.7), обращается в равенство в том и только в том случае, если оба неравенства в (3.5) при каждом $t \in [-1,1]$ обращаются в равенство. При $1 < q < \infty$ оба эти неравенства обращаются в равенство в том и только в том случае, если при каждом значении переменного $t \in [-1,1]$ функция $P_n\left(\sqrt{1-t^2}\,u, t\right)$ не зависит от $u \in \mathbb{S}^{m-2}$. Убедимся, что многочлен P_n обладает этим свойством и при $q=1$. В случае $q=1$ неравенства (3.5) сводятся к одному (первому) неравенству. Это неравенство обращается в равенство в том и только в том случае, если при каждом $t \in [-1,1]$ функция $P_n\left(\sqrt{1-t^2}\,u, t\right)$ переменного $u \in \mathbb{S}^{m-2}$ сохраняет знак и этот знак совпадает со знаком $F_n(t)$. Многочлен F_n на интервале $(-1,1)$ имеет n нулей $-1 < t_1 < \ldots < t_n < 1$, все они простые и являются точками перемены знака многочлена F_n. Итак, при любом $u \in \mathbb{S}^{m-2}$ функция $\chi(t) = P_n\left(\sqrt{1-t^2}\,u, t\right)$ имеет одни и те же точки перемены знака $\{t_k\}_{k=1}^n \subset (-1,1)$. Сделаем замену $t = \cos\theta,\ \theta \in [0,\pi]$. Функция

$$g_n(\theta) = g_n(\theta,u) = P_n\left((\sin\theta)\,u,\, \cos\theta\right)$$

является тригонометрическим полиномом порядка n. Этот полином имеет n простых нулей $\theta_k = \arccos t_k,\ 1 \le k \le n$, на $(0,\pi)$. Убедимся, что $\theta_k = -\arccos t_k,\ 1 \le k \le n$, лежащие на $(-\pi,0)$, также являются нулями $g_n(\theta)$. В самом деле, если $\theta \in [-\pi,0]$, то имеем

$$g_n(\theta) = P_n\left((\sin\theta)\, u, \cos\theta\right) = P_n\left((\sin|\theta|)\,(-u), \cos|\theta|\right).$$

Точка $-u$ также лежит на сфере $\mathbb{S}^{m-2}$. Поэтому точки $\theta_k = -\arccos t_k,\ 1 \le k \le n$, лежащие на $(-\pi,0)$, также являются нулями полинома g_n. Итак, при любом $u \in \mathbb{S}^{m-2}$ полином g_n имеет $2n$ простых нулей на $(-\pi,\pi)$, не зависящих от u. Значение полинома g_n в нуле тоже не зависит от точки $u \in \mathbb{S}^{m-2}$, а именно $g_n(0) = g_n(0,u) = P_n(e_m),\ e_m = (0,0,\ldots,0,1)$. Следовательно, полином g_n не зависит от u. Отметим, что в силу четности нулей многочлен g_n четный.

Итак, при всех $q,\ 1 \le q < \infty$, для экстремального многочлена $P_n \in \mathscr{P}_{n,m}$ неравенства (1.5) функция $P_n\left(\sqrt{1-t^2}\, u, t\right)$ переменного $t \in [-1,1]$ не зависит от точки $u \in \mathbb{S}^{m-2}$. Формула (3.4) влечет теперь равенство

$$P_n\left(\sqrt{1-t^2}\, u, t\right) = F_n(t), \quad t \in [-1,1], \quad u \in \mathbb{S}^{m-2}. \tag{3.14}$$

Соотношение (3.14) означает, что экстремальный многочлен P_n неравенства (1.5), а точнее, его сужение на сферу $\mathbb{S}^{m-1}$, является зональным и как многочлен одного переменного является экстремальным в неравенстве (2.3). В силу (3.13) с точностью до мультипликативной константы он совпадает с многочленом ϱ_n.

Таким образом, действительно, многочлен ϱ_n как зональный многочлен одного переменного $t = \xi_m,\ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является единственным экстремальным многочленом неравенства (1.5), а значит и неравенства (1.2).

(4) На данный момент доказано, что многочлен ϱ_n является единственным экстремальным многочленом неравенства (2.3) и экстремальным многочленом неравенства (2.2). Покажем, что произвольный экстремальный многочлен p_n неравенства (2.2) не может достигать равномерной нормы в точках интервала $(-1,1)$, т. е. достигает нормы обязательно в одной из концевых точек ± 1. Отсюда, очевидно, будет следовать, что либо сам многочлен p_n, либо многочлен $p_n(-t)$ является экстремальным в неравенстве (2.3). Тем самым будет доказано третье утверждение теоремы.

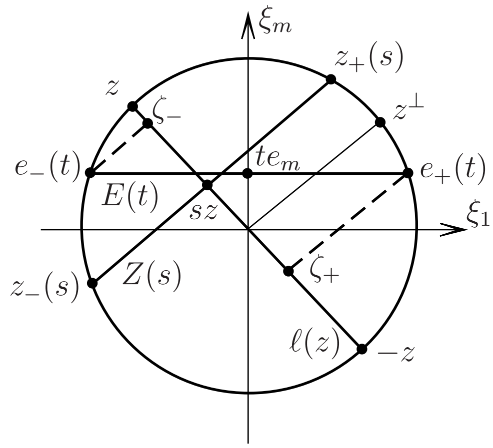
Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует точка $\eta \in (-1,1)$ такая, что $|p_n(\eta)| = \|p_n\|_{C[-1,1]}$. Будем рассматривать $p_n(\xi_m)$ как зональный многочлен от m переменных $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Он достигает на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ равномерной нормы в точках, последняя координата которых есть η. Одной из них является точка

$$y = (\sqrt{1-\eta^2}, 0, \ldots, 0, \eta) \in \mathbb{S}^{m-1},$$

у которой все координаты, кроме первой и последней, равны нулю. Рассмотрим следующее конкретное ортогональное преобразование $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^m$, при котором точка y перейдет в “северный полюс” $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$. Обозначим через $\Pi_{1,m}$ двумерную координатную плоскость, порожденную двумя координатными векторами $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ и $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$. Плоскость $\Pi_{1,m}$ составляют точки $x = (\xi_1, 0, \ldots, 0, \xi_m)$; будем эти точки записывать коротко в виде $x = (\xi_1, \xi_m)$, в частности, имеем $y = (\sqrt{1-\eta^2}, \eta)$. Пусть $\mathcal{A}$ есть преобразование, которое сохраняет неподвижными оси с номерами от 2 до $m-1$, а (двумерную) координатную плоскость $\Pi_{1,m}$ поворачивает на угол $\alpha = \arccos\eta$. Координаты точек в новой системе координат будем обозначать прежними символами: $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Преобразование $\mathcal{A}$ переведет точку e_m в точку

$$z = (-\sqrt{1-\eta^2}, \eta) \in \mathbb{S}^{m-1}. \tag{3.15}$$

В результате преобразования $\mathcal{A}$ многочлен p_n перейдет в некоторый многочлен $P_n \in \mathscr{P}_{n,m}$; многочлен P_n является зональным относительно точки z.



Обсуждаемые ниже конструкции отображены на рисунке. Обозначим через $\ell(z)$ прямую в $\mathbb{R}^m$, проходящую через начало координат и точку z; эта прямая лежит в плоскости $\Pi_{1,m}$. Для вещественного числа $s \in [-1, 1]$ обозначим через $\mathscr{Z}(s)$ сечение сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ афинной гиперплоскостью, проходящей через точку sz и ортогональной прямой $\ell(z)$. В силу свойства зональности многочлена P_n относительно точки z имеем

$$P_n(x) = p_n(s), \qquad x \in \mathscr{Z}(s). \tag{3.16}$$

Проекция сечения $\mathscr{Z}(s)$, $s \in (-1, 1)$, на плоскость $\Pi_{1,m}$ составляет отрезок $Z(s) = [z_-, z_+]$, концами которого являются точки

$$z_\mp = z_\mp(s) = sz \mp \sqrt{1-s^2}\, z^\perp, \qquad z^\perp = (\eta, \sqrt{1-\eta^2}).$$

Рассмотрим для многочлена P_n соответствующий многочлен одного переменного F_n, определенный формулой (3.4). Имеем

$$|F_n(1)| = |P_n(e_m)| = \|p_n\|_{C[-1,1]}. \tag{3.17}$$

В силу неравенства (3.7) и равенства (3.11) справедливы соотношения

$$\|F_n\|_{L_q^\phi(-1,1)} \le \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|^{1/q}} \|P_n\|_{L_q(\mathbb{S}^{m-1})} = \|p_n\|_{L_q^\phi(-1,1)}. \tag{3.18}$$

Подставим многочлен F_n в неравенство (2.3):

$$|F_n(1)| \le \widetilde{M}(n, \phi)\, \|F_n\|_{L_q^\phi(-1,1)}. \tag{3.19}$$

Соотношения (3.17), (3.18), (3.19) и (3.1) влекут, что многочлен P_n является экстремальным в неравенстве (1.5), а многочлен F_n — экстремальным в неравенстве (2.3). Как уже было доказано, отсюда следует, что многочлен P_n является зональным и, более того,

$$P_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = F_n(\xi_m), \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{S}^{m-1}.$$

Таким образом, многочлен P_n является зональным и относительно точки (3.15), и относительно северного полюса сферы e_m. Возьмем произвольно $t \in (-1, 1)$ и рассмотрим сечение $\mathscr{E}(t)$ сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ афинной гиперплоскостью, проходящей через точку te_m и ортогональной координатной оси ξ_m. На этом сечении многочлен P_n имеет одно и то же значение:

$$P_n(x) = F_n(t), \qquad x \in \mathscr{E}(t). \tag{3.20}$$

Проекцией множества $\mathscr{E}(t)$ на плоскость $\Pi_{1,m}$ является отрезок $E(t) = [e_-(t), e_+(t)]$ с концевыми точками $e_\mp(t) = (\mp\sqrt{1-t^2}, t)$. Спроектируем отрезок $E(t) = [e_-(t), e_+(t)]$, на прямую $\ell(z)$; проекцией будет являться невырожденный отрезок $[\zeta_-, \zeta_+]$ с концевыми точками $\zeta_\mp = s_\mp \cdot z$, где

$$s_\mp = (e_\mp(t), z) = \pm\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-\eta^2} + t\eta.$$

Для $t \in (-1, 1)$, $s \in [s_-, s_+]$ отрезки $E(t) = [e_-(t), e_+(t)]$ и $Z(s) = [z_-(s), z_+(s)]$ в плоскости $\Pi_{1,m}$ пересекаются. Следовательно, последняя координата одной из двух точек $z_\mp(s) \in \mathscr{Z}(s)$ больше t, а второй — меньше. Отсюда заключаем, что в сечении $\mathscr{Z}(s)$ найдется точка, у которой последняя координата равна t; эта точка будет принадлежать также сечению $\mathscr{E}(t)$.

Таким образом, для значений параметра $s \in [s_-, s_+]$ сечения $\mathscr{E}(t)$ и $\mathscr{Z}(s)$ сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ пересекаются. А потому на этих сечениях многочлен P_n имеет одно и то же значение. В силу (3.16) и (3.20) отсюда следует, что

$$p_n(s) = F_n(t), \qquad s \in [s_-, s_+].$$

Это соотношение, в частности, означает, что многочлен p_n есть константа на целом отрезке. Поэтому он есть тождественная константа. Однако такой многочлен (при $n \geq 1$) не может быть экстремальным в неравенстве (2.2), поскольку многочлен t^n дает для точной константы $M(n, \phi)$ в неравенстве (2.2) более хорошую оценку снизу. Таким образом, действительно, экстремальный многочлен неравенства (2.2) не может достигать равномерной нормы на интервале $(-1, 1)$. Теорема 2 доказана полностью. $\square$

Авторы благодарят А. Г. Бабенко за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906.
2. **Тайков Л.В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 3. С. 205–211.
3. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 6. С. 116–121.
4. **Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.** Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA, 2002. P. 24–53.
5. **Gorbachev D.V.** An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 2. P. S117–S138.
6. **Горбачев Д.В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Изд-во "Гриф и К", 2005. 152 с.
7. **Никольский С.М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
8. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.
9. **Milovanović G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
10. **Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А.** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.
11. **Иванов В.И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 489–498.
12. **Иванов В.И.** Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 79–110.
13. **Арестов В.В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, вып. 4. С. 539–547.
14. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.

15. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 6. С. 727–731.
16. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
17. **Arestov V.V.** Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials // Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov / eds. G. Nikolov and R. Uluchev. Sofia: Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2012. P. 30–45. (Proc. Int. conf., Sozopol, 2010).
18. **Арестов В.В.** Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 1–16.
19. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
20. **Дейкалова М.В.** О точном неравенстве Джексона — Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 122–134.
21. **Дейкалова М.В., Рогозина В.В.** Неравенство Джексона — Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраических многочленов на евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 162–171.
22. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, Физматлит, 1978. Т. 2. 431 с.
23. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
24. **Rahman Q.I., Schmeisser G.** Analytic theory of polynomials. Oxford: Oxford University Press, 2002. 742 p.
25. **Бернштейн С.Н.** Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд. АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций. 581 с.
26. **Даугавет И.К, Рафальсон С.З.** Некоторые неравенства типа Маркова — Никольского для алгебраических многочленов // Вест. Ленингр. ун-та. 1972. № 1. С. 15–25.
27. **Конягин С.В.** Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1116–1118.
28. **Глазырина П.Ю.** Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 59–65.
29. **Глазырина П.Ю.** Неравенство Маркова — Никольского для пространств L_q, L_0 на отрезке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 60–71.
30. **Глазырина П.Ю.** Точное неравенство Маркова — Никольского для алгебраических многочленов в пространствах L_q и L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 3–22.
31. **Симонов И.Е.** Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_p, L_1 на отрезке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 282–290.
32. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.

Поступила 07.11.2012

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Vitalii.Arestov@usu.ru

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Marina.Deikalova@usu.ru

УДК 519.653.4

ДВОЙСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Н. Н. Астафьев

Вводится понятие двойственной системы однородных линейных алгебраических уравнений. Предлагается модификация метода исключений Гаусса для одновременного решения прямой и двойственной систем. Обосновывается алгоритм решения однородной системы линейных уравнений, использующий технику двойственного представления полиэдрального конуса и потому являющийся двойственным к известному методу Гаусса — Жордана.

Ключевые слова: двойственные системы, линейные уравнения, метод исключения Гаусса, двойственный метод, полиэдральный конус.

N. N. Astaf'ev. Dual systems of homogeneous linear equations.

The notion of dual system of homogeneous linear algebraic equations is introduced. A modification of the Gaussian elimination method for the simultaneous solution of primal and dual systems is proposed. An algorithm for solving a homogeneous system of linear equations is validated. The algorithm is based on the technique of the dual representation of the polyhedral cone and, thus, is dual to the known Gauss–Jordan method.

Keywords: dual systems, linear algebraic equations, Gaussian elimination method, dual method, polyhedral cone.

Введение

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) являются основой теории линейной оптимизации [1–6]. Основным методом исследования и решения СЛАУ является метод исключения неизвестных (метод Гаусса). Метод состоит из прямого и обратного хода и позволяет представить матрицу системы в виде произведения нижнетреугольной (левой треугольной) и верхнетреугольной матриц [7–10]. В [7] метод исключения изложен наиболее полно, включая случай СЛАУ с неполным рангом.

В теории линейных неравенств и линейной оптимизации исключительное значение имеет аппарат двойственности, составляющий теоретическую основу методов как математического, так и содержательного анализа линейных моделей. И. И. Еремин развил фундаментальный аппарат двойственности для линейных моделей с противоречивыми ограничениями и основал научную школу несобственных задач математического программирования [5; 6]. В данной работе аппарат двойственности распространяется на системы линейных уравнений. В разд. 1 обсуждается правомерность рассмотрения двойственной пары задач и приводится метод одновременного решения задач этой пары в явном виде.

В разд. 2 предлагается метод решения двойственной задачи СЛАУ в терминах свойств многогранных выпуклых конусов, заданных системой неравенств. Метод формулируется как двойственный к методу полного исключения Жордана — Гаусса [11].

Этот метод конструктивно сводит исходную СЛАУ к равносильной СЛАУ разрешенного вида с двумя группами переменных, из которых одна группа (базисные переменные) выражается через другую (свободные переменные). Эта разрешенная система называется *таккеровской* [12, с. 27], для нее естественным образом решается пара актуальных взаимно сопряженных задач теории линейных неравенств, первая из которых связана с поиском решения системы уравнений, вторая — проверкой допустимости заданного вектора.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00210) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

1. Метод Жордана — Гаусса одновременного решения двойственных систем уравнений с использованием ненулевых ведущих элементов

Воспользуемся традиционным для линейной оптимизации приемом сведения системы неоднородных ограничений к подходящей системе однородных. Запишем СЛАУ в виде $Ax = b$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ — вектор-столбцы из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ — матрица. Тогда неоднородную СЛАУ $Ax = b$ можно свести к однородной на основе очевидного утверждения.

Утверждение 1. *Система $Ax = b$ несовместна тогда и только тогда, когда для любого решения $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})^T$ однородной системы $Ax - bx_{n+1} = 0$ переменная x_{n+1} имеет тривиальное значение $x_{n+1} = 0$.*

Утверждение 1 позволяет рассматривать только однородные системы $Ax = 0$, включая случай, при котором часть переменных может принимать только тривиальные значения.

Для формирования двойственной системы к системе $Ax = 0$ применим аппарат двойственности теории систем неравенств.

1. В соответствии с [1] выпишем две двойственные системы:

$$C_1\colon\ (A;-A)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0,\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \geq 0; \qquad C_1^*\colon\ u\,(A;-A) \geq 0.$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, система C_1 эквивалентна системе $Ax = 0$, где $x = y - z$, а система C_1^* эквивалентна системе $uA = 0$.

2. Воспользовавшись тождественной разрешимостью системы $A(x - x) = 0$, сопоставим системе линейных соотношений

$$C_2\colon\ (A;-A)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad z = y > 0$$

двойственную систему неравенств [3, с. 147]

$$C_2^*\colon\ u(A;-A) \geq 0,$$

эквивалентную системе $uA = 0$.

Описанные способы формирования двойственных систем позволяют перейти к рассмотрению в общем случае следующей пары двойственных однородных СЛАУ:

$$C\colon\ Ax = 0,\ x \in \mathbb{R}^n; \qquad C^*\colon\ uA = 0,\ u \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Существование нетривиального решения только для системы $Ax = 0$ исследовано подробно в [13]. Системы C и C^* можно представить в векторной форме, как $(a_{i\cdot}, x) = 0$ ($i \in \overline{1,m}$) и $(u, a_{\cdot j}) = 0$ ($j \in \overline{1,n}$) или $\sum_{j=1}^{n} a_{\cdot j}x_j = 0$ и $\sum_{i=1}^{m} u_i a_{i\cdot} = 0$, где $a_{i\cdot}$ — i-я строка и $a_{\cdot j}$ — j-й столбец матрицы A.

Обозначим упорядоченную пару исходной и двойственной задач через $(C;C^*)$, а упорядоченную пару двойственной задачи и исходной — через $(C^*;C)$. Для каждой пары систем $(C;C^*)$ и $(C^*;C)$ рассмотрим по паре двойственных задач $(L(C);\ L^*(C^*))$ и $(L(C^*);L^*(C))$.

В матрице A выберем элемент $a_{kl} \neq 0$.

Для первой пары $(C;C^*)$ сформулируем действия задач $(L(C);L^*(C^*))$.

З а д а ч а $L(C)$: в исходной системе C исключить переменную x_l из всех уравнений, кроме уравнения с номером k.

З а д а ч а $L^*(C^*)$: в двойственной системе C^* найти обратимую матрицу $B^1_{m\times m}$ такую, чтобы замена $u = zB^1$ привела к системе $zB^1A = 0$, в которой l-е уравнение примет вид $z_k = 0$.

Далее сформулируем действия задач $(L(C^*); L^*(C))$ для второй пары $(C^*; C)$, учитывая условие $(C^*)^* = C$.

З а д а ч а $L(C^*)$: в исходной системе C^* исключить переменную u_k из всех уравнений, кроме уравнения с номером l.

З а д а ч а $L^*(C)$: в двойственной системе C найти обратимую матрицу D^1 такую, чтобы замена $x = D^1 y$ привела к системе $AD^1 y = 0$, в которой k-е уравнение примет вид $y_l = 0$.

Соответствующие матрицы B^1 и D^1, задающие шаг полного исключения переменных x_l в задаче $L(C)$ и u_k в задаче $L(C^*)$ при $a_{kl} \neq 0$, имеют вид:

$$B^1 = \frac{1}{a_{kl}} \begin{pmatrix} a_{kl} & 0 & \dots & -a_{1l} & \dots & 0 \\ 0 & a_{kl} & \dots & -a_{2l} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_{kk} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{ml} & \dots & a_{kl} \end{pmatrix}_{m\times m}, \qquad D^1 = \frac{1}{a_{kl}} \begin{pmatrix} a_{kl} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{kl} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \dots & 1_{ll} & \dots & -a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{kl} \end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{2}$$

причем эти же матрицы решают задачи $L^*(C^*)$ и $L^*(C)$, соответственно. Матрицы B^1 и D^1 определяются однозначно, и, очевидно, они обратимы.

Для матрицы A рассмотрим результат одновременного применения метода Жордана — Гаусса, т. е. матрицу $A^1 = B^1 A D^1$ и соответствующие двойственные системы $A^1 y = 0$ и $zA^1 = 0$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. 1. *Вектор x является решением системы $Ax = 0$ тогда и только тогда, когда $x = D^1 y$, где y — решение системы $A^1 y = 0$.*
2. *Вектор u является решением системы $uA = 0$ тогда и только тогда, когда $u = zB^1$, где z — решение системы $zA^1 = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. *Необходимость.* Пусть x — решение системы $Ax = 0$. Тогда x является решением системы $B^1 Ax = 0$, т. е. и решением системы $(B^1 A A^1)(A^1)^{-1} x = 0$. Следовательно, $y = (A^1)^{-1} x$ является решением системы $A^1 y = 0$.

Достаточность. Пусть y — решение системы $A^1 y = 0$. Тогда $x = A^1 y$ — решение системы $B^1 Ax = 0$. Поскольку B^1 — обратимая матрица, то x является решением системы $Ax = 0$.

2. Доказывается по аналогии с п. 1.

Утверждение доказано.

Предположим, что $r \geq 1$ — ранг матрицы A. В этом случае можно осуществить ровно r шагов метода Жордана—Гаусса одновременного исключения переменных. В итоге получим матрицу $A^0 = B^r \dots B^1 A\, D^1 \dots D^r$. Обозначив $B = B^r \dots B^1$, $D = D^1 \dots D^r$, получим $A^0 = BAD$. Для простоты записи предположим, что ведущие элементы матрицы будем выбирать по диагонали. Тогда в результате преобразований матрица A примет вид $A^0 = \begin{pmatrix} E_r \mid 0 \\ \hline 0 \mid 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$, где E_r — единичная матрица размерности r. Матрица A^0 будет являться [14, с. 199] базовой эквивалентной матрицей для A. Справедливы следствия.

Следствие 1. 1. *Так как множество решений системы $A^0 y = 0$ имеет вид $y^0 = (0_1, \dots, 0_r, y_{r+1}, \dots, y_n)^T$, где $y_{r+1}, \dots, y_n$ — произвольные значения, то $x = Dy^0$ — множество решений системы $Ax = 0$.*
2. *Так как множество решений системы $zA^0 = 0$ имеет вид $z^0 = (0_1, \dots, 0_r, z_{r+1}, \dots, z_m)$, где $z_{r+1}, \dots, z_m$ — произвольные значения, то $u = z^0 B$ — множество решений системы $uA = 0$.*

Следствие 2. *Для любого решения системы $Ax = 0$ переменная x_s принимает только тривиальное значение $x_s = 0$ тогда и только тогда, когда столбец $a_{\cdot s}$ входит в любой базис и в системе разрешенного вида $BAx = 0$ s-е уравнение имеет вид $x_s = 0 \cdot x_{r+1} + \ldots + 0 \cdot x_n$, а в системе $x = Dy$ s-е уравнение имеет вид $x_s = d_{s1} \cdot 0 + \ldots + d_{sr} \cdot 0 + 0 \cdot y_{r+1} + \ldots + 0 \cdot y_n$.*

Аналогичным свойством обладает решение системы $uA = 0$.

2. Двойственный подход к методу Жордана — Гаусса на основе теории линейных неравенств

В данном разделе для решения системы $Ax = 0$ будет применен подход из разд. 1 (задача $L^*(C)$): решение системы $Ax = 0$ сводилось к нахождению обратимой матрицы D, для которой система $ADy = 0$ имела бы очевидное решение $y^0 = (0_1, \dots, 0_r, y_{r+1}, \dots, y_n)^T$, где r — ранг матрицы A, $y_{r+1}, \dots, y_n$ — произвольные значения. При этом будем использовать результаты из теории линейных неравенств.

Приведем очевидную интерпретацию условия линейной независимости векторов в терминах свойств линейных неравенств. Обозначим через P некоторый ортант из $\mathbb{R}^n$, соответствующую ему систему неравенств $Ax \underset{P}{\leq} 0$ запишем в виде $Ax \in P$.

Утверждение 3. *Система строк $\{a_{i\cdot}\}$ матрицы A линейно независима тогда и только тогда, когда система строгих неравенств $Ax \in \mathrm{int}P$ совместна для любого ортанта $P \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $r = m$. Тогда система $Ax = b$, где $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, разрешима для произвольных $b_i \neq 0$, поэтому система $Ax \in \mathrm{int}P$ совместна для любого ортанта $P \in \mathbb{R}^m$.

Достаточность. Покажем, что если $r < m$, то существует ортант $\bar{P} \in \mathbb{R}^m$, для которого система $Ax \in \mathrm{int}\bar{P}$ несовместна. Действительно, в этом случае существует вектор $\bar{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m)^T$, для которого система $Ax = \bar{b}$ совместна только при некотором $\bar{b}_k = 0$, поэтому для соответствующего ортанта $\bar{P}$ система $Ax \in \mathrm{int}\bar{P}$ несовместна.

Утверждение доказано.

Перейдем к основной задаче $L^*(C)$ для системы C (см. (1)). Решение задачи приведем в соответствии со следующими шагами. Предположим, что в матрице A элемент $a_{11} \neq 0$.

Шаг 1. Построим матрицу D^1 такую, чтобы она была обратима и первое уравнение в системе $AD^1y = 0$ приняло вид $y_1 = 0$, т. е. первой строкой матрицы AD^1 должна стать строка $a^1_{1\cdot} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Для этого рассмотрим уравнение $(a_{1\cdot}, x) = 0$, выберем произвольно $(n-1)$ линейно независимое решение и обозначим его через $d^1_{\cdot 2}, \dots, d^1_{\cdot n}$. В качестве $d^1_{\cdot 1} \in \mathbb{R}^n$ возьмем решение уравнения $(a_{1\cdot}, x) = 1$. Составим матрицу $D^1 = (d^1_{\cdot 1}, \dots, d^1_{\cdot n})$ из столбцов $d^1_{\cdot j}$, которая обратима в силу способа выбора столбцов. Следовательно, матрица $AD^1 = (a^1_{ij})_{n\times n}$, где $a^1_{1\cdot} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет сформулированной задаче $L^*(C)$. В частности, матрицу D^1 можно построить по формуле из (2) при $k = l = 1$.

Составим обратимую матрицу B^1 равносильного преобразования системы C и для нее определим матрицу $A^1 = B^1AD^1$:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a^1_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^1_{m1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m}, \qquad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{m2} & \dots & a^1_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Шаг 2. Предположим, что $a^1_{22} \neq 0$, т. е. первые две строки $a^1_{1\cdot}$ и $a^1_{2\cdot}$ матрицы A^1 линейно независимы. Ниже будут использованы понятия d- и $(d+1)$-мерной граней, с помощью которых представляются полиэдральные конусы решений однородных систем линейных неравенств [2].

Найдем обратимую матрицу D^2. Для этого построим систему строгих неравенств из первых двух строк матрицы A^1:

$$\begin{cases} y_1 > 0, \\ (a^1_{2\cdot}, y) > 0, \end{cases} \tag{3}$$

которая совместна в силу линейной независимости первых двух строк матрицы A^1. Минимальная $(n-2)$-грань этой системы задается системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ (a^1_{2\cdot}, y) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Выберем $(n-2)$ линейно независимых решения $d^2_{\cdot 3}, \ldots, d^2_{\cdot n}$ этой системы. Для системы (3) рассмотрим две $(n-1)$-грани:

$$\begin{cases} y_1 > 0, \\ (a^1_{2\cdot}, y) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0, \\ (a^1_{2\cdot}, y) > 0 \end{cases}$$

с решениями $d^2_{\cdot 1} = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ и $d^2_{\cdot 2} = (0, (a^1_{22})^{-1}, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, соответственно.

Составим матрицу из полученных столбцов $D^2 = (d^2_{\cdot 1}, \ldots, d^2_{\cdot n})$, которая обратима в силу линейной независимости столбцов. В итоге на втором шаге мы получим матрицу $B^1AD^1D^2$, для которой по аналогии с B^1 составим матрицу B^2. Следовательно, матрица $A^2 = B^2B^1AD^1D^2$ примет вид:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a^2_{33} & \ldots & a^2_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^2_{m3} & \ldots & a^2_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Ш а г 3. Предположим, что в матрице A^2 первые три строки линейно независимы, поэтому совместна система строгих неравенств, аналогичная системе (3):

$$\begin{cases} y_1 > 0, \\ y_2 > 0, \\ (a^2_{2\cdot}, y) > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Минимальная $(n-3)$-грань этой системы аналогично (4) задается системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 0, \\ (a^2_{3\cdot}, y) = 0. \end{cases}$$

Выберем для этой системы $(n-3)$ линейно независимых решения $d^3_{\cdot 4}, \ldots, d^3_{\cdot n}$, для системы (5) рассмотрим три $(n-2)$-грани:

$$\begin{cases} y_1 > 0, \\ y_2 = 0, \\ (a^2_{3\cdot}, y) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 > 0, \\ (a^2_{3\cdot}, y) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 0, \\ (a^2_{3\cdot}, y) > 0 \end{cases}$$

с решениями $d^3_{\cdot 1} = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, $d^3_{\cdot 2} = (0, 1, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, $d^3_{\cdot 3} = (0, 0, (a^2_{33})^{-1}, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, соответственно.

Составим обратимую матрицу из столбцов $d^3_{\cdot 1}, d^3_{\cdot 2}, \ldots, d^3_{\cdot n}$ и вычислим соответствующую матрицу $A^3 = B^3B^2B^1AD^1D^2D^3$, где B^3 составляется аналогично B^2 и B^1. Если r — ранг матрицы A, то таких шагов можно осуществить ровно r и получить матрицу вида $A^0 = B^r \ldots B^1AD^1 \ldots D^r = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{m \times n}$, при этом выбор $d^i_{\cdot j}$ неоднозначен при $r < \min\{m, n\}$.

Следствие 3. *Если $m = n = r$, то $A^0 = E_n$, $A^{-1} = DB$, что означает, что система*

$$\begin{cases} x = Dy, \\ A^0y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = y = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о почти очевидно: из равенства $BAD = E_n$ имеем $AD = B^{-1}E_n$. Отсюда следует $ADB = E_n$, тогда $A^{-1} = DB$.

Следствие 4. *Если $m = n = r$, то 0-грань системы неравенств $Ax \geq 0$ совпадет с началом координат, 1-грани совпадают с ребрами полиэдрального конуса решений системы $Ax \geq 0$* [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, минимальная n-грань системы $Ax \geq 0$ совпадает с единственным решением $x = 0$ системы $Ax = 0$, $(n-1)$-грани конуса задаются соотношениями $\Gamma_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a_{i\cdot}, x) = 0,\ (a_{k\cdot}, x) = 1\ (i \in \overline{1,m},\ i \neq k)\}$, $k \in \overline{1,m}$. Обозначим через $d^0_{\cdot k}$ $(k \in \overline{1,m})$ единственное решение системы, определяющей грань Γ_k. Составленная из векторов $d^0_{\cdot k}$ обратимая матрица $D^0 = (d^0_{1\cdot}, \ldots, d^0_{m\cdot})$ является обратной к матрице A, т. е. $D^0 = A^{-1}$.

Следствие доказано.

З а м е ч а н и е. Таким образом, изложенная процедура построения матриц D^i является неоднозначной в силу произвольности выбора одного из решений $d^i_{\cdot j}$ для d- и $(d+1)$-граней на шаге $i < r < \min\{m, n\}$ в отличие от метода Жордана — Гаусса, в котором процедура исключения неизвестных однозначно определяет матрицу равносильных преобразований системы $Ax = 0$.

3. Заключение

В работе применен аппарат двойственности для определения двойственных однородных СЛАУ. Для метода исключения неизвестных системы $Ax = 0$ предложен двойственный метод, основанный на переходе к системе с матрицей AD, где D — обратимая матрица, для вычисления которой используется процедура построения многогранных выпуклых конусов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Таккер А.У.** Двойственные системы однородных линейных соотношений // Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. ст. / ред. Г. Куна, А. Таккера М.: ИЛ, 1959. С. 127–141.
2. **Голдман А.Дж., Таккер А.У.** Многогранные выпуклые конусы // Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. ст. / ред. Г. Куна, А. Таккера М.: ИЛ, 1959. С. 142–161.
3. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 468 с.
4. **Еремин И.И.** Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Изд. центр “Академия”, 2007. 249 с.
5. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач математического программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. 43 с.
6. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
7. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 580 с.
8. **Бахвалов Н.С.** Численные методы, I. М.: Наука, 1973. 632 с.
9. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применение. М.: Мир, 1980. 456 с.
10. **Муртаф Б.** Современное линейное программирование. М.: Мир, 1976. 224 с.
11. **Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.** Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967. 490 с.
12. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
13. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.
14. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Астафьев Николай Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: astnn@imm.uran.ru

Поступила 29.01.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.587+517.518.865+517.15

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НУЛЕЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПОЛУЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ[1]

В. М. Бадков

Исследуются связи с системой многочленов, ортогональной на единичной окружности по мере $d\sigma(\tau)$, систем тригонометрических ортогональных полиномов полуцелых порядков, получаемых при ортогонализации методом Шмидта последовательностей $\cos(1/2)\tau, \sin(1/2)\tau, \cos(3/2)\tau, \sin(3/2)\tau, \cos(5/2)\tau, \sin(5/2)\tau, \ldots$ и $\sin(1/2)\tau, \cos(1/2)\tau, \sin(3/2)\tau, \cos(3/2)\tau, \sin(5/2)\tau, \cos(5/2)\tau, \ldots$ по мере $d\sigma(\tau)$ на $[0, 2\pi]$. Получена асимптотическая формула для нулей тригонометрического полинома полуцелого порядка, ортогонального с четным весом, удовлетворяющим условию Бернштейна — Сегё.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, ортогональность, асимптотика нулей.

V. M. Badkov. Asymptotic properties of zeros of orthogonal trigonometric polynomials of half-integer orders.

For systems of orthogonal trigonometric polynomials of half-integer orders obtained by the Schmidt orthogonalization of the sequences $\cos(1/2)\tau, \sin(1/2)\tau, \cos(3/2)\tau, \sin(3/2)\tau, \cos(5/2)\tau, \sin(5/2)\tau, \ldots$ and $\sin(1/2)\tau, \cos(1/2)\tau, \sin(3/2)\tau, \cos(3/2)\tau, \sin(5/2)\tau, \cos(5/2)\tau, \ldots$ in the measure $d\sigma(\tau)$ on $[0, 2\pi]$, we study the connections with the system of polynomials that is orthogonal on the unit circle in the same measure. An asymptotic formula is obtained for zeros of a trigonometric polynomial of half-integer order that is orthogonal with an even weight satisfying the Bernstein — Szegő condition.

Keywords: trigonometric polynomials, orthogonality, asymptotics of zeros.

Введение

Всюду ниже $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \ldots\}$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$. Через $L^r[a, b]$ обозначается множество измеримых (по Лебегу) на отрезке $[a, b]$ комплекснозначных функций F, для которых конечна норма $\|F\|_{L^r[a,b]}$, понимаемая при $1 \le r < \infty$ как $\Big[\displaystyle\int_a^b |F(t)|^r\,dt\Big]^{1/r}$, а при $r = \infty$ как существенная верхняя грань модуля $F(t)$ на $[a, b]$. Для 2π-периодических функций F полагаем $L^r := L^r[0, 2\pi]$, $\|F\|_r := (2\pi)^{-1/r}\|F\|_{L^r[0,2\pi]}$.

Неотрицательную ненулевую функцию $p \in L^1[a, b]$ называем *весом* на $[a, b]$. Если $1 \le r < \infty$, $p(t)$ — вес на $[a, b]$, а $\varphi(\tau)$ — 2π-периодический вес, то $f \in L^r_p[a, b]$ означает, что $fp^{\frac{1}{r}} \in L^r[a, b]$, а $F \in L^r_\varphi$ означает, что $F\varphi^{\frac{1}{r}} \in L^r$.

Модулем непрерывности называется неубывающая, непрерывная, полуаддитивная на $[0, \infty)$ функция $\omega(\delta)$, для которой $\omega(0) = 0$. Если при этом $2\omega((a+b)/2) \ge \omega(a)+\omega(b)$ $(\forall a, b \ge 0)$, то ω называется *вогнутым модулем непрерывности*. Для модуля непрерывности в L^r функции F используется обозначение $\omega(F; \delta)_r := \sup_{|\lambda|\le\delta} \|F(\lambda + \cdot) - F(\cdot)\|_r$. Обычный модуль непрерывности функции $F(\tau)$ на отрезке $[a, b]$ обозначим через $\omega(F; \delta)_{[a,b]}$. Через $\omega(F; \delta)$ обозначим обычный модуль непрерывности 2π-периодической функции $F(\tau)$.

Обозначим через $T_{n+1/2}$ множество вещественных (а через $\mathcal{T}_{n+1/2}$ — комплексных) тригонометрических полиномов полуцелых порядков [1] не выше $n + 1/2$ $(n \in \mathbb{N})$.

Пусть $\sigma(\tau)$ — заданная на отрезке $[0, 2\pi]$ неубывающая ограниченная функция с бесконечным множеством точек роста. Рассмотрим систему алгебраических многочленов

$$\varphi_{\sigma,n}(z) := \kappa_{\sigma,n} z^n + \cdots + \varphi_{\sigma,n}(0) \qquad (\kappa_{\sigma,n} > 0, n \in \mathbb{Z}_+),$$

[1]Работа выполнена в рамках программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

ортонормированную по мере $d\sigma(\tau)$ на единичной окружности $\Gamma_1 := \{z : |z| = 1\}$ [2;3], и систему $\{t_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрических полиномов полуцелых порядков, полученную при ортогонализации методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi, \pi]$ последовательности

$$\cos(\tau/2),\ \sin(\tau/2),\ \cos(3\tau/2),\ \sin(3\tau/2), \ldots, \cos[(n+1/2)\tau],\ \sin[(n+1/2)\tau], \ldots \tag{0.1}$$

Пусть $h_l(\tau)$ — строго положительный тригонометрический полином порядка $l \in \mathbb{Z}_+$, $t_n^{a,b}(\tau)$ — тригонометрический полином полуцелого порядка $n + 1/2$ $(n \geq l)$ с фиксированной суммой старших членов $a\cos[(n+1/2)\tau] + b\sin[(n+1/2)\tau]$ $(|a| + |b| > 0)$, ортогональный на отрезке $[-\pi, \pi]$ с весом $1/h_l(\tau)$. В [4] установлена связь полинома $t_n^{a,b}(\tau)$ с многочленами, ортогональными на Γ_1 с тем же весом. В настоящем статье устанавливается следующая

Теорема 1. *При любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы формулы*

$$t_{\sigma,2n}(\tau) = (2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}]^{-1/2}\Re[e^{-i(n-1/2)\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})], \tag{0.2}$$

$$t_{\sigma,2n+1}(\tau) = c_(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}]^{-1/2}\Im[e^{-i(n+1/2)\tau}\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})]. \tag{0.3}$$

При доказательстве этой теоремы используются методы работы [5], в которой изучалась связь обычных тригонометрических ортогональных полиномов с многочленами, ортогональными на окружности.

Пользуясь формулами (0.2), (0.3) и полученной в [6] формулой приращения аргумента многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$ в точке $e^{i\tau}$, мы доказываем, что все нули полинома $t_{\sigma,n}(\tau)$ $(n \in \mathbb{N})$ являются вещественными и простыми. При этом доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau)d\tau$, $\varphi(-\tau) = \varphi(\tau)$, где вес $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию Бернштейна — Сегё*

$$0 < \varphi(\tau) \in C_{2\pi}, \qquad \omega(\varphi; \delta) = O(|\ln\delta|^{-1-\mu}) \qquad (\mu > 0,\ \delta \to +0). \tag{0.4}$$

Тогда $t_{\sigma,n}(-\tau) = (-1)^n t_{\sigma,n}(\tau)$ и множество положительных нулей полинома $t_{\sigma,n}(\tau)$ $(n \in \mathbb{N})$ можно занумеровать в строго возрастающую последовательность $\{\theta_{\sigma,n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы равномерно по $k \in \mathbb{N}$ выполнялись асимптотические равенства

$$\theta_{\sigma,2n,k} = \pi(2k-1)(2n+1)^{-1}[1 + O(\ln^{-\mu})], \tag{0.5}$$

$$\theta_{\sigma,2n+1,k} = \pi(2k)(2n+1)^{-1}[1 + O(\ln^{-\mu})]. \tag{0.6}$$

Заметим, что из формул (0.5) – (0.6) следует, что нули полиномов $t_{\sigma,2n}(\tau)$ и $t_{\sigma,2n+1}(\tau)$ асимптотически совпадают с нулями функций $\cos[(n+1/2)\tau]$ и $\sin[(n+1/2)\tau]$.

1. Выражение комплексных тригонометрических ортогональных полиномов через многочлены, ортогональные на окружности

В [5] для системы полиномов $\{R_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, полученной при ортогонализации последовательности $1,\ z,\ z^{-1},\ z^2,\ z^{-2}, \ldots$ методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на Γ_1 установлено, что

$$R_{\sigma,2n-1}(z) = z^{1-n}\varphi_{\sigma,2n-1}(z) \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.1}$$

$$R_{\sigma,2n}(z) = z^{-n}\varphi^*_{\sigma,2n}(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{1.2}$$

где $\varphi^*_{\sigma,n}(z) := z^n\overline{\varphi_{\sigma,n}(1/\overline{z})}$. Более подробную информацию о системе $\{R_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ см. в [6].

Пусть $\{Q_{\sigma,n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — система полиномов, полученная при ортогонализации последовательности $1,\ z^{-1},\ z,\ z^{-2}, \ldots\ z^2, \ldots$ методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на Γ_1. Установим для $Q_{\sigma,2n-1}(z)$ и $Q_{\sigma,2n}(z)$ формулы, подобные (1.1) и (1.2). Для этого нам нужна следующая лемма, названная в [7, гл. 1] первым критерием ортогональности (как и ее частный случай в [8]).

Лемма 1 [7, гл. 1]. *Для того чтобы (при $n \geq 2$) полином*

$$G_n = c_1 x_1 + \cdots + c_{n-1} x_{n-1} + c_n x_n \tag{1.3}$$

совпадал с элементом f_n ортонормированной системы $f_1, f_2, \ldots$, полученной при ортогонализации методом Шмидта линейно независимой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ элементов унитарного (либо евклидова) пространства, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) $G_n \perp x_1, \ldots, x_{n-1}$ *(или, что то же самое, полином G_n ортогонален всем полиномам порядка не выше $n-1$),* 2) $(G_n, G_n) = 1$ *и* 3) *в* (1.3) $c_n > 0$.

Предложение 1. *Справедливы формулы*

$$Q_{\sigma,2n}(z) = z^{-n} \varphi_{\sigma,2n}(z) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{1.4}$$

$$Q_{\sigma,2n-1}(z) = z^{-n} \varphi^*_{\sigma,2n-1}(z) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.5}$$

Доказательство. Система $\{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})\}_{n=0}^{\infty}$ получается при ортогонализации методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi, \pi]$ последовательности гармоник

$$1,\ e^{i\tau},\ e^{-i\tau},\ e^{i2\tau},\ e^{-i2\tau}, \ldots, e^{in\tau},\ e^{-in\tau}, \ldots . \tag{1.6}$$

Полином $R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ является линейной комбинацией гармоник $e^{ik\tau}$ $(1-n \leq k \leq n)$ с положительным коэффициентом при $e^{in\tau}$. При этом $R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ ортогонален гармоникам $e^{ik\tau}$ $(1-n \leq k \leq n-1)$. Поэтому $\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}$ есть линейная комбинация гармоник $e^{ik\tau}$ $(-n \leq k \leq n-1)$ с положительным коэффициентом при старшей в линейной комбинации гармонике $e^{-in\tau}$ в случае ортогонализуемой методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi, \pi]$ последовательности

$$1,\ e^{-i\tau},\ e^{i\tau},\ e^{-i2\tau},\ e^{i2\tau}, \ldots, e^{-in\tau},\ e^{in\tau}, \ldots , \tag{1.7}$$

комплексно сопряженной с (1.6). При этом полином $\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}$ ортогонален гармоникам $e^{ik\tau}$ $(1-n \leq k \leq n-1)$, предшествующим $e^{-in\tau}$. В силу леммы 1 полином $Q_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ совпадает с $\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}$, а следовательно и с полиномом $e^{i(n-1)\tau}\overline{\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}$, который можно представить в виде $e^{-in\tau}\varphi^*_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$. Тем самым формула (1.5) доказана.

Аналогично, пользуясь ортонормальностью по мере $d\sigma(\tau)$ на $[0, 2\pi]$ полинома $R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$, замечаем, что $\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}$ есть линейная комбинация гармоник $e^{ik\tau}$ $(-n \leq k \leq n)$ с положительным коэффициентом при старшей (в смысле упорядочения (1.7)) гармонике $e^{in\tau}$. При этом полином $\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}$ ортогонален всем прешествующим $e^{in\tau}$ гармоникам в последовательности (1.7). Согласно лемме 1 $Q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} = e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$. Формула (1.4) доказана. □

При делении на $e^{i\tau/2}$ элементов последовательности (1.6) получаем последовательность

$$e^{-i\tau/2},\ e^{i\tau/2},\ e^{-i3\tau/2},\ e^{i3\tau/2}, \ldots, e^{-i(n+1/2)\tau},\ e^{i(n+1/2)\tau}, \ldots . \tag{1.8}$$

Ортогонализуя (1.8) методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi, \pi]$, получаем систему $\{r_{\sigma,n}(e^{i\tau})\}_{n=0}^{\infty}$ комплексных тригонометрических полиномов полуцелых порядков.

Предложение 2. *Справедлива формула*

$$r_{\sigma,n}(e^{i\tau}) = e^{-i\tau/2} R_{\sigma,n}(e^{i\tau}) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{1.9}$$

Доказательство. Из ортонормальности системы $\{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})\}_{n=0}^{\infty}$ следует ортонормальность системы $\{e^{-i\tau/2}R_{\sigma,n}(e^{i\tau})\}_{n=0}^{\infty}$. Пользуясь разложением $\varphi_{\sigma,n}(z) = c_{n,n}z^n + \cdots + c_{n,0}$ и формулой (1.2), замечаем, что

$$e^{-i\tau/2} R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \sum_{k=0}^{2n} \overline{c_{2n,k}} e^{i(n-k-1/2)} = \kappa_{\sigma,2n} e^{-i(n+1/2)\tau} + \sum_{\nu=-n}^{n-1} \overline{c_{2n,n-\nu-1}} e^{i(\nu+1/2)\tau}. \tag{1.10}$$

Докажем справедливость равенств

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tau/2}R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})e^{-i(\nu+1/2)\tau}\,d\sigma(\tau)=0 \qquad (-n\le\nu\le n-1). \tag{1.11}$$

Для этого заметим, что в силу (1.2) $e^{-i\tau/2}R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})e^{-i(\nu+1/2)\tau}=\overline{\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}e^{i(n-\nu-1)\tau}$ условие $-n\le\nu\le n-1$ эквивалентно условию $0\le n-\nu-1\le 2n-1$, а полином $\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ ортогонален по мере $d\sigma(\tau)$ на Γ_1 гармоникам 1, $e^{i\tau}$ $e^{i2\tau},\dots,$ $e^{i(2n-1)\tau}$.

Полином $r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ является линейной комбинацией гармоник $e^{-i\tau/2}$, $e^{i\tau/2}$, $e^{-i3\tau/2}$, $e^{i3\tau/2},\dots,$ $e^{-i(n+1/2)\tau}$ с положительным старшим коэффициентом (т. е. коэффициентом при $e^{-i(n+1/2)\tau}$). В соответствии с (1.11) полином $e^{-i\tau/2}R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ тоже является линейной комбинацией тех же гармоник со старшим коэффициентом $\kappa_{\sigma,2n}$ (при упорядочении (1.8). Так как $\kappa_{\sigma,2n}>0$, система $\{e^{-i\tau/2}R_{\sigma,n}(e^{i\tau})\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормальна и выполняется условие (1.11), то согласно лемме 1 $e^{-i\tau/2}R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})=r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$. Итак, формула (1.9) доказана для четных значений n.

Пользуясь (1.1), по аналогии с (1.10) получаем при $n\in\mathbb{N}$ соотношение

$$e^{-i\tau/2}R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})=\kappa_{\sigma,2n-1}e^{i(n-1/2)\tau}+\sum_{k=-n}^{n-2}c_{2n-1,n+k}e^{(k+1/2)\tau}. \tag{1.12}$$

Правая часть (1.12) является линейной комбинацией гармоник $e^{-i\tau/2}$, $e^{i\tau/2}$, $e^{-i3\tau/2}$, $e^{i3\tau/2},\dots,$ $e^{-i(n-1/2)\tau}$, $e^{i(n-1/2)\tau}$ с положительным старшим коэффициентом $\kappa_{\sigma,2n-1}$. Левая часть (1.12) ортогональна гармоникам, предшествующим $e^{i(n-1/2)\tau}$ (этот факт доказывается аналогично (1.11) с использованием (1.1) вместо (1.2)). Поэтому $e^{-i\tau/2}R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$ по лемме 1 совпадает с $r_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})$. Итак, формула (1.9) справедлива и для нечетных n. $\square$

Пусть $\{q_{\sigma,n}(e^{i\tau})\}_{n=0}^{\infty}$ — система комплексных тригонометрических полиномов полуцелых порядков, полученная при ортогонализации последовательности

$$e^{i\tau/2},\ e^{-i\tau/2},\ e^{i3\tau/2},\ e^{-i3\tau/2},\dots,e^{i(n+1/2)\tau},\ e^{-i(n+1/2)\tau},\dots, \tag{1.13}$$

комплексно сопряженной с (1.8), методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$.

Предложение 3. *Имеют место соотношения*

$$q_{\sigma,n}(e^{i\tau})=\overline{r_{\sigma,n}(e^{i\tau})}=e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})}=e^{i\tau/2}Q_{\sigma,n}(e^{i\tau}) \qquad (n\in\mathbb{Z}_+). \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.9) и выведенной при доказательстве предложения 1 формулы $Q_{\sigma,n}(e^{i\tau})=\overline{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})}$ следует, что $\overline{r_{\sigma,n}(e^{i\tau})}=e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})}=e^{i\tau/2}Q_{\sigma,n}(e^{i\tau})$. Поэтому для доказательства предложения 3 достаточно проверить, что

$$q_{\sigma,n}(e^{i\tau})=e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})}. \tag{1.15}$$

Рассмотрим комплексно сопряженные с (1.10)–(1.11) равенства. Положив в них $\nu=-\mu-1$, получим

$$e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}=\kappa_{\sigma,2n}e^{i(n+1/2)\tau}+\sum_{\nu=-n}^{n-1}c_{2n,n-\nu-1}e^{-i(\mu+1/2)\tau}, \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}e^{-i(\mu+1/2)\tau}\,d\sigma(\tau)=0 \qquad (-n\le\mu\le n-1). \tag{1.17}$$

Из (1.16) и (1.17) видно, что $e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}$ есть полином по системе (1.13) с положительным старшим коэффициентом $\kappa_{\sigma,2n}$, ортогональный гармоникам, предшествующим $e^{i(n+1/2)\tau}$.

По лемме 1 имеет место равенство $e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} = q_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$, откуда следует справедливость формулы (1.15) для четных n.

Заменяя k на $-\nu-1$ в комплексно сопряженной с (1.12) формуле, получаем, что

$$e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})} = \kappa_{\sigma,2n-1}e^{-i(n-1/2)\tau} + \sum_{\nu=1-n}^{n-1}\overline{c_{2n-1,n-\nu-1}}e^{(\nu+1/2)\tau}. \tag{1.18}$$

Пользуясь формулой (1.1), замечаем, что при $1-n \le \nu \le n-1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}e^{-i(\nu+1/2)\tau}\,d\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}e^{i(n-\nu-1)\tau}\,d\sigma(\tau) = 0, \tag{1.19}$$

поскольку при таких ν выполняются неравенства $0 \le n-\nu-1 \le 2n-2$, а полином $\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ ортогонален по мере $d\sigma(\tau)$ на Γ_1 гармоникам $1,\ e^{i\tau}\ e^{i2\tau},\dots,\ e^{i(2n-1)\tau}$. Из ортонормальности полинома $e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}$ и соотношений (1.18)–(1.19) по лемме 1 следует справедливость равенства $q_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) = e^{i\tau/2}\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})}$, т. е. неравенство (1.15) верно и при нечетных n.

2. Связь вещественных тригонометрических ортогональных полиномов целых порядков с многочленами, ортогональными на окружности

Пусть $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации последовательности

$$1,\ \cos\tau,\ \sin\tau,\ \cos 2\tau,\ \sin 2\tau,\dots$$

методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$. В [5] установлено следующее

Предложение 4 [5, предложение 2.3]. *При всех $\tau\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = a_n R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) + b_n R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{2.1}$$

$$T_{\sigma,2n}(\tau) = c_n R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) + d_n R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{2.2}$$

где

$$a_n = \frac{\kappa_{\sigma,2n} - \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]}}, \qquad b_n = \frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]}}, \tag{2.3}$$

$$c_n = -ib_n, \qquad d_n = i\overline{a_n}. \tag{2.4}$$

Из сформулированного утверждения вытекает доказанное в [5]

Предложение 5 [5, следствие 2.2]. *При всех $\tau\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$*

$$[\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}[2\kappa_{\sigma,2n}]^{-1/2}T_{\sigma,2n-1}(\tau) = \Re R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) = \Re\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})\}, \tag{2.5}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}[2\kappa_{\sigma,2n}]^{-1/2}T_{\sigma,2n}(\tau) = \Im\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} = \Im\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})\}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим систему $\{U_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрических полиномов, полученную при ортогонализации последовательности

$$1,\ \sin\tau,\ \cos\tau,\ \sin 2\tau,\ \cos 2\tau,\dots$$

методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$. В следующем предложении для полиномов $U_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $U_{\sigma,2n}(\tau)$ устанавливаются аналоги формул (2.1)–(2.4).

Предложение 6. *При всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$U_{\sigma,2n-1}(\tau) = a_{n,1}R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) + b_{n,1}R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{2.7}$$

$$U_{\sigma,2n}(\tau) = c_{n,1}R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) + d_{n,1}R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{2.8}$$

в которых

$$a_{n,1} = -i\frac{\kappa_{\sigma,2n} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]}}, \qquad b_{n,1} = i\frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]}}, \tag{2.9}$$

$$c_{n,1} = -ib_{n,1}, \qquad d_{n,1} = -i\overline{a_{n,1}}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Для полиномов $U_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $U_{\sigma,2n}(\tau)$ справедливы представления

$$U_{\sigma,2n-1}(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n}[A_{\nu,1}^{(n)}\sin\nu\tau + B_{\nu,1}^{(n)}\cos\nu\tau], \tag{2.11}$$

$$U_{\sigma,2n}(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n}[C_{\nu,1}^{(n)}\sin\nu\tau + D_{\nu,1}^{(n)}\cos\nu\tau], \tag{2.12}$$

в которых $A_{\nu,1}^{(n)}$, $B_{\nu,1}^{(n)}$, $C_{\nu,1}^{(n)}$ и $D_{\nu,1}^{(n)} \in \mathbb{R}$, причем $A_{n,1}^{(n)} > 0$, $D_{n,1}^{(n)} > 0$, $B_{n,1}^{(n)} = 0$. Поскольку полиномы $U_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $U_{\sigma,2n}(\tau)$ являются линейными комбинациями полиномов $\{R_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{2n}$ и ортогональны по мере $d\sigma(\tau)$ полиномам $\{R_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{2n-2}$, то имеют место равенства (2.7), (2.8) с коэффициентами $a_{n,1}$, $b_{n,1}$, $c_{n,1}$, $d_{n,1} \in \mathbb{C}$. Докажем справедливость равенств (2.9), (2.10).

В силу ортонормальности на $[0, 2\pi]$ по мере $d\sigma(\tau)$ систем $\{R_{\sigma,n}(e^{i\tau})\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{U_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ из формул (2.7), (2.8) вытекают соотношения

$$1 = |a_{n,1}|^2 + |b_{n,1}|^2, \tag{2.13}$$

$$1 = |c_{n,1}|^2 + |d_{n,1}|^2, \tag{2.14}$$

$$0 = a_{n,1}\overline{c_{n,1}} + b_{n,1}\overline{d_{n,1}}. \tag{2.15}$$

Из разложения $\varphi_{\sigma,n}(z) = c_{n,n}z^n + \cdots + c_{n,0}$ и формул (1.1)–(1.2) следует, что

$$R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n-1}e^{in\tau} + t_{n-1,1}(\tau), \qquad R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n}e^{-in\tau} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}e^{in\tau} + t_{n-1,2}(\tau), \tag{2.16}$$

где $t_{n-1,1}(\tau)$ и $t_{n-1,2}(\tau)$ — тригонометрические полиномы порядка не выше $n-1$. Пользуясь (2.7), (2.8), (2.16) и формулами Эйлера, для коэффициентов при $\sin n\tau$ и $\cos n\tau$ в правых частях соотношений (2.11), (2.12) получаем равенства

$$\kappa_{\sigma,2n-1}a_{n,1} - [\kappa_{\sigma,2n} - \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}]b_{n,1} = -iA_{n,1}^{(n)}, \tag{2.17}$$

$$\kappa_{\sigma,2n-1}a_{n,1} + [\kappa_{\sigma,2n} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}]b_{n,1} = 0, \tag{2.18}$$

$$\kappa_{\sigma,2n-1}c_{n,1} + [\kappa_{\sigma,2n} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}]d_{n,1} = D_{n,1}^{(n)}, \tag{2.19}$$

Решая относительно $a_{n,1}$ и $b_{n,1}$ систему уравнений (2.17), (2.18), находим, что

$$b_{n,1} = iA_{n,1}^{(n)}/(2\kappa_{\sigma,2n}), \tag{2.20}$$

$$a_{n,1} = -i[\kappa_{\sigma,2n} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}](2\kappa_{\sigma,2n-1}\kappa_{\sigma,2n})^{-1}A_{n,1}^{(n)}. \tag{2.21}$$

Для вычисления $A_{n,1}^{(n)}$ заменяем в (2.13) величины $a_{n,1}$ и $b_{n,1}$ правыми частями формул (2.20) и (2.21). При этом получаем уравнение

$$\frac{1}{[A_{n,1}^{(n)}]^2} = \frac{[\kappa_{\sigma,2n} + \varphi_{\sigma,2n}(0)][\kappa_{\sigma,2n} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}] + \kappa_{\sigma,2n-1}^2}{4[\kappa_{\sigma,2n-1}\kappa_{\sigma,2n-1}]^2}. \tag{2.22}$$

Так как $\kappa_{\sigma,2n-1}^2 + |\varphi_{\sigma,2n}(0)|^2 = \kappa_{\sigma,2n}^2$ (см. [3, формула (1.5)]), то из (2.22) следует, что

$$A_{n,1}^{(n)} = \kappa_{\sigma,2n-1}(2\kappa_{\sigma,2n})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{-1/2}. \tag{2.23}$$

Из (2.20), (2.21) и (2.23) вытекает справедливость формул (2.9).

В силу (2.9) $a_{n,1} \neq 0$ и $b_{n,1} \neq 0$. Но тогда из (2.14) и (2.15) выводим, что $c_{n,1} \neq 0$ и $d_{n,1} \neq 0$. Поэтому, пользуясь (2.15), (2.9), получаем, что

$$d_{n,1}/c_{n,1} = -\overline{a_{n,1}/b_{n,1}} = [\kappa_{\sigma,2n} + \varphi_{\sigma,2n}(0)]/\kappa_{\sigma,2n-1}. \tag{2.24}$$

Выразим $c_{n,1}$ и $d_{n,1}$ через $D_{n,1}^{(n)}$. Уравнение (2.19) перепишем в виде

$$c_{n,1}\{\kappa_{\sigma,2n-1} + [\kappa_{\sigma,2n} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}](d_{n,1}/c_{n,1})\} = D_{n,1}^{(n)}. \tag{2.25}$$

Из (2.24) и (2.25) следует:

$$D_{n,1}^{(n)} = c_{n,1}[\kappa_{\sigma,2n-1}^2 + |\kappa_{\sigma,2n} + \varphi_{\sigma,2n}(0)|^2](\kappa_{\sigma,2n-1})^{-1} = c_{n,1}[2\kappa_{\sigma,2n}^2 + 2\kappa_{\sigma,2n}\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)](\kappa_{\sigma,2n-1})^{-1};$$

отсюда вытекает, что

$$c_{n,1} = \kappa_{\sigma,2n-1}\{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]\}^{-1}D_{n,1}^{(n)}. \tag{2.26}$$

Из (2.25) и (2.26) находим, что

$$d_{n,1} = [\kappa_{\sigma,2n} + \varphi_{\sigma,2n}(0)]\{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]\}^{-1}D_{n,1}^{(n)}. \tag{2.27}$$

Подставляя в (2.14) вместо $c_{n,1}$ и $d_{n,1}$ правые части (2.26) и (2.27), приходим к уравнению относительно $D_{n,1}^{(n)}$, решая которое получаем, что

$$D_{n,1}^{(n)} = \sqrt{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]}. \tag{2.28}$$

Из (2.26)–(2.28) следует, что

$$c_{n,1} = \frac{\kappa_{\sigma,2n-1}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]}}, \qquad d_{n,1} = \frac{\kappa_{\sigma,2n} + \varphi_{\sigma,2n}(0)}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]}}. \tag{2.29}$$

Из (2.9) и (2.29) выводим (2.10). □

Предложение 7. *При всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$*

$$[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n})^{-1/2}U_{\sigma,2n-1}(\tau) = \Im R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) = \Im[e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})], \tag{2.30}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n})^{-1/2}U_{\sigma,2n}(\tau) = \Re R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \Re[e^{-in\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})]. \tag{2.31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем правые части (2.7), (2.8) с помощью соотношений

$$\kappa_{\sigma,n}\varphi_{\sigma,n+1}(z) = \kappa_{\sigma,n+1} z\varphi_{\sigma,n}(z) + \varphi_{\sigma,n+1}(0)\varphi^*_{\sigma,n}(z), \tag{2.32}$$

$$\kappa_{\sigma,n} z\varphi_{\sigma,n}(z) = \kappa_{\sigma,n+1}\varphi_{\sigma,n+1}(z) - \varphi_{\sigma,n+1}(0)\varphi^*_{\sigma,n+1}(z) \tag{2.33}$$

(см. [9, разд. 2.3]). Из (2.32), (2.33), (1.1) и (1.2) находим, что

$$R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n}\kappa^{-1}_{\sigma,2n-1}\overline{R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})} + \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}\kappa^{-1}_{\sigma,2n-1}R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}), \tag{2.34}$$

$$R_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n}\kappa^{-1}_{\sigma,2n-1}\overline{R_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} - \varphi_{\sigma,2n}(0)\kappa^{-1}_{\sigma,2n-1}R_{\sigma,2n}(e^{i\tau}). \tag{2.35}$$

С помощью (2.34) равенство (2.7) преобразуется в (2.30). Из (2.8) и (2.35) следует (2.31).

Заметим, что подобные (2.30) и (2.31) формулы были получены ранее другим методом в [10] в терминах монических многочленов, ортогональных на Γ_1 по мере $d\sigma(\tau)$.

Утверждение 1. *Имеют место формулы*

$$T_{\sigma,2n-1}(\tau) = \kappa_{\sigma,2n-1}(2\kappa_{\sigma,2n})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{-1/2}\cos n\tau + t_{n-1,1}(\tau), \tag{2.36}$$

$$\begin{gathered} T_{\sigma,2n}(\tau) = \{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]\}^{1/2}\sin n\tau \\ +(2\kappa_{\sigma,2n})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n} - \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{-1/2}\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)\cos n\tau + t_{n-1,2}(\tau), \end{gathered} \tag{2.37}$$

$$U_{\sigma,2n-1}(\tau) = \kappa_{\sigma,2n-1}(2\kappa_{\sigma,2n})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{-1/2}\sin n\tau + t_{n-1,3}(\tau), \tag{2.38}$$

$$\begin{gathered} U_{\sigma,2n}(\tau) = (2\kappa_{\sigma,2n})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{-1/2}\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)\sin n\tau \\ +\{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]\}^{1/2}\cos n\tau + t_{n-1,4}(\tau), \end{gathered} \tag{2.39}$$

где $t_{n-1,\nu}(\tau)$ $(\nu = 1,2,3,4)$ *— тригонометрические полиномы порядка не выше* $n-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (2.36) доказана в [5]. Там же вычислен коэффициент при $\cos n\tau$ в (2.37), а для коэффициента при $\sin n\tau$ определено выражение через величины, которые затем были вычислены, но в выражение подставлены не были. Формула (2.38) совпадает с (2.11). Для получения (2.39) достаточно в (2.12) вычислить $C^{(n)}_{n,1}$. Сравнивая коэффициенты при $\sin n\tau$ в правых частях (2.8) и (2.12), выводим равенство

$$C^{(n)}_{n,1} = i\{c_{n,1}\kappa_{\sigma,2n-1} - d_{n,1}[\kappa_{\sigma,2n} - \overline{\varphi_{\sigma,2n}(0)}]\}. \tag{2.40}$$

Остается подставить в правую часть (2.40) значения $c_{n,1}$ и $d_{n,1}$ из (2.29). □

Следствие 1. *Если* $\Im\varphi_{\sigma,2n}(0) = 0$, *то*

$$U_{\sigma,2n-1}(\tau) = T_{\sigma,2n}(\tau), \qquad U_{\sigma,2n}(\tau) = T_{\sigma,2n-1}(\tau). \tag{2.41}$$

3. Связь вещественных тригонометрических ортогональных полиномов полуцелых порядков с многочленами, ортогональными на окружности

Пусть $\{t_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{u_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — системы тригонометрических полиномов полуцелых порядков, полученные при ортогонализации методом Шмидта по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$ последовательностей (0.1) и

$$\sin(\tau/2),\ \cos(\tau/2),\ \sin(3\tau/2),\ \cos(3\tau/2),\dots,\sin[(n+1/2)\tau],\ \cos[(n+1/2)\tau],\dots$$

соответственно. Установим для этих систем утверждения, аналогичные предложениям 4–7 предыдущего раздела. При этом сохраним схемы доказательств.

Предложение 8. *При всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства*

$$t_{\sigma,2n}(\tau) = a_{n,2} r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + b_{n,2} r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}), \tag{3.1}$$

$$t_{\sigma,2n+1}(\tau) = c_{n,2} r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + d_{n,2} r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}), \tag{3.2}$$

где

$$a_{n,2} = \frac{\kappa_{\sigma,2n+1} - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}}, \qquad b_{n,2} = \frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}}, \tag{3.3}$$

$$c_{n,2} = i b_{n,2}, \qquad d_{n,2} = -i\overline{a_{n,2}}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полиномы $t_{\sigma,2n}(\tau)$ и $t_{\sigma,2n+1}(\tau)$ представимы в виде

$$t_{\sigma,2n}(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n} [A_{\nu,2}^{(n)} \sin(\nu+1/2)\tau + B_{\nu,2}^{(n)} \cos(\nu+1/2)\tau], \tag{3.5}$$

$$t_{\sigma,2n+1}(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n} [C_{\nu,2}^{(n)} \sin(\nu+1/2)\tau + D_{\nu,2}^{(n)} \cos(\nu+1/2)\tau], \tag{3.6}$$

где $A_{\nu,2}^{(n)}$, $B_{\nu,2}^{(n)}$, $C_{\nu,2}^{(n)}$ и $D_{\nu,1}^{(n)} \in \mathbb{R}$, $A_{n,2}^{(n)} = 0$, $B_{n,2}^{(n)} > 0$, $C_{n,2}^{(n)} > 0$. Так как $t_{\sigma,2n}(\tau)$ и $t_{\sigma,2n+1}(\tau)$ являются линейными комбинациями полиномов $\{r_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{2n+1}$ и ортогональны по мере $d\sigma(\tau)$ полиномам $\{r_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{2n-1}$, то имеют место равенства (3.1), (3.2), в которых $a_{n,2}$, $b_{n,2}$, $c_{n,2}$, и $d_{n,2} \in \mathbb{C}$. Докажем формулы (3.3), (3.4).

В силу ортонормальности по мере $d\sigma(\tau)$ на $[0, 2\pi]$ систем $\{t_{\sigma,k}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{r_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{\infty}$

$$|a_{n,2}|^2 + |b_{n,2}|^2 = 1, \qquad |c_{n,2}|^2 + |d_{n,2}|^2 = 1, \qquad a_{n,2}\overline{c_{n,2}} + b_{n,2}\overline{d_{n,2}} = 0. \tag{3.7}$$

Из (1.9) и (1.10) следует, что

$$r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n} e^{-i(n+1/2)\tau} + t_{n-1/2,1}(\tau), \tag{3.8}$$

где $t_{n-1/2,1}(\tau) \in \mathcal{T}_{n-1/2}$. Аналогично с помощью (1.9), (1.2) и (1.12) находим, что

$$r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1} e^{i(n+1/2)\tau} + \varphi_{\sigma,2n+1}(0) e^{-i(n+1/2)\tau} + t_{n-1/2,2}(\tau), \tag{3.9}$$

где $t_{n-1/2,2}(\tau) \in \mathcal{T}_{n-1/2}$. Пользуясь формулами (3.8) и (3.9), путем сравнения коэффициентов при $\cos(n+1/2)\tau$ в правых частях (3.1) и (3.5) определяем, что

$$\kappa_{\sigma,2n} a_{n,2} + [\kappa_{\sigma,2n+1} + \varphi_{\sigma,2n+1}(0)] b_{n,2} = B_{n,2}^{(n)}. \tag{3.10}$$

Аналогично, сравнивая коэффициенты при $\sin(n+1/2)\tau$ в правых частях (3.1) и (3.5), имеем

$$-\kappa_{\sigma,2n} a_{n,2} + [\kappa_{\sigma,2n+1} - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)] b_{n,2} = 0. \tag{3.11}$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos(n+1/2)\tau$ в правых частях (3.2) и (3.6), выводим, что

$$\kappa_{\sigma,2n} c_{n,2} + [\kappa_{\sigma,2n+1} + \varphi_{\sigma,2n+1}(0)] d_{n,2} = D_{n,2}^{(n)}.$$

Сравнивая коэффициенты при $\sin(n+1/2)\tau$ в правых частях (3.2) и (3.6), получаем, что

$$-\kappa_{\sigma,2n} c_{n,2} + [\kappa_{\sigma,2n+1} - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)] d_{n,2} = -iC_{n,2}^{(n)}. \tag{3.12}$$

Из (3.10) и (3.11) находим, что

$$a_{n,2} = [\kappa_{\sigma,2n+1} - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)](2\kappa_{\sigma,2n}\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1} B_{n,2}^{(n)}, \tag{3.13}$$

$$b_{n,2} = (2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1} B_{n,2}^{(n)}. \tag{3.14}$$

Подставляя в первое из равенств (3.7) вместо $a_{n,2}$ и $b_{n,2}$ правые части формул (3.13) и (3.14), получаем уравнение относительно $B_{n,2}^{(n)}$, из которого следует, что

$$[B_{n,2}^{(n)}]^2 = 2\kappa_{\sigma,2n}^2 \kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1}. \tag{3.15}$$

Так как $B_{n,2}^{(n)} > 0$, то из (3.15) следует, что

$$B_{n,2}^{(n)} = \kappa_{\sigma,2n}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}. \tag{3.16}$$

Из (3.13), (3.14) и (3.16) имеем (3.3) В соответствии с (3.3) $a_{n,2} \neq 0$ и $b_{n,2} \neq 0$. Поэтому из (3.7) следует, что $c_{n,2} \neq 0$ и $d_{n,2} \neq 0$. Так как $a_{n,2}\overline{c_{n,2}} + b_{n,2}\overline{d_{n,2}} = 0$, то $d_{n,2}/c_{n,2} = -\overline{a_{n,2}}/\overline{b_{n,2}}$. Но тогда с учетом (3.3) получаем

$$d_{n,2}/c_{n,2} = -[\kappa_{\sigma,2n+1} - \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}]/\kappa_{\sigma,2n}. \tag{3.17}$$

В силу (3.12) $C_{n,2}^{(n)} = -ic_{n,2}\{\kappa_{\sigma,2n} - [\kappa_{\sigma,2n+1} - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)]/(d_{n,2}/c_{n,2})\}$, откуда на основании (3.17)

$$C_{n,2}^{(n)} = -ic_{n,2} 2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]/\kappa_{\sigma,2n}. \tag{3.18}$$

Из (3.18) получаем

$$c_{n,2} = iC_{n,2}^{(n)}\kappa_{\sigma,2n}/\{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]\}. \tag{3.19}$$

Из (3.17) и (3.19) следует, что

$$d_{n,2} = -iC_{n,2}^{(n)}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}]/\{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]\}. \tag{3.20}$$

Так как $|c_{n,2}|^2 + |d_{n,2}|^2 = 1$, то, исходя из (3.19) и (3.20), имеем

$$[C_{n,2}^{(n)}]^2 = 2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]. \tag{3.21}$$

С учетом условия $C_{n,2}^{(n)} > 0$ из (3.21) выводим равенство

$$C_{n,2}^{(n)} = \sqrt{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}. \tag{3.22}$$

Из (3.19), (3.20) и (3.22) получаем формулы

$$c_{n,2} = i\frac{\kappa_{\sigma,2n}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}}, \qquad d_{n,2} = -i\frac{\kappa_{\sigma,2n+1} - \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}},$$

из которых в силу (3.3) следуют равенства (3.4). Предложение 8 доказано. □

Предложение 9. *При всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2} t_{\sigma,2n}(\tau) = \Re[e^{-i(n-1/2)\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})], \tag{3.23}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2} t_{\sigma,2n+1}(\tau) = \Im[e^{-i(n+1/2)\tau}\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})]. \tag{3.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При замене n на $2n$ и z на $e^{i\tau}$ в (2.32) и (2.33) получаем формулы

$$\kappa_{\sigma,2n}\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}e^{i\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + \varphi_{\sigma,2n+1}(0)\varphi^*_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{3.25}$$

$$\kappa_{\sigma,2n}e^{i\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)\varphi^*_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}). \tag{3.26}$$

С помощью формул (1.1), (1.2) и (1.9) убеждаемся в справедливости равенств

$$\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = e^{i(n+1/2)}r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}), \qquad \varphi^*_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = e^{i(n+1/2)}\overline{r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})},$$

$$\varphi^*_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = e^{i(n+1/2)}r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \qquad e^{i\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = e^{i(n+1/2)}\overline{r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})},$$

в силу которых вместо (3.25) и (3.26) можно написать

$$\kappa_{\sigma,2n}r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}\overline{r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} + \varphi_{\sigma,2n+1}(0)r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{3.27}$$

$$\kappa_{\sigma,2n}\overline{r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} = \kappa_{\sigma,2n+1}r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)\overline{r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})}. \tag{3.28}$$

Разделив (3.27) и сопряженное с (3.28) соотношения на $\kappa_{\sigma,2n}$, получим формулы

$$r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} + \varphi_{\sigma,2n+1}(0)\kappa^{-1}_{\sigma,2n}r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{3.29}$$

$$r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})} - \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}). \tag{3.30}$$

Заменив в правой части (3.1) $r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})$ правой частью (3.29), имеем равенство

$$t_{\sigma,2n}(\tau) = [a_{n,2} + b_{n,2}\varphi_{\sigma,2n+1}(0)\kappa^{-1}_{\sigma,2n}]r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + b_{n,2}\kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}. \tag{3.31}$$

В соответствии с (3.3)

$$a_{n,2} + b_{n,2}\varphi_{\sigma,2n+1}(0)\kappa^{-1}_{\sigma,2n} = \kappa^{1/2}_{\sigma,2n+1}\{2[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]\}^{-1/2}, \tag{3.32}$$

$$b_{n,2}\kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n} = \kappa^{1/2}_{\sigma,2n+1}\{2[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]\}^{-1/2}. \tag{3.33}$$

Из (3.31)–(3.33) следует, что

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}t_{\sigma,2n}(\tau) = \Re r_{\sigma,2n}(e^{i\tau}). \tag{3.34}$$

Согласно (1.9) и (1.2) формула (3.34) равносильна формуле (3.23).

Заменив в правой части (3.2) $r_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ правой частью (3.30), получим равенство

$$t_{\sigma,2n+1}(\tau) = c_{n,2}\kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})} + [d_{n,2} - c_{n,2}\overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}]r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}). \tag{3.35}$$

Учитывая (3.4), вместо (3.35) можем написать

$$t_{\sigma,2n+1}(\tau) = ib_{n,2}\kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})} - i[\overline{a_{n,2}} + b_{n,2}\overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}]r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}). \tag{3.36}$$

Из (3.32) (3.33) и (3.36) вытекает равносильная (3.24) формула

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}t_{\sigma,2n+1}(\tau) = \Im r_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}).$$

Заметим, что формулы (3.23) и (3.24) равносильны формулам (0.2) и (0.3). Поэтому теорему 1 можно считать доказанной. $\square$

Предложение 10. *При всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место равенства*

$$u_{\sigma,2n}(\tau) = a_{n,3}q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + b_{n,3}q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}), \tag{3.37}$$

$$u_{\sigma,2n+1}(\tau) = c_{n,3}q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + d_{n,3}q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}), \tag{3.38}$$

где

$$a_{n,3} = \frac{-i[\kappa_{\sigma,2n+1} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}]}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}}, \qquad b_{n,3} = \frac{i\kappa_{\sigma,2n}}{\sqrt{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}}, \tag{3.39}$$

$$c_{n,3} = -ib_{n,3}, \qquad d_{n,3} = -i\overline{a_{n,3}}. \tag{3.40}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полиномы $u_{\sigma,2n}(\tau)$ и $u_{\sigma,2n+1}(\tau)$ представимы в виде

$$u_{\sigma,2n}(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n}[A_{\nu,3}^{(n)} \sin{(\nu + 1/2)\tau} + B_{\nu,3}^{(n)} \cos{(\nu + 1/2)\tau}], \tag{3.41}$$

$$u_{\sigma,2n+1}(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n}[C_{\nu,3}^{(n)} \sin{(\nu + 1/2)\tau} + D_{\nu,3}^{(n)} \cos{(\nu + 1/2)\tau}], \tag{3.42}$$

где $A_{\nu,3}^{(n)}$, $B_{\nu,3}^{(n)}$, $C_{\nu,3}^{(n)}$ и $D_{\nu,1}^{(n)} \in \mathbb{R}$, $A_{n,3}^{(n)} > 0$, $D_{n,3}^{(n)} > 0$, $B_{n,3}^{(n)} = 0$. Так как $u_{\sigma,2n}(\tau)$ и $u_{\sigma,2n+1}(\tau)$ являются линейными комбинациями полиномов $\{q_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{2n+1}$ и ортогональны по мере $d\sigma(\tau)$ полиномам $\{q_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{2n-1}$, то имеют место равенства (3.37) и (3.38), в которых $a_{n,3}$, $b_{n,3}$, $c_{n,3}$, и $d_{n,3} \in \mathbb{C}$. Докажем формулы (3.39) и (3.40).

В силу ортонормальности по мере $d\sigma(\tau)$ на $[-\pi, \pi]$ систем $\{u_{\sigma,k}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{q_{\sigma,k}(e^{i\tau})\}_{k=0}^{\infty}$

$$|a_{n,3}|^2 + |b_{n,3}|^2 = 1, \qquad |c_{n,3}|^2 + |d_{n,3}|^2 = 1, \qquad a_{n,3}\overline{c_{n,3}} + b_{n,3}\overline{d_{n,3}} = 0. \tag{3.43}$$

Из (1.14), (3.8) и (3.9) вытекают равенства

$$q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n}e^{i(n+1/2)\tau} + t_{n-1/2,3}(\tau), \tag{3.44}$$

$$q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}e^{-i(n+1/2)\tau} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}e^{i(n+1/2)\tau} + t_{n-1/2,4}(\tau), \tag{3.45}$$

в которых $t_{n-1/2,3}(\tau)$ и $t_{n-1/2,4}(\tau) \in \mathcal{T}_{n-1/2}$. Пользуясь формулами (3.44) и (3.45), путем сравнения коэффициентов при $\sin{(n + 1/2)\tau}$ в правых частях (3.37) и (3.41) получаем, что

$$\kappa_{\sigma,2n}a_{n,3} + [-\kappa_{\sigma,2n+1} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}]b_{n,3} = -iA_{n,3}^{(n)}. \tag{3.46}$$

Аналогично, пользуясь (3.44) и (3.45), сравниваем коэффициенты при $\cos{(n + 1/2)\tau}$ в правых частях (3.37) и (3.41). При этом имеем

$$\kappa_{\sigma,2n}a_{n,3} + [\kappa_{\sigma,2n+1} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}]b_{n,3} = 0. \tag{3.47}$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos{(n + 1/2)\tau}$ в правых частях (3.38) и (3.42), выводим

$$\kappa_{\sigma,2n}c_{n,3} + [\kappa_{\sigma,2n+1} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}]d_{n,3} = D_{n,3}^{(n)}. \tag{3.48}$$

Решая систему уравнений (3.46) и (3.47) относительно $a_{n,3}$ и $b_{n,3}$, находим,что

$$a_{n,3} = -i[\kappa_{\sigma,2n+1} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}](2\kappa_{\sigma,2n}\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1}A_{n,3}^{(n)}, \tag{3.49}$$

$$b_{n,3} = i(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1}A_{n,3}^{(n)}. \tag{3.50}$$

Подставляя в первое из равенств (3.43) вместо $a_{n,3}$ и $b_{n,3}$ правые части (3.49) и (3.50), получаем уравнение относительно $A^{(n)}_{n,3}$, которое после преобразований принимает вид

$$[A^{(n)}_{n,3}]^2 = (2\kappa^2_{\sigma,2n}\kappa_{\sigma,2n+1})[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1}. \tag{3.51}$$

Учитывая, что $A^{(n)}_{n,3} > 0$, из (3.51) получаем

$$A^{(n)}_{n,3} = \kappa_{\sigma,2n}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}. \tag{3.52}$$

Из (3.49), (3.51) и (3.52) вытекают равенства (3.39).

В силу (3.39) $a_{n,3} \neq 0$ и $b_{n,3} \neq 0$. Поэтому из условий $|c_{n,3}|^2+|d_{n,3}|^2 = 1$ и $a_{n,3}\overline{c_{n,3}}+b_{n,3}\overline{d_{n,3}} = 0$ следует, что $c_{n,3} \neq 0$ и $d_{n,3} \neq 0$. Из равенств $a_{n,3}\overline{c_{n,3}}+b_{n,3}\overline{d_{n,3}} = 0$ и (3.39) устанавливаем, что

$$d_{n,3}/c_{n,3} = [\kappa_{\sigma,2n+1} + \varphi_{\sigma,2n+1}(0)]/\kappa_{\sigma,2n}. \tag{3.53}$$

В соответствии с (3.48) и (3.53)

$$\begin{aligned} D^{(n)}_{n,3} &= c_{n,3}\{\kappa_{\sigma,2n} + [\kappa_{\sigma,2n+1} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}](d_{n,3}/c_{n,3})\} \\ &= 2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)](\kappa_{\sigma,2n})^{-1}c_{n,3}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Из (3.54) и (3.53) находим, что

$$c_{n,3} = \frac{\kappa_{\sigma,2n}D^{(n)}_{n,3}}{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}, \qquad d_{n,3} = \frac{[\kappa_{\sigma,2n+1} + \varphi_{\sigma,2n+1}(0)]D^{(n)}_{n,3}}{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]}. \tag{3.55}$$

Подставляя в равенство $|c_{n,3}|^2 + |d_{n,3}|^2 = 1$ правые части формул (3.55), получаем равенство $[D^{(n)}_{n,3}]^2 = 2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]$, из которого в силу положительности $D^{(n)}_{n,3}$ вытекает, что

$$D^{(n)}_{n,3} = \{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]\}^{1/2}. \tag{3.56}$$

Из (3.55) и (3.56) следуют формулы, которые, исходя из (3.39), можно записать в виде (3.40). Предложение 10 доказано. □

Предложение 11. *При всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}u_{\sigma,2n}(\tau) = \Im[e^{-i(n-1/2)\tau}\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})], \tag{3.57}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}u_{\sigma,2n+1}(\tau) = \Re[e^{-i(n+1/2)\tau}\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})]. \tag{3.58}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1.14) сопряженные с (3.29) и (3.30) равенства можно записать в виде

$$q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{q_{\sigma,2n}(e^{i\tau})} + \overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}), \tag{3.59}$$

$$q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) = \kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})} - \varphi_{\sigma,2n+1}(0)\kappa^{-1}_{\sigma,2n}q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}). \tag{3.60}$$

Заменив $q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})$ в правой части (3.37) правой частью (3.59), получим

$$u_{\sigma,2n}(\tau) = [a_{n,3} + b_{n,3}\overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}]q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}) + b_{n,3}\kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{q_{\sigma,2n}(e^{i\tau})}. \tag{3.61}$$

Аналогично, заменив $q_{\sigma,2n}(e^{i\tau})$ в правой части (3.38) правой частью (3.60), получим

$$u_{\sigma,2n+1}(\tau) = c_{n,3}\kappa_{\sigma,2n+1}\kappa^{-1}_{\sigma,2n}\overline{q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})} + [d_{n,3} - c_{n,3}\varphi_{\sigma,2n+1}(0)\kappa^{-1}_{\sigma,2n}]q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}). \tag{3.62}$$

Из (3.39) следует,что величины $a_{n,3}+b_{n,3}\overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}\kappa_{\sigma,2n}^{-1}$ и $-b_{n,3}\kappa_{\sigma,2n+1}\kappa_{\sigma,2n}^{-1}$ совпадают с величиной $-i\kappa_{\sigma,2n+1}\{2\kappa_{\sigma,2n+1}[\kappa_{\sigma,2n+1}+\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]\}^{-1/2}$. Поэтому из (3.61) вытекает формула

$$u_{\sigma,2n}(\tau)=(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1}+\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}\Im q_{\sigma,2n}(e^{i\tau}),$$

в силу (1.14) равносильная (3.57). Из (3.62), (3.40) и (3.39) следует формула

$$u_{\sigma,2n+1}(\tau)=(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1}+\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}\Re q_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau}),$$

равносильная (3.58). Предложение 11 доказано. □

Утверждение 2. *Имеют место формулы*

$$t_{\sigma,2n}(\tau)=\kappa_{\sigma,2n}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1}-\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}\cos(n+1/2)\tau+t_{n-1/2,1}(\tau), \tag{3.63}$$

$$\begin{gathered}t_{\sigma,2n+1}(\tau)=\{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n}-\Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]\}^{1/2}\sin(n+1/2)\tau\\+(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1}-\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}\Im\varphi_{\sigma,2n+1}(0)\cos(n+1/2)\tau+t_{n-1/2,2}(\tau),\end{gathered} \tag{3.64}$$

$$u_{\sigma,2n}(\tau)=\kappa_{\sigma,2n}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1}+\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}\sin(n+1/2)\tau+t_{n-1,3}(\tau), \tag{3.65}$$

$$\begin{gathered}u_{\sigma,2n+1}(\tau)=(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1}+\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}\Im\varphi_{\sigma,2n+1}(0)\sin(n+1/2)\tau\\+\{2\kappa_{\sigma,2n}[\kappa_{\sigma,2n+1}+\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]\}^{1/2}\cos(n+1/2)\tau+t_{n-1/2,4}(\tau),\end{gathered} \tag{3.66}$$

где $t_{n-1/2,\nu}\in T_{n+1/2}$ $(\nu=1,2,3,4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для получения (3.63) достаточно в правой части (3.5) положить $A_{n,2}^{(n)}=0$, а вместо $B_{n,2}^{(n)}=0$ подставить правую часть (3.16). Для получения (3.64) надо в выведенную при сравнении коэффициентов при $\cos(n+1/2)\tau$ в правых частях (3.2) и (3.6) формулу $D_{n,2}^{(n)}=\kappa_{\sigma,2n}c_{n,2}+d_{n,2}[\kappa_{\sigma,2n+1}+\overline{\varphi_{\sigma,2n+1}(0)}]$ подставить правые части (3.19) и (3.20). В результате имеем

$$D_{n,2}^{(n)}=(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{1/2}[\kappa_{\sigma,2n+1}-\Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{-1/2}\Im\varphi_{\sigma,2n+1}(0). \tag{3.67}$$

При замене в правой части (3.6) $C_{n,2}^{(n)}$ и $D_{n,2}^{(n)}$ правыми частями (3.22) и (3.67), следует (3.64). Аналогично доказываются формулы (3.65) и (3.66). Утверждение доказано. □

Следствие 1. *Если* $\Im\varphi_{\sigma,2n}(0)=0$, *то*

$$u_{\sigma,2n+1}(\tau)=t_{\sigma,2n}(\tau),\qquad u_{\sigma,2n}(\tau)=t_{\sigma,2n+1}(\tau). \tag{3.68}$$

4. Функции, множества нулей синуса или косинуса которых совпадают с множеством нулей ортогонального тригонометрического полинома

С помощью представления

$$\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})=|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|e^{i\gamma_{\sigma,n}(\tau)}, \tag{4.1}$$

где $\gamma_{\sigma,n}(\tau)$ — любая из ветвей функции $\arg\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})$, в [6] установлена формула приращения аргумента многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$ в точке $e^{i\theta}$:

$$\gamma_{\sigma,n}(\tau)-\gamma_{\sigma,n}(\theta)=\frac{n}{2}(\tau-\theta)+\frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\tau}\frac{\sum_{\nu=0}^{n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,n}(e^{iu})|^2}\,du\qquad(\theta,\tau\in\mathbb{R}). \tag{4.2}$$

С использованием (2.5) и (2.6) в [13] доказано, что нули полиномов $T_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $T_{\sigma,2n}(\tau)$, совпадают с нулями функций $\cos\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau)$ и $\sin\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)$ соответственно, где

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) := \gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) - (n-1)\tau, \tag{4.3}$$

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) := \gamma_{\sigma,2n}(\tau) - n\tau. \tag{4.4}$$

Из (4.1)–(4.4) вытекают следующие два аналога формулы (4.2):

$$\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau) - \Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta) = \frac{\tau-\theta}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\tau} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-2}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{iu})|^2}\,du, \tag{4.5}$$

$$\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) - \Gamma_{\sigma,2n}(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\tau} \frac{\sum_{\nu=0}^{2n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{iu})|^2}{|\varphi_{\sigma,2n}(e^{iu})|^2}\,du. \tag{4.6}$$

В силу (4.5) и (4.6) функции $\Gamma_{\sigma,n}(\tau)$ $(n \in \mathbb{N})$ строго возрастают в $(-\infty,\infty)$.

Из предложений 7, 9 и 11 следует справедливость следующих двух лемм о функциях, множества нулей синуса или косинуса которых совпадают с множествами нулей полиномов $U_{\sigma,n}(\tau)$, $t_{\sigma,n}(\tau)$, и $u_{\sigma,n}(\tau)$.

Лемма 2. *При всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняются равенства*

$$[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n})^{-1/2}U_{\sigma,2n-1}(\tau) = |\varphi_{\sigma,2n-1}(e^{i\tau})|\sin\Gamma_{\sigma,2n-1}(\tau), \tag{4.7}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n} + \Re\varphi_{\sigma,2n}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n})^{-1/2}U_{\sigma,2n}(\tau) = |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|\cos\Gamma_{\sigma,2n}(\tau). \tag{4.8}$$

Лемма 3. *При всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства*

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}t_{\sigma,2n}(\tau) = |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|\cos[\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) + \tau/2], \tag{4.9}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} - \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}t_{\sigma,2n+1}(\tau) = |\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})|\sin[\Gamma_{\sigma,2n+1}(\tau) - \tau/2], \tag{4.10}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}u_{\sigma,2n}(\tau) = |\varphi_{\sigma,2n}(e^{i\tau})|\sin[\Gamma_{\sigma,2n}(\tau) + \tau/2], \tag{4.11}$$

$$[\kappa_{\sigma,2n+1} + \Re\varphi_{\sigma,2n+1}(0)]^{1/2}(2\kappa_{\sigma,2n+1})^{-1/2}u_{\sigma,2n+1}(\tau) = |\varphi_{\sigma,2n+1}(e^{i\tau})|\cos[\Gamma_{\sigma,2n+1}(\tau) - \tau/2]. \tag{4.12}$$

Многочлены, ортогональные на окружности, не имеют на ней нулей. Поэтому множества нулей полиномов из левых частей формул (4.7)–(4.12) совпадают с множествами нулей соответствующих синусов или косинусов функций, входящих в правые части этих формул.

С помощью лемм 2 и 3 для нулей полиномов $U_{\sigma,n}(\tau)$, $t_{\sigma,n}(\tau)$, и $u_{\sigma,n}(\tau)$ можно получить аналоги всех теорем, доказанных в [13] для системы $\{T_{\sigma,n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$. Однако мы ограничимся случаем, когда $d\sigma(\tau) = \varphi(\tau)d\tau$, $\varphi(-\tau) = \varphi(\tau)$. Здесь в силу (2.41) главные результаты из [13] (а именно [13, теоремы 9 и 10]), описывающие поведение нулей многочленов, ортогональных на отрезке, сохраняют значимость и для полиномов $U_{\sigma,n}(\tau)$. Заметим также, что в силу (3.68) аналог теоремы 2 для полиномов $u_{\sigma,n}(\tau)$ можно не доказывать.

5. Доказательство теоремы 2

Так как $\Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta+2\pi)-\Gamma_{\sigma,2n-1}(\theta)=2\pi n$ и $\Gamma_{\sigma,2n}(\theta+2\pi)-\Gamma_{\sigma,2n}(\theta)=2\pi n$ $(n\in\mathbb{N},\theta\in\mathbb{R})$ (см. [13, формулы (4.2) и (4.3)]), то для функций $G_{\sigma,2n}(\tau):=\Gamma_{\sigma,2n}(\tau)+\tau/2$ и $G_{\sigma,2n+1}(\tau):=\Gamma_{\sigma,2n+1}(\tau)-\tau/2$ приращения $G_{\sigma,2n}(\theta+4\pi)-G_{\sigma,2n}(\theta)$ и $G_{\sigma,2n+1}(\theta+4\pi)-G_{\sigma,2n+1}(\theta)$ равны $(4n+2)\pi$. Поэтому из (4.9) и (4.10) следует, что в любом промежутке $[\theta+4\pi)$ полиномы $t_{\sigma,2n}(\tau)$ и $t_{\sigma,2n+1}(\tau)$ имеют по $4n+2$ простых нулей.

Функции $G_{\sigma,n}(\tau)$ строго возрастают в интервале $(-\infty,\infty)$. Поэтому на основании (4.9) и (4.10) с помощью условий $G_{\sigma,2n}(\zeta^{(\sigma)}_{2n,k})=(2k-1)\pi/2$ и $G_{\sigma,2n+1}(\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k})=k\pi$ нули полиномов $t_{\sigma,2n}(\tau)$ и $t_{\sigma,2n+1}(\tau)$ нумеруются в строго возрастающие последовательности $\{\zeta^{(\sigma)}_{2n,k})\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k})\}_{-\infty}^{\infty}$. При этом выполняются условия

$$l\pi=G_{\sigma,2n}(\zeta^{(\sigma)}_{2n,k+l})-G_{\sigma,2n}(\zeta^{(\sigma)}_{2n,k})=\Gamma_{\sigma,2n}(\zeta^{(\sigma)}_{2n,k+l})-\Gamma_{\sigma,2n}(\zeta^{(\sigma)}_{2n,k})+(\zeta^{(\sigma)}_{2n,k+l}-\zeta^{(\sigma)}_{2n,k})/2, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}l\pi&=G_{\sigma,2n+1}(\zeta^{(\sigma)}_{2n,k+l})-G_{\sigma,2n+1}(\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k})\\&=\Gamma_{\sigma,2n+1}(\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k+l})-\Gamma_{\sigma,2n+1}(\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k})-(\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k+l}-\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k})/2.\end{aligned} \tag{5.2}$$

При доказательстве теоремы 1 в [13] установлено, что если равномерно по $\tau\in\mathbb{R}$

$$e^{i\tau}\varphi'_{\sigma,n}(e^{i\tau})/[n|\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2]=1+O(\varepsilon_n), \tag{5.3}$$

где $\varepsilon_n\geq 0$ $(n\in\mathbb{N})$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, то равномерно по $\tau\in\mathbb{R}$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}|\varphi_{\sigma,\nu}(e^{i\tau})|^2/|n\varphi_{\sigma,n}(e^{i\tau})|^2=1+O(\varepsilon_n). \tag{5.4}$$

При доказательстве теоремы 6 в [13] показано, что из (0.4) вытекает (5.3) с $\varepsilon_n=(\ln n)^{-\mu}$. Из (5.1), (4.6), (0.4), (5.3) и (5.4) следует,что равномерно по $k\in\mathbb{Z}$ и $l\in\mathbb{N}$

$$\zeta^{(\sigma)}_{2n,k+l}-\zeta^{(\sigma)}_{2n,k}=2l\pi(2n+1)^{-1}[1+O(\ln^{-\mu})]\qquad(n\to\infty). \tag{5.5}$$

Аналогично из (5.2), (4.5), (0.4), (5.3) и (5.4) выводим равномерную по $k\in\mathbb{Z}$ и $l\in\mathbb{N}$ формулу

$$\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k+l}-\zeta^{(\sigma)}_{2n+1,k}=2l\pi(2n+1)^{-1}[1+O(\ln^{-\mu})]\qquad(n\to\infty). \tag{5.6}$$

Так как $d\sigma(\tau)=\varphi(\tau)d\tau$, $\varphi(-\tau)=\varphi(\tau)$, то из ортогональности с весом $\varphi(\tau)$ полинома $t_{\sigma,n}(\tau)$ всем гармоникам, предшествующим старшей, вытекает аналогичное свойство для полинома $(-1)^n t_{\sigma,n}(-\tau)$, который при этом имеет положительный старший коэффициент и единичный скалярный квадрат. По лемме 1 выполняется равенство $(-1)^n t_{\sigma,n}(-\tau)=t_{\sigma,n}(\tau)$.

Занумеруем все положительные нули полинома $t_{\sigma,n}(\tau)$ в возрастающую последовательность $\{\theta_{\sigma,n,k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда в силу нечетности полинома $t_{\sigma,2n+1}(\tau)$ имеем равенство $t_{\sigma,2n+1}(0)=0$, и из (5.6) следует равномерная по $k\in\mathbb{Z}_+$ асимптотическая формула

$$\theta_{\sigma,2n+1,k}=2k\pi(2n+1)^{-1}[1+O(\ln^{-\mu})]\qquad(n\to\infty). \tag{5.7}$$

Из четности веса $\varphi(\tau)$ вытекает вещественность коэффициентов многочлена $\varphi_{\sigma,n}(z)$ и его значений на вещественной прямой. Поэтому в силу (3.23) имеем неравенство $t_{\sigma,2n}(\tau)(0)\neq 0$. Так как $t_{\sigma,2n}(-\tau)=t_{\sigma,2n}(\tau)$, то ближайшим к $\theta_{\sigma,n,k}$ отрицательным нулем полинома $t_{\sigma,2n}(\tau)$ является число $-\theta_{\sigma,n,1}$. Поэтому в силу (5.5) справедлива формула $\theta_{\sigma,n,1}=\pi(2n+1)^{-1}[1+O(\ln^{-\mu})]$, на основании которой из (5.5) получаем равномерное по $k\in\mathbb{N}$ асимптотическое равенство

$$\theta_{\sigma,2n,k}=(2k-1)\pi(2n+1)^{-1}[1+O(\ln^{-\mu})]\qquad(n\to\infty). \tag{5.8}$$

Формулы (5.7) и (5.8) совпадают с (0.6) и (0.5). Теорема 2 доказана. □

З а м е ч а н и е. После того как работа [13] была сдана в печать, автор ознакомился с результатом статьи [14], описывающим поведение нулей многочлена, ортогонального на $[-1,1]$ с комплексным весом $(1-x^2)^{-1/2}e^{ix}$. Нули такого многочлена не принадлежат отрезку $[-1,1]$, и исследование их поведения является весьма трудной задачей, для решения которой требуются другие методы исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Турецкий А.Х.** Теория интерполирования в задачах. Минск: Вышэйш. шк., 1968. 320 с.
2. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
3. **Геронимус Я.Л.** Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958. 240 с.
4. **Milovanović G.V., Cvetković A.S., Marjanović Z.M.** Connection of semi-integer trigonometric orthogonal polynomials with Szego polynomials // Lect. Notes Comput. Sci. Berlin: Springer-Verlag, 2007. Vol. 4310. P. 394–401.
5. **Бадков В.М.** Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 20–62.
6. **Бадков В.М.** О нулях ортогональных полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 30–46.
7. **Бадков В.М.** Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. 132 с.
8. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2005. 480 с.
9. **Гренандер У., Сегё Г.** Теплицевы формы и их приложения. М.: Иностр. лит., 1961. 308 с.
10. **Berriochoa E., Cachafeiro A., Garcia-Amor J.** A system of biorthogonal trigonometric polynomials // Difference equations, special functions and orthogonal polynomials. World Sci. Publ., Hackensack. 2007. № 7. P. 80–89.
11. **Szegö G.** On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials // Magy. tud. akad. Mat. kut. intéz. közl. 1963 (1964). K. 8, № 3. Old. 255–273.
12. **Бадков В.М.** Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41.
13. **Бадков В.М.** Асимптотические свойства нулей ортогональных полиномов // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 9. С. 3–14.
14. **Суетин С.П.** О сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса // Мат. сб. 2012. Т. 200, № 1. С. 81–96.

Бадков Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Поступила 29.12.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ НА ОКРУЖНОСТИ РАДИУСА МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ С НАЛИЧИЕМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ[1]

Н. А. Барабошкина

Найдено компактное выражение для величины наилучшего интегрального приближения линейной комбинации $\lambda P_r + \mu Q_r$ ядра Пуассона P_r и его сопряженного Q_r тригонометрическими полиномами заданного порядка в виде комбинации функций arctg и ln. Это выражение при $\mu = 0$ превращается в формулу М. Г. Крейна, а при $\lambda = 0$ — в формулу Б. Надя. В случае $\lambda\mu \neq 0$ найденное выражение существенно проще представления указанной величины в виде ряда, найденного А. В. Бушанским. Показано, что если известна функция предельных значений на единичной окружности Γ действительной части $u = \operatorname{Re} F$ некоторой аналитической внутри единичного круга функции $F = u + iv$, и $\|u\|_{L(\Gamma)} \le 1$, то задача наилучшего интегрального приближения линейной комбинации $\lambda u + \mu v$ на концентрической окружности радиуса $r < 1$ алгебраическими многочленами сводится к задаче интегрального приближения на периоде $[0, 2\pi)$ ядра $\lambda P_r + \mu Q_r$ тригонометрическими полиномами.

Ключевые слова: наилучшее приближение, тригонометрический полином, гармоническая функция, алгебраический многочлен, класс сверток, ядро Пуассона.

N. A. Baraboshkina. Approximation of harmonic functions by algebraic polynomials on a circle of radius smaller than one with constraints on the unit circle.

A compact expression is found for the value of the best integral approximation of the linear combination $\lambda P_r + \mu Q_r$, where P_r is the Poisson kernel and Q_r is its conjugate, by trigonometric polynomials of a given order in the form of a combination of the functions arctg and ln. For $\mu = 0$, the expression is Krein's result, and, for $\lambda = 0$, it is Nagy's result. If $\lambda\mu \neq 0$, the expression is much simpler than the representation in the form of a series found by Bushanskii. It is shown that, if the function of limit values on the unit circle Γ of the real part $u = \operatorname{Re} F$ of a certain function $F = u + iv$ that is analytic inside the unit circle and such that $\|u\|_{L(\Gamma)} \le 1$ is known, then the problem of the best integral approximation of the linear combination $\lambda u + \mu v$ on a concentric circle of radius $r < 1$ by algebraic polynomials is reduced to the integral approximation of the kernel $\lambda P_r + \mu Q_r$ on the period $[0, 2\pi)$ by trigonometric polynomials.

Keywords: best approximation, trigonometric polynomial, harmonic function, algebraic polynomial, class of convolutions, Poisson kernel.

1. История вопроса

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [2; 3] и посвященных наилучшему интегральному приближению линейной комбинации

$$\Pi_{q,\alpha} = \cos\alpha\, P_q + \sin\alpha\, Q_q, \quad q \in (-1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

ядра Пуассона P_q и сопряженного ядра Q_q подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов

$$\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t)$$

степени не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами. Здесь

$$P_q(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1-q^2}{2(1-2q\cos t + q^2)}, \quad Q_q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q \sin t}{1-2q\cos t+q^2}\,.$$

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00445, 11-01-00462) и УрО РАН (проект 12-П-1-1022) в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”.

Обозначим через $L = L(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\,\mathbb{Z}) = [0, 2\pi)$, пространство интегрируемых по Лебегу 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Наилучшим приближением в L функции f подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ называется величина

$$E_{n-1}(f) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1}} \|f - \tau\|, \quad \text{где} \quad \|g\| = \|g\|_L = \int\limits_0^{2\pi} |g(t)|dt.$$

Задача вычисления величины $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ при α кратных $\pi/2$ сводится к случаям $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$. В 1938 г. эта задача была решена М. Г. Крейном при $\alpha = 0$, а при $\alpha = \pi/2$ — Б. Надем:

$$E_{n-1}(\Pi_{q,0}) = 4 \operatorname{arctg} q^n; \quad E_{n-1}(\Pi_{q,\pi/2}) = 2 \ln \frac{1 + q^n}{1 - q^n}.$$

В общем случае $\alpha \in \mathbb{R}$ величину $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ нашел А. В. Бушанский в 1978 г. Более подробно историю вопроса и соответствующие ссылки см. в работе автора [2]. Заметим, что значения величины $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ имеют довольно простой вид, они записываются с помощью функций arctg и ln соответственно, а в случае $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}/2$ формула для вычисления $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ достаточно громоздка и выражается в виде ряда.

Далее, в разд. 2 с помощью результатов работы [2] найдена простая формула (2.3) для $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, которая записывается с помощью комбинации функций arctg и ln .

В разд. 3 приводятся результаты С. М. Никольского о верхней грани величины $E_{n-1}(f)_X$ функций f, представимых в виде свертки ядра $K \in X$ (где $X = L$ либо $X = L_\infty$) с функциями $\varphi \in X$, у которых норма $\|\varphi\|_X \le 1$, через $E_{n-1}(K)_L$. Эти результаты используются в разд. 4, где показано, что если известна функция предельных значений на единичной окружности действительной части некоторой аналитической внутри единичного круга функции $F = u + iv$ и ее интегральная норма не превосходит единицы, то задача наилучшего интегрального приближения линейной комбинации $\lambda u + \mu v$ действительной и мнимой частей ее на концентрической окружности меньшего радиуса r алгебраическими многочленами сводится к задаче интегрального приближения ядра $K = \lambda P_r + \mu Q_r$ тригонометрическими полиномами.

2. Наилучшее интегральное приближение функции $\Pi_{q,\alpha}$

Заметим сначала, что при $q = 0$ задача наилучшего интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ тривиальна, а для $-1 < q < 0$ сводится к случаю $0 < q < 1$ с помощью замены t на $t - \pi$ (см. [2]). Поэтому в дальнейшем будет обсуждаться лишь случай $0 < q < 1$. В работе [2] было найдено следующее представление величины наилучшего приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ множеством $\mathcal{T}_{n-1}$ в норме пространства L в виде быстро сходящегося ряда:

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{8\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\alpha + q^{4n}}}{1 - q^{4n}} \left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2 - 1} \cos 2kn\xi\right), \tag{2.1}$$

где

$$\xi = -\frac{1}{n} \arcsin \frac{(1 - q^{2n})\cos\alpha}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\alpha + q^{4n}}}. \tag{2.2}$$

Одним из основных результатов данной работы является

Теорема 1. *При любых* $0 < q < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = 2\cos\alpha \operatorname{arctg} \frac{2q^n \cos\alpha}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\alpha + q^{4n}}} + \sin\alpha \ln \frac{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\alpha + q^{4n}} + 2q^n \sin\alpha}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\alpha + q^{4n}} - 2q^n \sin\alpha}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\cos 2kn\xi=\frac{1}{2}\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k+1}\biggr)$$

$$=\frac{1}{2}\biggl(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+3)n}\cos 2(k+1)n\xi}{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k+1}+q^n\biggr)$$

$$=\frac{q^n}{2}+\frac{1}{2}\biggl(q^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos(2kn\xi+2n\xi)}{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k+1}\biggr)$$

$$=\frac{q^n}{2}+\frac{1}{2}\biggl(q^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi\cos 2n\xi}{2k+1}-q^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\sin 2kn\xi\sin 2n\xi}{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k+1}\biggr)$$

$$=\frac{q^n}{2}+\frac{1}{2}\biggl((q^{2n}\cos 2n\xi-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k+1}-q^{2n}\sin 2n\xi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\sin 2kn\xi}{2k+1}\biggr).$$

Подставив последнее выражение в (2.1), получим

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})=\frac{4\sqrt{1-2q^{2n}\cos 2\alpha+q^{4n}}}{1-q^{4n}}\,A(n,q,\xi), \tag{2.4}$$

где

$$A(n,q,\xi)=(1-q^{2n}\cos 2n\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k+1}+q^{2n}\sin 2n\xi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\sin 2kn\xi}{2k+1}.$$

Воспользуемся формулами [9, с. 738, пр. 14] и преобразуем $A(n,q,\xi)$:

$$A(n,q,\xi)=(1-q^{2n}\cos 2n\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\cos 2kn\xi}{2k+1}+q^{2n}\sin 2n\xi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}\sin 2kn\xi}{2k+1}$$

$$=\frac{1-q^{2n}\cos 2n\xi}{2}\left[\cos n\xi\,\mathrm{Arth}\left(\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\cos n\xi\right)+\sin n\xi\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2q^n}{1-q^{2n}}\sin n\xi\right)\right]$$

$$+\frac{q^{2n}}{2}\sin 2n\xi\left[\cos n\xi\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2q^n}{1-q^{2n}}\sin n\xi\right)-\sin n\xi\,\mathrm{Arth}\left(\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\cos n\xi\right)\right]$$

$$=\frac{q^{2n}+1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2q^n}{1-q^{2n}}\sin n\xi\right)\sin n\xi-\frac{q^{2n}-1}{2}\mathrm{Arth}\left(\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\cos n\xi\right)\cos n\xi.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{Arth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

получим

$$A(n,q,\xi)=\frac{q^{2n}+1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2q^n}{1-q^{2n}}\sin n\xi\right)\sin n\xi-\frac{q^{2n}-1}{4}\ln\frac{1+q^{2n}+2q^n\cos n\xi}{1+q^{2n}-2q^n\cos n\xi}\,. \tag{2.5}$$

Из определения (2.2) вычисляются значения

$$\sin n\xi=\frac{q^{2n}-1}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos 2\alpha+q^{4n}}}\cos\alpha,\qquad \cos n\xi=\frac{q^{2n}+1}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos 2\alpha+q^{4n}}}\sin\alpha. \tag{2.6}$$

Подставляя теперь (2.6), (2.5) в (2.4), получим (2.3). Теорема доказана.

3. Приближение класса сверток интегрируемых функций с ядром Пуассона. История и определения

Обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, пространство измеримых 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|\colon 0 \le x \le 2\pi\}.$$

Наилучшим приближением в L_p функции f подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ называется величина

$$E_{n-1}(f)_p = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1}} \|f - \tau\|_p.$$

С. М. Никольский показал (см., например, [7, с. 85–123; 6, с. 70–93]), что задача нахождения $\sup E_{n-1}(f)_p$ в метрике пространства L_p, $1 \le p \le \infty$, на классе сверток

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi(t)dt, \quad K \in L,\ \varphi \in L_p, \quad \|\varphi\|_p \le 1,$$

сводится к задаче вычисления $\sup \|f\|_{p'}$ на множестве $K * H^n_{p'}$ в метрике сопряженного пространства $L_{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$, где

$$H^n_{p'} = \{\varphi \in L_{p'},\ \|\varphi\|_{p'} \le 1,\ \varphi \in \mathcal{T}^\perp_{n-1}\}.$$

Далее будем обозначать $H^n_L = H^n_1$.

В случае, когда ядро $K \in L_\infty$, выполняются равенства

$$\sup_{\|\varphi\|_L \le 1} E_{n-1}(f)_p = \sup_{\varphi \in H^n_{p'}} \|f\|_\infty = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K)_p \quad \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\Big),$$

а при $K \in L$ —

$$\sup_{\|\varphi\|_L \le 1} E_{n-1}(f)_L = \sup_{\varphi \in H^n_\infty} \|f\|_\infty = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K)_L.$$

У с л о в и е $\mathbf{A}^*_\mathbf{n}$. При заданном n существуют натуральное число $n^* \ge n$ и тригонометрический полином

$$T^*_n(t) = \frac{\mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\mu^*_n \cos kt + \nu^*_n \sin kt\big)$$

такие, что для функции $\varphi^*(t) = \operatorname{sign}[K(t) - T^*_n(t)]$ почти всюду $\varphi^*_n\Big(t + \dfrac{\pi}{n^*}\Big) = -\varphi^*(t)$.

Наложив на ядро K условие $\mathbf{A}^*_\mathbf{n}$, Никольский доказал, что $E_{n-1}(K)_L = \|K - T^*_n\|_L$, а также (см. [7, §6, теорема 1; 6, предложение 4.3.1])

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in H^k_\infty} E_{n-1}(K * \varphi)_\infty &= \sup_{\varphi \in H^n_\infty} \|K * \varphi\|_\infty = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K)_L, \\ \sup_{\varphi \in H^k_L} E_{n-1}(K * \varphi)_L &= \sup_{\varphi \in H^n_L} \|K * \varphi\|_L = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K)_L, \end{aligned} \tag{3.1}$$

для любого $k = 1, \ldots, n$. Рассматривая в [7, §7] в качестве примера задачу наилучшего приближения тригонометрическими полиномами функций, представимых в виде свертки с ядром

Пуассона (или его сопряженным), Никольский показал, что классу H_L^n соответствует класс гармонических функций

$$h(r,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_{r,n}(t-x)f(t)dt, \quad h(r,\cdot) \in \mathcal{T}_{n-1}^{\perp}, \quad \|f\|_L \le 1,$$

удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^{2\pi} |h(r,x)|\, dx \le 1 \quad \text{при всех} \quad 0 \le r < 1.$$

Здесь $P_{r,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} r^k \cos kt$.

Наилучшее приближение подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ классов $A_L K$ и $A_\infty K$ аналитических периодических функций $F(x+iy)$, для которых в полосе $-\varepsilon < y < \varepsilon$ норма $\|\mathrm{Re}F(\cdot + iy)\|_X \le K$ для $X = L$ или $X = L_\infty$ соответственно, было найдено Н. И. Ахиезером [1].

А. С. Сердюк и И. В. Соколенко [11] получили асимптотические оценки для величины наилучшего приближения классов сверток ядра Пуассона и непрерывных 2π-периодических функций φ, у которых $\|\varphi\|_X \le 1$, где $X = L$ или $X = L_\infty$, и их модуль непрерывности удовлетворяет условию $\omega(\varphi, t) \le \omega(t)$, где $\omega(t)$ — непрерывная неубывающая полуаддитивная функция.

4. Наилучшее приближение алгебраическими многочленами гармонических функций на окружности радиуса меньше единицы с ограничениями на единичной окружности

В данном разделе мы будем искать наилучшее приближение алгебраическими многочленами порядка $n-1$ на окружности радиуса меньше единицы класса функций, представимых в виде линейной комбинации вещественной и мнимой частей некоторой аналитической внутри единичного круга функции, у которой норма вещественной части на единичной окружности не превосходит единицы.

При $p > 0$, следуя [5, гл. IX, §2], определим класс h_p функций $u(r,\vartheta)$, гармонических в круге

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon z = re^{i\vartheta},\ 0 \le r < 1,\ \vartheta \in \mathbb{T}\},$$

таких, что интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} |u(r,\vartheta)|^p d\vartheta$ ограничен равномерно по $0 < r < 1$.

Введем следующие обозначения:

$\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических многочленов двух переменных

$$p_n(x,y) = \sum_{\substack{k,m \in \mathbb{Z}_+,\\ k+m \le n}} a_{km} x^k y^m$$

степени не выше n с вещественными коэффициентами;

$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность,

$\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ – окружность радиуса r;

$\mathcal{H}_n$ – множество гармонических многочленов $H_n \in \mathcal{P}_n$.

Известно [10, гл.11, §2, теорема 11.1; 8, лемма 6], что для любого алгебраического многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n$ существует единственный гармонический многочлен $H_n \in \mathcal{H}_n$

$$H_n(z) = H_n(r,\vartheta) = \sum_{\substack{k,m \in \mathbb{Z}_+,\\ k+m \le n}} a_{km} r^{k+m} \cos^k \vartheta \sin^m \vartheta, \tag{4.1}$$

который совпадает с p_n на Γ.

Любую гармоническую функцию $u(x,y) = u(z) = u(r,\vartheta)$ в открытом круге $\mathcal{D}$ можно рассматривать как действительную часть некоторой аналитической функции, которая определяется с точностью до постоянного слагаемого $F(z) = u(z) + i\,v(z),\ z \in \mathcal{D},\ u(z) = \operatorname{Re} F(z)$. Обозначим через $f(e^{it})$ предельные значения функции $u(z)$ на единичной окружности $z = e^{it}$ и потребуем дополнительно, для однозначности определения функции $F(z)$, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_{\Gamma} f(e^{it})dt = 0.$$

Рассмотрим функцию $u(z) = u(r,\vartheta)$, равномерно ограниченную в $\mathcal{D}$. Ясно, что она принадлежит классу h_p при любом $p \in (0,\infty)$ и, следовательно, внутри круга может быть представлена (см. [4, гл. 1, §3]) в виде свертки ядра Пуассона и функции $g(\vartheta) := f(e^{i\vartheta})$, $g \in L$:

$$u(r,\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)P(\vartheta - t)dt = (P * g)(\vartheta), \quad P(t) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t + r^2)}.$$

Мнимая часть функции F представляется с помощью сопряженного ядра Пуассона

$$v(r,\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)Q(\vartheta - t)dt = (Q * g)(\vartheta), \quad Q(t) = \frac{r\sin t}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Таким образом, с помощью линейной комбинации $\lambda P + \mu Q$, имея значение гармонической функции на окружности Γ, можно найти гармоническую в круге $\mathcal{D}$ функцию $\lambda u + \mu v$, причем функция v будет гармонически сопряженной к u.

Будем далее использовать также обозначения $u(z) = u(re^{i\vartheta})$, $v(z) = v(re^{i\vartheta})$ при $z \in \mathcal{D}$. Норму функции $u(z)$ на окружности Γ_r определим как

$$\|u\|_{L(\Gamma_r)} = \int\limits_{\mathbb{T}} |u(re^{i\vartheta})|d\vartheta.$$

Потребуем, чтобы $\|g\|_{L(\mathbb{T})} \le 1$, и обозначим $\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)}$ — класс функций, представимых в виде

$$h(z) = \lambda u(z) + \mu v(z),$$

где

$$u(z) = (P * g)(z), \quad v(z) = (Q * g)(z), \quad g(\vartheta) = f(e^{i\vartheta}), \quad \|g\|_L \le 1.$$

Нашей целью является нахождение величины наилучшего интегрального приближения класса $\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)}$ на окружности Γ_r радиуса r множеством гармонических многочленов $\mathcal{H}_{n-1}$, т.е. вычисление следующей величины:

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)})_{L(\Gamma_r)} = \sup_{h \in \mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)}} \inf_{H \in \mathcal{H}_{n-1}} \|h - H\|_{L(\Gamma_r)}.$$

Теорема 2. *При любых* $0 < r < 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)})_{L(\Gamma_r)} = \frac{2\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r^n\lambda}{\sqrt{1-2r^{2n}(2\lambda^2-1)+r^{4n}}} + \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1-2r^{2n}(2\lambda^2-1)+r^{4n}}+2r^n\mu}{\sqrt{1-2r^{2n}(2\lambda^2-1)+r^{4n}}-2r^n\mu}. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $K(t) = \lambda P(t) + \mu Q(t)$. Не нарушая общности, можно считать $\lambda = \cos\alpha,\ \mu = \sin\alpha$.

Напомним, что наилучшее приближение функции $h \in \mathbb{H}_{L(\Gamma_r)}$ множеством алгебраических гармонических многочленов $\mathcal{H}_{n-1}$ есть величина

$$\mathbb{E}_{n-1}(h)_{L(\Gamma_r)} = \mathbb{E}_{n-1}(K * g)_{L(\Gamma_r)} = \inf_{H\in\mathcal{H}_{n-1}} \|h - H\|_{L(\Gamma_r)},$$

а наилучшее приближение класса $\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)}$ —

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)})_{L(\Gamma_r)} = \sup_{h\in\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)}} \mathbb{E}_{n-1}(h)_{L(\Gamma_r)} = \sup_{\|g\|_{L(\mathbb{T})}\le 1} \mathbb{E}_n(K * g)_{L(\Gamma_r)}.$$

При фиксированном r в силу представления (4.1) имеем

$$\mathbb{E}_{n-1}(h)_{L(\Gamma_r)} = \inf_{H\in\mathcal{H}_{n-1}} \|h - H\|_{L(\Gamma_r)} = \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1}} \|w - \tau\|_L = E_{n-1}(w)_L,$$

где $w(t) = h(re^{it})$.

Учитывая представление [2, лемма 2]

$$K^*(t) = K(t) - \tau^*(t) = \frac{\gamma \sin n(t-\xi)}{1 - 2r\cos t + r^2},$$

где $\tau^*(t)$ – полином наилучшего приближения ядра K, а $\gamma,\ \xi$ – некоторые числа, (т. е. K^* имеет $2n-2$ равноотстоящих корней на $[0, 2\pi)$, а значит удовлетворяет условию $\mathbf{A}_\mathbf{n}^*$), можно воспользоваться равенствами (3.1). Таким образом, справедлива цепочка равенств:

$$\sup_{h\in\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)}} \mathbb{E}_{n-1}(h)_{L(\Gamma_r)} = \sup_{h\in\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)}} E_{n-1}(h)_L = \sup_{g\in\mathcal{T}_{n-1}^{\perp},\ \|g\|_{L(\Gamma)}\le 1} \|h\|_{L(\Gamma_r)} = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K) = \frac{1}{\pi}\|K^*\|.$$

Применяя (2.3), получим (4.2). Теорема доказана. □

Обозначим через $\mathbb{H}_\infty^{(\lambda,\mu)}$ класс функций h, представимых в виде $h(z) = K * g$, у которых $\|g\|_{L_\infty} \le 1$.

З а м е ч а н и е. В силу (3.1) и теоремы 2 для величины наилучшего приближения класса $\mathbb{H}_\infty^{(\lambda,\mu)}$ в метрике $L_\infty(\Gamma_r)$ выполняются равенства

$$\sup_{h\in\mathbb{H}_\infty^{(\lambda,\mu)}} \mathbb{E}_{n-1}(h)_{L_\infty(\Gamma_r)} = \mathcal{E}_{n-1}(\mathbb{H}_L^{(\lambda,\mu)})_{L(\Gamma_r)}$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r^n\lambda}{\sqrt{1 - 2r^{2n}(2\lambda^2 - 1) + r^{4n}}} + \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1 - 2r^{2n}(2\lambda^2 - 1) + r^{4n}} + 2r^n\mu}{\sqrt{1 - 2r^{2n}(2\lambda^2 - 1) + r^{4n}} - 2r^n\mu}.$$

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Бабенко за постановку задачи и полезные советы в ходе выполнения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** О наилучшем приближении аналитических функций // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4-5. С. 241–244.
2. **Барабошкина Н.А.** Приближение в L линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 79–86.
3. **Барабошкина Н.А.** Интегральное приближение линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного // Approx. Theory and Appl: Abstracts of Intern. conf. dedicated N. P. Korneichuk memory / Dnepropetrovsk National University. Dnepropetrovsk, 2010. P. 21–22.

4. **Гарнет Дж.** Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.
5. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
6. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. М: Наука, 1976. 320 с.
7. **Никольский С.М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. Избр. тр.: в 3 т. Т. 1. М.: Наука, 2006. 209 с.
8. **Парфененков А. В.** Наилучшее продолжение алгебраических многочленов с единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 15, № 1. С. 184–194.
9. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Т. 1: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
10. **Соболев С.Н.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
11. **Serdyuk A.S., Sokolenko I.V.** Asymptotic behavior of best approximations of classes of Poisson integrals of functions from H_ω // J. Approx. Theory. 2011. Vol. 163, no. 11. P. 1692–1706.

Поступила 28.01.2013

Барабошкина Наталья Алексеевна
ведущий математик
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nata-npc@2-u.ru

УДК 519.62

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ СКРЫТОСТИ В СЛУЧАЕ ВЫПУКЛОГО ЗАТЕНЯЮЩЕГО МНОЖЕСТВА[1]

В. И. Бердышев

Найдена производная по направлению от функции скрытости в случае ограниченного выпуклого затеняющего множества.

Ключевые слова: скрытость, видимость, дифференцирование, навигация.

V. I. Berdyshev. Differentiation of the concealment function in the case of a convex occluding set.

A directional derivative of the concealment function is found in the case of a bounded convex occluding set.

Keywords: concealment, visibility, differentiation, navigation.

Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ зафиксировано телесное множество G (замыкание заданного открытого множества $\overset{\circ}{G}$), препятствующее видимости и движению, t — движущийся объект, f — наблюдатель. При решении задач навигации автономных объектов по геофизическим полям, в том числе при разработке тактики перемещения объекта, необходимо учитывать такие обстоятельства, как видимость объекта наблюдателем и скрытость объекта от наблюдателя. В [1;2] определены функции, характеризующие понятия видимости и скрытости, исследовались свойства этих функций. В [2], в частности, рассматривался следующий вариант функции скрытости $C(t, f)$. Пусть $d(t, f)$ — точная нижняя грань длин, не пересекающихся с $\overset{\circ}{G}$ спрямляемых кривых, соединяющих точки t и f (метрика на $\mathbb{R}^m \setminus \overset{\circ}{G}$),

$$v(t) = v(t, G) = \{\overline{x \in \mathbb{R}^m \colon [t, x] \cap G = \varnothing}\}$$

— замыкание множества точек, видимых из точки t. Тогда

$$C(t, f) = d(f, v(t)) = \min\{d(f, x) \colon x \in v(t)\}$$

— расстояние, которое должен преодолеть наблюдатель, чтобы увидеть объект t. Очевидно, функция $C(t, f)$ непрерывна по переменной f. Свойства функции $C(t) = C(t, f)$ по переменной t определяются структурой множества G.

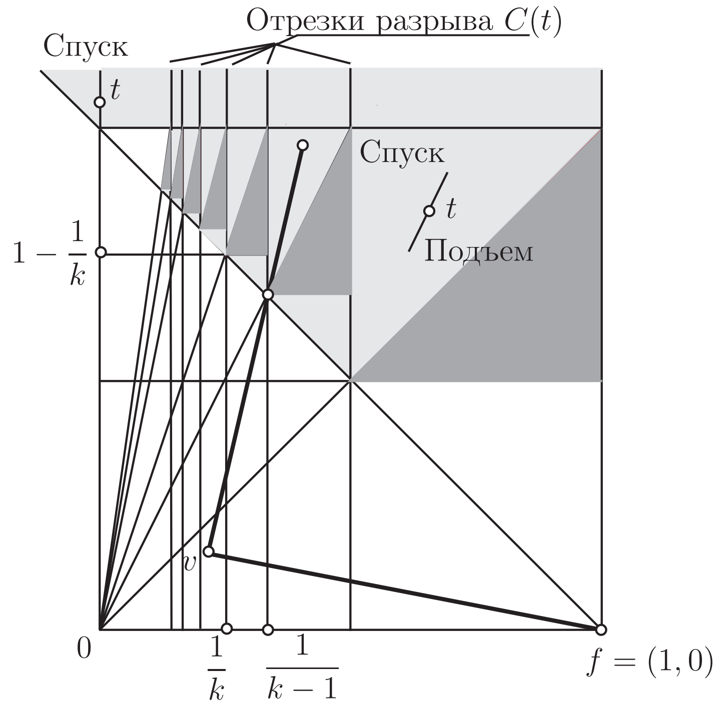
П р и м е р. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ состоит из треугольников с вершинами (см. рисунок)

$$\Big(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\Big), \qquad \Big(\frac{1}{k-1}, 1\Big), \qquad \Big(\frac{1}{k-1}, 1 - \frac{1}{k}\Big) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Для наблюдателя $f = (1, 0)$ множество невидимых точек есть

$$\big\{(x, y) \colon x \leq 1,\ y \geq \max\{1 - x, 1\}\big\}.$$

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022), а также поддержана РФФИ (проект 11-01-00445).



Функция $C(t)$ непрерывна всюду, кроме лучей

$$\Big\{(x,y)\colon x=\frac{1}{k},\ y>1\Big\} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Вне указанных лучей и луча $\{(0,y)\colon y>1\}$ эта функция дифференцируема. В каждой точке $t=(0,y)$, $y>1$, в любом направлении $\widetilde{t}=(\widetilde{x},\widetilde{y})$, $\|\widetilde{t}\|=1$, $\widetilde{x}>0$, функция $C(t+\lambda\widetilde{t})$ по λ непрерывна, но не дифференцируема, а в направлении $\widetilde{t}=(\widetilde{x},\widetilde{y})$, $\widetilde{x}<0$, дифференцируема и убывает. Она строго возрастает на интервалах $(1/k\widetilde{x}, 1/(k-1)\widetilde{x})$, в точках $\lambda=1/k\widetilde{x}$ ее левый предел строго больше правого предела при $k=2,3\ldots$. Так,

$$C(t)=1-\frac{1}{k}\ \text{ при }\ t=\Big(\frac{1}{k}+0,1\Big), \qquad C(t)=\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\ \text{ при }\ t=\Big(\frac{1}{k}-0,1\Big)$$

и, следовательно,

$$\bigg[C\bigg(\Big(\frac{1}{k-1}-0,1\Big)\bigg)-C\bigg(\Big(\frac{1}{k}+0,1\Big)\bigg)\bigg]\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\Big)^{-1}\to\infty \qquad (k\to\infty).$$

Для точек $t=(x,y), 1/k<x<1/(k-1),\ y>(k-1)x$, вектор $\widetilde{t}$ задает направление подъема, если $\langle\widetilde{t},n\rangle>0$, а при $\langle\widetilde{t},n\rangle<0$ — направление спуска, где $n=(y-(k-1)/k,\ -x+1/k)$ — нормаль к прямой, соединяющей точки t и $(1/k,\ 1-1/k)$.

Подобный анализ геофизического поля целесообразно проводить для успешного решения навигационной задачи.

Приведенный пример множества G — фрагмент искусственно созданного геофизического поля. При использовании естественного поля высот земной поверхности затеняющими множествами часто являются выпуклые или близкие к выпуклым множества.

Основной результат данной работы — доказательство дифференцируемости функции $C(t)$ и формула для ее производной по направлениям в случае, когда G — выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$ $(m\geq 3)$. При $m=2$ эта задача решена в [2].

1. Вспомогательные предложения

Далее $\rho(t, G)$ — евклидово расстояние от точки t до множества G, $V_R(t) = \{x\colon \|t-x\| \le R\}$ — евклидов шар радиуса $R \ge 0$ с центром в точке t.

Лемма 1. *Пусть G — выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, $t, t' \in \mathbb{R}^m$, $\rho(t, G) = r > 0$, $\|t-t'\| < r$, $q \in v(t, G) \backslash v(t', G)$, тогда*

$$\rho(q, v(t', G)) \le \frac{\|t-q\| - r}{r} \|t - t'\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$[t, q] \cap G = \varnothing, \qquad (t', q) \cap G \ne \varnothing.$$

Пусть $a \in [t, q]$, $\|t - a\| = r$, $l = l(t', a) = \{\lambda t' + (1-\lambda)a\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$, точки $t_0, q_0 \in l$ являются ближайшими на l к точкам t и q соответственно. Поскольку G выпукло, то $[t', q_0] \cap G = \varnothing$, т. е. $q_0 \in v(t', G)$, и, далее,

$$\rho(q, v(t', G)) \le \|q - q_0\| = \frac{\|q-a\|}{\|t-a\|} \|t - t_0\| \le \frac{\|t-q\| - r}{r} \|t - t'\|.$$

Лемма установлена. □

Следствие 1. *Пусть $\rho(t, G) \ge r$, $\rho(t', G) \ge r$, $\|t - t'\| \le r$, $R > r$, тогда для хаусдорфова расстояния h выполняется неравенство*

$$h\big(v(t, G) \cap V_R(t), v(t', G) \cap V_R(t')\big) \le \frac{R-r}{r} \|t - t'\|. \tag{1.1}$$

Предложение 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое множество, $R > r$, и для точек t_i, f_i $(i = 1, 2)$ выполняются условия $f_i \notin v(t_i, G)$,*

$$\rho(t_i, G) \ge r, \qquad \|t_i - f_i\| \le R \qquad (i = 1, 2), \qquad \|t_1 - t_2\| \le r,$$

тогда

$$|C(t_1, f_1) - C(t_2, f_2)| \le \|f_1 - f_2\| + \frac{R-r}{r} \|t_1 - t_2\|. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $\rho(f_1, v(t_1)) - \rho(f_2, v(t_1)) \le \|f_1 - f_2\|$,

$$\rho(f_2, v(t_1)) - \rho(f_2, v(t_2)) \le h(v(t_1), v(t_2)) \le \frac{R-r}{r} \|t_1 - t_2\|.$$

Первое неравенство очевидно. Докажем второе. Пусть v_i — ближайшая к f точка из $v(t_i)$, $\overline{v}_1$ — ближайшая к v_2 из $v(t_1)$ точка, а $\overline{v}_2$ — ближайшая к v_1 из $v(t_2)$ точка, тогда $\rho(f, v(t_1)) \le \|f - \overline{v}_1\| \le \|f - v_2\| + \|v_2 - \overline{v}_1\| \le \rho(f, v(t_2)) + h(v(t_1), v(t_2))$ и, аналогично, $\rho(f, v(t_2)) \le \rho(f, v(t_1)) + h(v(t_1), v(t_2))$. Учитывая (1.1), получаем (1.2). □

Следствие 2. *Для направлений $\widetilde{t}$, $\widetilde{f}$, $\|\widetilde{t}\| = \|\widetilde{f}\| = 1$, $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$ имеем*

$$\big|\rho(f, v(t + \lambda_1 \widetilde{t})) - \rho(f + \lambda \widetilde{f}, v(t + \lambda_2 \widetilde{t}))\big| \le |\lambda_1 - \lambda_2| \frac{R}{r},$$

поэтому функция $\rho(f + \lambda \widetilde{f}, v(t + \lambda \widetilde{t}))$ почти всюду дифференцируема по λ.

Лемма 2. *Пусть G — выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}^2$, $\rho(t, G) \ge r > 0$, $\widetilde{t}$ — заданное направление, l и l_λ — опорные к G прямые, $t \in l$, $t_\lambda = t + \lambda \widetilde{t} \in l_\lambda$ такие, что при $\lambda \to +0$ угол между прямыми стремится к нулю, n и n_λ — нормали к l и l_λ, внешние по отношению к G, тогда $\|n - n_\lambda\| \le b\lambda$, где величина $b = b(r)$ зависит только от r.*

В справедливости леммы легко убедиться, рассматривая прямую, содержащую t_λ и точку z, $\|z - t\| = r$, расположенную на прямой l между t и множеством G.

2. Дифференцирование функции $C(t)$ по направлениям

Далее G — выпуклое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, $t \notin G$, $f \in \mathbb{R}^m$, $[t,f] \cap \mathring{G} \neq \varnothing$ и точка f удалена от G настолько, что расстояние $d(f, v(t,G))$ совпадает с обычным евклидовым расстоянием $\rho(f, v(t,G))$. Не ограничивая общности, будем считать, что f — начало координат.

Обозначим через $K(t) = K(t,G)$ границу конуса $\{(1-\alpha)t + \alpha x \colon \alpha \ge 0,\ x \in G\}$ с вершиной t, натянутого на G. Ясно, что $\rho(f, v(t)) = \rho(f, K(t))$. Если точка $v \in K(t)$ является ближайшей к f, то в ней имеется единственная опорная к конусу $K(t)$ и одновременно к шару $V_\rho(f)$, $\rho = \rho(f, K(t))$ плоскость L размерности $n-1$. Эта плоскость содержит прямую $l = l(t,v) = \{\alpha t + (1-\alpha)v \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$, а внутренность шара $V_\rho(f)$ не содержит точек из $K(t)$. Отсюда следует, что поверхность $K(t)$ является гладкой в точках из пересечения $l \cap K(t)$, в частности в точках из $l \cap G$. Линейный функционал (нормаль к L), определяющий плоскость L, обозначим через $n = n_t$:

$$L = \{x \colon \langle n_t, x\rangle = a_L\}, \qquad a_L > 0, \tag{2.1}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Пусть P — двумерная плоскость, натянутая на прямую $l = l(t,v)$ и точку f, $\widetilde{t}_p$ — проекция вектора $\widetilde{t}$ на плоскость P, γ — угол между вектором $\widetilde{t}$ и P. Определим еще точку x^* следующим образом: если $l \cap G = [\overline{x}, \underline{x}]$, $\|t - \underline{x}\| \le \|t - \overline{x}\|$, то $x^* = \overline{x}$ при $\langle n, \widetilde{t}\rangle > 0$ и $x^* = \underline{x}$ при $\langle n, \widetilde{t}\rangle < 0$.

Теорема. *Пусть G — выпуклое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, $t \notin G$, $f \notin G$, $[t,f] \cap \mathring{G} \neq \varnothing$, $d(f, v(t)) = \rho(f, v(t))$, v — ближайшая к f точка из $v(t)$, $\widetilde{t}$ — заданное направление, $\|\widetilde{t}\| = 1$. Векторы n_t, $\widetilde{t}_p$, угол γ и точка x^* определены выше. Функция $C(t)$ дифференцируема по направлению $\widetilde{t}$, и имеет место равенство*

$$\frac{dC(t)}{d\widetilde{t}} = \frac{\|v - x^*\|}{\|t - x^*\|} \Big\langle n_t, \frac{\widetilde{t}_p}{\|\widetilde{t}_p\|} \Big\rangle \cos\gamma. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\lambda > 0$ есть точка v_λ из $v(t_\lambda)$, ближайшая к f такая, что $v_\lambda \to v$ $(\lambda \to +0)$. На самом деле, эти точки v_λ можно выбрать так, что выполняется соотношение

$$\|v - v_\lambda\| \le b \cdot \lambda, \tag{2.3}$$

где $b = b(r)$ — величина, зависящая только от $r = \rho(t, G)$. Чтобы это доказать, для λ, $0 < \lambda < r/2$, определим множество N_λ векторов n, $\|n\| = 1$, для которых плоскость $L_\lambda = \{x \colon \langle n, x\rangle = \langle n, t_\lambda\rangle\}$ является опорной к множеству G. Множество N_λ компактно. Найдем вектор $n_\lambda \in N_\lambda$, для которого

$$\|n_\lambda - n_t\| = \min\{\|n - n_t\| \colon n \in N_\lambda\}.$$

Он удовлетворяет неравенству

$$\|n_\lambda - n_t\| \le b \cdot \lambda, \tag{2.4}$$

поскольку этому неравенству удовлетворяет вектор, определяющий опорную к G гиперплоскость, которая содержит точку t_λ и параллельна $(n-2)$-мерной плоскости $L^\perp$, $v \in L^\perp \subset L$, ортогональной двумерной плоскости P. Последний факт очевиден при $\langle n_t, t_\lambda\rangle > a_L$ (см. (2.1)), а при $\langle n_t, t_\lambda\rangle < a_L$ устанавливается посредством проектирования множества G, плоскостей L, L^λ и точек t, t_λ на плоскость P и использования леммы 2. Пусть v_λ — ближайшая к f точка плоскости L_λ. Поскольку векторы $v - f$, $v_\lambda - f$ ортогональны плоскостям L и L_λ соответственно, то из соотношения (2.4) вытекает (2.3).

Для вычисления производной функции $C(t)$ спроектируем прямую $l_\lambda = l(t_\lambda, v_\lambda)$ на плоскость P и эту проекцию обозначим через l'_λ. Легко видеть, что если вектор $\widetilde{t}$ параллелен плоскости L, т. е. $\langle n_t, \widetilde{t}\rangle = 0$, то $v_\lambda = v$. Будем далее предполагать, что $\langle n_t, \widetilde{t}\rangle \neq 0$, т. е. $\langle n_t, t_\lambda\rangle \neq a_L$. Справедлива

Лемма 3. *Прямые l, l'_λ пересекаются. Точка пересечения x_λ при $\lambda \to +0$ стремится к точке $\overline{x}$, если $\langle n_t, t_\lambda\rangle > a_L$, и стремится к $\underline{x}$, если $\langle n_t, t_\lambda\rangle < a_L$.*

Доказательство. Плоскость, содержащую точку f и прямую $l_\lambda = l(t_\lambda, v_\lambda)$, обозначим через P_λ. Поскольку $\|v - v_\lambda\| \le b\cdot\lambda$, $\|t - t_\lambda\| = \lambda$, то плоскости P и P_λ сближаются при $\lambda \to +0$, более того, для любой точки $z_\lambda \in P_\lambda$, $\rho(z_\lambda, P) = O(\lambda)$. Так как прямая l_λ является опорной к $G\cap P_\lambda$, а $\langle n_t, G\rangle \le a_L$, то l_λ пересекает плоскость L и утверждение леммы при $\langle n_t, \widetilde{t}\rangle > 0$ выполнено. Ранее показано, что точки прямой l являются точками гладкости конуса, поэтому для точек g из множества $\widetilde{G} = G\cap K(t)$ из окрестности прямой l выполняется соотношение
$$\rho(g, L) = o(\rho(g, P)). \tag{2.5}$$
Легко убедиться, что множество G связно и “опоясывает” конус $K(t)$, поэтому при малых λ плоскость P_λ пересекается с $\widetilde{G}$ в окрестности прямой l. Пусть $g_\lambda \in \widetilde{G}\cap P_\lambda$, g_λ^L — ближайшая к g_λ точка из L, а t_λ^L — ближайшая к t_λ точка из L. Поскольку прямая l_λ является опорной к $G\cap P_\lambda$, то l_λ пересекается с лучом $\{(1-\lambda)g + \lambda g_\lambda^L\colon \lambda \ge 0\}$. Если $l_\lambda \cap [g_\lambda^L, t_\lambda^L] \ne \varnothing$, то и $l\cap l_\lambda^L \ne \varnothing$. Если $l_\lambda \cap [g^L, g_\lambda^L] \ne \varnothing$, то, учитывая, что $\rho(t_\lambda, G\cap P_\lambda) \ge r$, $\rho(t_\lambda, L) = O(\lambda)$, $\rho(g_\lambda, P) = O(\lambda)$ и, значит, ввиду (2.5) $\rho(g_\lambda, L) = o(\lambda)$, устанавливаем, что $l_\lambda \cap L \ne \varnothing$ и $l\cap l'_\lambda \ne \varnothing$. Утверждение леммы о сходимости точки x_λ очевидно при $\lambda \to +0$. Лемма доказана. □

Продолжая доказательство теоремы, введем следующие обозначения: t'_λ — проекция точки t_λ на P, f' — проекция точки f на l'_λ, t^λ — точка из l'_λ, для которой отрезок $[t^\lambda, t]$ ортогонален прямой l, v^λ — точка пересечения луча $\{(1-\alpha)f + \alpha v\colon \alpha > 0\}$ с прямой l'_λ. Определим углы $\delta_\lambda = \angle t^\lambda t'_\lambda t$, $\beta = \angle t^\lambda t t'_\lambda$, $0 < \beta < \pi/2$, и напомним, что γ — угол, образованный вектором $\widetilde{t}$ с плоскостью P. При $\lambda \to +0$ угол δ_λ стремится к углу δ между l и проекцией вектора $\widetilde{t}$ на плоскость P. Поскольку
$$\frac{\|t - t^\lambda\|}{\|t - t'_\lambda\|} = \frac{\sin\delta_\lambda}{\sin(\beta + \delta_\lambda)}, \qquad \frac{\|t - t'_\lambda\|}{\lambda} = \cos\gamma,$$
то
$$\|t - t^\lambda\| = \lambda\cos\gamma\frac{\sin\delta_\lambda}{\sin(\beta+\delta_\lambda)}.$$
Далее
$$\|v - v^\lambda\| = \|t - t^\lambda\|\frac{\|v - x_\lambda\|}{\|t - x_\lambda\|} = \lambda\cos\gamma\frac{\sin\delta_\lambda}{\sin(\beta+\delta_\lambda)}\,\frac{\|v - x_\lambda\|}{\|t - x_\lambda\|}, \tag{2.6}$$
$$\|v^\lambda - f'\| = \|v - v^\lambda\|\frac{\|f - f'\|}{\|v - x_\lambda\|} = O(\|v - v^\lambda\|) = O(\lambda),$$
$$\|v^\lambda - f\| - \|f' - f\| = O(\|f' - v^\lambda\|^2). \tag{2.7}$$
Если $\langle n_t, \widetilde{t}\rangle > 0$, то с учетом (2.7) получаем
$$\|f - v\| = \|f - v^\lambda\| + \|v^\lambda - v\| = \|f - f'\| + (\|f - v^\lambda\| - \|f - f'\|) + \|v^\lambda - v\|$$
$$= \|v - v^\lambda\| + O(\|f' - v^\lambda\|^2) + \|f - f'\|,$$
а если $\langle n_t, \widetilde{t}\rangle < 0$, то
$$\|f - v\| = \|f - v^\lambda\| - \|v - v^\lambda\| = \|f - f'\| + (\|f - v^\lambda\| - \|f - f'\|) - \|v - v^\lambda\|$$
$$= -\|v - v^\lambda\| + O(\|f' - v^\lambda\|^2) + \|f - f'\|.$$
Отсюда и из (2.6) следует
$$\|f - v_\lambda\| - \|f - v\| = \operatorname{sign}\langle n_t, \widetilde{t}\rangle\lambda\cos\gamma\frac{\sin\delta_\lambda}{\sin(\beta+\delta_\lambda)}\,\frac{\|v - x_\lambda\|}{\|t - x_\lambda\|} + (\|f - f'\| - \|f - v\|) + O(\lambda^2). \tag{2.8}$$

Здесь

$$\sin\delta_\lambda \to \cos\beta, \qquad \beta < \frac{\pi}{2}, \qquad \sin(\beta+\delta_\lambda) \to 1, \quad \text{так как} \quad \beta+\delta = \pi/2. \tag{2.9}$$

Учитывая, что

$$\rho(v_\lambda, P) \le b\cdot\lambda \quad (\text{см. } (2.3)), \quad \rho(t_\lambda, P) \le \lambda, \qquad \|t_\lambda - v_\lambda\| \ge r,$$

l'_λ — проекция прямой l_λ на P, v_λ — ближайшая к f точка из l_λ, f' — ближайшая к f точка из l'_λ, нетрудно проверить, что

$$\|f' - f\| - \|v_\lambda - f\| = O(\lambda^2). \tag{2.10}$$

Из соотношений (2.8)–(2.10) следует равенство (2.2). Теорема установлена. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Объект и наблюдатель. Задача сопровождения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 7–9.
2. **Бердышев В.И.** Характеристики скрытости движущегося объекта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 110–119.

Бердышев Виталий Иванович
академик
директор ИММ УрО РАН
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 28.02.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.988.68

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПРОЦЕССЫ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА, ПОРОЖДАЮЩИЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В. В. Васин

Исследуется двухэтапный алгоритм построения регуляризующего алгоритма для приближенного решения нелинейного нерегулярного операторного уравнения. Сначала исходное уравнение регуляризуется сдвигом (схема Лаврентьева). Для аппроксимации решения регуляризованного уравнения привлекаются модифицированные методы типа Ньютона и Гаусса — Ньютона, в которых на всех итерациях производная оператора вычисляется в фиксированной точке. Устанавливаются теоремы сходимости процессов, оценки погрешности и свойство фейеровости итераций.

Ключевые слова: нерегулярные операторные уравнения, модифицированный метод типа Ньютона, фейеровская аппроксимация.

V. V. Vasin. Modified Newton-type processes generating Fejér approximations of regularized solutions to nonlinear equations.

We investigate a two-stage algorithm for the construction of a regularizing algorithm that solves approximately a nonlinear irregular operator equation. First, the initial equation is regularized by a shift (Lavrent'ev's scheme). To approximate a solution of the regularized equation, we apply modified Newton and Gauss–Newton type methods, in which the derivative of the operator is calculated at a fixed point for all iterations. Convergence theorems for the processes, error estimates, and the Fejér property of iterations are established.

Keywords: irregular operator equations, modified Newton-type method, Fejér approximation.

80-летию И. И. Еремина посвящается

1. Введение

Исследуется нелинейное операторное уравнение

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

с приближенно заданной правой частью, $||f - f_\delta|| \leqslant \delta$, и оператором A, действующим в гильбертовых пространствах U, F, когда обратные операторы $A^{-1}, (A')^{-1}$ в окрестности точного решения являются разрывными, что не позволяет конструировать устойчивые итерационные аппроксимации искомого решения на основе классических методов Ньютона или Гаусса — Ньютона. Для решения нерегулярных (некорректных) уравнений (1.1) были построены итеративно регуляризованные варианты этих методов. В частности, для монотонного оператора A был предложен и обоснован итеративно регуляризованный метод Ньютона [1; 2]

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^k) + \alpha\, I)^{-1}(A(u^k) + \alpha\,(u^k - u^*) - f_\delta), \tag{1.2}$$

а для уравнения с дважды дифференцируемым оператором и истокообразно представимым решением изучены метод Гаусса — Ньютона [3]

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha\, I)^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha\,(u^k - u^*)] \tag{1.3}$$

[1]Исследование поддержано в Уральском федеральном университете грантом Правительства РФ (договор №11.G34.31.0064) и в Институте математики и механики УрО РАН — РФФИ (проект 12-01-00106) и УрО РАН (проект №12-П-15-2019).

и метод Левенберга — Марквардта (см. статью [4] и библиографию к ней)

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha\, I)^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)]. \tag{1.4}$$

В данной статье исследуются модифицированные варианты процессов (1.2)–(1.4) вида

$$u^{k+1} = u^k - \gamma\,(A'(u^0) + \bar\alpha\, I)^{-1}[A(u^k) + \alpha\,(u^k - u^*) - f_\delta] \equiv T(u^k), \tag{1.5}$$

$$u^{k+1} = u^k - \gamma\,(A'(u^0)^* A'(u^0) + \bar\alpha\, I)^{-1}[A'(u^0)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha\,(u^k - u^*)] \equiv T(u^k), \tag{1.6}$$

т. е. в отличие от (1.2), (1.4) в процессах (1.5), (1.6) производная оператора A вычисляется в фиксированной точке u^0 (начальном приближении), дополнительно вводится демпфирующий множитель γ и, кроме того, параметры α и $\bar\alpha$ не обязаны совпадать.

На основе (1.5), (1.6) строится двухступенчатый алгоритм: на первом этапе используется либо регуляризация сдвигом (схема Лаврентьева)

$$A(u) + \alpha(u - u^*) - f_\delta = 0, \tag{1.7}$$

либо регуляризация в форме

$$A'(u^0)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha\,(u - u^*) = 0, \tag{1.8}$$

а на втором — для аппроксимации решения u_α регуляризованных уравнений (1.7), (1.8) задействуются соответственно процессы (1.5), (1.6); здесь u^* — пробное решение для уравнения (1.1), которое в частном случае может совпадать с u^0. При наличии сильной сходимости в методах (1.5), (1.7) и в (1.6), (1.8) и подходящей связи параметров получаем аппроксимацию решения исходного уравнения, т. е. регуляризующий алгоритм (РА), а при наличии оценок погрешности на каждом этапе имеем оценку порождаемого РА.

Двухэтапный подход к построению РА на основе метода (1.6) для варианта, когда производная оператора A вычисляется в фиксированной точке только в обращаемом операторе, исследовался в работах автора [5; 6], а вариант метода (1.6) при $\bar\alpha = \alpha,\ \gamma = 1$ рассматривался в статье [7] при иных условиях на оператор A.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 доказываются теоремы сходимости итераций для модифицированного метода Ньютона (ММН) и модифицированного метода Левенберга — Марквардта (ММЛ-М), т. е. для (1.5) и (1.6) при $\gamma = 1$. Раздел завершается развернутым замечанием, в котором описывается возможность обобщения схем (1.5), (1.6), когда единичный оператор I в обращаемых операторах заменяется на линейный оператор B с некоторыми условиями, которые сохраняют основные свойства итерационных процессов. В разд. 3 исследуются ММН и ММЛ-М с демпфирующим множителем γ и доказывается, что при достаточно малом γ операторы шага T процессов (1.5) и (1.6) обладают свойством сильной M-фейеровости (M-псевдосжимаемости) [8–10]:

$$||T(u) - z||^2 \leqslant ||u - z||^2 - \nu\,||u - T(u)||^2 \quad \forall u \in D(T), \quad z \in \mathrm{Fix}(T) = M, \tag{1.9}$$

где ν — некоторый фиксированный положительный параметр; $\mathrm{Fix}(T)$ — множество неподвижных точек оператора T. Неравенство (1.9) влечет свойство сильной фейеровости для итерации $u^{k+1} = T(u^k)$

$$||u^{k+1} - z||^2 \leqslant ||u^k - z||^2 - \nu\,||u^k - u^{k+1}||^2 \tag{1.10}$$

и позволяет формулировать теоремы сходимости итераций в бесконечномерных пространствах.

Сильная M-фейеровость (M-псевдосжимаемость) была введена автором [8], с одной стороны, как некоторое ослабление свойства псевдосжимаемости Б. Мартине [11], а с другой — как усиление свойства фейеровости оператора

$$||T(u) - z|| < ||u - z|| \quad \forall u \in D(T), \quad u \notin \mathrm{Fix}(T), \quad z \in \mathrm{Fix}(T) = M,$$

введенное И. И. Ереминым, который построил теорию таких операторов и соответствующих процессов с приложениями к задачам линейного и выпуклого программирования (см., например, [12–14], а также [10]). Кроме того, им установлено такое замечательное свойство класса фейеровских отображений, как замкнутость относительно операций произведения и выпуклой суммы. Заметим, что это важное свойство имеет место также для класса псевдосжимающих отображений. Это позволяет строить большое разнообразие гибридных итерационных процессов, образуя суперпозиции операторов шага нескольких итерационных процессов, а также эффективно учитывать в итерационном алгоритме дополнительную априорную информацию, заданную в форме выпуклых ограничений. В разд. 4 формулируются теоремы сходимости приближенных решений, полученных регуляризацией сдвигом (схема Лаврентьева), и приводится оценка погрешности методов. В разд. 5 представлено описание обратной задачи гравиметрии и результатов численного эксперимента. Описание характерных особенностей итерационных методов фейеровского типа и краткий обзор первых работ по этой проблематике даны в заключительном разд. 6.

2. Оценки погрешности итерационных методов

В этом разделе исследуем оценки погрешности методов (1.5), (1.6) при $\gamma = 1$ для аппроксимации решений регуляризованных уравнений (1.7), (1.8).

2.1. Модифицированный метод Ньютона. Итак, предметом исследования является процесс (1.5) при $\gamma = 1$.

Теорема 2.1. *Пусть $A\colon U \to U$ — непрерывно дифференцируемый оператор с условиями*

$$||A'(u)|| \leqslant N_1, \qquad ||A'(u_1) - A'(u_2)|| \leqslant N_2||u_1 - u_2|| \tag{2.1}$$

в некотором шаре $S_r(u^0)$, $A'(u^0)$ — самосопряженный неотрицательно определенный оператор и уравнение (1.7) *разрешимо при заданных $\alpha > 0$, $u^*, f_\delta \in U$.*

Если параметры α, $\bar\alpha$ и начальное приближение таковы, что

$$||u^0 - u_\alpha|| \leqslant r, \qquad 0 < \alpha \le \bar\alpha, \qquad r = \alpha/(5N_2), \tag{2.2}$$

тогда при $\gamma = 1$ модифицированный метод Ньютона (ММН) (1.5) *порождает последовательность $\{u^k\}$, для которой справедлива оценка*

$$||u^k - u_\alpha|| \leqslant q^k\, ||u^0 - u_\alpha|| \leqslant q^k r, \tag{2.3}$$

где $q = (1 - \alpha/(2\bar\alpha)) < 1$, u_α — решение уравнения (1.7).

Доказательство. Принимая во внимание условия теоремы, имеем соотношения:

$$\begin{gathered} A(u^k) - A(u_\alpha) = A(u^k) - [A(u^k) + A'(u^k)(u_\alpha - u^k) + \xi] = A'(u^k)(u^k - u_\alpha) - \xi, \\ ||\xi|| \leqslant N_2||u^k - u_\alpha||^2/2, \qquad A(u_\alpha) + \alpha(u_\alpha - u^*) - f_\delta = 0, \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} u^{k+1} - u_\alpha &= u^k - u_\alpha - [A'(u^0) + \bar\alpha\, I]^{-1}[A(u^k) + \alpha\,(u^k - u^*) - f_\delta - (A(u_\alpha) + \alpha\,(u_\alpha - u^*) - f_\delta)] \\ &= u^k - u_\alpha - [A'(u^0) + \bar\alpha\, I]^{-1}[A(u^k) - (A(u^k) + A'(u^k)(u_\alpha - u^k) + \xi) + \alpha\,(u^k - u_\alpha)] \\ &= u^k - u_\alpha - [A'(u^0) + \bar\alpha\, I]^{-1}[A'(u^0)(u^k - u_\alpha) + \bar\alpha\,(u^k - u_\alpha) \\ &\quad + (A'(u^k) - A'(u^0))(u^k - u_\alpha) - \xi + (\alpha - \bar\alpha)(u^k - u_\alpha)] \\ &= [A'(u^0) + \bar\alpha\, I]^{-1}[(A'(u^k) - A'(u^0))(u^k - u_\alpha) - \xi + (\alpha - \bar\alpha)(u^k - u_\alpha)], \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$||u^{k+1} - u_\alpha|| \leqslant \frac{1}{\bar\alpha}\,[N_2\,||u^k - u^0|| + N_2\,||u^k - u_\alpha||/2 + (\bar\alpha - \alpha)]\,||u^k - u^\alpha||. \tag{2.5}$$

По условию $||u^0 - u_\alpha|| \leqslant q^0 r$. Предположим, что $||u^{k-1} - u_\alpha|| \leqslant q^{k-1} r$. Учитывая неравенство

$$||u^{k-1} - u^0|| \leqslant ||u^{k-1} - u_\alpha|| + ||u_\alpha - u^0|| \leqslant 2r$$

и условия (2.2), (2.4), из (2.5) непосредственно получаем оценку (2.3).

2.2. Модифицированный метод Левенберга — Марквардта. Обратимся теперь к модифицированному методу Левенберга—Марквардта в форме (1.6) при $\gamma = 1$. Как было упомянуто во введении, этот метод исследовался в [7], где для сходимости итераций предполагались некоторые дополнительные структурные условия на оператор, отличные от (2.1).

Теорема 2.2. *Пусть $A\colon U \to F$, для производной оператора выполнены условия* (2.1) *и уравнение* (1.8) *имеет решение u_α.*

Если параметры α, $\bar\alpha$ и начальное приближение u^0 таковы, что

$$||u^0 - u_\alpha|| \leqslant r, \qquad 0 < \alpha \le \bar\alpha, \qquad r = \alpha/(5N_1N_2), \tag{2.6}$$

то при $\gamma = 1$ метод (1.6) *порождает итерационную последовательность $\{u^k\}$, для которой $u^k \in S_r(u^\alpha)$ и выполнена оценка* (2.3).

Доказательство. Принимая во внимание соотношения

$$A'(u^0)(A(u_\alpha) - f_\delta) + \alpha\,(u_\alpha - u^0), \qquad ||(A'(u^0)^*A'(u^0) + \bar\alpha\, I)^{-1}|| \leqslant 1/\bar\alpha,$$
$$A(u^k) - f_\delta = A(u_\alpha) - f_\delta + A'(u_\alpha)(u^k - u_\alpha) + \xi,$$

где ξ удовлетворяет (2.4), имеем

$$\begin{gathered} u^{k+1} - u_\alpha = u^k - u_\alpha \\ - [A'(u^0)^*A'(u^0) + \bar\alpha\, I]^{-1}[A'(u^0)^*(A(u^k) - f_\delta) + \alpha\,(u^k - u^0) - A'(u^0)^*(A(u_\alpha) - f_\delta) - \alpha\,(u_\alpha - u^0)] \\ = u^k - u_\alpha - [A'(u^0)^*A'(u^0) + \bar\alpha\, I]^{-1}[A'(u^0)^*A'(u^0)(u_k - u^\alpha) + \bar\alpha\,(u^k - u_\alpha) \\ + (\alpha - \bar\alpha)(u^k - u_\alpha) + A(u^0)^*A'(u_\alpha)(u^k - u_\alpha) - A'(u^0)^*A'(u^0)(u^k - u_\alpha) + A'(u^0)^*\xi] \\ = [A'(u^0)^*A'(u^0) + \bar\alpha\, I]^{-1}[(\alpha - \bar\alpha)(u^k - u_\alpha) + A'(u^0)^*(A'(u_\alpha) - A'(u^0))(u^k - u_\alpha) + A'(u^0)^*\xi]. \end{gathered}$$

С учетом условий (2.1), (2.4) приходим к оценке

$$||u^{k+1} - u_\alpha|| \leqslant \frac{1}{\bar\alpha}\Big[(\bar\alpha - \alpha) + N_1N_2\,||u_\alpha - u^0|| + \frac{N_1N_2}{2}\,||u^k - u_\alpha||\Big]||u^k - u_\alpha||. \tag{2.7}$$

Согласно условиям теоремы $||u^0 - u_\alpha|| \leqslant r$. Предполагая, что $||u^{k-1} - u_\alpha|| \leqslant q^{k-1}r$, и учитывая выбор параметров в соответствии с (2.6), из (2.7) получаем оценку (2.3) с тем же значением $q = 1 - \alpha/(2\bar\alpha)$.

Замечание. В методах (1.5), (1.6) обращаемые операторы можно брать в более общем виде, заменяя единичный оператор I на оператор B. Для получения оценки вида (2.3) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$||(A'(u^0) + \bar\alpha B)^{-1}|| \leqslant c_0/\bar\alpha, \qquad ||(A'(u^0)^*A'(u_0) + \bar\alpha B)^{-1}|| \leqslant c_0/\bar\alpha \tag{2.8}$$

с некоторой константой $c_0 > 0$ (в условиях теорем 2.1 и 2.2 $c_0 = 1$), поскольку тогда при выборе параметра $r = \alpha||B||/(5N_2)$ в теореме 2.1 и $r = \alpha||B||/(5N_1N_2)$ в теореме 2.2 неравенство (2.3) принимает вид

$$||u^k - u_\alpha|| \leqslant \bar q^k r, \tag{2.9}$$

где $\bar q = c_0||B||q = c_0||B||(1 - \alpha/(2\bar\alpha)) < 1$. В случае нормально разрешимого оператора $A'(u^0)$ существуют иные, чем в упомянутых теоремах, условия для справедливости оценки (2.8) (см. [15–17]). Это позволяет отказаться от условия $A'(u^0) = A'(u^0)^* \geqslant 0$ и существенно расширить класс уравнений, для которых имеет место оценка (2.9).

3. Свойство фейеровости итераций

3.1. Исследование ММН. Введем обозначение

$$F(u) = B_0^{-1}[A(u) + \alpha\,(u - u^*) - f_\delta],$$

где $B_0 = (A'(u^0) + \bar{\alpha}\, I)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $A'(u^0)$ — неотрицательно определенный самосопряженный оператор. Пусть выполнены условия* (2.1) *и уравнение* (1.7) *имеет решение u_α. Если для начального приближения u^0 и параметров α, $\bar{\alpha}$, r, N_1, N_2 выполнены условия*

$$||u^0 - u_\alpha|| \leqslant r, \qquad 0 < \alpha \leqslant \bar{\alpha}, \qquad r = \alpha/(6N_2), \qquad \bar{\alpha} \geqslant 3N_1,$$

то для оператора F в шаре $S_r(u_\alpha)$ справедливо соотношение

$$\langle F(u), u - u_\alpha\rangle = \langle B_0^{-1}(A(u) + \alpha\,(u - u^*) - f_\delta), u - u_\alpha\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}\,||u - u_\alpha||^2. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем следующие соотношения для $u \in S_r(u_\alpha)$:

$$\langle F(u), u - u_\alpha\rangle = \langle F(u) - F(u_\alpha), u - u_\alpha\rangle = \alpha\langle B_0^{-1}(u - u_\alpha), u - u_\alpha\rangle + B_0^{-1}\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha\rangle$$

$$= \alpha\langle B_0^{-1}(u - u_\alpha), u - u_\alpha\rangle + \left\langle B_0^{-1}\int\limits_0^1 A'(u_\alpha + \theta\,(u - u_\alpha))(u - u_\alpha)\,d\theta, u - u_\alpha\right\rangle$$

$$= \alpha\langle B_0^{-1}(u - u_\alpha), u - u_\alpha\rangle + \left\langle B_0^{-1}\int\limits_0^1 [A'(u_\alpha + \theta\,(u - u_\alpha)) - A'(u^0)](u - u_\alpha)\,d\theta, u - u_\alpha\right\rangle$$

$$+ \langle B_0^{-1}A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha\rangle$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_1}\,||u - u_\alpha||^2 - \frac{N_2}{\bar{\alpha}}\int\limits_0^1 [(1 - \theta)\,||u_\alpha - u^0|| + \theta\,||u - u^0||\,]\,d\theta\,||u - u_\alpha||^2$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_1}\,||u - u_\alpha||^2 - \frac{N_2}{2\bar{\alpha}}\,(||u - u_\alpha|| + 2\,||u_\alpha - u^0||)\,||u - u_\alpha||^2.$$

При выбранных условиях на параметры из последнего соотношения получаем оценку (3.1).

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда при $\gamma < \alpha\,\bar{\alpha}/(\alpha + N_1)^2$ последовательность $\{u^k\}$, генерируемая процессом* (1.5), *сходится к u_α и выполнено свойство* (1.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание оценку

$$||F(u)|| = ||B_0^{-1}[A(u) + \alpha\,(u - u^*) - f_\delta]||$$

$$= ||B_0^{-1}[A(u) + \alpha\,(u - u^*) - f_\delta - (A(u_\alpha) + \alpha\,(u_\alpha - u^*) - f_\delta)]\,||$$

$$\leqslant ||\alpha B_0^{-1}(u - u_\alpha)|| + ||B_0^{-1}(A(u) - A(u_\alpha))|| \leqslant \Big(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} + \frac{N_1}{\bar{\alpha}}\Big)||u - u_\alpha||$$

и установленное свойство (3.1), приходим к соотношению

$$||F(u)||^2 = ||B_0^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^*) - f_\delta)||^2 \leqslant \varkappa\,\langle u - u_\alpha, B_0^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^*) - f_\delta)\rangle, \tag{3.2}$$

где $\varkappa = 2(\alpha + N_1)^2/(\bar{\alpha}\,\alpha)$. Сильная фейеровость (псевдосжимаемость) оператора шага T процесса (1.5) означает выполнение неравенства

$$||T(u) - u_\alpha||^2 - ||u - u_\alpha||^2 + \nu\,||T(u) - u||^2 \leqslant 0$$

для некоторого $\nu > 0$, что эквивалентно

$$-\frac{2}{\gamma(1+\nu)}\langle u-u_\alpha, B_0^{-1}(A(u)+\alpha(u-u^*)-f_\delta)\rangle + ||B_0^{-1}(A(u)+\alpha(u-u^*)-f_\delta)||^2 \leqslant 0. \quad (3.3)$$

С учетом оценки (3.2) неравенство (3.3) будет выполнено при некотором $\nu > 0$, если $\gamma < 2/\varkappa$.

Из сильной фейеровости оператора шага T процесса (1.5) вытекает неравенство (1.10), откуда следует

$$||u^k|| \leqslant c, \qquad u^{k+1}-u^k = B_0^{-1}(A(u^k)+\alpha\,(u^k-u^*)-f_\delta) \to 0,$$

что с учетом (3.1) влечет сильную сходимость $u^k \to u_\alpha$ при $k \to \infty$.

3.2. Исследование ММЛ-М. Введем обозначения

$$B(u^0) = A'(u^0)^*A'(u^0)+\alpha\, I, \qquad F_0(u) = B^{-1}(u^0)[A'(u^0)^*(A(u)-f_\delta)+\alpha\,(u-u^*)]$$

и докажем аналог свойства (3.1) для оператора F_0.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и уравнение* (1.8) *имеет решение* u_α. *Если параметры* $\alpha,\ \bar\alpha,\ N_1,\ N_2,\ r$ *и начальное приближение* u^0 *удовлетворяют условиям*

$$||u^0-u_\alpha|| \leqslant r, \qquad 0<\alpha\leqslant\bar\alpha, \qquad r=\alpha/(6N_1N_2), \qquad \bar\alpha \geqslant 3N_1^2,$$

то при $u \in S_r(u_\alpha)$ *справедливо неравенство* (3.1) *с заменой оператора* F *на* F_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя схему доказательства из теоремы 3.1, имеем

$$\begin{aligned}
&\langle F_0(u)-F_0(u_\alpha), u-u_\alpha\rangle \\
&= \alpha\langle B^{-1}(u^0)(u-u_\alpha), u-u_\alpha\rangle + \langle B^{-1}(u^0)A'(u^0)^*(A(u)-A(u_\alpha)), u-u_\alpha\rangle \\
&= \alpha\,\langle B^{-1}(u^0)(u-u_\alpha), u-u_\alpha\rangle \\
&+ \left\langle B^{-1}(u^0)A'(u^0)^*\int_0^1 [A'(u_\alpha+\theta\,(u-u_\alpha))-A'(u^0)(u-u_\alpha)]\,d\theta, u-u_\alpha\right\rangle \\
&+ \langle B^{-1}(u^0)A'(u^0)^*A'(u^0)(u-u_\alpha), u-u_\alpha\rangle,
\end{aligned}$$

откуда с учетом $||u-u^0|| \leqslant ||u-u_\alpha||+||u_\alpha-u^0|| \leqslant 2r$ и условий на параметры выводим

$$\begin{aligned}
\langle F_0(u)-F_0(u_\alpha), u-u_\alpha\rangle &\geqslant \left[\frac{\alpha}{\bar\alpha+N_1^2}-\frac{1}{\bar\alpha}\int_0^1(1-\theta)\,||u_\alpha-u^0||+\theta\,||u-u_\alpha||\,d\theta\right]||u-u_\alpha||^2 \\
&\geqslant \left[\frac{\alpha}{\bar\alpha+N_1^2}-\frac{3N_1N_2r}{2\bar\alpha}\right]||u-u_\alpha||^2 \geqslant \frac{\alpha}{2\bar\alpha}\,||u-u_\alpha||^2. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Теорема 3.4. *Если выполнены условия теоремы* 3.3, *то при* $\gamma < \alpha\,\bar\alpha/(\alpha+N_1^2)^2$ *последовательность итераций* $\{u^k\}$, *определяемая процессом* (1.6), *сходится к решению* u_α *уравнения* (1.8) *по норме гильбертова пространства* U.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично теореме 3.2 имеем

$$||F_0(u)||^2 \leqslant \Big(\frac{\alpha+N_1^2}{\bar\alpha}\Big)^2||u-u_\alpha||^2. \quad (3.5)$$

Объединяя (3.4) и (3.5), приходим к неравенству

$$||F_0(u)||^2 \leqslant \frac{2(\alpha+N_1)^2}{\alpha\,\bar\alpha}\langle u-u_\alpha, F_0(u)\rangle,$$

что гарантирует сильную фейеровость оператора шага в процессе (1.6) при $\gamma < \alpha\,\bar\alpha/(\alpha+N_1^2)^2$. Сильная сходимость итераций устанавливается подобно ММН.

4. Сходимость регуляризованных решений и оценка погрешности

4.1. Регуляризация сдвигом. Как отмечено во введении, построение РА на основе двухступенчатого метода предполагает, что наряду со сходимостью итерационных процессов ММН и ММЛ-М имеет место аппроксимация решения уравнения (1.1) решениями u_α регуляризованных уравнений (1.7), (1.8). Принимая во внимание замечание 2.1, рассмотрим схему Лаврентьева также в несколько более общей форме, чем уравнение (1.7), а именно

$$A(u) + \alpha\, B(u - u^*) - f_\delta = 0. \tag{4.1}$$

Здесь B — линейный самосопряженный положительно определенный оператор, т. е.

$$B = B^*, \qquad \langle Bu, u\rangle \geqslant \mu\, ||u||^2, \qquad \mu > 0, \tag{4.2}$$

$||f - f_\delta|| \leqslant \delta$, где f — точная правая часть уравнения (1.1). Предполагаем, что при заданных $\alpha,\ u^*,\ f_\delta$ уравнение (4.1) разрешимо (обозначаем решение u_α), оператор A квазимонотонен, т. е.

$$\langle A(u) - A(z), u - z\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in D(A), \quad \forall z \in M, \tag{4.3}$$

где M — непустое множество решений уравнения (1.1), и, кроме того, вполне непрерывен:

$$u_k \to \bar u \text{ (слабо) } \Rightarrow A(u_k) \to A(\bar u).$$

При принятых условиях на оператор A множество решений M уравнения (1.1) выпукло и замкнуто, следовательно, существует единственное решение $\hat u$, которое удовлетворяет соотношению

$$\langle B(u^* - \hat u), z - \hat u\rangle \leqslant 0 \quad \forall z \in M \tag{4.4}$$

и при $B = I$, в силу критерия метрической проекции, совпадает с решением, ближайшим к u^*. По той же причине (4.4) означает, что $\hat u$ — решение, ближайшее к u^* по норме $||u||_B = \sqrt{\langle Bu, u\rangle}$.

Теорема 4.1. *Пусть A — квазимонотонный вполне непрерывный оператор, B — линейный самосопряженный положительно определенный оператор. Пусть уравнение* (4.1) *разрешимо и u_α — одно из решений.*

Тогда при связи параметров $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ имеет место сильная сходимость $\lim\limits_{\delta\to 0} ||u_{\alpha(\delta)} - \hat u|| = 0$.

Доказательство. Имеем соотношения

$$A(u_\alpha) + \alpha\, B(u_\alpha - u^*) = f_\delta, \qquad A(z) + \alpha\, B(z - u^*) = f + \alpha\, B(z - u^*),$$

где $z \in M$. Вычитая из первого второе соотношение и умножая обе части скалярно на $u_\alpha - z$, получаем

$$\langle A(u_\alpha) - A(z), u_\alpha - z\rangle + \alpha\, \langle B(u_\alpha - z), u_\alpha - z\rangle = \langle f_\delta - f, u_\alpha - z\rangle + \alpha\, \langle B(u^* - z), u_\alpha - z\rangle,$$

откуда, ввиду свойств (4.2), (4.3) операторов $A,\ B$, приходим к неравенству

$$\alpha\mu\, ||u_\alpha - z||^2 \leqslant \langle f_\delta - f, u_\alpha - z\rangle + \alpha\, \langle B(u^* - z), u_\alpha - z\rangle, \tag{4.5}$$

или

$$||u_\alpha - z||^2 \leqslant \frac{\delta}{\alpha\mu}\, ||u_\alpha - z|| + \frac{1}{\mu}\, ||B|| \cdot ||u^* - z|| \cdot ||u_\alpha - z||. \tag{4.6}$$

Таким образом, при условиях на параметры $\alpha,\ \delta$ множество $\{u_{\alpha(\delta)}\}$ ограничено, следовательно существует слабо сходящаяся подпоследовательность

$$u_{\alpha(\delta_k)} \to \bar{u} \text{ (слабо)}. \tag{4.7}$$

Поскольку

$$||A(u_{\alpha(\delta_k)}) - f|| \leqslant ||A(u_{\alpha(\delta_k)}) - f_{\delta_k}|| + ||f_{\delta_k} - f|| \leqslant \alpha(\delta_k)\, ||B(u_{\alpha(\delta_k)} - u^*)|| + \delta_k \to 0, \tag{4.8}$$

то в силу вполне непрерывности A из (4.7), (4.8) следует $A(\bar{u}) = f$, т. е. $\bar{u}$ — решение уравнения (1.1). Подставляя теперь в (4.5) $z = \bar{u},\ \delta = \delta_k,\ \alpha = \alpha(\delta_k)$ и после сокращения на $\alpha(\delta_k)$ устремляя $\delta_k \to 0$, получаем сильную сходимость $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_{\alpha(\delta_k)} - \bar{u}|| = 0$.

В силу неравенства (4.5) имеем

$$\frac{1}{\alpha(\delta_k)}\, \langle f_{\delta_k} - f, u_{\alpha(\delta_k)} - z\rangle + \langle B(u^* - z), u_{\alpha(\delta_k)} - z\rangle \geqslant 0,$$

что при $k \to \infty$ влечет

$$\langle B(u^* - z), \bar{u} - z\rangle \geqslant 0 \quad \forall z \in M. \tag{4.9}$$

Вводя в (4.9) вместо z последовательность $z_t = \bar{u} + t(z - \bar{u})$, сокращая на $t > 0$ и устремляя $t \to 0$, приходим к (4.4). Из условия (4.2) на оператор B решение вариационного неравенства (4.4) единственно, следовательно все предельные точки $\bar{u}$ совпадают с $\hat{u}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь регуляризованное уравнение в более общей форме по сравнению с уравнением (1.8)

$$A'(u^0)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha\, B(u - u^*) = 0, \tag{4.10}$$

которое получается из (4.10) при $B = I$. Заметим, что в отличие от классической регуляризации по Тихонову в (4.10) производная оператора A вычисляется в фиксированной точке u^0.

Теорема 4.2. *Пусть оператор $A'(u^0)^*A$ — квазимонотонный (см.* 4.1*) и вполне непрерывный, оператор $A'(u^0)$ обратим, B — линейный положительно определенный оператор (см.* 4.2*). Пусть уравнение* (4.10) *разрешимо и u_α — одно из решений.*

Тогда при $\alpha(\delta) \to 0,\ \delta/\alpha(\delta) \to 0,\ \delta \to 0$ имеет место сильная сходимость $u_{\alpha(\delta)} \to \hat{u}$, $\delta \to 0$, где $\hat{u}$ — единственное решение вариационного неравенства (4.4)*.*

Доказательство с несущественными изменениями повторяет схему рассуждений из теоремы 4.1.

Следствие 4.1. *В теоремах* 4.1, 4.2 *предположение о разрешимости регуляризованных уравнений можно ослабить и требовать лишь существование ε-решения. Например, для уравнения* (1.7) *это означает существование элемента u_α^ε, для которого выполнено*

$$A(u_\alpha^\varepsilon) + \alpha\,(u_\alpha^\varepsilon - u^*) - f_\delta = \eta$$

для некоторого η, где $||\eta|| \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon(\delta)/\alpha(\delta) \to 0,\ \delta \to 0$. Кроме того, вполне непрерывность операторов $A,\ A'(u^0)^*A$ может быть заменена на слабо-сильную замкнутость.

4.2. Оценка погрешности по невязке. Переобозначим итерации u^k в ММН и ММЛ-М через u_α^k, подчеркнув зависимость от параметра α, отвечающего за регуляризацию уравнения (1.1). В предыдущих разделах установлена сильная сходимость приближенных решений на каждом этапе алгоритма, т. е. имеем цепочку

$$u_{\alpha(\delta)}^k \xrightarrow{k\to\infty} u_{\alpha(\delta)} \xrightarrow{\delta\to 0} \hat{u},$$

где $\hat{u}$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (4.4).

Из (4.6) следует оценка

$$||u_{\alpha(\delta)} - \hat{u}|| \leqslant \frac{1}{\mu}\left[\frac{\delta}{\alpha(\delta)} + ||B||\cdot||u^* - \hat{u}||\right] \leqslant \bar{c},$$

что с учетом определения u_α и выбора $\alpha(\delta) = \delta^\gamma,\ 0 < \gamma < 1$, влечет

$$||A(u_{\alpha(\delta)}) - f_\delta|| \leqslant ||B||\,\bar{c}\,\delta^\gamma. \tag{4.11}$$

В условиях теорем 2.1, 2.2 справедлива оценка

$$||u_\alpha^k - u_\alpha|| \leqslant q^k r, \qquad q = (1 - \alpha/(2\bar{\alpha})). \tag{4.12}$$

Объединяя (4.11), (4.12), получаем оценку для невязки

$$\begin{aligned} ||A(u^k_{\alpha(\delta)}) - f_\delta|| &\leqslant ||A(u^k_{\alpha(\delta)}) - A(u_{\alpha(\delta)})|| + ||A(u_\alpha) - f_\delta|| \\ &\leqslant N_1||u^k_{\alpha(\delta)} - u_{\alpha(\delta)}|| + \alpha(\delta)\,||B||\,\bar{c} \leqslant N_1 q^k r + ||B||\,\bar{c}\,\delta^\gamma. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Выбор номера k из условия равенства слагаемых в правой части неравенства (4.13) дает величину числа итераций

$$k(\delta) = \left[\frac{\ln(||B||\,\bar{c}\,\delta^\gamma/(N_1 r))}{\ln q}\right], \tag{4.14}$$

которая гарантирует оценку невязки

$$||A(u^{k(\delta)}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta|| = O(\delta^\gamma). \tag{4.15}$$

Таким образом, при априорном выборе параметра $\alpha(\delta) = \delta^\gamma,\ 0 < \gamma < 1$, числа итераций $k(\delta)$ согласно (4.14) имеем

$$\lim_{\delta\to 0}||u^{k(\delta)}_{\alpha(\delta)} - \hat{u}|| = 0, \qquad \lim_{\delta\to 0}||A(u^{k(\delta)}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta|| = 0$$

с оценкой невязки (4.15), т. е. $\{u^{k(\delta)}_{\alpha(\delta)}\}$ — регуляризованное семейство приближенных решений.

З а м е ч а н и е. Во всех сформулированных выше теоремах требуется разрешимость в обычном (точном) смысле регуляризованных уравнений (1.7), (1.8) или (4.1), (4.10). Для разрешимости этих уравнений в точном смысле достаточно потребовать монотонность и липшицевость оператора A и условие (4.2) для оператора B (см., например, [18, теорема 43.7]).

4.3. Оценка погрешности двухэтапных алгоритмов. Если потребовать истокообразную представимость решения исходного уравнения (1.1), то можно получить оценку погрешности схемы регуляризации Лаврентьева (1.7), используя методику работы [7]. А именно, если выполнены условия:

$$[A'(x) - A'(u)]v = A'(u)\Phi(x,u,v), \qquad ||\Phi(x,u,v)|| \leqslant k_0\,||v||\,||x-u||,$$

существует непрерывная строго возрастающая функция $\varphi\colon (0,a] \to (0,\infty)$, $a \geqslant ||A'(\hat{u})||$, удовлетворяющая свойствам

$$\lim_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda) = 0, \qquad \sup_{\lambda>0}\frac{\alpha\,\varphi(\lambda)}{\lambda+\alpha} \leqslant c_0\,\varphi(\alpha) \qquad \forall\,\lambda\in(0,a], \qquad c_0 \text{ — const},$$

и справедливо представление

$$u^0 - \hat{u} = \varphi(A'(\hat{u}))v, \qquad u^0 = u^*, \qquad \|v\| \leq 1,$$

то для решения уравнения (1.7) с монотонным оператором A справедлива оценка

$$||u_\alpha^\delta - \hat{u}|| \leqslant c_1(\varphi(\alpha) + \delta/\alpha), \qquad c_1 - \text{const}. \tag{4.16}$$

Объединяя теперь оценку (2.3) с (4.16), например, при $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\alpha(\delta) = \delta^{1/2}$, имеем

$$||u_{\alpha(\delta)}^k - \hat{u}|| \leqslant ||u_{\alpha(\delta)|}^k - u_{\alpha(\delta)}|| + ||u_{\alpha(\delta)} - \hat{u}|| \leqslant q^k r + 2c_1\delta^{1/2}.$$

Выбирая число итераций $k(\delta)$ по формуле

$$k(\delta) = \frac{\ln(2c_1\delta^{1/2}/r)}{\ln q},$$

получаем оптимальную по порядку оценку

$$||u_{\alpha(\delta)}^{k(\delta)} - \hat{u}|| \leqslant 4c_1\delta^{1/2} \tag{4.17}$$

для двухэтапного алгоритма (1.5), (1.7).

Заметим, что при условии истокообразной представимости решения в виде

$$u^0 - \hat{u} = \varphi(A'(u^0)^* A'(u^0))v, \qquad \|v\| \leq 1, \tag{4.18}$$

для схемы регуляризации (1.8) справедлива оценка вида (4.16) с заменой δ/α на $\delta/\alpha^{1/2}$. Следовательно, для двухэтапного алгоритма (1.6), (1.8) при выборе параметров

$$\varphi(\alpha) = \alpha, \qquad \alpha(\delta) = \delta^{2/3}, \qquad k(\delta) = \frac{\ln(2c_1\delta^{2/3}/r)}{\ln q}$$

имеет место оценка погрешности

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{k(\delta)} - \hat{u}\| \leq 4c_1\delta^{2/3},$$

которая также, как и (4.17), является оптимальной по порядку, но уже на классе корректности (4.18).

5. Приложение к обратной задаче гравиметрии

В структурной обратной задаче гравиметрии для двухслойной среды искомым решением является функция $x_3 = u(x_1, x_2)$, которая описывает поверхность раздела сред с различными постоянными плотностями σ_1, σ_2. В декартовой системе координат, когда вертикальная ось x_3 направлена вниз, уравнение относительно неизвестной функции $x_3 = u(x_1, x_2)$ имеет вид

$$[A(u)](x_1, x_2) \equiv -\Gamma\Delta\sigma \iint\limits_{\Pi} \frac{dx_1'\, dx_2'}{[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + u^2(x_1', x_2')]^{1/2}} = f(x_1, x_2). \tag{5.1}$$

Здесь $(x_1, x_2) \in \Pi = \{a \leqslant x_1 \leqslant b,\ c \leqslant x_2 \leqslant d\}$; Γ — гравитационная постоянная; $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$; $f(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)$, где $f_1(x_1, x_2)$ — аномальное поле, порождаемое поверхностью $x_3 = u(x_1, x_2)$, и $f_2(x_1, x_2) = [A(H)](x_1, x_2)$, где $x_3 = H$ — асимптотическая плоскость искомой поверхности.

Производная оператора в точке u^0 выражается линейным интегральным оператором

$$[A'(u^0)h](x_1, x_2) = \Gamma\Delta\sigma \iint\limits_{\Pi} \frac{u^0(x_1', x_2')\, h(x_1', x_2')\, dx_1'\, dx_2'}{[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (u^0(x_1', x_2'))^2]^{3/2}}. \tag{5.2}$$

При $u^0(x_1, x_2) \equiv H > 0$ оператор (5.2) так же, как и его аппроксимирующая матрица $A'_N(H)$, полученная на основе квадратурной формулы "прямоугольников" с равномерным шагом по каждой переменной, обладает свойством симметричности. В выполненных численных экспериментах было установлено, что спектр матрицы $A'_N(H)$ неотрицателен, что открывает возможность применения ММН (1.5) для решения уравнения (5.1).

Для уравнения гравиметрии (5.1) был выполнен численный эксперимент с модельным решением

$$\hat{u}(x_1, x_2) = 5 - 2\exp\{-[(x_1/10 - 3.5)^2 + (x_2/10 - 2.5)^2]\}$$
$$- 3\exp\{-[(x_1/10 - 5.5)^2 + (x_2/10 - 4.5)^2]\}, \qquad (5.3)$$

заданным на области $\Pi = \{0 \leqslant x_1 \leqslant 90,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 100\}$ при использовании ММН на сетке с числом узлов $N = 9000$ с шагом $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$, $\Delta\sigma = 0.25$, $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-5}$, $u^* = u^0 = H = 5$. После $k = 6$ итераций модельное решение восстанавливается с относительной погрешностью в L_2, равной $\Delta_1 = 0.4 \cdot 10^{-3}$, и невязкой — $\Delta_2 = 0.1 \cdot 10^{-3}$. Для получения одной и той же точности по решению ММН (1.5) существенно более экономичен по затратам машинного времени, чем итеративно регуляризованный метод Ньютона (1.2).

З а м е ч а н и е. Для модифицированного метода Ньютона $A\colon U \to U = F$ после дискретной аппроксимации уравнения (1.1) пространство решений и пространство правых частей системы нелинейных уравнений $A_n u_n = f_n$ должны быть одной размерности. В обратных задачах теплового зондирования атмосферы (см. библиографию в [6]) это условие заведомо не выполняется. В данном случае целесообразно применять метод (1.6), который можно реализовать очень экономично. Действительно, нахождение очередного приближения u^{k+1} сводится к решению системы

$$D_n u_n^{k+1} = D_n u_n^k - \gamma\,[A'(u_n^0)^*(A(u_n^k) - f_{\delta n}) + \alpha\,(u_n^k - u_n^*)]$$

с постоянной положительно определенной матрицей $D_n = A'_n(u^0)^* A'_n(u^0) + \bar{\alpha}\, I$. Привлекая метод квадратного корня для матрицы D_n, сводим задачу нахождения u^{k+1} к обращению двух треугольных матриц, что позволяет построить быстрый численный алгоритм реализации процесса (1.6) так же, как и ММН (1.5).

Автор весьма признателен Е. Н. Акимовой и А. Ф. Миниахметовой за реализацию численного эксперимента на суперкомпьютере "УРАН" по предложенному ими модельному решению (5.3).

6. Методы фейеровского типа

По мнению автора, методология решения задач на основе итерационных процессов фейеровского типа не получила еще широкого распространения в современной вычислительной математике. Поэтому следует коснуться более подробно некоторых особенностей этих методов, отличающих их от других итерационных алгоритмов, и, кроме того, дать краткий обзор ранних публикаций по данной тематике, начиная с работы Л. Фейера 1922 г., которая послужила отправной точкой для становления этого направления.

Как уже отмечалось во введении, во-первых, свойство фейеровости оператора сохраняется при операциях произведения и взятия выпуклой суммы, что открывает неограниченные возможности для построения все новых и новых итерационных процессов. Во-вторых, методы фейеровского типа обладают универсальностью, которая заключается в том, что неединственность и даже неразрешимость (несобственность) задачи не являются препятствием для их применения. В случае неразрешимости для некоторых классов задач итерации сходятся к квазирешению, которое имеет вполне определенный смысл. В-третьих, фейеровские процессы обладают простотой и конструктивизмом, а также внутренним параллелизмом, что важно при решении задач на современных многопроцессорных вычислителях с использованием параллельных технологий. В-четвертых, при решении некорректно поставленных задач широкий набор априорных ограничений можно эффективно учесть в итерационном алгоритме с помощью просто реализуемого фейеровского отображения, образуя суперпозицию с оператором шага исходного процесса.

Обратимся к очень беглому обзору работ, в которых происходило становление терминологии и разработка первых алгоритмов, главным образом для задач математического программирования.

Л. Фейер ввел следующее определение сравнительной близости точек к множеству [19].

Пусть M — замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$ (или гильбертова) пространства. Если p и p_1 — точки из $\mathbb{R}^n$ такие, что

$$||p - q|| > ||p_1 - q||$$

для любой точки $q \in M$, тогда p_1 называется поточечно более близкой к множеству M, чем p. Если p такая, что не существует точки p_1, которая поточечно ближе, чем p, то p называется ближайшей к множеству M.

Л. Фейер сделал интересное наблюдение, что множество точек, ближайших к M, совпадает с выпуклой замкнутой оболочкой $\overline{conv(M)}$ множества M. Из этого свойства следует, что если точка p не принадлежит $\overline{conv(M)}$, то можно найти точку p_1, которая поточечно ближе к множеству M, чем p. На основе этого геометрического факта Т. С. Моцкин и Ж. Ж. Шоенберг [20] ввели понятие фейеровской последовательности $\{x_k\}$ $(||x_{k+1} - q|| \leqslant ||x_k - q||$ для любых k и $q \in M$, $x_k \neq x_{k+1})$ и построили итерационный процесс, порождающий фейеровскую последовательность для аппроксимации множества решений систем линейных неравенств. В дальнейшем методы такого типа были построены для других задач линейного и выпуклого программирования, в которых неединственность является типичной ситуацией (см., например, обзор в [10]).

Особая роль в развитии теории фейеровских процессов принадлежит И. И. Еремину, который ввел более общие понятия и термины, связанные с фейеровской аппроксимацией (фейеровское отображение, фейеровский сдвиг, фейеровский метод), и построил семейство базовых фейеровских отображений, изучив их свойства. Большой цикл его работ был посвящен фейеровским процессам решения задач выпуклой негладкой оптимизации, несовместных систем линейных неравенств и несобственных задач линейного программирования, алгоритмам распараллеливания фейеровских процессов, допускающим широкое использование многопроцессорных вычислительных систем (см. библиографию в [10]).

Необходимо также отметить, что введенный автором класс сильно M-фейеровских операторов с более сильным условием псевдосжимаемости (см. (1.9)) оказался удобным аппаратом для построения итерационных методов аппроксимации решений линейных и нелинейных некорректных задач, в том числе в условиях дополнительных априорных ограничений на решение (см. [5; 6; 9; 10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бакушинский А.Б.** Регуляризующий алгоритм на основе метода Ньютона — Канторовича для решения вариационных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 6. С. 1397–1404.
2. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
3. **Бакушинский А.Б.** К проблеме сходимости итеративно регуляризованного метода Гаусса — Ньютона // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 9. С. 1503–1509.
4. **Hanke M.** The regularizing Levenberg–Marquardt scheme is optimal order // J. Integral Equations Appls. 2010. Vol. 22, no. 2. P. 259–282.
5. **Васин В.В.** Метод Левенберга — Марквардта для аппроксимации решений нерегулярных операторных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 28–37.
6. **Vasin V.V.** Irregular nonlinear operator equations: Tikhonov's regularization and iterative approximation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2013. Vol. 21, iss. 1. P. 109–123.
7. **George S.** On convergence of regularized modified Newton's method for nonlinear ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2010. Vol. 18, iss. 2. P. 133–146.

8. **Васин В.В.** Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 7. С. 971–980.
9. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ "Наука", 1993. 262 с.
10. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 200 с.
11. **Martinet B.** Determination approachee d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A-B. 1972. Vol. 274. P. A163–A165.
12. **Еремин И.И.** Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 2. С. 217–234.
13. **Еремин И.И.** К общей теории фейеровских отображений // Мат. записки Урал. гос. ун-та. 1969. Т. 7, № 2. С. 50–58.
14. **Еремин И.И.** Применение метода фейеровских приближений к решению задач выпуклого программировании с негладкими ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 5. С. 1153–1160.
15. **Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Назимов А.Б.** К проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. РАН. 2008. Т. 419, № 4. С. 1–4.
16. **Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Назимов А.Б.** О проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 12. С. 1971–1978.
17. Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев, В. А. Морозов, М. Муллоджанов. Вологда: Изд-во Вологод. гос. техн. ун-та, 2012. 368 с.
18. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
19. **Fejér L.** Über die Lag der Nullstrellen von Polynomen, die aus minimumforderung gewisser Art entspringen // Math. Ann. 1992. Bd. 85, № 1. S. 41–48.
20. **Motzkin T.S., Schoenberg J.J.** The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, № 3. P. 393–404.

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила 11.02.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.854

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ[1]

А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко

Двойственная задача линейного программирования сводится к безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции при достаточно больших значениях некоторого параметра. Приводится оценка порогового значения параметра, начиная с которого в результате однократного решения задачи безусловной максимизации легко получается проекция заданной точки на множество решений двойственных и вспомогательных переменных двойственной задачи линейного программирования. Для безусловной максимизации используется обобщенный метод Ньютона, сходящийся глобально за конечное число шагов. Приведены результаты вычислительных экспериментов с задачами линейного программирования большой размерности, сгенерированными случайным образом.

Ключевые слова: задача линейного программирования, кусочно-квадратичная функция, безусловная максимизация, обобщенный метод Ньютона.

A. I. Golikov, Yu. G. Evtushenko. Generalized Newton method for linear optimization problems with inequality constraints.

A dual problem of linear programming (LP) is reduced to the unconstrained maximization of a concave piecewise quadratic function for sufficiently large values of a certain parameter. An estimate is given for the threshold value of the parameter starting from which the projection of a given point on the set of solutions of the dual LP problem in dual and auxiliary variables is easily found by means of a single solution of an unconstrained maximization problem. The unconstrained maximization is carried out by the generalized Newton method, which is globally convergent in a finite number of steps. The results of numerical experiments are presented for randomly generated large-scale LP problems.

Keywords: linear programming problem, piecewise quadratic function, unconstrained maximization, generalized Newton method.

Введение

Исследования И. И. Еремина во многом посвящены теории и методам математического программирования, программному обеспечению решения задач оптимизации и приложениям в экономике и управлении [1–4]. При этом всегда особое внимание уделялось линейной оптимизации [5–7]. Давно стали классическими его работы по применению штрафных функций. В них показана тесная связь между методом штрафных функций, регуляризацией и теорией двойственности. Под большим влиянием работ И. И. Еремина по линейной оптимизации выполнена данная статья.

В работах [8; 9] предложено сведение прямой и двойственной задач линейного программирования (ЛП) к двум задачам безусловной максимизации вспомогательной вогнутой кусочно-квадратичной функции с числом переменных, равным числу ограничений прямой задачи. При достаточно большом значении параметра в этой функции из задачи безусловной максимизации легко находится решение задачи ЛП, которое является проекцией заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП. Вспомогательная кусочно-квадратичная функция один раз непрерывно дифференцируема, у нее существует обобщенная матрица Гессе, что позволяет для максимизации применить быстросходящийся обобщенный метод Ньютона. Как показано в [10–12], для вогнутых кусочно-квадратичных функций обобщенный метод Ньютона глобально сходится за конечное число шагов. Вычислительные эксперименты продемонстрировали

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00786 и 11-01-12136-офи-м), программ государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5264.2012.1) и Президиума РАН П-15.

возможность решать на однопроцессорных компьютерах задачи ЛП с большим числом неотрицательных переменных (несколько десятков миллионов) и умеренным числом ограничений-равенств (несколько тысяч) за время от десятка секунд до нескольких десятков минут. Обобщенный метод Ньютона хорошо распараллеливается, и его применение на современных высокопроизводительных вычислительных комплексах позволяет решать задачи ЛП с числом ограничений, увеличенным до сотен тысяч [13].

В [14] рассмотрена задача нахождения проекции заданной точки на множество решений двойственной задачи ЛП. При этом задача ЛП сводится к *максимизации на неотрицательном ортанте* вогнутой квадратичной функции, что существенно ограничивает возможность эффективного применения метода Ньютона.

В данной работе показана возможность сведения двойственной задачи ЛП к однократной *безусловной максимизации* вспомогательной вогнутой кусочно-квадратичной функции при достаточно больших значениях некоторого параметра. Число переменных этой функции равно числу ограничений-неравенств исходной двойственной задачи ЛП. Это дает возможность применять эффективный обобщенный метод Ньютона. Приводится оценка порогового значения параметра функции, начиная с которого в результате однократного решения задачи безусловной максимизации легко получается проекция заданной точки на множество решений двойственных и вспомогательных переменных двойственной задачи ЛП. Для безусловной максимизации полученной вспомогательной функции описывается обобщенный метод Ньютона. Метод реализован в системе MATLAB. Приведены результаты вычислительных экспериментов с задачами ЛП при ограничениях-неравенствах, сгенерированных случайным образом.

1. Сведение двойственной задачи линейного программирования к безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции

Запишем прямую и двойственную задачи ЛП в стандартном виде:

$$f_* = \min_{x\in X} c^\top x, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b,\ x \geq 0_n\}, \tag{P}$$

$$f_* = \max_{u\in U} b^\top u, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^m \colon A^\top u \leq c\}. \tag{D'}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ заданы, x — вектор прямых переменных, u — двойственных переменных, через 0_i обозначен i-мерный нулевой вектор. Предположим, что множество решений X_* прямой задачи (P) непусто, следовательно множество решений U_* двойственной задачи (D') также непусто.

Всюду ниже двойственную задачу (D') будем представлять в следующем эквивалентном виде:

$$f_* = \max_{u\in U} b^\top u, \quad W = \{u \in \mathbb{R}^m,\ v \in \mathbb{R}^n \colon A^\top u + v = c,\ v \geq 0_n\}, \tag{D}$$

где v — вектор неотрицательных дополнительных переменных. Через $W_* = [U_* \times V_*]$ обозначим множество решений задачи (D).

Необходимые и достаточные условия отимальности (условия Куна — Таккера) прямой и двойственной задач ЛП запишем в виде

$$Ax_* - b = 0_m, \quad x_* \geq 0_n, \quad D(x_*)v_* = 0_n, \quad v_* = c - A^\top u_* \geq 0_n. \tag{1}$$

Здесь $D(z)$ — диагональная матрица, у которой i-й диагональный элемент есть i-я компонента вектора z.

Будем искать проекцию $\hat{w}_* = [\hat{u}_*, \hat{v}_*]$ заданной точки $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$ на множество решений W_* двойственной задачи (D). Другими словами, из множества решений W_* двойственной задачи (D) выделим решение $\hat{w}_* = [\hat{u}_*, \hat{v}_*]$, ближайшее в евклидовой норме к некоторому заданному вектору $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$, т. е. найдем единственное решение $\hat{w}_* = [\hat{u}_*, \hat{v}_*]$ задачи строго выпуклого квадратичного программирования:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}(\|\hat{u}_* - \hat{u}\|^2 + \|\hat{v}_* - \hat{v}\|^2) = \min_{w=[u,v]\in W_*} \frac{1}{2}(\|u-\hat{u}\|^2 + \|v-\hat{v}\|^2), \\
W_* = \{u \in \mathbb{R}^m,\ v \in \mathbb{R}^n_+ \colon A^\top u + v = c,\ b^\top u = f_*\},
\end{gathered} \tag{2}
$$

где f_* — оптимальное значение целевой функции исходной задачи линейного программирования (D).

Для этой задачи введем функцию Лагранжа

$$
L(u,v,y,\alpha) = \frac{1}{2}\|u-\hat{u}\|^2 + \frac{1}{2}\|v-\hat{v}\|^2 + y^\top(A^\top u + v - c) + \alpha(f_* - b^\top u),
$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ — множители Лагранжа, $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$ рассматривается как фиксированный вектор.

Двойственная задача к задаче (2) имеет вид

$$
\max_{y\in\mathbb{R}^n} \max_{\alpha\in\mathbb{R}^1} \min_{u\in\mathbb{R}^m} \min_{v\in\mathbb{R}^n_+} L(u,v,y,\alpha). \tag{3}
$$

Запишем условия Куна — Таккера для задачи (2):

$$
u - \hat{u} + Ay - \alpha\, b = 0_m; \tag{4}
$$

$$
v - \hat{v} + y \ge 0_n, \quad D(v)(v - \hat{v} + y) = 0_n, \quad v \ge 0_n; \tag{5}
$$

$$
A^\top u + v = c, \quad b^\top u = f_*. \tag{6}
$$

Из (4) и (5), которые являются необходимыми и достаточными условиями минимизации внутренней задачи в (3), получаем решения:

$$
u = \hat{u} + \alpha\, b - Ay, \tag{7}
$$

$$
v = (\hat{v} - y)_+. \tag{8}
$$

Здесь и ниже a_+ обозначает вектор a, у которого все отрицательные компоненты заменены на нули.

Подставляя (7), (8) в функцию Лагранжа $L(u,v,y,\alpha)$, получаем двойственную функцию для задачи (3):

$$
\hat{L}(y,\alpha) = -c^\top y - \hat{u}^\top(\alpha\, b - Ay) - \frac{1}{2}\|(\alpha\, b - Ay)\|^2 + \alpha f_* + \frac{1}{2}\|\hat{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|(\hat{v} - y)_+\|^2.
$$

Функция $\hat{L}(y,\alpha)$ вогнута, кусочно-квадратична и непрерывно дифференцируема по своим переменным y и α.

Двойственная задача (3) сводится к решению внешней задачи максимизации

$$
\max_{y\in\mathbb{R}^n} \max_{\alpha\in\mathbb{R}^1} \hat{L}(y,\alpha). \tag{9}
$$

Решив задачу (9), найдем оптимальные значения y и α. После их подстановки в (7)–(8) получаем решение $\hat{w}_* = [\hat{u}_*, \hat{v}_*]$ задачи (2), т. е. проекцию точки $\hat{w}$ на множество решений двойственной задачи (D).

К сожалению, задача безусловной оптимизации (9) содержит неизвестную априори величину f_* — оптимальное значение целевой функции задачи ЛП. Однако задачу можно упростить, избавившись от этого недостатка. Для этого вместо (9) предлагается решать следующую упрощенную задачу безусловной максимизации:

$$
\max_{y\in\mathbb{R}^n} S(y,\alpha,\hat{w}) = \max_{y\in\mathbb{R}^n} \Big\{ -c^\top y + \hat{u}^\top Ay - \frac{1}{2}\|\alpha\, b - Ay\|^2 - \frac{1}{2}\|(\hat{v} - y)_+\|^2 \Big\}, \tag{10}
$$

где скаляр α фиксирован, $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$ — заданная точка, для которой ищется проекция на множество W_*.

Легко проверить, что задача (10) и следующая задача строго выпуклого программирования являются взаимно двойственными [15]:

$$\begin{gathered}\min_{w \in W} \Big\{ -\alpha\, b^\top u + \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2 + \frac{1}{2}\|v - \hat{v}\|^2 + \alpha\, \hat{u}^\top b \Big\}, \\ W = \{[u, v] \in \mathbb{R}^{m+n} \colon A^\top u + v = c,\ v \geq 0_n\}.\end{gathered} \tag{11}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности задачи (10)

$$S_y(y, \alpha, \hat{w}) = -c + \hat{u}^\top A + A^\top(\alpha\, b - Ay) + (\hat{v} - y)_+ = 0_n \tag{12}$$

следуют необходимые и достаточные условия оптимальности задачи (11). Действительно, перепишем (12) как

$$u = \hat{u} - Ay + \alpha\, b, \quad v = (\hat{v} - y)_+, \quad -c + A^\top u + v = 0_n. \tag{13}$$

Условия (13) можно представить в виде

$$u - \hat{u} + Ay - \alpha\, b = 0_m, \tag{14}$$

$$v - \hat{v} + y \geq 0_n, \quad D(v)(v - \hat{v} + y) = 0, \quad v \geq 0_n, \tag{15}$$

$$A^\top u + v - c = 0_n, \tag{16}$$

т. е. приходим к условиям Куна — Таккера для задачи (11). Верно и обратное утверждение, согласно которому из условий Куна — Таккера (14)–(16) следуют необходимые и достаточные условия оптимальности (12) задачи (10). Итак, при любом фиксированном α решение $w(\alpha)$ задачи квадратичного программирования (11) и решение $y(\alpha)$ задачи безусловной максимизации (10) связаны между собой формулами

$$u(\alpha) = \hat{u} - Ay(\alpha) + \alpha\, b, \tag{17}$$

$$v(\alpha) = (\hat{v} - y(\alpha))_+. \tag{18}$$

Ниже будет показано: если двойственная задача ЛП разрешима, то существует такое α_*, что при любом $\alpha \geq \alpha_*$ имеем $w(\alpha) = \hat{w}_*$, т. е. из (17), (18) получаем проекцию $\hat{w}_* = [\hat{u}_*, \hat{v}_*]$ точки $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$ на множество решений W_* двойственной задачи (D).

Рассмотрим задачу (10) и ее связь с двойственной задачей (D). Заметим, что в отличие от задачи (2) двойственная к ней задача (9) имеет неединственное решение. Естественно возникает вопрос о нахождении среди всех решений задачи (9) минимального значения α_* множителя Лагранжа α. Тогда в двойственной задаче (9), как будет показано ниже, можно зафиксировать $\alpha \geq \alpha_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\hat{L}(y, \alpha)$ только по переменным y, т. е. решать задачу (10). Обозначим это решение через $y(\alpha)$. Тогда пара $[y(\alpha), \alpha]$ является решением задачи (9), тройка $[\hat{w}_*, y, \alpha]$ — седловой точкой задачи (2), в которой нормальное решение $\hat{w}_*$ задачи (D) определяется по формулам (7), (8).

Для нахождения минимального α обратимся к условиям Куна — Таккера для задачи (2), которые для этой задачи являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Без потери общности предположим, что первые l компонент вектора $\hat{v}_*$ строго больше нуля. В соответствии с этим предположением представим векторы $\hat{v}_*$, $\hat{v}$, y и матрицу A в виде

$$\hat{v}_*^\top = [\hat{v}_*^{l\,\top}, \hat{v}_*^{d\,\top}], \quad \hat{v}^\top = [\hat{v}^{l\,\top}, \hat{v}^{d\,\top}], \quad y^\top = [y^{l\,\top}, y^{d\,\top}], \quad A = [A_l \mid A_d], \tag{19}$$

где $\hat{v}_*^l > 0_l$, $\hat{v}_*^d = 0_d$, $d = n - l$.

В соответствии с разбиением (19) из условия (1) дополняющей нежесткости $x_* v_* = 0_n$, $x_* \geq 0_n$, $v_* \geq 0_n$ задач (P) и (D) получим

$$\hat{x}^l_* = 0_l, \quad \hat{x}^d_* \geq 0_d, \quad A_d \hat{x}^d_* = b. \tag{20}$$

С учетом этого разбиения условия Куна — Таккера (4)–(6) для задачи (2) перепишем в следующем более детализированном виде:

$$\alpha\, b - A_d y^d = \hat{u}_* - \hat{u} - A_l(\hat{v}^l_* - \hat{v}^l), \tag{21}$$

$$y^l = -\hat{v}^l_* + \hat{v}^l, \quad \hat{v}^l_* > 0_l, \tag{22}$$

$$\hat{v}^d_* = 0_d, \quad y^d \geq \hat{v}^d, \tag{23}$$

$$A^\top \hat{u}_* + \hat{v}_* = c, \quad b^\top \hat{u}_* = f_*. \tag{24}$$

Среди решений системы (21)–(24) найдем такие множители Лагранжа $[y, \alpha]$, при которых α является минимальным, т. е. приходим к задаче ЛП вида

$$\alpha_* = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \inf_{y^d \in \mathbb{R}^d} \{\alpha \colon \alpha\, b - A_d y^d = \hat{u}_* - \hat{u} - A_l(\hat{v}^l_* - \hat{v}^l),\ y^d \geq \hat{v}^d\}. \tag{25}$$

Ограничения в этой задаче совместны, но целевая функция может быть не ограничена снизу. В этом случае будем полагать $\alpha_* = \gamma$, где γ — некоторое число.

Как будет доказано ниже в теореме 1, если система уравнений в (25) однозначно разрешима относительно y^d, то величина α_* представима в виде

$$\alpha_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in \sigma} \dfrac{(\hat{v}^d + (A_d^\top A_d)^{-1} A_d^\top (\hat{u}_* - \hat{u} - A_l(\hat{v}^l_* - \hat{v}^l))^i}{(\hat{x}^d_*)^i}, & \text{если } \sigma \neq \varnothing; \\ \gamma > -\infty, & \text{если } \sigma = \varnothing. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь введено индексное множество $\sigma = \{l+1 \leq i \leq n \colon (x^d_*)^i > 0\}$ и γ — произвольное число.

Теорема 1. *Пусть множество решений W_* исходной задачи ЛП непусто. Тогда при любом $\alpha \geq \alpha_*$, где α_* определяется формулой* (25), *проекция $\hat{w}_* = [\hat{u}_*, \hat{v}_*]$ заданной точки $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$ определяется по формулам*

$$\hat{u}_* = \hat{u} + \alpha b - Ay(\alpha), \tag{27}$$

$$\hat{v}_* = (\hat{v} - y(\alpha))_+, \tag{28}$$

где $y(\alpha)$ — решение задачи безусловной оптимизации (10).

Если дополнительно матрица A_d, соответствующая ненулевым компонентам $\hat{v}_*$, имеет полный ранг, то α_* определяется по формуле (26), *а точное решение прямой задачи* (P) *находится в результате решения задачи безусловной максимизации* (10) *по формуле*

$$\hat{x}^d_* = \frac{1}{\alpha}(y^d(\alpha) + (A_d^\top A_d)^{-1} A_d^\top (\hat{u}_* - \hat{u} - A_l(\hat{v}^l_* - \hat{v}^l)). \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $W_* \neq \varnothing$ ограничения в задаче (25) совместны. Если целевая функция в задаче (25) ограничена, то найдем ее решение $(y(\alpha_*), \alpha_*)$; если не ограничена, то в качестве $(y(\alpha_*), \alpha_*)$ возьмем любую допустимую точку. Из условий (21)–(24) следует, что $y(\alpha_*)$ есть решение задачи (10), пара $(y(\alpha_*), \alpha_*)$ является решением задачи (9), тройка $[\hat{w}_*, y(\alpha_*), \alpha_*]$ — седловой точкой задачи (2), в которой проекция $\hat{w}_*$ заданной точки $\hat{w}$ на множество решений задачи (D) определяется в соответствии с формулами (7), (8)

$$\hat{u}_* = \hat{u} + \alpha_* b - Ay(\alpha_*),$$

$$\hat{v}_* = (\hat{v} - y(\alpha_*))_+.$$

Покажем, что при любом α больше найденного α_* существует решение $y(\alpha)$ задачи (10) и проекция $\hat{w}_*$ находится из формул (27), (28), т. е. покажем, что пара $[y(\alpha_*) + \delta y, \alpha_* + \delta\alpha]$ при любом приращении $\delta\alpha > 0$ удовлетворяет условиям (21), (23). Для этого достаточно показать, что совместна система

$$\delta\alpha > 0, \quad \delta\alpha b - A_d \delta y^d = 0_m, \quad \delta y^d \geq 0_d.$$

Действительно, при $\delta\alpha > 0$ имеем $A_d \dfrac{\delta y^d}{\delta\alpha} = b$, $\dfrac{\delta y^d}{\delta\alpha} \geq 0_d$. Эта система совместна, так как ее решением в силу условия (20) является $\dfrac{\delta y^d}{\delta\alpha} = \hat{x}^d_*$. Следовательно, при любом $\delta\alpha > 0$ существует такое δy, что пара $[y(\alpha_*) + \delta y, \alpha_* + \delta\alpha]$ есть решение задачи (9), $[y(\alpha_*) + \delta y]$ — решение задачи (10) при фиксированном параметре $\alpha = \alpha_* + \delta\alpha$ и проекция $\hat{w}_*$ находятся из формул (27), (28).

Если выполнено предположение теоремы о том, что матрица A_d имеет полный ранг m или $d \leq m$, то в (21) линейная система уравнений относительно неизвестных y^d совместна и единственное решение y^d этой системы дается формулой

$$y^d(\alpha) = ({A_d}^\top A_d)^{-1} {A_d}^\top (\alpha\, b - (\hat{u}_* - \hat{u}) + A_l(\hat{v}^l_* - \hat{v}^l)). \tag{30}$$

Подставляя эту формулу в условие (23), получаем неравенство

$$q \leq \alpha z, \tag{31}$$

где введены обозначения $q = \hat{v}^d + (A_d^\top A_d)^{-1} A_d^\top (\hat{u}_* - \hat{u} - A_l(\hat{v}^l_* - \hat{v}^l))$ и $z = (A_d^\top A_d)^{-1} A_d^\top b$.

Если y^d определено согласно (30) и α удовлетворяет неравенству (31), то пара $[y, \alpha]$ является решением двойственной задачи (9). Легко найти минимальное значение α, при котором выполнено неравенство (31), т. е. получаем аналитическое решение задачи (25).

Из (20) следует, что $\hat{x}^d_* = (A_d^\top A_d)^{-1} A_d^\top b$, т. е. $\hat{x}^d_* = z \geq 0_d$. Естественно ввести индексное множество $\sigma = \{l + 1 \leq i \leq n\colon (\hat{x}^d_*)^i > 0\}$. Если $\sigma = \varnothing$, то (31) выполнено при любом α. Неравенство (31) имеет место при любом $\alpha \geq \alpha_*$, где

$$\alpha_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in \sigma} \dfrac{q^i}{(\hat{x}^d_*)^i}, & \text{если } \sigma \neq \varnothing, \\ \gamma > -\infty, & \text{если } \sigma = \varnothing, \end{cases}$$

и γ — произвольное число. Итак, при $\alpha \geq \alpha_*$ можно решать упрощенную задачу безусловной максимизации (10). Ее решение одновременно дает решение двойственной задачи (9). Далее, используя формулы (7)–(8), получаем проекцию $\hat{w}_* = [\hat{u}_*, \hat{v}_*]$ заданной точки $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$ на множество решений W_* задачи (D). Из (30) и (20) следует, что решение задачи (P) выражается через решение $y(\alpha)$ задачи (10) при $\alpha \geq \alpha_*$ по формуле (29).

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что значение α_*, найденное при решении задачи (25) или по формуле (26), может быть отрицательным. Это означает, что для двойственной задачи (D) проекция точки $\hat{w}$ на множество ее решений W_* совпадает с проекцией этой точки на допустимое множество W.

Следующая теорема утверждает, что если известна какая-нибудь точка $w_* \in W_*$, то можно получить решение прямой задачи (P) после однократного решения задачи безусловной максимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции n переменных.

Теорема 2. *Пусть множество решений W_* исходной задачи ЛП непусто. Тогда для любых $\alpha > 0$ и $w_* = [u_*, v_*] \in W_*$ точное решение прямой задачи (P) находится по формуле $x_* = y(\alpha)/\alpha$, где $y(\alpha)$ — решение задачи безусловной максимизации*

$$I = \max_{y \in \mathbb{R}^n} S(y, \alpha, w_*) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \Big\{ -c^\top y + u_*^\top A y - \frac{1}{2}\|\alpha\, b - Ay\|^2 - \frac{1}{2}\|(v_* - y)_+\|^2 \Big\}. \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если двойственная задача (D) разрешима, то при любом фиксированном α разрешимы взаимно двойственные задачи (11) и (10). Пусть $y(\alpha)$ — решение задачи (10) при $\hat{w} = w_* \in W_*$ и любом $\alpha > 0$. Легко видеть, что тогда w_* есть решение задачи (11). Действительно, целевая функция задачи (11) принимает свое минимальное значение, равное нулю, на допустимом множестве W. Тогда согласно формулам (17) и (18) решения задач безусловной максимизации (10) и квадратичного программирования (11) связаны между собой выражениями $u_* = u_* - Ay(\alpha) + \alpha\, b$ и $v_* = (v_* - y(\alpha))_+$. Эти выражения эквивалентны следующим условиям:

$$v_* \geq 0_n, \quad y(\alpha) \geq 0_n, \quad D(v_*)(y(\alpha)) = 0_n, \quad Ay(\alpha) = \alpha\, b. \tag{33}$$

Обозначим через $x_* = y(\alpha)/\alpha$. Тогда с учетом того что $w_* \in W$, из (33) получим $Ax_* = b$, $v_* \geq 0_n,\ x_* \geq 0_n,\ D(v_*)(x_*) = 0_n$. Отсюда следует, что $[x_*, v_*]$ — точка Куна — Таккера для задачи ЛП и $x_* = y(\alpha)/\alpha$ есть решение прямой задачи (P).

Теорема доказана.

Итак, решение прямой и двойственной задач ЛП (P) и (D') сводится к однократному решению двух задач безусловной максимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции одинаковой размерности m. При этом находятся точная проекция заданной точки $\hat{w}$ на множество решений двойственной задачи (D) и некоторое точное решение прямой задачи (P), если в задаче (10) взять любой параметр $\alpha \geq \alpha_*$, а в задаче (32) — любой положительный параметр α.

Для одновременного решения прямой и двойственной задач ЛП можно использовать следующий итерационный процесс:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha b - Ay_{k+1}, \tag{34}$$

$$v_{k+1} = (v_k - y_{k+1})_+, \tag{35}$$

где произвольный параметр $\alpha > 0$ фиксирован, а вектор y_{k+1} определяется из решения следующей задачи безусловной максимизации:

$$y_{k+1} \in \arg\max_{y \in \mathbb{R}^n} \Big\{ -c^\top y + u_k^\top Ay - \frac{1}{2}\|(\alpha\, b - Ay)\|^2 - \frac{1}{2}\|(v_k - y)_+\|^2 \Big\}. \tag{36}$$

Теорема 3. *Пусть множество решений W_* двойственной задачи (D) непусто. Тогда при любом $\alpha > 0$ и любой начальной точке w_0 итерационный процесс (34)–(36) сходится к $w_* \in W_*$ за конечное число шагов ω. Формула $x_* = y_{\omega+1}/\alpha$ дает точное решение прямой задачи (P).*

Отметим, что при использовании этого метода не требуется знать пороговое значение α_*. Но если выбранное значение $\alpha < \alpha_*$, то метод за конечное число шагов находит некоторое решение двойственной задачи, которое является проекцией начальной точки на множество решений двойственной задачи ЛП. Заметим, что $w_\omega = w_* \in W_*$ является проекцией точки $w_{\omega-1}$ на множество решений W_* задачи (D).

2. Обобщенный метод Ньютона для безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции $S(y, \alpha, \hat{w})$

Безусловная максимизация в (10) может выполняться любым методом. Но, как показал О. Мангасарьян, для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона [10; 11]. Приведем его краткое описание.

Максимизируемая функция $S(y, \alpha, \hat{w})$ в задаче (10) является вогнутой кусочно-квадратичной и дифференцируемой. Для этой функции обычная матрица Гессе не существует. Действительно, градиент

$$S_y(y, \alpha, \hat{w}) = -c + A^\top \hat{u} + A^\top(\alpha\, b - Ay) + (\hat{v} - y)_+$$

функции $S(y,\alpha,\hat{w})$ недифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является матрицей размера $(n\times n)$ следующего вида:

$$\partial_y^2 S(y,\alpha,\hat{w}) = -A^\top A + D^\sharp(z),$$

где через $D^\sharp(z)$ обозначена диагональная размера $(n\times n)$ матрица с i-м диагональным элементом z^i, равным 1, если $(\hat{v}-y)^i > 0$, и равным 0, если $(\hat{v}-y)^i \le 0$, $i=1,\dots,n$. Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, то к ней добавляется регуляризующее слагаемое δI_n, где δ — малая положительная величина (обычно при расчетах δ полагалась равной 10^{-4}–10^{-5}) и I_n — единичная матрица порядка n.

В этом случае модифицированный метод Ньютона имеет вид

$$y_{s+1} = y_s - (\partial_y^2 S(y_s,\alpha,\hat{w}) + \delta I_n)^{-1} S_y(y_s,\alpha,\hat{w}).$$

Доказательство конечной глобальной сходимости обобщенного метода Ньютона с выбором шага по правилу Армихо для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции можно найти в [10–12].

Приведем расчетные формулы итерационного метода (34)–(36) и обобщенного метода Ньютона.

Шаг 1. Задать произвольные начальные приближения y_0 и $w_0=[u_0,v_0]$, параметр $\alpha>0$, точности $\epsilon_1>0$ и $\epsilon_2>0$ соответственно для внешних и внутренних итераций и положить $s=0$.

Шаг 2. Вычислить значение функции

$$S(y_k,\alpha,w_s) = -c^\top y_k + u_s^\top A y_k - \frac{1}{2}\|(\alpha\, b - A y_k)\|^2 - \frac{1}{2}\|(v_s - y_k)_+\|^2. \tag{37}$$

Здесь k — номер внутренней итерации метода Ньютона для решения задачи безусловной максимизации, а s — номер внешней итерации.

Шаг 3. Вычислить градиент функции (37) по переменной y

$$G_k = S_y(y_k,\alpha,w_s) = -c + A^\top u_s + A^\top(\alpha\, b - A y_k) + (v_s - y_k)_+.$$

Шаг 4. Используя обобщенную матрицу Гессе функции (37), сформировать матрицу $H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$H_k = \delta I_n - A^\top A + D_k,$$

где диагональная матрица $D_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ задается равенствами

$$(D_k)_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_s - y_k)^i > 0,\\ 0, & \text{если } (v_s - y_k)^i \le 0. \end{cases}$$

Шаг 5. Найти решение δy линейной системы

$$H_k \delta y = -G_k. \tag{38}$$

Шаг 6. Определить y_{k+1} по формуле $y_{k+1} = y_k - \tau_k \delta y$, где $\tau_k = \max_\tau S(y_k - \tau\delta y, \alpha, w_s)$.

Шаг 7. Если $\|y_{k+1} - y_k\| > \epsilon_1$, то положить $k=k+1$ и перейти к шагу 2.

Шаг 8. Вычислить $u_{s+1} = u_s + \alpha\, b - A\tilde{y}$, $v_{s+1} = (v_s - \tilde{y})_+$. Если $\|w_{s+1} - w_s\| > \epsilon_2$, то положить $y_0 = \tilde{y}$, $s = s+1$ и перейти к шагу 2.

Шаг 9. Положить $x_* = \tilde{y}/\alpha$, $u_* = u_s + \alpha\, b - A\tilde{y}$, $v_* = (v_s - \tilde{y})_+$ и завершить работу алгоритма.

3. Вычислительные эксперименты

Приведенный алгоритм метода (34)–(36) с использованием обобщенного метода Ньютона был реализован в системе MATLAB. Численные расчеты проводились на компьютере Intel Core2 Duo, 2.4 Ghz., 1Gb. Для проведения вычислительных экспериментов использовался генератор тестовых задач, близкий к предложенному в [9]. Он порождал случайным образом разрешимые двойственные задачи (D') с большим числом переменных (до 50 млн) и средним числом ограничений типа неравенств (до нескольких тысяч), т. е. имело место неравенство $m >> n$.

Генератор задач ЛП работает следующим образом. Задаются числа m и n, определяющие количество строк и столбцов матрицы A, число ρ — плотность заполнения матрицы A ненулевыми элементами. В частности, значение $\rho = 1$ означает, что случайным образом генерировались все элементы матрицы A, а значение $\rho = 0.01$ указывает, что в матрице A генерировался только 1% элементов, а остальные полагались равными нулю. Элементы матрицы A задавались случайным образом из интервала $[-50, 50]$. Решение x_* прямой задачи (P) и решение u_* двойственной задачи (D') генерировались случайным образом. Решения x_* и u_* использовались для вычисления коэффициентов целевой функции c и правых частей b задачи (P). Векторы b и c определялись по формулам $b = Ax_*$, $c = A^\top u_* + \xi$, где если ${x_*}^i > 0$, то $\xi^i = 0$, если ${x_*}^i = 0$, то компонента ξ^i выбиралась случайным образом из заданного интервала $0 \le \gamma^i \le \xi^i \le \theta^i$.

Результаты вычислений приведены в таблице. Во втором столбце указано общее время решения задачи в секундах, в третьем — число решенных задач безусловной максимизации (36) обобщенным методом Ньютона. Во всех вычислениях $w_0 = 0_{m+n}$, параметр $\alpha = 0.2$. Отметим, что в задачах ЛП, для которых число решенных задач безусловной максимизации (36) равно двум, параметр $\alpha \ge \alpha_*$, и найденное решение w_* является проекцией на множество решений задачи (D) начальной точки $w_0 = 0_{m+n}$. Для данных в последних трех столбцах использовались чебышевские нормы векторов невязок ограничений, вычисленных в найденном решении x_*, u_*, v_*:

$$\Delta_1 = \|Ax - b\|_\infty, \quad \Delta_2 = |c^\top x - b^\top u|, \quad \Delta_3 = \|(A^\top u + v - c)_+\|_\infty.$$

Результаты численных расчетов
на компьютере Intel Core2 Duo, 2.4 Ghz., 1Gb.

$u_0 = 0_m$, $v_0 = 0_n,\ y_0 = 1_n,\ \delta = 10^{-5},\ \epsilon_1 = 10^{-12},\ \epsilon_2 = 10^{-7}$

$m \times n \times \rho$	T	I	Δ_1	Δ_2	Δ_3
$10^6 \times 100 \times 0.01$	3.8	2	1.4×10^{-10}	4.5×10^{-7}	1.8×10^{-10}
$10^6 \times 500 \times 0.01$	18.6	2	5.5×10^{-10}	4.3×10^{-8}	1.0×10^{-9}
$10^6 \times 700 \times 0.01$	26.7	2	3.7×10^{-10}	1.1×10^{-7}	2.0×10^{-10}
$10^6 \times 1000 \times 0.01$	39.5	2	6.5×10^{-11}	1.3×10^{-7}	1.0×10^{-11}
$10^6 \times 2000 \times 0.01$	80.4	2	5.5×10^{-11}	6.2×10^{-8}	1.1×10^{-10}
$10^6 \times 3000 \times 0.01$	244.1	4	5.6×10^{-11}	2.1×10^{-8}	4.3×10^{-11}
$10^4 \times 500 \times 1$	34.7	5	1.1×10^{-10}	9.8×10^{-9}	8.9×10^{-10}
$10^4 \times 1000 \times 1$	210.7	7	5.5×10^{-12}	3.0×10^{-9}	1.0×10^{-7}
$3000 \times 2000 \times 1$	241.1	10	6.2×10^{-11}	2.4×10^{-9}	3.0×10^{-10}
$5000 \times 1000 \times 1$	96.2	10	5.5×10^{-11}	4.8×10^{-9}	5.7×10^{-11}
$10^4 \times 4000 \times 0.01$	67.7	3	2.9×10^{-12}	7.2×10^{-10}	4.9×10^{-12}
$(5.10^6) \times 500 \times 0.01$	93.6	2	5.9×10^{-10}	1.6×10^{-7}	4.7×10^{-11}
$(5.10^6) \times 1000 \times 0.01$	198.0	3	4.5×10^{-10}	6.1×10^{-7}	2.6×10^{-11}
$10^7 \times 500 \times 0.01$	177.2	3	1.0×10^{-9}	2.4×10^{-7}	4.6×10^{-10}

Отметим, что MATLAB для решения систем линейных уравнений (38) использовал метод Холецкого. В работе [13] отмечается, что весьма целесообразно решать систему (38) с помощью предобусловленного метода сопряженных градиентов. В некоторых случаях особенно эффективно в качестве предобусловливателя использовать неполную LU-факторизацию [16].

Многим вычислительным аспектам использования различных квадратичных функций для решения задач ЛП посвящена работа [17].

В [14] была предложена вспомогательная вогнутая квадратичная функция для решения двойственной задачи ЛП в следующем виде:

$$S(y, \alpha, \hat{u}) = -c^\top y + \hat{u}^\top Ay - \frac{1}{2}\|\alpha\, b - Ay\|^2.$$

В результате ее максимизации на неотрицательном ортанте

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n_+} S(y, \alpha, \hat{u}) \tag{39}$$

при параметре α большем, чем некоторое пороговое значение α_*, из выражения

$$\hat{u}_* = \hat{u} + \alpha\, b - Ay(\alpha) \tag{40}$$

получалась проекция $\hat{u}_*$ заданной точки $\hat{u}$ на множество решений U_* двойственной задачи ЛП (D'). В (40) $y(\alpha)$ есть решение задачи (39) при $\alpha \geq \alpha_*$.

Задача (39) не может быть решена непосредственно методом Ньютона, так как содержит ограничение неотрицательности на переменные y. Для учета ограничения $y \geq 0$ в задаче (39) можно применить квадратичный штраф, т. е. вместо задачи (39) максимизации вогнутой квадратичной функции на положительном ортанте решать задачу безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n} \Big\{ -c^\top y + \hat{u}^\top Ay - \frac{1}{2}\|\alpha\, b - Ay\|^2 - \frac{\tau}{2}\|(-y)_+\|^2 \Big\}, \tag{41}$$

где $\tau > 0$ — коэффициент штрафа. Для решения задачи (41) уже можно применить обобщенный метод Ньютона. Хорошо известно, что решение задачи (41) лишь в пределе при $\tau \to +\infty$ совпадает с решением задачи (39).

Для задач, представленных в таблице, использовался в системе MATLAB метод, в котором решалась задача (41) при постоянном и достаточно большом коэффициенте штрафа $\tau = 10^5$. Результаты расчетов показали, что этот достаточно большой коэффициент штрафа приводит к увеличению в полтора–два раза общего времени решения задач для достижения примерно той же точности по сравнению с использованием задачи (10)

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n} \Big\{ -c^\top y + \hat{u}^\top Ay - \frac{1}{2}\|\alpha\, b - Ay\|^2 - \frac{1}{2}\|(\hat{v} - y)_+\|^2 \Big\},$$

в которой отсутствует коэффициент штрафа.

Отметим, что между применением задач (41) и (10) при достаточно больших α имеется следующее различие: в первом случае находится проекция $\hat{u}^1_* \in U_*$ заданной точки $\hat{u}$, а во втором — проекция $\hat{w}_* = [\hat{u}^2_*, \hat{v}_*]$ точки $\hat{w} = [\hat{u}, \hat{v}]$ на множество решений W_*. Очевидно, имеет место неравенство

$$\|\hat{u}^1_* - \hat{u}\| \leq \|\hat{u}^2_* - \hat{u}\|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д.** Вопросы оптимизации и распознавания образов. Свердловск: Сред.-Урал. книж. изд-во, 1979. 64 с.
3. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
5. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999. 312 с.
6. **Еремин И.И.** Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. ун-та, 2005. 195 с.
7. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 83–89.
8. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Метод решения задач линейного программирования большой размерности // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 6. С. 727–732.
9. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.** Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1564–1573.
10. **Mangasarian O.L.** A finite Newton method for classification // Optim. Methods Softw. 2002. Vol. 17, no. 5. P. 913–929.
11. **Mangasarian O.L.** A Newton method for linear programming // J. Optim. Theory and Appl. 2004. Vol. 121. P. 1–18.
12. **Kanzow C., Qi H., Qi L.** On the minimum norm solution of linear programs // J. Optim. Theory and Appl. 2003. Vol. 116. P. 333–345.
13. Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования / В.А. Гаранжа, А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко, М.Х. Нгуен // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1369–1384.
14. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Нахождение проекции заданной точки на множество решений задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 33–47.
15. **Еремин И.И.** О квадратичных задачах и полноквадратичных задачах выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1998. № 12. С. 22–28.
16. **Kaporin I.E.** High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its UTU+UTR+RTU-decomposition // Numer. Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 5, no. 6. P. 483–509.
17. **Попов Л.Д.** Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 206–221.

Голиков Александр Ильич
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
ВЦ РАН
e-mail: evt@ccas.ru

Поступила 11.02.2013

Евтушенко Юрий Гаврилович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
директор ВЦ РАН
e-mail: evt@ccas.ru

Том 19 № 2 2013

УДК 517.538.2

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С КРУГОВЫМИ ГРАНИЦАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1]

Г. А. Дубосарский

Построены базисы всплесков, удобные для решения задач Шварца, Дирихле и Неймана в области с круговыми компонентами границы. Ряды всплесков равномерно сходятся в пространствах типа Харди. Основой для построения всплесков является специальная система гармонических рациональных функций, к которой была применена либо ортогонализация Грама — Шмидта относительно специального скалярного произведения, либо ее модификация.

Ключевые слова: задача Шварца, задача Дирихле, задача Неймана, гармонические всплески, базис пространств гармонических функций.

G. A. Dubosarskii. Harmonic wavelets in a multiply connected domain with circular boundaries and their applications to problems of mathematical physics.

Wavelet bases convenient for solving the Schwarz, Dirichlet, and Neumann problems in a domain with circular components of the boundary are constructed. Wavelet series converge uniformly in spaces of Hardy type. The construction of wavelets is based on a special system of harmonic rational functions to which either the Gram–Schmidt orthogonalization with respect to a special scalar product or its modification was applied.

Keywords: Schwarz problem, Dirichlet problem, Neumann problem, harmonic wavelets, basis in spaces of harmonic functions.

1. Введение

В данной работе на основе всплесков статьи [1] построены две новые системы гармонических всплесков для областей с круговыми границами. Первая система позволяет найти решения задач Дирихле и Шварца. Вторая система удобна для решения задачи Неймана. Краткое описание результатов работ, в которых предложены формулы для решения вышеназванных задач, можно найти в [2]. Общим недостатком формул предшествующих работ является наличие в них многократных суммирований. Формулы данной статьи и работы [2] содержат только однократные ряды. Коэффициенты рядов, представляющих решения задач Дирихле и Шварца в настоящей статье, вычисляются по формулам более простого вида, чем коэффициенты рядов по всплескам статьи [2]. А именно для любой области с круговыми границами коэффициенты находятся в форме суммы интегралов от произведения граничных значений и определенных тригонометрических полиномов. Если разложить граничные значения в ряд Фурье, то вычисление таких коэффициентов сводится к суммированию произведений коэффициентов ряда Фурье и коэффициентов тригонометрических полиномов. Однако построение самой системы функций для решения задач Дирихле и Шварца требует большего количества вычислений, чем построение системы функций для ряда по всплескам в [2].

Обозначим через $C_r(a)$ окружность с центром в точке a радиуса r. Будем также использовать обозначение $B_r(a) = \{z\colon |z-a| < r\}$ и обозначать $B_1(0)$ через K. Рассмотрим область комплексной плоскости $\widetilde{K} = \widetilde{K}(z_1, r_1, z_2, r_2, \ldots, z_m, r_m)$, ограниченную окружностями $C_{r_0}(z_0) = C_1(0), C_{r_1}(z_1), C_{r_2}(z_2), \ldots, C_{r_m}(z_m)$, где $|z_k| + r_k < 1, k = \overline{1,m}$ и $|z_k - z_l| > r_k + r_l, k \neq l$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00004) и Интеграционного проекта, выполняемого учеными УрО РАН совместно с СО РАН (проект 12-С-1-1018).

Положим, что все гармонические функции в данной статье являются вещественнозначными. Будем использовать пространства типа Харди $h_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$, из [2]. В разд. 2 данной статьи описывается построение ряда, представляющего решение задачи Дирихле. До разд. 5 в работе изучается скорость сходимости построенного в разд. 2 ряда. Раздел 3 посвящен формулировке и доказательству вспомогательных утверждений. В разд. 4 доказывается теорема 1 об асимптотике функций и коэффициентов перед ними изучаемого ряда. Также формулируются теорема 2 об оценке скорости сходимости частичных сумм и теорема 3 о существовании функций из пространств типа Харди $h_1(\widetilde{K})$ и $h_\infty(\widetilde{K})$, для которых ряды по построенной системе расходятся. На основе рядов из разд. 2 в разд. 5 строятся ряды всплесков, которые сходятся в пространствах $h_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$. В разд. 6 описывается построение всплесков, удобных для решения задач Шварца и Неймана, без приведения оценки скорости сходимости соответствующих рядов, поскольку она делается аналогично.

2. Гармоническая система функций

Рассмотрим систему функций

$$\Big\{h_0^0(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, h_0^l(z) = \frac{\ln|z-z_l|}{\sqrt{2}\ln r_l}, h_k^0(z) = Rez^k, \widetilde{h}_k^0(z) = Imz^k,$$

$$h_k^l(z) = Re\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k, \widetilde{h}_k^l(z) = -Im\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k, l = \overline{1,m}, k \in \mathbb{N}\Big\}. \tag{2.1}$$

Занумеруем функции системы (2.1) одним индексом: $h_k(z), k \in \mathbb{N}$. Будем производить нумерацию в порядке

$$\begin{gathered}\{h_k : k \in \mathbb{N}\} = \{h_0^0(z), h_0^1(z), h_0^2(z), \ldots, h_0^m(z),\\ h_1^0(z), \widetilde{h}_1^0(z), h_1^1(z), \widetilde{h}_1^1(z), \ldots, h_1^m(z), \widetilde{h}_1^m(z),\\ h_2^0(z), \widetilde{h}_2^0(z), h_2^1(z), \widetilde{h}_2^1(z), \ldots, h_2^m(z), \widetilde{h}_2^m(z), \ldots\}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Нам потребуется следующее утверждение о специальном разложении гармонической функции. Доказательство существования этого разложения можно найти в [3], а единственность проверяется так же, как в [4, лемма 2.1].

Утверждение. *Пусть функция $u(z)$ является гармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k|, \tag{2.3}$$

где $u_0(z)$ гармоническая функция в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C}\setminus\overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty} u_k(z) = 0, k = \overline{1,m}$, и $A_k, k = \overline{1,m}$, — некоторые вещественные константы.

Будем использовать нормы

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f(x)\|_{L_\infty} = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

и следующее скалярное произведение: $(f,g)_{L_2} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Из утверждения о разложении гармонической функции следует, что система (2.1) является всюду плотным множеством в каждом из пространств $h_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$, с нормой

$$\|u\|_p = \sum_{k=0}^{m} \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \tag{2.4}$$

Для функции $u(z) \in h_p(\widetilde{K})$, используя разложение (2.3), обозначим через $u_k^*, k = \overline{0,m}$, функцию u_0 при $k = 0$ и функцию $u_k(z) + A_k \ln|z - z_k|$ при $k = \overline{1,m}$. Пусть $R(z)$ является конечной линейной комбинацией функций системы (2.1)

$$R = \sum_{s,l} \lambda_s^l h_s^l + \sum_{s,l} \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l. \tag{2.5}$$

Поскольку разложение (2.3) единственно, мы получаем $(\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_l^* = \overset{(\sim)}{h}{}_s^l, (\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_\nu^* = 0, \nu \neq l$. Откуда заключаем, что $R_l^* = \sum_s \lambda_s^l h_s^l + \sum_s \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l, R = \sum_l R_l^*$. Так как справедливы соотношения

$$h_0^l(z_l + r_l e^{ix}) = 1/\sqrt{2}, \quad \overset{(\sim)}{h}{}_s^l(z_l + r_l e^{ix}) = \overset{(\sin)}{\cos} sx, \quad s > 0,$$

то выполняется равенство

$$R_l^*(z_l + r_l e^{ix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_0^l + \sum_{s>0} \lambda_s^l \cos sx + \sum_{s>0} \widetilde{\lambda}_s^l \sin sx. \tag{2.6}$$

Введем псевдоскалярное произведение с помощью разложения (2.3) функции $v(z)$:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(z_k + r_k e^{ix}) v_k^*(z_k + r_k e^{ix}) dx \quad \big(u \in h_p(\widetilde{K}),\ 1 \leq p \leq \infty,\ v \in h_\infty(\widetilde{K})\big). \tag{2.7}$$

Построим систему функций $\{g_k(z)\}_{k=1}^\infty$ такую, что $g_k(z), k \in \mathbb{N}$, является линейной комбинацией функций $h_l(z), l = \overline{1,k}$, системы (2.1) и выполняется условие

$$|\langle g_k, g_l \rangle| = \delta_{k,l}, \quad k \geq l. \tag{2.8}$$

Определим систему $\{g_k(z)\}_{k=1}^\infty$ по индукции. Положим $g_1(z) = h_1(z)$, тогда $\langle g_1, g_1 \rangle = 1$. Пусть функции $g_k(z), k = \overline{1, n-1}$, построены и выполняется $|\langle g_k, g_l \rangle| = \delta_{k,l}, n > k \geq l$. Определим теперь функцию $g_n(z)$. Для этого по аналогии с методом Грама — Шмидта введем функцию $q_n(z)$ вида

$$q_n(z) = h_n(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k g_k(z). \tag{2.9}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1}$ будем последовательно находить путем умножения (2.9) на функции $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$, полагая $\langle q_n, g_k \rangle = 0, k = \overline{1, n-1}$. Следовательно, выполняется рекуррентное соотношение $\alpha_k = -\langle g_k, g_k \rangle \{\langle h_n, g_k \rangle + \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s \langle g_s, g_k \rangle\}$. Проверим, что $\langle q_n, q_n \rangle \neq 0$. В силу того что $\langle q_n, g_k \rangle = 0, k = \overline{1, n-1}$ и (2.9), справедливо равенство $\langle q_n, q_n \rangle = \langle q_n, h_n \rangle$. Если бы $\langle q_n, q_n \rangle = 0$, то $\langle q_n, h_k \rangle = 0, k = \overline{1, n}$. Невозможность последних равенств вытекает из леммы 2, которую мы докажем в разд. 3, не опираясь на возможность построения системы со свойством (2.8). Итак, считаем, что $\langle q_n, q_n \rangle \neq 0$. Остается только взять в качестве $g_n(z)$ функцию $q_n(z)/\sqrt{|\langle q_n, q_n \rangle|}$.

Сопоставим функции $u(z)$ из пространства $h_p(\widetilde{K}),\ 1 \leq p \leq \infty$, ряд

$$u(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g_k(z). \tag{2.10}$$

Коэффициенты $\beta_k, k \in \mathbb{N}$, найдем из условий $\langle u - \sum_{k=1}^\infty \beta_k g_k, g_n \rangle = 0, n \in \mathbb{N}$. Из соотношений (2.8) следует, что последние условия эквивалентны условиям

$$\Big\langle u - \sum_{k=1}^{n} \beta_k g_k, g_n \Big\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Подставляя в (2.11) значения $n = 1, 2, \ldots$, последовательно находим β_k по формуле $\beta_k = \langle g_k, g_k\rangle\{\langle u, g_k\rangle - \sum_{s=1}^{k-1}\beta_s\langle g_s, g_k\rangle\}$. Откуда можно вывести, что

$$\beta_k = \langle u, t_k\rangle, \tag{2.12}$$

где t_k — линейная комбинация функций $h_s, s = \overline{1,k}$. Функции $t_k(z)$ определяются единственным образом и не зависят от функции $u(z)$. Из рекуррентных соотношений для коэффициентов β_k заключаем, что $t_k = \langle g_k, g_k\rangle\{g_k - \sum_{s=1}^{k-1} t_s\langle g_s, g_k\rangle\}$. В силу (2.5)–(2.7) и (2.12) получаем, что коэффициенты β_k равны сумме интегралов от произведения граничных значений функции $u(z)$ и тригонометрических полиномов, равных $(t_k)_l^*(z_l + r_l e^{ix}), l = \overline{0,m}$.

Будем нумеровать функции $g_n(z)$ и коэффициенты β_n ряда (2.10) двумя индексами. Функция $g_n(z)$ является линейной комбинацией функций $h_s(z), s = \overline{1,n}$. Пусть $h_n(z) = \overset{(\sim)}{h}{}^l_k(z)$, тогда будем полагать, что $g_n(z) = \overset{(\sim)}{g}{}^l_k(z)$. Коэффициенты β_n при функциях $g_n = \overset{(\sim)}{g}{}^l_k$ ряда (2.10) будем обозначать $\overset{(\sim)}{\beta}{}^l_k(z)$.

Введем частичные суммы ряда (2.10)

$$S_n(z; u) = \sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k^l g_k^l(z) + \sum_{k=1}^{n}\widetilde{\beta}_k^l\widetilde{g}_k^l(z)\right), \tag{2.13}$$

$$s_n(z; u) = \sum_{l=1}^{n}\beta_k g_k(z). \tag{2.14}$$

Легко видеть, что выполняется равенство $S_n(\cdot; u) = s_{(m+1)(2n+1)}(\cdot; u)$. Из соотношений (2.8) и (2.11) следует, что

$$\langle u - s_n(\cdot; u), g_k\rangle = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.15}$$

Нас будет интересовать скорость сходимости частичных сумм $S_n(\cdot; u)$ к функции u. Оценка скорости сходимости будет приведена в теореме 2 разд. 4.

3. Вспомогательные результаты

Через $h_p(K), 1 \le p \le \infty$, обозначим пространства Харди, которые в случаях $p = 1$ и $p = \infty$ сужены, как [4] или [2]. Если функция $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \le p \le \infty$, то по аналогии с тем, как это было доказано в [4], проверяется, что $u_0(z) \in h_p(K), u_k\big(z_k + r_k/z\big) \in h_p(K), k = \overline{1,m}$. Следовательно, для почти всех x существуют граничные значения $u_0(e^{ix}), u_k(z_k + r_k e^{ix}), k = \overline{1,m}$, определяемые по некасательным путям. Вначале докажем лемму, которая является обобщением классического результата Харди для единичного круга.

Лемма 1. *Пусть $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \le p < \infty$, тогда функция*

$$\gamma(\delta; u) = \int_0^{2\pi}|u(\delta e^{ix})|^p dx + \sum_{k=1}^{m}\int_0^{2\pi}\left|u\left(z_k + \frac{r_k}{\delta}e^{ix}\right)\right|^p dx$$

является возрастающей по переменной δ, удовлетворяющей неравенствам

$$\delta \le 1, \quad \delta \ge |z_k| + r_k, \quad \frac{r_k}{\delta} \le |z_k - z_l| - r_l, \quad k, l = \overline{0,m}, \quad k \ne l. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $\delta = \delta', \delta''$ удовлетворяют неравенствам (3.1) и $\delta' > \delta''$. Рассмотрим область $\widetilde{K}_{\delta'}$, ограниченную окружностями $C_{\delta'}(0)$ и $C_{\frac{r_k}{\delta'}}(z_k), k = \overline{1,m}$. Пусть функция $U(z)$ является гармонической в $\widetilde{K}_{\delta'}$, тогда функция

$$\gamma^*(\delta; U) = \int_0^{2\pi}U(\delta e^{ix})dx + \sum_{k=1}^{m}\int_0^{2\pi}U\left(z_k + \frac{r_k}{\delta}e^{ix}\right)dx$$

не меняется с ростом переменной δ, удовлетворяющей (3.1). Достаточно проверить данное утверждение для каждой компоненты $U_k(z), k=\overline{0,m}$, разложения (2.3) функции $U(z)$ в $\widetilde{K}_{\delta'}$ и функций $\ln|z-z_k|, k=\overline{1,m}$; это несложно сделать, используя теорему о среднем значении и то, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln|\delta e^{ix}-z_k|dx + 2\pi\ln r_k/\delta = 2\pi(\ln\delta+\ln r_k/\delta) = 2\pi\ln r_k, \int\limits_0^{2\pi}\ln|z_k+r_ke^{ix}-z_l|dx$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\ln|z_k+r_k/\delta e^{ix}-z_l|dx = 2\pi\ln|z_k-z_l|, \quad k\neq l.$$

Пусть на границе $\widetilde{K}_{\delta'}$ выполняется $U(z)=|u(z)|^p$. Тогда в силу субгармоничности функции $|u(z)|^p$ и того, что $\gamma^*(\delta';U)=\gamma^*(\delta'';U)$, получаем

$$\gamma(\delta';u)=\gamma^*(\delta';U)=\gamma^*(\delta'';U)\geq\gamma(\delta'';u). \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть для функции $R(z)=\sum_{k=1}^n\lambda_kh_k(z)$ выполняются равенства $\langle R,h_k\rangle=0$, $k=\overline{1,n}$. Тогда $R(z)\equiv 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разберем сначала случай $n\geq m+1$, где $m+1$ — связность $\widetilde{K}$. Обозначим через $\overset{(\sim)}{n}_l$ наибольший нижний индекс k функций $\overset{(\sim)}{h}{}^l_k(z)$, которые входят в линейную комбинацию $R(z)$. Если функции $h^l_k(z)$ или $\widetilde{h}^l_k(z)$ отсутствуют в $R(z)$, то полагаем, что $n_l=-1$ и $\widetilde{n}_l=0$ соответственно. Тогда набор $\{h_k\colon k=\overline{1,n}\}$ состоит из функций $h^l_s, s=\overline{0,n_l}$, и $\widetilde{h}^l_s, s=\overline{1,\widetilde{n}_l}$. Пусть функция $R(z)$ такова, что $\langle R,h_k\rangle=0, k=\overline{1,n}$. Тогда $\langle R,h^l_k\rangle=0, k=\overline{0,n_l}$ и $\langle R,\widetilde{h}^l_k\rangle=0, k=\overline{1,\widetilde{n}_l}$, откуда по определению (2.7) произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ вытекает, что $\int_0^{2\pi}R(z_l+r_le^{ix})\cos kx dx=0, k=\overline{0,n_l}$ и $\int_0^{2\pi}R(z_l+r_le^{ix})\sin kx dx=0, k=\overline{1,\widetilde{n}_l}$; это, в свою очередь, означает:

$$E_{n_l,\widetilde{n}_l}R(z_l+r_le^{ix})_2=\|R(z_l+r_le^{ix})\|_{L_2}, \tag{3.2}$$

где $E_{n_l,\widetilde{n}_l}f(x)_2=\min_{\{\mu_k,\widetilde{\mu}_k\}}\|f(x)-\sum_{k=0}^{n_l}\mu_k\cos kx-\sum_{k=1}^{\widetilde{n}_l}\widetilde{\mu}_k\sin kx\|_2$.

Поскольку $R(z)$ имеет вид (2.5), для $R(z)$ выполняется соотношение (2.6). Следовательно, справедливо равенство

$$E_{n_l,\widetilde{n}_l}R(z_l+r_le^{ix})_2=E_{n_l,\widetilde{n}_l}(R-R^*_l)(z_l+r_le^{ix})_2. \tag{3.3}$$

Введем функцию $v_l(z)=(R-R^*_l)\Big(z_l+\dfrac{r_l}{\delta}z\Big)$, $k=\overline{1,m}$, при переменной δ, удовлетворяющей неравенствам (3.1) и $\delta\neq 1$. Пусть $v_l(e^{ix})=\sigma_0+\sum_{k=1}^\infty\{\sigma_k\cos kx+\widetilde{\sigma}_k\sin kx\}$, из того что $v_l(z)\in h_\infty(K)$, следует: $v_l(\delta e^{ix})=\sigma_0+\sum_{k=1}^\infty\delta^k\{\sigma_k\cos kx+\widetilde{\sigma}_k\sin kx\}$. Отсюда вытекает неравенство

$$E_{n_l,\widetilde{n}_l}v_l(\delta e^{ix})_2\leq\delta^{\min\{n_l,\widetilde{n}_l\}+1}E_{n_l,\widetilde{n}_l}v_l(e^{ix})_2.$$

В силу того что $n\geq m+1$, выполняется оценка $n_l\geq 0, \widetilde{n}_l\geq 0$, откуда заключаем

$$E_{n_l,\widetilde{n}_l}(R-R^*_l)(z_l+r_le^{ix})_2=E_{n_l,\widetilde{n}_l}v_l(\delta e^{ix})_2\leq\delta E_{n_l,\widetilde{n}_l}v_l(e^{ix})_2=\delta E_{n_l,\widetilde{n}_l}(R-R^*_l)\left(z_l+\frac{r_l}{\delta}e^{ix}\right)_2. \tag{3.4}$$

Учитывая (3.2)–(3.4) и то, что

$$R^*_l\Big(z_l+\frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big)=\sum_{k=0}^{n_l}\delta^k\lambda^l_k\cos kx+\sum_{k=1}^{\widetilde{n}_l}\delta^k\widetilde{\lambda}^l_k\sin kx,$$

получаем при $l=\overline{1,m}$

$$\|R(z_l+r_le^{ix})\|_{L_2}\le\delta E_{n_l,\widetilde n_l}(R-R_l^*)\Big(z_l+\frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big)_2=\delta E_{n_l,\widetilde n_l}R\Big(z_l+\frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big)_2\le\delta\Big\|R\Big(z_l+\frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big)\Big\|_{L_2}. \tag{3.5}$$

Аналогично получается неравенство

$$\|R(e^{ix})\|_{L_2}\le\delta\left\|R\left(\delta e^{ix}\right)\right\|_{L_2}. \tag{3.6}$$

Используя неравенства (3.5) и (3.6) и лемму 1 при $p=2$, получаем $\gamma(\delta;R)\le\gamma(1;R)\le\delta^2\gamma(\delta;R)$. Следовательно, $\gamma(\delta;R)=\gamma(1;R)=0$, откуда заключаем, что $R(z)\equiv0$. Если $n\le m$, то надо применить тот же метод доказательства к области с границами $C_{r_k}(z_k),k=\overline{0,n-1}$. □

Через $\tau, 0<\tau<1$, обозначим величину

$$\tau=\max\Big\{|z_k|+r_k,\frac{r_k}{1-|z_k|},\frac{r_k}{|z_k-z_l|-r_l}:k,l=\overline{1,m},k\ne l\Big\}. \tag{3.7}$$

В этом и следующем разделах константы в оценках вида $O(a_n),n\to\infty$, зависят только от геометрии $\widetilde K$. Путем непосредственного вычисления с помощью разложения в ряд Тейлора и оценки с использованием бинома Ньютона можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 3. *Для функций системы* (2.2) *и произведения* (2.7) *равномерно по* l *выполняется оценка*

$$\langle h_k,h_l\rangle=\delta_{k,l}+O(\tau^{k/2m}),\quad k\to\infty,$$

и равномерно по k *справедлива оценка*

$$\langle h_k,h_l\rangle=\delta_{k,l}+O(\tau^{l/2m}),\quad l\to\infty.$$

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4 [2, лемма 4]. *Норма* $\|u\|_p$, *введенная в* (2.4), *и норма*

$$\|u\|_{p,\widetilde K}=\sum_{k=0}^m\|u_k(z_k+r_ke^{ix})\|_{L_p}+\sum_{k=1}^m|A_k|,$$

определенная с помощью разложения (2.3), *эквивалентны в пространстве* $h_p(\widetilde K),1\le p\le\infty$.

Пусть система $\{h_s(z),s=\overline{1,n}\}$ состоит из функций $h_k^l(z),k=\overline{0,n_l}$ и $\widetilde h_k^l(z),k=\overline{1,\widetilde n_l}$, $l=\overline{0,m}$. Используя (2.3), введем следующую частичную сумму:

$$s_n^*(z;u)=h_0^0(z)(1/\sqrt2,u_0(e^{ix}))_{L_2}+\sum_{l=0}^m\Bigg(\sum_{k=1}^{n_l}h_k^l(z)(u_l(z_l+r_le^{ix}),\cos kx)_{L_2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\widetilde n_l}\widetilde h_k^l(z)(u_l(z_l+r_le^{ix}),\sin kx)_{L_2}\Bigg)+\sum_{l=1}^mA_l\ln|z-z_l|. \tag{3.8}$$

Разложим функции $u_l(z_l+r_le^{ix}),l=\overline{0,m}$, в ряды Фурье

$$u_l(z_l+r_le^{ix})\sim\frac{1}{\sqrt2}\gamma_0^l+\sum_{k=1}^\infty\{\gamma_k^l\cos kx+\widetilde\gamma_k^l\sin kx\}, \tag{3.9}$$

где $\gamma_0^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}$, $\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}$. Поскольку выполняются (3.9) и равенства $h_0^0(e^{ix}) = 1/\sqrt{2}$, $h_k^0(e^{ix}) = \cos kx$ и $\widetilde{h}_k^0(e^{ix}) = \sin kx$, в круге K выполняется тождество

$$u_0 = \gamma_0^0 h_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^0 h_k^0 + \widetilde{\gamma}_k^0 \widetilde{h}_k^0\}. \tag{3.10}$$

В силу (2.3) выполняется равенство $0 = u_l(\infty) = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/2)_{L_2}, l = \overline{1,m}$. Следовательно, справедливы равенства $\gamma_0^l = 0, l = \overline{1,m}$. Аналогично выводу тождества (3.10) получаем, что вне $\overline{B_{r_l}(z_l)}, l = \overline{1,m}$, выполняется

$$u_l = \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^l + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^l\}. \tag{3.11}$$

Изменим значение коэффициентов $\gamma_0^l, l = \overline{1,m}$ в (3.9), полагая $\gamma_0^l = \sqrt{2} \ln r_l A_l$, где A_l определяются в (2.3). Будем нумеровать коэффициенты $\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l$ одним индексом в соответствии с тем, как функции $\overset{(\sim)}{h}{}_k^l$ нумеруются в порядке (2.2). Из равенств (3.10), (3.11) следует, что (3.8) можно переписать в виде

$$s_n^*(z; u) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k h_k(z). \tag{3.12}$$

Из определения коэффициентов γ_k и леммы 4 следует, что существует константа C_1 такая, что выполняется неравенство

$$|\gamma_k| \le C_1 \|u\|_1. \tag{3.13}$$

Лемма 5. *Пусть функция $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \le p \le \infty$. Тогда выполняется оценка*

$$\|s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u)\|_p = O(n^2 \tau^{n/2m}) \|u\|_1, \quad n \to \infty, \tag{3.14}$$

где сумма $s_n(z; u)$ определена соотношением (2.14), *а $s_n^*(z; u)$ — одним из эквивалентных равенств* (3.8) *или* (3.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v^*(z) \in h_p(\widetilde{K})$. Из соотношений (2.15) и леммы 2 вытекает, что $s_n(\cdot, v^*)$ однозначно определяется из условия

$$\langle v^* - s_n(\cdot, v^*), h_k \rangle = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.15}$$

Представим сумму $s_n(z, v^*)$ в следующем виде: $s_n(z, v^*) = \sum_{l=1}^n \alpha_l^* h_l(z)$. Тогда из условия (3.15) следует, что коэффициенты α_l^* удовлетворяют системе уравнений:

$$A\alpha^* = V^*, \tag{3.16}$$

где $A = (\langle h_l, h_k \rangle)_{l,k=1}^n$, $\alpha^* = (\alpha_l^*)_{l=1}^n$, $V^* = (\langle v^*, h_k \rangle)_{k=1}^n$. Решение системы уравнений (3.16) записывается в виде $\alpha^* = A^{-1} V^*$. Поскольку коэффициенты α_l^* определяются из системы (3.16) однозначно, матрица A обратима.

Оценим следующую норму

$$\|A^{-1}\|_{l_2(M)} = \max_{\|V\|_{l_2}=1} \|A^{-1} V\|_{l_2},$$

где $\|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{1/2}$. Пусть $\|V\|_{l_2} = \|(V_1, V_2, \ldots, V_n)\|_{l_2} = 1$. Подберем функцию $v(z)$ как линейную комбинацию функций $h_k(z), k = \overline{1,n}$, удовлетворяющую условию

$$\langle v, h_k \rangle = V_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.17}$$

Пусть выполняется

$$v(z)=\sum_{l=0}^{m}\Big\{\sum_{k=0}^{n_l}\alpha_k^l h_k^l+\sum_{k=1}^{\widetilde{n}_l}\widetilde{\alpha}_k^l\widetilde{h}_k^l\Big\}. \tag{3.18}$$

Введем норму $\|v\|_{\widetilde{K}}$ следующим образом:

$$\|v\|_{\widetilde{K}}^2=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}v^2(z_l+r_le^{ix})dx.$$

Используя равенство Парсеваля, равенство $\overset{(\sim)}{h}{}^l_k(z_l+r_le^{ix})=\overset{(sin)}{\cos}kx$ и определение (2.7) произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$, имеем

$$\|v(z_l+r_le^{ix})\|_{L_2}^2=\Big(v(z_l+r_le^{ix}),\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)_{L_2}^2+\sum_{k=1}^{\infty}\{(v(z_l+r_le^{ix}),\cos kx)_{L_2}^2+(v(z_l+r_le^{ix}),\sin kx)_{L_2}^2\}$$

$$=\langle v,h_0^l\rangle^2+\sum_{k=1}^{\infty}\{\langle v,h_k^l\rangle^2+\langle v,\widetilde{h}_k^l\rangle^2\}.$$

Откуда заключаем, что выполняется

$$\|v\|_{\widetilde{K}}^2=\sum_{l=0}^{m}\|v(z_l+r_le^{ix})\|_{L_2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\langle v,h_k\rangle^2. \tag{3.19}$$

Из (3.18) следует, что набор $\{h_k\colon k=\overline{1,n}\}$ состоит из функций $h_s^l, s=\overline{0,n_l}$ и $\widetilde{h}_s^l, s=\overline{1,\widetilde{n}_l}$. Оценим теперь $\langle v,\overset{(\sim)}{h}{}^{l'}_{s'}\rangle$, при $s'>\overset{(\sim)}{n}_{l'}$. Из леммы 3 следует, что при $s<s'$ выполняется $|\langle\overset{(\sim)}{h}{}^l_s,h_{s'}^{l'}\rangle|\le C_2\tau^{(s+s')/2}$. Используя $\langle h_s^l,h_{s'}^l\rangle=0$ при $s<s'$ и неравенство (3.13) при $u(z)=v(z)$ получаем

$$\langle v,h_{s'}^l\rangle=\Big\langle\sum_{l'=0}^{m}\Big\{\sum_{s=0}^{n_l}\alpha_s^lh_s^l+\sum_{s=1}^{\widetilde{n}_l}\widetilde{\alpha}_s^l\widetilde{h}_s^l\Big\},h_{s'}^{l'}\Big\rangle\le\|v\|_1\sum_{l'=0}^{m}\sum_{s=0}^{\infty}O(\tau^{(s+s')/2})=\|v\|_2O(\tau^{s/2}),\quad s\to\infty.$$

Аналогично оценивается выражение $\langle v,\widetilde{h}_{s'}^{l'}\rangle$ при $s'>\widetilde{n}_{l'}$. Таким образом, при $s>\overset{(\sim)}{n}_l, l=\overline{0,m}$, выполняется неравенство

$$\langle v,\overset{(\sim)}{h}{}^l_s\rangle=O(\tau^{s/2})\|v\|_2,\quad s\to\infty. \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) следует, что

$$\|v\|_{\widetilde{K}}^2=\sum_{k=1}^{n}\langle v,h_k\rangle^2+\|v\|_{\widetilde{K}}^2O(\tau^{n/2m}),\quad n\to\infty. \tag{3.21}$$

Из оценки (3.21) выводим, что при достаточно больших n выполняется

$$\|v\|_{\widetilde{K}}^2\le C_3\sum_{k=1}^{n}\langle v,h_k\rangle^2. \tag{3.22}$$

Из леммы 2 вытекает, что $\Big(\sum_{k=1}^n\langle v,h_k\rangle^2\Big)^{1/2}$ является нормой в пространстве линейных комбинаций функций $h_k(z), k=\overline{1,n}$. В силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах неравенство (3.22) будет выполняться для всех n с некоторой константой C_4.

Заметим, что коэффициенты $\overset{(\sim)}{\alpha}{}^l_k$ в (3.18) являются решением системы уравнений $A\alpha = V$, где $\alpha = (\alpha^l_k)^n_{k=1}$. Таким образом, из равенства $\|V\|_2 = 1$ следует, что выполняется соотношение $\|A^{-1}V\|_2 = \|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\|_2 \le C_4$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|A^{-1}\|_{l_2(M)} \le C_4. \tag{3.23}$$

Рассмотрим функцию $u(z) \in h_p(\widetilde{K})$. Нам достаточно провести оценку (3.14) в предположении, что граничные значения $u(z_l + r_l e^{ix}), l = \overline{0, m}$, непрерывно дифференцируемы, поскольку множество гармонических функций с такими граничными значениями всюду плотно в $h_p(\widetilde{K})$. Тогда ряды (3.10), (3.11) и (3.8) будут равномерно сходиться в замыкании области $\widetilde{K}$.

Из (3.15) следует, что линейный оператор частичной суммы $s_n\colon u \to s_n(\cdot; u)$ сохраняет линейные комбинации функций $h_k(z), k = \overline{1, n}$. Отсюда выводим, что выполняется $s_n(\cdot; u) - s^*_n(\cdot; u) = s_n(\cdot; u - s^*_n(\cdot; u))$.

Пусть далее $v^*(z) = u(z) - s^*_n(z; u)$. Частичная сумма $s_n(\cdot; v^*)$ находится из системы (3.16). В силу оценки (3.23) получаем, что справедливо неравенство

$$\|\alpha^*\|_{l_2} \le \|A^{-1}\|_{l_2(M)}\|V^*\|_{l_2} \le C_4\|V^*\|_{l_2}. \tag{3.24}$$

Оценим теперь величину $\|V^*\|_{l_2}$. Координаты V^*_k вычисляются по формуле $V^*_k = \langle v^*, h_k\rangle = \langle u - s^*_n(\cdot, u), h_k\rangle$. Из равенства (3.12) следует, что

$$u(z) - s^*_n(z; u) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \gamma_l h_l(z). \tag{3.25}$$

С помощью (3.13), (3.25) и леммы 3 выводим, что

$$\langle u - s^*_n(\cdot; u), h_k\rangle = \sum_{l=n+1}^{\infty} \gamma_l \langle h_l, h_k\rangle = \sum_{l=n+1}^{\infty} |\gamma_l| O(\tau^{l/2m})$$

$$= \|u\|_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} O(\tau^{l/2m}) = \|u\|_1 O(\tau^{n/2m}), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, $\|V^*\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^n \langle u - s_n(\cdot; u), h_k\rangle^2\right)^{1/2} = O(n\tau^{n/2m})\|u\|_1, n \to \infty$. Подставим это соотношение в (3.24) и получим

$$\|\alpha^*\|_{l_2} = O(n\tau^{n/2m})\|u\|_1, \quad n \to \infty. \tag{3.26}$$

Из определения коэффициентов α^*_k следует, что выполняются равенства $s_n(z; u - s^*_n(\cdot; u)) = s_n(z; v^*) = \sum_{k=1}^n \alpha^*_k h_k(z)$. Из (3.26) и того, что $|h_k(z)| \le 1, z \in \widetilde{K}$, получаем

$$\|s_n(\cdot; u) - s^*_n(\cdot; u)\|_p = \|s_n(u - s^*_n(\cdot; u))\|_p = \Big\| \sum_{k=1}^n \alpha^*_k h_k(z) \Big\|_p$$

$$\le \max_{k=\overline{1,n}} |\alpha^*_k| \sum_{k=1}^n \|h_k(z)\|_p = O(n^2\tau^{n/2m})\|u\|_1, \quad n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. □

4. Теоремы о сходимости гармонического ряда

Считаем по определению, что для последовательности функций выполняется $u_k(z) = O(a_k)$, $k \to \infty, a_k > 0$, если $\max_{\widetilde{K}} |u_k| = O(a_k), k \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $u(z) \in h_p(\widetilde{K})$. *Тогда справедливы оценки*

$$g_k(z) = h_k(z) + O(k^2\tau^{k/2m}), \quad k \to \infty, \tag{4.1}$$

$$\beta_k = \langle h_k(z), u\rangle + O(k^2\tau^{k/2m})\|u\|_1, \quad k \to \infty, \tag{4.2}$$

$$t_k(z) = h_k(z) + O(\tau'^{k/2m}), \quad k \to \infty, \quad \tau < \tau' < 1, \tag{4.3}$$

где β_k, $t_k(z)$ *и* τ *определяется из* (2.10)–(2.12) *и* (3.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем оценку (4.1). По построению функции $g_k(z)$ выполняется соотношение

$$g_k(z) = \frac{q_k(z)}{\sqrt{|\langle q_k, q_k\rangle|}},$$

где функция $q_k(z)$ имеет вид (2.9) и удовлетворяет равенствам $\langle q_k, h_s\rangle = 0$, $s = \overline{1, k-1}$. В силу (2.15) и того, что $g_k(z)$ — линейная комбинация $h_s(z), s = \overline{1, k}$, справедливы равенства $\langle h_k - s_{k-1}(\cdot; h_k), h_s\rangle = 0, s = \overline{1, k-1}$. Откуда получаем

$$g_k(z) = \frac{h_k(z) - s_{k-1}(z; h_k)}{\sqrt{|\langle h_k - s_{k-1}(\cdot; h_k), h_k - s_{k-1}(\cdot; h_k)\rangle|}}. \tag{4.4}$$

Из (3.12) следует, что $s^*_{k-1}(\cdot; h_k) \equiv 0$. Из леммы 5 мы заключаем, что $\|s_{k-1}(\cdot; h_k))\|_\infty = O(k^2\tau^{k/2m})\|h_k\|_1 = O(k^2\tau^{k/2m})$, $k \to \infty$. Подставляя последнее соотношение в (4.4) и используя $\langle h_k, h_k\rangle = 1$, получаем

$$g_k(z) = \frac{h_k(z)}{\sqrt{|\langle h_k, h_k\rangle|}} + O(k^2\tau^{k/2m}) = h_k(z) + O(k^2\tau^{k/2m})), \quad k \to \infty.$$

Установим оценку (4.2). Пусть в соответствии с нумерацией (2.2) выполняется $\beta_k = \beta^l_s$. Случай $\beta_k = \widetilde{\beta}^l_s$ разбирается аналогично. Нам потребуется оценить разность $\beta^l_s - \langle h^l_s, u\rangle = \beta^l_s - (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}$. Пусть

$$g^l_s(z) = \sum_{\nu,\eta} \lambda^\eta_\nu h^\eta_\nu(z) + \sum_{\nu,\eta} \widetilde{\lambda}^\eta_\nu \widetilde{h}^\eta_\nu(z). \tag{4.5}$$

Из асимптотики (4.1) функции $g_k(z)$ и неравенства (3.13) для функции $u(z) = g^l_s(z) - h^l_s(z)$ следует, что для коэффициента λ^l_s в формуле (4.5) справедлива оценка

$$\lambda^l_s = 1 + O(s^2\tau^s), \quad s \to \infty. \tag{4.6}$$

Коэффициент перед функцией h^l_s в разложении $s_k(\cdot; u) - s^*_k(\cdot; u)$ равен $\beta^l_s\lambda^l_s - (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}$. Применяя к функции $s_k(\cdot; u) - s^*_k(\cdot; u)$ неравенство (3.13), используя неравенства $(2s-1)(m+1) < k \le (2s+1)(m+1)$ и лемму 5, получаем, что

$$|\beta^l_s\lambda^l_s - (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}| \le C_1\|s_k(\cdot; u) - s^*_k(\cdot; u)\|_1 = O(s^2\tau^s)\|u\|_1, \quad s \to \infty. \tag{4.7}$$

Заметим, что из неравенства (4.7) и оценки $(\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} = O(1)\|u\|_1, s \to \infty$, следует, что $\beta^l_s = O(1)\|u\|_1, s \to \infty$. Как в лемме 5, будем считать, что ряды (4.6) и (4.7) сходятся равномерно. Из разложения (2.3) и оценок (4.6) и (4.7) и предыдущего замечания выводим

$$\beta^l_s - (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} = O(s^2\tau^s)\|u\|_1, \quad s \to \infty, \tag{4.8}$$

откуда следует нужная оценка.

Докажем асимптотику (4.3). Пусть $\tau < \tau' < 1$, тогда $\tau' = \tau^{\alpha}, \alpha < 1$. Запишем оценки леммы 3 в виде $\langle h_k^l, h_{k'}^{l'}\rangle - \delta_{k,k'}\delta_{l,l'} = O(\tau^{\alpha k + (1-\alpha)k'})$. В силу (3.10), (3.11) и леммы 3 выполняется оценка

$$(\cos sx, u(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} = (h_s^l(z_l + r_l e^{ix}), u(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}$$

$$= \sum_{l'=0}^{m} (h_s^l(z_l + r_l e^{ix}), u_{l'}(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} + \sum_{l'=1}^{m} (h_k^l(z_l + r_l e^{ix}), A_{l'} \ln|z_l + r_l e^{ix} - z_{l'}|)_{L_2}$$

$$= (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} + \sum_{l' \neq l} \Bigg\{ \sum_{k'=0}^{\infty} (h_s^l(z_l + r_l e^{ix}), h_{k'}^{l'}(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} \gamma_{k'}^{l'}$$

$$+ \sum_{k'=1}^{\infty} (h_s^l(z_l + r_l e^{ix}), \widetilde{h}_{k'}^{l'}(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} \widetilde{\gamma}_{k'}^{l'} \Bigg\} + \|u\|_1 O(\tau^s)$$

$$= (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} + \|u\|_1 \sum_{l' \neq l} \sum_{k'=1}^{\infty} O(\tau^{\alpha s + (1-\alpha)k'}) + \|u\|_1 O(\tau^s)$$

$$= (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} + \|u\|_1 O(\tau^{\alpha s}) = (\cos sx, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} + \|u\|_1 O(\tau'^s), \quad s \to \infty. \tag{4.9}$$

Из оценок (4.8) и (4.9) следует, что

$$\beta_s^l - (\cos sx, u(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} = O(\tau'^s)\|u\|_1, \quad s \to \infty.$$

Откуда в силу (2.12) и произвольности функции $u(z)$ вытекает оценка (4.3). □

С помощью теоремы 1 мы можем улучшить оценку леммы 5 путем модификации ее доказательства. Для этого рассмотрим введенную в лемме матрицу A и оценим норму $\|A\|_{l_\infty(M)} = \max_{\|V\|_{l_\infty}} \|A^{-1}V\|_{l\infty}$, где $\|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\|_{l_\infty} = \max_{k=\overline{1,n}} |y_k|$. Подберем функцию $v(z)$ как линейную комбинацию функций $h_k, k = \overline{1,n}$, удовлетворяющую условию (3.17). Функция $v(z)$ может быть представлена в виде

$$v(z) = \sum_{k=1}^{n} \langle v, t_k\rangle g_k(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k(z). \tag{4.10}$$

Пусть $\|V\|_{l_\infty} = 1$. Подставляя асимптотику (4.1) и (4.3) в (4.10), получаем, что коэффициенты α_k ограничены и, следовательно, $\|A\|_{l_\infty} = O(1), n \to \infty$. Далее, повторяя рассуждения леммы 5, получаем, что справедлива

Лемма 5′. *Пусть функция $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \le p \le \infty$. Тогда выполняется оценка*

$$\|s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u)\|_p = O(n\tau^{n/2m})\|u\|_1, \quad n \to \infty,$$

где сумма $s_n(z;u)$ определена соотношением (2.14), *а $s_n^*(z;u)$ — равенством* (3.8) *или* (3.12).
Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 и используя лемму 5′, можно вывести следующую теорему.

Теорема 1′. *Пусть $u(z) \in h_p(\widetilde{K})$. Тогда справедливы оценки*

$$g_k(z) = h_k(z) + O(k\tau^{k/2m}), \quad k \to \infty,$$

$$\beta_k = \langle h_k(z), u\rangle + O(k\tau^{k/2m})\|u\|_1, \quad k \to \infty.$$

Введем норму

$$\|u\|_{p,\delta} = \|u(\delta e^{ix})\|_{L_p} + \sum_{l=1}^{m} \Big\| u\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)\Big\|_{L_p}, \tag{4.11}$$

где δ удовлетворяет неравенствам (3.1). Определим число $\tau_\delta, 0 < \tau_\delta < 1$, следующим образом:

$$\tau_\delta = \Big\{|z_k| + \frac{r_k}{\delta}, \frac{r_k}{\delta - |z_k|}, \frac{r_k}{|z_k - z_l| - r_l/\delta} : k, l = \overline{1, m}, k \neq l\Big\}. \tag{4.12}$$

При $\delta = 1$ выполняется равенство $\tau_\delta = \tau$, где число τ введено в (3.7).

Обозначим через $S_n^{\mathfrak{F}}(\cdot; f)$ частичную сумму ряда Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Через $\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}$ будем обозначать норму оператора $S_n^{\mathfrak{F}}$ в $L_p[0, 2\pi]$. Сумма $S_n(\cdot; u)$ определена равенством (2.13). Обозначим через $E_n f(x)_p$ наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами степени не выше n по норме пространства $L_p[0, 2\pi]$. Сформулируем две следующие теоремы без доказательств, поскольку они являются дословным повторением доказательств теорем 2 и 3 статьи [2].

Теорема 2. *Пусть функция $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$. Тогда справедлива оценка*

$$\|u - S_n(\cdot; u)\|_{p,\delta} \leq (\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p} + 1)\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \delta^{n+1} \sum_{l=0}^{m} E_n u(z_l + r_l e^{ix})_p + O(n\tau^n + \|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}\tau_\delta^n)\|u\|_p, \quad n \to \infty.$$

Из теоремы 2 следует, что для $u(z) \in h_\infty(\widetilde{K})$ сходимость частичных сумм $S_n(z; u)$ внутри $\widetilde{K}$ происходит со скоростью геометрической прогрессии. Как и в разд. 2, будем рассматривать пространство $h_p(\widetilde{K})$ вместе с нормой (2.4). Поскольку нормы $\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}$, $1 < p < \infty$, равномерно ограничены по n, из теоремы 2 при $\delta = 1$ следует, что система $\{g_s(z)\}_{s\in\mathbb{N}}$ является базисом пространств $h_p(\widetilde{K}), 1 < p < \infty$.

С помощью леммы $5'$ можно доказать, что частичные суммы $S_n(\cdot; u)$ гармонической функции $u(z)$ из $h_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$, сходятся к $u(z)$ тогда и только тогда, когда к функциям $u(z_k + r_k e^{ix}), k = \overline{0, m}$, сходятся их тригонометрические ряды Фурье в $L_p[0, 2\pi]$. Следующая теорема означает, что суммы $S_n(\cdot; u)$ могут не сходится в пространствах $h_1(\widetilde{K})$ и $h_\infty(\widetilde{K})$.

Теорема 3. *Система $\{g_s(z)\}_{s\in\mathbb{N}}$ не является базисом пространств $h_1(\widetilde{K})$ и $h_\infty(\widetilde{K})$.*

5. Гармонические всплески

Нам потребуется функция Мейера $\widehat{\theta}(\omega)$. Рассмотрим неотрицательную четную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$, которая $\widehat{\varphi}(\omega)$ удовлетворяет требованиям

$$\widehat{\varphi}(\omega) \equiv 1 \text{ при } |\omega| \leq \frac{1-\varepsilon}{2}, \quad \widehat{\varphi}(\omega) \equiv 0 \text{ при } |\omega| \geq \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad \widehat{\varphi}^2\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2} \text{ нечетна при } |\omega| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

где $0 < \varepsilon \leq 1/3$. Функция $\widehat{\theta}(\omega)$ неотрицательна и определяется соотношением $\widehat{\theta}^2(\omega) = \widehat{\varphi}^2(\omega/2) - \widehat{\varphi}^2(\omega)$. Заметим, что $\operatorname{supp} \widehat{\theta}(\omega) \subseteq \{\omega \in \mathbb{R} : (1-\varepsilon)/2 < |\omega| < 1 + \varepsilon\}$ и $\widehat{\theta}(\omega)$ — четная и дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Перейдем теперь к построению гармонических всплесков. Построение будем основывать на всплесках из статьи [1], являющихся базисом пространств $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$. Выпишем эти всплески в явном виде:

$$w_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta_\nu^n \cos \nu x, \quad \widetilde{w}_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta_\nu^n \sin \nu x, \tag{5.1}$$

где

$$\theta_\nu^n = 2^{(2-j)/2}\widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big) \sin \frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j}, \quad n = 2^{j-1} + k, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1.$$

Рассмотрим преобразование, переводящее ряд $\lambda_0\gamma_0(z)+\sum_{n=1}\{\lambda_n\gamma_n(z)+\widetilde{\lambda}_n\widetilde{\gamma}_n(z)\}$ в ряд $\Lambda_0\Gamma_0(z)+\sum_{n=1}\{\Lambda_n\Gamma_n(z)+\widetilde{\Lambda}_n\widetilde{\Gamma}_n(z)\}$, в котором $\Lambda_0=\lambda_0$, $\overset{(\sim)}{\Lambda}_n=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{\lambda}_\nu, \Gamma_0=\gamma_0$, $\overset{(\sim)}{\Gamma}_n=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{\gamma}_\nu$. Применим это преобразование при каждом $l=\overline{0,m}$ к ряду

$$\beta_0^l g_0^l(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\beta_n^l g_n^l(z)+\widetilde{\beta}_n^l\widetilde{g}_n^l(z)\}$$

и получим ряд

$$B_0^l G_0^l(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{B_n^l G_n^l(z)+\widetilde{B}_n^l\widetilde{G}_n^l(z)\},$$

где

$$B_0^l=\beta_0^l,\quad \overset{(\sim)}{B}{}_n^l=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{\beta}{}_\nu^l,\quad G_0^l(z)=g_0^l(z),\quad \overset{(\sim)}{G}{}_n^l(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{g}{}_\nu^l(z).$$

Введем для гармонической функции $u(z)\in h_p(\widetilde{K})$ частичную сумму $S_n^W(z;u)$, $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n^W(z;u)=\sum_{l=0}^{m}B_0^l G_0^l(z)+\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\{B_s^l G_s^l(z)+\widetilde{B}_s^l\widetilde{G}_s^l(z)\}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим частичные суммы $W_n(x;f)$ разложения $f(x)\in L_p[0,2\pi]$ по всплескам (5.1):

$$W_n(x;f)=\sum_{l=0}^{n-1}w_l(x)(w_l,f)_{L_2}+\sum_{l=1}^{n-1}\widetilde{w}_l(x)(\widetilde{w}_l,f)_{L_2}.$$

В статье [1] доказано, что нормы операторов $W_n\colon L_p\to L_p, 1\le p\le\infty$, равномерно ограничены. Поэтому из следующей теоремы следует, что система функций $\{G_0^l(z), G_n^l(z), \widetilde{G}_n^l(z)\colon l=\overline{0,m}, n\in\mathbb{N}\}$ является базисом пространств $h_p(\widetilde{K}), 1\le p\le\infty$. Далее константы в оценках вида $O(a_n), n\to\infty$, зависят только от геометрии области $\widetilde{K}$ и функции $\widehat{\theta}(\omega)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $u(z)\in h_p(\widetilde{K})$, $1\le p\le\infty$, $n=2^{j-1}+k, 0\le k<2^{j-1}$, $N=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, δ *определяется неравенствами* (3.1). *Тогда выполняется оценка*

$$\|u-S_n^W(\cdot;u)\|_{p,\delta}\le\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\delta^{N+1}(\|W_n\|_{L_p}+1)\sum_{l=0}^{m}E_N u(z_l+r_l e^{ix})_p+O\big(N^4\tau^N+\tau_\delta^N\big)\|u\|_p,\quad N\to\infty,$$

где норма $\|\cdot\|_{p,\delta}$ *и числа* τ *и* τ_δ *введены в* (4.11), (3.7) *и* (4.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем частичную сумму $S_n^{*W}(\cdot;u)$:

$$S_n^{*W}(z;u)=G_0^{*0}(z)(1/\sqrt{2},u_0(e^{ix}))_{L_2}+\sum_{l=0}^{m}\left\{\sum_{s=1}^{n-1}G_s^{*l}(z)(w_s(x),u_l(z_l+r_l e^{ix}))_{L_2}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n-1}\widetilde{G}_s^{*l}(z)(\widetilde{w}_s(x),u_l(z_l+r_l e^{ix}))_{L_2}\right\}+\sum_{l=1}^{m}A_l\ln|z-z_l|,$$

где $G_0^{*0}(z)\equiv 1/\sqrt{2}$, $\overset{(\sim)}{G}{}_s^{*l}(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^s\overset{(\sim)}{h}{}_\nu^l(z)$. В статье [1] доказано, что частичные суммы $W_n(\cdot;f)$ сохраняют тригонометрические полиномы порядка не выше $N=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, откуда следует

$$W_n(x;f)=\sum_{k\le N}\big\{(f,\cos k\cdot)_{L_2}\cos kx+(f,\sin k\cdot)_{L_2}\sin kx\big\}+T(x), \tag{5.3}$$

где $T(x)$ — тригонометрический полином, не содержащий $(f,\cos k\cdot)_{L_2}$ и $(f,\sin k\cdot)_{L_2}$, $k\le N$. Это эквивалентно соотношениям для коэффициентов θ^n_ν, которые, в свою очередь, эквивалентны тому, что

$$B^l_0G^l_0(z)+\sum_{s=1}^{n-1}\{B^l_sG^l_s(z)+\widetilde{B}^l_s\widetilde{G}^l_s(z)\}=\beta^l_0g^l_0(z)+\sum_{s\le N}\{\beta^l_sg^l_s(z)+\widetilde{\beta}^l_s\widetilde{g}^l_s(z)\}+T_2(z), \tag{5.4}$$

где через $T_2(z)$ обозначена линейная комбинация функций g^l_s и $\widetilde{g}^l_s, s\le n$, с коэффициентами, являющимися линейной комбинацией β^l_s и $\widetilde{\beta}^l_s, s>N$. Заметим, что если в сумме $W_n(x;f)$ при всех k поменять местами коэффициенты $(f,\cos k\cdot)_{L_2}$, $(f,\sin k\cdot)_{L_2}$ и функции $\cos kx$ и $\sin kx$ соответственно, то сумма останется прежней. Если же сделать такую перестановку в (5.4), мы получим, что $T_2(z)$ не содержит функции g^l_s и $\widetilde{g}^l_s, s\le N$.

В силу (2.13), (5.2) и (5.4) получаем, что

$$S^W_n(z;u)=S_N(z;u)+T_3(z), \tag{5.5}$$

где $T_3(z)$ — линейная комбинация функций g^l_s и $\widetilde{g}^l_s, s>N$, с коэффициентами, являющимися линейной комбинацией β^l_s и $\widetilde{\beta}^l_s, s>N$. Из (5.3) можно вывести, что для суммы $S^{*W}_n(z;u)$ справедливо представление

$$S^{*W}_n(z;u)=S^*_N(z;u)+T_4(z), \tag{5.6}$$

где $T_4(z)$ — линейная комбинация функций h^l_s и $\widetilde{h}^l_s, s>N$, с коэффициентами, являющимися линейной комбинацией β^l_s и $\widetilde{\beta}^l_s, s>N$.

Оценим разность $S^W_n(\cdot;u)-S^{*W}_n(\cdot;u)$. Для линейной комбинации $\sum_{\nu,\eta}\mu^\eta_\nu h^\eta_\nu+\sum_{\nu,\eta}\widetilde{\mu}^\eta_\nu\widetilde{h}^\eta_\nu$ введем операцию $[\sum_{\nu,\eta}\mu^\eta_\nu h^\eta_\nu+\sum_{\nu,\eta}\widetilde{\mu}^\eta_\nu\widetilde{h}^\eta_\nu]_N$ удаления из нее всех функций h^η_ν и $\widetilde{h}^\eta_\nu, \nu\le N$. Через $[\overset{(\sim)}{B}{}^l_s]_N$ будем обозначать сумму $\sum_{\nu>N,\eta}\theta^s_\nu\overset{(\sim)}{\beta}{}^l_\nu$. Из (5.5) и (5.6) следует, что справедливо тождество

$$S^W_n(\cdot;u)-S^{*W}_n(\cdot;u)=\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\Big\{[G^l_s]_N[B^l_s]_N-[G^{*l}_s]_N([G^{*l}_s]_N(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}\Big\}$$

$$+\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\Big\{[\widetilde{G}^l_s]_N[\widetilde{B}^l_s]_N-[\widetilde{G}^{*l}_s]_N([\widetilde{G}^{*l}_s]_N(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}\Big\}+S_N(\cdot;u)-S^*_N(\cdot;u). \tag{5.7}$$

Оценим теперь разность $[\overset{(\sim)}{G}{}^l_s]_N-[\overset{(\sim)}{G}{}^{*l}_s(z)]_N$. По теореме $1'$ выполняется $\overset{(\sim)}{g}{}^l_s(z)=\overset{(\sim)}{h}{}^l_s(z)+O(s\tau^s),\ s\to\infty$. Пусть

$$g^l_s(z)=\sum_{\nu,\eta}\alpha^\eta_\nu h^\eta_\nu(z)+\sum_{\nu,\eta}\widetilde{\alpha}^\eta_\nu\widetilde{h}^\eta_\nu(z),\quad s>N.$$

Из неравенства (3.13) при $u(z)=g^l_s(z)-h^l_s(z)=O(s\tau^s), s\to\infty$, следует, что при $\nu\le N$ имеет место $\overset{(\sim)}{\alpha}{}^\eta_\nu=O(s\tau^s), s\to\infty$. Отсюда заключаем, что при $s>N$

$$[g^l_s]_N=g^l_s-\sum_{\nu\le N,\eta}\alpha^\eta_\nu h^\eta_\nu-\sum_{\nu\le N,\eta}\widetilde{\alpha}^\eta_\nu\widetilde{h}^\eta_\nu=h^l_s+O(s\tau^s)-\sum_{\nu\le N,\eta}O(s\tau^s)=h^l_s+O(sN\tau^s),\quad s\to\infty.$$

Аналогично оценивается $[\widetilde{g}^l_s]_N$. Поскольку $\sum_{\nu>N}O(\nu\tau^\nu)=O(N\tau^N)$, имеем

$$[\overset{(\sim)}{G}{}^l_s]_N=\sum_{\nu>N}\theta^s_\nu[\overset{(\sim)}{g}{}^l_\nu]_N=\sum_{\nu>N}\theta^s_\nu(\overset{(\sim)}{h}{}^l_\nu+O(\nu N\tau^\nu))=[\overset{(\sim)}{G}{}^{*l}_s(z)]_N+O(N^2\tau^N),\quad N\to\infty. \tag{5.8}$$

Наконец, с помощью теоремы $1'$ получаем оценку

$$[B_s^l]_N - ([G_s^{*l}]_N(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} = \sum_{\nu > N} \theta_\nu^s \{\beta_\nu^l - (\cos \nu x, u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}\}$$

$$= \|u\|_1 \sum_{\nu > N} O(\nu \tau^\nu) = O(N\tau^N)\|u\|_1, \quad N \to \infty. \tag{5.9}$$

Аналогично делается оценка для $[\widetilde{B}_s^l]_N$ и $([\widetilde{G}_s^{*l}]_N(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}$. Поскольку выполняются тождество (5.7) и оценки $[G_s^{*l}]_N = O(N), [\widetilde{G}_s^{*l}]_N = O(N), N \to \infty$, а также в силу леммы $5'$ и оценок (5.8) и (5.9), получаем, что

$$S_n^W(z; u) - S_n^{*W}(z; u) = O(N^4 \tau^N)\|u\|_1, \quad N \to \infty.$$

Дальнейшее доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 статьи [2]. □

Из теоремы 4 следует, что частичная сумма $S_n^W(\cdot; u)$, определенная в (5.2), сходится в $h_p(\widetilde{K}), 1 \le p \le \infty$, к решению задачи Дирихле.

6. Всплески для решения задач Шварца и Неймана

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция (возможно, многозначная) такая, что выполняется $u(z) = Ref(z) \in h_p(\widetilde{K})$. Введем для $f(z)$ норму

$$\|f\|_{p,A} = \sum_{k=1}^m |A_k| + \left\| f(z) - \sum_{k=1}^m A_k Ln|z - z_k| \right\|_p,$$

где A_k — константы в разложении (2.3) функции $u(z)$, норма $\|\cdot\|_p$ введена в (2.4). В определении нормы $\|f\|_{p,A}$ содержится функция $f(z) - \sum_{k=1}^m A_k Ln|z - z_k|$, поскольку она является однозначной.

Обозначим через $S_n^{W,A}(\cdot; u)$ рациональную функцию такую, что сумма $S_n^W(\cdot; u)$, введенная в (5.2), является ее вещественной частью. Эта функция легко находится исходя из того, что сумма $S_n^W(\cdot; u)$ является конечной линейной комбинацией функций системы (2.1). Будем также полагать, что

$$Im \int_0^{2\pi} S_n^{W,A}(e^{ix}; u)dx = 0.$$

Суммы $S_n^{W,A}(\cdot; u)$ сходятся к решению задачи Шварца, определяемому с точностью до мнимой константы. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция такая, что $u(z) = Ref(z) \in h_p(\widetilde{K})$. Используя асимптотику теоремы $1'$ разд. 4, можно для $\|f - S_n^{W,A}(\cdot; u)\|_{p,A}$ вывести оценку, аналогичную оценке теоремы 4.

Для построения ряда, представляющего решение задачи Неймана, рассмотрим произведение гармонических в $\widetilde{K}$ функций u и v:

$$(u, v)_{\partial n} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} \frac{\partial v(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} dx. \tag{6.1}$$

Проведем ортогонализацию Грамма — Шмидта системы функций $\{h_n(z)\}_{n=2}^\infty$ в порядке, в котором функции $\overset{(\sim)}{h}{}_k^l(z)$ записаны в (2.2) относительно произведения (6.1), и обозначим полученную систему через $\eta_n(z), n \ge 2$. Будем нумеровать функции $\eta_n(z), n \ge 2$ двумя индексами.

Функция $\eta_n(z)$ является линейной комбинацией функций $h_s(z), s=\overline{2,n}$. Пусть $h_n(z)=\overset{(\sim)}{h}{}^l_k(z)$, тогда будем полагать, что $\eta_n(z)=\overset{(\sim)}{\eta}{}^l_k(z)$. Введем функции $\overset{(\sim)}{N}{}^l_k(z)$ и суммы $S_n^{W,N}(\cdot;u)$:

$$\overset{(\sim)}{N}{}^l_k(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^k\overset{(\sim)}{\eta}{}^l_\nu(z), \tag{6.2}$$

$$S_n^{W,N}(z;u)=\sum_{l=1}^m N_0^l(z)(N_0^l,u)_{\partial n}+\sum_{l=0}^m\sum_{s=1}^{n-1}\{N_k^l(z)(N_k^l,u)_{\partial n}+\widetilde{N}_k^l(z)(\widetilde{N}_k^l,u)_{\partial n}\}.$$

В данной статье мы не будем доказывать оценку скорости сходимости сумм $S_n^N(\cdot;u)$ к функции $u(z)\in h_p(\widetilde{K}), 1\le p\le\infty, \int_0^{2\pi}u(e^{ix})dx=0$, поскольку она делается аналогично оценке статьи [2]. При ее получении потребуется неравенство

$$\sum_{k=0}^m\left\|\frac{\partial u(z_k+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}\right\|_{L_2}^2\le C(u,u)_{\partial n}$$

с некоторой константой $C>0$. Оно устанавливается с использованием идей доказательства леммы 4. Отсюда следует, что всплески (6.2) являются базисом пространства функций $u(z)\in h_p(\widetilde{K})$, $1\le p\le\infty$, таких, что $\int_0^{2\pi}u(e^{ix})dx=0$ и имеющих граничные значения $\frac{\partial u(z_k+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}\in L_1[0,2\pi]$. Частичные суммы $S_n^{W,N}(\cdot;\cdot)$ сходятся к решению задачи Неймана, если оно существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–149.
2. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговым границами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 99-114.
3. **Голузин Г.М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.

Дубосарский Глеб Александрович
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: glebUU@mail.ru

Поступила 3.02.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.8

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПРОЕКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Рассматривается многокритериальная булева задача с частными критериями, являющимися проекциями линейных функций на неотрицательный ортант. Получены необходимые и достаточные условия пяти известных типов устойчивости задачи, по-разному описывающих поведение паретовского множества задачи относительно возмущений параметров векторного критерия.

Ключевые слова: многокритериальная задача, проекции линейных функций, множество Парето, типы устойчивости.

V. A. Emelichev, K. G. Kuz'min. Stability conditions for a multicriteria Boolean problem of minimizing projections of linear functions.

We consider a multicriteria Boolean problem with partial criteria that are projections of linear functions on the nonnegative orthant. Necessary and sufficient conditions for five known types of stability of the problem are obtained. These types describe differently the behavior of the Pareto set of the problem with respect to disturbances of the parameters of the vector criterion.

Keywords: multicriteria problem, projections of linear functions, Pareto set, types of stability.

Введение

При решении прикладных задач оптимизации приходится учитывать различные факторы неопределенности и случайности, такие как неадекватность математических моделей реальным процессам, ошибки округления, погрешности измерений и т. п. В подобных условиях математическая задача не может быть корректно поставлена и решена без хотя бы неявного использования результатов теории устойчивости. Для задач многокритериальной дискретной оптимизации исследование устойчивости обычно связывается с дискретными аналогами непрерывности (полунепрерывности) по Хаусдорфу точечно-множественных отображений, которые каждому набору исходных данных задачи ставят в соответствие определенное множество оптимальных решений (см., например, [1; 2]).

Несмотря на обилие подходов к анализу устойчивости в задачах дискретной оптимизации (достаточно полное представление о многочисленных публикациях по вопросам устойчивости дают аннотированные библиографии [3; 4]), можно выделить два основных направления исследований: количественное и качественное.

Количественное направление связано с получением количественных характеристик допустимых изменений в исходных данных, сохраняющих некоторые наперед заданные свойства оптимальных решений, и разработкой алгоритмов вычисления этих оценок (см., например, [5–19]).

Качественное направление ориентировано на получение условий, при выполнении которых множество оптимальных решений задачи обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности по отношению к внешним воздействиям на исходные данные задачи. В этой связи упомянем работы [2; 20; 21], в которых проведен сравнительный анализ пяти типов устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования.

[1]Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф11К-095).

Аналогичные результаты были получены для булевых и целочисленных задач последовательной минимизации модулей линейных функций [22; 23], многокритериальных комбинаторных задач с минимаксными критериями [24] и другими нелинейными критериями [25–27].

Настоящая работа относится к качественному направлению исследований устойчивости дискретных многокритериальных задач. Здесь проведен анализ пяти наиболее известных типов устойчивости многокритериальной булевой задачи минимизации проекций линейных функций с паретовским принципом оптимальности. В результате этих исследований найдены необходимые и одновременно достаточные условия каждого типа устойчивости, а также выявлены взаимосвязи между этими типами устойчивости. Отметим, что операции проектирования на простейшие выпуклые множества, такие как ортант, гиперплоскость, полупространство, линейное многообразие и др., лежат в основе различных вариантов фейеровских итерационных методов, используемых для численного анализа несовместных систем линейных неравенств и несобственных задач линейного программирования [28–30].

1. Основные определения и обозначения

Пусть $m \geq 1$, $n \geq 2$, A_i — i-я строка вещественной матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{E}^n = \{0, 1\}^n$, $|X| \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Введем в рассмотрение оператор проектирования вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ на неотрицательный ортант $\mathbb{R}^m_+$:

$$[a]^+ = ([a_1]^+, [a_2]^+, \ldots, [a_m]^+),$$

где $[a_i]^+ = \max\{0, a_i\}$, $i \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. Знак «$+$» над вектором означает положительную срезку этого вектора.

На множестве векторов X зададим векторный критерий

$$f(x, A, b) = [Ax + b]^+ \to \min_{x \in X},$$

частными критериями которого являются проекции линейных функций $f_i(x, A_i, b_i) = [A_i x + b_i]^+$, $i \in N_m$.

Также на множестве векторов X зададим бинарное отношение доминирования

$$x \underset{A,b}{\succ} x' \Leftrightarrow f(x, A, b) \geq f(x', A, b) \,\&\, f(x, A, b) \neq f(x', A, b),$$

с помощью которого определим множество Парето (множество эффективных векторов)

$$P^m(A, b) = \Big\{ x \in X : \forall x' \in X \ \big(x \underset{A,b}{\overline{\succ}} x'\big) \Big\}.$$

Здесь и далее черта над бинарным отношением, как обычно, означает отрицание этого отношения, т. е.

$$x \underset{A,b}{\overline{\succ}} x' \Leftrightarrow f(x, A, b) = f(x', A, b) \vee \exists k \in N_m \ \big(f_k(x, A_k, b_k) < f_k(x', A_k, b_k)\big).$$

Таким образом, возникает m-критериальная булева задача $Z^m(A, b)$ минимизации проекций линейных функций, состоящая в поиске множества Парето $P^m(A, b)$.

Поскольку $2 \leq |X| < \infty$, то $P^m(A, b) \neq \varnothing$ при любых $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Легко видеть, что минимизация проекций $[A_i x + b_i]^+$, $i \in N_m$, на множестве X равносильна минимизации невязок (уклонений) следующей системы линейных булевых неравенств:

$$A_i x + b_i \leq 0, \quad i \in N_m, \quad x \in X. \tag{1}$$

Поэтому задача $Z^m(A,b)$ представляет собой задачу отыскания множества всех решений системы (1) при условии, если эта система совместна. В противном случае множество Парето $P^m(A,b)$ можно считать множеством квазирешений системы (1). Ясно, что система неравенств (1) совместна тогда и только тогда, когда множество эффективных векторных оценок

$$\{y \in \mathbb{R}^m \colon y = [Ax+b]^+,\ x \in P^m(A,b)\}$$

состоит лишь из нулевого вектора $0_{(m)} = (0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^m$.

Введем в рассмотрение множества Смейла (строго эффективных векторов) [31] и Слейтера (слабо эффективных векторов) [32] соответственно:

$$Sm^m(A,b) = \Big\{x \in X \colon \forall x' \in X \setminus \{x\}\ (x \underset{A,b}{\not\geqslant} x')\Big\},$$

$$Sl^m(A,b) = \Big\{x \in X \colon \forall x' \in X \setminus \{x\}\ (x \underset{A,b}{\not>} x')\Big\},$$

где

$$x \underset{A,b}{\geqslant} x' \Leftrightarrow f(x,A,b) \geq f(x',A,b),$$

$$x \underset{A,b}{>} x' \Leftrightarrow \forall i \in N_m\ (f_i(x,A_i,b_i) > f_i(x',A_i,b_i)).$$

Очевидно, что $Sm^m(A,b) \subseteq P^m(A,b) \subseteq Sl^m(A,b)$ при любых $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$, причем множество $Sm^m(A,b)$ может быть и пустым.

Будем исследовать пять известных (см., например, [2; 20; 21; 25; 27]) типов устойчивости многокритериальной задачи $Z^m(A,b)$ к возмущениям исходных данных, т. е. элементов матрицы A и вектора b. Задачу $Z^m(A,b)$ назовем:

S_1-устойчивой, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ (P^m(A+A',b+b') \subseteq P^m(A,b))$,
S_2-устойчивой, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ (P^m(A,b) \cap P^m(A+A',b+b') \neq \varnothing)$,
S_3-устойчивой, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ (P^m(A,b) \subseteq P^m(A+A',b+b'))$,
S_4-устойчивой, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ (P^m(A,b) = P^m(A+A',b+b'))$,
S_5-устойчивой, если $\exists \varepsilon > 0\ \exists x^0 \in P^m(A,b)\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ (x^0 \in P^m(A+A',b+b'))$.

Здесь $\Omega(\varepsilon) = \{(A',b') \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \colon \|A'\| < \varepsilon,\ \|b'\| < \varepsilon\}$ — множество возмущающих пар (A',b'), где $A' = [a'_{ij}]$ — матрица со строками A'_i, $i \in N_m$, $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)^T \in \mathbb{R}^m$,

$$\|A'\| = \max\{\|A'_i\| \colon i \in N_m\} = \max\{|a'_{ij}| \colon (i,j) \in N_m \times N_n\}, \quad \|b'\| = \max\{|b'_i| \colon i \in N_m\}.$$

Легко понять, что S_1- и S_3-устойчивость можно трактовать как дискретные аналоги свойства полунепрерывности соответственно сверху и снизу по Хаусдорфу в точке (A,b) многозначного отображения, задающего паретовский принцип оптимальности. S_4-устойчивость можно интерпретировать как аналог свойства непрерывности по Хаусдорфу.

Замечание 1. Непосредственно из приведенных определений вытекают следующие очевидные утверждения: 1) если задача $Z^m(A,b)$ S_1-устойчива, то она S_2-устойчива; 2) если задача $Z^m(A,b)$ S_3-устойчива, то она S_5-устойчива; 3) задача $Z^m(A,b)$ S_4-устойчива тогда и только тогда, когда она одновременно S_1- и S_3-устойчива; 4) если задача $Z^m(A,b)$ S_5-устойчива, то она S_2-устойчива.

В силу непрерывности функций $f_i(x,A_i,b_i)$, $i \in N_m$, по A_i и b_i имеют место следующие очевидные утверждения.

Утверждение 1. *Если для каждого индекса $i \in N_m$ справедливо неравенство $f_i(x,A_i,b_i) > f_i(x',A_i,b_i)$, то* $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ \Big(x \underset{A+A',b+b'}{\succ} x'\Big)$.

Утверждение 2. *Если $f(x,A,b) \neq f(x',A,b)$ и для каждого индекса $i \in N_m$ выполняется хотя бы одно из неравенств $f_i(x,A_i,b_i) > f_i(x',A_i,b_i)$ или $A_i x' + b_i < 0$, то* $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ (x \underset{A+A',b+b'}{\succ} x')$.

Утверждение 3. *Если для каждого индекса $i \in N_m$ справедливо неравенство $A_i x + b_i < 0$, то* $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ (x \in P^m(A+A', b+b'))$.

Утверждение 4. *Если существует такой индекс $k \in N_m$, что справедливо неравенство $f_k(x,A_k,b_k) < f_k(x',A_k,b_k)$, то* $\exists \varepsilon > 0\ \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon)\ \Big(x \underset{A+A',b+b'}{\not\succ} x'\Big)$.

2. Условия устойчивости задачи

Введем множество

$$Q^m(A,b) = \Big\{x \in Sl^m(A,b)\colon x \in P^m(A,b) \vee \exists x' \in P(x,A,b)\ \forall i \in N_m\ \big(A_i x' + b_i < 0$$

$$\vee\ f_i(x,A_i,b_i) > f_i(x',A_i,b_i)\big)\Big\},$$

где $P(x,A,b) = \Big\{x' \in P^m(A,b)\colon x \underset{A,b}{\succ} x'\Big\}$. Очевидно, что $P^m(A,b) \subseteq Q^m(A,b) \subseteq Sl^m(A,b)$ при любых $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$.

Будем также использовать обозначение $N(x) = \{j \in N_n\colon x_j = 1\}$.

Теорема 1. *Задача $Z^m(A,b)$, $m \geq 1$, S_1-устойчива тогда и только тогда, когда*

$$Q^m(A,b) = Sl^m(A,b). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть задача S_1-устойчива, однако вопреки утверждению теоремы 1 равенство (2) не выполняется. Тогда найдется такой вектор $x^0 \in Sl^m(A,b) \setminus P^m(A,b)$, что для любого вектора $x \in P(x^0,A,b)$ существует индекс $k \in N_m$, подчиненный неравенствам

$$A_k x + b_k \geq 0, \tag{3}$$

$$f_k(x^0,A_k,b_k) \leq f_k(x,A_k,b_k).$$

Отсюда, учитывая условие $x \in P(x^0,A,b)$, заключаем, что

$$f_k(x^0,A_k,b_k) = f_k(x,A_k,b_k). \tag{4}$$

Зададим компоненты возмущающей пары $(A^0,b^0) \in \Omega(\varepsilon)$ по правилам:

$$a^0_{ij} = \begin{cases} -\alpha/n, & \text{если } i \in N_m,\ j \in N(x^0), \\ \ \ \alpha/n & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad b^0_i = \alpha, \qquad i \in N_m, \qquad 0 < \alpha < \varepsilon.$$

Тогда имеют место равенства $\|A^0\| = \alpha/n$, $\|b^0\| = \alpha$, и для всякого индекса $i \in N_m$, подчиненного неравенству $A_i x + b_i \geq 0$, справедливо равенство

$$f_i(x^0, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) - f_i(x, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) = f_i(x^0,A_i,b_i) - f_i(x,A_i,b_i) - \alpha\Delta(x^0,x)/n, \tag{5}$$

а для любого индекса $i \in N_m$, удовлетворяющего неравенству $A_i x + b_i < 0$, верно неравенство

$$f_i(x^0, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) - f_i(x, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) \leq f_i(x^0,A_i,b_i) - f_i(x,A_i,b_i). \tag{6}$$

Здесь $\Delta(x^0, x) = |\{j \in N_n \colon x_j^0 + x_j = 1\}|$.

Из (3) и (5) в силу (4) для каждого вектора $x \in P(x^0, A, b)$ имеем $f_k(x^0, A_k + A_k^0, b_k + b_k^0) < f_k(x, A_k + A_k^0, b_k + b_k^0)$, т. е.

$$x^0 \underset{A+A^0, b+b^0}{\succeq} x. \tag{7}$$

Пусть теперь $x \in X \setminus P(x^0, A, b)$. Рассмотрим два возможных случая.

С л у ч а й 1: $f(x^0, A, b) = f(x, A, b)$. Тогда ввиду (5) и (6) очевидно выполняется неравенство $f(x^0, A + A^0, b + b^0) \leq f(x, A + A^0, b + b^0)$.

С л у ч а й 2: существует такой индекс $q \in N_m$, что $f_q(x^0, A_q, b_q) < f_q(x', A_q, b_q)$. Откуда, вновь учитывая (5) и (6), получаем $f_q(x^0, A_q + A_q^0, b_q + b_q^0) < f_k(x, A_q + A_q^0, b_q + b_q^0)$.

Итак, в обоих случаях верно соотношение (7). Собирая все доказанное, заключаем, что $x^0 \in P^m(A + A^0, b + b^0)$. Поэтому, учитывая условие $x^0 \notin P^m(A, b)$, убеждаемся в справедливости формулы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (A^0, b^0) \in \Omega(\varepsilon) \quad \big(P^m(A + A^0, b + b^0) \nsubseteq P^m(A, b)\big).$$

Следовательно, задача $Z^m(A, b)$ не является S_1-устойчивой. Полученное противоречие доказывает необходимость равенства (2).

Достаточность. Если $P^m(A, b) = X$, то очевидно, что задача $Z^m(A, b)$ S_1-устойчива. Поэтому далее будем предполагать, что $P^m(A, b) \neq X$. Пусть x — произвольный вектор из множества $X \setminus P^m(A, b)$. Рассмотрим два возможных случая.

С л у ч а й 1: $x \in X \setminus Sl^m(A, b)$. Тогда в соответствии с определением множества Слейтера найдется такой вектор $x' \in X$, что для любого индекса $i \in N_m$ верно неравенство

$$f_i(x, A_i, b_i) > f_i(x', A_i, b_i),$$

тогда в силу утверждения 1 имеем $\exists \varepsilon_1 > 0 \; \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon_1) \; \Big(x \underset{A+A', b+b'}{\succ} x'\Big)$.

С л у ч а й 2: $x \in Sl^m(A, b)$. Тогда согласно определению множества $Q^m(A, b)$ найдется такой вектор $x' \in P(x, A, b)$, что для каждого индекса $i \in N_m$ выполняется хотя бы одно из неравенств $A_i x' + b_i < 0$ или $f_i(x, A_i, b_i) > f_i(x', A_i, b_i)$. Поэтому на основании утверждения 2 получаем $\exists \varepsilon_2 > 0 \; \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon_2) \; (x \underset{A+A', b+b'}{\succ} x')$.

Итак, справедлива формула

$$\exists \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0 \quad \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \quad \forall x \notin P^m(A, b) \quad (x \notin P^m(A + A')).$$

Следовательно, задача $Z^m(A, b)$ S_1-устойчива.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Задача $Z^m(A, b)$, $m \geq 1$, S_2-устойчива при любых $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $P^m(A, b) = X$ утверждение теоремы 2 очевидно.

Пусть $P^m(A, b) \neq X$, $x \in P^m(A, b)$. Тогда для любого вектора $x' \notin P^m(A, b)$ существует такой индекс $k \in N_m$, что $f_k(x, A_k, b_k) < f_k(x', A_k, b_k)$. Поэтому в силу утверждения 4 найдется такое число $\varepsilon(x') > 0$, что для любой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon(x'))$ верно отношение $x \underset{A+A', b+b'}{\succ} x'$. Отсюда, полагая $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x') \colon x' \notin P^m(A, b)\}$, получаем

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \quad \forall x' \notin P^m(A, b) \quad \Big(x \underset{A+A', b+b'}{\succeq} x'\Big). \tag{8}$$

Далее возможны два случая.

С л у ч а й 1: $x \notin P^m(A + A', b + b')$. Тогда, благодаря внешней устойчивости множества Парето $P^m(A + A', b + b')$ (см., например, [33]), имеем $\exists x^0 \in P^m(A + A', b + b') \; \Big(x \underset{A+A', b+b'}{\succ} x^0\Big)$.

Отсюда и из (8) получаем, что $x^0 \in P^m(A,b)$. Таким образом, $x^0 \in P^m(A,b) \cap P^m(A+A', b+b') \neq \varnothing$.

С л у ч а й 2: $x \in P^m(A+A', b+b')$. Тогда с очевидностью имеем $x \in P^m(A,b) \cap P^m(A+A', b+b') \neq \varnothing$.

Собирая все доказанное, заключаем, что

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \quad \big(P^m(A,b) \cap P^m(A+A', b+b') \neq \varnothing\big),$$

а потому задача $Z^m(A,b)$ S_2-устойчива.

Теорема 2 доказана.

Введем множество

$$R^m(A,b) = \big\{x \in P^m(A,b)\colon x \in Sm^m(A,b) \vee \forall i \in N_m \ (A_i x + b_i < 0)\big\}.$$

Легко видеть, что $Sm^m(A,b) \subseteq R^m(A,b) \subseteq P^m(A,b)$ при любых $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 3. *Задача $Z^m(A,b)$, $m \geq 1$, S_3-устойчива тогда и только тогда, когда*

$$R^m(A,b) = P^m(A,b). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Предположим противное. Пусть вопреки (9) найдутся вектор $x^0 \in P^m(A,b) \setminus Sm^m(A,b)$ и индекс $k \in N_m$ с условием $A_k x^0 + b_k \geq 0$. Наличие такого индекса позволяет сконструировать возмущающую пару $(A^0, b^0) \in \Omega(\varepsilon)$ с компонентами:

$$a^0_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i = k,\ j \in N(x^0), \\ -\alpha & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad b^0 = 0_{(m)}, \qquad 0 < \alpha < \varepsilon.$$

С учетом включения $x^0 \in P^m(A,b) \setminus Sm^m(A,b)$ найдется отличный от x^0 вектор $x^* \in X$, удовлетворяющий равенству $f(x^0, A, b) = f(x^*, A, b)$. Тогда благодаря строению возмущающей пары имеем

$$f_k(x^0, A_k + A^0_k, b_k + b^0_k) - f_k(x^*, A_k + A^0_k, b_k + b^0_k) > f_k(x^0, A_k, b_k) - f_k(x^*, A_k, b_k) = 0,$$

$$f_i(x^0, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) - f_i(x^*, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) = f_i(x^0, A_i, b_i) - f_i(x^*, A_i, b_i) = 0, \text{ если } i \neq k.$$

Отсюда следует $x^0 \underset{A+A^0, b+b^0}{\succ} x^*$, т. е. $x^0 \notin P^m(A+A^0, b+b^0)$. Поэтому ввиду $x^0 \in P^m(A,b)$ получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (A^0, b^0) \in \Omega(\varepsilon) \quad (P^m(A,b) \not\subseteq P^m(A+A^0, b+b^0)),$$

что противоречит S_3-устойчивости задачи $Z^m(A,b)$.

Достаточность. Пусть $x \in P^m(A,b)$. Рассмотрим два возможных случая.

С л у ч а й 1: существует такой вектор $x^* \in X \setminus \{x\}$, что $f(x, A, b) = f(x^*, A, b)$. Тогда согласно (9) (для $x \notin Sm^m(A,b)$) для любого индекса $i \in N_m$ справедливо неравенство $A_i x + b_i < 0$. Поэтому в силу утверждения 3 вектор $x \in P^m(A,b)$ остается эффективным в задаче $Z^m(A+A', b+b')$ при любой возмущающей паре $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

С л у ч а й 2: для всякого вектора $x' \in X \setminus \{x\}$ выполняется неравенство $f(x, A, b) \neq f(x', A, b)$. Тогда существует такой индекс $k \in N_m$, что $f_k(x, A_k, b_k) < f_k(x', A_k, b_k)$. Из этого неравенства на основании утверждения 4 имеем

$$\exists \varepsilon(x') > 0 \quad \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon(x')) \quad \Big(x \underset{A+A', b+b'}{\not\succ} x'\Big).$$

Отсюда следует, что всякий вектор $x \in P^m(A,b)$ остается эффективным в задаче $Z^m(A+A', b+b')$ при любой возмущающей паре $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, если $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x')\colon x' \in X \setminus \{x\}\}$.

Объединяя доказанное в двух случаях, убеждаемся, что задача $Z^m(A,b)$ S_3-устойчива.

Теорема 3 доказана.

Из теорем 1 и 3 ввиду замечания 1 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Задача $Z^m(A,b)$, $m \geq 1$, S_4-устойчива тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$R^m(A,b) = P^m(A,b), \qquad Q^m(A,b) = Sl^m(A,b).$$

Теорема 5. *Задача $Z^m(A,b)$, $m \geq 1$, S_5-устойчива тогда и только тогда, когда*

$$R^m(A,b) \neq \varnothing. \tag{10}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть задача $Z^m(A,b)$ S_5-устойчива. Допустим, что вопреки (10) множество $R^m(A,b)$ пусто. Тогда $Sm^m(A,b) = \varnothing$ и для любого вектора $x \in P^m(A,b)$ найдется такой вектор $x^* \in X \setminus \{x\}$, что $f(x,A,b) = f(x^*,A,b)$. Кроме того, согласно определению множества $R^m(A,b)$ существует индекс $k \in N_m$, подчиненный неравенству $A_k x + b_k \geq 0$. Зададим возмущающую пару $(A^0, b^0) \in \Omega(\varepsilon)$ по правилам:

$$a^0_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i = k,\ j \in N(x), \\ -\alpha & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad b^0 = 0_{(m)}, \qquad 0 < \alpha < \varepsilon.$$

Тогда

$$f_k(x, A_k + A^0_k, b_k + b^0_k) - f_k(x^*, A_k + A^0_k, b_k + b^0_k) > f_k(x, A_k, b_k) - f_k(x^*, A_k, b_k) = 0,$$

$$f_i(x, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) - f_i(x^*, A_i + A^0_i, b_i + b^0_i) = f_i(x, A_i, b_i) - f_i(x^*, A_i, b_i) = 0, \text{ если } i \neq k.$$

Поэтому имеем $x \underset{A+A^0, b+b^0}{\succ} x^*$, т. е. $x \notin P^m(A + A^0, b + b^0)$. Следовательно, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (A^0, b^0) \in \Omega(\varepsilon) \quad (x \notin P^m(A + A^0, b + b^0)),$$

что противоречит S_5-устойчивости задачи $Z^m(A,b)$.

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (10) и $x \in R^m(A,b)$. Проводя рассуждения по аналогии с доказательством достаточности теоремы 3, несложно показать следующее:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \quad \forall x' \in X \quad \Big(x \underset{A+A', b+b'}{\overline{\succ}} x'\Big).$$

Следовательно, задача $Z^m(A,b)$ S_5-устойчива.

Теорема 5 доказана.

3. Следствия

Из теорем 1, 3–5 с очевидностью вытекают следующие четыре достаточных условия различных типов устойчивости задачи $Z^m(A,b)$.

Следствие 1. *Если $P^m(A,b) = Sl^m(A,b)$, то задача $Z^m(A,b)$ S_1-устойчива.*

Следствие 2. *Если $Sm^m(A,b) = P^m(A,b)$, то задача $Z^m(A,b)$ S_3-устойчива.*

Следствие 3. *Если $Sm^m(A,b) = Sl^m(A,b)$, то задача $Z^m(A,b)$ S_4-устойчива.*

Следствие 4. *Если $Sm^m(A,b) \neq \varnothing$, то задача $Z^m(A,b)$ S_5-устойчива.*

Замечание 2. Хорошо известно (см., например, [2; 20; 21]), что приведенные здесь условия (следствия 1–4) являются не только достаточными, но одновременно и необходимыми для соответствующей устойчивости многокритериальных задач минимизации линейных функций на конечном множестве целочисленных векторов.

Замечание 3. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве (см., например, [34; 35]) все результаты данной статьи верны для любых норм в пространстве матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Заключение

В данной работе мы предлагаем общий теоретический подход к качественному анализу многокритериальных булевых задач минимизации проекций линейных функций на неотрицательный ортант. Получены необходимые и достаточные условия пяти известных типов устойчивости задачи, состоящей в поиске множества Парето. Доказанные теоремы позволяют анализировать и прогнозировать поведение множества Парето при различных видах неопределенности без решения возмущенного варианта рассматриваемой задачи.

Следует отметить, что практически проверка условий теорем 1, 3–5 для общего случая является такой же сложной, как и решение самой задачи. Поэтому содержательные результаты могут быть получены для частных случаев булевой многокритериальной задачи при ограничении некоторых факторов, таких как структура начальных данных, способ возмущений параметров задачи и т. д. Это может стать дальнейшим продолжением исследования в данной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miettinen K.** Nonlinear multiobjective optimization. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1999. 328 p.
2. **Сергиенко И.В., Шило В.П.** Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 261 с.
3. **Greenberg H. J.** An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization // Advances in combinatorial and stochastic optimization. Logic programming and heuristic search. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 97–148.
4. **Ehrgott M., Gandibleux X.** A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization // OR Spectrum. 2000. Vol. 22, no. 4. P. 425–460.
5. **Chakravarti N., Wagelmans A.** Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems // Oper. Res. Lett. 1998. Vol. 23, no. 1-2. P. 1–7.
6. **Libura M.** On accuracy of solution for discrete optimization problems with perturbed coefficients of the objective function // Ann. Oper. Res. 1999. Vol. 86. P. 53–62.
7. **Libura M., Nikulin Yu.** Stability and accuracy functions in multicriteria combinatorial optimization problem with $\sum$-MINMAX and $\sum$-MINMIN partial criteria // Control Cybernet. 2004. Vol. 33, no. 3. P. 511–524.
8. **Libura M.** On the adjustment problem for linear programs // European J. Oper. Res. 2007. Vol. 183, no. 1. P. 125–134.
9. Perturbed cones for analysis of uncertain multi-criteria optimization problems / L. Kozeratska [et al.] // Linear Algebra Appl. 2004. Vol. 378. P. 203–229.
10. **Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.** Анализ чувствительности эффективного решения векторной булевой задачи минимизации проекций линейных функций на $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{R}_-$ // Дискрет. анализ и исследование операций. Сер. 2. 2005. Т. 12, № 2. С. 24–43.
11. **Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.** О радиусе устойчивости эффективного решения одной векторной задачи булева программирования в метрике l_1 // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 6. С. 733–735.
12. **Emelichev V.A., Kuzmin K.G., Nikulin Yu.V.** Stability analysis of the Pareto optimal solution for some vector boolean optimization problem // Optimization. 2005. Vol. 54, no. 6. P. 545–561.
13. **Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.** Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 79–83.
14. Scheduling under uncertainty. Theory and algorithms / Yu.N. Sotskov [et al.]. Minsk: Belorusskaya nauka, 2010. 326 p.
15. **Emelichev V., Podkopaev D.** Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming // Discrete Optimization. 2010. Vol. 7, no. 1–2. P. 48–63.
16. **Емеличев В.А., Коротков В.В., Кузьмин К.Г.** Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 6. С. 157–164.
17. **Емеличев В.А., Коротков В.В.** Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда // Дискрет. математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 3–16.

18. **Емеличев В.А., Коротков В.В.** Анализ устойчивости парето-оптимального портфеля многокритериальной инвестиционной задачи с максиминными критериями Вальда // Дискрет. анализ и исследование операций. 2012. Т. 19, № 6. С. 23–36.
19. **Емеличев В.А., Коротков В.В.** Исследование устойчивости решений векторной инвестиционной булевой задачи в случае метрики Гельдера в критериальном пространстве // Прикл. дискрет. математика. 2012. № 4. С. 61–72.
20. **Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.** Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множества оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и систем. анализ. 2005. № 4. С. 90–100.
21. **Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.** Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и систем. анализ. 2008. № 3. С. 142–148.
22. **Emelichev V.A., Gurevsky E.E.** On stability of some lexicographic multicriteria Boolean problem // Control Cybernet. 2007. Vol. 36, № 2. P. 333–346.
23. **Emelichev V.A., Gurevsky E.E., Kuzmin K.G.** On stability of some lexicographic integer optimization problem // Control Cybernet. 2010. Vol. 39, № 3. P. 811–826.
24. **Емеличев В.А., Кузьмин К.Г.** Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач “на узкие места” в терминах бинарных отношений // Кибернетика и систем. анализ. 2008. № 3. С. 103–111.
25. **Емеличев В.А., Коротков В.В., Кузьмин К.Г.** Постоптимальный анализ одной векторной минимаксной комбинаторной задачи // Кибернетика и систем. анализ. 2011. № 3. С. 95–108.
26. **Emelichev V., Karelkina O.** Postoptimal analysis of the multicriteria combinatorial median location problem // Optimization. 2012. Vol. 61, no. 9. P. 1151–1167.
27. **Emelichev V.A., Karelkina O.V., Kuzmin K.G.** Qualitative stability analysis of multicriteria combinatorial minimin problems // Control Cybernet. 2012. Vol. 41, no. 1. P. 57–79.
28. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 288 с.
29. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
30. **Бердникова Е.А., Еремин И.И., Попов Л.Д.** Распределенные фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 16–32.
31. **Smale S.** Global analisis and economics. V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econom. 1974. Vol. 1, no. 3. P. 213–221.
32. **Slater M.** Lagrange multipliers revisited // Cowles Foundation Discussion Paper 80. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. 1959. 13 p.
33. **Подиновский В.В., Ногин В.Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
34. **Suhubi E.** Functional analysis. Berlin: Springer, 2003. 702 p.
35. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 572 с.

Емеличев Владимир Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Белорусский государственный университет
e-mail: emelichev@bsu.by

Поступила 10.12.2012

Кузьмин Кирилл Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Белорусский государственный университет
e-mail: kuzminkg@bsu.by

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.16 + 519.85

2-ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КЛИКИ С МИНИМАЛЬНЫМ ВЕСОМ ВЕРШИН И РЕБЕР[1]

И. И. Еремин, Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай

Рассматривается задача о минимальной клике (относительно суммарного веса входящих в нее вершин и ребер) заданного размера в полном неориентированном взвешенном графе, а также некоторые из ее важных частных случаев. Анализируются вопросы аппроксимируемости. Для общего случая установлена неаппроксимируемость задачи. Предложен 2-приближенный эффективный алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$ для случаев, когда веса вершин неотрицательны, а веса ребер либо удовлетворяют неравенству треугольника, либо являются квадратами попарных расстояний в некоторой системе точек евклидова пространства.

Ключевые слова: полный неориентированный граф, клика фиксированного размера, минимальный вес вершин и ребер, поиск подмножества, аппроксимируемость, полиномиальный приближенный алгоритм, оценка точности, временная сложность.

I. I. Eremin, E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, A. V. Pyatkin, M. Yu. Khachai. 2-approximation algorithm for finding a clique with minimum weight of vertices and edges.

The problem on a minimal clique (with respect to the total weight of its vertices and edges) of fixed size in a complete undirected weighted graph is considered along with some of its important special cases. Approximability questions are analyzed. The nonapproximability of the problem is established for the general case. A 2-approximation effective algorithm with time complexity $O(n^2)$ is proposed for cases where vertex weights are nonnegative and edge weights either satisfy the triangle inequality or are squared pairwise distances for some system of points of a Euclidean space.

Keywords: complete undirected graph, clique of fixed size, minimum weight of vertices and edges, subset search, approximability, polynomial approximation algorithm, performance guarantee, time complexity.

1. Введение

Предметом исследования настоящей работы являются задачи дискретной оптимизации, которые индуцируются, в частности, актуальными проблемами анализа данных и распознавания образов. Цель исследования — анализ вычислительной сложности этих задач и построение эффективных алгоритмов с оценками точности для их решения.

В работе [5] было установлено, что к числу NP-трудных в сильном смысле относится задача выбора из конечного множества векторов евклидова пространства подмножества векторов фиксированной мощности, минимизирующего сумму квадратов всевозможных попарных расстояний элементов искомого подмножества. Данная постановка относится к числу формализаций задачи кластерного анализа, важнейшей проблемы анализа данных, суть которой состоит в группировке похожих объектов.

Одна из возможных содержательных постановок проблемы состоит в следующем. Имеется таблица, строки которой содержат результаты измерения фиксированного набора числовых информационно значимых характеристик для совокупности исследуемых материальных объектов. Часть представителей этой совокупности (количество которых известно заранее) идентичны и, соответственно, имеют одинаковые истинные значения измеряемых характеристик. Характеристики остальных объектов не фиксируются и могут принимать произвольные допустимые значения. Данные, представленные в таблице, возмущены несмещенной случайной

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00090, 12-01-00093, 12-01-33028-мол-а-вед, 13-01-00210, 13-07-00070 и 13-07-00181) и Интеграционных проектов УрО РАН и СО РАН 12-П1-1016, 12-С1-1017/1 и 7Б.

независимой помехой, распределение которой предполагается неизвестным. Требуется найти, используя критерий минимума суммы квадратов расстояний, подмножество наборов, соответствующих идентичным объектам, и оценить по представленным результатам измерений истинные значения описывающих их характеристик.

Нередко исходные данные в задаче задаются только матрицей попарных сравнений объектов (значения из набора числовых характеристик оказываются недоступны), причем критерии сравнения могут быть весьма разнообразными. В частности, актуальными являются постановки задачи, в которых элементы входной матрицы:

1) удовлетворяют неравенству треугольника;

2) являются комбинацией весов попарно сравниваемых объектов и евклидова расстояния между ними;

3) являются комбинацией весов попарно сравниваемых объектов и квадрата евклидова расстояния между этими объектами;

4) суть произвольные неотрицательные величины.

В настоящей работе дается ответ на некоторые из этих вопросов. Показывается, что в общем случае задача является NP-трудной и неаппроксимируемой. Тем не менее в ряде достаточно естественных случаев задача, сохраняя труднорешаемость, обладает 2-приближенными полиномиальными алгоритмами.

2. Постановка задачи и анализ ее сложности

Пусть задан полный простой взвешенный неориентированный граф $G = (V, E, a, c)$, весовые функции $a\colon V \to \mathbb{Q}$ и $c\colon E \to \mathbb{Q}$ которого определяют веса его вершин и ребер соответственно. Весом графа G назовем сумму $\sum_{v\in V} a_v + \sum_{e\in E} c_e$. Рассматриваемые в работе задачи являются частными случаями приведенной ниже общей задачи комбинаторной оптимизации.

З а д а ч а Weighted Clique Problem (WCP). Дано: полный взвешенный неориентированный граф $G = (V, E, a, c)$, где $a\colon V \to \mathbb{Q}$ и $c\colon E \to \mathbb{Q}$, и натуральное число m. Найти в графе G подграф (клику) порядка m наименьшего (наибольшего) веса.

Без ограничения общности договоримся отождествлять множества V и $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$, где $n = |V|$, и использовать сокращенное обозначение c_{ij} для образа c_e ребра $e = \{i, j\} \in E$ при весовом отображении c.

По аналогии с методикой, предложенной в [3], сопоставим задаче WCP полиномиально эквивалентную задачу поиска экстремума линейной функции

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{1\le i<j\le n} c_{ij} y_{ij} \to \max_{x_i, y_{ij}\in\{0,1\}} \Big(\min_{x_i, y_{ij}\in\{0,1\}} \Big) \tag{1}$$

на допустимом множестве

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m;$$

$$x_i + x_j - 1 \le y_{ij} \le \min\{x_i, x_j\} \quad (i < j).$$

Вычислительная сложность задачи WCP определяется полиномиальной сводимостью к ней известной NP-полной в сильном смысле [1] задачи Clique.

З а д а ч а Clique. Дано: неориентированный граф G и натуральное число m. Вопрос: существует ли в этом графе клика порядка m?

Предложение 1. *Задача* WCP *NP-трудна в сильном смысле и остается таковой при фиксации направления* (max / min) *оптимизации даже при* $a_i \equiv 0$ *и* $c_{ij} \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отдельно случаи задачи на максимум и на минимум:

1. В случае задачи на максимум сопоставим исходному графу G полный взвешенный граф $G' = (V, E', a, c)$, в котором $a \equiv 0$ и функция c является индикатором подмножества $E \subset E'$, т. е.

$$c_e = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in E, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть постановка задачи WCP определяется графом G' и натуральным числом m. Очевидно, $OPT \leq m(m-1)/2$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда в графе G существует клика порядка m.

2. Перейдем к случаю задачи на минимум. Аналогичным образом сопоставим исходному графу G полный взвешенный граф G', в котором весовую функцию c определим равенством

$$c_e = \begin{cases} 0, & \text{если } e \in E, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Видно, что $OPT \geq 0$ и по-прежнему необходимым и достаточным условием равенства является наличие в графе G клики порядка m.

Предложение 1 доказано.

Всюду ниже нас будет интересовать задача WCP на минимум, в которой функция a весов вершин и функция c весов ребер принимают неотрицательные значения. Договоримся далее обозначать эту задачу как min-EWCP.

Известно [2], что оптимизационный вариант задачи Clique в общем случае является неаппроксимируемым. Развивая идею доказательства предложения 1, нетрудно обосновать наличие полиномиальной сводимости задачи Clique к задаче min-EWCP, обладающей свойством *gap-preserving*, и, как следствие, непринадлежность задачи min-EWCP классу Apx (при условии $P \neq NP$).

Предложение 2. *Наличие для задачи* min-EWCP *полиномиального приближенного алгоритма с произвольной фиксированной точностью* $\alpha > 1$ *влечет равенство* $P = NP$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, от противного, для некоторого фиксированного $\alpha > 1$ задача min-EWCP обладает полиномиальным приближенным алгоритмом с точностью α, т. е. для каждой постановки I задачи за полиномиальное от $|I|$ время может быть найдена клика требуемого порядка, вес которой ограничен сверху величиной $\alpha\, OPT(I)$. Зададимся условием задачи Clique, определяемым графом $G = (V, E)$ и натуральным числом m. Положим $K = m(m-1)/2$. По аналогии с доказательством предложения 1 рассмотрим постановку I задачи min-EWCP, задаваемую полным графом $G' = (V, E')$, тождественно нулевой весовой функцией a и функцией

$$c_e = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in E, \\ \alpha\, K & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если граф G обладает кликой порядка m, то $OPT(I) = K$, в противном случае $OPT(I) > \alpha\, K$. Предположение о существовании α-приближенного полиномиального алгоритма для задачи min-EWCP влечет полиномиальную разрешимость задачи Clique, т. е. равенство $P = NP$.

Предложение 2 доказано.

З а м е ч а н и е 1. Фактически нами показано, что для задачи min-EWCP невозможно существование полиномиального $O(2^n)$-приближенного (где n — порядок графа G') алгоритма при $P \neq NP$.

Далее покажем, что задача min-EWCP на графе $G = (V, E, a, c)$ с весовыми функциями $a\colon V \to \mathbb{Q}$ и $c\colon E \to \mathbb{Q}$ представима в виде задачи min-EWCP на графе $G = (V, E, 0, w)$ с нулевой весовой функцией a и соответствующим образом модифицированной весовой функцией w.

Предложение 3. *Задача* min-EWCP *в терминах модифицированной функции весов ребер*

$$w_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_i}{m-1} + c_{ij} + \dfrac{a_j}{m-1}, & \text{если } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i = j, \end{cases} \tag{2}$$

может быть записана в эквивалентном виде

$$F(C) = \sum_{e \in E(C)} w_e \to \min_{C \subset V; |C| = m}, \tag{3}$$

где $E(C)$ — множество ребер, попарно соединяющих вершины подмножества C (m-клики), или в виде

$$F(C) = \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} w_{ij} \to \min_{C \subset V; |C| = m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, обозначив $A = A(C) = \sum\limits_{i \in C} a_i$, на примере формулировки (3), с учетом (2) имеем

$$F(C) = \sum_{e \in E(C)} w_e = \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} w_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C \setminus i} \Big(\frac{a_i + a_j}{m-1} + c_{ij} \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \Big(\sum_{j \in C \setminus i} \frac{a_i}{m-1} + \sum_{j \in C \setminus i} \frac{a_j}{m-1} + \sum_{j \in C \setminus i} c_{ij} \Big) = \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \Big(a_i + \frac{A - a_i}{m-1} + \sum_{j \in C \setminus i} c_{ij} \Big)$$

$$= \sum_{i \in C} \frac{(m-2)a_i + A}{2(m-1)} + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C \setminus i} c_{ij} = \sum_{i \in C} a_i + \sum_{e \in E(C)} c_e.$$

Предложение 3 доказано.

Аналогично формулировке поиска экстремума линейной функции (1) задача min-EWCP в терминах модифицированной функции весов ребер примет вид

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} w_{ij} y_{ij} \to \min_{x_i, y_{ij} \in \{0,1\}} \tag{4}$$

на допустимом множестве

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m;$$

$$x_i + x_j - 1 \leq y_{ij} \leq \min\{x_i, x_j\} \quad (i < j).$$

Предложение 4. *Если элементы матрицы $c = (c_{ij})$ в задаче* min-EWCP *на графе $G = (V, E, a, c)$ удовлетворяют неравенству треугольника, т. е. $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$ для любых i, j, k, то элементы модифицированной, согласно (2), матрицы $W = (w_{ij})$ также удовлетворяют этому условию.*

Доказательство. Действительно, с учетом (2) для любых i, j, k верно

$$w_{ij} + w_{jk} = \left(\frac{a_i}{m-1} + c_{ij} + \frac{a_j}{m-1}\right) + \left(\frac{a_j}{m-1} + c_{jk} + \frac{a_k}{m-1}\right) \geq \frac{a_i}{m-1} + c_{ik} + \frac{a_k}{m-1} = w_{ik}.$$

Предложение 4 доказано.

Перейдем теперь к рассмотрению упомянутой ранее задачи анализа данных, на входе которой представлена матрица попарных сравнений объектов размерности $n \times n$.

Задача Row's Subset of Symmetric Matrix (RSSM). Дано: симметричная матрица $W = (w_{ij})$ размерности $n \times n$ с неотрицательными элементами, причем $w_{ii} = 0$, натуральное число m и положительное число D. Вопрос: существует ли такое подмножество $\mathcal{C}$ мощности m строк этой матрицы, что

$$F(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{C}} \sum_{j \in \mathcal{C}} w_{ij} \leq D. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что задача RSSM полиномиально эквивалентна формулировке задачи min-EWCP вида (4) в форме задачи верификации свойства.

Остановимся на рассмотрении ее нескольких важных частных случаев.

Задача 1. Элементы матрицы $W = (w_{ij})$ удовлетворяют условию метрики, в частности $w_{ij} + w_{jk} \geq w_{ik}$ для любых i, j, k.

Задача 2. Элементы матрицы $W = (w_{ij})$ вычисляются по формуле (2) в соответствии с входными данными задачи min-EWCP — неотрицательной весовой функцией $a = (a_i)$ и матрицей $c = (c_{ij})$, составленной из квадратов попарных расстояний в некоторой системе точек евклидова пространства.

Проанализируем вычислительную сложность задач 1 и 2.

Теорема 1. *Задача* 1 *NP-полна в сильном смысле.*

Доказательство. NP-полнота задачи 1 следует из полиномиальной сводимости (к ней) известной NP-полной в сильном смысле задачи о независимом множестве (пустом подграфе) графа [1].

Задача Independent Set. Дано: неориентированный граф G порядка n и положительное число k. Вопрос: существует ли в графе G подграф из изолированных вершин (пустой подграф) порядка k?

В самом деле, пусть $G = (V, E)$. Рассмотрим постановку задачи 1, задаваемую полным графом $G' = (V, E')$ и весовой матрицей $W = (w_{ij})$:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ 1, & \text{если } i \neq j \text{ и } (i, j) \notin E, \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для элементов матрицы W, очевидно, верно неравенство треугольника. Пусть $m = k$ и $D = k(k-1)/2$. Нетрудно видеть, что ответ в построенной постановке задачи 1 положителен (т. е. найдется подмножество строк $\mathcal{C}$ мощности k, удовлетворяющее неравенству (5)) тогда и только тогда, когда подмножество $\mathcal{C} \subset V$ независимо в графе G.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Задача* 2 *NP-полна в сильном смысле.*

Доказательство. Для доказательства NP-полноты задачи 2 потребуется NP-полная в сильном смысле [5]

З а д а ч а Vector Subset 3 (VS-3). Дано: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральное число $m > 1$ и положительное число D'. Вопрос: существует ли такое подмножество $\mathcal{C}' \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\sum_{y\in\mathcal{C}'}\sum_{z\in\mathcal{C}'}\|y-z\|^2 \le D'$$

при ограничении $|\mathcal{C}'| = m$ на мощность подмножества $\mathcal{C}'$?

Очевидно, задача VS-3 полиномиально сводится к задаче 2 путем задания $w_{ij} = \|y_i - y_j\|^2$ и $D = D'/2$. Таким образом, задача 2 также NP-полна в сильном смысле.

Теорема 2 доказана.

3. Анализ приближенного алгоритма решения задач 1 и 2

Рассмотрим следующий приближенный алгоритм $\mathcal{A}$.

Ш а г 1. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ найдем множество $\mathcal{B}_j$, состоящее из номеров m наименьших элементов j-й строки матрицы W, включая саму строку j. Положим $S(\mathcal{B}_j) = \sum\limits_{i\in\mathcal{B}_j} w_{ij}$.

Ш а г 2. Обозначим через k^* значение j, при котором $S(\mathcal{B}_j)$ принимает минимальное значение

$$S^* = S(\mathcal{B}^*) = \sum_{i\in\mathcal{B}^*} w_{ik^*}. \tag{6}$$

Выберем $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$ в качестве приближенного решения задачи RSSM.

3.1. О приближенном решении задачи 1

Теорема 3. *Алгоритм $\mathcal{A}$ находит решение задачи 1 с точностью 2 за время $O(n^2)$. Оценка 2 точности алгоритма асимптотически достижима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На шаге 1 нахождение каждого $\mathcal{B}_j$ требует выполнения $O(n)$ операций (например, с помощью алгоритма [4, с. 117] отыскания m-го наименьшего числа в массиве из n чисел). Поэтому для получения решения $\mathcal{B}^*$ нужно время $O(n^2)$. Покажем, что полученное решение отличается от оптимального не более чем вдвое.

Обозначим через $\mathcal{C}^*$ оптимальное решение задачи 1. С одной стороны, имеем

$$2F(\mathcal{C}^*) = \sum_{i\in\mathcal{C}^*}\sum_{j\in\mathcal{C}^*} w_{ij} \ge \sum_{i\in\mathcal{C}^*}\sum_{j\in\mathcal{B}_i} w_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{C}^*} S(\mathcal{B}_i) \ge \sum_{i\in\mathcal{C}^*} S(\mathcal{B}^*) = mS^*. \tag{7}$$

С другой стороны, с использованием неравенства треугольника получаем

$$2F(\mathcal{B}^*) = \sum_{i\in\mathcal{B}^*}\sum_{j\in\mathcal{B}^*} w_{ij} \le \sum_{i\in\mathcal{B}^*}\sum_{j\in\mathcal{B}^*}(w_{ik^*} + w_{k^*j}) = m\sum_{i\in\mathcal{B}^*} w_{ik^*} + m\sum_{j\in\mathcal{B}^*} w_{k^*j} = 2mS^*. \tag{8}$$

Из (7) и (8) для точности алгоритма $\mathcal{A}$ решения задачи 1 следует

$$\alpha_{\mathcal{A}} = \frac{F(\mathcal{B}^*)}{F(\mathcal{C}^*)} \le \frac{2mS^*}{mS^*} = 2.$$

Покажем асимптотическую достижимость оценки. Рассмотрим следующий

П р и м е р 1. Пусть $n = 2m$, где m — четное число, большее трех. Матрица W имеет блочную структуру: $W = \begin{pmatrix} W_0 & W_2 \\ W_2 & W_1 \end{pmatrix}$, где каждая из матриц W_0, W_1 и W_2 имеет размер $m \times m$. В матрице W_0 на главной диагонали стоят 0, все прочие элементы первой строки и первого столбца равны 1, а все остальные элементы равны 2. В матрице W_1 на главной диагонали стоят 0, на побочной диагонали стоят 2, а все остальные элементы равны 1. В матрице W_2 все элементы равны 2. Очевидно, элементы матрицы W удовлетворяют неравенству треугольника. Ниже приведен пример матрицы W для $m = 6$:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что алгоритм найдет решение $\mathcal{B}^* = B_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$. Значение целевой функции равно $m^2 - 2m + 1$. Оптимум же достигается для $\mathcal{C}^* = \{m+1, m+2, \ldots, 2m\}$ со значением целевой функции $m^2/2$. Таким образом, отношение стремится к 2 (снизу) при увеличении m.

Теорема 3 доказана.

3.2. О приближенном решении задачи 2

Заметим, что в работе [6] приведено обоснование 2-приближенного алгоритма решения задачи VS-3, представляющей собой задачу min-WCP на графе $G = (V, E, a, c)$, когда весовая функция a_i нулевая, а матрица $c = (c_{ij})$ порождается квадратами попарных расстояний между точками $x_1, \ldots, x_n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^q$. Алгоритм, предложенный в [6], имеет временную сложность $O(qn^2)$. Однако в задаче 2 в явном виде векторы x_i не заданы, а входными данными являются весовая функция a_i и элементы матрицы $c = (c_{ij})$. Относительно последних, в принципе, известно, что они порождены квадратами попарных расстояний в некоторой системе точек евклидова пространства.

Покажем, что алгоритм $\mathcal{A}$ находит решение задачи 2 с той же точностью.

Теорема 4. *Задача* 2 *решается за время* $O(n^2)$ *с достижимой оценкой точности* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка трудоемкости алгоритма $\mathcal{A}$ уже приведена в теореме 3. Оценим точность полученного решения. С одной стороны, имеем

$$2F(\mathcal{C}^*) = \sum_{i \in \mathcal{C}^*} \sum_{j \in \mathcal{C}^*} w_{ij} \geq \sum_{i \in \mathcal{C}^*} \sum_{j \in \mathcal{B}_i} w_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{C}^*} S(\mathcal{B}_i) \geq \sum_{i \in \mathcal{C}^*} S^* = mS^*. \tag{9}$$

С другой стороны, можно показать, что

$$F(\mathcal{B}^*) \leq mS^*. \tag{10}$$

Для доказательства этого неравенства нам понадобятся нижеследующие утверждения.

Предложение 5. $\displaystyle\sum_{j \in \mathcal{B}^*} \sum_{i \in \mathcal{B}^*} c_{ij} \leq 2m \sum_{i \in \mathcal{B}^*} c_{ik^*}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся существованием точек $x_1, \dots, x_n$ в евклидовом пространстве, порождающих матрицу $c = (c_{ij})$ квадратов расстояний между парами точек: $c_{ij} = ||x_i - x_j||^2$, $1 \le i, j \le n$. Обозначив $\overline{x} = \overline{x}(\mathcal{B}^*) = \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{B}^*} x_i$, для суммы $\sum_{i \in \mathcal{B}^*} c_{ij}$ имеем цепочку равенств:

$$\sum_{i\in\mathcal{B}^*} c_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - x_j||^2 = \sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - \overline{x} + \overline{x} - x_j||^2 = \sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - \overline{x}||^2 + m||\overline{x} - x_j||^2 + 2\sum_{i\in\mathcal{B}^*} \langle x_i - \overline{x}, \overline{x} - x_j \rangle$$

$$= \sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - \overline{x}||^2 + m||\overline{x} - x_j||^2 + 2\sum_{i\in\mathcal{B}^*} \langle x_i - m\overline{x}, \overline{x} - x_j \rangle = \sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - \overline{x}||^2 + m||\overline{x} - x_j||^2, \quad (11)$$

где через $\langle x, y \rangle$ обозначено скалярное произведения векторов x и y.

Просуммируем (11) по $j \in \mathcal{B}^*$. С учетом неравенства

$$\sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - \overline{x}||^2 \le \sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - x_{k^*}||^2$$

имеем

$$\sum_{j\in\mathcal{B}^*}\sum_{i\in\mathcal{B}^*} c_{ij} = \sum_{j\in\mathcal{B}^*}\sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - x_j||^2 = m\Bigl(\sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - \overline{x}||^2 + \sum_{j\in\mathcal{B}^*} ||\overline{x} - x_j||^2\Bigr)$$

$$= 2m\sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - \overline{x}||^2 \le 2m\sum_{i\in\mathcal{B}^*} ||x_i - x_{k^*}||^2 = 2m\sum_{i\in\mathcal{B}^*} c_{ik^*}.$$

Предложение 5 доказано.

Предложение 6. $\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{B}^*} c_{ik^*} \le S^* - \frac{A(\mathcal{B}^*)}{m}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, с учетом формул (2) и (6), а также очевидной цепочки неравенств

$$\frac{A(\mathcal{B}^* \setminus k^*)}{m-1} + a_{k^*} \ge \frac{A(\mathcal{B}^*)}{m-1} \ge \frac{A(\mathcal{B}^*)}{m}$$

верно

$$\sum_{i\in\mathcal{B}^*} c_{ik^*} = \sum_{i\in\mathcal{B}^*\setminus k^*} \Bigl(\frac{a_i}{m-1} + c_{ik^*} + \frac{a_{k^*}}{m-1}\Bigr) - \Bigl(\frac{A(\mathcal{B}^* \setminus k^*)}{m-1} + a_{k^*}\Bigr) \le \sum_{i\in\mathcal{B}^*} w_{ik^*} - \frac{A(\mathcal{B}^*)}{m} = S^* - \frac{A(\mathcal{B}^*)}{m}.$$

Предложение 6 доказано.

Доказательство неравенства (10) получаем с учетом предложения 3 и неравенств, доказанных в предложениях 5, 6:

$$2F(\mathcal{B}^*) = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{B}^*}\sum_{j\in\mathcal{B}^*} w_{ij} = A(\mathcal{B}^*) + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{B}^*}\sum_{j\in\mathcal{B}^*} c_{ij} \le A(\mathcal{B}^*) + m\sum_{i\in\mathcal{B}^*} c_{ik*} \le 2mS^*.$$

Из неравенств (9)–(10) следует оценка точности алгоритма $\mathcal{A}$ решения задачи 2:

$$\alpha_{\mathcal{A}} = \frac{F(\mathcal{B}^*)}{F(\mathcal{C}^*)} \le \frac{2mS^*}{mS^*} = 2.$$

Остается показать, что оценка 2 точности алгоритма $\mathcal{A}$ достижима. Рассмотрим

П р и м е р 2. Пусть $n = 4$, $m = 3$, веса вершин равны 0, а матрица весов ребер порождена, например, множеством $\{(0,0), (1,0), (-1,0), (1/2, \sqrt{3})\}$ точек на плоскости:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что в этом примере оптимальным решением задачи является подмножество $\mathcal{C}^* = \{1, 2, 4\}$ и $OPT = F(\mathcal{C}^*) = 3$.

Возможны два равноправных алгоритмических решения: $\mathcal{B}_1^* = \{1, 2, 3\}$ и $\mathcal{B}_2^* = \{1, 2, 4\}$, так как $S(\mathcal{B}_1^*) = S(\mathcal{B}_2^*) = 6$. При этом $F(\mathcal{B}_1^*) = 6$, а $F(\mathcal{B}_2^*) = 3$. Для первого решения имеет место равенство $F(\mathcal{B}^*)/F(\mathcal{C}^*) = 2$, т. е. оценка 2 точности алгоритма достижима.

Теорема 4 доказана полностью.

3.3. Неаппроксимируемость задачи min-EWCP

Заметим, что в общем случае задача min-EWCP (4) (в силу предложения 2 и замечания 1) не аппроксимируема. Так, полученное алгоритмом $\mathcal{A}$ приближенное решение может сколько угодно сильно отличаться (по функционалу) от оптимального, что, в частности, иллюстрируется следующим примером.

П р и м е р 3. Рассмотрим постановку задачи min-EWCP, задаваемую числом $m = 3$ и матрицей

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что при $x > 2$ элементы матрицы W не удовлетворяют условию метрики, поскольку в этом случае $w_{34} > w_{32} + w_{24}$.

Легко проверить, что $\mathcal{C}^* = \{1, 2, 3\}$ и $OPT = F(\mathcal{C}^*) = 5$ при произвольном $x > 3$, в то время как $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_2 = \{2, 3, 4\}$ и $F(\mathcal{B}^*) = x + 2 \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$.

4. Заключение

В работе исследован статус вычислительной сложности задачи о минимальной (по суммарному весу вершин и ребер) клике заданного порядка в неориентированном взвешенном графе G, а также нескольких ее важных частных случаев. Установлена неаппроксимируемость задачи в общем случае и предложен 2-приближенный алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$ для случая, когда в графе G веса вершин неотрицательны, а веса ребер либо удовлетворяют неравенству треугольника, либо являются квадратами попарных расстояний в некоторой системе точек евклидова пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Garey M.R., Johnson D.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 314 p.
2. **Håstad J.** Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$ // Acta Math. 1999. Vol. 182, no 1. P. 105–142.
3. **Park K., Lee K., Park S.** An extended formulation approach to the edge-weighted maximal clique problem // European J. of Operational Research. 1996. Vol. 95, iss. 3. P. 671–682.
4. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536 с.

5. **Кельманов А.В., Пяткин А.В.** NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 37–45.
6. **Кельманов А.В., Романченко С.М.** Приближенный алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 61–69.

Поступила 10.02.2013

Еремин Иван Иванович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: eremin@imm.uran.ru

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук
профессор
зав. лабораторией
Институт математики СО РАН
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Кельманов Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук
гл. науч. сотрудник
Институт математики СО РАН
e-mail: kelm@math.nsc.ru

Пяткин Артем Валерьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики СО РАН
e-mail: artem@math.nsc.ru

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.6

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ МАТРИЧНОЙ КОРРЕКЦИИ ИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

В. И. Ерохин, А. С. Красников, М. Н. Хвостов

Представлены достаточные условия разрешимости несобственных задач линейного программирования 1-го рода после минимальной по евклидовой норме матричной коррекции их допустимой области. Рассмотрено два случая: на матрицу коррекции не наложено ограничений, на матрицу коррекции наложены структурные ограничения.

Ключевые слова: несобственные задачи линейного программирования, матричная коррекция.

V.I. Erokhin, A.S. Krasnikov, M.N. Hvostov. On sufficient conditions for the solvability of linear programming for matrix correction of the system of constraints.

Presented sufficient conditions for the solvability of improper linear programming one of the first kind with minimal Euclidean norm for matrix correction of the feasible region. We consider two cases: the matrix correction is imposed restrictions or the matrix correction is imposed structural limitations.

Keywords: improper linear programming, matrix correction.

Введение

Систематическое исследование несобственных задач линейного программирования (ЛП) было начато академиком И. И. Ереминым и его учениками в Институте математики и механики УрО РАН более 30 лет назад. За прошедшее время интерес к указанной теме не ослабел, о чем, в частности, свидетельствуют публикации последних лет [10–15]. Предлагаемая работа продолжает исследования по так называемой матричной коррекции несобственных задач ЛП.

Матричной коррекцией противоречивой системы ограничений задачи ЛП, следуя [7], будем называть такое изменение любых коэффициентов и в левых, и в правых частях уравнений и неравенств, которое делало бы указанную систему ограничений совместной. В случае, если матрица (расширенная матрица) ограничений задачи ЛП обладает определенной структурой (является блочной, разреженной или имеется запрет на изменение каких-либо ее элементов), потребуем, чтобы коррекция учитывала эти дополнительные условия. Подобную коррекцию будем называть *структурной матричной коррекцией*, а соответствующие задачи — *задачами структурной матричной коррекции*.

В силу классического факта теории двойственности разрешимость пары взаимно двойственных задач ЛП эквивалентна одновременной непустоте допустимых областей обеих задач. Правомерен вопрос: гарантирует ли матричная коррекция допустимой области прямой задачи ЛП, что допустимая область двойственной задачи станет (или будет оставаться) непустой? Исследованию этого вопроса посвящена настоящая работа.

Для определенности будем считать, что прямая задача ЛП записана в канонической форме, а двойственная — в стандартной. Выбор конкретных форм записи задач ЛП важен для конкретизации обозначений и выкладок, но нисколько не умаляет общности рассуждений, так как все полученные результаты могут быть соответствующим образом адаптированы для задач ЛП, записанных в любых других формах.

1. Постановки задач, некоторые обозначения и “инструменты”

Обозначим символом $\mathcal{M}^{m\times n}$ множество вещественных матриц размера $m\times n$. Пусть

$$L(A,b,c)\colon \quad Ax=b,\ x\geqslant 0, \quad c^\top x\to\max \tag{1}$$

— некоторая задача линейного программирования в канонической форме;

$$L^*(A,b,c)\colon \quad u^\top A\geqslant c^\top, \quad b^\top u\to\min \tag{2}$$

— двойственная к (1) задача ЛП в стандартной форме, где $A\in\mathcal{M}^{m\times n}$, c, $x\in\mathbb{R}^n$, b, $u\in\mathbb{R}^m$. Символом $\mathcal{X}(A,b)\triangleq\{x\mid Ax=b,\ x\geqslant 0\}$ обозначим допустимое множество задачи $L(A,b,c)$, символом $\mathcal{U}(A,c)\triangleq\left\{u\mid u^\top A\geqslant c^\top\right\}$ — допустимое множество задачи $L^*(A,b,c)$. Задачи (1), (2) условимся рассматривать как несобственные, в силу чего хотя бы одно из множеств, $\mathcal{X}(A,b)$ или $\mathcal{U}(A,c)$, является пустым.

Задачей $D_{[H\ -h]}$ матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем называть задачу построения матрицы $[H\ \ -h]\in\mathcal{M}^{m\times(n+1)}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей разрешимость скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A+H,b+h,c)\colon & (A+H)x=b+h,\ x\geqslant 0, \quad c^\top x\to\max,\\ L^*(A+H,b+h,c)\colon & u^\top(A+H)\geqslant c^\top, \quad (b+h)^\top u\to\min\,. \end{cases}$$

Задачей D_H матричной коррекции только левых частей ($h=0$) пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем называть задачу построения матрицы $H\in\mathcal{M}^{m\times n}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей совместность скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A+H,b,c)\colon & (A+H)x=b,\ x\geqslant 0, \quad c^\top x\to\max,\\ L^*(A+H,b,c)\colon & u^\top(A+H)\geqslant c^\top, \quad b^\top u\to\min\,. \end{cases}$$

Одновременно с задачами $D_{[H\ -h]}$ и D_H будем рассматривать коррекцию противоречивой системы ограничений задачи $L(A,b,c)$, формализованную с помощью задач

$$P_{[H\ -h]}\colon \begin{cases} \|[H\ \ -h]\|\to\min,\\ \mathcal{X}\left(A+H,b+h\right)\neq\varnothing, \end{cases} \qquad P_H\colon \begin{cases} \|H\|\to\min,\\ \mathcal{X}\left(A+H,b\right)\neq\varnothing, \end{cases}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова матричная (далее в зависимости от контекста матричная или векторная) норма, определяемая для $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}^{m\times n}$ как $\|A\|=\left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим также модификации задач D_H, $D_{[H\ -h]}$, P_H, $P_{[H\ -h]}$ — задачи SD_H, $SD_{[H\ -h]}$, SP_H, $SP_{[H\ -h]}$ с некоторыми предписанными множествами нулевых элементов матриц H и $[H\ \ -h]$, порождающими запреты на коррекцию элементов матриц A и $[A\ \ -b]$. Указанные задачи будем называть задачами матричной коррекции со структурными ограничениями. Достаточные условия разрешимости задач D_H, $D_{[H\ -h]}$, SD_H, $SD_{[H\ -h]}$ при $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$, $\mathcal{U}(A,c)\neq\varnothing$ являются в настоящей работе основным предметом исследования.

Допустимые множества всех рассматриваемых задач матричной коррекции будем обозначать как $\mathbf{FS}(\cdot)$. Например, $\mathbf{FS}(SD_{[H\ -h]})$ — допустимое множество решений задачи $SD_{[H\ -h]}$. Для произвольного вектора $x\in\mathbb{R}^n$ по аналогии с псевдообращением матриц символом x^+ будем обозначать его “псевдообращение” [5]:

$$x^+=\begin{cases} (x^\top x)^{-1}x^\top, & \text{если } x\neq 0,\\ \ \ 0\in\mathcal{M}^{1\times n} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

При $x \neq 0$ несложно убедиться, что $x^+x = 1$ и $\|x^+\| = 1/\|x\|$; если выполнено условие $\|x\| = 1$, то $x^+ = x^\top$.

Следующие классические результаты существенным образом используется в доказательствах основных теорем.

Лемма 1 (Неравенство Коши — Буняковского [4]). *Для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\left|x^\top y\right| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда справедливо представление $y = \gamma x$, где γ — некоторое число.*

Лемма 2 (Теорема двойственности [2], классификация несобственных задач ЛП [8]). *Задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ разрешимы тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия $\mathcal{X}(A, b) \neq \varnothing$ и $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$. Если задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ неразрешимы, возможны следующие три случая*:

1) *$\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$, $L(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода, $L^*(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 2-го рода*;

2) *$\mathcal{X}(A, b) \neq \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, $L(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 2-го рода, $L^*(A, b, c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода*;

3) *$\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ — несобственные задачи ЛП 3-го рода.*

Еще один полезный вспомогательный результат является следствием классической теоремы Александрова — Фань-Цзи (см., например, [1]) об альтернативной совместности системы линейных неравенств и смешанной системы линейных уравнений и неравенств.

Лемма 3. *Пусть H^* — решение задачи D_H или SD_H, $[H^* \ \ -h^*]$ — решение задачи $SD_{[H\ -h]}$ или $D_{[H\ -h]}$ для несобственной задачи $L(A, b, c)$ 1-го рода и выполнено условие $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$. Тогда существует вектор $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям*

$$z \geqslant 0, \quad \|z\| = 1, \quad (A + H^*)z = 0, \quad c^\top z > 0, \tag{4}$$

$$Az \neq 0. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению $\mathcal{U}(\cdot)$ условие $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$ означает несовместность системы неравенств $u^\top(A+H^*) \geqslant c^\top$. В этом случае в силу теоремы Александрова—Фань-Цзи совместна альтернативная система, имеющая вид $z \geqslant 0$, $(A + H^*)z = 0$, $c^\top z > 0$. В силу условия $c^\top z > 0$ вектор z ненулевой и может иметь произвольную (ненулевую) норму. В частности, может выполняться условие $\|z\| = 1$, что соответствует условиям (4).

Убедимся в выполнении условия (5). Действительно, предположив $Az = 0$, по теореме Александрова — Фань-Цзи имеем $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, что противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

2. Достаточные условия разрешимости несобственных задач линейного программирования 1-го рода после матричной коррекции их допустимой области без учета структурных ограничений

В настоящем разделе предполагается, что на матрицы коррекции (расширенные матрицы коррекции) задач $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ не наложены ограничения. Для последующих выкладок потребуются определенные сведения о матрицах H^* и $[H^* \ \ -h^*]$, являющихся решениями задач P_H и $P_{[H\ -h]}$. Систематизируя результаты, впервые полученные в работах [3; 8] и развитые впоследствии в работах [6; 7], эти сведения можно изложить в виде следующих лемм.

Лемма 4. *Если решение задачи P_H существует, то оно имеет вид*

$$H^* = (b - Ax^*)\, x^{*+}, \tag{6}$$

где $x^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x\geqslant 0} \dfrac{\|b-Ax\|}{\|x\|}$. *При этом*

$$\|H^*\| = \frac{\|b-Ax^*\|}{\|x^*\|}. \tag{7}$$

Лемма 5. *Если решение задачи* $P_{[H\ -h]}$ *существует, то оно имеет вид*

$$[H^*\ -h^*] = \frac{(b-Ax^*)\cdot\left[x^{*\top}\ 1\right]}{x^{*\top}x^*+1}, \tag{8}$$

где $x^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x\geqslant 0} \dfrac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2+1}$. *При этом*

$$\|[H^*\ -h^*]\|^2 = \frac{\|b-Ax^*\|^2}{\|x^*\|^2+1}. \tag{9}$$

Теорема 1 (О достаточных условиях существования решения задачи D_H). *Если* $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ *(т. е.* $L(A,b,c)$ *— несобственная задача ЛП 1-го рода),* $b \neq 0$*, задача* P_H *разрешима, матрица* H^* *является ее решением, то задача* D_H *также разрешима и матрица* H^* *является ее решением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что матрица H^* принадлежит допустимой области задачи D_H. Предположим противное, т. е. $H^* \notin \mathbf{FS}(D_H)$. Поскольку $H^* \in \mathbf{FS}(P_H) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H^*,b) \neq \varnothing$, в силу леммы 2 $\mathcal{U}(A+H^*,c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 3 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (4), (5).

Покажем, что выполняется условие

$$\|H^*\| = \frac{\|b-Ax^*\|}{\|x^*\|} > \|Az\|. \tag{10}$$

Действительно, $(A+H^*)\,z = 0 \Rightarrow H^*z = -Az$. С учетом (6) получим $(b-Ax^*)\left(x^{*+}z\right) = -Az$. Согласно условию (5) $x^{*+}z \neq 0$, $x^* \neq 0$. Тогда

$$b - Ax^* = -\frac{Az}{x^{*+}z}. \tag{11}$$

Покажем, что $x^* \neq \lambda z$, где $\lambda \neq 0$ — некоторое число. Предположим противное. Пусть $x^* = \lambda z$. Тогда

$$x^{*+} = \frac{1}{\lambda}z^\top \Rightarrow \left(b - Ax^* = -\frac{Az}{x^{*+}z} \Leftrightarrow b - \lambda Az = -\lambda Az\right) \Rightarrow b = 0,$$

что противоречит условию теоремы. Оценим $|x^{*+}z|$. Поскольку $x^* \neq \lambda z$, вследствие леммы 1 справедливо неравенство $|x^{*+}z| < \|x^{*+}\|\cdot\|z\| = \|x^{*+}\|$. Поэтому в силу (11)

$$\|b-Ax^*\| > \frac{\|Az\|}{\|x^{*+}\|}. \tag{12}$$

Так как $\left\|x^{*+}\right\| = 1/\|x^*\|$, то $\|b-Ax^*\| > \|Az\|\cdot\|x^*\|$, и, учитывая (7), (12), получаем (10).

Пусть $H_{z,\gamma} = (b-\gamma Az)\,(\gamma z)^+$, где $\gamma > 0$ — некоторый скалярный параметр. Очевидно, $H_{z,\gamma}$ — допустимое решение задачи P_H, поскольку $(\gamma z) \in \mathcal{X}\,(A+H_{z,\gamma},b)$. В то же время по аналогии с (7) $\|H_{z,\gamma}\| = \gamma^{-1}\,\|b-\gamma Az\|$. Рассмотрим $H^*_{z,\gamma} = \lim\limits_{\gamma\to\infty} H_{z,\gamma} = -Azz^\top$. Исходя из (10) имеем

$$\left\|H^*_{z,\gamma}\right\| = \left\|Azz^+\right\| = \left\|Azz^\top\right\| = \|Az\| < \|H^*\|. \tag{13}$$

Но условие (13) в свою очередь означает, что для достаточно большого, но конечного $\gamma > 0$ существует матрица $H_{z,\gamma}$, являющаяся допустимым решением задачи P_H, такая, что $\|H_{z,\gamma}\| < \|H^*\|$; это противоречит предположению об оптимальности матрицы H^*.

Покажем, что H^* — оптимальное решение задачи D_H. Действительно, если предположить противное, то существует матрица $H^{**} \in \mathbf{FS}(D_H)$ такая, что $\|H^{**}\| < \|H^*\|$. Но $\mathbf{FS}(D_H) \subset \mathbf{FS}(P_H)$, следовательно, существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче P_H.

Теорема доказана.

Теорема 2 (О достаточных условиях существования решения задачи $D_{[H\ -h]}$).

Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ (т. е. $L(A,b,c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода), задача $P_{[H\ -h]}$ разрешима и матрица $[H^*\ -h^*]$ является ее решением, то задача $D_{[H\ -h]}$ также разрешима и матрица $[H^*\ -h^*]$ является ее решением.

Доказательство. Покажем, что матрица $[H^*\ -h^*]$ принадлежит допустимой области задачи $D_{[H\ -h]}$. Предположим противное, т. е. $[H^*\ -h^*] \notin \mathbf{FS}(D_{[H)\ -h]})$. Поскольку $[H^*\ -h^*] \in \mathbf{FS}(P_{[H\ -h]}) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H^*, b+h^*) \neq \varnothing$, в силу леммы 2 $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 3 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (4), (5).

Покажем, что выполняется условие

$$\|H^*\ -h^*\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\sqrt{x^{*\top}x^* + 1}} > \|Az\|\,. \tag{14}$$

Действительно, $(A+H^*)\,z = 0 \Rightarrow H^*z = -Az$. В силу (5) и (8) получим

$$\frac{(b - Ax^*)\,x^{*\top}z}{x^{*\top}x^* + 1} = -Az \neq 0 \Rightarrow x^{*\top}z \neq 0, \quad x^* \neq 0. \tag{15}$$

Формула (15) позволяет связать величины $\|b - Ax^*\|$ и $\|Az\|$:

$$b - Ax^* = -\frac{x^{*\top}x^* + 1}{x^{*\top}z} \cdot Az, \quad \|b - Ax^*\| = \frac{x^{*\top}x^* + 1}{|x^{*\top}z|} \cdot \|Az\|\,.$$

Согласно лемме 1 с учетом условия $\|z\| = 1$ имеем $\left|x^{*\top}z\right| \leqslant \|x^*\| = \sqrt{x^{*\top}x^*}$, поэтому

$$\|b - Ax^*\| \geqslant \frac{x^{*\top}x + 1}{\sqrt{x^{*\top}x^*}} \cdot \|Az\|\,.$$

Но исходя из (9)

$$\|[H^*\ -h^*]\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\sqrt{x^{*\top}x + 1}} \geqslant \Big(\frac{x^{*\top}x + 1}{x^{*\top}x^*}\Big)^{1/2} \cdot \|Az\| > \|Az\|\,,$$

что означает выполнение условия (14).

Пусть

$$[H\ -h]_{z,\gamma} = [H_{z,\gamma}\ -h_{z,\gamma}] = \frac{(b - \gamma Az)\left[\gamma z^\top\ 1\right]}{\gamma^2 + 1},$$

где $\gamma > 0$ — некоторый скалярный параметр. Несложно убедиться, что $(\gamma z) \in \mathcal{X}(A + H_{z,\gamma}, b + h_{z,\gamma})$, в силу чего матрица $[H\ -h]_{z,\gamma}$ — допустимое решение задачи $P_{[H\ -h]}$. В то же время по аналогии с (9) имеем $\|H\ -h\|_{z,\gamma} = \dfrac{\|b - \gamma Az\|}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$.

Рассмотрим матрицу $[H\ -h]^*_{z,\gamma} = \lim\limits_{\gamma\to\infty} \dfrac{(b-\gamma Az)\left[\gamma z^\top\ 1\right]}{\gamma^2+1} = \left[-Azz^\top\ 0\right]$. Вследствие (14) имеем

$$\|\,[H\ -h]^*_{z,\gamma}\,\| = \|Az\| < \|H^*\ -h^*\|\,. \tag{16}$$

Условие (16) в свою очередь означает, что для достаточно большого, но конечного $\gamma > 0$ существует матрица $[H\ -h]_{z,\gamma}$, являющаяся допустимым решением задачи $P_{[H\ -h]}$, такая, что $\|\,[H\ -h]_{z,\gamma}\,\| < \|[H^*\ -h^*]\|$; это противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ -h^*]$.

Покажем, что $[H^*\ -h^*]$ — оптимальное решение задачи $D_{[H\ -h]}$. Действительно, если предположить противное, то существует матрица $[H^{**}\ -h^{**}] \in \mathbf{FS}(D_{[H\ -h]})$ такая, что

$$\|[H^{**}\ -h^{**}]\| < \|[H^*\ -h^*]\|.$$

Но $\mathbf{FS}(D_{[H\ -h]}) \subset \mathbf{FS}(P_{[H\ -h]})$, следовательно, существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ -h^*]$ в задаче $P_{[H\ -h]}$.

Теорема доказана.

3. Достаточные условия разрешимости несобственных задач линейного программирования 1-го рода после матричной коррекции их допустимой области с учетом структурных ограничений

Пусть задачи $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ таковы, что $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$. С несобственными задачами $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ свяжем задачи SD_H, $SD_{[H\ -h]}$, SP_H, $SP_{[H\ -h]}$ структурной матричной коррекции, в которых матрице H или расширенной матрице $[H\ -h]$ предписано иметь структуру нулевых и ненулевых элементов, задаваемую множествами индексов нулевых элементов $\mathbf{K} = \{\,(i \in \{1,2,\ldots,m\},\ j \in \{1,2,\ldots,n\}) \mid H_{i,j} = 0\}$ и $\mathbf{k} = \{i \in \{1,2,\ldots,m\} \mid h_i = 0\}$.

Для реализации структурных требований к H и $[H\ -h]$ введем ряд объектов:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{i,j}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{H}_{i,j} = 0,\ \text{если}\ \{i,j\} \in \mathbf{K}, \\ \mathcal{H}_{i,j} = 1\ \ \text{в противном случае,} \end{array}\right. \qquad \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_i) \left| \begin{array}{l} \mathfrak{h}_i = 0,\ \text{если}\ i \in \mathbf{k}, \\ \mathfrak{h}_i = 1\ \ \text{в противном случае.} \end{array}\right.$$

Как видно из представленных выше формул, матрица $\mathcal{H}$ и вектор $\mathfrak{h}$ — логические шаблоны для структуры нулевых и ненулевых элементов матрицы H и вектора h.

Пусть $s\,(p,q) \in \mathbb{R}^n$ — вектор, составленный из элементов p_j с такими индексами j, что $q_j \neq 0$, где $p = (p_j) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_j) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом,

$$\hbar(H) = \begin{bmatrix} s\left(H_{1*}^\top, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) \\ \vdots \\ s\left(H_{m*}^\top, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{bmatrix} \tag{17}$$

— вектор, составленный из элементов строк H_{i*} в соответствии с шаблонами строк $\mathcal{H}_{i*}$;

$$\hbar([H\ -h]) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} s\left(H_{1*}^\top, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) \\ \vdots \\ s\left(H_{m*}^\top, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{matrix} & s\left(-h, \mathfrak{h}\right) \end{bmatrix} \tag{18}$$

— вектор, составленный из элементов строк $[H_{i,*}\ -h_i]$ в соответствии с шаблонами строк $\mathcal{H}_{i*}$ и столбца $\mathfrak{h}$;

$$X(x) = \begin{bmatrix} s^\top\left(x, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^\top\left(x, \mathcal{H}_{2*}^\top\right) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s^\top\left(x, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{bmatrix} \tag{19}$$

— матрица, i-я строка которой составлена из нулевых элементов матрицы H и элементов вектора x в соответствии с шаблоном $\mathcal{H}_{i*}$.

Выражения $H(\hbar)$, $[H(\hbar)\ -h(\hbar)] = [H\ -h]\,(\hbar)$, $x(X)$ будем трактовать как обращения формул (17), (18) и (19) соответственно. Так, например, $H(\hbar)$ — матрица H, восстановленная по вектору $\hbar$ в соответствии с формулой (17). Используя (17)–(19), несложно убедиться, что для матриц H и $[H\ -h]$, подчиняющихся соответствующим структурным ограничениям, справедливы формулы $Hx = X(x)\hbar(H)$, $\quad [H\ -h]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = X\Big(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\Big)\hbar\big([H\ -h]\big)$.

Кратко охарактеризуем размеры рассматриваемых объектов. Если $H, \mathcal{H}$ — матрицы размера $m \times n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то $X(x) \in \mathcal{M}^{m\times N}$, $\hbar(H) \in \mathbb{R}^N$, $X\left([x^\top\ 1]^\top\right) \in \mathcal{M}^{m\times N'}$, $\hbar\left([H\ -h]\right) \in \mathbb{R}^{N'}$, где $N \leqslant mn$ — суммарное количество ненулевых элементов в матрице $\mathcal{H}$, $N' \leqslant (m+1)n$ — суммарное количество ненулевых элементов в матрице $[\mathcal{H}\ \mathfrak{h}]$.

Для последующих выкладок, связанных с задачами SP_H и SD_H, наряду с матрицей $X(x)$ потребуется матрица $X^+(x) \in \mathcal{M}^{N\times m}$, псевдообратная к матрице $X(x) \in \mathcal{M}^{m\times N}$.

Лемма 6. *Матрица, псевдообратная к матрице $X(x)$, заданной формулой* (19)*, имеет вид*

$$X^+(x) = \begin{bmatrix} s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{2*}^\top\right) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где вектор-строки $s^+\big(x, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)$ вычисляются в соответствии с (3)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно (см., например, [4]), вещественная матрица Z, псевдообратная к некоторой заданной вещественной матрице A, однозначно определяется следующими четырьмя уравнениями, называемыми уравнениями Пенроуза: $AZA = A$, $ZAZ = Z$, $(ZA)^\top = ZA$, $(AZ)^\top = AZ$. Значит, для обоснования формулы (20) необходимо проверить уравнения Пенроуза с использованием соотношений (3), (19) и (20). Рассмотрим два случая:

1. Матрица $X(x)$ не имеет нулевых строк. В этом случае проверка уравнений Пенроуза существенно облегчается, поскольку, как несложно убедиться (с использованием (19), (20) и (3)), выполняется условие $X(x)X^+(x) = I_m$, где I_m — единичная матрица порядка m.

2. Матрица $X(x)$ имеет нулевые строки. Как следует из (3), (19) и (20), матрица $X^+(x)$ имеет нулевые столбцы с теми же номерами, в силу чего выполняется условие $X(x)X^+(x) = \tilde{I}_m$, где $\tilde{I}_m$ — единичная матрица порядка m с нулевыми диагональными элементами, соответствующими нулевым строкам $X(x)$ (нулевым столбцам $X^+(x)$). Перестановкой строк в $X(x)$ и такой же перестановкой столбцов в $X^+(x)$ указанные матрицы можно привести к блочному виду, выделив блоки нулевых и ненулевых строк, нулевых и ненулевых столбцов. После этого с помощью техники перемножения блочных матриц убеждаемся в справедливости уравнений Пенроуза.

Лемма доказана.

Для выкладок, связанных с задачами $SP_{[H\ -h]}$ и $SD_{[H\ -h]}$, потребуются модификации матриц $X(x)$ и $X^+(x)$: $X\Big(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\Big)$ и $X^+\Big(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\Big)$. Указанные объекты также могут быть “построены” по формулам (19) и (20), но уже из векторов $s\Big(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\Big)$, $\ s^+\Big(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\Big)$.

Как будет показано ниже, нулевые и ненулевые строки матриц H, $[H\ -h]$, $X(\cdot)$, а также нулевые и ненулевые столбцы $X^+(\cdot)$ оказываются тесно связанными с множеством индексов $\mathbf{L}(x) = \{i \mid (b - Ax)_i \neq 0\}$, контекстом использования которого будут служить несовместная система $Ax = b,\ x \geqslant 0$ и совместные системы $(A+H)x = b$, $(A+H)x = b + h$.

Лемма 7. *Пусть существуют матрица H и вектор x такие, что H отвечает структурным ограничениям, задаваемым множеством $\mathbf{K}$, система $(A+H)\,x=b$ совместна. Тогда матрица $\hat{H}$, являющаяся решением указанной системы с минимальной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой $\hat{H}=H(\hat{\hbar})$, где*

$$\hat{\hbar}=X^{+}(x)(b-Ax). \tag{21}$$

При этом

$$\hat{H}_{i*}\neq 0 \Leftrightarrow i\in \mathbf{L}(x), \tag{22}$$

$$\|\,\hat{H}\,\|=\|\,\hat{\hbar}\,\|=\Bigg(\sum_{i\in\mathbf{L}(x)}(b-Ax)_i^2\,\big\|s\big(x,\mathcal{H}_{i*}^{\top}\big)\big\|^{-2}\Bigg)^{1/2}. \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $(A+H)x=b\Leftrightarrow Hx=b-Ax\Leftrightarrow X(x)\hbar(H)=(b-Ax)$. Заметим, что в силу исходных предположений все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, откуда, используя хорошо известные свойства псевдообратных матриц [4; 5], получаем обоснование существования и единственности матрицы $\hat{H}$, вектора $\hat{\hbar}$ и справедливости формулы (21).

Для обоснования формул (22), (23) заметим, что суммируемые в (23) величины являются квадратами евклидовых норм строк матрицы $\hat{H}$ (это можно показать с использованием (3), (17), (19) и (20)). Но в силу совместности системы $(A+\hat{H})x=b$ и минимальности $\|\hat{H}\|$ множество номеров ненулевых строк матрицы $\hat{H}$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть существуют матрица $[H\ \ -h]$ и вектор x такие, что $[H\ \ -h]$ отвечает структурным ограничениям, задаваемым множествами $\mathbf{K}$ и $\mathbf{k}$, система $(A+H)\,x=b+h$ совместна. Тогда матрица $\big[\hat{H}\ \ -\hat{h}\big]$, являющаяся решением указанной системы с минимальной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой $\big[\hat{H}\ \ -\hat{h}\big]=\big[H(\hat{\hbar})\ \ -h(\hat{\hbar})\big]$, где*

$$\hat{\hbar}=X^{+}\Big(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\Big)(b-Ax). \tag{24}$$

При этом

$$\big[\hat{H}_{i*}\ \ -\hat{h}_i\big]\neq 0\Leftrightarrow i\in\mathbf{L}(x), \tag{25}$$

$$\big\|\big[\hat{H}\ \ -\hat{h}\big]\big\|=\|\hat{\hbar}\|=\Big(\sum_{i\in\mathbf{L}(x)}(b-Ax)_i^2\,\Big\|s\Big(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix},\big[\ \mathcal{H}_{i*}\ \mathfrak{h}_i\ \big]^{\top}\Big)\Big\|^{-2}\Big)^{1/2}. \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеют место эквивалентности

$$(A+H)x=b+h\Leftrightarrow[H(\hbar)\ \ -h(\hbar)]\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^{\top}\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\right)\hbar\,([H\ \ -h])=b-Ax.$$

Поскольку все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, из хорошо известных свойств псевдообратных матриц [4; 5] вытекают существование и единственность матрицы $[\hat{H}\ \ -\hat{h}]$, вектора $\hat{\hbar}$ и справедливость формулы (24).

Для обоснования формул (25), (26) заметим, что суммируемые в (26) величины являются квадратами евклидовых норм строк матрицы $[\hat{H}\ \ -\hat{h}]$; это следует из (3), (18)–(20). Но в силу совместности системы $(A+\hat{H})x=b+\hat{h}$ и минимальности $\|[\hat{H}\ \ -\hat{h}]\|$ множество номеров ненулевых строк матрицы $[\hat{H}\ \ -\hat{h}]$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$.

Лемма доказана.

Леммы 7 и 8 позволяют свести задачи SP_H и $SP_{[H\ -h]}$ к задачам условной минимизации по вектору $x \geqslant 0$ целевых функций вида (23) и (26) соответственно. Очевидно, существование минимума в указанных задачах эквивалентно разрешимости задач SP_H и $SP_{[H\ -h]}$, что является обоснованием приводимых ниже лемм, дающих по аналогии с леммами 4 и 5 конструктивное описание решений задач SP_H и $SP_{[H\ -h]}$.

Лемма 9. *Если решение задачи SP_H существует, то оно имеет вид $H^* = H(X^+(x^*)(b-Ax^*))$, где $x^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x\geqslant 0} \sum\limits_{i\in\mathbf{L}(x^*)} (b-Ax)_i^2 \left\| s\left(x, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|^{-2}$. При этом*

$$\left\|H^*\right\| = \Big(\sum_{i\in\mathbf{L}(x^*)} (b-Ax)_i^2 \left\| s\left(x, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|^{-2}\Big)^{1/2}. \tag{27}$$

Лемма 10. *Если решение задачи $SP_{[H\ -h]}$ существует, то оно имеет вид $[H^*\ \ -h^*] = [H(\hbar^*)\ -h(\hbar^*)]$, где $\hbar^* = X^+\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1\end{bmatrix}\right)(b-Ax^*)$, $x^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x\geqslant 0} \sum\limits_{i\in\mathbf{L}(x)} (b-Ax)_i^2 \left\| s\begin{bmatrix} x^* \\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*} & \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}^\top\right\|^{-2}$. При этом*

$$\left\|[H^*\ \ -h^*]\right\| = \|\hbar^*\| = \Big(\sum_{i\in\mathbf{L}(x)} (b-Ax)_i^2 \left\| s\begin{bmatrix} x^* \\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*} & \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}^\top\right\|^{-2}\Big)^{1/2}. \tag{28}$$

Теорема 3 (О достаточных условиях существования решения задачи SD_H).

Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ (т.е. $L(A,b,c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода), $b \neq 0$, задача SP_H разрешима и матрица H^* является ее решением, то задача SD_H также разрешима и матрица H^* является ее решением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что матрица H^* принадлежит допустимой области задачи SD_H. Предположим противное, т. е. $H^* \notin \mathbf{FS}(SD_H)$. Поскольку $H^* \in \mathbf{FS}(SP_H) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H,b) \neq \varnothing$, то в силу леммы 2 $\mathcal{U}(A+H^*,c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 3 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (4), (5). Далее, из (4), (5) следует

$$H^*z = -Az \Leftrightarrow X(z)\hbar\left(H^*\right) = -Az \Rightarrow X(z)X^+\left(x^*\right)\left(b-Ax^*\right) = -Az \neq 0. \tag{29}$$

Пусть $D = (d_{ij}) = X(z)X^+\left(x^*\right)$, $u_i = s(x^*, \mathcal{H}_{i*}^\top)$, $v_i = s(z, \mathcal{H}_{i*}^\top)$, тогда согласно (3), (19) и (20) имеем

$$d_{ij} = \begin{cases} u_i^+ v_i, & \text{если } i=j, \\ \quad 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом, из (29) получаем

$$\begin{cases} u_i^+ v_i\left(b-Ax^*\right)_i = -(Az)_i \quad \forall i \in \mathbf{L}(x^*), \\ \left(Az\right)_i = 0 \quad \forall i \notin \mathbf{L}(x^*). \end{cases} \tag{30}$$

Заметим, что условие (22) эквивалентно условию $(b-Ax^*)_i u_i^+ \neq 0$, откуда с учетом (3) имеем

$$u_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbf{L}(x^*). \tag{31}$$

Разобьем множество $\mathbf{L}(x^*)$ на три подмножества: $\mathbf{L}_1(x^*) = \{i \in \mathbf{L}(x^*) \mid u_i^\top v_i \neq 0\}$, $\mathbf{L}_2(x^*) = \{i \in \mathbf{L}(x^*) \mid u_i^\top v_i = 0,\ v_i \neq 0\}$ и $\mathbf{L}_3(x^*) = \{i \in \mathbf{L}(x^*) \mid u_i^\top v_i = 0,\ v_i = 0\}$. Исходя из (3), (30) и (31)

$$\frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{\left|u_i^\top v_i\right|} \neq 0 \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \qquad (Az)_i = 0 \quad \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*).$$

Заметим, что вектор u_i не представим в виде $u_i = \lambda v_i$ для всех $i \in \mathbf{L}_1(x^*)$, где λ — некоторое число, поскольку в противном случае (с помощью "построчного" варианта используемых в доказательстве теоремы 1 выкладок) получаем $b = 0$, что противоречит условиям теоремы. Таким образом, в силу леммы 1 $|u_i^\top v_i| \leqslant \|u_i\|\,\|v_i\|\ \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*),\ \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) \mid |u_i^\top v_i| < \|u_i\|\,\|v_i\|$, откуда в свою очередь для всех $i \in \mathbf{L}_1(x^*)$

$$\frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\|\cdot\|v_i\|}, \qquad \frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|u_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в системе обязательно присутствуют строгие неравенства.

Следовательно, в силу (27)

$$\|H^*\| = \left(\sum_{i\in\mathbf{L}(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}\right)^{1/2} > \left(\sum_{i\in\mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i\in\mathbf{L}_2(x^*)\cup\mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим $H_{\gamma,z} = H(X^+(x^*+\gamma z)(b-Ax^*-\gamma Az))$. Очевидно, $H_{z,\gamma}$ — допустимое решение задачи SP_H, поскольку $(x^*+\gamma z) \in \mathcal{X}(A+H_{z,\gamma}, b)$. Кроме того, в соответствии с (3) и (20) $\|(H_{z,\gamma})_{i*}\| = \dfrac{|(b-Ax^*-\gamma Az)_i|}{\left\|s\left(x^*+\gamma z, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|}$, причем $\left\|(H_{z,\gamma})_{i*}\right\| = 0\ \forall\gamma$ при $i \notin \mathbf{L}(x^*)$, и

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left\|(H_{z,\gamma})_{i*}\right\| = \left\{\frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|}\ \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*),\ 0\ \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*),\ \frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|u_i\|}\ \forall i \in \mathbf{L}_3(x^*)\right\}.$$

Следовательно, для $H_{z,\gamma}^* = \lim\limits_{\gamma\to\infty} H_{z,\gamma}$ имеем

$$\left\|H_{z,\gamma}^*\right\| = \lim_{\gamma\to\infty}\|H_{\gamma,z}\| = \left(\sum_{i\in\mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i\in\mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, $\left\|H_{z,\gamma}^*\right\| < \|H^*\|$. Отсюда при достаточно большом, но конечном $\gamma > 0$ существует матрица $H_{z,\gamma} = H(X^+(x^*+\gamma z)(b-Ax^*-\gamma Az))$, являющаяся допустимым решением задачи SP_H, такая, что $\|H_{z,\gamma}\| < \|H^*\|$. Это противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче SP_H.

Оптимальность H^* в задаче SD_H докажем от противного. Пусть существует матрица $H^{**} \in \mathbf{FS}(SD_H)$ такая, что $\|H^{**}\| < \|H^*\|$. В то же время $\mathbf{FS}(SD_H) \subset \mathbf{FS}(SP_H)$, в силу чего существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче SP_H.

Теорема доказана.

Теорема 4 (О достаточных условиях существования решения задачи $SD_{[H\ -h]}$).
Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ (т.е. $L(A,b,c)$ — несобственная задача ЛП 1-го рода), задача $SP_{[H\ -h]}$ (с параметром $\mathfrak{h} \neq 0$) разрешима и матрица $[H^*\ -h^*]$ является ее решением, то задача $SD_{[H\ -h]}$ также разрешима и матрица $[H\ -h]$ является ее решением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что матрица $[H\ -h]$ принадлежит допустимой области задачи $SD_{[H\ -h]}$. Предположим противное. Пусть $[H\ -h] \notin \mathbf{FS}(SD_{[H\ -h]})$. Поскольку $[H\ -h] \in \mathbf{FS}(SP_{[H\ -h]})$, по лемме 2 $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 3 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (4)–(5). Отсюда получаем

$$\left[H^*\ -h^*\right]\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = -Az \Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right)\hbar\left([H^*\ -h^*]\right)$$

$$= -Az \Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right)X^+\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right)(b-Ax^*) = -Az \neq 0. \tag{32}$$

Пусть $D = (d_{ij}) = X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) X^+\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\tilde{u}_i = s\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)$, векторы u_i, v_i и множества $\mathbf{L}_1(\cdot)$, $\mathbf{L}_3(\cdot)$, $\mathbf{L}_2(\cdot)$ определены так же, как в доказательстве теоремы 3. Исходя из (3), (19) и (20) получаем

$$d_{ij} = \begin{cases} \tilde{u}_i^+ \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, из (32) следует

$$\begin{cases} \tilde{u}_i^+ \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} (b - Ax^*)_i = -(Az)_i \quad \forall i \in \mathbf{L}(x^*), \\ (Az)_i = 0 \quad \forall i \notin \mathbf{L}(x^*). \end{cases} \tag{33}$$

Заметим, что условие (25) эквивалентно условию $(b - Ax^*)_i\, \tilde{u}_i^+ \neq 0$, откуда имеем

$$\tilde{u}_i^+ \neq 0 \quad \forall i \in \mathbf{L}(x^*). \tag{34}$$

В силу (3), (33) и (34)

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{|u_i^\top v_i|} \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \qquad (Az)_i = 0 \quad \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*).$$

Согласно лемме 1 имеем $|u_i^\top v_i| \leqslant \|u_i\|\,\|v_i\|$ для всех $i \in \mathbf{L}_1(x^*)$, откуда с учетом (28) для всех $i \in \mathbf{L}_1(x^*)$ получаем

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\|\,\|v_i\|}, \qquad \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|} \geqslant \zeta_i \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в системах обязательно есть строгие неравенства, поскольку в силу $\mathfrak{h} \neq 0$ выполняются условия

$$\zeta_i = \frac{\|\tilde{u}_i\|}{\|u_i\|} \geqslant 1 \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \qquad \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) \mid \zeta_i > 1.$$

Следовательно,

$$\|[H^* \ -h^*]\| = \Bigg(\sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{|(b - Ax^*)_i|^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}\Bigg)^{1/2} > \Bigg(\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}\Bigg)^{1/2}.$$

Пусть $[H\ -h]_{z,\gamma} = [H(\hbar_{z,\gamma})\ -h(\hbar_{z,\gamma})]$, где $\hbar_{z,\gamma} = X^+\left(\begin{bmatrix} x^* + \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}\right)(b - Ax^* - \gamma Az)$. Как несложно показать, $(x^* + \gamma z) \in \mathcal{X}(A + H_{z,\gamma}, b + h_{z,\gamma}) \Rightarrow [H\ -h]_{z,\gamma} \in \mathbf{FS}(SP_{[H\ -h]})$. Кроме того, с учетом (3) и (20)

$$\|[H_{i*}\ -h_i]_{z,\gamma}\| = |b - Ax^* - \gamma Az|_i \left\| s\left(\begin{bmatrix} x^* + \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)\right\|^{-1},$$

причем $\left\|[H_{i*}\ -h_i]_{z,\gamma}\right\| = 0$ для всех γ при $i \notin \mathbf{L}(x^*)$ и

$$\lim_{\gamma \to \infty} \left\|[H_{i*}\ -h_i]_{z,\gamma}\right\| = \left\{\frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|}\ \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*),\ 0\ \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*),\ \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|}\ \forall i \in \mathbf{L}_3(x^*)\right\}.$$

Следовательно, для $[H\ -h]^*_{z,\gamma} = \lim\limits_{\gamma \to \infty} [H\ -h]_{z,\gamma}$ имеем

$$\left\|[H\ -h]^*_{z,\gamma}\right\| = \lim_{\gamma \to \infty} \left\|[H\ -h]_{z,\gamma}\right\| = \Bigg(\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}\Bigg)^{1/2} < \left\|[H^*\ -h^*]\right\|.$$

Но исходя из последнего неравенства при достаточно большом конечном $\gamma > 0$ существует матрица $[H \ -h]_{z,\gamma}$, являющаяся допустимым решением задачи $SP_{[H\ -h]}$, такая, что $\left\|[H\ -h]_{z,\gamma}\right\| < \left\|\,[H^*\ -h^*]\,\right\|$. Это противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ -h^*]$ в задаче $SP_{[H\ -h]}$.

Оптимальность $[H^*\ -h^*]$ в задаче $SD_{[H\ -h]}$ докажем от противного. Действительно, пусть существует матрица $[H^{**}\ -h^{**}] \in \mathbf{FS}(SD_{[H\ -h]})$ такая, что $\left\|[H^{**} - h^{**}]\right\| < \left\|[H^* - h^*]\right\|$. Но $\mathbf{FS}(SD_{[H\ -h]}) \subset \mathbf{FS}(SP_{[H\ -h]})$, следовательно, существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ -h^*]$ в задаче $SP_{[H\ -h]}$.

Теорема доказана.

4. Некоторые комментарии

Важной особенностью рассмотренных в настоящей работе задач матричной коррекции является условие минимальности нормы матрицы (расширенной матрицы) коррекции *на всем множестве допустимых матриц*. Именно это условие обеспечивает достаточность коррекции системы ограничений прямой задачи ЛП (несобственной задачи 1-го рода) для разрешимости указанной задачи как при наличии структурных ограничений, так и при их отсутствии. Фактически теоремы 1 и 2 можно рассматривать как следствия теорем 3 и 4, однако следует помнить, что при отсутствии структурных ограничений, т. е. ограничений в условиях теорем 1 и 2, оптимальные матрицы коррекции имеют не предписанную, а собственную специальную структуру — являются одноранговыми.

Заметим, что существуют и другие постановки проблем матричной коррекции, в которых нет условия глобальной минимальности нормы корректирующей матрицы. К ним, например, можно отнести обратные задачи ЛП, сформулированные следующим образом: “Даны задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$, не обязательно несобственные. Необходимо минимальным образом (например, по минимуму евклидовой нормы) скорректировать A, b, c (возможно, с учетом структурных ограничений), чтобы указанные задачи имели *заданные решения* x и u”. Требование существования заданных решений у скорректированных задач ЛП, как несложно убедиться, сужает область допустимых матриц коррекции.

Как показано в работе [9], при отсутствии структурных ограничений матрицы, являющиеся решениями указанных выше обратных задач ЛП, в общем случае имеют ранг 2 и могут быть найдены с помощью следующего “инструмента” (замечание относится к матричному решению пары сопряженных систем линейных алгебраических уравнений).

Теорема 5. *Матрица $A \in \mathcal{M}^{m\times n}$, являющаяся при заданных $x, v \in \mathbb{R}^n$, $u, b \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, $u \neq 0$ решением системы*

$$\begin{cases} Ax = b, \\ u^\top A = v^\top, \end{cases} \tag{35}$$

существует тогда и только тогда, когда выполняется условие $v^\top x = u^\top b = \tau$. Решение системы (35) *с минимальной евклидовой нормой $\hat{A}$ единственно и имеет вид*

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{uv^\top}{u^\top u} - \tau \frac{ux^\top}{x^\top x\, u^\top u},$$

при этом $\left\|\hat{A}\right\|^2 = \dfrac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \dfrac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \dfrac{\tau^2}{\|x\|^2\|u\|^2}$.

Для решения задач матричной коррекции в обратных задачах ЛП со структурными ограничениями приходится использовать “векторизованный” вариант теоремы 5 [10, теорема 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
2. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Изд-во “Факториал-Пресс”, 2003. 352 с.
3. **Ватолин А.А.** Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 12. С. 1907–1908.
4. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
5. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
6. **Горелик В.А., Кондратьева В.А.** Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: Изд-во ВЦ РАН, 1999. С. 57–82.
7. **Горелик В.А.** Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 24, № 11. С. 1697–1705.
8. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
9. **Ерохин В.И.** Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 587–601.
10. **Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.** Минимальные по евклидовой норме матричные коррекции задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 11–24.
11. **Ле Ньят Зюи.** Метод декомпозиции в задачах коррекции несовместных систем линейных неравенств с матрицами блочной структуры // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 10. С. 1796–1805.
12. **Муравьева О.В.** Возмущение и коррекция систем линейных неравенств // Управление большими системами. 2010. Вып. 28. С. 40–57.
13. **Муравьева О.В.** Робастность и коррекция линейных моделей // Автоматика и телемеханика. 2011. № 3. С. 98–112.
14. **Попов Л.Д.** Комбинированные штрафы и обобщенные решения несобственных задач линейного и выпуклого программирования 1-го рода // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 217–226.
15. **Попов Л.Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 3–11.

Ерохин Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
СПбГТИ(ТУ)
e-mail: erohin_v_i@mail.ru

Поступила 15.02.2013

Красников Александр Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
СПбГТИ(ТУ)
e-mail: 9805469567@mail.ru

Хвостов Михаил Николаевич
аспирант
Борисоглебский гос. пединститут
e-mail: hvostoff@inbox.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.854

ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Г. Жадан, А. А. Орлов

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается прямо-двойственный метод Ньютона. Показывается, что при условии невырожденности решений прямой и двойственной задач и их строгой дополнительности метод обладает локальной сходимостью со сверхлинейной скоростью.

Ключевые слова: задача полуопределенного программирования, метод Ньютона, прямо-двойственный метод, локальная сходимость.

V. G. Zhadan, A. A. Orlov. Primal–dual Newton method for a linear problem of semidefinite programming.

A linear problem of semidefinite programming is considered, and the primal–dual Newton method is proposed for its solution. The superlinear local convergence of the method is established under the assumption that the primal and dual problems are nondegenerate and strictly complementary.

Keywords: semidefinite programming problem, Newton method, primal–dual method, local convergence.

Введение

Задачи линейной оптимизации являются одними из наиболее важных в математическом программировании. Большой вклад в развитие теории и методов решения таких задач внесли И. И. Еремин [1; 2] и его ученики. В настоящей работе рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Она заключается в нахождении минимума линейной целевой функции при линейных ограничениях типа равенства на конусе положительно полуопределенных симметричных матриц. Изучению таких задач в последние два десятилетия уделялось много внимания [3; 4]. Был предложен ряд численных методов для их решения, обобщающих главным образом методы внутренней точки, разработанные ранее для решения задач линейного программирования. Среди них наиболее эффективными оказались прямо-двойственные методы [5–7]. Однако имеются примеры, когда прямо-двойственные методы не обладают сходимостью [8].

В настоящей работе рассматривается один из вариантов прямо-двойственного метода, который строится на основе применения метода Ньютона для решения системы равенств, входящих в условия оптимальности. Показывается, что при выполнении условий невырожденности для обеих задач и условия строгой дополнительности решений метод обладает локальной сходимостью. Метод может рассматриваться также как обобщение на задачи полуопределенного программирования прямо-двойственного метода [9].

В разд. 1 даются постановки прямой и двойственной линейных задач полуопределенного программирования в стандартной форме, а также вводятся основные определения и обозначения. В разд. 2 приводятся достаточные условия оптимальности, имеющие симметричный вид. В качестве переменных в них используются исходные прямые переменные и слабые двойственные переменные (двойственные невязки). Явный вид ньютоновских направлений в неособых точках дается в разд. 3. Наконец, в разд. 4 описывается итерационный процесс, обосновывается его локальная сходимость. Раздел 5 посвящен результатам вычислительного эксперимента.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00786), программ государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4096.2010.1) и президиума РАН П-15.

1. Постановка задачи и обозначения

Пусть $\mathcal{S}^n$ — пространство симметричных матриц порядка n. Его размерность равна так называемому “треугольному числу” $k_\triangle(n) = n(n+1)/2$. Неравенство $M \succeq 0$ означает, что матрица M принадлежит конусу $\mathcal{S}^n_+ \subset \mathcal{S}^n$, состоящему из положительно полуопределенных матриц. Соответственно, неравенство $M \succ 0$ означает, что матрица M принадлежит конусу $\mathcal{S}^n_{++} \subset \mathcal{S}^n_+$ положительно определенных матриц.

Скалярное (внутреннее) произведение двух матриц L и M одного порядка определяется как след матрицы L^TM и обозначается как

$$L \bullet M = \mathrm{tr}\,(L^TM) = \sum\nolimits_{i,j=1}^n l_{ij}m_{ij},$$

где l_{ij} и m_{ij} — (ij)-е элементы соответственно матриц L и M. Если $L \in \mathcal{S}^n_+$ и $M \in \mathcal{S}^n_+$, то обязательно $L \bullet M \geq 0$. Более того, $L \bullet M = 0$ в том и только в том случае, когда $LM = ML = 0_{nn}$.

Рассмотрим линейную задачу полуопределенного программирования: найти

$$\min C \bullet X, \quad A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad X \succeq 0, \tag{1}$$

где матрицы C, X и A_i, $1 \leq i \leq m$, принадлежат пространству $\mathcal{S}^n$. Предполагается, что матрицы A_i, $1 \leq i \leq m$, линейно независимы. Двойственной к (1) является задача

$$\begin{gathered} \max \langle b, u\rangle, \\ \sum\nolimits_{i=1}^m u^iA_i + V = C, \quad V \succeq 0, \end{gathered} \tag{2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $V \in \mathcal{S}^n$. Угловые скобки указывают на обычное евклидово скалярное произведение в векторном пространстве $\mathbb{R}^m$.

Обозначим допустимые множества в прямой и двойственной задачах соответственно $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$. Через $\mathcal{F}_{D,V}$ обозначим проекцию множества $\mathcal{F}_D$ на конус $\mathcal{S}^n_+$:

$$\mathcal{F}_{D,V} = \left\{V \in \mathcal{S}^n_+ \colon [u, V] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } u \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

Через $V(u)$ будем обозначать зависимость $V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^iA^i$.

Пусть $\mathrm{Diag}(a^1, \ldots, a^n)$, или просто $D(a)$, — диагональная матрица с компонентами вектора $a = [a^1, \ldots, a^n]$ на диагонали. Если X_* и $[u_*, V_*]$ — оптимальные решения соответственно задач (1) и (2), то $X_* \bullet V_* = 0$. В этом случае матрицы X_* и V_* коммутируют между собой. Поэтому найдется такая ортогональная матрица Q, что

$$X_* = QD(\eta_*)Q^T, \quad V_* = QD(\theta_*)Q^T, \tag{3}$$

где $\eta_* = [\eta^1_*, \ldots, \eta^n_*]$ и $\theta_* = [\theta^1_*, \ldots, \theta^n_*]$ — собственные значения матриц X_* и V_* соответственно. Для η^i_* и θ^i_* выполняется *условие дополнительности* $\eta^i_*\theta^i_* = 0$, $1 \leq i \leq n$. *Условие строгой дополнительности* означает, что для каждого $1 \leq i \leq n$ одно из значений η^i_* или θ^i_* строго положительно. В этом случае решения X_* и V_* назовем *строго комплементарными.*

Ниже нам потребуется ряд обозначений. Единичная матрица порядка n обозначается как I_n. Символ $\otimes$ между матрицами указывает на их произведение по Кронекеру.

Если M — квадратная матрица порядка n, то символом $\mathrm{vec}\, M$ обозначается прямая сумма ее столбцов, т. е. вектор-столбец длины n^2, в котором последовательно один под другим располагаются столбцы матрицы M. Для симметричных матриц рассматривается также вектор-столбец $\mathrm{vech}\, M$. В него также помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы M, но не полностью, а только их нижние части, начинающиеся с диагонального элемента. Аналогичным образом определяется вектор-столбец $\mathrm{vecs}\, M$. От $\mathrm{vech}\, M$ он отличается только тем, что все элементы, не стоящие на диагонали матрицы M, при помещении в $\mathrm{vecs}\, M$ умножаются на два. Как вектор $\mathrm{vech}\, M$, так и вектор $\mathrm{vecs}\, M$ имеют длину, равную $k_\triangle(n)$.

Для перехода от вектора $\mathrm{vec}\, M$ к вектору $\mathrm{vech}\, M$ и для обратного перехода используются специальные *элиминационные* и *дуплицирующие* матрицы (см. [10]). Элиминационная матрица $\mathcal{L}_n$ для каждой квадратной матрицы M порядка n совершает преобразование $\mathcal{L}_n \operatorname{vec} M = \operatorname{vech} M$. Напротив, дуплицирующая матрица $\mathcal{D}_n$ для каждой симметричной матрицы M порядка n осуществляет обратное преобразование $\mathcal{D}_n \operatorname{vech} M = \operatorname{vec} M$. Матрица $\mathcal{L}_n$ имеет порядок $k_\triangle(n) \times n^2$, матрица $\mathcal{D}_n$ — порядок $n^2 \times k_\triangle(n)$. Обе матрицы $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ являются матрицами полного ранга, равного $k_\triangle(n)$. Матрица $\mathcal{L}_n$ полуортогональна, т. е. $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_n^T = I_{k_\triangle(n)}$. Кроме того, $\mathcal{L}_n \mathcal{D}_n = I_{k_\triangle(n)}$.

При работе с векторами vech M или vecs M удобно нумеровать их элементы не числами натурального ряда, а парами индексов из набора

$$J_\triangle = \{(1,1), \dots, (n,1), (2,2), \dots, (n,2), (3,3), \dots, (n,n)\},$$

содержащего $k_\triangle(n)$ пар индексов. Номера вида (i,i), в которых первый индекс совпадает со вторым, будем называть *диагональными*.

2. Условия оптимальности

Для существования решений у пары задач (1) и (2) достаточно, чтобы была разрешима следующая система равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} X \bullet V &= 0, \\ A_i \bullet X &= b^i, \quad 1 \le i \le m, \\ V &= C - \textstyle\sum_{i=1}^m u^i A_i, \\ X \succeq 0, &\quad V \succeq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ниже будем считать, что задача (4) имеет решение. Обозначим через $X * V$ симметризованное произведение матриц X и V из $\mathcal{S}^n$, т. е. матрицу $X * V = (XV + VX)/2$.

Утверждение 1. *Для симметричных матриц $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$ равенство $X * V = 0_{nn}$ возможно в том и только в том случае, когда $XV = VX = 0_{nn}$.*

Доказательство. Докажем только необходимость. Пусть $X * V = 0_{nn}$, тогда $XV = -(XV)^T$. Следовательно, матрица XV кососимметричная. У вещественной кососимметричной матрицы на диагонали расположены нулевые элементы, поэтому $X \bullet V = \operatorname{tr}(XV) = 0$. Так как $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$, то $XV = VX = 0_{nn}$.

Утверждение доказано.

С учетом утверждения 1 и положительной полуопределенности матриц X и V первое равенство в (4) может быть переписано следующим образом: $X * V = 0_{nn}$. Заменяя теперь это и остальные матричные равенства из системы (4) на векторные аналоги, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{vec}(X * V) &= 0_{nn}, \\ \mathcal{A}_{vec} \operatorname{vec} X &= b, \\ \operatorname{vec} V &= \operatorname{vec} C - \mathcal{A}_{vec}^T u, \\ X \succeq 0, &\quad V \succeq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь и ниже через $\mathcal{A}_{vec}$ обозначена матрица порядка $m \times n^2$, строками которой являются векторы $\operatorname{vec} A_i$, $1 \le i \le m$.

Опустим пока в системе (5) неравенства $X \succeq 0$, $V \succeq 0$ и основное внимание уделим равенствам. Обратимся сначала к первому равенству. В силу известной формулы $\operatorname{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\operatorname{vec} B$, справедливой для любых матриц A, B и C, для которых определено произведение ABC, получаем, что $\operatorname{vec}(X * V) = X^{\otimes} \operatorname{vec} V = V^{\otimes} \operatorname{vec} X$, где $X^{\otimes} = [X \otimes I_n + I_n \otimes X]/2$, $V^{\otimes} = [V \otimes I_n + I_n \otimes V]/2$ — кронекеровские суммы матриц X и V соответственно. Таким образом, первое равенство из (5) может быть представлено в виде

$$X^{\otimes} \operatorname{vec} V = V^{\otimes} \operatorname{vec} X = 0_{n^2}. \tag{6}$$

Преобразуем теперь третье равенство из (5). Обозначим через $\mathcal{R}_A$ подпространство в $\mathcal{S}^n$, порожденное матрицами $A_1, \ldots, A_m$, через $\mathcal{R}_A^\perp$ — его ортогональное дополнение. Пусть $l = k_\triangle(n) - m$ и $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_l$ — линейно независимые матрицы из $\mathcal{R}_A^\perp$. Они задают некоторый базис в $\mathcal{R}_A^\perp$. Составим из этих векторов матрицу $\tilde{\mathcal{A}}_{vec}$ порядка $l \times n^2$, помещая их в качестве строк. Символом $\tilde{b}$ обозначим l-мерный вектор с элементами $\tilde{b}_j = \tilde{A}_j \bullet C$, $1 \le j \le l$. Тогда после умножения третьего равенства из (5) слева на матрицу $\tilde{\mathcal{A}}_{vec}$ получим равенство $\tilde{\mathcal{A}}_{vec} V = \tilde{b}$. Объединяя его с (6) и вторым равенством из системы (5), получим:

$$\begin{aligned} X^{\otimes} \operatorname{vec} V = V^{\otimes} \operatorname{vec} X &= 0_{n^2}, \\ \mathcal{A}_{vec} \operatorname{vec} X &= b, \\ \tilde{\mathcal{A}}_{vec} \operatorname{vec} V &= \tilde{b}. \end{aligned}$$

Если дополнительно учесть симметричность всех матриц, то имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n V^{\otimes} \mathcal{D}_n \operatorname{vech} X = \mathcal{L}_n X^{\otimes} \mathcal{D}_n \operatorname{vech} V &= 0_{k_\triangle(n)}, \\ \mathcal{A}_{vecs} \operatorname{vech} X &= b, \\ \tilde{\mathcal{A}}_{vecs} \operatorname{vech} V &= \tilde{b}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{A}_{vecs}$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}$ — матрицы, строками которых являются соответственно векторы $\operatorname{vecs} A_i$, $1 \le i \le m$, и $\operatorname{vecs} \tilde{A}_j$, $1 \le j \le l$. Любые положительно полуопределенные матрицы X и V, удовлетворяющие системе (7), являются одновременно решениями линейных задач полуопределенного программирования (1) и (2).

3. Ньютоновские направления

Система (7) является системой $2k_\triangle(n)$ уравнений относительно $2k_\triangle(n)$ переменных $\operatorname{vech} X$ и $\operatorname{vech} V$. Если решать ее методом Ньютона, то ньютоновские направления $\operatorname{vech} \Delta X$ и $\operatorname{vech} \Delta V$ в паре $[X, V]$ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{\otimes} \operatorname{vech} \Delta X + \tilde{X}^{\otimes} \operatorname{vech} \Delta V &= -r_c(X, V), \\ \mathcal{A}_{vecs} \operatorname{vech} \Delta X &= -r_p(X), \\ \tilde{\mathcal{A}}_{vecs} \operatorname{vech} \Delta V &= -r_d(X). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь и далее $\tilde{X}^{\otimes} = \mathcal{L}_n X^{\otimes} \mathcal{D}_n$, $\tilde{V}^{\otimes} = \mathcal{L}_n V^{\otimes} \mathcal{D}_n$. Через $r_c(X, V)$, $r_p(X)$ и $r_d(V)$ обозначены невязки $r_c(X, V) = \operatorname{vech} X * V$, $r_p(X) = \mathcal{A}_{vecs} \operatorname{vech} X - b$, $r_d(V) = \tilde{\mathcal{A}}_{vecs} \operatorname{vech} V - \tilde{b}$, причем $r_c(X, V) = \operatorname{vech} X * V = \mathcal{L}_n \operatorname{vec} X * V = \tilde{X}^{\otimes} \operatorname{vech} V = \tilde{V}^{\otimes} \operatorname{vech} X$.

Если ввести квадратную матрицу $\mathcal{W}(X, V)$ и $k_\triangle(n)$-мерный вектор невязок $r_f(X, V)$, положив

$$\mathcal{W}(X, V) = \begin{bmatrix} \tilde{V}^{\otimes} & \tilde{X}^{\otimes} \\ \mathcal{A}_{vecs} & 0_{m\, k_\triangle(n)} \\ 0_{l\, k_\triangle(n)} & \tilde{\mathcal{A}}_{vecs} \end{bmatrix}, \quad r_f(X, V) = \begin{bmatrix} r_p(X) \\ r_d(V) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

то система (8) может быть переписана в виде

$$\mathcal{W}(X, V) \begin{bmatrix} \operatorname{vech} \Delta X \\ \operatorname{vech} \Delta V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_c(X, V) \\ r_f(X, V) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Найдем решение системы (8), предполагая, что пара $[X, V]$ является неособой, т. е. X и V — неособые матрицы. В этом случае $\tilde{X}^{\otimes}$ и $\tilde{V}^{\otimes}$, как впрочем и $\mathcal{W}(X, V)$, будут неособыми матрицами. Пусть $q \in \mathbb{R}^{k_\triangle(n)}$ и $p \in \mathbb{R}^{k_\triangle(n)}$— произвольные векторы, удовлетворяющие соответственно равенствам

$$\mathcal{A}_{vecs} q = b, \quad \tilde{\mathcal{A}}_{vecs} p = \tilde{b}. \tag{11}$$

Тогда согласно (8) $\mathcal{A}_{vecs} (\operatorname{vech} \Delta X + \operatorname{vech} X - q) = 0_m$, $\tilde{\mathcal{A}}_{vecs} (\operatorname{vech} \Delta V + \operatorname{vech} V - p) = 0_l$. Отсюда делаем вывод, что ньютоновские направления можно искать в виде

$$\operatorname{vech} \Delta X = q - \operatorname{vech} X + \tilde{\mathcal{A}}_{vech}^T \Delta w, \quad \operatorname{vech} \Delta V = p - \operatorname{vech} V + \mathcal{A}_{vech}^T \Delta u, \tag{12}$$

где $\Delta w \in \mathbb{R}^l$, $\Delta u \in \mathbb{R}^m$. Первое из равенств (8) после подстановки этих выражений переписывается как

$$\tilde{V}^{\otimes}\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\Delta w + \tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{vech}\Delta u = r_c(X,V) - \tilde{V}^{\otimes}q - \tilde{X}^{\otimes}p. \tag{13}$$

Обозначим $\tilde{X}^{-\otimes} = \left(\tilde{X}^{\otimes}\right)^{-1}$, $\tilde{V}^{-\otimes} = \left(\tilde{V}^{\otimes}\right)^{-1}$. Если умножить равенство (13) слева на матрицу $\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}$, то приходим к системе линейных уравнений для определения вектора Δu:

$$\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{vech}\Delta u = \mathcal{A}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ X - q - \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}p\big]. \tag{14}$$

Аналогично, после умножения равенства (13) слева на матрицу $\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}$ получаем другую линейную систему для определения вектора Δw:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\Delta w = \tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ V - p - \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}q\big]. \tag{15}$$

Поскольку обе матрицы $\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{vech}$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}$ неособые, то на основании (14) и (15) имеем:

$$\Delta u = \left(\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{vech}\right)^{-1}\mathcal{A}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ X - q - \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}p\big],$$
$$\Delta w = \left(\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\right)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ V - p - \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}q\big].$$

После подстановки найденных векторов Δw и Δu в (12) приходим к следующим выражениям для векторов vech ΔX и vech ΔV:

$$\mathrm{vech}\ \Delta X = q - \mathrm{vech}\ X + \tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\left(\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\right)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ V - p - \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}q\big],$$
$$\mathrm{vech}\ \Delta V = p - \mathrm{vech}\ V + \mathcal{A}^T_{vech}\left(\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{vech}\right)^{-1}\mathcal{A}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ X - q - \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}p\big].$$

Из (11) видно, что в качестве вектора p может быть взят, в частности, вектор vech C. Пусть, кроме того, $\tilde{C}$ — произвольная симметричная матрица, такая что $\mathcal{A}_{vecs}\,\mathrm{vech}\ \tilde{C} = b$. Положим для единообразия $q = \mathrm{vech}\ \tilde{C}$. Тогда

$$\mathrm{vech}\ \Delta X = \mathrm{vech}\ \tilde{C} - \mathrm{vech}\ X$$
$$+\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\left(\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\right)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ V - \mathrm{vech}\ C - \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\,\mathrm{vech}\ \tilde{C}\big],$$
$$\mathrm{vech}\ \Delta V = \mathrm{vech}\ C - \mathrm{vech}\ V$$
$$+\mathcal{A}^T_{vech}\left(\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{vech}\right)^{-1}\mathcal{A}_{vecs}\big[\,\mathrm{vech}\ X - \mathrm{vech}\ \tilde{C} - \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{vech}\ C\big].$$

В строго внутренней допустимой паре $[X,V]$, т. е. когда $X \succ 0$, $V \succ 0$ и выполняются равенства $\mathcal{A}_{vecs}\,\mathrm{vech}\ X = b$, $\tilde{A}\,\mathrm{vech}\ V = \tilde{b}$, выражения для vech ΔX и vech ΔV упрощаются:

$$\mathrm{vech}\ \Delta X = \left[I_{k_\triangle(n)} - \tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\left(\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\tilde{\mathcal{A}}^T_{vech}\right)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\right]\mathrm{vech}\ \tilde{C} - \mathrm{vech}\ X.$$
$$\mathrm{vech}\ \Delta V = \left[I_{k_\triangle(n)} - \mathcal{A}^T_{vech}\left(\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{vech}\right)^{-1}\mathcal{A}_{vecs}\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\right]\mathrm{vech}\ C - \mathrm{vech}\ V.$$

Разумеется, достаточно определить одно из двух ньютоновских направлений vech ΔX или vech ΔX, так как они связаны между собой соотношением (13). Например, если известно vech ΔV, то для vech ΔX получаем

$$\mathrm{vech}\ \Delta X = -\tilde{V}^{-\otimes}\big[\tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{vech}\ \Delta V + r_c(X,V)\big] = -\big[\,\mathrm{vech}\ X + \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{vech}\ \Delta V\big].$$

Аналогично, если известно vech ΔX, то для vech ΔV имеем

$$\mathrm{vech}\ \Delta V = -\tilde{X}^{-\otimes}\big[\tilde{V}^{\otimes}\,\mathrm{vech}\ \Delta X + r_c(X,V)\big] = -\big[\,\mathrm{vech}\ V + \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\,\mathrm{vech}\ \Delta X\big].$$

Какую из систем (14) или (15) целесообразно решать для нахождения ньютоновских направлений, зависит главным образом от размерности этих систем.

4. Итерационный процесс

Рассмотрим теперь прямо-двойственный итерационный процесс для решения пары задач (1), (2), описываемый следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k, \quad V_{k+1} = V_k + \Delta V_k, \tag{16}$$

где $X_0 \in \mathcal{S}^n$, $V_0 \in \mathcal{S}^n$, в качестве матриц ΔX_k и ΔV_k берутся ньютоновские направления из $\mathcal{S}^n$, удовлетворяющие уравнению (10).

Если X_* и $V_* = V(u_*)$ — решения соответственно задач (1) и (2), то локальная сходимость итерационного процесса (16) к этим точкам будет следовать из общих утверждений о сходимости метода Ньютона. Например, достаточно показать, что матрица $\mathcal{W}(X_*, V_*)$ из (9) является неособой. Рассмотрим сначала квадратную матрицу порядка $k_\triangle(n)$

$$\Phi(V) = \mathcal{A}_{vech}^T \mathcal{A}_{vecs} + \tilde{V}^{\otimes}. \tag{17}$$

Приведем условия, при которых она является неособой. Нам потребуется понятие невырожденной точки. Предположим, что ранг матрицы $Z \in \mathcal{S}^n_+$ равен r. Тогда она представима в виде

$$Z = Q \operatorname{Diag}\left(\lambda^1, \ldots, \lambda^r, 0, \ldots, 0\right) Q^T, \tag{18}$$

где Q — ортогональная матрица, $\lambda^i > 0$, $1 \le i \le r$. Если $r < n$, то матрица Z принадлежит границе конуса $\mathcal{S}^n_+$. Касательное пространство к $\mathcal{S}^n_+$ в этой точке имеет следующий вид (см. [11]):

$$\mathcal{T}_Z = \left\{ Q \begin{bmatrix} G & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} Q^T : G \in \mathcal{S}^r,\ H \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)} \right\}.$$

Здесь $\mathbb{R}^{r\times s}$ — пространство матриц порядка $r \times s$. Размерность $\mathcal{T}_Z$ равна $k_\triangle(n) - k_\triangle(n-r)$.

Следуя [12], дадим определение невырожденной точки X в прямой задаче (1) и невырожденной точки V в двойственной задаче (2). Пусть по-прежнему $\mathcal{R}_A^\perp$ — ортогональное дополнение линейного подпространства $\mathcal{R}_A$ в $\mathcal{S}^n$, порожденного матрицами A_i, $1 \le i \le m$. Ортогональное дополнение $\mathcal{R}_A^\perp$ совпадает с l-мерным линейным подпространством в $\mathcal{S}^n$, порожденным матрицами $\tilde{A}_j$, $1 \le j \le l$.

О п р е д е л е н и е 1. Точка $X \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной* в прямой задаче (1), если $\mathcal{T}_X + \mathcal{R}_A^\perp = \mathcal{S}^n$. Соответственно, точка $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ называется *невырожденной* в двойственной задаче (2), если $\mathcal{T}_V + \mathcal{R}_A = \mathcal{S}^n$.

Если матрица $X \in \mathcal{F}_P$ имеет ранг r, то для того, чтобы она была невырожденной точкой в прямой задаче (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $m \le k_\triangle(n) - k_\triangle(n-r)$. Аналогично, матрица $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ ранга r будет невырожденной точкой в двойственной задаче (2) в том и только в том случае, когда $k_\triangle(n-r) \le m$.

В [12] приведены условия невырожденности точки $Z \in \mathcal{S}^n_+$, как в прямой, так и в двойственной задачах. Пусть Q_1 и Q_2 — подматрицы матрицы Q в разложении (18), состоящие соответственно из первых r и последующих $n-r$ столбцов.

Лемма 1. *Точка $X \in \mathcal{F}_P$ будет невырожденной в прямой задаче* (1) *тогда и только тогда, когда матрицы*

$$\begin{bmatrix} Q_1^T A_i Q_1 & Q_1^T A_i Q_2 \\ Q_2^T A_i Q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m,$$

линейно независимы. Соответственно, точка $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ будет невырожденной в двойственной задаче (2) *тогда и только тогда, когда матрицы $Q_2^T A_i Q_2$, $1 \le i \le m$, порождают пространство $\mathcal{S}^{n-r}$.*

В дальнейшем предполагается, что по крайней мере решения задач (1) и (2) являются невырожденными точками.

Лемма 2. *В невырожденной точке $V_* \in \mathcal{F}_{D,V}$ матрица $\Phi(V_*)$ неособая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для V_* справедливо разложение $V_* = QD(\theta_*)Q^T$, где Q — ортогональная матрица, θ_* — n-мерный вектор, составленный из собственных чисел матрицы V_*. Тогда

$$V_*^{\otimes} = (Q \otimes Q) D(\theta_*^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T). \tag{19}$$

Здесь $\theta^{\otimes}$ — диагональ матрицы $D^{\otimes}(\theta) = [D(\theta) \otimes I_n + I_n \otimes D(\theta)]/2$.

Используя (19), представим матрицу $\Phi(V_*)$ в виде

$$\Phi(V_*) = \mathcal{A}^T_{vech}\mathcal{A}_{vecs} + \mathcal{L}_n(Q \otimes Q)D(\theta^{\otimes}_*)(Q^T \otimes Q^T)\mathcal{D}_n. \tag{20}$$

Но для любой квадратной матрицы M порядка n справедливы формулы (см. [10])

$$\mathcal{D}_n\mathcal{L}_n(M \otimes M)\mathcal{D}_n = (M \otimes M)\mathcal{D}_n, \quad \mathcal{D}_n\mathcal{L}_n M^{\otimes}\mathcal{D}_n = M^{\otimes}\mathcal{D}_n.$$

С помощью этих формул выражение (20) приводится к виду

$$\Phi(V_*) = \mathcal{A}^T_{vech}\mathcal{A}_{vecs} + \mathcal{H}\mathcal{L}_n D(\theta^{\otimes}_*)\mathcal{D}_n\mathcal{H}^{-1},$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{L}_n(Q \otimes Q)\mathcal{D}_n$ — квадратная матрица порядка $k_\triangle(n)$. Так как $[\mathcal{L}_n(M \otimes M)\mathcal{D}_n]^{-1} = \mathcal{L}_n(M^{-1} \otimes M^{-1})\mathcal{D}_n$ для любой неособой матрицы M (см. [10]), то $\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{L}_n(Q^T \otimes Q^T)\mathcal{D}_n$.

Пусть $\tilde{\theta}^{\otimes} = \mathcal{L}_n\theta^{\otimes}$. Легко проверить, что $\mathcal{L}_n D(\theta^{\otimes})\mathcal{D}_n = D(\tilde{\theta}^{\otimes})$. Далее, поскольку $Q \otimes Q$ — ортогональная матрица, то

$$\mathcal{A}^T_{vech} = \mathcal{L}_n(Q \times Q)(Q^T \otimes Q^T)\mathcal{A}^T_{vec} = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(Q^T \otimes Q^T)\mathcal{A}^T_{vec} = \mathcal{H}(\mathcal{A}^Q_{vech})^T,$$

$$\mathcal{A}_{vecs} = \mathcal{A}_{vec}(Q \times Q)(Q^T \otimes Q^T)\mathcal{D}_n = \mathcal{A}_{vec}(Q \times Q)\mathcal{D}_n\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{A}^Q_{vecs}\mathcal{H}^{-1}.$$

Здесь и далее через $\mathcal{A}^Q_{vech}$ и $\mathcal{A}^Q_{vecs}$ обозначены матрицы порядка $m \times k_\triangle(n)$, строками которых являются соответственно векторы $\mathrm{vech}\,(Q^T A_i Q)$ и $\mathrm{vecs}\,(Q^T A_i Q)$, $1 \le i \le m$. Таким образом, для матрицы (20) справедливо представление

$$\Phi(V_*) = \mathcal{H}\mathcal{F}(\tilde{\theta}^{\otimes}_*)\mathcal{H}^{-1}, \quad \mathcal{F}(\tilde{\theta}^{\otimes}) = (\mathcal{A}^Q_{vech})^T\mathcal{A}^Q_{vecs} + D(\tilde{\theta}^{\otimes}). \tag{21}$$

Обозначим через D_2 диагональную матрицу порядка $k_\triangle(n)$. В ней компоненты вектора, стоящего на диагонали, равны единице, если их парный номер из $J_\triangle$ является диагональным. В противном случае данная компонента равна 2. Матрица D_2 — положительно определенная. Пусть $D_2^{1/2}$ — квадратный корень из D_2. Имеем очевидное равенство $D(\tilde{\theta}^{\otimes}) = D_2^{-1/2}D(\tilde{\theta}^{\otimes})D_2^{1/2}$. Кроме того, $\mathcal{A}^Q_{vecs} = \mathcal{A}^Q_{vech}D_2$. Положим $\mathcal{A}^Q_{vec2} = \mathcal{A}^Q_{vech}D_2^{1/2}$. Тогда

$$\mathcal{F}(\tilde{\theta}^{\otimes}) = D_2^{-1/2}\mathcal{F}_1(\tilde{\theta}^{\otimes})D_2^{1/2}, \quad \mathcal{F}_1(\tilde{\theta}^{\otimes}) = (\mathcal{A}^Q_{vec2})^T\mathcal{A}^Q_{vec2} + D(\tilde{\theta}^{\otimes}). \tag{22}$$

Матрица $\mathcal{F}_1(\tilde{\theta}^{\otimes}_*)$ является симметричной положительно полуопределенной. Она будет положительно определенной, если линейная однородная система уравнений

$$\mathcal{F}_1(\tilde{\theta}^{\otimes}_*)x = 0_{k_\triangle(n)} \tag{23}$$

имеет только тривиальное решение $x = 0_{k_\triangle(n)}$. Убедимся в этом. После умножения левой и правой части равенства (23) на x^T получаем с учетом положительной полуопределенности обеих матриц $(\mathcal{A}^Q_{vec2})^T\mathcal{A}^Q_{vec2}$ и $D(\tilde{\theta}^{\otimes})$:

$$\langle x, (\mathcal{A}^Q_{vec2})^T\mathcal{A}^Q_{vec2}x\rangle = 0, \quad \langle x, D(\tilde{\theta}^{\otimes}_*)x\rangle = 0. \tag{24}$$

Если все собственные числа матрицы V_* строго положительны, то $\tilde{\theta}^{\otimes}_* > 0_{k_\triangle(n)}$, и из второго равенства (24) следует, что $x = 0_{k_\triangle(n)}$.

Далее считаем, что матрица V_* имеет ранг $r < n$, причем

$$\theta^1_* > 0, \ldots, \theta^r_* > 0, \quad \theta^{r+1}_* = \cdots = \theta^n_* = 0. \tag{25}$$

Положим $n_1 = k_\triangle(n) - k_\triangle(n-r)$, $n_2 = k_\triangle(n-r)$. Из невырожденности точки $V_* \in \mathcal{F}_{D,V}$ следует неравенство $n_2 \le m$. Для вектора $\tilde{\theta}^{\otimes}_*$ справедливо разбиение

$$\tilde{\theta}^{\otimes}_* = \begin{bmatrix} (\tilde{\theta}^{\otimes}_*)^N \\ (\tilde{\theta}^{\otimes}_*)^B \end{bmatrix}, \quad (\tilde{\theta}^{\otimes}_*)^N > 0_{n_1}, \quad (\tilde{\theta}^{\otimes}_*)^B = 0_{n_2}. \tag{26}$$

Матрицу $\mathcal{A}^Q_{vec2}$ разобьем также на две подматрицы в соответствии с разбиением (26):

$$\mathcal{A}^Q_{vec2} = [N \mid B], \quad N = (\mathcal{A}^Q_{vec2})^N \in \mathbb{R}^{m \times n_1}, \quad B = (\mathcal{A}^Q_{vec2})^B \in \mathbb{R}^{m \times n_2}.$$

Положим $\tilde{\Theta}_*^N = D\big((\tilde{\theta}_*^{\otimes})^N\big)$. Тогда

$$\mathcal{F}_1(\tilde{\theta}_*^{\otimes}) = \begin{bmatrix} N^T N + \tilde{\Theta}_*^N & N^T B \\ B^T N & B^T B \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Разобьем вектор x, являющийся решением уравнения (23), на две части $x = [x^N, x^B]$ в соответствии с разбиением вектора $\tilde{\theta}^{\otimes}$. На основании второго равенства (24) заключаем, что $x^N = 0_{n_1}$. Поэтому первое равенство (24) сводится к $\langle x^B, B^T B x^B\rangle = 0$. Отсюда следует, что $Bx^B = 0_{n_2}$. Но в невырожденных точках $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ согласно лемме 1 матрица B имеет полный ранг по столбцам, равный n_2. Таким образом, $x^B = 0$, и уравнение (23) имеет только тривиальное решение $x = 0_{k_\triangle(n)}$. Это означает невырожденность матрицы $\mathcal{F}_1(\tilde{\theta}_*^{\otimes})$ и, следовательно, всей матрицы $\Phi(V_*)$.

Лемма доказана.

Обратимся теперь к матрице

$$\Lambda(X, V) = \mathcal{A}_{vecs}\Phi^{-1}(V)\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}_{vech}^T \quad (\tilde{X}^{\otimes} = \mathcal{L}_n X^{\otimes}\mathcal{D}_n). \tag{28}$$

Лемма 3. *Пусть X_* и $V_* = V(u_*)$ — невырожденные строго комплементарные решения соответственно задач* (1) *и* (2). *Тогда матрица $\Lambda_* = \Lambda(X_*, V_*)$ неособая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как X_* и V_* — решения задач (1) и (2), то их можно представить в виде (3). Тогда, как уже отмечалось, справедливы следующие разложения:

$$X_*^{\otimes} = (Q\otimes Q)D(\eta_*^{\otimes})(Q^T\otimes Q^T), \quad V_*^{\otimes} = (Q\otimes Q)D(\theta_*^{\otimes})(Q^T\otimes Q^T),$$

где $\eta_*^{\otimes}$ и $\theta_*^{\otimes}$ — диагонали матриц $D^{\otimes}(\eta_*)$ и $D^{\otimes}(\theta_*)$ соответственно.

Предположим, что матрица V_* имеет ранг r, причем для ее собственных значений в разложении (3) имеет место (25). Из предположения о строгой комплементарности X_* и V_* следует, что для соответствующих собственных значений $\eta_*^1, \ldots, \eta_*^n$ матрицы X_* $\eta_*^1 = \ldots = \eta_*^r = 0$, $\eta_*^{r+1} > 0, \ldots, \eta_*^n > 0$.

Воспользуемся числами n_1 и n_2, определенными ранее. Пусть дополнительно $n_3 = k_\triangle(r)$. В этом случае у вектора $\tilde{\theta}_*^{\otimes}$ первые n_1 компоненты положительные, а остальные — нулевые. Напротив, у вектора $\tilde{\eta}_*^{\otimes} = \mathcal{L}_n\eta_*^{\otimes}\mathcal{D}_n$ заведомо положительными являются только последние n_2 компоненты, а среди первых n_1 найдутся нулевые компоненты в количестве n_3 штук.

Приведем матрицу Λ_* к более удобному для анализа виду. Прежде всего, аналогично тому, как это делалось для матрицы $\tilde{V}_*^{\otimes}$ при доказательстве леммы 2, получаем

$$\tilde{X}_*^{\otimes} = \mathcal{L}_n(Q\otimes Q)D(\eta_*^{\otimes})(Q^T\otimes Q^T)\mathcal{D}_n = \mathcal{H}\mathcal{L}_n D(\eta_*^{\otimes})\mathcal{D}_n\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}D(\tilde{\eta}_*^{\otimes})\mathcal{H}^{-1}.$$

Отсюда и из (21), (22) следует $\Lambda_* = \mathcal{A}_{vec2}^Q\mathcal{F}_1^{-1}(\tilde{\theta}_*^{\otimes})D(\tilde{\eta}_*^{\otimes})(\mathcal{A}_{vec2}^Q)^T$. Из-за невырожденности точки V_* правая нижняя подматрица B^TB матрицы (27) неособая. Обозначим через $\mathcal{K}$ неособую матрицу $\mathcal{K} = N^TN + \tilde{\Theta}_*^N - N^TB(B^TB)^{-1}B^TN$. Тогда с помощью формулы Фробениуса имеем

$$\mathcal{F}_1^{-1}(\tilde{\theta}_*) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11}^{-1} & \mathcal{F}_{12}^{-1} \\ \mathcal{F}_{21}^{-1} & \mathcal{F}_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где

$$\mathcal{F}_{11}^{-1} = \mathcal{K}^{-1}, \quad \mathcal{F}_{21}^{-1} = (\mathcal{F}_{12}^{-1})^T = -\big(B^TB\big)^{-1}B^TN\mathcal{K}^{-1},$$
$$\mathcal{F}_{22}^{-1} = \big(B^TB\big)^{-1} + \big(B^TB\big)^{-1}B^TN\mathcal{K}^{-1}N^TB\big(B^TB\big)^{-1}.$$

После подстановки выражения (29) для матрицы $\mathcal{F}_1^{-1}(\tilde{\theta}_*^{\otimes})$ и проведения соответствующих умножений имеем

$$\Lambda_* = N\mathcal{F}_{11}^{-1}D^N(\tilde{\eta}_*^{\otimes})N^T + B\mathcal{F}_{21}^{-1}D^N(\tilde{\eta}_*^{\otimes})N^T + N\mathcal{F}_{12}^{-1}D^B(\tilde{\eta}_*^{\otimes})B^T + B\mathcal{F}_{22}^{-1}D^B(\tilde{\eta}_*^{\otimes})B^T, \tag{30}$$

где через $D^N(\tilde{\eta}_*^{\otimes})$ и $D^B(\tilde{\eta}_*^{\otimes})$ обозначены левая верхняя и правая нижняя диагональные подматрицы матрицы $D(\tilde{\eta}_*^{\otimes})$ порядков соответственно n_1 и n_2.

Пусть $\mathcal{L}_B$ — пространство столбцов матрицы B, $\mathcal{L}_B^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Тогда матрицу $\mathcal{K}$ можно записать как $\mathcal{K} = \tilde{\Theta}_*^N + N^T\left[I_m - \mathcal{P}\right]N = \tilde{\Theta}_*^N + N^T\mathcal{P}_\perp N$, где $\mathcal{P} =$

$B\left(B^TB\right)^{-1}B^T$ и $\mathcal{P}_\perp = I_m - \mathcal{P}$ — матрицы ортогонального проектирования на подпространства $\mathcal{L}_B$ и $\mathcal{L}_B^\perp$ соответственно. Матрица $\mathcal{P}_\perp$ является симметрической и идемпотентной, т.е. $\mathcal{P}_\perp = \mathcal{P}_\perp^2$. Поэтому $\mathcal{K} = \tilde{\Theta}_*^N + N^T\mathcal{P}_\perp^2 N$. Так как $\tilde{\Theta}_*^N$ — положительно определенная матрица, то согласно формуле Шермана — Моррисона — Вудберри имеем

$$\mathcal{K}^{-1} = \tilde{\Theta}_*^{-N} - \tilde{\Theta}_*^{-N}N^T\mathcal{P}_\perp\big(I + \mathcal{P}_\perp N\tilde{\Theta}_*^{-N}N^T\mathcal{P}_\perp\big)^{-1}\mathcal{P}_\perp N\tilde{\Theta}_*^{-N}, \quad \tilde{\Theta}_*^{-N} = \left(\tilde{\Theta}_*^N\right)^{-1}. \tag{31}$$

Перегруппируем слагаемые в представлении (30) матрицы Λ_* с учетом конкретного вида всех подматриц из $\mathcal{F}_1^{-1}(\tilde{\theta}_*^\otimes)$:

$$\Lambda_* = \mathcal{P}_\perp N\mathcal{K}^{-1}D^N(\tilde{\eta}_*^\otimes)N^T + \left(I - \mathcal{P}_\perp N\mathcal{K}^{-1}N^T\right)B(B^TB)^{-1}D^B(\tilde{\eta}_*^\otimes)B^T.$$

Определим собственные значения матрицы Λ_*. Пусть λ — произвольное собственное значение и y — соответствующий ему собственный вектор матрицы Λ_*. Тогда

$$\Lambda_* y = \lambda y. \tag{32}$$

Предположим сначала, что $B^Ty \neq 0_{n_2}$, и, значит, $\mathcal{P}y \neq 0_m$, $y \notin \mathcal{L}_B^\perp$. Тогда, умножая равенство (32) слева на B^T, приходим к соотношению

$$D^B(\tilde{\eta}_*^\otimes)B^Ty = \lambda B^Ty. \tag{33}$$

Отсюда видно, что в случае, когда $\mathcal{P}y \neq 0_n$, для того, чтобы быть собственным, вектор y должен быть ортогональным ко всем столбцам матрицы B, кроме одного. Тогда из (33) следует, что λ совпадает с соответствующим диагональным элементом матрицы $D^B(\tilde{\eta}_*^\otimes)$, который, как уже отмечалось, положительный. Вектор y может иметь ненулевые проекции и на большее число столбцов матрицы B, только в этом случае всем им должны соответствовать одинаковые диагональные элементы $D^B(\tilde{\eta}_*^\otimes)$. Итак, мы имеем собственные векторы в количестве n_2 штук, не принадлежащие подпространству $\mathcal{L}_B^\perp$, всем им отвечают положительные собственные значения.

Рассмотрим теперь случай, когда $B^Ty = 0_{n_2}$, т.е. $\mathcal{P}y = 0_m$, $y \in \mathcal{L}_B^\perp$. Тогда равенство (32) сводится к $\mathcal{P}_\perp N\mathcal{K}^{-1}D^N(\tilde{\eta}_*^\otimes)N^Ty = \lambda y$. Подставляя выражение (31) для матрицы $\mathcal{K}^{-1}$, получаем $\Omega y = \lambda y$, $\Omega = (I+\mathcal{Y})^{-1}\mathcal{P}_\perp N\mathcal{G}_N N^T\mathcal{P}_\perp$. Здесь $\mathcal{Y} = \mathcal{P}_\perp N\tilde{\Theta}_*^{-N}N^T\mathcal{P}_\perp$, $\mathcal{G}_N = \tilde{\Theta}_*^{-N}D^N(\tilde{\eta}_*^\otimes)$, а также учтено, что $y = \mathcal{P}_\perp y$. Таким образом, y является собственным вектором матрицы Ω, соответствующим тому же самому собственному значению λ.

Так как $I + \mathcal{Y}$ — симметричная положительно определенная матрица, то

$$\Omega = (I+\mathcal{Y})^{-1/2}\,\Omega_1\,(I+\mathcal{Y})^{1/2},$$

где $\Omega_1 = (I+\mathcal{Y})^{-1/2}\,\mathcal{P}_\perp N\mathcal{G}_N N^T\mathcal{P}_\perp\,(I+\mathcal{Y})^{-1/2}$. Отсюда следует, что матрица Ω подобна матрице Ω_1, которая является симметричной и положительно полуопределенной. Следовательно, все собственные значения матрицы Ω действительные и неотрицательные, причем число положительных собственных чисел совпадает с рангом матрицы $\Omega_2 = \mathcal{P}_\perp N\mathcal{G}_N N^T\mathcal{P}_\perp$.

У диагональной матрицы $D^N(\tilde{\theta}_*^\otimes)$ все диагональные элементы положительные, а диагональная матрица $D^N(\tilde{\eta}_*^\otimes)$ имеет $k_\triangle(r)$ нулевых диагональных элементов. Это элементы из $J_\triangle$ стоят на следующих парных номерах:

$$(1,1),(2,1),\ldots,(r,1),(2,2),\ldots,(r,2),\ldots,(r,r). \tag{34}$$

Остальные диагональные элементы в количестве $n_1 - k_\triangle(r)$ штук строго положительны. Таким образом, у диагональной матрицы $\mathcal{G}_N$ все диагональные элементы положительны, за исключением тех, которые расположены на парных номерах из (34). Эти диагональные элементы нулевые.

Так как, по предположению, точка X_* невырожденная, то имеет место неравенство $m \leq k_\triangle(n) - k_\triangle(r)$. Кроме того, согласно необходимым и достаточным условиям невырожденности в прямой задаче, ранг матрицы $\mathcal{A}_{vec2}^Q$, из которой удалены столбцы с парными номерами из (34), равен m, т.е. число столбцов в такой усеченной матрице не меньше чем m, и они в совокупности порождают пространство $\mathbb{R}^m$.

Пусть N_1 — подматрица матрицы N, которая получается, если из N удалить столбцы с парными номерами из (34). Согласно вышесказанному столбцы матрицы N_1 совместно со столбцами матрицы B порождают $\mathbb{R}^m$. Поэтому среди столбцов матрицы N_1 найдутся $m-n_2$ линейно независимых столбцов, таких что их проекции на подпространство $\mathcal{L}_B^{\perp}$ порождают все это подпространство.

Пусть, кроме того, $\mathcal{G}_{N_1}$ — диагональная матрица порядка $n_1 - k_{\triangle}(r)$, которая получается из матрицы $\mathcal{G}_N$ путем удаления строк и столбцов с парными номерами (34). Матрица Ω_2 есть матрица Грама для системы векторов, являющихся столбцами матрицы $\mathcal{G}_{N_1}^{1/2} N_1^T \mathcal{P}_{\perp}$. Ранг такой матрицы равен $m-n_2$, поэтому и ранг матрицы Ω_2 равен $m-n_2$. В силу вышесказанного заключаем, что у матрицы Ω имеется $m-n_2$ положительных собственных значений. Всем им соответствуют собственные векторы из подпространства $\mathcal{L}_B^{\perp}$, размерность которого также равна $m-n_2$.

Таким образом, все собственные значения матрицы Λ_* положительны. Поэтому Λ_* — неособая матрица.

Лемма доказана.

Проанализируем матрицу $\mathcal{W}(X,V)$ в точке $[X_*, V_*]$, являющейся решением прямой и двойственной задач. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть для прямой и двойственной задач* (1), (2) *решения* X_* *и* $V_* = V(u_*)$ *невырожденные и строго комплементарные. Тогда матрица* $\mathcal{W}(X_*, V_*)$ *неособая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему линейных уравнений $\mathcal{W}(X_*, V_*)z = 0_{2k_{\triangle}(n)}$ и покажем, что она имеет только тривиальное решение $z = 0_{2k_{\triangle}(n)}$. Запишем данную систему в развернутом виде:

$$\tilde{V}_*^{\otimes} z_1 + \tilde{X}_*^{\otimes} z_2 = 0, \quad \mathcal{A}_{vecs} z_1 = 0, \quad \tilde{\mathcal{A}}_{vecs} z_2 = 0, \tag{35}$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{k_{\triangle}(n)}$. Из третьего уравнения следует, что вектор z_2 принадлежит нуль-пространству матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_{vecs}$, поэтому $z_2 = \mathcal{A}_{vech}^T \mu,\ \mu \in \mathbb{R}^m$. Следовательно, (35) сводится к системе

$$\tilde{V}_*^{\otimes} z_1 + \tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{vech}^T \mu = 0, \quad \mathcal{A}_{vecs} z_1 = 0. \tag{36}$$

Умножая второе уравнение на $\mathcal{A}_{vech}^T$ и складывая с первым, получим $\Phi(V_*)z_1 = -\tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{vech}^T \mu$, где матрица $\Phi(V)$ имеет вид (17).

В силу утверждения леммы 2 матрица $\Phi(V_*)$ неособая, поэтому $z_1 = -\Phi^{-1}(V_*)\tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{vech}^T \mu$. Подставляя данную зависимость во второе уравнение из (36), приходим к системе уравнений относительно переменной μ

$$\mathcal{A}_{vecs} \Phi^{-1}(V_*) \tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{vech}^T \mu = 0. \tag{37}$$

Матрица данной системы является матрицей $\Lambda(X_*, V_*)$ вида (28). При сделанных предположениях согласно лемме 3 она неособая. Следовательно, система уравнений (37) имеет единственное решение $\mu = 0$. Единственное решение $z = 0$ имеет и исходная система (35). Таким образом, $\mathcal{W}(X_*, V_*)$ — неособая матрица.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из невырожденности матрицы $\mathcal{W}(X_*, V_*)$ и непрерывности $\mathcal{W}(X,V)$ следует, что найдется окрестность точки $[X_*, V_*]$ такая, что для всех $[X,V]$ из этой окрестности матрица $\mathcal{W}(X,V)$ будет неособой. Следовательно, решение системы (8) существует и единственно.

Теорема 1. *Пусть для прямой и двойственной задач* (1), (2) *решения* X_* *и* V_*, *где* $V_* = V(u_*)$, *невырожденные и строго комплементарные. Тогда итерационный процесс* (16) *локально сходится к* $[X_*, V_*]$ *со сверхлинейной скоростью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из общих утверждений о сходимости метода Ньютона [13] и леммы 4.

5. Итерационный процесс в пространстве точек (X, u)

Наряду с итерационным процессом (16) можно рассмотреть его вариант в пространстве точек X и u. Учтем явный вид зависимости $V(u) = C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i$. Тогда достаточные условия упрощаются, и система (7) сводится к двум равенствам:

$$\begin{gathered} \mathrm{vech}(X * V(u)) = 0_{k_\triangle(n)}, \\ \mathcal{A}_{vecs}\mathrm{vech}X = b. \end{gathered} \tag{38}$$

Кроме того, если существуют точки $X_* \in \mathcal{S}^n$ и $u_* \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющие (38) такие, что матрицы X_* и $V_* = V(u_*)$ будут положительно полуопределенными, то X_* и $[u_*, V_*]$ — решения соответственно задач (1) и (2). Введем вектор-функцию

$$F_2(\mathrm{vech}\ X, u) = \begin{pmatrix} \mathrm{vech}(X * V(u)) \\ \mathcal{A}_{vecs}\mathrm{vech}X - b \end{pmatrix}$$

и рассмотрим систему

$$F_2(\mathrm{vech}\ X, u) = 0, \tag{39}$$

содержащую $k_\triangle(n) + m$ уравнений и $k_\triangle(n) + m$ неизвестных. Как и раньше будем решать систему (39) методом Ньютона:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{vech}\ X_{k+1} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{vech}\ X_k \\ u_k \end{bmatrix} - \mathcal{W}_2^{-1}(X_k, u_k) \cdot F_2(\mathrm{vech}\ X_k, u_k), \tag{40}$$

где $\mathcal{W}_2(X, u)$ — матрица Якоби вектор-функции $F_2(\mathrm{vech}\ X, u)$.

Найдем явный вид матрицы $W_2(X, u)$. Согласно ее определению,

$$W_2(X, u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\,\mathrm{vech}\,(X * V(u))}{\partial(\mathrm{vech}\ X)^T} & \dfrac{\partial\,\mathrm{vech}\,(X * V(u))}{\partial u^T} \\ \mathcal{A}_{vecs} & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\frac{\partial\,\mathrm{vech}\,(X * V(u))}{\partial(\mathrm{vech}\ X)^T} = \mathcal{L}_n \frac{\partial\,\mathrm{vec}\,(X * V(u))}{\partial(\mathrm{vec}\ X)^T}\mathcal{D}_n = \mathcal{L}_n V^{\otimes}(u)\mathcal{D}_n.$$

Далее,

$$\frac{\partial\,\mathrm{vech}\,(X * V(u))}{\partial u^T} = \frac{\partial\,\mathrm{vech}\,(X * V)}{\partial(\mathrm{vech}\ V)^T}\frac{\partial\,\mathrm{vech}\ V(u)}{\partial u^T} = -\mathcal{L}_n X^{\otimes}\mathcal{D}_n\mathcal{A}_{vech}^T,$$

поэтому,

$$W_2(X, u) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_n V^{\otimes}(u)\mathcal{D}_n & -\mathcal{L}_n X^{\otimes}\mathcal{D}_n\mathcal{A}_{vech}^T \\ \mathcal{A}_{vecs} & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения леммы* 4. *Тогда матрица* $\mathcal{W}_2(X_*, V_*)$ *неособая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 4.

Теорема 2. *Пусть для прямой и двойственной задач* (1), (2) *решения* X_* *и* V_*, *где* $V_* = V(u_*)$, *невырожденные и строго комплементарные. Тогда итерационный процесс* (40) *локально сходится к* (X_*, u_*) *со сверхлинейной скоростью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из общих утверждений о сходимости метода Ньютона (см. [13]) и леммы 5.

Помимо итерационных ньютоновских процессов (16) и (40), можно также рассмотреть итерационный процесс в пространстве переменных X, u и V.

6. Вычислительный эксперимент

Численные эксперименты проводились с использованием среды MATLAB на задачах малой и средней размерности. Для получения тестов входные данные генерировались “обратным ходом” по следующим правилам:

1) задавались параметры n, m, r, удовлетворяющие необходимому условию невырожденности точек X_* и V_*;

2) случайным образом генерировались положительные числа $\eta_*^1, \ldots, \eta_*^r$, $\theta_*^{r+1}, \ldots, \theta_*^n$ и ортогональная матрица Q, задающие решения X_* и V_* в задачах (1) и (2);

3) генерировались набор случайных симметричных матриц $A_1, \ldots, A_m$ и случайный вектор $u_* = [u_*^1, \ldots, u_*^m]$;

4) по X_*, V_* и u_* вычислялись вектор b и матрица C.

Начальные точки X_0, u_0 и V_0 генерировались случайным образом в окрестности решений, причем делалось это таким образом, чтобы получить “равномерное” отклонение от решения по норме всех переменных X, u и V.

В приведенной таблице представлены параметры построенных тестовых задач и количество итераций, потребовавшихся для решения. Результаты, полученные предложенным в данной работе методом (метод 2), сравнивалась с результатами работы прямо-двойственного метода Ньютона, в котором итерации проводились в пространстве переменных X и u (метод 3), а также с результатами работы двойственного метода Ньютона из [14] (метод 1). Все результаты являются усредненными по начальным точкам. Условием остановки являлось неравенство $X_k \bullet V_k < 10^{-5}$.

Параметры задачи							Число итераций		
n	m	r	$\frac{\|\|u_0-u_*\|\|}{\|\|u_*\|\|}$	$\frac{\|\|X_0-X_*\|\|}{\|\|X_*\|\|}$	$\frac{\|\|V_0-V_*\|\|}{\|\|V_*\|\|}$	$X_0 \bullet V_0$	метод 1	метод 2	метод 3
2	1	1	0.15	0.080	0.063	-1.903	1	1	1
5	7	3	0.15	0.145	0.082	2.961	3	3	2
10	25	5	0.15	0.106	0.109	-2.981	2	4	3
15	60	8	0.15	0.091	0.124	1.728	11	9	7
20	95	10	0.15	0.095	0.132	-4.146	23	13	12
25	165	13	0.15	0.103	0.062	-3.544	28	18	20
30	215	15	0.1	0.076	0.049	2.612	46	31	30
35	315	18	0.15	0.145	0.124	1.408	49	39	41
40	415	20	0.07	0.040	0.025	3.272	46	51	49
45	515	23	0.15	0.104	0.127	0.553	90	58	55
50	615	25	0.07	0.050	0.069	-3.796	92	88	80

Как видно из приведенной таблицы, прямо-двойственные методы в среднем показывают более лучшие результаты, чем двойственный метод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург” , 1999. 312 с.
2. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. Handbook of semidefinite programming / eds. H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 656 p.
4. **Klerk E. de.** Aspects of semidefinite programming. Interior point algorithms and selected applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004. 300 p.
5. **Alizadeh F., Haeberly J.-P.F., Overton M.L.** Primal-dual interior point methods for semidefinite programming. Convergence rates, stability and numerical results // SIAM J. Optim. 1998. Vol. 8, no. 3. P. 746–768.

6. **Nesterov Y.E., Todd M.J.** Primal-dual interior point methods for self-scaled cones // SIAM J. Optim. 1998. Vol. 8, no. 2. P. 324–364.
7. **Monteiro R.D.C.** Primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming // SIAM J. Optim. 1997. Vol. 7, no. 3. P. 663–678.
8. **Muramatsu M., Vanderbei R.J.** Primal-dual affine scaling algorithms fails for semidefinite programming // Math. Oper. Res. 1999. Vol. 24, no. 1. P. 149–175.
9. **Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г., Черенков А.П.** Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 6. С. 850–866.
10. **Magnus J.R., Neudecker H.** The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Alg. Disc. Methods. 1980. Vol. 1, no. 4. P. 422–449.
11. **Арнольд В.И.** О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2 (158). С. 101–114.
12. **Alizadeh F., Haeberly J.-P.F., Overton M.L.** Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Math. Programming. Ser. B. 1997. Vol. 77, no. 2. P. 111–128.
13. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.
14. **Жадан В.Г., Орлов А.А.** О сходимости двойственного метода Ньютона для линейной задачи полуопределенного программирования // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2011. Т. 4, № 2. С. 75–90. (Математика.)

Жадан Виталий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
ВЦ РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила 01.02.2013

Орлов Александр Алексеевич
Московский физико-технический институт (ГУ)
e-mail: sashaorlov@gmail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.938

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ, МАЛЫХ В СРЕДНЕМ[1]

Л. А. Калякин

Рассмотрена проблема устойчивости недиссипативной системы относительно постоянно действующего случайного возмущения. Указаны условия сильной устойчивости по вероятности в терминах математического ожидания от среднего (по времени) значения модуля возмущения.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, случайное возмущение, равновесие, устойчивость.

L. A. Kalyakin. Stability of nondissipative systems under random perturbations that are small in the mean.

The problem of stability under a permanent random perturbation is considered for a nondissipative system. Conditions for strong stability in probability are given in terms of the mathematical expectation of the (time) mean absolute value of the perturbation.

Keywords: nonlinear equations, random perturbation, equilibrium, stability.

1. Постановка задачи

При анализе устойчивости явления авторезонанса [1] относительно постоянно действующих случайных возмущений возникает задача для так называемой недиссипативной системы. Оказывается, что для таких систем известные результаты об устойчивости [2] не применимы. В задачах авторезонанса недиссипативность проявляется в наличии в невозмущенной системе решений разного типа — ограниченных и неограниченных на бесконечности. Простейший пример такого рода дает задача о возмущении уравнения $\dot{x} = x(x-1)/\sqrt{1+x^2}$, решения которого помимо асимптотически устойчивого равновесия $x(t) \equiv 0$ содержат траектории, уходящие на бесконечность. Для этого уравнения результаты [2] не гарантируют устойчивость равновесия относительно случайных возмущений. Более того, для похожего уравнения легко строятся примеры возмущений, относительно которых устойчивости нет. Проблема состоит в отыскании подходящих классов возмущений.

В данной работе рассматривается общая система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \tag{1.1}$$

с условием равновесия в нуле: $\mathbf{f}(0, t) \equiv 0$. Возмущенная система имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mu\, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega), \quad t > 0, \quad |\mu| \ll 1, \quad \omega \in \Omega. \tag{1.2}$$

Возмущение $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$ представляет собой случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbf{P})$. Случай “белого шума” не рассматривается, и уравнение понимается в обычном смысле [2, с. 26]. Класс допустимых возмущений ограничен требованием существования глобального решения с начальными данными из окрестности равновесия. Достаточные условия для этого обычно накладываются на структуру нелинейности по $\mathbf{x}$; они хорошо известны [2, с. 20] и здесь не обсуждаются. Выделение параметра возмущения

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00186, 11-02-97003).

$\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \ll 1$ оказывается удобным приемом при анализе задачи с постоянно действующим возмущением (см. [3]).

Для возмущенного уравнения (1.2) точка $\mathbf{x} = 0$ не обязана быть равновесием. Вопрос состоит в том, при каких $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$ возмущенные траектории остаются в малой окрестности нуля, если параметр μ мал.

2. Специфика случайных возмущений

Как известно, при детерминированных возмущениях устойчивость зависит от локальных свойств системы в окрестности равновесия. В частности, асимптотическая устойчивость по Ляпунову (устойчивость относительно начальных возмущений) обеспечивает устойчивость относительно постоянно действующих детерминированных возмущений [4, с. 72]. Так, траектории уравнения $\dot{x} + x(1 - x) = g(t)$ остаются в малой окрестности нуля: $\sup_t |x(t)| < \varepsilon$ при всех достаточно малых возмущениях $\sup_t |g(t)| < \nu(\varepsilon)$.

Иная ситуация складывается при случайных возмущениях $g(t, \omega)$, малость которых описывается статистическими характеристиками, например математическим ожиданием $\mathbf{M}[|g(t, \omega)|]$. Проблемы возникают из-за того, что малость среднего значения $\sup_t \mathbf{M}[|g(t, \omega)|] < \nu$ вовсе не гарантирует малость возмущения $\sup_t |g(t, \omega)| < \nu$ равномерно по всем реализациям ω, а поэтому не гарантируется и устойчивость в обычном смысле. Понятно, что устойчивость теперь надо определять в вероятностных терминах, например с использованием математического ожидания (т.е. среднего) на траекториях. Данный подход реализован в [2] в задаче о возмущении так называемых диссипативных систем [5]. Простейший пример такого рода дается уравнением $\dot{x}+x = g(t, \omega)$. Здесь для модуля решения $x(t, \omega)$, стартующего из окрестности нуля, среднее значение остается малым, если мало среднее от модуля возмущения $g(t, \omega)$. Однако для уравнения $\dot{x}+x(1-x) = g(t, \omega)$ подобного соответствия между возмущением и решением нет. Здесь для математического ожидания на траекториях $\mathbf{M}[|x(t, \omega)|]$ малость не гарантируется, так что устойчивости нет даже в слабом смысле (по вероятности). Причины, которые ведут к неустойчивости, связаны с глобальными свойствами невозмущенной системы, а именно с наличием траекторий, уходящих на бесконечность.

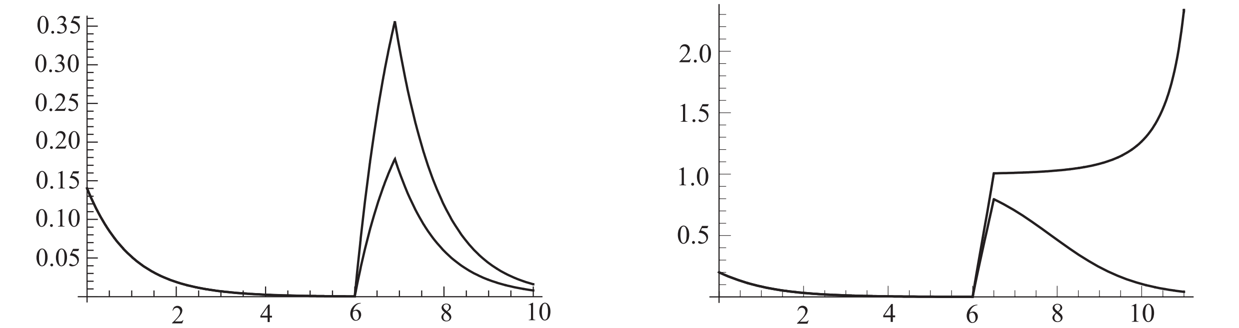
3. Специфика недиссипативной системы

Обычно задача об устойчивости решается при условии равномерной по t малости математического ожидания $\mathbf{M}[\mu \sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)|]$; см. [2, с. 50]. При этом основным ограничением на исходные данные является требование диссипативности невозмущенной системы, которое можно отождествить с существованием глобальной функции Ляпунова $U(\mathbf{x}, t)$, т. е. во всем пространстве $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ [2, с. 24, 25]. С одной стороны, такое условие оказывается весьма жестким. Оно не выполняется, например, при наличии в невозмущенной системе траекторий, уходящих на бесконечность. С другой стороны, легко строятся примеры (см. [2, с. 47]), в которых отсутствие диссипативности ведет к неустойчивости с вероятностью единица. Подобный пример для задачи с постоянно действующим возмущением приведен ниже.

П р и м е р 1. Введем функцию типа ступеньки с компактным носителем, определенную на оси $t \in \mathbb{R}$:

$$G(t) = \begin{cases} G_0, & 0 < t \le T, \\ 0, & t \le 0, \quad t > T, \end{cases} \qquad G_0, T = \mathrm{const} > 0.$$

На вероятностном пространстве $\omega \in \Omega = \mathbb{R}$ с мерой $\mathbf{P}(d\omega) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\omega^2/2)\, d\omega$ рассматривается семейство случайных функций с узким по ω носителем $g_\mu(t; \omega) =^{def} G(t - \omega/\mu)$, $0 < \mu \ll 1$. Величина μ играет роль параметра возмущения и считается малой. Очевидно,



Траектории диссипативной (слева) и недиссипативной (справа) системы при постоянно действующем возмущении.

математическое ожидание такой функции мало при малом μ:

$$\mathbf{M}[|g_\mu(t;\omega)|] = \frac{G_0}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(t-T)\mu}^{t\mu} \exp(-\omega^2/2)\, d\omega < \frac{G_0 T}{\sqrt{2\pi}}\mu.$$

В качестве примера диссипативной системы рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -x + g_\mu(t;\omega).$$

Решение с нулевым начальным условием $x(0) = 0$ экспоненциально стремится к положению равновесия $x = 0$ невозмущенного уравнения $\dot{x} = -x$ с вероятностью единица (см. рисунок):

$$x_\mu(t,\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le \omega/\mu, \\ G_0(1 - e^{-t+\omega/\mu}), & \omega/\mu < t \le \omega/\mu + T, \\ G_0(e^T - 1)e^{-t+\omega/\mu}, & t > \omega/\mu + T. \end{cases}$$

Заметим, что у возмущенного решения на каждой реализации имеется область всплеска вблизи момента $t = \omega/\mu$. Высота всплеска определяется величиной $G_0 = \mathrm{const}$, которая не мала и не зависит от параметра возмущения μ. Таким образом, в обычном смысле равновесие неустойчиво относительно такого типа возмущений. Однако математическое ожидание от решения будет мало при малом μ равномерно по t:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[|x_\mu(t;\omega)|] =& \frac{G_0}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\mu t} \exp(-\omega^2/2)|x_\mu(t;\omega)|\, d\omega \\ &< \frac{G_0 T}{\sqrt{2\pi}}\mu + \frac{G_0(e^T-1)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\mu(t-T)} \exp(-\omega^2/2)e^{-t+\omega/\mu}\, d\omega \\ < \frac{G_0 T}{\sqrt{2\pi}}\mu + \frac{G_0(e^T-1)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\mu t} \exp(-t+\omega/\mu)\, d\omega &< \frac{G_0 T}{\sqrt{2\pi}}\mu + \frac{G_0(e^T-1)}{\sqrt{2\pi}}\mu \int\limits_0^{t} \exp(-\zeta)\, d\zeta < \frac{G_0 e^T}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mu. \end{aligned}$$

Это означает, что на каждом сечении $t = \mathrm{const}$ математическое ожидание для возмущенной траектории оказывается малым. Смысл такого свойства состоит в том, что при каждом t более вероятно попадание на решение либо до всплеска, либо после всплеска. Такая устойчивость называется слабой по вероятности.

Иная ситуация возникает при возмущении недиссипативной системы

$$\frac{dx}{dt} = -x + x^2 + g_\mu(t;\omega).$$

Невозмущенное уравнение $\dot{x} = x(x-1)$ имеет два положения равновесия, одно из которых $x = 1$ является неустойчивым. Любая траектория, стартующая в момент t_0 из точки $x_0 > 1$, уходит на бесконечность за конечное время: $\hat{t} = \displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta-1)\zeta}$. Поведение возмущенной траектории, стартующей вблизи равновесия, зависит от параметров возмущения G_0, T. Например, траектория с начальной точкой $x(0) = 0$ остается нулевой $x(t) = 0$ на начальном этапе $t \le \omega/\mu$. На этапе действия возмущения $\omega/\mu < t < \omega/\mu + T$ производная будет положительна: $\dot{x} > G_0 - 1/4 > 0$ при условии $G_0 > 1/4$. Если промежуток возмущения достаточно большой: $(G_0 - 1/4)T > 1$, то к окончанию действия возмущения в момент $t_0 = \omega/\mu + T$ траектория оказывается за границей устойчивости $x(t_0) > 1$ и в дальнейшем уходит на бесконечность (см. рисунок). Тем самым если $(G_0 - 1/4)T > 1$, то решение возмущенного уравнения с начальным условием $x(0) = 0$ при любом $\mu > 0$ не остается в окрестности невозмущенного устойчивого равновесия $x = 0$ с вероятностью единица[2]. Следовательно, равновесие $x = 0$ оказывается неустойчивым по вероятности относительно постоянно действующего возмущения $g_\mu(t;\omega)$, малость которого характеризуется математическим ожиданием.

4. Определения устойчивости

Из приведенного примера следует, что в недиссипативных системах для сохранения устойчивости надо сужать класс возмущений.

Проблема: *Относительно каких случайных возмущений сохраняется устойчивость в недиссипативной системе?*

В данной работе предлагается довольно банальный подход, суть которого состоит в том, что в возмущении контролируется малость для математического ожидания от среднего по t. При таких возмущениях остается мало траекторий, которые могут выйти из окрестности асимптотического равновесия. При этом устойчивость оказывается более сильной, чем в [2].

Напомним понятие слабой устойчивости по вероятности, которое обычно используется в задачах с постоянно действующими возмущениями [2, с. 43, 49, 327].

О п р е д е л е н и е 1. Решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ для системы (1.1) устойчиво (слабо) по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений равномерно на множестве $\mathcal{G}$, если

$$\forall\, \varepsilon, \nu > 0 \ \exists\, \delta,\ \Delta\colon \forall\, |\mathbf{x}_0| < \delta,\ \ |\mu| < \Delta,\ \ \forall\, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega) \in \mathcal{G}$$

решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g(t, \omega)$ системы (1.2) с начальным условием $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0$ обладает свойством

$$\sup_{t>0} \mathbf{P}(|\mathbf{x}_g(t,\omega)| > \varepsilon) < \nu.$$

Приведенное определение, как отмечалось в [6, с. 46], имеет существенный недостатк: свойство слабой устойчивости никак не связано с поведением отдельных реализаций процесса. Почти все траектории слабо устойчивой системы могут выходить из окрестности равновесия в различные моменты времени при том, что на каждом сечении $t = \mathrm{const}$ бóльшая часть траекторий оказывается вблизи равновесия.

Однако в этом подходе обнаруживается одно преимущество. Слабая устойчивость имеет место относительно весьма широкого класса возмущений — случайных процессов, которые малы в среднем на сечениях $\mathbf{M}[\mu\,|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)|] < \nu$; см. [2, с. 50] и которые на каждой реализации могут допускать большие выбросы в разные моменты времени. Расплатой за столь общие результаты оказывается требование диссипативности невозмущенной системы.

[2]Не надо думать, что неустойчивость возникает из-за конечного времени ухода на бесконечность для траектории невозмущенной системы. Это время может быть и бесконечным, как, например, в похожем уравнении $\dot{x} = x(x-1)(1+x^2)^{-1}$.

При исследования устойчивости недиссипативных систем неизбежно сужение класса возмущений. Наиболее радикальным является требование равномерной по времени малости возмущений для бóльшей части реализаций. Нетрудно понять, что это приводит к устойчивости в более сильном смысле. Приведенное ниже определение соответствует сильной устойчивости по вероятности и близко к определениям, данным в [2, с. 206; 6, с. 47; 7, с. 400].

О п р е д е л е н и е 2. Решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ для системы (1.1) устойчиво (сильно) по вероятности относительно постоянно действующих случайных возмущений равномерно на множестве $\mathcal{G}$, если

$$\forall\,\varepsilon, \nu > 0\ \exists\,\delta,\ \Delta\colon \forall\,|\mathbf{x}_0| < \delta,\ |\mu| < \Delta,\ \forall\,\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega) \in \mathcal{G}$$

решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g(t, \omega)$ системы (1.2) с начальным условием $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0$ обладает свойством

$$\mathbf{P}(\sup_{t>0} |\mathbf{x}_g(t, \omega)| > \varepsilon) < \nu.$$

Преимущество такого подхода состоит в том, что теперь контролируется поведение по времени отдельных реализаций процесса $\mathbf{x}(t, \omega)$. Расплатой за это является необходимость глобального (по времени) контроля величины возмущения.

5. Основной результат

Ограничения на исходные данные. Для невозмущенной системы предполагается, что в окрестности равновесия существует (локальная) функция Ляпунова $U(\mathbf{x}, t)$, у которой производная в силу (1.1) определенно-отрицательная:

$$m_-|\mathbf{x}|^2 < U(\mathbf{x}, t) < m_+|\mathbf{x}|^2, \quad \Big|\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}\Big| < m|\mathbf{x}|, \quad \frac{dU}{dt}\Big|_{(1.1)} < -\gamma U(\mathbf{x}, t). \tag{5.1}$$

Здесь все неравенства выполняются равномерно в области $|\mathbf{x}| < r,\ t > 0$ при некоторых положительных константах $0 < m_\pm, m, \gamma, r < \infty$.

Рассматриваемый нами класс возмущений (случайных функций) выделяется наличием у каждой из них мажоранты: $|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)| \le \eta(t, \omega),\ \ \forall\,|\mathbf{x}| \le r,\ t \ge 0$, которая ограничена в среднем по t, так что

$$\exists\, C(\omega), T = \text{const} > 0\colon \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \eta(\zeta, \omega)\, d\zeta \le C(\omega) \quad \forall\, t \ge 0, \quad \omega \in \Omega. \tag{5.2}$$

Функции $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$, мажоранты $\eta(t, \omega)$ в условии (5.2) могут быть разными, но $C(\omega)$ и T от них не зависят и определяют класс допустимых возмущений. Случайную величину $C(\omega)$ из оценки (5.2) можно считать отделенной от нуля $C(\omega) \ge 1$ без ограничения общности. Ограничить сверху эту величину в общем случае невозможно[3]; вместо этого накладывается условие ограниченности математического ожидания:

$$\mathbf{M}[C(\omega)] < \infty. \tag{5.3}$$

Требования (5.2),(5.3) содержат основное отличие от известных работ об устойчивости в системах со случайными возмущениями. Детерминированные возмущения подобного типа рассматривались в [3; 4]. Требование ограниченности в среднем по t было приспособлено для случайных возмущений при анализе устойчивости в диссипативной системе [2, с. 52]. Однако для недиссипативной системы подобные результаты отсутствуют. Недавние результаты в этом

[3]Если $C(\omega) \le \text{const} < \infty$, $\forall\,\omega \in \Omega$, то специфика случайных возмущений исчезает, поскольку применима теорема Гермаидзе — Красовского [8].

направлении [9] содержат ограничения, которые касаются стабилизации возмущения со временем и поэтому представляются излишне жесткими по сравнению с условием малого среднего.

Теорема. *Если выполнены условия* (5.1)–(5.3), *то при* $\forall R \in (0,\infty)$ *равновесие* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ *системы* (1.1) *сильно устойчиво по вероятности равномерно относительно случайных возмущений в форме* (1.2) *с функциями* $\mathbf{g}(\mathbf{x},t,\omega)$, *при которых существует глобальное решение задачи Коши и* $\mathbf{M}[C(\omega)] \le R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть доказательства соответствует рассуждениям, приведенным в [4; 8]; идея восходит к Н.Г.Четаеву [10]. Пусть $R>0$, а также $\varepsilon,\nu>0$ — произвольные положительные числа. Для системы (1.2) строится функция Ляпунова в виде

$$V_\eta(\mathbf{x},t,\omega) = U(\mathbf{x},t)\exp(\beta_\eta(t,\omega)), \quad |\mathbf{x}| \le r, \quad t>0.$$

Показатель $\beta_\eta(t,\omega)$ выбирается из следующих требований: а) неположительность производной функции Ляпунова в силу (1.2) и б) положительная определенность этой функции. Эти требования должны выполняться в кольце $\delta < |\mathbf{x}| < \varepsilon$ равномерно по t.

Предлагаемая здесь конструкция V_η зависит от мажоранты $\eta(t,\omega)$. Однако радиусы кольца $\delta,\varepsilon>0$ не зависят ни от мажоранты, ни от случайной величины $C(\omega)$. В конечном счете лишь граница параметра возмущения $|\mu| < \Delta$ зависит от границы математического ожидания R и внутренний радиус δ зависит от величины T, характеризующей класс возмущений.

В первой части доказательства параметр ω считается фиксированным. Производная, вычисленная в силу (1.2):

$$\frac{dV_\eta}{dt}\Big|_{(1.2)} = \left[\frac{dU}{dt}\Big|_{(1.1)} + \mu\,\mathbf{g}\,\partial_{\mathbf{x}}U\right]\exp(\beta_\eta) + V_\eta\,\partial_t\beta_\eta(t,\omega),$$

с учетом (5.1) имеет оценку

$$\frac{dV_\eta}{dt}\Big|_{(1.2)} \le \Big[-\gamma + \frac{|\mu|}{|\mathbf{x}|}\frac{m}{m_-}\eta(t,\omega)\Big]V_\eta + \partial_t\beta_\eta(t,\omega)V_\eta.$$

Если параметр возмущения достаточно мал $|\mu| < \Delta_\omega(\delta) =^{def} \gamma\delta m_-/mC(\omega)$, то в кольцевой области $\delta<|\mathbf{x}|<\varepsilon$ оценка приводится к виду:

$$\frac{dV_\eta}{dt}\Big|_{(1.2)} \le \frac{\gamma}{C(\omega)}\big[-C(\omega)+\eta(t,\omega)\big]V_\eta + \partial_t\beta_\eta(t,\omega)V_\eta.$$

Далее надо выбрать функцию $\beta_\eta(t,\omega)$ так, чтобы выражение справа было неположительным.

Также, как в работе [4, с. 123], вводится вспомогательная функция $\psi(t,\omega)$. На каждом интервале $kT<t<(k+1)T$, $(k=0,1,\dots)$ эта функция определяется интегральным соотношением

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T} \psi(\zeta,\omega)\,d\zeta = \int\limits_{kT}^{(k+1)T} \big[C(\omega)-\eta(\zeta,\omega)\big]\,d\zeta, \quad k = 0.1,\dots$$

Поскольку интеграл в правой части положителен, то возможен выбор (неоднозначный) неотрицательной функции $\psi(t,\omega) \ge 0$ при $T<t<(k+1)T$. Без ограничения общности можно считать, что функция $\psi(t,\omega)$ выбирается непрерывной, с нулевыми значениями на краях $t=kT$. Перебирая значения $k=0,1,2,\dots$, строим непрерывную функцию $\psi(t,\omega)$ на полуоси $t\ge 0$.

После этого определяется функция $\beta_\eta(t,\omega)$ по формуле

$$\beta_\eta(t,\omega) = \frac{\gamma}{C(\omega)}\int\limits_0^t \big[C(\omega)-\eta(\zeta,\omega)-\psi(\zeta,\omega)\big]\,d\zeta.$$

При таком выборе производная функции Ляпунова оказывается неположительной в кольце:

$$\frac{dV_\eta}{dt}\Big|_{(1.2)} \le -\psi(t,\omega)\frac{\gamma}{C(\omega)}V_\eta \le 0, \quad \delta<|\mathbf{x}|<\varepsilon, \quad t>0.$$

Для доказательства положительной определенности $V_\eta(\mathbf{x},t,\omega)$ требуется оценка множителя $\exp(\beta_\eta(t,\omega))$. По построению функция $\beta_\eta(t,\omega)$ обращается в нуль в точках $t=kT$. Поэтому при любом другом значении t она представляется через интеграл по интервалу длины не больше T:

$$\beta_\eta(t,\omega) = \frac{\gamma}{C(\omega)}\int\limits_{kT}^{t}\big[C(\omega)-\eta(\zeta,\omega)-\psi(\zeta,\omega)\big]\,d\zeta, \quad kT<t<(k+1)T.$$

Отсюда с учетом неотрицательности $\eta,\psi\ge 0$ вытекает оценка сверху $\beta_\eta(t,\omega)\le\gamma T$, а также оценка снизу

$$\beta_\eta(t,\omega) \ge \frac{\gamma}{C(\omega)}\left(\int\limits_{kT}^{t}\big[C(\omega)-\eta(\zeta,\omega)\big]\,d\zeta - \int\limits_{kT}^{(k+1)T}\big[C(\omega)-\eta(\zeta,\omega)\big]\,d\zeta\right) \ge -\gamma T.$$

Такие свойства обеспечивают в силу (5.1) две оценки:

$$m_-\exp(-\gamma T)\,|\mathbf{x}|^2 < V_\eta(\mathbf{x},t,\omega) < m_+\exp(\gamma T)\,|\mathbf{x}|^2 \quad \forall\,|\mathbf{x}|<r,\ t>0.$$

Отсюда при любом $\varepsilon>0$ получается неравенство

$$\sup_{|\mathbf{x}|\le\delta,\ t>0} V_\eta(\mathbf{x},t,\omega) < \inf_{|\mathbf{x}|=\varepsilon,\ t>0} V_\eta(\mathbf{x},t,\omega) =^{def} V_{\eta,\varepsilon}(\omega), \tag{5.4}$$

если подходящим образом выбрать границу $\delta=\delta(\varepsilon)$ внутреннего шара

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon\exp(-\gamma T)\sqrt{m_-/m_+} < \varepsilon.$$

При таком выборе параметров $\delta(\varepsilon),\Delta_\omega(\delta)$ и при возмущении $\mathbf{g}(\mathbf{x},t,\omega)$ из класса функций с ограниченными величинами $C(\omega)$ функция $V_\eta(\mathbf{x},t,\omega)$ обладает свойством (5.4), а ее производная $dV_\eta/dt|_{(1.2)}$ неположительна в кольце $\delta<|\mathbf{x}|<\varepsilon$ при $|\mu|<\Delta_\omega(\delta)$. Отсюда следует, что функция $V_\eta(\mathbf{x},t,\omega)$ на траектории, стартующей из внутреннего шара $|\mathbf{x_0}|<\delta$, не достигает минимального значения $V_{\eta,\varepsilon}(\omega)$ на внешней границе $|\mathbf{x}|=\varepsilon$. Следовательно, возмущенная траектория $\mathbf{x}=\mathbf{x}_g(t,\omega)$ системы (1.2) остается внутри внешней сферы: $|\mathbf{x}|<\varepsilon$ при всех временах $t>0$.

Для возмущений $\mathbf{g}(\mathbf{x},t,\omega)$ с величинами $C(\omega)<C_0$, которые ограничены равномерно по $\omega\in\Omega$, верхнюю границу параметра возмущения можно отделить от нуля: $0<|\mu|<\Delta_0(\varepsilon)=\gamma\delta(\varepsilon)m_-/m_1C_0<\Delta_\omega(\delta)$. В такой ситуации все траектории с малыми начальными данными и малым возмущением $0<|\mu|<\Delta_0(\varepsilon)$ оказываются в шаре $|\mathbf{x}|<\varepsilon$, и доказательство устойчивости на этом заканчивается. Случайный характер возмущений при этом никак не проявляется.

В общей ситуации ограниченность случайной величины $C(\omega)$ не гарантируется, а поэтому не гарантируется отделимость от нуля верхней границы параметра возмущения $\Delta_\omega(\delta)$. Однако, используя конечность математического ожидания в условии (5.3), можно оценить множество неподходящих ω. Меру этого множества можно сделать сколь угодно малой за счет уменьшения верхней границы параметра возмущения.

При формальном доказательстве используется условие на ω в виде: $C(\omega)\le R/\nu$. Тогда получается оценку снизу:

$$\Delta_\omega(\delta) > \gamma\varepsilon\nu\exp(-\gamma T)\sqrt{m_-/m_+}m_-/mR =^{def} \Delta(\varepsilon,\nu/R).$$

Таким образом, для возмущений $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \omega)$, у которых мажоранты удовлетворяют неравенствам $C(\omega) \le R/\nu$, траектории $\mathbf{x}_g(t, \omega)$ с начальными точками $|\mathbf{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ при $|\mu| < \Delta(\varepsilon, \nu/R)$ не выходят из шара $|\mathbf{x}| < \varepsilon$.

Все оставшиеся возмущения со свойствами мажорант: $C(\omega) > R_1/\nu$ составляют множество $\widehat{\mathcal{G}}$. Поскольку $C(\omega)) > 0$, то для этой случайной величины при условиях (5.3) легко выводится неравенство Чебышева (аналогично [2, с. 32]):

$$\mathbf{P}\big(C(\omega) > R/\nu\big) < \frac{\mathbf{M}[C(\omega)]}{R/\nu} < \nu.$$

Траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g(t, \omega)$, для которых выбираются малыми начальное значение $|\mathbf{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ и параметр возмущения $|\mu| < \Delta(\varepsilon, \nu)$, но которые тем не менее не остаются в шаре $|\mathbf{x}| < \varepsilon$, обязаны быть решениями системы (1.2) с возмущениями из множества $\widehat{\mathcal{G}}$. Поэтому для таких траекторий вероятность будет мала: $\mathbf{P}(\sup_{t>0} |\mathbf{x}_g(t, \omega)| > \varepsilon) < \nu$. Поскольку числа $\varepsilon, \nu > 0$ — произвольные, то теорема доказана.

Следствие. *Из теоремы с учетом известных результатов* [4], *в частности, вытекает, что независимо от свойств диссипативности системы асимптотически устойчивое по Ляпунову равновесие* $\mathbf{x} = 0$ *будет устойчивым относительно постоянно действующих возмущений* $\mathbf{g}_\mu(\mathbf{x}, t, \omega)$, *у которых мало математическое ожидание от мажоранты*

$$\mathbf{M}\Big[\sup_{|\mathbf{x}|<r,\ t>0} |\mathbf{g}_\mu(\mathbf{x}, t, \omega)|\Big] < \mathcal{O}(\mu), \quad \mu \to 0.$$

Может показаться, что это утверждение противоречит примеру 1, в котором для недиссипативной системы обнаруживается неустойчивость относительно возмущений с малым математическим ожиданием:

$$\sup_{t>0} \mathbf{M}[|g_\mu(t, \omega)|] < \mathcal{O}(\mu), \quad \mu \to 0.$$

Однако легко понять, что из последнего соотношения вовсе не следует предыдущая оценка. Более того, такого же типа отличия составляют разницу в понятиях слабой и сильной устойчивости.

6. Пример устойчивости в недиссипативной системе

Пример 2. Слегка изменим пример 1. Рассмотрим возмущение

$$g_\mu(t; \omega) = \begin{cases} G(\omega)/\mu, & \omega/\mu < t \le \omega/\mu + \mu^2, \\ 0, & t \le \omega/\mu, \quad t > \omega/\mu + \mu^2, \end{cases}$$

которое допускает большие всплески $G(\omega)/\mu$ на коротких промежутках $\mu^2 \ll 1$. Здесь случайная величина $G(\omega)$ считается непрерывной по $\omega \in \mathbb{R}$ с конечным математическим ожиданием $\mathbf{M}[|G(\omega)|] < \infty$.

Если функция $|G(\omega)| \exp(-\omega^2/2)$ ограничена равномерно по ω, то математическое ожидание такого возмущения мало при малом μ равномерно по t:

$$\sup_{t>0} \mathbf{M}[|g_\mu(t; \omega)|] = \sup_{t>0} \frac{1}{|\mu|\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(t-\mu^2)\mu}^{t\mu} |G(\omega)| \exp(-\omega^2/2)\, d\omega$$
$$< \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \sup_{t\mu - \mu^3 < \omega < t\mu} |G(\omega)| \exp(-\omega^2/2) = \mathcal{O}(\mu), \text{ при } \mu \to 0.$$

Поэтому согласно [2] любая диссипативная система слабо устойчива по вероятности относительно такого возмущения.

На самом деле, имеет место сильная устойчивость по вероятности без требования ограниченности $|G(\omega)|\exp(-\omega^2/2)$, и не только для диссипативных систем. В частности, в задаче о возмущении недиссипативной системы

$$\frac{dx}{dt} = -x + x^2 + g_\mu(t;\omega)$$

нетрудно проверить условия доказанной выше теоремы. Для невозмущенного уравнения в качестве функции Ляпунова в окрестности равновесия $x = 0$ можно взять $U(x) = x^2$. Поскольку возмущение $g_\mu(t;\omega)$ финитно по t и интеграл

$$\mu^{-1}\int\limits_0^\infty |g_\mu(t;\omega)|\,dt = |G(\omega)|$$

ограничен равномерно по μ, то основное условие (5.3) выполнено с $C(\omega) = |G(\omega)|$. Следовательно, для нелинейного уравнения $\dot{x} = -x + x^2$ равновесие $x = 0$ остается сильно устойчивым по вероятности относительно указанных выше случайных возмущений $g_\mu(t;\omega)$ с конечным математическим ожиданием $\mathbf{M}[|G(\omega)|] < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 5. С. 3–72.
2. **Хасьминский Р.З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 366 с.
3. **Хапаев М.М.** Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая шк., 1988. 184 с.
4. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. **Yoshizawa T.** Liapunov's functions and boundedness of solutions // Funkcialaj Ekvacioj. 1958. Vol. 2. P. 71–103.
6. **Кац И.Я.** Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: Изд-во УрГАПС, 1998. 222 с.
7. **Schuss Z.** Theory and applications of stochastic processes. An analytical approach. New York: Springer, 2010. 468 p. (Appl. Math. Sciences; vol. 170.)
8. **Гермаидзе В.Е., Красовский Н.Н.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 769–774.
9. **Калякин Л.А.** Устойчивость недиссипативных систем относительно постоянно действующих случайных возмущений // Мат. заметки. 2012. Т. 92, вып. 7. С. 145–148.
10. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1956. 176 с.

Поступила 10.08.2012

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: klenru@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.213

МОДЕРНИЗАЦИЯ СТРАТЕГИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ ОПЦИОННОЙ ПОЗИЦИИ

А. И. Кибзун, В. Р. Соболь

В настоящей работе исследуются вопросы страхования (хеджирования) опционных позиций со стороны продавца американского колл-опциона. Предлагается модификация стратегии последовательного хеджирования, заключающаяся во введении полосы "нечувствительности" хеджирования. Производится расчет средних потерь хеджера, использующего данный способ хеджирования. Выбирается оптимальная ширина полосы "нечувствительности", минимизирующая средние потери хеджера.

Ключевые слова: хеджирование опциона, стратегия последовательного хеджирования, винеровский процесс, распределение числа пересечений полосы, оптимальная полоса хеджирования.

A. I. Kibzun, V. R. Sobol'. Modernization of the stop-loss start-gain strategy for hedging an option position.

Issues of hedging option positions by an American call-option seller are considered. The stop-loss start-gain strategy is modified by introducing a hedging "insensitivity" band. Average losses of a hedger using this method of hedging are calculated. An optimal width of the "insensitivity" band for minimizing the hedger's average losses is chosen.

Keywords: option hedging, stop-loss start-gain strategy, Wiener process, distribution of the number of crossings of a strip, optimal hedging band.

Введение

Рынок срочных контрактов в России является одной из важнейших и наиболее динамично развивающихся отраслей экономики. Срочный рынок привлекает все больше инвесторов возможностью совершать спекулятивные операции с доходностью выше, чем на рынке акций, а также хеджировать (страховать) риски при инвестировании в акции. Достаточно сказать, что по информации Futures Industry Association (FIA) объем торгов на российском рынке фьючерсов и опционов FORTS в 2011 г. превысил 1 млрд контрактов, что на 73,5% больше, чем в 2010 г.

Определим основные понятия рынка срочных контрактов. Простейшим и исторически первым срочным контрактом является форвард (или его стандартизированный вариант — фьючерс). В контракте оговаривается срок исполнения, т. е. время совершения сделки, и цена исполнения, т. е. цена, по которой будет осуществляться продажа актива. При заключении такого контракта и отсутствии устойчивой тенденции роста или снижения цены актива оба участника сделки рискуют одинаково: покупатель рискует купить актив по цене выше рыночной, а продавец — продать по цене ниже рыночной.

Один из участников сделки может переложить часть риска на другого, предложив ему денежную компенсацию. Если это устраивает обоих участников сделки, они могут заключить не форвардный, а опционный контракт. Опцион предусматривает обязательное исполнение сделки только для одной из сторон (продавца опциона). Если опцион предусматривает продажу товара, то он называется пут-опционом, если покупку — колл-опционом. Если опцион может быть исполнен только в определенный момент времени, он называется европейским, если его можно исполнить до определенного момента — американским.

Продавец колл-опциона может частично застраховаться от риска, связанного с превышением ценой актива цены поставки, затратив на это часть премии (стоимости опциона). Для этого он формирует инвестиционный портфель, состоящий из данного опциона, других опционов, фьючерсов, облигаций, акций и пр. В простейшем случае портфель состоит из базового актива, оговоренного в контракте. Этим портфелем продавец может управлять так, чтобы доходность портфеля хотя бы частично компенсировала риск опционной позиции. Такая стратегия управления называется *хеджированием*, а лицо, управляющее портфелем, — хеджером.

Несмотря на то что история рынка срочных контрактов насчитывает более 400 лет, теория страхования срочных позиций начала развиваться лишь во второй половине XX в. Фундаментальный результат этой теории был получен в 1973 г. Ф. Блэком и М. Шоулсом [1]. Они вывели формулу для оценки премии европейского колл-опциона для диффузионной модели котировки базового актива при "идеальных" условиях функционирования рынка ценных бумаг. Доходность такого портфеля приравнивалась к доходности безрискового актива. Отправным пунктом модели Блэка — Шоулса является то, что премия опциона может быть воспроизведена непрерывной перебалансировкой портфеля и базового актива. На управление таким портфелем хеджер затрачивает в среднем всю премию за опцион. Дальнейшее развитие работа получила в трудах Дж. Кокса, Р. Росса, М. Рубинштейна [2] и др. В нашей стране вопросами хеджирования опционных позиций занимались А. Н. Ширяев, Ю. М. Кабанов и др. [3].

Однако существует более простое правило управления портфелем, действующее в рамках предположений модели Блэка — Шоулса. Для простоты сделаем предположение, что первоначальная стоимость базового актива меньше цены исполнения, т. е. что опцион с проигрышем. В соответствии с этим правилом продавец производит полное покрытие опционной позиции при переходе состояния опциона от проигрыша к выигрышу, т. е. при превышении ценой акции цены поставки, при обратном переходе хеджер полностью продает все акции в хеджирующем портфеле. Для покупки акций хеджером используются заимствованные фонды. Эта стратегия была исследована в работах Сейденверга [4], где она получила название "стратегия остановки потерь и начала выигрышей" (SLSG). Исследованием этой стратегии также занимались Дж. Кокс и М. Рубинштейн [5]. В отечественной литературе эта стратегия известна под названием "последовательное хеджирование" [6; 7].

В случае непрерывной модели цены акции базового актива может показаться, что рассматриваемая стратегия оказывается самофинансируемой. Однако П. Карр [8] показал, что эта стратегия не является самофинансируемой, и вывел с помощью этой стратегии новую формулу для расчета стоимости европейского колл-опциона, эквивалентную формуле Блэка — Шоулса.

В работе В. А. Губерниева и А. И. Кибзуна [9] был произведен расчет средних затрат при стратегии последовательного хеджирования для случая дискретной модели цены базового актива на конечном временном промежутке. Было показано, что при использовании такой стратегии продавец опциона в среднем может выиграть на разности средних затрат и премии за опцион.

При использовании стратегии последовательного хеджирования продавец опциона производит перебалансировку портфеля каждый раз, когда рыночная цена базового актива равна цене поставки. Недостатком стратегии последовательного хеджирования являются неоправданно высокие потери хеджера при частых колебаниях курса относительно цены поставки, если при покупке актива взимается комиссия. Во избежание этого недостатка в данной статье предлагается некоторая модификация стратегии последовательного хеджирования. Она заключается во введении понятия полосы "нечувствительности" при хеджировании. Покупка и продажа актива будут осуществляться не при превышении ценой базового актива цены поставки, а при пересечении траекторией курса актива некоторой полосы, включающей в себя цену поставки. В данной статье исследуются свойства этой стратегии и выбирается оптимальная ширина полосы "нечувствительности" при хеджировании, для которой средние потери хеджера минимальны.

1. Постановка задачи

Пусть цена поставки базового актива равна K. Определим модифицированную стратегию последовательного хеджирования следующим образом. Будет производиться полное покрытие опционной позиции, когда рыночная цена базового актива превышает уровень $K(1+d)$, где d — некоторое значение, соответствующее ширине полосы “нечувствительности” при хеджировании. Продажа актива будет осуществляться при падении цены актива ниже уровня K, т. е. цены поставки; это должно уберечь хеджера от потерь при дальнейшем возможном падении цены актива. Введем полосу “нечувствительности” при хеджировании:

$$H \triangleq \{(y,t)\colon y \in [K, K(1+d)],\ t \in [0,T]\}, \tag{1}$$

где T — срок, в течение которого опцион может быть исполнен.

Рассматривается только односторонняя полоса, расположенная выше уровня цены поставки K. В те моменты времени, когда цена актива ниже цены поставки, опцион не может быть исполнен, так как это приводит к потерям со стороны подписчика опциона, а значит, опционная позиция должна оставаться открытой, чтобы избежать потерь, связанных с возможным дальнейшим падением курса актива.

Для дальнейших расчетов потерь хеджера примем модель ценообразования, при которой все приращения цены актива за малое время Δt являются независимыми в совокупности случайными величинами, имеющими нормальное распределение с ненулевым математическим ожиданием и некоторой конечной (весьма малой по сравнению с величиной курса) дисперсией, пропорциональной Δt. Указанным условиям удовлетворяет случайный процесс, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$\mathrm{d}S(t) = -\beta \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

с начальным условием $S(0) = S_0$, где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, S_0 — стартовая цена актива, не превышающая K (опцион с проигрышем), β — коэффициент линейного сноса, σ — волатильность. Решением уравнения (2) является случайный процесс

$$S(t) = S_0 - \beta t + \sigma W(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Эта модель является обобщением модели, предложенной Л. Бешалье [10] в 1900 г. Отличие заключается в наличии детерминированной составляющей в изменении цены актива. Свойства процесса $S(t)$ будут рассмотрены ниже.

Пусть η_T^+ — число пересечений полосы (1) “снизу вверх”, а η_T^- — “сверху вниз” траекториями процесса (3) за время T. Под пересечением будем понимать прохождение полосы насквозь траекторией процесса $S(t)$. Введем в рассмотрение случайную величину τ, являющуюся моментом первого достижения траекторией процесса $S(t)$ уровня K:

$$\tau \triangleq \min\{t\colon S(t) = K\}.$$

Далее, пусть τ_1 — момент первого достижения уровня $K(1+d)$ траекторией процесса $S(t)$, если оно произошло, т. е.

$$\tau_1 \triangleq \min\{t\colon S(t) = K(1+d),\ \tau \le t \le T\}.$$

Если пересечения не произошло или указанный временной интервал пуст, то полагаем $\tau_1 = T+1$. Пара (τ, τ_1) задает координаты первого пересечения “снизу вверх” полосы H траекторией процесса $S(t)$. В общем случае момент i-го пересечения полосы H будет определяться величиной

$$\tau_i = \begin{cases} \min\{t\colon S(t) = K(1+d),\ t \le T\}, & \text{если}\ \ i = 1, \\ \min\{t\colon S(t) = K(1+d),\ \tau_{i-1} < t \le T\}, & \text{если}\ \ i = 2m+1, \\ \min\{t\colon S(t) = K,\ \tau_{i-1} < t \le T\}, & \text{если}\ \ i = 2m, \\ T+1, & \text{если пересечения нет,} \end{cases}$$

где $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, пересечения "снизу вверх" будут иметь нечетный порядковый номер, а "сверху вниз" — четный.

Для любого натурального m пара (τ_{2m-1}, τ_{2m}) задает координаты m-го пересечения полосы H "сверху вниз". Таким образом, будем считать, что произошло не менее m пересечений "сверху вниз", когда величина τ_{2m} не превосходит T:

$$\eta_T^- \geq m, \quad \text{если } \tau_{2m} \leq T. \tag{4}$$

Величины η_T^+ и η_T^- случайны и зависимы. Каждому пересечению "сверху вниз" должно предшествовать пересечение "снизу вверх". Для каждой реализации η_T^- величина η_T^+ может принимать значения, равные η_T^- и $\eta_T^- + 1$. Затраты хеджера при одном пересечении "снизу вверх" обозначим через ρ^+, а при пересечении "сверху вниз" — через ρ^-. Тогда

$$\rho^+ = K(1+d)(1+\theta), \quad \rho^- = K,$$

где θ — комиссия при покупке актива.

Устанавливая ненулевую ширину полосы "нечувствительности", хеджер принимает на себя риск, связанный с исполнением опциона в момент времени, когда опционная позиция не закрыта, т. е. цена актива находится внутри полосы H. Подписчик может исполнить опцион как при движении курса базового актива вверх, т. е. при пересечении полосы H "снизу вверх", так и при падении рыночной стоимости базового актива, т. е. при пересечении "сверху вниз".

Будем считать, что исполнение опциона подписчиком при каждом пересечении полосы может произойти с одной и той же вероятностью $p^*(d)$. Естественно предположить, что вероятность исполнения опциона при открытой позиции будет возрастать с ростом величины d, т. е. с ростом максимальной потенциальной выручки подписчика. Заметим, что при нулевой ширине полосы (что соответствует использованию простой стратегии последовательного хеджирования) исполнение опциона при открытой позиции невозможно, т. е. вероятность досрочного исполнения должна быть равна нулю. Описанным выше условиям удовлетворяет вероятность, определяемая следующим выражением:

$$p^*(d) = 1 - e^{-\lambda K d}, \quad \lambda > 0. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что

$$p^*(0) = 0, \quad \lim_{d\to\infty} p^*(d) = 1.$$

Выбор экспоненты обусловлен тем, что она обеспечивает достаточно быстрый рост вероятности исполнения опциона с ростом потенциальной выручки подписчика. Случай, когда $d \to \infty$, соответствует отсутствию хеджирования вообще.

Параметр λ в рассматриваемой модели может быть определен из экономических соображений. Так, исходя из рыночных ожиданий, текущей обстановки и условий опционного контракта, хеджер может определить цену актива, при которой опцион будет исполнен с высокой вероятностью $(1-\alpha)$, где $\alpha \ll 1$. На основании этого можно определить максимальное "разумное" значение ширины полосы "нечувствительности" хеджирования $d_{\max}$. Тогда значение параметра λ может быть найдено как решение уравнения $1 - e^{-\lambda K d_{\max}} = 1 - \alpha$, т. е.

$$\lambda = -\frac{\ln \alpha}{K d_{\max}}. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение независимые случайные величины ν_i, имеющие распределение Бернулли с вероятностью "успеха" $p^*(d)$:

$$\mathcal{P}\{\nu_i = 1\} = p^*(d) \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots.$$

Для каждого значения i величина ν_i характеризует исполнение опциона подписчиком при i-м пересечении полосы.

Пусть i-е пересечение полосы H происходит в направлении “снизу вверх”, т. е. опционная позиция открыта. Тогда, если опцион исполняется в течение i-го пересечения, т. е. $\nu_i = 1$, хеджер приобретает актив по текущей рыночной цене, не превышающей $K(1 + d)$, после чего продает его подписчику опциона по цене поставки K. Если $\nu_i = 0$, т. е. опцион не исполняется, хеджер покрывает опционную позицию, приобретая актив по цене $K(1+d)$, затрачивая на это с учетом комиссии θ сумму, равную $K(1 + d)(1 + \theta)$.

Если i-е пересечение происходит в направлении “сверху вниз”, то опционная позиция в любой момент закрыта, хеджер продает актив либо другим игрокам по цене K, либо подписчику опциона по той же цене, после чего опцион считается исполненным.

Если опцион исполняется при пересечении “снизу вверх”, точный момент исполнения заранее неизвестен, а значит, неизвестна и рыночная цена базового актива. Будем считать, что цена базового актива в момент исполнения случайна и определяется выражением $K + \zeta$, где ζ — случайная величина, реализации которой принадлежат отрезку $[0, Kd]$. На покрытие опционной позиции хеджер тратит при этом сумму, равную $(K + \zeta)(1 + \theta)$.

Для дальнейших расчетов необходимо определить распределение случайной величины ζ. Очевидно, событие, заключающееся в том, что опцион будет исполнен при пересечении полосы H, соответствует тому, что он будет исполнен по цене, не превышающей $K + Kd$. Таким образом, вероятности вида $\mathcal{P}\{\zeta \le Kd\}$ и $\mathcal{P}\{\nu_i = 1\}$ связаны и должны определяться аналогичным образом. Остается напомнить, что все реализации ζ должны принадлежать отрезку $[0, Kd]$. На основании этого функцию распределения величины ζ зададим следующим образом:

$$F_\zeta(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s > Kd, \\ \dfrac{1 - e^{-\lambda s}}{1 - e^{-\lambda Kd}}, & \text{если } 0 \le s \le Kd, \\ 0, & \text{если } s < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим через l_i потери хеджера при i-м пересечении полосы. При нечетных i величина l_i соответствует потерям при пересечении “снизу вверх”, а при четных — потерям при пересечении “сверху вниз”. С учетом этого затраты хеджера при первом пересечении составят величину

$$l_1 \triangleq \nu_1((K + \zeta)(1 + \theta) - K) + (1 - \nu_1)\rho^+, \quad \zeta \in [0, Kd].$$

Первое слагаемое соответствует затратам в случае, когда опцион исполнен, второе слагаемое — затратам на покрытие опционной позиции, если опцион исполнен не был. Если $\nu_1 = 1$, т. е. опцион исполнен, то при втором пересечении хеджер не должен нести никаких потерь. Затраты при втором пересечении (“сверху вниз”) составят соответственно величину

$$l_2 \triangleq (1 - \nu_1)(\nu_2\rho^- + (1 - \nu_2)\rho^-)) = (1 - \nu_1)\rho^-.$$

Аналогично, если опцион исполнен, то и при последующих пересечениях хеджер не несет никаких потерь. В общем случае затраты при i-м пересечении полосы будут определяться как

$$l_i \triangleq \begin{cases} \nu_i((K + \zeta)(1 + \theta) - K) + (1 - \nu_i)\rho^+, & \text{если } i = 1, \\ \Big(\prod\limits_{j=1}^{i-1}(1 - \nu_j)\Big)(\nu_i((K + \zeta)(1 + \theta) - K) + (1 - \nu_i)\rho^+), & \text{если } i = 2m + 1, \\ \Big(\prod\limits_{j=1}^{i-1}(1 - \nu_j)\Big)\rho^-, & \text{если } i = 2m, \end{cases} \tag{8}$$

где $m = 1, 2, \ldots$.

Отметим, что опцион может быть исполнен, даже если курс базового актива не пересек полосу H, а только превысил уровень цены поставки K. Затраты хеджера в этом случае составят

$$l_0 \triangleq \nu_0((K + \zeta)(1 + \theta) - K),$$

где ν_0 — случайная величина, имеющая то же распределение, что и величины ν_i.

Суммарные потери хеджера за время жизни опциона в зависимости от ширины полосы “нечувствительности” обозначим через $L(d,T)$. Очевидно, суммарные потери хеджера зависят от количества пересечений курсом базового актива полосы H. В частности, если произошло нечетное число пересечений, т. е. последнее пересечение было “снизу вверх” и опцион до окончания своей жизни не был исполнен, то он будет исполнен в момент времени T, поскольку рыночная цена актива в этот момент будет выше цены поставки. Если же количество пересечений четное, т. е. последнее пересечение было в направлении “сверху вниз”, то контракт в момент времени T исполнен не будет, если он не был исполнен ранее. Общее число пересечений полосы H будет определяться величиной $\eta^+ + \eta^-$. Следовательно, суммарные потери хеджера за время жизни опциона можно вычислить по формуле

$$L(d,T) \triangleq \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{2m} l_i, & \text{если } \eta^+ + \eta^- = 2m, \\ \sum\limits_{i=0}^{2m+1} l_i - \Big(\prod\limits_{j=1}^{2m+1} (1-\nu_j)\Big)K, & \text{если } \eta^+ + \eta^- = 2m+1, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим в качестве критерия средние потери хеджера $\mathbf{M}[L(d,T)]$. Поставим задачу минимизации величины средних потерь хеджера по ширине полосы “нечувствительности” d:

$$\overline{L}(d,T) \triangleq \mathbf{M}[L(d,T)] \to \min_{0 \le d \le d_{\max}}. \tag{9}$$

Максимальная допустимая ширина полосы $d_{\max}$ задается хеджером и зависит от его склонности к риску, рыночных ожиданий и стоимости опциона.

Для решения задачи (9) необходимо знать распределение величины потерь хеджера $L(d,T)$. Очевидно, потери хеджера зависят от момента достижения ценой базового актива уровня цены поставки, а также от количества пересечений полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива. Зададимся целью найти распределение потерь хеджера.

2. Распределение момента первого достижения заданного уровня

Потери хеджера напрямую зависят от того, когда рыночная цена базового актива достигнет уровня цены поставки, т. е. от момента τ. В частности, если пересечение не происходит в течение срока действия опциона, хеджер вовсе не производит затрат на покрытие позиции, получив при этом премию за опцион.

Найдем распределение случайной величины τ, считая, что $S(0) = x$, где $x \in [0, K]$. Введем в рассмотрение функцию распределения случайной величины τ в зависимости от начального положения x и уровня K:

$$F_\tau(t,x,K) \triangleq \mathcal{P}\{\tau \le t\}.$$

Отметим, что процесс $S(t)$, задаваемый уравнением (2), является марковским диффузионным процессом [11] с коэффициентом сноса $-\beta$ и коэффициентом диффузии σ^2. Учитывая это, функция $F_\tau(t,x,K)$ может быть найдена с помощью следующего утверждения.

Теорема 1. *Если процесс $S(t)$ задается уравнением* (3)*, то функция распределения момента первого достижения заданного уровня K при условии, что $S(0) = x$, будет решением следующей краевой задачи*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_\tau}{\partial t} = -\beta\,\dfrac{\partial F_\tau}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\,\sigma^2\,\dfrac{\partial^2 F_\tau}{\partial t^2}, \\ F_\tau(t,K,K) = 1, \qquad t \ge 0, \\ F_\tau(0,x,K) = 0, \qquad x < K. \end{cases} \tag{10}$$

Данное утверждение является следствием из теоремы, изложенной в [12, глава 2, §6], в которой рассматривается произвольный марковский диффузионный процесс, а вместо функции распределения $F_\tau(t, x, K)$ момента первого достижения уровня K фигурирует функция $\varphi(t, x)$, значение которой определяет вероятность того, что траектория процесса в течение времени t достигнет верхней границы заданного интервала при условии, что траектория стартует из точки x, принадлежащей этому интервалу.

Задача (10) представляет собой классическую смешанную задачу для уравнения в частных производных параболического типа, известного в математической физике как уравнение теплопроводности. Эта задача решается методом разделения переменных. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением задачи (10) является функция

$$F_\tau(t, x, K) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{\beta t - x + K}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{\beta t + x - K}{\sigma\sqrt{t}}\right)\exp\left\{\frac{2\beta}{\sigma^2}(x - K)\right\}\right].$$

Обозначим через $f_\tau(t, x, K)$ плотность распределения случайной величины τ. Тогда нетрудно установить, что

$$f_\tau(t, x, K) \triangleq \frac{\partial F_\tau(t, x, K)}{\partial t} = \frac{K - x}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}}\exp\left\{-\frac{(\beta t + K - x)^2}{2\sigma^2 t}\right\}. \tag{11}$$

3. Распределение числа пересечений полосы

Найдем распределение числа пересечений полосы H траекторией процесса $S(t)$ за время T. Напомним, что число пересечений “сверху вниз” было обозначено ранее через η_T^-, а число пересечений “снизу вверх” — через η_T^+. Найдем их распределение. Поскольку стартовая цена актива S_0 не превышает цены поставки K, распределение числа пересечений будет зависеть от момента τ первого достижения траекторией процесса $S(t)$ уровня K, если пересечение происходит. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для случайного процесса $S(t)$, определяемого уравнением (3), для любого натурального m вероятность того, что траектория процесса $S(t)$ пересечет полосу H “сверху вниз” не менее m раз при условии, что траектория достигла нижнюю границу полосы в момент времени t, можно определить как*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m \ \mid \tau = t\} = \exp\left\{\frac{2m\beta K d}{\sigma}\right\}&\left[1 - \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\sqrt{T-t} + \frac{2mKd}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right.\\ &\left. + \exp\left\{-\frac{2m\beta K d}{\sigma}\right\}\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\sqrt{T-t} - \frac{2mKd}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Данное утверждение аналогично утверждению, приведенному в [13], в котором рассматривается пересечение прямолинейной полосы, включающей в себя нулевой уровень, траекториями винеровского процесса с линейным сносом $W(t) - \beta t$. Доказательство теоремы полностью повторяет доказательство, приведенное в [13], так как коэффициент σ в данном случае играет роль коэффициента масштабирования.

Теперь можно определить вероятность того, что число пересечений “сверху вниз” примет заданное значение m при условии, что траектория процесса $S(t)$ достигла нижнюю границу полосы “нечувствительности” H в момент времени t:

$$\mathcal{P}\{\eta_T^- = m \mid \tau = t\} = \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m \mid \tau = t\} - \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m + 1 \mid \tau = t\}.$$

Введем обозначения:

$$P^-(m, T, t) \triangleq \mathcal{P}\{\eta_T^- = m, \eta_T^+ = m \mid \tau = t\}, \quad P^+(m, T, t) \triangleq \mathcal{P}\{\eta_T^- = m, \eta_T^+ = m + 1 \mid \tau = t\}.$$

Из связи между величинами η_T^+ и η_T^- следует, что

$$\mathcal{P}\{\eta_T^+ = m \mid \tau = t\} = P^-(m,T,t) + P^+(m-1,T,t),$$

$$\mathcal{P}\{\eta_T^- = m \mid \tau = t\} = P^-(m,T,t) + P^+(m,T,t). \tag{13}$$

Найдем выражение для функции $P^+(m,T,t)$. Из соотношения (4) следует, что вероятность $\mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m \mid \tau = t\}$ равна вероятности $\mathcal{P}\{\tau_{2m} \leq T \mid \tau = t\}$, т. е. совпадает со значением функции условного распределения случайной величины τ_{2m} в точке T при условии $\tau = t$. Положим по определению

$$F_{\tau_{2m}}(T,t) \triangleq \mathcal{P}\{\tau_{2m} \leq T \mid \tau = t\} = \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m \mid \tau = t\}.$$

Из этого следует, что условная плотность распределения величины τ_{2m} задается следующим выражением

$$f_{\tau_{2m}}(t_{2m},t) \triangleq \frac{\partial \mathcal{P}\{\eta_{t_{2m}}^- \geq m \mid \tau = t\}}{\partial t_{2m}}. \tag{14}$$

Из определения случайных величин τ_i также следует, что для любого натурального m $S(\tau_{2m}) = K$. Пусть t_{2m} — реализация случайной величины τ_{2m}, тогда выражение $F_\tau(T - t_{2m}, K, K(1+d))$ будет определять вероятность того, что после m пересечений "сверху вниз" полосы H траекторией процесса $S(t)$ за время t_{2m} произойдет еще, как минимум, одно пересечение "снизу вверх", т. е.

$$F_\tau(T - t_{2m}, K, K(1+d)) = \mathcal{P}\{\eta_T^+ \geq m+1 \mid \tau_{2m} = t_{2m}, \tau = t\} \ \text{ для любого } \ t_{2m} \in (t,T].$$

Отсюда, с учетом (14) получаем

$$\mathcal{P}\{\eta_T^+ \geq m+1 \mid \tau = t\} = \int\limits_t^T f_{\tau_{2m}}(t_{2m},t) F_\tau(T - t_{2m}, K, K(1+d))\, \mathrm{d}t_{2m}.$$

С другой стороны, $\mathcal{P}\{\eta_T^+ \geq m+1 \mid \tau = t\} = \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m+1 \mid \tau = t\} + P^+(m,t,T)$. Следовательно, искомая функция определяется выражением

$$P^+(m,T,t) = \int\limits_t^T f_{\tau_{2m}}(t_{2m},t) F_\tau(T - t_{2m}, K, K(1+d))\, \mathrm{d}t_{2m} - \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m+1 \mid \tau = t\}.$$

Эта формула справедлива при $m \geq 1$. Отдельно необходимо рассмотреть случай, когда $m = 0$. Это соответствует ситуации, когда происходит одно пересечение "снизу вверх", а пересечение "сверху вниз" не происходит вовсе. Вероятность такого события будет определяться выражением

$$P^+(0,T,t) = F_\tau(T - t, K, K(1+d)) - \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq 1 \mid \tau = t\}. \tag{15}$$

Учитывая соотношение (13), запишем выражение для $P^-(m,T,t)$:

$$P^-(m,T,t) = \mathcal{P}\{\eta_T^- = m \mid \tau = t\} - P^+(m,T,t)$$

$$= \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m \mid \tau = t\} - \int\limits_t^T f_{\tau_{2m}}(t_{2m},t) F_\tau(T - t_{2m}, K, K(1+d))\, \mathrm{d}t_{2m}.$$

По аналогии с (15) мы можем определить вероятность того, что после достижения уровня K в момент времени t цена актива не пересекла верхнюю границу полосы H. Эта вероятность определяется как

$$P^-(0,T,t) = 1 - \mathcal{P}\{\eta_T^- \geq 1 \mid \tau = t\} - P^+(0,T,t) = 1 - F_\tau(T - t, K, K(1+d)).$$

Функции $P^-(m,T,t)$ и $P^+(m,T,t)$ полностью определяют условные распределения случайных величин η_T^- и η_T^+.

Отметим, что распределения случайных величин η_T^- и η_T^+ не определены при нулевой ширине полосы "нечувствительности", так как при $d=0$ $\mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m \mid \tau=t\}=1$ для любого натурального m и $t\in[0,T]$.

4. Средние потери хеджера

Найдем математическое ожидание затрат хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Распределение величины потерь хеджера $L(d,T)$ зависит от момента достижения траекторией курса базового актива уровня цены поставки, поэтому математическое ожидание величины потерь можно представить как полное математическое ожидание

$$\overline{L}(d,T)=\int\limits_0^\infty \mathbf{M}[L(d,T)\mid\tau=t]f_\tau(t,S_0,K)\,\mathrm{d}t,$$

где $f_\tau(t,S_0,K)$ — плотность распределения случайной величины τ, определяемая согласно (11), а $\mathbf{M}[L(d,T)\mid\tau=t]$ — условное математическое ожидание потерь хеджера при условии, что $\tau=t$, $t\in[0,T]$. В случае, когда $\tau\geq T$, т. е. когда в течение всего времени жизни опциона рыночная цена актива оставалась ниже уровня цены поставки, хеджер не несет никаких потерь, т. е. $\mathbf{M}[L(d,T)\mid\tau\geq T]=0$. С учетом этого математическое ожидание потерь хеджера можно вычислить следующим образом:

$$\overline{L}(d,T)=\int\limits_0^T \mathbf{M}[L(d,T)\mid\tau=t]f_\tau(t,S_0,K)\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Найдем выражение для условного математического ожидания потерь хеджера. Обозначим через $P_L(k,T,t)$ условную вероятность того, что за время жизни опциона траектория курса базового актива пересекла k раз полосу H при условии, что траектория $S(t)$ достигла уровень K в момент t, где $t\in(0,T)$. С учетом того что пересечения "снизу вверх" имеют нечетный порядковый номер, а пересечения "сверху вниз" — четный, общее число пересечений будет четным, если число пересечений "сверху вниз" равно числу пересечений "снизу вверх", и нечетным, если пересечений "снизу вверх" больше. Тогда

$$P_L(k,T,t)\triangleq\mathcal{P}\{\eta^+ +\eta^- = k\mid\tau=t\}=\begin{cases}P^-(m,T,t), & \text{если } k=2m,\\ P^+(m,T,t), & \text{если } k=2m+1,\end{cases}$$

где $m=0,1,2,\ldots$. Тогда условное математическое ожидание потерь хеджера будет определяться выражением

$$\begin{gathered}\mathbf{M}[L(d,T)\mid\tau=t]=\sum_{k=0}^\infty \mathcal{P}\{\eta^+ +\eta^- =2k\mid\tau=t\}\mathbf{M}\Bigg[\sum_{j=0}^{2k} l_j\,\Big|\,\eta^+ +\eta^- =2k\Bigg]\\ +\sum_{k=0}^\infty \mathcal{P}\{\eta^+ +\eta^- =2k+1\mid\tau=t\}\mathbf{M}\Bigg[\sum_{j=0}^{2k+1} l_j\,\Big|\,\eta^+ +\eta^- =2k+1\Bigg]\\ -\sum_{k=0}^\infty \mathcal{P}\{\eta^+ +\eta^- =2k+1\mid\tau=t\}\mathbf{M}\Bigg[\Bigg(\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\nu_j)\Bigg)K\Bigg]\\ =\sum_{k=0}^\infty\sum_{j=0}^{k}\mathbf{M}[l_j]P_L(k,T,t)-\sum_{k=0}^\infty(1-p^*(d))^{2k+1}KP_L(2k+1,T,t).\end{gathered} \tag{17}$$

С учетом соотношения (8) математическое ожидание потерь хеджера при одном пересечении определяется следующим выражением:

$$\mathbf{M}[l_i] = \begin{cases} p^*(d)(\mathbf{M}[(K+\zeta)(1+\theta)] - K) + (1-p^*(d))\rho^+, \ \text{если} \ i=1, \\ (1-p^*(d))^{i-1}\rho^-, \ \text{если} \ i = 2m, \\ (1-p^*(d))^{i-1}(p^*(d)(\mathbf{M}[(K+\zeta)(1+\theta)] - K) + (1-p^*(d))\rho^+), \\ \text{если} \ i = 2m+1, \end{cases} \tag{18}$$

где $m = 1, 2, \ldots$. Математическое ожидание случайной величины ζ с учетом (7) вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}[\zeta] = \frac{1}{1-e^{-\lambda K d}} \int\limits_0^{Kd} s e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda} - \frac{Kde^{-\lambda K d}}{1-e^{-\lambda K d}}. \tag{19}$$

Учитывая изложенное выше, сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие предположения*:

(i) *процесс котировки базового актива описывается случайным процессом* (3);

(ii) *при фиксированной ширине полосы нечувствительности d вероятность $p^*(d)$ исполнения опциона подписчиком при каждом пересечении определяется выражением* (5);

(iii) *цена базового актива при досрочном исполнении равна $K+\zeta$, где ζ — случайная величина, функция распределения которой определяется формулой* (7).

Тогда средние потери хеджера, использующего модернизированную стратегию последовательного хеджирования, определяются выражением (16)*, в котором условные средние потери хеджера вычисляются по формуле* (17).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы напрямую следует из приведенных выше рассуждений. Так, на основании формулы (19) определяется математическое ожидание потерь при досрочном исполнении опциона. Кроме того, согласно (12) полностью известно распределение числа пересечений полосы H, а согласно (5) — вероятность досрочного исполнения опциона при каждом пересечении полосы. Таким образом, выражение (17) для условного математического ожидания $\tilde{L}(d,T,t)$ полностью определено. Следовательно, определено выражение (16) для безусловного математического ожидания потерь.

Теорема доказана.

С точки зрения хеджера, безусловное математическое ожидание величины затрат может быть использовано для оценки справедливой цены опциона. Решение задачи (9) будет определять минимально возможную величину средних потерь хеджера, которая будет задавать минимальную сумму премии за опцион, при которой в среднем хеджер не будет в проигрыше. в проигрыше.

5. Минимизация средних потерь

Решим задачу (9) минимизации средних потерь хеджера за время жизни опциона. Для этого необходимо исследовать зависимость средних потерь хеджера от ширины полосы “нечувствительности”.

Условное математическое ожидание потерь $\tilde{L}(d,T,t)$ непрерывно дифференцируемо по d при $d>0$, поскольку оно является суммой (17) непрерывно дифференцируемых по d функций. Следовательно, с учетом (16) безусловное математическое ожидание также будет непрерывно дифференцируемой по d функцией при $d>0$.

Оценим средние потери хеджера при $d \to 0$. С учетом соотношения (12) получаем, что для любого натурального m и любого $t \in [0,T)$ $\mathcal{P}\{\eta_T^- \geq m \mid \tau = t\} \to 1$ при $d \to 0$, т. е. за конечное время вероятность бесконечного числа пересечений полосы H стремится к единице.

Поскольку при каждом пересечении полосы хеджер производит перебалансировку портфеля с ненулевой комиссией при покупке актива ($\theta > 0$), условные средние потери хеджера (17) будут стремиться к бесконечности, а значит и средние потери хеджера будут стремиться к бесконечности:

$$\overline{L}(d,T) \to \infty \ \text{ при } \ d \to 0.$$

Оценим теперь средние потери хеджера при $d \geq d_{\max}$. При $d = d_{\max}$ вероятность $p^*(d_{\max})$ исполнения опциона подписчиком при первом пересечении полосы, согласно (5), будет равна $1-\alpha$, где $\alpha \ll 1$. С учетом (18) средние затраты хеджера при первом пересечении определяются как

$$\mathbf{M}[l_1] = p^*(d)\Big(\Big(K + \frac{1}{\lambda} - \frac{Kde^{-\lambda Kd}}{1-e^{-\lambda Kd}}\Big)\cdot(1+\theta) - K\Big) + (1-p^*(d))\rho^+, \quad d \geq d_{\max}. \tag{20}$$

Средние потери в случае, когда после достижения уровня цены поставки ни одного пересечения не происходит, будут вычисляться следующим образом:

$$\mathbf{M}[l_0] = p^*(d)\Big(\Big(K + \frac{1}{\lambda} - \frac{Kde^{-\lambda Kd}}{1-e^{-\lambda Kd}}\Big)\cdot(1+\theta) - K\Big), \quad d \geq d_{\max}.$$

При $d \geq d_{\max}$ средние потери при втором и последующих пересечениях приближенно можно считать равными нулю, поскольку с вероятностью не меньше $1-\alpha$ опцион будет исполнен раньше. Тогда условные средние потери хеджера

$$\begin{aligned}\tilde{L}(d,T,t) &\approx P_L(0,T,t)\mathbf{M}[l_0] + (1-P_L(0,T,t))\mathbf{M}[l_1] = \mathbf{M}[l_1] - P_L(0,T,t)\left(\mathbf{M}[l_0] - \mathbf{M}[l_1]\right)\\ &= \mathbf{M}[l_1] - P_L(0,T,t)(1-p^*(d))K(1+d)(1+\theta), \quad d \geq d_{\max}.\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда при $d \to \infty$ средние потери хеджера при первом пересечении будут возрастать, поскольку слагаемое, входящее в (20) со знаком "$-$", будет стремиться к 0. Слагаемое, входящее со знаком "$-$" в выражение (21), также будет стремиться к 0, поскольку $p^*(d) \to 1$. Следовательно, условные средние потери хеджера (21) будут возрастать по d при $d \geq d_{\max}$. Более того, условные средние потери хеджера будут стремиться к величине

$$\tilde{L}(d,T,t) \to \Big(K + \frac{1}{\lambda}\Big)\cdot(1+\theta) - K \ \text{ при } \ d \to \infty.$$

С учетом соотношения (16) можно сделать вывод, что безусловное математическое ожидание $\overline{L}(d,T)$ также будет строго возрастать по d при $d \geq d_{\max}$. На основании вышесказанного можно предположить, что существует точка минимума функции $\overline{L}(d,T)$ на $(0, d_{\max})$.

Поскольку вычисление математического ожидания потерь хеджера связано с суммированием рядов и интегрированием неэлементарных функций, аналитическое выражение для $\overline{L}(d,T)$ найти не удается. Численные расчеты показывают, что математическое ожидание потерь хеджера $\overline{L}(d,T)$ имеет единственную точку минимума по d на $(0, d_{\max})$ для любого $d_{\max} > \theta$.

Обозначим искомую точку минимума средних потерь как d^*. Для поиска значения d^* может быть предложен любой метод оптимизации для одноэкстремальных задач [14], например метод дихотомии. Выбор метода дихотомии обусловлен тем, что данный метод является робастным, т. е. слабо чувствительным к погрешности вычислений, а значение функции $\overline{L}(d,T)$ не может быть вычислено точно.

Решение задачи (9) будет давать оптимальное управление в классе программных стратегий, поскольку для ее решения не используется информация о движении актива в течение времени жизни опциона. Из соотношения (16) следует, что, минимизируя условное математическое ожидание потерь хеджера $\tilde{L}(d,T,t)$, можно также минимизировать безусловное математическое ожидание потерь $\overline{L}(d,T)$. Очевидно, в этом случае оптимальная ширина $d^*(t)$

полосы будет зависеть от параметра t. Поставим задачу минимизации условного математического ожидания потерь хеджера:

$$d^*(t) = \arg\min_{0 \le d \le d_{\max}} \tilde{L}(d, T, t), \quad t \in (0, T). \tag{22}$$

Функция $d^*(t)$ будет представлять собой оптимальное управление в классе позиционных стратегий. Значение математического ожидания потерь при этом будет не больше, чем на решении в классе программных стратегий d^*, поскольку класс позиционных стратегий включает в себя класс программных. Следовательно, будут выполняться соотношения:

1) $\overline{L}(d^*, T) \ge \int\limits_0^T \tilde{L}(d^*(t), T, t) f_\tau(t, S_0, K)\, \mathrm{d}t$;

2) $\tilde{L}(d^*, T, t) \ge \tilde{L}(d^*(t), T, t)$ для любого $t \in (0, T)$.

Задача минимизации условного математического ожидания имеет также самостоятельный экономический смысл. Как было сказано ранее, решение задачи (9) может быть использовано для определения минимальной премии за опцион. Для решения задачи (9) не требуется никаких сведений о движении курса базового актива в течение времени жизни опциона. Таким образом, сразу после заключения опционного контракта хеджер может определить ширину полосы d^* и далее осуществлять хеджирование опционной позиции в соответствии с описанной стратегией. Распределение потерь хеджера $L(d, T)$, в свою очередь, будет зависеть от момента τ достижения курсом базового актива уровня цены поставки. Если в течение времени жизни опциона уровень цены поставки не был достигнут, то опцион не будет исполнен и хеджирование не производится, если же рыночная цена актива стала равной цене поставки в момент времени t, то хеджер, решив задачу (22), может найти новое оптимальное значение ширины полосы $d^*(t)$, при этом средние потери за оставшееся время $T - t$ будут не больше, чем при “старом” значении ширины полосы d^*. Величина $\tilde{L}(d^*(t), T, t)$ будет характеризовать средние затраты на хеджирование за время $T - t$, в течение которого опцион может быть предъявлен.

Численные расчеты показывают, что условное математическое ожидание потерь хеджера $\tilde{L}(d, T, t)$, рассматриваемое как функция параметра d, обладает теми же свойствами, что и безусловное математическое ожидание потерь $\overline{L}(d, T)$. Это означает, что для решения задачи (22) также может быть использован метод дихотомии.

Поскольку, как было сказано ранее, точное значение величины средних потерь не может быть вычислено, для хеджера, осуществившего продажу колл-опциона американского типа, может быть предложен численный алгоритм оценки средних потерь при заданной ширине полосы нечувствительности d. Данная оценка также может быть использована при поиске оптимальной ширины полосы нечувствительности.

С учетом теорем 1–3 опишем алгоритм поиска оптимальной ширины полосы хеджирования d^*, минимизирующей условные средние потери хеджера.

А л г о р и т м.

1) задаются параметры $d_{\max}$, α, $0 < \varepsilon \ll 1$;

2) вычисляется по формуле (6) величина λ;

3) вычисляется число $m^* \triangleq \min\limits_{m \in \mathbb{N}} \{m \colon \mathcal{P}\{\eta_T^- \ge m \mid \tau = 0\} < \varepsilon\}$, где соответствующая вероятность находится по формуле (12);

4) для разных значений $d \in (0, d_{\max})$, используя величину m^* в качестве верхнего предела суммирования, находятся по формуле (17) условные средние потери хеджера;

5) определяется методом дихотомии оптимальная ширина полосы хеджирования $d^* \in (0, d_{\max})$, минимизирующая условные средние потери хеджера.

6. Результаты численных экспериментов

П р и м е р. Минимизация математического ожидания потерь.

Рассмотрим в качестве примера задачу (9) со следующими значениями параметров: $S_0 = 90$ у. е, $K = 100$ у. е, $T = 60$ дней, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $\theta = 0.01$. Значение параметра $\beta = 0$ соответствует случаю, когда отсутствует постоянный тренд в изменении цены базового актива.

Будем считать, что опцион будет исполнен с вероятностью $\alpha = 0.99$, если цена базового актива превышает цену поставки на 5%, т. е. $d_{\max}$ примем равным 0.05. Параметр λ в этом случае примет значение 0.921.

График зависимости безусловного математического ожидания приведен на рисунке ниже.

В данном случае оптимальная ширина полосы $d^* = 0.0106$.

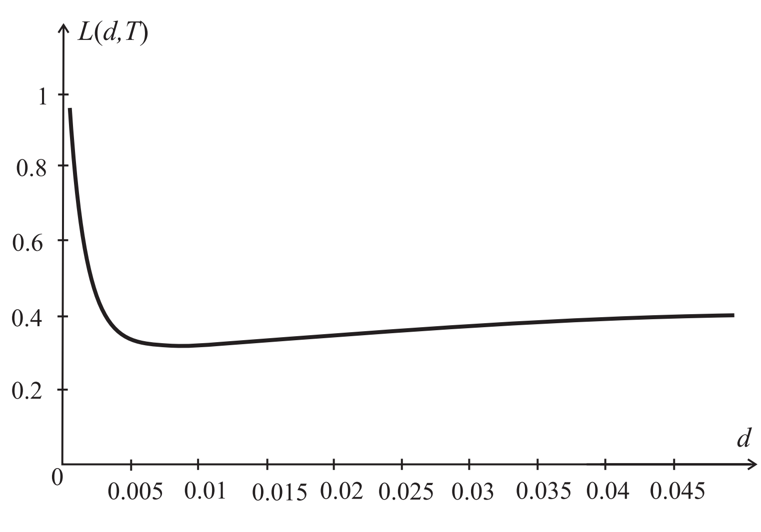
Ожидаемые потери хеджера $\overline{L}(0.0106, 60)$ при этом составят 0.32 у. е.

Из полученных результатов следует, что оптимальная ширина полосы “нечувствительности” сопоставима с величиной взимаемой комиссии. Величина средних затрат на хеджирование, которая может быть использована для оценки премии за опцион, существенно меньше стоимости базового актива, что вполне соответствует реальным данным, а также расчетам стоимости американского опциона, проведенным с помощью метода Монте-Карло.

Зависимость условного математического ожидания $\tilde{L}(d, T, t)$ от параметра d имеет такой же характер, как и $\overline{L}(d, T)$, но их абсолютные величины имеют разный порядок. При $t = 10$ и тех же значениях параметров ожидаемые условные потери хеджера составят 1.76 у. е. при ширине полосы $d^*(10) = 0.0118$. Величина безусловного математического ожидания потерь существенно меньше условного математического ожидания, поскольку в соотношении (16) не выполняется условие нормировки, т. е.

$$\int_0^T f_\tau(t, S_0, K)\,\mathrm{d}t < 1.$$

Физически это означает, что с ненулевой вероятностью хеджер не понесет никаких потерь в случае, когда рыночная цена базового актива не достигает уровня цены поставки за время жизни опциона и опцион не предъявляется. Условное математическое ожидание соответствует случаю, когда уровень цены поставки был достигнут в течение времени жизни опциона и опцион мог быть предъявлен.



Зависимость средних потерь от ширины полосы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities // J. Polit. Econ. 1973. Vol. 81, no. 3. P. 637–654.
2. **Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M.** Option Pricing: a simplified approach // J. Finan. Econ. 1979. Vol. 7. P. 229–263.
3. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. I: Дискретное время / А.Н. Ширяев, Ю. М. Кабанов, Д.О. Крамков, А. В. Мельников // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, вып. 1. С. 23–79.
4. **Seidenverg E.** A case of confused identity // Finan. Analysts J. 1988. P. 63–67.
5. **Cox J., Rubinstein M.** Option markets. New York: Prentice-Hall, 1985. 432 с.
6. **Буренин А.Н.** Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.: Тривола, 1995. 232 с.
7. **Буренин А.Н.** Рынки производных финансовых инструментов. М.: Инфра-М, 1996. 368 с.
8. **Carr P., Jarrow R.** The stop-loss start-gain paradox and option valuation: a new decomposition into intrinistic and time value // Review of Financial Studies. 1990. Vol. 3, no. 3. P. 469–492.
9. **Губерниев В.А., Кибзун А.И.** Последовательное хеджирование опционной позиции: анализ и модернизация // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 113–125.
10. **Bachelier L.** Theorie de la speculation // Annales Scientifiques de lcole Normale Suprieure. 1900. Vol. 17. P. 21–86.
11. **Миллер Б.М., Панков А.Р.** Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
12. **Семаков С.Л.** Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. М.: Наука, 2005. 199 с.
13. **Борисов И.С., Никитина Н.Н.** Распределение числа пересечений полосы траекториями простейших случайных блужданий и винеровского процесса со сносом // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, вып. 1. С. 152–158.
14. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.

Кибзун Андрей Иванович
Поступила 01.12.2012
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
e-mail: kibzun@mail.ru

Соболь Виталий Романович
студент
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
e-mail: vitsobol@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.854.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ УНИМОДУЛЯРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И РЕГУЛЯРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

А. А. Колоколов, Т. Г. Орловская

Проведены исследования в области целочисленного линейного программирования, касающиеся вопросов совместного применения унимодулярных преобразований и метода регулярных разбиений с целью изменения структуры задач и повышения эффективности алгоритмов. Основные результаты получены для задачи о рюкзаке и некоторых ее обобщений на основе L-разбиения. Приводятся семейства задач с экспоненциальными по мощности L-накрытиями, для которых построены улучшающие их структуру унимодулярные преобразования. Описываются новые оценки числа итераций для алгоритмов перебора L-классов.

Ключевые слова: целочисленное программирование, унимодулярное преобразование, регулярное разбиение, L-разбиение, алгоритм перебора L-классов.

A. A. Kolokolov, T. G. Orlovskaya. Investigation of integer programming problems by means of unimodular transformations and regular partitions.

Investigations of questions in integer linear programming are carried out concerned with the joint application of unimodular transformations and the method of regular partitions for changing the structure of problems and increasing the efficiency of algorithms. Main results are obtained for the knapsack problem and some of its generalizations based on an L-partition. Families of problems with L-coverings of exponential cardinality are presented, and unimodular transformations that improve their structure are constructed. New estimates for the number of iterations are described for L-class enumeration algorithms.

Keywords: integer programming, unimodular transformation, regular partition, L-partition, L-class enumeration algorithm.

Введение

Для решения многих задач, возникающих в планировании, управлении, проектировании и других областях, применяются модели и методы целочисленного программирования (ЦП), в которых учитываются такие факторы, как неделимость объектов, дискретность процессов, альтернативность выбора. Аппарат ЦП широко используется при исследовании различных классов задач дискретной оптимизации, в частности задач оптимального размещения, о покрытии, выполнимости логической формулы, задач с ресурсными ограничениями. Значительный интерес к задачам ЦП обусловлен их NP-трудностью.

Проблематика ЦП является достаточно разнообразной и включает исследование структуры и сложности задач, развитие методов их решения, приближенных и гибридных алгоритмов, изучение вопросов устойчивости, многокритериальные постановки и ряд других направлений [1; 2; 5; 8; 15; 16; 18–22; 28].

В настоящее время в целочисленном программировании активно развивается предложенный А.А. Колоколовым метод регулярных разбиений [8; 14], на основе которого исследована L-структура задач ЦП [17], построены алгоритмы и оценки числа итераций [7], введены новые классы отсечений [6; 8], изучены вопросы устойчивости задач и алгоритмов дискретной оптимизации.

Многие методы решения задач ЦП основаны на использовании релаксационного множества задачи, которое определяется исходной системой ограничений без условия целочисленности переменных. При этом важную роль играют структура задачи и ее дробное накрытие, состоящее из точек, находящихся между лексикографически оптимальными решениями задачи ЦП и соответствующей непрерывной задачи. Регулярные разбиения позволяют оценивать “объем” дробного накрытия, характеризующего сложность решения задачи, и, таким образом, измерять эффективность алгоритмов. Как правило, мощные накрытия затрудняют процесс решения, поэтому перспективными представляются исследования, связанные с поиском методов улучшения структуры задач в терминах регулярных разбиений. К числу таких направлений, показавших свою продуктивность и актуальность, относятся построение и исследование унимодулярных преобразований, с помощью которых исходная задача сводится к эквивалентной ей задаче ЦП [4]. Применение унимодулярных преобразований, сохраняя множество допустимых целочисленных точек, может сделать структуру задачи более приемлемой для анализа и решения.

Данная статья состоит из трех разделов. Особое внимание уделяется вопросам совместного применения унимодулярных преобразований и метода регулярных разбиений. В первом разделе приводятся необходимые определения, описывается идея метода регулярных разбиений и дается лексикографическая постановка задачи ЦП. Во втором разделе формулируются основные результаты, полученные при использовании унимодулярных преобразований и L-разбиения для задачи о рюкзаке и ее обобщений. В третьем разделе анализируется алгоритм перебора L-классов.

В связи с юбилеем Ивана Ивановича Еремина, выдающегося ученого, действительного члена Российской академии наук, следует особо подчеркнуть его важную роль в поддержке и развитии исследований по математическому программированию, большой вклад в становление коллектива специалистов данного направления в г. Омске.

1. Метод регулярных разбиений и его применения

В этом разделе дается краткое описание метода регулярных разбиений и рассматриваются вопросы применения унимодулярных преобразований к некоторым известным задачам ЦП.

Введем разбиение F пространства $\mathbb{R}^n$, которое обладает рядом свойств, связанных со спецификой задач ЦП:

◦ каждая точка $z \in \mathbb{Z}^n$ образует отдельный класс разбиения, остальные классы состоят только из нецелочисленных точек и называются *дробными*;

◦ если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, то фактор-множество X/F конечно;

◦ для произвольного $X \subset \mathbb{R}^n$ и любого вектора $z \in \mathbb{Z}^n$ имеет место $(X + z)/F = X/F + z$.

Элементы из X/F называются *F-классами*.

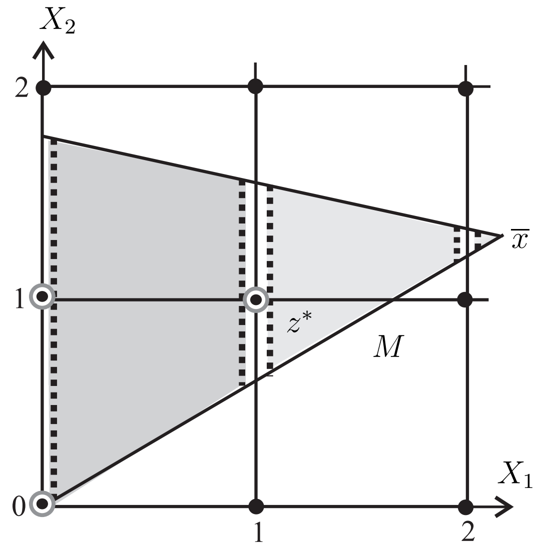
В настоящее время широко используется L-разбиение, которое определяется следующим образом. Каждая точка из $\mathbb{Z}^n$ образует отдельный L-класс, т. е. элемент разбиения. Точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x \succ y$ и $x, y \notin \mathbb{Z}^n$) называются L-эквивалентными (принадлежат одному дробному L-классу), если не существует отделяющей их точки $z \in \mathbb{Z}^n$, такой, что $x \succ z \succ y$. Будем называть *рангом* класса $V \in X/L$ и обозначать через $r(V)$ номер первой дробной координаты представителя $v \in V$, если v — нецелочисленный вектор. Для целочисленной точки будем считать по определению $r(V) = n + 1$.

Следует отметить, что важные теоретические результаты получены с использованием наряду с L-разбиением некоторых других регулярных разбиений, в частности канонического и кубических [8; 10].

Для исследования задач и алгоритмов на основе регулярных разбиений нами используется задача ЦП в лексикографической постановке, в которой требуется

$$\text{найти} \quad z^* = \operatorname{lexmax}(\Omega \cap \mathbb{Z}^n), \tag{1.1}$$

где $\Omega \neq \varnothing$ — выпуклое замкнутое ограниченное сверху множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, т. е. существует вектор $d \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x \leq d$ для всех $x \in \Omega$. Множество Ω называется *релак-*



L-структура задачи ЦЛП.

сационным множеством задачи, а множество $\Omega_* = \{x \in \Omega : \ x \succ z$ для всех $\ z \in \Omega \cap \mathbb{Z}^n\}$, — *дробным накрытием* задачи, которое занимает важное место в исследованиях задач и алгоритмов ЦП. Отметим, что далее символ "$*$" используется для обозначения дробных накрытий и других задач целочисленного программирования. Дробные накрытия задач ЦП последовательно "*снимаются*" в процессе решения алгоритмами отсечения, ветвей и границ, перебора L-классов и некоторыми другими.

Для анализа рассматриваемой задачи, ее дробного накрытия и методов решения применяется разбиение F, индуцирующее разбиение релаксационного множества Ω. Множество Ω_*/F называется *F-накрытием* задачи.

Множества Ω/L и Ω_*/L называются соответственно L-структурой и L-накрытием задачи. Во многих случаях сложность задач ЦП определяется мощностью Ω_*/L. В задачах, релаксационное множество которых не содержит целочисленной точки, L-накрытие совпадает с L-структурой.

На рисунке представлены разбиение релаксационного многогранника M задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) на L-классы и входящее в него L-накрытие, которое состоит из четырех L-классов — частей вертикальных полос

$$V_k = \{x \in M \colon k < x_1 < k+1\}, \quad k = 1, 2,$$

и частей вертикальных отрезков вида

$$V'_k = \{x \in M \colon x_1 = k, 1 < x_2 < 2\}, \quad k = 1, 2.$$

Отметим, что $\overline{x} = \operatorname{lexmax}(M)$. Кроме того, в L-разбиение многогранника M входят еще 7 классов, среди которых три целочисленных точки, одна часть полосы и три части вертикальных отрезков. Во многих случаях задачи с мощными L-накрытиями являются трудными для алгоритмов ЦЛП, основанных на использовании релаксационных множеств.

Метод перебора L-классов (LCE) [8; 9] для решения задачи ЦЛП основан на L-разбиении исходного многогранника задачи и выделении в нем дробного накрытия, элементы которого могут быть выписаны в отношении лексикографического порядка. Идея алгоритма заключается в последовательном переходе от одного элемента разбиения к следующему с учетом лексикографического порядка, для чего осуществляется поиск представителей соответствующих L-классов.

Среди подходов к улучшению L-структуры и ускорению процессов решения задач ЦЛП следует выделить применение унимодулярных преобразований пространства [4; 14]. Унимодулярным называется преобразование в пространстве $\mathbb{R}^n$, которое задается целочисленной матрицей $A_{n\times n}$ с определителем, равным $+1$ или -1. Важным свойством данных преобразований является то, что целочисленная решетка инвариантна относительно любого унимодулярного преобразования. В некоторых случаях исследуемую задачу можно свести к другой задаче ЦЛП, у которой мощность L-накрытия значительно меньше. При этом даже простейшие преобразования позволяют существенно сокращать время решения задачи [4].

А.А. Вотяковым предложен z-алгоритм решения задач ЦЛП, основанный на использовании унимодулярных преобразований [3]. Подробному исследованию свойств этого алгоритма посвящена работа [10].

Известные результаты Г. Ленстры [27], посвященные доказательству полиномиальной разрешимости задачи целочисленного программирования в пространствах фиксированной размерности, также существенно опираются на свойства унимодулярных преобразований.

О.А. Заблоцкой [6] рассматривалась задача о рюкзаке в булевой постановке с одним ограничением на равенство и последовательностью чисел Фибоначчи в качестве коэффициентов, упорядоченных по убыванию. В частности, было доказано, что при условии существования целочисленного решения мощность L-накрытия задачи не превосходит n. Как следствие, было установлено, что при решении данной задачи регулярным процессом отсечения потребуется не более $n+1$ итерации. Показано также, что изменение порядка нумерации переменных на противоположный (простейшее унимодулярное преобразование) приводит к тому, что задача может иметь экспоненциальное (от числа переменных задачи) L-накрытие даже при наличии целочисленной точки.

В [4] предложены семейства задач ЦЛП, которые обладают L-накрытиями экспоненциальной от длины входа мощности и являются трудными для решения многими алгоритмами, основанными на использовании релаксационных множеств задач, в частности алгоритмов отсечения, ветвей и границ, перебора L-классов. Показано, что применение унимодулярных преобразований специального вида позволяет значительно уменьшать мощность L-накрытий указанных задач и ускорять процесс их решения.

В [25] унимодулярные преобразования рассматриваются как эффективный способ улучшения работы алгоритма ветвей и границ (типа Лэнд и Дойг [26]) для поиска допустимого целочисленного решения задачи о рюкзаке. С этой целью авторами предложен метод предварительной обработки исходной задачи $b' \le Ax \le b,\ x \in \mathbb{Z}^n$, состоящий в переходе к эквивалентной постановке $b' \le (AU)y \le b,\ y \in \mathbb{Z}^n$, где U — унимодулярная матрица, вычисленная через метод *сужения базиса*, основанный на уменьшении евклидовой нормы столбцов матрицы AU.

2. Исследование L-структуры задачи о рюкзаке и ее обобщений

В последнее время нами получены новые результаты по применению унимодулярных преобразований для задачи о рюкзаке в различных постановках [11–14; 24]. Построены семейства задач с L-накрытиями экспоненциальной мощности, которые могут быть использованы при анализе эффективности работы алгоритмов. Для данных семейств предложены унимодулярные преобразования, значительно изменяющие структуру задач.

Рассматривается задача о рюкзаке, содержательно означающая необходимость выбора предметов с наибольшей суммарной стоимостью для размещения в рюкзаке заданного размера. Такие задачи часто возникают при поиске оптимального управления в различных экономических ситуациях. В теоретических исследованиях значительный интерес представляет модель ЦЛП поиска допустимого решения задачи указанного типа с одним линейным ограничением на равенство (задача без целевой функции). Для этого используется следующая постановка, которую можно рассматривать как подход к отысканию допустимого решения с помощью LCE:

требуется найти лексикографически максимальную точку множества $K \cap \mathbb{Z}^n$, где

$$K = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,\ 0 \le x_j \le 1,\ j = 1, \ldots, n\Big\};$$

предполагается, что $a_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, n$, $b \in \mathbb{N}$.

Во многих случаях с помощью унимодулярных преобразований для исходной задачи может быть получена эквивалентная ей задача, более подходящая для решения алгоритмами лексикографического типа.

Обозначим через $\mathcal{U}$ класс унимодулярных преобразований, соответствующих перестановкам переменных рассматриваемой задачи. Пусть U_{opt} — преобразование из класса $\mathcal{U}$, приводящее к упорядочению коэффициентов a_j задачи (1.1) с множеством $\Omega = K$ по невозрастанию, а $(U_{opt}K)$ — образ релаксационного многогранника K.

Будем говорить, что унимодулярное преобразование U^* из класса $\mathcal{U}$ является *оптимальным* в классе $\mathcal{U}$ для задачи (1.1) с множеством $\Omega = K$, если для любого $U \in \mathcal{U} \backslash U^*$ справедливо неравенство

$$|(U^*K)/L| \le |(UK)/L|.$$

Для преобразования U_{opt} справедлива следующая

Теорема 1 [14]. *Унимодулярное преобразование U_{opt} является оптимальным в классе перестановочных преобразований $\mathcal{U}$ для задачи* (1.1) *с множеством $\Omega = K$, и имеет место оценка*

$$|(U_{opt}K)/L| \le |K/L|.$$

Другими словами, для элемента из класса унимодулярных преобразований, которые соответствуют перестановкам переменных задачи, приводящего к упорядочению коэффициентов задачи a_j по невозрастанию, L-структура образа релаксационного многогранника K обладает минимальной мощностью. Аналогичное утверждение доказано и для целочисленного варианта задачи о рюкзаке [11].

Необходимо подчеркнуть, что в данном случае свойство минимальности справедливо только относительно преобразований перестановочного типа из класса $\mathcal{U}$. Следовательно, возможно существование более “сильного” (с точки зрения сокращения числа элементов в структуре задачи) унимодулярного преобразования из другого класса.

Рассмотрим задачу поиска допустимой лексикографически максимальной целочисленной точки в следующем множестве:

$$\mathcal{Q} = \Big\{x \in \mathbb{B}^n \colon x_1 + 2\sum_{j=2}^{n} x_j = k\Big\},$$

где $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n :\ 0 \le x_j \le 1,\ j = 1,\ \ldots,\ n\}$, $n \ge 3$, $k -$ четное, $1 < k \le 2(n-1)$.

Рассмотрим семейство трудных задач с множествами типа $\mathcal{Q}$.

Теорема 2. *Для L-накрытия задачи* (1.1) *с множеством $\Omega = \mathcal{Q}$ справедлива следующая оценка*:

$$|\mathcal{Q}_*/L| \ge 2^{k/2} - 1.$$

Доказательство. Множество $\mathcal{Q}$, в отличие от известного многогранника Джерослоу [23], содержит целочисленную точку при любом k. Оценим снизу число классов в L-накрытии такой задачи.

Начинаем с классов, у которых $x_1 = 1$, а значит они имеют лексикографическое преимущество перед классами, у которых $x_1 = 0$. Для того чтобы вектор принадлежал множеству $\mathcal{Q}$, достаточно в качестве значения одной из координат выбрать $1/2$, для $(k-2)/2$ координат —

единицу, а остальные положить равными нулю. Таким способом можно построить некоторое число представителей классов в L-накрытии. Поскольку дробные L-классы определяются первой дробной координатой и набором целочисленных значений координат с меньшим номером, то справедливо следующее:

$x_2 = 1/2$: существует один класс, или $\alpha_0 = 2^0$,

$x_2 \in \{0,1\}$, $x_3 = 1/2$: два класса, или $\alpha_1 = 2^1$,

...

$x_2 \in \{0,1\}, \ldots, x_{k/2} \in \{0,1\}$, $x_{(k+2)/2} = 1/2$: $\alpha_{(k-2)/2} = 2^{(k-2)/2}$ классов.

Таким образом,

$$|\mathcal{Q}_*/L| \geq \sum_{j=0}^{(k-2)/2} \alpha_j = 1 + 2 + \ldots + 2^{(k-2)/2} = (1 - 2^{((k-2)/2+1)})/(1-2) = 2^{k/2} - 1.$$

Получается, что данная задача обладает экспоненциальным по мощности L-накрытием, а значит при поиске допустимого целочисленного решения алгоритму LCE придется перебрать большое число L-классов. Теорема доказана.

В доказательстве следующей теоремы строится унимодулярное преобразование, сокращающее мощность L-накрытия задачи до нуля и обеспечивающее тем самым получение допустимого целочисленного решения задачи за одну итерацию алгоритма LCE.

Теорема 3. *Задача* (1.1) *с множеством* $\Omega = \mathcal{Q}$ *допускает унимодулярное преобразование, после применения которого* $|\Omega_*/L| = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала применим преобразование, которое использовалось для многогранника Джерослоу, немного его модифицировав:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2 + x_3 + \ldots + x_n, \\ y_3 &= x_3, \\ &\ldots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Обозначим его через $\widetilde{U}$. Это преобразование переводит $\mathcal{Q}$ в

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{y \in \mathbb{R}^n: \ 0 \leq y_1 \leq 1, \ y_1 + 2y_2 = k, \ 0 \leq y_j \leq 1, \ j = 3, \ \ldots, \ n\}.$$

Лексикографически максимальный вектор y для преобразованного множества будет иметь следующий вид: $y_1 = 1$, а $y_2 = (k-1)/2$, где y_2 — дробное, в силу четности k; значения следующих $(n-2)$ координат не влияют на принадлежность к текущему L-классу поскольку, как известно, дробный L-класс определяется первой дробной координатой.

Далее применим еще одно унимодулярное преобразование:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2, \\ y_2 &= x_1, \\ y_3 &= x_3, \\ &\ldots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Обозначим его через $\widehat{U}$. Это преобразование переводит $\widetilde{\mathcal{Q}}$ в

$$\widehat{\mathcal{Q}} = \{y \in \mathbb{R}^n: \ y_2 + 2y_1 = k, \ 0 \leq y_j \leq 1, \ j = 2, \ \ldots, \ n\}.$$

Лексикографически максимальный вектор y для преобразованного множества будет иметь следующий вид: с одной стороны, $y_1 = (k - y_2)/2$, с другой — мы ищем лексикографически максимальный вектор, для чего значение координаты y_2 должно быть минимальным; поскольку $0 \le y_2$, то минимальным для него значением будет ноль, следовательно, $y_1 = k/2$ — целое в силу четности k, $y_2 = 0$, $y_3 = 1, \ldots, y_{\frac{k+2}{2}} = 1$, $y_{\frac{k+4}{2}} = 0, \ldots, y_n = 0$.

Отсюда вытекает, что теперь для дробного накрытия задачи (1.1) на $\widehat{\mathcal{Q}}$ имеет место $\widehat{\mathcal{Q}}_* = \emptyset$.

Таким образом, для многогранника $\mathcal{Q}$ существует унимодулярное преобразование $\widehat{U}\widetilde{U}$ (т. е. суперпозиция преобразований), позволяющее быстро получить допустимый целочисленный вектор:

$$\begin{array}{llllll} y_1 = & & x_2 + & x_3 + & \ldots + & x_n, \\ y_2 = & x_1, & & & & \\ y_3 = & & & x_3, & & \\ & & & & \ldots & \\ y_n = & & & & & x_n. \end{array}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу о рюкзаке с двумя ограничениями. Введем обозначение

$$\overline{Q} = \{x \in \mathbb{B}^n : \; x_1 + 2\sum_{j=2}^{l} x_j = k, \; \sum_{j=l+1}^{n} a_j x_j = b\},$$

где $n \ge 3, k -$ четное$, 1 < k \le 2(n-1),\ a_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{N}$. L-накрытие задачи (1.1) на данном множестве ограничено снизу величиной $2^{k/2} - 1$. Вопрос о существовании допустимого целочисленного вектора зависит от второго уравнения с произвольными коэффициентами и правой частью (из множества $\mathbb{N}$). Данное семейство представляет собой подкласс NP-трудных задач поиска допустимого вектора в множестве, каждая из которых имеет экспоненциальное (от значения параметра k) L-накрытие.

С помощью предложенных семейств проведено исследование метода ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг); показано, что они являются трудными для решения, а положительное влияние на структуру задачи от применения унимодулярных преобразований сохраняется.

3. Анализ алгоритмов и оценки числа итераций

Важным направлением в исследовании и построении алгоритмов ЦЛП является изучение связи множества вершин релаксационных многогранников с L-структурой задач.

Дробный L-класс из $V \in K/L$ называется *вершинным*, если в нем содержится хотя бы одна вершина множества K. Будем называть L-класс V *существенным*, если найдется лексикографически максимальный элемент $x \in V$. Отметим, что каждый существенный класс является вершинным, обратное не верно.

Нами показано, что алгоритм LCE последовательно просматривает только существенные классы, пропуская не являющиеся таковыми.

Обозначим через S последовательность приближений, порождаемую при решении булевой задачи о рюкзаке алгоритмом перебора L-классов. Из описания алгоритма и его свойств вытекает следующая

Теорема 4 [14]. *Для задачи о рюкзаке* (1.1) *с множеством* $\Omega = K$ *длина последовательности* S *совпадает с числом существенных классов в* L*-накрытии задачи.*

Отметим, что мощность множества существенных классов не превышает числа вершинных классов, которое в свою очередь не превосходит число дробных вершин задачи. Таким образом, если число дробных вершин многогранника задачи или ее L-накрытия ограничено сверху полиномом от n, то алгоритм LCE является полиномиальным. Нетрудно построить примеры задач, для которых количество дробных вершин оценить значительно проще, чем число существенных L-классов.

Переходным назовем класс, который не просматривается (пропускается) алгоритмом, что было замечено в результате проведенного вычислительного эксперимента (с целью изучения поведения алгоритма перебора L-классов). Это происходит в связи с тем, что указанный класс не имеет лексикографически максимального элемента, т.е. не является существенным.

Число итераций I алгоритма LCE складывается из длины порождаемой им последовательности приближений S и числа итераций, на которых не были найдены представители L-классов. Отсюда и из теоремы 4 вытекает соотношение: $I = v(K_*) + p$, где p — количество переходных классов. На его основе можно строить нижние и верхние структурные оценки числа итераций рассматриваемого алгоритма. Если, например, специфика задачи позволяет априори оценить сверху или снизу число существенных L-классов, тогда можно получать соответственно верхние или нижние оценки числа итераций.

Отметим используемые нами особенности задачи о рюкзаке. Так как задача (1.1) с множеством $\Omega = K$ не содержит целевой функции, то алгоритм LCE прекращает свою работу, как только будет найден лексикографически максимальный целочисленный элемент множества K (решение задачи). Поскольку изучается задача с одним ограничением на равенство, то поиск лексикографически максимальной точки на очередном шаге алгоритма можно осуществлять аналитически. Таким образом, специфика рассматриваемых нами задач о рюкзаке позволяет перейти к аналитическому решению текущей задачи на очередном шаге алгоритма. В настоящее время, насколько нам известно, только для указанной задачи о рюкзаке и задач выполнимости и максимальной выполнимости логической формулы [9] построены комбинаторные алгоритмы без использования аппарата ЛП.

Для булевой задачи на очередном шаге алгоритма LCE при вычислении лексикографически максимального элемента имеем следующую схему:

Пусть $x_1, \ \ldots, \ x_i$ — фиксированные целые неотрицательные числа,

$$x_{i+1} = \min\left\{1, \ \frac{b - \sum_{j=1}^{i} a_j x_j}{a_{i+1}}\right\};$$

если значение дроби меньше или равно 1, то

$$\text{все } x_{i+2}, \ \ldots, \ x_n \ \text{ равны } \ 0,$$

иначе полагаем $x_{i+1} = 1$ и повторяем вычисления для следующей координаты x_{i+2}. Если номер координаты для вычисления превышает n, то подходящего лексикографически максимального элемента нет. Обозначим указанную модификацию алгоритма LCE через LE_1.

Аналогичная схема применима и для целочисленного варианта задачи о рюкзаке.

Из теоремы 2 следует, что на указанных задачах алгоритму LE_1 может потребоваться экспоненциальное число итераций.

Для ускорения процесса решения задачи ЦП в дополнение к алгоритму LCE можно применять следующие подходы:

◦ построение комбинаторных алгоритмов для решения текущих задач ЛП (без применения симплекс-метода);

◦ учет информации, содержащейся в текущих симплексных таблицах, для ускорения процесса перебора L-классов;

◦ использование эвристик для получения начального рекорда;

◦ применение унимодулярных преобразований, в частности переупорядочение переменных, с целью улучшения L-структуры задачи;

◦ построение правильных отсечений (фасетных неравенств, регулярных отсечений и др.);

◦ разработка гибридных схем с использованием метода последовательной оптимизации [15].

С целью изучения влияния переупорядочений переменных на L-структуру задачи и процесс перебора L-классов нами проведены экспериментальные исследования, для чего были программно реализованы алгоритм перебора L-классов с учетом специфики задачи и алгоритм для вычисления мощности L-структуры для булевого и целочисленного вариантов задачи о рюкзаке. При этом решались три типа задач: исходная, с упорядочением коэффициентов по невозрастанию и по неубыванию.

Для описания и анализа подходов к решению задачи о рюкзаке с помощью рассматриваемых алгоритмов удобно использовать понятие ранговой функции. Пусть $K/L = \{V_1, V_2, \ldots, V_\mu\}$, тогда *ранговой функцией* L-структуры будем называть целочисленную функцию

$$f(K/L) = (r(V_1), r(V_2), \ldots, r(V_\mu)),$$

где K — релаксационное множество задачи, $r(V_i)$ — ранг L-класса V_i, $i = 1, \ldots, \mu$.

Экспериментальные исследования показали, что чем “дальше” порядок переменных задачи от оптимального, тем выше положительный эффект от применения рассматриваемых унимодулярных преобразований.

В статье рассмотрены вопросы использования унимодулярных преобразований в ЦП. Особое внимание уделено улучшению структуры задач и повышению эффективности алгоритмов их решения, для чего изучались варианты совместного применения унимодулярных преобразований и метода регулярных разбиений. Приведены результаты, полученные в данном направлении для задачи о рюкзаке и некоторых ее обобщений, а также для алгоритма перебора L-классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978. 333 с.
2. **Булатов В.П.** Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977. 161 с.
3. **Вотяков А.А.** О задачах, инвариантных относительно z-округления // Экономика и математические методы. 1971. Т. 7, вып. 2. С. 259–264.
4. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.** Унимодулярные преобразования для задач целочисленного программирования и анализ эффективности их применения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 48–62.
5. **Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.
6. **Заблоцкая О.А.** Двойственные процессы отсечения и L-структура некоторых задач целочисленного программирования: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: Новосибирск, 1985.
7. **Заозерская Л.А., Колоколов А.А.** Оценки среднего числа итераций для некоторых алгоритмов решения задачи об упаковке множества // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 2. С. 242–248.
8. **Колоколов А.А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исследования операций. 1994. № 2. С. 18–39.
9. **Колоколов А.А., Адельшин А.В., Ягофарова Д.И.** Решение задачи выполнимости с использованием метода перебора L-классов // Информационные технологии. 2009. № 2. С. 54–59.
10. **Колоколов А.А., Орловская Т.Г.** Исследование одного алгоритма решения задач целочисленного линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 140–145.
11. **Колоколов А.А., Орловская Т.Г.** О некоторых унимодулярных преобразованиях для задачи о рюкзаке // Методы оптимизации и их приложения: тр. XV Байкальской Междунар. шк.-семинара. Иркутск, 2011. Т. 4. С. 161–166.
12. **Колоколов А.А., Орловская Т.Г.** Анализ алгоритмов решения некоторых задач о рюкзаке на основе L-разбиения // Тез. Междунар. конф. “Алгебра и линейная оптимизация”, посвящ. 100-летию С.Н. Черникова. Екатеринбург, 2012. С. 94–95.

13. **Колоколов А.А., Орловская Т.Г.** Исследование некоторых постановок задачи о рюкзаке и алгоритмов их решения с использованием унимодулярных преобразований и L-разбиения // Интеллектуализация обработки информации: сб. докл. 9-й международная конф. М.: Торус Пресс, 2012. С. 286–289.
14. **Колоколов А.А., Орловская Т.Г., Рыбалка М.Ф.** Исследование алгоритмов целочисленного программирования с использованием регулярных разбиений и унимодулярных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 178–190.
15. Математические методы в экономике / И.И. Еремин, Вл.Д. Мазуров, В.Д. Скарин, М.Ю. Хачай. Екатеринбург: Изд-во "У-Фактория", 2000. 279 с.
16. **Леонтьев В.К.** Устойчивость в линейных дискретных задачах // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 35. С. 169–184.
17. **Орловская Т.Г.** Улучшение структуры семейств задач о рюкзаке с использованием унимодулярных преобразований // Тез. Междунар. конф. "Алгебра и линейная оптимизация", посвящ. 100-летию С.Н. Черникова. Екатеринбург, 2012. С. 122–124.
18. **Попков В.К.** Математические модели связности. 2-е изд., испр. и доп. Новосибирск: Изд.-во ИВМиМГ СО РАН, 2006. 490 с.
19. **Сергиенко И.В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. 2-е изд., доп. и перераб. Киев : Наук. думка, 1988. 471 с.
20. **Хачай М.Ю.** Вычислительная сложность комбинаторных задач, индуцированных коллективными процедурами обучения распознаванию образов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 276–284.
21. **Шевченко В.Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995. 190 с.
22. **Eremeev A.V., Kolokolov A.A.** On some genetic and L-class enumeration algorithms in integer programming // Proc. of the I Intern. Conf. on Evolutionary Computation and its Applicatios. Moscow, 1996. P. 297–303.
23. **Jeroslow R.G.** Trivial integer programs unsolvable by branch-and-bound // Math. Programming. 1974. Vol. 6, iss. 1. P. 105–109.
24. **Kolokolov A.A., Orlovskaya T.G., Rybalka M.F.** Analysis of some integer programming algorithms based on the method of regular partitions // Proc. of II Intern. Conf. "Optimization and Applications" (OPTIMA-2011). 2011. P. 133–136.
25. **Krishnamoorthy B., Pataki G.** Column basis reduction and decomposable knapsack problem // Discrete Optim. 2009. Vol. 6, iss. 3. P. 242–270.
26. **Land A.H., Doig A.G.** An automatic Method for Solving Discrete Programming Problems // Econometrica. 1960. Vol. 28, no. 3. P.497–520.
27. **Lenstra H.W. jr.** Integer programming with a fixed number of variables // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8, no. 4. P. 538–548.
28. **Nemhauser G.L., Wolsey L.A.** Integer and combinatorial optimization. A Wiley-Interscience Publication. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1999. 763 p.

Колоколов Александр Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лаб.
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

Поступила 22.04.2013

Орловская Татьяна Геннадьевна
программист
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: torlovskaya@gmail.com

Том 19 № 2 2013

О РАЗРАБОТКАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

К юбилеям Анатолия Федоровича Сидорова (30 марта 1933 г.–31 марта 1999 г.) и отдела прикладных задач

А. И. Короткий, Н. А. Артемова, Н. А. Ваганова, О. О. Коврижных, Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов, О. В. Ушакова, М. Ю. Филимонов, И. А. Цепелев

30 марта 2013 г. исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося российского математика и механика академика Анатолия Федоровича Сидорова (30 марта 1933 г.–31 марта 1999 г.), а 20 февраля 2013 г. — 50 лет со дня основания отдела прикладных задач ИММ УрО РАН, которым долгое время руководил Анатолий Федорович Сидоров. Статья посвящена памяти этого выдающегося ученого и человека, его начинаниям и достижениям, их дальнейшему продолжению, в частности в деятельности отдела прикладных задач.

Ключевые слова: Институт математики и механики, отдел прикладных задач, творчество Анатолия Федоровича Сидорова, нелинейные уравнения в частных производных, функциональные ряды, газовая динамика, оптимальные сетки.

A. I. Korotkii, N. A. Artemova, N. A. Vaganova, O. O. Kovrizhnykh, L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov, O. V. Ushakova, M. Yu. Filimonov, I. A. Tsepelev. On the development of analytical and numerical solution methods for problems of continuum mechanics. On the jubilees of Anatolii Fedorovich Sidorov (March 30, 1933 – March 31, 1999) and the Department of Applied Problems.

March 30, 2013, was the 80th birthday of the outstanding Russian specialist in mathematics and mechanics Academician Anatolii Fedorovich Sidorov (March 30, 1933 – March 31, 1999), and February 20, 2013, was the 50th anniversary of the creation of the Department of Applied Problems of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, which had been headed for a long time by Sidorov. The paper is devoted to the memory of this outstanding scientist and person, his initiatives and achievements, their further development, in particular, in the activities of the Department of Applied Problems.

Keywords: Institute of Mathematics and Mechanics, Department of Applied Problems, Anatolii Fedorovich Sidorov's work, nonlinear partial differential equations, functional series, gas dynamics, optimal grids.

1. О жизни и научных достижениях Анатолия Федоровича Сидорова

Анатолий Федорович Сидоров родился 30 марта 1933 г. в Ленинграде. В 1950 г. он поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета, который окончил с отличием в 1955 г. по специальности "Математика". После окончания университета А.Ф. Сидоров в составе группы математиков проходил короткую стажировку в отделении прикладной математики Математического института АН СССР (ныне Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН) под руководством будущего академика Н.Н. Яненко. Николай Николаевич стал его научным руководителем при подготовке кандидатской диссертации, и их творческий диалог продолжался долгие годы. В дальнейшем последовало назначение сначала во Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (ныне РФЯЦ–ВНИИЭФ, г. Саров), а затем, после организации Российского ядерного центра на Урале, во Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики (ныне РФЯЦ–ВНИИТФ им. Е.И. Забабахина, г. Снежинск).

В 1961 г. А.Ф. Сидоров возглавил один из ведущих во ВНИИТФ математических отделов — отдел по расчету критических параметров и энерговыделения ядерных сборок.

С апреля 1963 г. он возглавил отдел прикладных задач в Свердловском отделении Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР (ныне — Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН), а в декабре 1993 г. был утвержден директором этого института.

В 1963 г. Анатолий Федорович защищает кандидатскую, в 1969 г. — докторскую диссертацию. В 1971 г. ему присвоено ученое звание профессора Уральского государственного университета им. А.М. Горького. В 1987 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1991 г. — действительным членом РАН.

А.Ф. Сидоров — крупный ученый в области математических методов механики сплошной среды. Сфера его научных интересов весьма обширна. Так, он внес значительный вклад в развитие аналитических методов исследования краевых задач в газовой динамике и гидродинамике. Им получены общие результаты в теории бегущих волн, впервые выведены уравнения тройных волн, построены серии точных решений, доказаны теоремы о примыкании бегущих волн различных рангов.

Развивая метод характеристических рядов для нелинейных задач газовой динамики, Анатолий Федорович решил задачи об истечении газа в вакуум из замкнутых объемов, о разрушении потенциальных течений, о распространении ударных волн. Им предложены новые конструкции рядов для решения нелинейных задач математической физики.

В работах А.Ф. Сидорова построены и исследованы новые широкие классы решений уравнений механики сплошной среды, обладающие свойством линейности поля скоростей по части пространственных координат.

С именем А.Ф. Сидорова связана разработка законов оптимального управления безударным сжатием вещества до произвольной плотности. Он описал новые процессы сжатия, которые по сравнению с ранее известными процессами требуют меньших затрат энергии при получении больших плотностей вещества. Этот эффект был достигнут за счет неравномерности сжатия по различным направлениям.

Другое направление его деятельности — разработка численных методов решения краевых задач механики сплошной среды, необходимых для оптимального функционирования сложных технических конструкций. Полученные результаты используются крупными российскими организациями в практике конструирования и создания объектов новой техники.

А.Ф. Сидоров был руководителем комплексных тем по исследованию колебательных процессов в ракетных двигателях на твердом топливе (РДТТ), координируя работу многих организаций. Он участвовал в создании эффективных методов математического моделирования газодинамических и акустических процессов в РДТТ. Им разработаны постановки задач, связанные с исследованием устойчивой работы РДТТ, методики расчета частот собственных колебаний на фоне развитых вихревых потоков газа. Результаты этих изысканий существенно продвинули разработку методов проектирования РДТТ для различных классов ракет, позволяющих исключить акустическую неустойчивость при их эксплуатации. Данный цикл работ в 1999 г. был удостоен Государственной премии Российской Федерации в области науки и технологий (А.Ф. Сидоров, О.Б. Хайруллина, О.В. Коковихина).

Под руководством и при непосредственном участии А.Ф. Сидорова решен ряд баллистических задач динамики пространственного движения и трудных пространственных нестационарных задач газовой динамики, разработаны алгоритмы расчета термоупругих и термовязкоупругих напряжений в телах сложных форм.

А.Ф. Сидоров возглавлял цикл исследований по разработке эффективных вариационных методов построения оптимальных криволинейных адаптивных сеток в двумерных и трехмерных областях сложных конфигураций, использующихся для решения задач механики сплошных сред. Программа, разработанная по его методике и автоматизирующая процесс выбора расчетной сетки, до сих пор входит в комплексы программ при расчете задач энерговыделения как в РФЯЦ–ВНИИТФ, так и в РФЯЦ–ВНИИЭФ.

Созданные Анатолием Федоровичем аналитические и численные методы открыли новые пути изучения нелинейных задач механики сплошной среды и получили признание в нашей стране и за рубежом, нашли широкое распространение и дальнейшее развитие в работах его учеников. А.Ф. Сидоров награжден орденом Трудового Красного Знамени и двумя медалями.

Он выступил одним из инициаторов развития в нашей стране нового перспективного направления — практической реализации идей распараллеливания вычислений для решения фундаментальных задач научно-технического прогресса. Данное направление работ включает создание многопроцессорных вычислительных систем, системных и прикладных программных средств, разработку математических методов и алгоритмов с широким распараллеливанием вычислений и обработки информации. Практической реализацией идей распараллеливания явилась комплексная программа создания многопроцессорных супер-ЭВМ и параллельных вычислительных технологий, одним из руководителей которой был Анатолий Федорович. Эта программа, выполняемая в широкой кооперации, реализована в семействах мультипроцессорных вычислительных систем МВС-100–МВС-1000, позволяющих решать важные прикладные задачи качественно нового уровня сложности.

В Институте математики и механики УрО РАН на базе МВС-100 был создан современный информационно-вычислительный центр, который постоянно наращивает мощность и в настоящее время входит в пятерку лучших в СНГ суперкомпьютеров. Под руководством Анатолия Федоровича была развернута деятельность по телекоммуникационному обеспечению УрО РАН и Уральского региона в целом.

А.Ф. Сидоровым опубликовано более 160 научных работ и одна монография. Работы по основным направлениям его научной деятельности представлены в [48]. В числе учеников Анатолия Федоровича 5 докторов и 19 кандидатов наук.

Занятия наукой Анатолий Федорович сочетал с педагогической деятельностью в качестве профессора Уральского государственного университета им. А.М. Горького, где он на протяжении многих лет читал спецкурсы по аналитическим и численным методам решения задач механики сплошной среды и проводил большую работу по подготовке высококвалифицированных кадров. Он был организатором кафедры параллельных компьютерных технологий УрГУ при ИММ УрО РАН и ее заведующим.

Анатолий Федорович получил признание и в качестве организатора науки. Он являлся председателем Объединенного ученого совета по математике, механике и информатике УрО РАН, членом Президиума УрО РАН, председателем специализированного совета по защитам диссертаций при ИММ УрО РАН.

В 1983 г. А.Ф. Сидоров был избран членом Национального комитета по теоретической и прикладной механике. Он являлся членом Совета Российского фонда фундаментальных исследований, членом редколлегий журналов “Моделирование в механике”, “Численные методы механики сплошной среды”, “Журнал вычислительной математики и математической физики”, “Вопросы атомной науки и техники”, “Вычислительные технологии”, “Theoretical and Applied Mechanics”, “Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling”.

Возглавляемые им Всероссийская школа-семинар “Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа” и Всероссийское совещание по проблемам построения сеток для численного решения задач математической физики были широко известны в нашей стране и за рубежом.

А.Ф. Сидоров был азартным и талантливым спортсменом. Он умел сделать свою жизнь и жизнь своих близких и друзей интересной и содержательной. В числе его увлечений большой и настольный теннис, шахматы, лыжи.

31 марта 1999 г. А.Ф. Сидоров ушел из жизни в расцвете творческих сил, когда много важных дел было начато и еще больше задумано. Выдающийся ученый, самобытный человек, он внес большой вклад в развитие науки и оставил глубокий след в памяти друзей и коллег, в истории института и города.

Одной из премий имени выдающихся ученых УрО РАН является премия имени академика А.Ф. Сидорова. В 2003 г. эту премию получил ученик Анатолия Федоровича — В.А. Кукушкин, в 2012 г. — ученики Анатолия Федоровича — Л.И. Рубина и О.Н. Ульянов.

Регулярно проводится Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященная памяти А.Ф. Сидорова.

Имя академика А.Ф. Сидорова внесено в Большую Российскую энциклопедию и в Большой Энциклопедический словарь, упоминается в персоналиях Музея истории Екатеринбурга, в именном указателе Уральского государственного университета.

В Институте ежегодно проводятся соревнования по лыжам на кубок А.Ф. Сидорова, а в УрО РАН — комплексная спартакиада имени А.А. Поздеева и А.Ф. Сидорова.

Светлая память о талантливом ученом сохранится в начатых им исследованиях и проектах, которые продолжаются и успешно реализуются его учениками и последователями.

2. О разработках отдела прикладных задач

20 февраля 2013 г. исполнилось 50 лет со дня основания отдела прикладных задач ИММ УрО РАН, которым долгое время руководил Анатолий Федорович Сидоров. В настоящее время в отделе реализуются многие программы, инициированные Анатолием Федоровичем. Среди них следует отметить изыскания по широкому комплексу проблем, связанных с задачами механики сплошной среды (М.Ю. Филимонов, О.В. Ушакова, Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов, К.В. Емельянов, Н.А. Ваганова, О.О. Коврижных, Т.Н. Бронина, М.А. Чащин, Н.А. Артемова, А.И. Короткий, И.А. Цепелев, Ю.В. Стародубцева), исследования по проблемам построения оптимальных сеток для расчетов задач многокомпонентной газовой динамики (О.В. Ушакова, Т.Н. Бронина, Н.А. Артемова, Д.И. Неудачин), численному моделированию переноса излучения (О.Н. Ульянов, Л.И. Рубина, М.А. Чащин), по построению точных решений нелинейных уравнений в частных производных и приближенных решений нелинейных уравнений в частных производных в виде специальных рядов (М.Ю. Филимонов, О.Н. Ульянов, Л.И. Рубина, Н.А. Ваганова). Необходимую помощь сотрудникам отдела при работе с компьютерами оказывает Д.И. Неудачин.

Важное направление научно-исследовательской работы отдела связано с разработкой методов исследования и решения нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными с приложениями к решению прикладных задач. В 2003–2012 гг. предложены и развивались новые аналитические методы. Метод, использующий характеристики нелинейных дифференциальных уравнений и систем, позволил объяснить причины возникновения некоторых физических явлений и построить полные интегралы решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений (Л.И. Рубина [39]). На основе метода выделения специальных классов движений сплошных сред, характеризующихся линейностью поля скоростей по части пространственных координат, построены точные решения уравнений газо- и гидродинамики (О.Н. Ульянов [53]). С помощью геометрического метода исследования и решения дифференциальных уравнений с частными производными, рассматривающего “изнутри” математическую модель процесса, выделено направление, в котором процесс развивается наиболее интенсивно. Благодаря такому выделению появляется возможность заменить модель нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, описывающую рассматриваемое явление, моделью из обыкновенных дифференциальных уравнений (Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов [41–44]). Предложенный Л.И. Рубиной метод использования характеристик позволил получить новые точные решения нелинейного уравнения нестационарной одномерной фильтрации [40]. Методом нахождения специальных классов движений сплошных сред, характеризующихся линейностью поля скоростей по части пространственных координат, О.Н. Ульянов получил новые точные решения для ряда моделей уравнений механики сплошных сред (невязкий газ, вязкая или гипервязкая несжимаемая жидкость, магнитная гидродинамика и др.), провел анализ торнадоподобных вихрей [53].

Геометрический метод исследования применен для широкого класса нелинейных уравнений в частных производных (уравнение потенциальных течений газа [41], уравнение нестационарной фильтрации [42], уравнение пограничного слоя [43], ряд уравнений теплопроводности [43; 44]). Геометрический метод исследования уравнения потенциала позволил вывести точные уравнения для формы ударной волны, отделяющей область покоя и область постоянного движения от области потенциального движения газа [41]. Благодаря использованию геометрического метода для уравнения нестационарной фильтрации удалось получить аналитические формулы фронта, отделяющего область фильтрации от области покоя [42]. На примере уравнения нелинейной теплопроводности показано, как геометрический подход позволяет в некоторых случаях решение нелинейного уравнения в частных производных высшего порядка сводить к решению специальным образом построенного уравнения первого порядка [44]. По результатам исследования одного из уравнений нелинейной теплопроводности геометрическим методом установлено, что процессы, описываемые этим уравнением, развиваются по сценарию конической рефракции [43]. В свое время Л.Г. Лойцянским была предложена задача об обтекании пластины продольным потоком несжимаемой вязкой жидкости. Решение этой краевой задачи основано на правдоподобных физических представлениях о его виде. Применение геометрического метода позволило построить точное решение этой задачи при определенном выборе произвольных постоянных [43].

В отделе с 1975 г. развивается аналитический подход к исследованию и получению решений нелиненых уравнений в частных производных в виде сходящихся рядов по степеням специально выбираемых функций с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами (метод специальных рядов). Идейная основа этого метода предложена А.Ф. Сидоровым [46] и углублена впоследствии его учениками С.С. Титовым, М.Ю. Филимоновым, С.В. Вершининым, Н.А. Вагановой, О.В. Коковихиной, Л.Г. Корзуниным. Обзор исследований, выполненнных в данном направлении, содержится в работах [78; 80]. В отделе прикладных задач с помощью метода специальных рядов были получены следующие результаты: построены специальные ряды по степеням новых базисных функций для представления решений некоторых классов нелинейных эволюционных уравнений и исследована сходимость этих рядов; показана возможность использования функционального произвола в базисных функциях для доказательства глобальной сходимости специальных рядов [60–69]; построены специальные ряды для представления решений некоторых классов начально-краевых задач для нелинейных волновых уравнений (в том числе и в сложных двумерных областях) с точным удовлетворением нулевых краевых условий [60; 66; 67; 69]; разработан метод генерации новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными в виде суммы известного точного решения и специального ряда по степеням базисных функций с функциональным произволом [62; 64; 102]; выделен класс нелинейных гиперболических уравнений, для которых с помощью аппарата функций Ляпунова удалось обосновать применимость обобщенного метода Фурье [61; 79]; установлена возможность использования функционального произвола в базисных функциях для доказательства разрешимости начально-краевых задач с заданными краевыми условиями для нелинейных эволюционных уравнений (типа обобщенного уравнения Кортевега — де Фриза), для которых вопрос разрешимости таких задач оставался открытым [80]; исследована модель движения трубопровода под действием протекающей в нем жидкости, найдены новые точные решения уравнений, описывающих данный процесс [2; 3].

В отделе прикладных задач ИММ УрО РАН уже более тридцати лет развивается вариационный подход к построению оптимальных сеток в областях геометрически сложной формы. Этот подход был предложен А.Ф. Сидоровым в конце пятидесятых годов, когда он работал во ВНИИТФ. Тогда же была создана первая программа автоматического выбора расчетной сетки и предложена методика МОПС (массовые оптимальные сетки) для построения оптимальных одномерных сеток [45], близких к равномерным с заданными значениями граничных интервалов. Описание алгоритма было опубликовано в 1966 г. Методика МОПС использовалась при решении задач энерговыделения в российских федеральных ядерных центрах в г. Сарове и Снежинске [37]. Позднее, уже в отделе, была предложена концепция построения криволинейных сеток в областях сложной формы, основанная на минимизации функционалов, отвечающих за близость сеток к определенным видам качеств: равномерности, ортогональности и адаптации к решениям дифференциальных задач [49; 50] (1981 г. — А.Ф. Сидоров, Т.И. Шабашова, 1985 г. — А.Ф. Сидоров, О.В. Ушакова). В рамках этой концепции были созданы и разработаны программы построения сеток, в частности программа МОПС-2 (многосвязные оптимальные сетки) и ее версии для параллельного расчета геометрически оптимальных структурированных и блочно-структурированных сеток в двумерных односвязных и многосвязных областях геометрически сложной формы со сложной топологией (О.Б. Хайруллина, А.Ф. Хайруллин, Н.А. Артемова [91;97]), программы для построения одномерных и двумерных оптимальных адаптивных сеток, в том числе и программы для комплексов ЭВМ параллельного действия (О.В. Ушакова [50; 55; 56; 98]). Были разработаны алгоритмы и программы для построения невырожденных начальных сеток, используемых в качестве начальных приближений для итерационных процедур расчета сеток, на основе R-функций — для двумерных областей звездного типа ([9] И.А. Гасилова) и на основе геометрического подхода — для трехмерных областей (А.Ф. Сидоров, Т.Н. Бронина [34]). Двумерные оптимальные сетки использовались для решения различных задач математической физики, в частности для моделирования вихревых течений газа в каналах сложных геометрий [1; 70; 71; 92].

Применение оптимальных гладких блочно-структурированных криволинейных сеток явилось весьма существенным фактором при решении прикладных задач [1; 70; 71; 92]. Хорошие аппроксимационные качества используемых сеток [12; 75; 77] стали основой достигнутых результатов. Работы [1; 70; 71; 91; 92] — это только часть большого цикла исследований по разработке эффективных методов моделирования газодинамических и акустических процессов в камерах сгорания твердотопливных ракетных двигателей, за которые большой группе ученых, в том числе А.Ф. Сидорову, О.Б. Хайруллиной, О.В. Коковихиной, была присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и технологий.

Точные решения для специальных вариационных задач расчета сеток в двумерном случае были найдены А.Ф. Сидоровым [47], в трехмерном — Л.И. Рубиной [38]. Эти решения могут быть использованы в качестве тестов для алгоритмов и программ расчета сеток.

К.В. Емельяновым проведены теоретические исследования по применению оптимальных сеток к численному решению задач с погранслоями [12; 77].

В трехмерном случае подход описан в [93; 96; 97]. Его основной чертой является специальный способ формализации критерия близости сетки к равномерной, обеспечивающий вместе с критерием ортогональности гладкость сеток, реализацию различных краевых условий для построения сеток и возможность создания эффективных вычислительных процедур для расчета сеток на основе дискретных и вариационных формулировок. Первый опыт по созданию алгоритмов построения трехмерных сеток получен Т.Н. Шабашовой в 1986 г. [74].

Дальнейшее развитие подхода [76] связано с созданием методов построения трехмерных сеток, предназначенных для численного моделирования многокомпонентных сред и других важных инженерных и прикладных задач.

Для трехмерных сеток О.В. Ушаковой были предложены основы численного анализа сеток [57; 58; 76; 99–101]. М.Ф. Прохоровой доказан ряд теорем о гомеоморфизмах отображений, которые используются для теоретического обоснования алгоритмов построения сеток [95].

Были созданы трехмерные технологии построения сеток в областях вращения, алгоритм и программа построения начальных сеток (Т.Н. Бронина [6]), предложены способы описания геометрий блочных конструкций. С их использованием (О.В. Ушакова [59; 76]) были разработаны алгоритмы и программы для расчета и перестройки трехмерных регулярных сеток в областях вращения. И.А. Гасиловой разработаны алгоритм и программа построения трехмерных сеток в трубопроводах [76].

Использование созданных в отделе программ позволило существенно повысить эффективность математического моделирования многокомпонентных сред.

О.Б. Хайруллиной и Н.А. Артемовой на основе программы МОПС-2 были созданы методика и программа МОПС-3 построения трехмерных сеток с помощью вращения двумерных сеток вокруг оси [76]. Методика позволяет строить трехмерные блочно-регулярные сетки сложных топологий в односвязных и многосвязных областях вращения, предназначенные для численного решения задач обтекания.

В настоящее время разрабатываются методы расчета сеток в деформированных областях вращения.

Развитие методики моделирования переноса излучения и ее численной реализации осуществлялось в нескольких направлениях. Во-первых, были разработаны методики и созданы программы в случае фойгтовских контуров излучения и поглощения для интегро-дифференциальных уравнений переноса, вычисляющих интенсивность излучения в линиях и в непрерывном спектре раздельно (Е.Ф. Леликова, Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов, М.А. Чащин [35; 36]). Во-вторых, усложнялась физическая модель задачи. В настоящее время методика основывается на новой модели расчета интенсивности излучения, учитывающей пересечение резонансных линий, и включает в себя уравнение энергобаланса для случая лучистого равновесия (О.Н. Ульянов, М.А. Чащин, Л.И. Рубина). В-третьих, усовершенствованы методики, основанные на распараллеливании алгоритмов, — создана программа, использующая DVM-систему параллельного программирования, что позволило проводить расчеты на любом множестве процессоров. Достигнуто приемлемое время расчетов достаточно сложных физически содержательных задач, что позволяет проводить серийные инженерные расчеты с учетом до 1000 резонансных линий (М.А. Чащин, О.Н. Ульянов, Л.И. Рубина [54; 73]).

Численное решение дифференциальных задач с сингулярным возмущением разностными методами вызывает затруднение ввиду наличия особенностей типа пограничного слоя. Если не учитывать эти особенности и использовать традиционные классические разностные схемы, то ошибки решений этих схем по сравнению с точным решением становятся большими, когда параметр возмущения стремится к нулю. Для приближенного решения таких задач К.В. Емельяновым в [13] рассматривались разностные схемы типа экспоненциальной подгонки. Доказывалась равномерная по параметру возмущения сходимость таких схем, когда число точек разностной сетки стремится к бесконечности. Асимптотическое поведение решений некоторых классов сингулярно возмущенных задач с двумя малыми параметрами изучается О.О. Коврижных совместно А.Р. Данилиным (отдел уравнений математической физики). Новизна проблематики исследования начальной задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в том, что малые параметры, стоящие в уравнениях системы каждый при своей производной, стремятся к нулю независимо друг от друга. Таким образом, речь идет о построении асимптотики решения, равномерно пригодной при любых соотношениях между малыми параметрами [10; 18]. В настоящее время основное внимание уделяется изучению асимптотики решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления. Исследована задача о быстродействии для одной линейной сингулярно возмущенной системы с малым возмущением начальных данных. Особенностью постановки задачи является наличие многомерного управления, значения которого принадлежат гладкому ограничивающему множеству. Построена и обоснована асимптотика времени быстродействия относительно двух малых параметров: малого параметра при производных в уравнениях системы и малого возмущения начальных условий [11].

С 2009 г. в отделе параллельно с методикой расчета тепловых полей от подземного трубопровода (Н.А. Ваганова [4; 7; 8]) стало развиваться новое направление исследований, связанное с долгосрочным прогнозированием изменений в вечной мерзлоте от добывающих скважин, работающих с различными техническими системами, и разработкой специализированного программного обеспечения для нефтегазовой промышленности и строительства. Для моделирования распространения тепла в вечномерзлых грунтах от добывающих скважин и других объектов были разработаны новая математическая модель и комплекс программ Wellfrost (Н.А. Ваганова и М.Ю. Филимонов), в которых учтены климатические и физические факторы, а также и инженерные особенности конструкций добывающих скважин и других используемых технических систем [81–83]. Данный комплекс программ был апробирован на 7 нефтегазовых месторождениях, расположенных в зоне вечной мерзлоты.

В ноябре 2000 г. руководителем отдела стал доктор физико-математических наук, профессор А.И. Короткий. Наряду с традиционными в отделе начали разрабатывать новые направления исследований.

Одно из таких направлений связано с аналитическим и численным исследованием моделей динамики высоковязкой жидкости (А.И. Короткий, И.А. Цепелев [14–17;19;23;28–33;84–90;94]). Подобные модели находят многочисленные приложения в геофизике и геодинамике при моделировании различных процессов в земных недрах (зарождение и формирование осадочных бассейнов, образование и эволюция соляных диапиров, развитие нефтегазовых месторождений и т.д.).

Важное направление исследований составляют обратные задачи (ретроспективные, граничные, коэффициентные) для моделей высоковязкой жидкости (А.И. Короткий, И.А. Цепелев, Д.А. Ковтунов, Ю.В. Стародубцева [15–17; 28–33; 52; 84–90; 94]). В рамках этого направления исследованы стационарные и нестационарные модели тепловой конвекции указанной жидкости. Исследована слабая разрешимость соответствующих краевых задач в различных функциональных пространствах. Разработаны методы, алгоритмы и программные средства решения прямых и обратных задач, в том числе и на ЭВМ параллельного действия. Полученные результаты нашли применение в геофизике при численном моделировании задач прогноза и реконструкции состояний земных недр [15–17; 28–30; 32; 33; 84–90]. Создана новая методология решения обратных задач по моделированию динамики мантии Земли в обратном времени, которая базируется на анализе современных результатов геодезических измерений и сейсмотомографии земных недр, данных об их минералогическом составе и температурном режиме. Используется также аппарат математического моделирования сложных процессов в сплошных средах, включающих фазовые переходы, диссипацию тепла, адиабатический нагрев и латентные источники тепла. Данная методология признана в мировом сообществе, неоднократно обсуждалась среди специалистов и опубликована в зарубежных журналах [84–90]. Методология может быть использована для реконструкции динамики мантии и литосферы планет в геологическом прошлом вплоть до пермо-триасовой границы. Создан комплекс программ для моделирования динамических процессов в верхней мантии Земли в районе Курильских островов и Японского моря [90]. Исходной информацией служили распределения температуры вещества в данном регионе и реология среды. Этот район интересен специалистам тем, что здесь часто происходят землетрясения, спусковым механизмом для которых является тонущий в земной коре твердый осколок континентальной плиты, образовавшийся вследствие столкновения евразийской, тихоокеанской и филиппинской тектонических плит. Расчеты проводились на мультипроцессорном вычислительном кластере “Уран” (ИММ УрО РАН).

Для рассматриваемых моделей динамики жидкости поставлены различные классы задач оптимального управления, получены необходимые и достаточные условия оптимальности, найдены градиенты функционалов качества, построены итерационные методы приближенного нахождения оптимального управления, разработаны программные средства численного нахождения оптимального управления (А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов [23; 24]).

Проводятся активные исследования прямых и обратных задач теории оптимального управления для систем с распределенными параметрами (А.И. Короткий, Д.О. Михайлова, Е.И. Грибанова [20–22; 25–27; 51]). В частности, в этом направлении исследований рассматриваются задачи о восстановлении априори неизвестных распределенных и граничных управлений в параболических и гиперболических системах по результатам приближенных апостериорных наблюдений за движениями этих систем. Эти задачи являются некорректными. Для их решения предложены различные статические и динамические регуляризирующие алгоритмы восстановления со специальными стабилизаторами. Использование таких стабилизаторов позволяет получить в ряде случаев более тонкие результаты, чем приближение искомого управления в пространствах Лебега. В частности, на этом пути удается обосновать кусочно-равномерную сходимость регуляризованных приближений, что открывает возможность для численного восстановления тонкой структуры искомого управления. Выполнены конечномерные аппроксимации задач восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О трех методах численного моделирования дозвуковых течений в осесимметричных каналах сложной формы / В.Ф. Ахмадеев, А.Ф. Сидоров, Ф.Ф. Спиридонов, О.Б. Хайруллина // Моделирование в механике. Новосибирск, 1990. Т. 4 (21), № 5. С. 15–25.
2. Динамика и статика трубопровода в поле сил тяжести / В.В. Башуров, Н.А. Ваганова, А.И. Кропотов, М.В. Пчелинцев, Н.А. Скоркин, М.Ю. Филимонов // Вест. Нижегород. ун-та им. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 61–62.
3. Нелинейная модель трубопровода в поле силы тяжести с движущейся по нему идеальной жидкостью / В.В. Башуров, Н.А. Ваганова, А.И. Кропотов, М.В. Пчелинцев, Н.А. Скоркин, М.Ю. Филимонов // Прикл. математика и техн. физика. 2012. Т. 53, № 1. С. 51–57.
4. **Башуров В.В, Ваганова Н.В, Филимонов М.Ю.** Численное моделирование процессов теплообмена в грунте с учетом фильтрации жидкости // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 3–18.
5. **Бронина Т.Н., Гасилова И.А., Ушакова О.В.** Алгоритмы для построения трехмерных структурированных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 875–883.
6. **Бронина Т. Н.** Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.
7. **Ваганова Н.А.** Моделирование нестационарных тепловых полей от заглубленного теплоизолированного трубопровода и его диагностика // Тр. Ин-та механики. Уфа: Гилем, 2007. Вып. 5. С. 127–133.
8. **Ваганова Н.А.** Существование решения разностной начально-краевой задачи для линейного уравнения теплопроводности с нелинейным краевым условием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 11–21.
9. **Гасилова И.А.** Алгоритм автоматического построения начального приближения криволинейной сетки для областей звездного типа // Вопр. атом. науки и техники. 1994. Вып. 3. С. 33–40. (Мат. моделирование физ. процессов.)
10. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Об асимптотике решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 6. С. 738–747.
11. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной линейной задаче быстродействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75.
12. **Емельянов К.В.** Применение оптимальных разностных сеток к решению задач с сингулярным возмущением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 6. С. 936–943.
13. **Емельянов К.В.** Разностная схема подгонки для сингулярно возмущенной задачи с точкой поворота // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 80–91.
14. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов / А.Т. Исмаил-заде, А.И. Короткий, Б.М. Наймарк, И.А. Цепелев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 9. С. 1399–1415.
15. Трехмерное моделирование обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции / А.Т. Исмаил-заде, А.И. Короткий, Б.М. Наймарк, И.А. Цепелев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 4. С. 614–626.
16. Эволюция тепловых плюмов в мантии Земли / А.Т. Исмаил-заде, А.И. Короткий, Д.П. Крупский, И.А. Цепелев, Дж. Шуберт // Докл. РАН. 2006. Т. 411, № 4. С. 523–526.
17. **Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Цепелев И.А.** Трехмерное численное моделирование обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции на основе метода квазиобращения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2277–2288.

18. **Коврижных О.О.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной системы линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1322–1331.
19. **Короткий А.И.** Разрешимость в слабом смысле одной краевой задачи, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 121–132.
20. **Короткий А.И., Грибанова Е.И.** Восстановление управлений в гиперболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 99–108.
21. **Короткий А.И., Грибанова Е.И.** Реконструкция управлений в гиперболических системах // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 64–78.
22. **Короткий А.И., Грибанова Е.И.** Восстановление граничных управлений в гиперболических системах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 154–169.
23. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Оптимальное управление тепловой конвекцией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №5. С. 103–112.
24. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, №2. С. 88–97. (Управление, устойчивость и обратные задачи динамики. Посвящается 70-летию академика РАН Ю.С.Осипова).
25. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление управлений в параболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 211–227.
26. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление граничных управлений в параболических системах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 178–197.
27. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление распределенных управлений в параболических системах динамическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 160–169.
28. Трехмерное моделирование обратной задачи неустойчивости Рэлея — Тейлора / А.И. Короткий, И.А. Цепелев, А.Т. Исмаил-заде, Б.М. Наймарк // Изв. УрГУ. 2002. № 22. С. 94–102. (Математика и механика; вып. 4.)
29. **Короткий А.И., Цепелев И.А.** Трехмерное моделирование прямых и обратных задач Рэлея — Бенара и Рэлея — Тейлора // Вопр. атом. науки и техники. 2002. Вып. 3. С. 22–33. (Мат. моделирование физ. процессов.)
30. **Короткий А.И., Цепелев И.А.** Трехмерное моделирование обратной задачи неустойчивости Рэлея — Бенара // Изв. УрГУ. 2003. № 26. С. 87–96. (Математика и механика; вып. 5.)
31. **Короткий А.И., Цепелев И.А.** Решение ретроспективной обратной задачи для одной нелинейной эволюционной модели // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 73–86.
32. **Короткий А.И., Цепелев И.А.** Численная реализация метода квазиобращения для решения обратной задачи тепловой неустойчивости Рэлея — Бенара // Изв. УрГУ. 2006. № 46. С. 79–89. (Математика и механика; вып. 10.)
33. **Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Т.** Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложением к задачам геодинамики // Изв. УрГУ. 2008. № 58. С. 78–87. (Математика и механика; вып. 11.)
34. **Кошкина Т.Н. (Бронина Т.Н.), Сидоров А.Ф.** Об одном геометрическом способе построения трехмерных разностных сеток // Числ. и аналит. методы решения задач механики сплошной среды: сб. Свердловск, 1981. С. 91–100.
35. Численное моделирование процессов переноса радиационного излучения / Е.Ф. Леликова, Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов, М.А. Чащин // Вест. Урал. гос. техн. ун-та. Екатеринбург: 2005. № 17 (69). С. 283–294.
36. Параллельные вычисления в задачах, возникающих при математическом моделировании переноса излучения / Е.Ф. Леликова, Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов, М.А. Чащин // Автоматика и телемеханика. 2007. Т. 68, № 5. С. 126–140.
37. **Потугина И.В.** Освоение и развитие методики программ расчета одномерных задач энерговыделения во ВНИИЭФ (1954–1986) // Вопр. атом. науки и техники. 1998. Вып. 2. С. 50–59. (Мат. моделирование физ. процессов.)
38. **Рубина Л.И.** Примеры точного решения задачи построения трехмерных оптимальных сеток // Вопр. атом. науки и техники. 1995. Вып. 4. С. 37–41. (Мат. моделирование физ. процессов.)

39. **Рубина Л.И.** О полном интеграле квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 95–104.
40. **Рубина Л.И.** О характеристиках и решениях одномерного нестационарного уравнения фильтрации // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, № 5. С. 829–836.
41. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.
42. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 209–225.
43. **Рубина Л.И.,Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 265–280.
44. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. мат. журнал. 2012. Т. 53, № 5. С. 1091–1101.
45. **Сидоров А.Ф.** Об одном алгоритме расчета оптимальных разностных сеток // Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1966. Т. 74. С. 147–151.
46. **Сидоров А.Ф.** О некоторых представлениях решений квазилинейных гиперболических уравнений // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1975. Т. 6, № 4. Р. 106–115.
47. **Сидоров А.Ф.** Примеры точного построения геометрически оптимальных двумерных сеток // Вопр. атом. науки и техники. 1994. Вып. 4. С. 18–22. (Мат. моделирование физ. процессов.)
48. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.:Физматлит, 2001. 576 с.
49. **Сидоров А.Ф., Шабашова Т.И.** Об одном методе расчета оптимальных разностных сеток для многомерных областей // Числ. методы механики сплошной среды. 1981. Т. 12, № 5. С. 106–123.
50. **Сидоров А.Ф., Ушакова О.В.** Об одном алгоритме расчета оптимальных разностных сеток и его приложениях // Числ. методы механики сплошной среды. 1985. Т. 16, № 5. С. 101–115.
51. **Соболева Д.О.** Реконструкция управлений в параболических системах // Вест. Бурят. гос. ун-та. 2010. Вып. 9. С. 59–67. (Математика и информатика.)
52. **Стародубцева Ю.В.** Реконструкция граничных режимов в обратных задачах тепловой конвекции // Математика, ее прил. и мат. образование, МПМО‘11: материалы 4-й Междунар. конф. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. Ч. 2. С. 154–157.
53. **Ульянов О.Н.** Об одном классе течений вязкой жидкости // Динамика жидкости и газа: сб. науч. тр. [Посвящ. 70-летию акад. РАН А.Ф. Сидорова]. 2003. С. 129–136. (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН; т. 9, № 2.)
54. **Ульянов О.Н., Рубина Л.И., Чащин М.А.** Численное моделирование переноса излучения на суперкомпьютерах // Соврем. проблемы прикл. математики и механики: теория, эксперимент и практика: тез. докл. конф. Новосибирск: Прайс-курьер’, 2011. С. 32–33.
55. **Ушакова О.В.** ЛАДА – экономичный алгоритм и программа построения двумерных криволинейных оптимальных адаптивных сеток в односвязных областях геометрически сложной формы // Вопр. атом. науки и техники. 1994. Вып. 3. С. 47–56. (Мат. моделирование физ. процессов.)
56. **Ушакова О.В.** Параллельный алгоритм и программа построения оптимальных адаптивных сеток // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. / ИММ УрО РАН. Свердловск, 1995. С. 182–194.
57. **Ушакова О.В.** Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894.
58. **Ушакова О.В.** Классификация шестигранных ячеек // Журн. вычисл. математики и мат. физики. Т. 48, № 8. С. 1426–1428.
59. **Ушакова О. В.** Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 150–180.
60. **Филимонов М.Ю.** О представлении решений смешанных задач для нелинейного волнового уравнения специальными двойными рядами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1625–1632.
61. **Филимонов М.Ю.** О применении функций Ляпунова при обосновании метода Фурье для нелинейных уравнений с частными производными // Вычисл. технологии. Новосибирск, 1993. Т. 2, № 5. С. 214–216.
62. **Филимонов М.Ю.** Применение специальных рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными в неограниченных областях // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1538–1543.

63. **Филимонов М.Ю.** О представлении специальными рядами решений нелинейных уравнений типа Коши — Ковалевской с неаналитическими начальными данными // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. № 2. С. 198–203.
64. **Филимонов М.Ю.** Применение метода специальных рядов для представления решений нелинейных уравнений с частными производными // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6 [спец. выпуск], ч. 2. С. 650–657.
65. **Филимонов М.Ю.** О представлении новыми конструкциями специальных согласованных рядов решений нелинейных уравнений с частными производными // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 3. С. 103–112.
66. **Филимонов М.Ю.** Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 801–808.
67. **Филимонов М.Ю.** Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1100–1107.
68. **Филимонов М.Ю.** Применение обобщенных систем базисных функций при построении решений нелинейных уравнений с частными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 4. С. 137–152.
69. **Филимонов М.Ю.** Применение метода специальных рядов для представления решений уравнения Линя — Рейснера — Цяня // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 181–201.
70. **Хайруллина О.Б.** Расчет стационарных дозвуковых вихревых потоков идеального газа в осесимметричных каналах сложных геометрий // Вопр. атом. науки и техники. 1990. Вып. 3. С. 32–39. (Мат. моделирование физ. процессов.)
71. **Хайруллина О.Б.** К расчету вихревых течений газа в каналах сложных конфигураций // Прикл. механика и техн. физика. 1996. Т. 37, № 2. С. 103–108.
72. **Хайруллин А.Ф., Хайруллина О.Б.** Построение оптимальных сеток в многосвязных областях сложных топологий на многопроцессорных машинах // Вопр. атом. науки и техники. 2002. Вып. 3. С. 33–39. (Мат. моделирование физ. процессов.)
73. **Чащин М.А., Ульянов О.Н., Рубина Л.И.** О развитии двух параллельных алгоритмов численного моделирования взаимодействия излучения с веществом // Парал. вычисл. технологии, ПаВТ‘2012: тр. конф. Новосибирск, 2012. С. 313–324.
74. **Шабашова Т.И.** О построении оптимальных криволинейных координатных сеток в трехмерных областях // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1986. Т. 17, № 1. С. 144–155.
75. **Широковская О.С.** Замечание к статье А.Ф.Сидорова “Об одном алгоритме расчета оптимальных разностных сеток” // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 2. С. 468–469.
76. Advanaces in Grid Generation / ed. by O.V. Ushakova. New-York: Novascince Publishers, 2005. 430 p.
77. **Emel’yanov K.V.** On optimal grids and their application to the solution of problems with a singular perturbation // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. Vol. 10, no. 4. P. 299–310.
78. **Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.** Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, no 2. P. 101–125.
79. **Filimonov M.Yu.** On the justification of the Fourier method to the solution of nonlinear partial differential equations // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1996. Vol. 11, no. 1. P. 27–39.
80. **Filimonov M.Yu.** Application of the method of special series in nonlinear mathematical physics // Proc. Steclov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S58–S77.
81. **Filimonov M.Yu., Vaganova N.A.** Permafrost defrosting as a result of extractive wells operating // Proc. 39 Summer School-Conf. “Advanced Problems in Mechanics”. Repino, 2011. P. 152–157.
82. **Filimonov M.Yu., Vaganova N.A.** Simulation of thermal fields in permafrost around engineering constructions in presence of seasonal cooling units // Proc. 40th Summer School-Conf. “Advanced problems in mechanics”. St.-Petersburg, 2012. C. 108–116.
83. **Filimonov M.Yu., Vaganova N.A.** Simulation of thermal fields in the permafrost with seasonal cooling devices // 9th Int. Pipeline Conf.: proceed. Alberta, 2012. P. 1–9. (IPC2012–90287).
84. Inverse problem of thermal convection: Numerical approach and application to mantle plume restoration / A.T. Ismail-Zadeh, G. Schubert, I.A. Tsepelev, A.I. Korotkii // Phys. Earth and Planetary Interiors. 2004. Vol. 145. P. 99–114.

85. Three-dimensional forward and backward modelling of diapirism: Numerical approach and its applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin / A. Ismail-Zadeh, I. Tsepelev, C. Talbot, A. Korotkii // Tectonophysics. 2004. Vol. 387, no. 1-4. P. 81–103.
86. Three-dimensional forward and backward numerical modeling of mantle plume evolution: Effects of thermal diffusion / A. Ismail-Zadeh, G. Schubert, I. Tsepelev, A. Korotkii // J. Geophys. Research. 2006. Vol. 111. P. 13–15. (DOI:10.1029/2005JB003782).
87. Quasi-reversibility method for data assimilation in models of mantle dynamics / A. Ismail-Zadeh, A. Korotkii, G. Schubert, I. Tsepelev // Geophys. J. Int. 2007. Vol. 170. P. 1381–1398. (DOI:10.1111/j.1365-246X.2007.03496.x).
88. Thermal evolution and geometry of the descending lithosphere beneath the SE-Carpathians: An insight from the past / A. Ismail-Zadeh, G. Schubert, I. Tsepelev, A. Korotkii // Earth and Planet. Sci. Lett. 2008. Vol. 273. P. 68–79. (DOI: 10.1016/j.epsl.2008.06.012).
89. Numerical techniques for solving the inverse retrospective problem of thermal evolution of the Earth interior / A. Ismail-Zadeh, A. Korotkii, G. Schubert, I. Tsepelev // Computers and Structures. 2009. Vol. 87. P. 802–811.
90. **Ismail-Zadeh A., Honda S., Tsepelev I.** Linking mantle upwelling with the lithosphere decent and the Japan Sea evolution: a hypothesis // Sci. Rep. 2013. Vol. 3. P. 1137. (DOI:10.1038/srep01137).
91. **Khairullina O.B.** Method of constructing block regular optimal grids in two-dimensional multiply-connected domains of complex geometries // Russian J. Numer. Anal. Math. Model. 1996. Vol. 11, iss. 4. P. 343–358.
92. **Khairullina O.B.** Modelling subsonic vortex gas flows in channels of complex geometries // Russian J. Numer. Anal. Math. Model. 1998. Vol. 13, iss. 3. P. 191–219.
93. **Khairullina O.B., Sidorov A.F., Ushakova O.V.** Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / eds. J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill. Boca Raton: CRC Press, 1998. P. **36**-1–**36**-25.
94. **Korotkii A.I., Tsepelev I.A.** Direct and inverse problems of high-viscosity fluid dynamics // Automation and Remote Control. 2007. Vol. 68, no. 5. P. 822–833. (DOI:10.1134/S0005117907050098).
95. **Prohorova M.P.** Problems of homeomorphism arising in the theory of grid generation // Proc. Steklov Inst. Math. 2008. Suppl. 1. P. S165–S182.
96. **Serezhnikova T.I., Sidorov A.F., Ushakova O.V.** On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling. Vol. 4, iss. 2. 1989. P. 137–155.
97. **Sidorov A.F., Khairullina O.B., Khairullin A.F.** Parallel algorithms of generation of optimal multi-block-structed two-dimensional and three-dimensional grids of large size // Numerical Grid Generation in Comput. Field Simulation / eds. M. Cross, B.K. Soni, J.F. Thompson, J. Hauser, P.R. Eiseman. 1998. P. 759–769.
98. **Ushakova O.V.** Algorithm of two-dimensional optimal grid generation // Numerical Grid Generation in Comput. Field Simulation: Proc. 5th Intern. Conf. 1996. Vol. 1. P. 37–46.
99. **Ushakova O.V.** Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells // SIAM J. Sci. Comput. 2001. Vol. 23, no. 4. P. 1274–1290.
100. **Ushakova O.V.** On nondegeneracy of three-dimensional grids // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S78–S100.
101. **Ushakova O.V.** Nondegeneracy tests for hexahedral cells // Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. 2011. Vol. 200. P. 1649–1658.
102. **Vaganova N.A.** Constructing new classes of solutions of nonlinear filtration equation by special consistent series // Fluid Dynamics: Proc. Steklov Inst. Maths. 2003. Suppl. 2. P. S182–S184.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА В L_0 ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. О. Леонтьева

Получены близкие двусторонние оценки наилучшей константы в неравенстве Бернштейна для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов в метрике L_0. Эти оценки дают, в частности, порядок поведения константы по степени полинома.

Ключевые слова: тригонометрический полином; производная Вейля; неравенство Бернштейна.

A. O. Leont'eva. Bernstein inequality in L_0 for the zeroth-order derivative of trigonometric polynomials.

Close two-sided estimates are obtained for the best constant in the Bernstein inequality for the zeroth-order derivative of trigonometric polynomials in the L_0 metric. These estimates give, in particular, the order of the behavior of the constant with respect to the order of the polynomial.

Keywords: trigonometric polynomial, Weyl derivative, Bernstein inequality.

1. Постановка и обсуждение задачи. Пусть $\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ есть множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1}$$

порядка $n \geqslant 1$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Для параметра p, удовлетворяющего условию $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, определим на $\mathscr{T}_n$ функционал $\|\cdot\|_p$ соотношениями

$$\|f_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{C_{2\pi}} = \lim_{p \to +\infty} \|f_n\|_p = \max\{|f_n(t)| \colon t \in \mathbb{R}\},$$

$$\|f_n\|_0 = \lim_{p \to +0} \|f_n\|_p = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |f_n(t)| dt \right);$$

лишь при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ этот функционал является нормой.

Дробной производной (производной Вейля) порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, полинома (1) называется полином

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos \left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} \right) + b_k \sin \left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right). \tag{2}$$

Для натуральных значений α дробная производная совпадает с классической: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. Богатую информацию о дробных производных и интегралах можно найти в монографии [1].

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011).

Формулой (2) определен линейный оператор на множестве $\mathscr{T}_n$. Оператор (2) есть оператор свертки

$$D^\alpha f_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t-u)\mathcal{D}_n^\alpha(u)du,$$

ядро которого есть производная порядка α ядра Дирихле:

$$\mathcal{D}_n^\alpha(u) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \cos\left(ku + \frac{\pi\alpha}{2}\right) = D^\alpha \mathcal{D}_n(u), \quad \mathcal{D}_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku.$$

Обозначим через $B_n^\alpha(p)$ норму оператора D^α на $\mathscr{T}_n$ относительно функционала $\|\cdot\|_p$, а точнее, положим

$$B_n^\alpha(p) = \sup\left\{\|D^\alpha f_n\|_p \colon \|f_n\|_p \leqslant 1, f_n \in \mathscr{T}_n\right\}. \tag{3}$$

Поскольку оператор (2) есть оператор свертки, то

$$B_n^\alpha(p) \leqslant B_n^\alpha(\infty), \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{4}$$

$$B_n^\alpha(p) \leqslant B_n^\alpha(0), \quad 0 \leqslant p \leqslant \infty;$$

первое неравенство хорошо известно, второе доказано в [2] для более общей ситуации.

Величина (3) — наименьшая константа в неравенстве

$$\|D^\alpha f_n\|_p \leqslant B_n^\alpha(p)\|f_n\|_p, \quad f_n \in \mathscr{T}_n.$$

Таким неравенствам посвящено большое число работ; наиболее полно они изучены при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для $\alpha \geqslant 1$, и особенно для натуральных α (см. работы [3–7] и приведенную там библиографию). Известно, что при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для $\alpha \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|f_n^{(\alpha)}\|_{L_p} \leqslant n^\alpha \|f_n\|_{L_p}, \quad f_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C}). \tag{5}$$

Это неравенство точное и обращается в равенство лишь на полиномах $ae^{int} + be^{-int}$, $a, b \in \mathbb{C}$; так что $B_n^\alpha(p) = n^\alpha$, если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \geqslant 1$.

Наиболее известным в этой тематике является неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_{C_{2\pi}} \leqslant n\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \quad f_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R}), \tag{6}$$

в равномерной норме (т.е. при $p = \infty$) для вещественных тригонометрических полиномов. С. Н. Бернштейн [8] получил в 1912 г. неравенство (6) с константой n для нечетных и четных тригонометрических полиномов и, как следствие, с константой $2n$ на классе всех полиномов из $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$. В переиздании [9] работы [8] в собрании сочинений С. Н. Бернштейна приведено неравенство (6) на всем классе $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ тригонометрических полиномов. В авторских комментариях [10, п. 3.4] к работе [9] С. Н. Бернштейн пишет, что приведенный в [9] вывод, показывающий, что общее неравенство является элементарным следствием того же неравенства для суммы синусов, сообщен ему Э. Ландау вскоре после появления диссертации [8] и впервые был опубликован в [11, § 10]. В 1914 г. М. Рисс [12; 13] (см. также, к примеру, [14, гл. 10]) получил неравенство (6) с наилучшей константой n с помощью известной интерполяционной формулы Рисса для производной тригонометрического полинома; это доказательство дает неравенство (6) уже на множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами. В 1933 г. А. Зигмунд с помощью интерполяционной формулы Рисса доказал (см. [14, гл. 10]) неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_{L_p} \leqslant n\|f_n\|_{L_p}, \quad f_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C}),$$

в пространствах L_p, $p \geqslant 1$; отсюда следует, что при $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ для любых натуральных n и α имеет место точное неравенство (5). В случае $0 \leqslant p < 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$ неравенство (5) в 1979 г. получил (иным путем) В. В. Арестов [15; 16]. При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для вещественных $\alpha \geqslant 1$ неравенство (5) обосновал П. И. Лизоркин [17].

Для значений $0 \leqslant \alpha < 1$ неравенство (5) изучено существенно хуже. Т. Банг [18] и, позже, С. П. Гейсберг [19] (см. [1, теорема 19.10 и примечания к § 19, п. 8]) показали, что при $0 \leqslant \alpha < 1$ справедливы оценки

$$n^\alpha \leqslant B_n^\alpha(\infty) \leqslant \frac{2^{1-\alpha} n^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \leqslant 2n^\alpha.$$

Г. Вилмес получил [20] более точную оценку сверху

$$B_n^\alpha(\infty) \leqslant 2^{1-\alpha} n^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Отсюда в силу (4) следует, что при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливы оценки

$$n^\alpha \leqslant B_n^\alpha(\infty) \leqslant 2^{1-\alpha} n^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

При $0 \leqslant p < 1$ для значений $0 \leqslant \alpha < 1$ величина (3) не изучалась. Полином $f_n(t) = \cos nt$ дает оценку $B_n^\alpha(p) \geqslant n^\alpha$. Однако эта оценка, скорее всего, грубая.

Нас интересует случай $\alpha = 0$. Здесь

$$D^0 f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = f_n(t) - \frac{a_0}{2}\,. \tag{7}$$

Введем обозначение $B_n(p) = B_n^0(p)$. С помощью равенства Парсеваля легко убедиться, что $B_n(2) = 1$. А. И. Козко нашел [3] величину $B_n(p)$ при $p = \infty$, а именно он доказал, что $B_n(\infty) = 2n/(n+1)$; на самом деле этот результат был получен в [3] для вещественных полиномов, однако с помощью стандартных рассуждений проверяется, что результат сохраняется и для полиномов с комплексными коэффициентами. Отсюда в соответствии с (4) следует, что

$$1 \leqslant B_n(p) \leqslant \frac{2n}{n+1}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

В данной статье исследуется величина $B_n(p)$ при $p = 0$, т. е. наименьшая константа в неравенстве

$$\left\|D^0 f_n\right\|_0 \leqslant B_n\left(0\right) \left\|f_n\right\|_0, \quad f_n \in \mathscr{T}_n. \tag{8}$$

Для величины $B_n(0)$ будут приведены близкие между собой оценки сверху и снизу. Точнее, будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ для величины $B_n(0)$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{4}\, C_{2n}^n \leqslant B_n(0) \leqslant 2C_{2n}^{n-1}. \tag{9}$$

Воспользовавшись известной формулой Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to +\infty,$$

находим

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!\, n!} \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{(2\pi)^2 n^2}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Поэтому для величины $B_n(0)$ справедливо следующее порядковое соотношение:

$$B_n(0) \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, величина $B_n(0)$ довольно быстро растет по n.

Результаты этой работы анонсированы в [21].

2. Некоторые известные результаты. Пусть $\mathscr{P}_m$ есть множество алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами степени (не выше) m. Рассмотрим на множестве $\mathscr{P}_m$ функционал

$$\|P_m\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|P_m\left(e^{it}\right)\right| dt\right).$$

Хорошо известно (см. библиографию в [22]), что если многочлен $P_m(z) = c_m \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)$ имеет отличный от нуля старший коэффициент c_m и $z_1, \ldots, z_m$ — его корни, то

$$\|P_m\|_0 = |c_m| \prod_{k=1}^{m} \max\left(1, |z_k|\right). \tag{10}$$

Многочлен $P_m \in \mathscr{P}_m$ удобно записывать в виде

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k c_k z^k. \tag{11}$$

Пусть

$$\Lambda_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda_k z^k \tag{12}$$

есть еще один многочлен из $\mathscr{P}_m$. Многочлен

$$\Lambda_m P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda_k c_k z^k \tag{13}$$

называют композицией Сеге многочленов (12) и (11). При фиксированном многочлене Λ_m формула (13) задает линейный оператор в $\mathscr{P}_m$, который удобно обозначать теми же символами Λ_m. Для композиции Сеге справедливо [2] точное неравенство $\|\Lambda_m P_m\|_0 \leqslant \|\Lambda_m\|_0 \|P_m\|_0$, которое на многочлене $P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k z^k = (1+z)^m$ обращается в равенство.

Формула

$$P_{2n}\left(e^{it}\right) = e^{int} f_n(t) \tag{14}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов f_n порядка n и множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов P_{2n} степени $2n$, при этом, очевидно,

$$\|P_{2n}\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f_n(t)|\, dt\right) = \|f_n\|_{L_0}.$$

Убедимся, что оператору (7) во множестве $\mathscr{T}_n$ соответствует в $\mathscr{P}_{2n}$ оператор композиции Сеге. Действительно, пусть $f_n \in \mathscr{T}_n$ и $g_n = D^0 f_n$. Сопоставим этим тригонометрическим полиномам по формуле (14) алгебраические многочлены P_{2n} и Q_{2n} такие, что

$$P_{2n}\left(e^{it}\right) = e^{int} f_n(t), \quad Q_{2n}\left(e^{it}\right) = e^{int} D^0 f_n(t).$$

Исходя из представления (1) полинома f_n, получаем следующие явные выражения многочленов P_{2n} и Q_{2n}:

$$P_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} z^{n-k} + \frac{a_0}{2} z^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} z^{n+k},$$

$$Q_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} z^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} z^{n+k}.$$

Нетрудно видеть, что Q_{2n} есть композиция $\Lambda_{2n}^0 P_{2n}$ многочлена P_{2n} и многочлена

$$\Lambda_{2n}^0(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^k - C_{2n}^n z^n = (1+z)^{2n} - C_{2n}^n z^n. \tag{15}$$

Таким образом, неравенство (8) эквивалентно неравенству

$$\left\|\Lambda_{2n}^0 P_{2n}\right\|_0 \leqslant B_n(0) \left\|P_{2n}\right\|_0, \quad P_n \in \mathscr{P}_{2n}.$$

Приведенные только что рассуждения влекут следующее утверждение.

Лемма 1. *При $n \geqslant 1$ для величины $B_n(0)$ имеет место формула*

$$B_n(0) = \left\|\Lambda_{2n}^0\right\|_0. \tag{16}$$

На полиноме $\cos^{2n}(t/2)$ неравенство (8) обращается в равенство. □

Поскольку неравенство (8) обращается в равенство на вещественном тригонометрическом полиноме, то оно является точным на множестве полиномов как с комплексными коэффициентами, так и с вещественными.

В дальнейшем изучается именно величина $\left\|\Lambda_{2n}^0\right\|_0$ для многочлена (15).

3. Оценка сверху. Следующее утверждение легко вытекает из известных фактов. Однако для полноты изложения мы приведем его доказательство.

Лемма 2. *Если коэффициенты алгебраического многочлена*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

действительны, неотрицательны и не возрастают: $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} \geqslant a_n > 0$, *то*

$$\|F\|_0 = a_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что многочлен F не может иметь корней, по модулю меньших 1 (подобное утверждение см. в [23, гл. 8, § 2]). Запишем многочлен F в виде

$$\begin{aligned} F(z) = &(a_0 - a_1) \\ &+ (a_1 - a_2)(1+z) \\ &+ (a_2 - a_3)\left(1 + z + z^2\right) + \cdots \\ &+ (a_{n-1} - a_n)\left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right) \\ &+ a_n\left(1 + z + \cdots + z^{n-1} + z^n\right). \end{aligned}$$

Положим $a_k - a_{k+1} = b_k$ $(k \neq n)$, $a_n = b_n$; поскольку коэффициенты многочлена не возрастают, то все b_k неотрицательные. Из полученного представления следует, что

$$F(z)(1-z) = \sum_{k=0}^{n} b_k\left(1 - z^{k+1}\right).$$

Если $|z| < 1$, то точка $1 - z^{k+1}$ лежит в открытом круге $|z - 1| < 1$. Поэтому $\operatorname{Re}\left(1 - z^{k+1}\right) > 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{Re}\left(F(z)(1-z)\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot \operatorname{Re}\left(1 - z^{k+1}\right) > 0.$$

Таким образом, действительно, многочлен F не имеет корней, по модулю меньших 1. Согласно формуле (10) будем иметь $\|F\|_0 = a_n \prod_{k=1}^{n} |z_k| = a_0$, где $\{z_k\}_{k=1}^n$ — корни F. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если у многочлена*

$$P_{2n}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-1} z^{n+1} + \cdots + a_2 z^{2n-2} + a_1 z^{2n-1} + a_0 z^{2n}$$

коэффициенты $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ *действительные, положительные и не убывают по* k, *то справедливо неравенство*

$$\|P_{2n}\|_0 \leqslant 2a_{n-1}.$$

Доказательство. Для многочлена P_{2n} имеет место формула

$$P_{2n}\left(e^{it}\right) = 2e^{nit} u\left(t\right), \quad u\left(t\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos\left(n-k\right) t.$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{n-k}.$$

Справедливо соотношение $u(t) = \operatorname{Re} Q(e^{it})$, которое влечет неравенство

$$\left|u\left(t\right)\right| \leqslant \left|Q\left(e^{it}\right)\right|.$$

Следовательно, $\|P_{2n}\|_0 = 2\left\|u\right\|_{L_0} \leqslant 2\left\|Q\right\|_0$. Многочлен Q удовлетворяет условиям леммы 2, в силу которой $\|Q\|_0 = a_{n-1}$. Лемма 3 доказана. □

Многочлен Λ_{2n}^0 удовлетворяет условию леммы 3. Поэтому $\left\|\Lambda_{2n}^0\right\|_0 \leqslant 2C_{2n}^{n-1}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При всех* $n \geqslant 1$ *имеет место оценка*

$$B_n(0) \leqslant 2C_{2n}^{n-1}.$$ □

4. Оценка снизу. В следующем утверждении будет обоснована оценка снизу величины $B_n(0)$, несколько более точная, чем соответствующая оценка в (9).

Теорема 3. *При всех* $n \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$B_n(0) \geqslant (C_{2n}^n)^{(n-1)/n}.$$

Доказательство. Для обоснования оценки снизу величины $B_n(0)$ будем исходить непосредственно из формулы (16). Преобразуем значения многочлена Λ_{2n}^0 на единичной окружности:

$$\Lambda_{2n}^0\left(e^{it}\right) = \left(1 + e^{it}\right)^{2n} - C_{2n}^n e^{int} = e^{int}\left(\left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}}\right)^{2n} - C_{2n}^n\right)$$

$$= e^{int}\left(2^{2n}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n} - C_{2n}^n\right) = e^{int} f_n\left(t\right),$$

здесь

$$f_n\left(t\right) = 2^{2n}\left(\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n} - \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right) = 2^{2n}\left(\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n} - a^n\right), \tag{17}$$

$$a = \left(\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right)^{1/n} = \frac{(C_{2n}^n)^{1/n}}{4}. \tag{18}$$

Разложим полином (17) на два множителя:

$$f_n(t) = 2^{2n}\left(\left(\cos\frac{t}{2}\right)^2 - a\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2(n-1-k)}\right).$$

Слагаемые последней суммы неотрицательные. Отбросив в этой сумме все слагаемые, кроме последнего, получаем поточечную оценку

$$|f_n(t)| \geqslant 2^{2n} a^{n-1} |g(t)|, \quad g(t) = \left(\cos\frac{t}{2}\right)^2 - a.$$

Следовательно, $\|f_n\|_{L_0} \geqslant 2^{2n} a^{n-1} \|g\|_{L_0}$.

Найдем $\|g\|_{L_0}$. Имеем

$$g(t) = \left(\cos\frac{t}{2}\right)^2 - a = \frac{1}{2}(1 + \cos t - 2a) = \frac{1}{2}(\cos t - b),$$

где $b = 2a - 1$. Из (18) видно, что $0 < a < 1$. Следовательно, $-1 < b < 1$, а поэтому можно подобрать φ такое, что $b = \cos\varphi$. Полиному g по формуле (14) соответствует многочлен

$$p(z) = \frac{1}{4}\left(1 - 2z\cos\varphi + z^2\right),$$

имеющий корни $z_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $z_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$, по модулю равные 1. Поэтому $\|g\|_{L_0} = \|p\|_0 = 1/4$. Таким образом, имеем

$$B_n(0) = \left\|\Lambda^0_{2n}\right\|_0 = \|f_n\|_{L_0} \geqslant 2^{2(n-1)} a^{n-1} = (C^n_{2n})^{(n-1)/n}.$$

Теорема 3 доказана. □

5. Завершение доказательства теоремы 1. В теоремах 2 и 3 получены оценки

$$(C^n_{2n})^{(n-1)/n} \leqslant B_n(0) \leqslant 2C^{n-1}_{2n}.$$

Поскольку $C^n_{2n} < 2^{2n}$, то

$$(C^n_{2n})^{(n-1)/n} = \frac{C^n_{2n}}{(C^n_{2n})^{1/n}} > \frac{C^n_{2n}}{4}.$$

Тем самым теорема 1 доказана. □

6. Значение точной константы в неравенстве Бернштейна для малых n. Найдем точное значение $B_n(0) = \left\|\Lambda^0_{2n}\right\|_0$ для $n = 1$ и $n = 2$. При $n = 1$ имеем $\Lambda^0_2(z) = 1 + z^2$. Поскольку оба корня этого многочлена находятся на единичной окружности, то $\left\|\Lambda^0_2\right\|_0 = 1$.

Пусть $n = 2$. В данном случае $\Lambda^0_4(z) = (1+z)^4 - 6z^2$. Этот многочлен разлагается на квадратичные множители:

$$\Lambda^0_4(z) = \left((1+z)^2 - \sqrt{6}z\right)\left((1+z)^2 + \sqrt{6}z\right) = \left(1 + \left(2 - \sqrt{6}\right)z + z^2\right)\left(1 + \left(2 + \sqrt{6}\right)z + z^2\right).$$

Отсюда легко найти все четыре его корня

$$z_{1,2} = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\sqrt{6} - 6}, \quad z_{3,4} = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{4\sqrt{6} + 6}}{2}.$$

Один из этих корней по модулю больше 1, другой меньше 1, и еще два корня лежат на единичной окружности. В результате получаем

$$\left\|\Lambda^0_4\right\|_0 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{4\sqrt{6} + 6}}{2} \approx 4.21.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 638 с.
2. **Арестов В.В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 7–18.
3. **Козко А.И.** The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 391–416.
4. **Арестов В.В.** Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 1–16.
5. **Arestov V.V.** Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials // Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov: Proc. of the Internat. conf. / Eds. G. Nikolov and R. Uluchev. Sofia: Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2012. P. 30–45.
6. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 6. С. 727–731.
7. **Arestov V.V. Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
8. **Bernstein S.** Sur l'ordre de la mailleure approximation des fonctions continues par des polynômesde degré donné // Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. 1912. Vol. 2, no. 4. P. 1–103.
9. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 11–104.
10. **Бернштейн С.Н.** Авторские комментарии. Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 526–562.
11. **Bernstein S.** Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Collection Borel. Paris: Gauthier-Villar, 1926. 213 p.
12. **Riesz M.** Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci. 1914. Vol. 158. P. 1152–1154.
13. **Riesz M.** Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1914. Bd. 23. S. 354–368.
14. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.
15. **Арестов В.В.** О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
16. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
17. **Лизоркин П.И.** Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 4, № 3. С. 109–126.
18. **Bang T.** Une inégalite de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques // Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. 1941. Vol. 19, no. 4. P. 28.
19. **Гейсберг С.П.** Аналоги неравенств С.Н. Бернштейна для дробной производной // Вопр. прикл. математики и мат. моделирования: краткие содержания докл. 25-й науч. конф. / Ленингр. инж.-строит. ин-т. Л., 1967. С. 5–10.
20. **Wilmes G.** On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^N$ // N. Numer. Funct. Anal. Optim. 1979. Vol. 1, no. 1. P. 57–77.
21. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов // Современные проблемы математики: тез. Междунар. (44-й Всерос.) молодеж. шк.-конф. / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2013. С. 276–277.
22. **Арестов В.В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.
23. **Маркушевич А.И.** Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1961. 335 с.

Леонтьева Анастасия Олеговна
студент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: sinusoida2012@yandex.ru

Поступила 12.12.2012

Том 19 № 2 2013

УДК 517.444

ОБОБЩЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ РАДИАЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВ[1]

Т. О. Логвинова

Работа посвящена обобщению двумерных непрерывных радиальных всплесков. Она включает в себя построение прямого и обратного интегральных всплеск-преобразований с помощью эллиптически симметричных всплесков, теорему о связи функций и их интегральных всплеск-преобразований, теорему о сходимости интегрального всплеск-преобразования в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и теорему о поточечной сходимости обратного интегрального всплеск-преобразования.

Ключевые слова: двумерные всплески, непрерывные всплески, интегральное всплеск-преобразование, обратное всплеск-преобразование.

T. O. Logvinova. Generalization of two-dimensional radial wavelets.

The paper is devoted to the generalization of two-dimensional radial wavelets. Direct and inverse integral wavelet transforms are constructed by means of elliptically symmetric wavelets. Theorems on the relation between functions and their integral wavelet transforms, on the convergence of the integral wavelet transform in $L^2(\mathbb{R}^2)$, and on the pointwise convergence of the inverse integral wavelet transform are proved.

Keywords: two-dimensional wavelets, continuous wavelets, integral wavelet transform, inverse wavelet transform.

Введение. Эллиптически симметричные функции

В монографии “Десять лекций по вейвлетам” И. Добеши пишет, что одна из возможностей определения непрерывного всплеск-преобразования в многомерном случае “состоит в выборе вейвлета $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, имеющего сферическую симметрию"[1, с. 67]. В этой работе мы обобщаем идею Добеши до эллиптически симметричных всплесков в пространстве $\mathbb{R}^2$. В работе определены прямое и обратное интегральные всплеск-преобразования с помощью эллиптически симметричных всплесков, доказаны теорема о связи функций и их интегральных всплеск-преобразований, теорема о сходимости интегрального всплеск-преобразования в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и теорема о поточечной сходимости обратного интегрального всплеск-преобразования.

Функция $f(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, называется (α, β)-*эллиптически симметричной*, если в эллиптической системе координат с параметрами $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ она представляется в виде

$$f(\boldsymbol{t}) = f\left(\alpha r \cos\theta, \beta r \sin\theta\right) = h_f(r), \text{ где } r = \sqrt{(t_1/\alpha)^2 + (t_2/\beta)^2},\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R}^2)$ будем определять следующим образом:

$$(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{t}) f(\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{t},$$

где под $\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{t}$ понимается скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, т. е. $\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{t} = \xi_1 t_1 + \xi_2 t_2$. Если $\widehat{f} \in L(\mathbb{R}^2)$, то обратное преобразование Фурье определяется как

$$(\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{t}) \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011).

На пространство $L^2(\mathbb{R}^2)$ определения продолжаются с помощью стандартного предельного перехода (см., например, [2]).

Лемма. *Пусть функция* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L(\mathbb{R}^2)$ *является* (α,β)*-эллиптически симметричной, тогда ее преобразование Фурье* $\widehat{\psi}$ *есть* $(1/\alpha, 1/\beta)$*-эллиптически симметричная функция.*

Доказательство. По условию леммы функция ψ представляется в виде $\psi(\boldsymbol{t}) = \psi\big(\alpha r\cos\theta, \beta r\sin\theta\big) = h_\psi(r)$, где $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Покажем, что найдутся такие положительные числа λ и μ, что $\widehat{\psi}\,(\lambda r'\cos\theta, \mu r'\sin\theta) = g(r')$ для всех $r' \geq 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$. Возьмем $\lambda = 1/\alpha$, $\mu = 1/\beta$. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\lambda r'\cos\gamma, \mu r'\sin\gamma)$, $\boldsymbol{t} = (\alpha r\cos\theta, \beta r\sin\theta)$, тогда

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(i\boldsymbol{\xi t})\psi(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t} = \int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \exp\Big(-i\Big(\alpha r\cos\theta\cdot\frac{r'}{\alpha}\cos\gamma + \beta r\sin\theta\cdot\frac{r'}{\beta}\sin\gamma\Big)\Big)h_\psi(r)\alpha\beta r d\theta dr$$

$$= \alpha\beta\int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \exp\big(-irr'\cos(\theta-\gamma)\big)d\theta h_\psi(r)rdr = \alpha\beta\int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\exp(-irr'\cos\theta)d\theta h_\psi(r)rdr = g(r').$$

Таким образом, функция $\widehat{\psi}$ является эллиптически симметричной и соответствующая функция $h_{\widehat{\psi}}(r) = g(r)$.

Лемма доказана.

1. Прямое эллиптически симметричное всплеск-преобразование

Эллиптически симметричную функцию $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L(\mathbb{R}^2)$, $\psi \not\equiv 0$, будем называть *эллиптически симметричным всплеском* (или просто всплеском), если выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\psi(\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{t} = 0.$$

Будем предполагать, что всплеск ψ удовлетворяет условию допустимости

$$C_\psi = \int\limits_0^\infty \frac{\big|h_{\widehat{\psi}}(r)\big|^2}{r}dr < \infty. \tag{1.1}$$

Отметим, что в силу леммы функцию $\widehat{\psi}$ можно представить в виде

$$\widehat{\psi}((r/\alpha)\cos\theta, (r/\beta)\sin\theta) = h_{\widehat{\psi}}(r), \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Поэтому $\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b}) = h_{\widehat{\psi}}\Big(a\sqrt{(b_1\alpha)^2 + (b_2\beta)^2}\Big)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, и для величины C_ψ справедливы равенства

$$\int\limits_0^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})\big|^2}{a}da = \int\limits_0^\infty \frac{\Big|h_{\widehat{\psi}}\Big(a\sqrt{(b_1\alpha)^2+(b_2\beta)^2}\Big)\Big|^2}{a}da = \int\limits_0^\infty\frac{\big|h_{\widehat{\psi}}(r)\big|^2}{r}dr = C_\psi. \tag{1.2}$$

Всплеск $\psi(\boldsymbol{t})$ порождает следующим образом семейство всплесков $\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t})$, где $a > 0$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$:

$$\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{a}\psi\Big(\frac{\boldsymbol{t}-\boldsymbol{b}}{a}\Big).$$

Нетрудно проверить, что поскольку $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L(\mathbb{R}^2)$, то для любых $a > 0$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ функция $\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}) \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L(\mathbb{R}^2)$ и

$$\widehat{\psi}^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\xi}) = a\exp(-i\boldsymbol{b\xi})\widehat{\psi}(a\boldsymbol{\xi}), \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|\widehat{\psi}^{a,\boldsymbol{b}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\psi^{a,\boldsymbol{b}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.4}$$

Радиальные или, другими словами, сферически симметричные всплески являются частным случаем эллиптически симметричных всплесков при $\alpha = \beta = 1$. По аналогии с радиальными всплесками для эллиптически симметричного всплеска ψ определим *прямое интегральное всплеск-преобразование* для $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ следующей формулой:

$$(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b}) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})\overline{\frac{1}{a}\psi\Big(\frac{\boldsymbol{t}-\boldsymbol{b}}{a}\Big)}d\boldsymbol{t} = \langle f, \psi^{a,\boldsymbol{b}}\rangle, \quad a > 0, \quad \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь и далее $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Отметим, что в силу равенства Парсеваля справедливо соотношение

$$(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\langle \widehat{f}, \widehat{\psi^{a,\boldsymbol{b}}}\rangle.$$

Теорема 1. *Пусть ψ является эллиптически симметричным всплеском, удовлетворяющим условию допустимости* (1.1). *Тогда для всех $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$*

$$\langle f, g\rangle C_\psi = \int\limits_0^\infty \frac{da}{a^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\overline{(W_\psi g)(a,\boldsymbol{b})}d\boldsymbol{b}, \tag{1.5}$$

причем интеграл сходится абсолютно.

Эта теорема доказана в одномерном случае и сформулирована в многомерном случае для сферически симметричных всплесков в [1, (2.4.1), (2.6.1)].

Доказательство. Введем обозначения $F_a(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{\psi}(a\boldsymbol{\xi})}$, $G_a(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{g}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{\psi}(a\boldsymbol{\xi})}$ и отметим, что поскольку $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L(\mathbb{R}^2)$, то $\widehat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ и ограничена, следовательно, $F_a, G_a \in L(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ для любого $a > 0$. Рассмотрим функцию $(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})$, применяя равенство Парсеваля, формулу (1.3) и введенные выше обозначения, преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned}(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b}) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{t})\overline{\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{t} = \frac{a}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\overline{\exp(-i\boldsymbol{b}\boldsymbol{\xi})\widehat{\psi}(a\boldsymbol{\xi})}d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{a}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} F_a(\boldsymbol{\xi})\exp(i\boldsymbol{b}\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \frac{a}{(2\pi)^2}\widehat{F_a}(-\boldsymbol{b}).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Заметим, что равенство (1.6) будет использовано также в доказательстве теоремы 3. Аналогично для $(W_\psi g)(a,\boldsymbol{b})$ имеем $(W_\psi g)(a,\boldsymbol{b}) = \frac{a}{(2\pi)^2}\widehat{G_a}(-\boldsymbol{b})$. Подставим полученные выражения в интеграл, стоящий в правой части (1.5), и вновь применим равенство Парсеваля:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \frac{da}{a^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\overline{(W_\psi g)(a,\boldsymbol{b})}d\boldsymbol{b} &= \frac{a^2}{(2\pi)^4}\int\limits_0^\infty \frac{da}{a^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{F_a}(-\boldsymbol{b})\overline{\widehat{G_a}(-\boldsymbol{b})}d\boldsymbol{b} \\ = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_0^\infty \frac{da}{a}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{F_a}(\boldsymbol{b})\overline{\widehat{G_a}(\boldsymbol{b})}d\boldsymbol{b} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty \frac{da}{a}\int\limits_{\mathbb{R}^2}F_a(\boldsymbol{b})\overline{G_a(\boldsymbol{b})}d\boldsymbol{b} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty \frac{da}{a}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\boldsymbol{b})\overline{\widehat{g}(\boldsymbol{b})}\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})\overline{\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})}d\boldsymbol{b}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Формально переставим в последнем интеграле порядок интегрирования, получим повторный интеграл:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\boldsymbol{b})\overline{\widehat{g}(\boldsymbol{b})} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})|^2}{a} da d\boldsymbol{b}.$$

Из условия $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ вытекает, что $\widehat{f}\ \overline{\widehat{g}} \in L(\mathbb{R}^2)$, поэтому и ввиду (1.2) повторный интеграл $\mathcal{J}$ сходится абсолютно и, значит, по теореме Фубини интеграл (1.7) тоже сходится абсолютно и равен $\mathcal{J}$. Наконец, в силу соотношения (1.2) имеем

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{da}{a^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (W_\psi f)(a, \boldsymbol{b})\overline{(W_\psi g)(a, \boldsymbol{b})} d\boldsymbol{b} = \frac{C_\psi}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\boldsymbol{b})\overline{\widehat{g}(\boldsymbol{b})} d\boldsymbol{b} = C_\psi \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{b})\overline{g(\boldsymbol{b})} d\boldsymbol{b} = C_\psi \langle f, g\rangle.$$

Теорема доказана.

Введем пространство $L^2(\mathcal{T}, a^{-3})$ комплекснозначных функций F, измеримых в области $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, с конечной нормой

$$\|F\|_{L^2(\mathcal{T}, a^{-3})} = \left(\int\limits_{\mathcal{T}} |F(a, \boldsymbol{b})|^2 \frac{da d\boldsymbol{b}}{a^3} \right)^{1/2}.$$

Определим в $L^2(\mathcal{T}, a^{-3})$ скалярное произведение

$$\langle F, G\rangle_{L^2(\mathcal{T}, a^{-3})} = \int\limits_{\mathcal{T}} F(a, \boldsymbol{b})\overline{G(a, \boldsymbol{b})} \frac{da d\boldsymbol{b}}{a^3}.$$

Тогда утверждение теоремы 1 принимает вид

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} C_\psi = \langle W_\psi f, W_\psi g\rangle_{L^2(\mathcal{T}, a^{-3})}. \tag{1.8}$$

Полагая в равенстве (1.8) $g = f$, получаем соотношение

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} C_\psi = \|W_\psi f\|^2_{L^2(\mathcal{T}, a^{-3})}. \tag{1.9}$$

Следствие. *Оператор W_ψ отображает пространство $L^2(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L^2(\mathcal{T}, a^{-3})$.*

2. Обратное эллиптически симметричное всплеск-преобразование. Сходимость в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$

О п р е д е л е н и е. Для функции $W_\psi f \in L^2\left(\mathcal{T}, a^{-3}\right)$ *обратное интегральное всплеск-преобразование* определяется формулой

$$(W_\psi^{-1} W_\psi f)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{da}{a^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (W_\psi f)(a, \boldsymbol{b}) \psi^{a, \boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{b},$$

которую нужно понимать по аналогии с прямым и обратным преобразованием Фурье в $L^2(\mathbb{R}^2)$ как

$$(W_\psi^{-1} W_\psi f)(\boldsymbol{t}) = \left(L^2\right) \lim_{\substack{A_1 \to 0+ \\ A_2, B_1, B_2 \to \infty}} \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{A_1 \le a \le A_2} \int\limits_{|b_1| \le B_1, |b_2| \le B_2} (W_\psi f)(a, \boldsymbol{b}) \psi^{a, \boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t})\, \frac{da d\boldsymbol{b}}{a^3}.$$

Это оправдывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть ψ является эллиптически симметричным всплеском, удовлетворяющим условию допустимости* (1.1), *тогда для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{A_1\to 0+\\ A_2,B_1,B_2\to\infty}} \left\| f - \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{A_1\le a\le A_2} \int\limits_{|b_1|\le B_1,|b_2|\le B_2} (W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\psi^{a,\boldsymbol{b}} \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $A = \{a\colon\ 0 < A_1 \le a \le A_2\}$, $B = \{\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)\colon |b_1| \le B_1, |b_2| \le B_2\}$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(\boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{t}) - \frac{1}{C_\psi} \int\limits_A \int\limits_B (W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}) \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}.$$

Убедимся, что $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, то достаточно проверить, что

$$J = \left\| \int\limits_A \int\limits_B (W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}) \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

Применим обобщенное неравенство Минковского, равенство (1.4), неравенство Гёльдера и соотношение (1.9), получим

$$\begin{aligned} J &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left| \int\limits_A \int\limits_B (W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}) \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3} \right|^2 d\boldsymbol{t} \right)^{1/2} \le \int\limits_A \int\limits_B \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t})}{a^3} \right|^2 d\boldsymbol{t} \right)^{1/2} dad\boldsymbol{b} \\ &= \int\limits_A \int\limits_B |(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})|\, \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3} \le \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\, \|W_\psi f\|_{L^2(\mathcal{T},a^{-3})} \left(\int\limits_A \int\limits_B \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3} \right)^{1/2} \\ &= C_\psi \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \mu(B)^{1/2} \Big(\frac{1}{2A_1} - \frac{1}{2A_2} \Big)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Положим

$$\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}} \Phi(\boldsymbol{t}),$$

тогда, очевидно, имеем $\|\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$. Далее, в силу определения интегрального всплеск-преобразования мы можем написать, что

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \langle \Phi, \widetilde{\Phi} \rangle = \langle f, \widetilde{\Phi} \rangle - \frac{1}{C_\psi} \int\limits_A \int\limits_B (W_\psi f)(a,\boldsymbol{b}) \left\langle \psi^{a,\boldsymbol{b}}, \widetilde{\Phi} \right\rangle \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3} \\ &= \langle f, \widetilde{\Phi} \rangle - \frac{1}{C_\psi} \int\limits_A \int\limits_B (W_\psi f)(a,\boldsymbol{b}) \overline{(W_\psi \widetilde{\Phi})(a,\boldsymbol{b})}\, \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $\mathrm{c}A = \mathbb{R}_+ \setminus A$, $\mathrm{c}B = \mathbb{R}^2 \setminus B$, по теореме 1 получим

$$\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{\mathrm{c}A} \int\limits_{\mathrm{c}B} (W_\psi f)(a,\boldsymbol{b}) \overline{(W_\psi \widetilde{\Phi})(a,\boldsymbol{b})}\, \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}.$$

Оценим последний интеграл с помощью неравенства Гёльдера и равенства (1.9) для $\widetilde{\Phi}$:

$$\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \frac{1}{C_\psi}\Bigg[\int\limits_{cA}\int\limits_{cB} |(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})|^2\ \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}\Bigg]^{1/2}\Bigg[\int\limits_{cA}\int\limits_{cB} \Big|(W_\psi \widetilde{\Phi})(a,\boldsymbol{b})\Big|^2\ \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}\Bigg]^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{C_\psi}\Bigg[\int\limits_{cA}\int\limits_{cB} |(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})|^2\ \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}\Bigg]^{1/2} \|(W_\psi \widetilde{\Phi})(a,\boldsymbol{b})\|_{L^2(\mathcal{T},a^{-3})}$$

$$= \Bigg[\frac{1}{C_\psi}\int\limits_{cA}\int\limits_{cB} |(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})|^2\ \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}\Bigg]^{1/2}.$$

В силу того же равенства (1.9) справедливо соотношение

$$\Bigg[\frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^2} |(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})|^2\ \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}\Bigg]^{1/2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \infty,$$

поэтому при $A_1 \to 0+$, $A_2, B_1, B_2 \to \infty$

$$\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \Bigg[\frac{1}{C_\psi}\int\limits_{cA}\int\limits_{cB} |(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})|^2\ \frac{dad\boldsymbol{b}}{a^3}\Bigg]^{1/2} \to 0.$$

Теорема доказана.

3. Поточечная сходимость обратного эллиптически симметричного всплеск-преобразования

Теорема 3. *Если ψ — непрерывный эллиптически симметричный всплеск, удовлетворяющий условию допустимости* (1.1), *то для любой $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, у которой $\widehat{f} \in L(\mathbb{R}^2)$, справедливо равенство*

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^\infty \frac{da}{a^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{b} = (W_\psi^{-1}W_\psi f)(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\widehat{f} \in L(\mathbb{R}^2)$, следовательно, f — непрерывная функция. Зафиксируем точку $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ и для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим квадраты $D_n = [x_1 - 1/n, x_1 - 1/n] \times [x_2 - 1/n, x_2 + 1/n]$ с центром в точке $\boldsymbol{x}$ и функции

$$g_n(\boldsymbol{t}) = g_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = \begin{cases} n^2/4, & \boldsymbol{t} \in D_n, \\ 0, & \boldsymbol{t} \notin D_n. \end{cases}$$

Тогда в силу непрерывности функций f и $\psi^{a,\boldsymbol{b}}$ нетрудно убедиться, что $\langle f, g_n\rangle \to f(\boldsymbol{x})$ и $\langle g_n, \psi^{a,\boldsymbol{b}}\rangle \to \overline{\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})}$ при $n \to 0$.

Поскольку

$$\widehat{g_n}(\boldsymbol{b}) = \exp(-i\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})\frac{\sin(b_1/n)}{b_1/n}\frac{\sin(b_2/n)}{b_2/n} \quad \text{и} \quad |\widehat{g_n}(\boldsymbol{b})| \le 1,$$

то последовательность функций $\widehat{f}(\boldsymbol{b})\overline{\widehat{g_n}(\boldsymbol{b})}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет суммируемую мажоранту $|\widehat{f}(\boldsymbol{b})|$ и сходится поточечно к функции $\widehat{f}(\boldsymbol{b})\exp(i\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})$ при $n \to \infty$. Поэтому на основании теоремы

Лебега о мажорантной сходимости мы заключаем, что

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty}\langle f, g_n\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{n\to\infty}\langle \widehat{f}, \widehat{g_n}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\boldsymbol{b})\overline{\widehat{g_n}(\boldsymbol{b})}d\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\boldsymbol{b})\exp(i\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})d\boldsymbol{b}. \tag{3.1}$$

Так же, как в доказательстве теоремы 1, введем функцию $F_a(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{\psi}(a\boldsymbol{\xi})}$. Домножим и разделим интеграл (3.1) на C_ψ и, используя теорему Фубини, сделаем следующие преобразования:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2 C_\psi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\boldsymbol{b})\exp(i\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})d\boldsymbol{b}C_\psi = \frac{1}{(2\pi)^2 C_\psi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\boldsymbol{b})\exp(i\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})d\boldsymbol{b}\int\limits_0^\infty \widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})\overline{\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})}\frac{da}{a}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 C_\psi}\int\limits_0^\infty\frac{da}{a}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\boldsymbol{b})\overline{\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})}\exp(i\boldsymbol{b}\boldsymbol{x})\widehat{\psi}(a\boldsymbol{b})d\boldsymbol{b} = \frac{1}{(2\pi)^2 C_\psi}\int\limits_0^\infty\frac{da}{a^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}F_a(\boldsymbol{b})\widehat{\psi^{a,-\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{b})d\boldsymbol{b}.$$

Теперь воспользуемся теоремой умножения для преобразования Фурье, представлением (1.6) и сделаем замену переменных в последнем интеграле:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2 C_\psi}\int\limits_0^\infty\frac{da}{a^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{F_a}(\boldsymbol{b})\psi^{a,-\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{b})d\boldsymbol{b} = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^\infty\frac{da}{a^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(W_\psi f)(a,-\boldsymbol{b})\psi^{a,-\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{b})d\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^\infty\frac{da}{a^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(W_\psi f)(a,-\boldsymbol{b})\psi^{a,-\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{b} = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^\infty\frac{da}{a^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(W_\psi f)(a,\boldsymbol{b})\psi^{a,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{b}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 461 с.
2. **Стейн Е., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 331 с.

Логвинова Татьяна Олеговна
магистрантка
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: logvinovato@mail.ru

Поступила 15.11.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.68

БУСТИНГ И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ АФФИННОМ РАЗДЕЛЯЮЩЕМ КОМИТЕТЕ[1]

Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай

Исследуется труднорешаемая задача о минимальном аффинном разделяющем комитете, заданная в пространстве фиксированной размерности $n > 1$ при дополнительном ограничении общности положения разделяемых множеств (MASC-GP(n)). Применяя традиционный для бустинга игровой подход к исследованию семейства максимальных по включению отделимых подмножеств, строится полиномиальный приближенный алгоритм для задачи с гарантированной оценкой точности $O((m/n \ln m)^{1/2})$, где m — мощность разделяемого множества.

Ключевые слова: задача о минимальном аффинном разделяющем комитете, бустинг, полиномиальный приближенный алгоритм, точность аппроксимации.

Vl. D. Mazurov, M. Yu. Khachai. Boosting and the polynomial approximability of the problem on a minimum affine separating committee.

We investigate the intractable problem on a minimum affine separating committee in a space of fixed dimension $n > 1$ under the additional constraint that the separated sets are in general position (MASC-GP(n)). For the investigation of the set of separable subsets that are maximal with respect to inclusion, we apply the game approach, which is traditional for boosting. We construct a polynomial approximate algorithm with guaranteed error estimate $O((m/n \ln m)^{1/2})$, where m is the cardinality of the separated set.

Keywords: minimum affine separating committee problem, boosting, polynomial approximate algorithm, approximation error.

Введение

Фундаментальные результаты И. И. Еремина [1; 2] в области теории и методов решения и оптимальной коррекции несовместных систем ограничений и несобственных (противоречивых) задач оптимизации на долгие годы определили направления развития этих разделов исследования операций. Один из подходов к такой коррекции связан с построением коллективных обобщенных решений несовместных систем и опирается на различные логики голосования, простейшая среди которых связана с принятием решений большинством голосов.

Метод коллективных решений нашел широкое применение и в области распознавания образов, где соответствующие алгоритмы обучения известны под названиями *комитетных* (*committee machines*) [3] и *бустинга* (*boosting*) [4]. Несмотря на явную близость этих подходов, по ряду причин они долгие годы развивались независимо.

Настоящая статья открывает цикл работ, ориентированных на выявление глубинной связи между данными подходами, что, возможно, облегчит дальнейшее их развитие.

На примере задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете (простейшем кусочно-линейном классификаторе, основанном на голосовании большинством) исследуется игровой подход к построению приближенных, в частности полиномиальных, алгоритмов обучения.

1. Постановка задачи. Известные результаты

Задача построения аффинного разделяющего комитета является дискретным обобщением задачи о разделяющей гиперплоскости в евклидовом пространстве на случай разделяемых

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 13-01-00210, 13-07-00181) и президиума УрО РАН (проекты 12-П1-1016, 12-С1-1017/1).

множеств, выпуклые оболочки которых пересекаются. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением ситуации, в которой число разделяемых множеств равно двум и оба множества конечны. При этих допущениях постановка задачи естественным образом погружается в конечномерное пространство подходящей размерности. Договоримся обозначать отделяемые множества через A и B, а $|A \cup B| = m$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть A, B — непустые конечные подмножества $\mathbb{R}^n$, $f_1, \ldots, f_q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — аффинные функции. Конечная последовательность $K = (f_1, \ldots, f_q)$ называется *аффинным комитетом* (*длины* q), *разделяющим* A *и* B, если

$$|\{i \in \mathbb{N}_q \colon f_i(a) > 0\}| > \frac{q}{2} \quad (a \in A), \qquad |\{i \in \mathbb{N}_q \colon f_i(b) < 0\}| > \frac{q}{2} \quad (b \in B).$$

Комитет наименьшей для заданных множеств A и B длины называется *минимальным*.

Множества A и B, для которых существует разделяющий их аффинный комитет K длины q, называют *q-комитетно отделимыми*. В частности, при $q = 1$ комитет K состоит из единственной аффинной функции, определяющей гиперплоскость, разделяющую множества A и B, которые в этом случае являются *отделимыми* в обычном смысле. Необходимое и достаточное условие существования отделяющей гиперплоскости $\operatorname{conv}(A) \cap \operatorname{conv}(B) = \varnothing$ является частным случаем известной теоремы об отделимости. Критерий комитетной отделимости накладывает существенно более слабое ограничение на разделяемые подмножества.

Теорема 1 [5]. *Произвольные конечные подмножества A, $B \subset \mathbb{R}^n$ отделимы аффинным комитетом K тогда и только тогда, когда $A \cap B = \varnothing$. При этом длина комитета K не превосходит $|A \cup B|$.*

Поскольку произвольный разделяющий комитет K длины q может быть преобразован в комитет длины $q + 2t$ для произвольного $t \in \mathbb{N}$, интерес представляет задача поиска именно минимального (для заданных разделяемых множеств) комитета, поскольку его длина может считаться мерой их “неотделимости”.

З а д а ч а “Минимальный аффинный разделяющий комитет” (MASC). Для заданных конечных множеств A, $B \subset \mathbb{Q}^n$ требуется найти аффинный комитет K с наименьшим числом элементов, разделяющий эти множества.

Особый интерес представляет подкласс задачи MASC (обозначаемый MASC-GP), в котором множество $A \cup B$ находится в общем положении[2]. Подклассы задач MASC и MASC-GP, объединяющие постановки, сформулированные в пространстве фиксированной размерности n, принято обозначать MASC(n) и MASC-GP(n) соответственно.

Для удобства изучения вопросов вычислительной сложности и полиномиальной аппроксимируемости перечисленных задач здесь и ниже полагаем разделяемые множества непересекающимися и состоящими из точек с рациональными координатами.

Теорема 2 [6]. 1. *Задача* MASC *NP-трудна и остается труднорешаемой при дополнительном ограничении*

$$A \cup B \subset \{x \in \{0, 1, 2\}^n \colon \|x\|_2 \leqslant 2\}.$$

2. *Задача* MASC *не принадлежит классу Apx (задач комбинаторной оптимизации, допускающих аппроксимацию полиномиальными алгоритмами с фиксированной точностью) при условии $P \neq NP$.*

Теорема 3 [7]. *Задачи* MASC(n) *и* MASC-GP(n)*полиномиально разрешимы при $n = 1$ и NP-трудны при произвольном $n > 1$.*

[2]Размерность аффинной оболочки произвольного его подмножества мощности $k \leqslant n+1$ равна $k-1$.

Наивысшей точностью $O(m)$ среди известных полиномиальных алгоритмов решения задачи MASC (MASC-GP) обладает алгоритм, впервые описанный в статье [5]. В работе [8] предложен ряд его модификаций, несколько улучшающих константу в оценке точности, но не изменяющих оценку по порядку величины.

До настоящего времени наивысшей для задачи MASC-GP(n) точностью обладал алгоритм GreedyCommittee [7], точность которого составляет $O(m/n)$ в общем случае и $O(\log m)$ при некотором дополнительном допущении (Assumption 1, [7]). Ниже, опираясь на результаты [9], мы опишем новый полиномиальный приближенный алгоритм для этой задачи, обладающий в общем случае точностью $O((m/n\ln m)^{1/2})$.

2. Позиционная игра с природой. Бустинг

Пусть множества A, $B \subset \mathbb{Q}^n$ задают условие задачи MASC-GP(n). Введя обозначение $Z = A \cup B$, как и ранее, полагаем $m = |Z|$.

Подмножество $M = A' \cup B'$, в котором $A' \subset A$ и $B' \subset B$, называется *отделимым*, если подмножества A' и B' отделимы некоторой гиперплоскостью. Если при этом $M \cup \{z\}$ не является отделимым для произвольной точки $z \in Z \setminus M$, то M называется *максимальным отделимым подмножеством*. Через $\mathfrak{M}$ обозначим семейство максимальных отделимых подмножеств M.

Очевидно, что для произвольного множества Z справедлива одна из альтернатив:

1) множество Z само является отделимым, и, следовательно, $\mathfrak{M} = \{Z\}$;

2) множество Z обладает собственными максимальными отделимыми подмножествами, и, следовательно, минимальный аффинный комитет, разделяющий множества A и B, содержит более одного элемента.

Приближенные алгоритмы построения комитетных решающих правил (и, в частности, методы решения задачи MASC-GP(n)) удобно описывать в терминах минимаксных стратегий одного из игроков подходящей многошаговой антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой. Остановимся на общей схеме такой игры.

1. Пусть задано вероятностное пространство $(Z, 2^Z, \chi_0)$. Множество $\mathfrak{X}$ допустимых альтернатив первого игрока совпадает с множеством дискретных вероятностных мер χ, определенных на $(Z, 2^Z)$, и не зависит от позиции игры. Зададимся натуральным числом t и предикатом $\pi\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}^t \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$.

2. Очередной, i-й по счету раунд игры начинается заданием множества

$$\mathfrak{Y}_i = \{y \in \mathfrak{M}^t\colon \pi(\chi_{i-1}, y) = \mathrm{true}\}$$

допустимых альтернатив второго игрока. Если $\mathfrak{Y}_i = \varnothing$, партия завершается аварийно. В противном случае второй игрок выбирает $y_i = (M_{i1}, \ldots, M_{it}) \in \mathfrak{Y}_i$ и первый игрок продолжает раунд, либо завершая партию (обычным образом), либо выбирая очередную альтернативу — меру χ_i, после чего начинается следующий раунд.

3. Пусть k — номер последнего раунда партии, $x = (\chi_0, \ldots, \chi_{k-1})$ и $y = (y_1, \ldots, y_k)$ — стратегии игроков. Значение платежной функции $\mathcal{L}$, определяющей проигрыш первого игрока, при условии обычного (неаварийного) завершения партии вычисляется по формуле

$$\mathcal{L}(x, y) = 1 - \chi_0\left(\bigcup_{J \subset \{1,\ldots,k\}\times\{1,\ldots,t\}, |J| > kt/2} \ \bigcap_{(i,p)\in J} M_{ip}\right) \tag{1}$$

и может быть интерпретировано в терминах “мягкого” голосования большинством голосов. Каждая упорядоченная пара (i, p) “голосует” за элементы множества Z, отдавая голос произвольной точке, принадлежащей множеству M_{ip}. Проигрыш первого игрока численно равен вероятности (вычисляемой по мере χ_0) подмножества, состоящего из точек, набравших не более половины голосов. При аварийном завершении $\mathcal{L}(x, y) \equiv 1$.

Всюду ниже без ограничения общности полагаем меру χ_0 равномерной, т. е. $\chi_0(\{z\}) = 1/m$ для произвольного $z \in Z$.

Покажем, например, что алгоритм построения аффинного разделяющего комитета, описанный в работе [5], соответствует оптимальной минимаксной стратегии первого игрока в частной игре, получаемой из данной схемы заданием

$$t = 2 \quad \text{и} \quad \pi(\chi, (M_1, M_2)) = (\chi(M_1 \cap M_2) > 0) \wedge (M_1 \cup M_2 = Z).$$

Определим стратегию $\bar{x} = (\chi_0, \ldots, \chi_{k-1})$ первого игрока следующим правилом:

1) до начала игры зададим множество $Z' := Z$;

2) пусть $y_i = (M_{i1}, M_{i2})$ — ход второго игрока в i-м раунде; переопределим $Z' := Z' \setminus (M_{i1} \cap M_{i2})$ и $k := i$; если $Z' = \varnothing$, завершим игру, в противном случае зададим меру χ_i равномерно на Z'.

Пусть первый игрок придерживается стратегии $\bar{x}$. Известно [10], что для произвольного $z \in Z$ найдутся $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ такие, что $M_1 \cup M_2 = Z$ и $z \in M_1 \cap M_2$. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_k)$, $y_i = (M_{i1}, M_{i2})$ — произвольная стратегия второго игрока. По определению предиката π и выбору (первым игроком) стратегии $\bar{x}$, $M_{i1} \cup M_{i2} = Z$ для произвольного $i = 1, \ldots, k$ и $\bigcup_{i=1}^{k} M_{i1} \cap M_{i2} = Z$, следовательно, $\bigcup_{J \subset \{1,\ldots,k\} \times \{1,2\}, |J| > k} \ \bigcap_{(i,p) \in J} M_{ip} = Z$. Таким образом, партия $(\bar{x}, y)$ завершится безаварийно, и $\mathcal{L}(\bar{x}, y) = 0$, т. е. стратегия $\bar{x}$ обеспечивает первому игроку минимальный гарантированный проигрыш.

В работе [9] исследуется частный случай игры, определяемый параметрами $t = 1$, $\gamma \in (0, 1/2)$ и $\pi(\chi, (M)) = (\chi(M) \geqslant 1/2 + \gamma)$, и доказывается следующая

Теорема 4. *Пусть $\gamma \in (0, 1/2)$ таково, что $\pi(\chi, (M)) \not\equiv false$ для произвольной меры χ, заданной на $(M, 2^M)$. Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ для $k = \lceil 1/(2\gamma^2) \ln(1/2\varepsilon) \rceil$ существует такая стратегия $x_\varepsilon = (\chi_0, \ldots, \chi_{k-1})$ первого игрока, что $\mathcal{L}(x_\varepsilon, y) \leqslant \varepsilon$ при произвольной стратегии соперника.*

Доказательство теоремы 4 конструктивно и представляет собой алгоритм построения стратегии x_ε. Заметим, что теорема задает лишь достаточное условие существования такой стратегии (длины k), обеспечивающей безаварийное завершение партии игры и справедливость верхней оценки на величину гарантированного проигрыша первого игрока. В случае невыполнения условия теоремы алгоритм, используемый при ее доказательстве, может тем не менее приводить к безаварийному завершению партии для некоторых значений ε и обеспечивать справедливость ограничения $\mathcal{L}(x_\varepsilon, y) \leqslant \varepsilon$ при некоторых или даже всех допустимых стратегиях второго игрока.

Опишем новый полиномиальный приближенный алгоритм решения задачи MASC-GP(n), использующий процедуру построения стратегии x_ε в качестве подпрограммы. Зададимся частичным отображением $\mathrm{Boost}\colon (0, 1/2) \times (0, 1) \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\} \times \mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 \times \ldots$, $\mathrm{Boost}(\gamma, \varepsilon) = (S(\gamma, \varepsilon), R(\gamma, \varepsilon))$, а функции S и R вычисляются (одновременно) в процессе розыгрыша партии игры, при котором стратегия x первого игрока определяется упомянутым выше алгоритмом, а стратегия y его соперника — произвольным допустимым способом. Функция $S(\gamma, \varepsilon)$ определена при произвольных $\gamma \in (0, 1/2)$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ и принимает значение true, если партия завершилась безаварийно и $\mathcal{L}(x, y) \leqslant \varepsilon$. Функция R является частичной, ее значение $R(\gamma, \varepsilon)$ определено и совпадает с y в том и только в том случае, когда $S(\gamma, \varepsilon) = \mathrm{true}$.

3. Приближенный алгоритм

Введем обозначение $\bar{t} = \left\lceil \dfrac{\lfloor (m-n)/2 \rfloor}{n} \right\rceil$, положим $\varepsilon = \dfrac{1}{m+1}$ и рассмотрим следующий конечношаговый алгоритм. Без ограничения общности считаем множества A и B неотделимыми и $\ln m < 2\bar{t} + 1$.

А л г о р и т м "Boosted GreedyCommitee" (BGC).

Ш а г 1. Найти

$$t_0 = \arg\min\Big\{t \in \{1,\dots,\bar{t}\}\colon S\Big(\frac{1}{4t+2},\varepsilon\Big) \wedge \Big((t=1) \vee \overline{S}\Big(\frac{1}{4t-2},\varepsilon\Big)\Big)\Big\}.$$

Ш а г 2. Если

$$t_0 \leqslant \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{2\bar{t}+1}{2\ln((m+1)/2)}\Big)^{1/2} - 1\Big), \tag{2}$$

положить

$$\gamma = \frac{1}{2(2t_0+1)},\ y = R(\gamma,\varepsilon),\ y = (M_1,\dots,M_k),\ \text{и}\ M_i = A_i' \cup B_i',\ \text{где}\quad A_i' \subset A,\ B_i' \subset B.$$

Выдать последовательность $K = (f_1,\dots,f_k)$, в которой аффинная функция f_i отделяет A_i' от B_i'.

Ш а г 3. В противном случае выдать результат алгоритма "GreedyCommittee".

Обозначим через $\mathrm{OPT}(A,B)$ оптимальное значение задачи MASC-GP(n) (длину минимального аффинного комитета, разделяющего множества A и B).

Теорема 5. *Алгоритм* BGC *корректен и находит приближенное решение задачи* MASC-GP(n) *с точностью*

$$\frac{\mathrm{BGC}(A,B)}{\mathrm{OPT}(A,B)} \leqslant \lceil 2\bar{m}\ln((m+1)/2)\rceil^{1/2}, \qquad \bar{m} = 2\Big\lceil\frac{\lfloor (m-n)/2\rfloor}{n}\Big\rceil + 1 \tag{3}$$

за время $O(m^{n+3}/n\ln m) + \Theta_{GC}$*, где* Θ_{GC} *— трудоемкость алгоритма* "GreedyCommittee".

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Обоснуем корректность алгоритма. Известно [8], что $\mathrm{OPT}(A,B) \leqslant 2\bar{t}+1$. Рассмотрим произвольное $t \in \{1,\dots,\bar{t}\}$, для которого найдется аффинный комитет K длины $2t+1$, разделяющий множества A и B. Следовательно, для произвольной меры χ найдется (см., например, [11]) отделимое подмножество $\bar{Z} \subset Z = A \cup B$, мера которого удовлетворяет соотношению

$$\chi(\bar{Z}) \geqslant \frac{t+1}{2t+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4t+2}.$$

Тем самым для $\gamma = 1/(4t+2)$ выполняется условие теоремы 4, и шаг 1 алгоритма BGC выполнится успешно. Поскольку

$$S\Big(\frac{1}{4t_0+2},\varepsilon\Big) \wedge \Big(\varepsilon = \frac{1}{m+1}\Big),$$

последовательность функций K, построенная на шаге 2 алгоритма, является аффинным комитетом, разделяющим множества A и B.

2. Оценим точность алгоритма. Пусть соотношение (2) выполнено, тогда длина k результирующего комитета K определяется соотношением

$$k = \Big\lceil \frac{1}{2\gamma^2}\ln\Big(\frac{1}{2\varepsilon}\Big)\Big\rceil = \lceil 2(2t_0+1)^2\ln((m+1)/2)\rceil.$$

Поскольку $2t_0 + 1 \leqslant \mathrm{OPT}(A,B)$ по выбору t_0, то в силу (2) имеем

$$\frac{\mathrm{BGC}(A,B)}{\mathrm{OPT}(A,B)} = \frac{k}{\mathrm{OPT}(A,B)} \leqslant \lceil 2(2t_0+1)\ln((m+1)/2)\rceil \leqslant \lceil (2\bar{m}\ln((m+1)/2)^{1/2}\rceil.$$

Пусть соотношение (2) не выполнено, следовательно, алгоритм BGC на шаге 3 выдает комитет, длина которого может быть оценена сверху величиной $\bar{m} = 2\bar{t}+1$. Тогда

$$\frac{\mathrm{BGC}(A,B)}{\mathrm{OPT}(A,B)} = \frac{2\bar{t}+1}{\mathrm{OPT}(A,B)} \leqslant \frac{2\bar{t}+1}{2t_0+1} < \lceil (2\bar{m}\ln((m+1)/2)^{1/2}\rceil.$$

3. Для оценки трудоемкости алгоритма заметим, что при вычислении минимума (на 1-м его шаге) методом линейного поиска не более m раз будут вычислены значения функций S и R, при этом для каждого значения t потребуется не более

$$\lceil 2(2t_0+1)^2 \ln((m+1)/2) \rceil \leqslant \lceil 2\bar{m}^2 \ln((m+1)/2) \rceil$$

раундов игры, описанной в разд. 2, в каждом из которых будет произведен перебор не более чем $\binom{m}{n-1} = O(m^n)$ максимальных отделимых подмножеств множества Z.

Таким образом, суммарная трудоемкость алгоритма составляет $O(m^{n+3}/n \ln m) + \Theta_{GC}$, где Θ_{GC} — трудоемкость алгоритма “GreedyCommittee”. Теорема доказана.

Заключение

В статье на примере задачи MASC-GP(n) представлена общая схема игрового подхода к построению комитетных решающих правил, близких к оптимальным, и описан новый полиномиальный приближенный алгоритм решения данной задачи, обладающий наилучшей на данный момент гарантированной оценкой точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
3. **Мазуров Вл. Д.** Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990. 348 с.
4. **Schapire R., Freund Y.** Boosting. MitPress, 2012. 496 p.
5. **Мазуров Вл. Д.** Комитеты систем неравенств и задача распознавания образов // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140–146.
6. **Khachai M.** Computational and approximational complexity of combinatorial problems related to the committee polyhedral separability of finite sets // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, no. 2. P. 237–242.
7. **Khachai M., Poberii M.** Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position // Informatica. 2009. Vol. 20, no. 2. P. 217–234.
8. **Khachai M., Mazurov V., Rybin A.** Committee construction for solving problems of selection, diagnostics, and prediction // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S67–S101.
9. **Freund Y.** Boosting a weak algorithm by majority // Information and Computation. 1995. Vol. 121. P. 256–285.
10. **Гайнанов Д.Н., Новокшенов В.А., Тягунов Л.И.** О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Мат. заметки. 1983. Т. 33, вып. 2. С. 293–300.
11. **Мазуров Вл. Д., Хачай М.Ю.** Комитетные конструкции // Изв. Урал. гос. ун-та. 1999. Вып. 14. С. 76–108.

Поступила 12.02.2013

Мазуров Владимир Данилович
д-р физ.-мат. наук, профессор
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: vldmazurov@gmail.com

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.17+512.54

РЕБЕРНО СИММЕТРИЧНЫЕ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ НАКРЫТИЯ КЛИК с $\lambda = \mu$[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих, Л. Ю. Циовкина

Работа посвящена изучению антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, группа автоморфизмов которых действует транзитивно на множестве пар (a, b), где $\{a, b\}$ — ребро графа. Отсюда группа автоморфизмов графа действует 2-транзитивно на множестве антиподальных классов, что позволяет использовать классификацию 2-транзитивных групп подстановок. В данной работе классифицированы реберно симметричные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3, в которых любые две вершины на расстоянии, не большем 2, имеют ровно μ общих соседей.

Ключевые слова: реберно симметричные графы, антиподальные дистанционно регулярные графы, группы автоморфизмов.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, L. Yu. Tsiovkina. Arc-transitive distance-regular coverings of cliques with $\lambda = \mu$.

We study antipodal distance-regular graphs of diameter 3 such that their group of automorphisms acts transitively on the set of pairs (a, b), where $\{a, b\}$ is an edge of the graph. Hence the group of automorphisms of the graph acts 2-transitively on the set of antipodal classes, so the classification of 2-transitive permutation groups can be used. We classify arc-transitive distance-regular graphs of diameter 3 in which any two vertices with distance at most two have exactly μ common neighbors.

Keywords: arc-transitive graphs, antipodal distance-regular graphs, groups of automorphisms.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным графом* степени k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным графом* с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \ldots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $\mathrm{d}(u, w) = \mathrm{d}(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Через G^X обозначается группа подстановок G на множестве X. Если $Y \subseteq X$, то G_Y ($G_{\{Y\}}$) — поточечный (глобальный) стабилизатор Y в G.

В [1] получено описание антиподальных дистанционно транзитивных графов диаметра 3. Более общей является задача описания реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3.

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

Предложение 1 [1, лемма 2.7]. *Пусть даны неинвариантная подгруппа H группы G и элемент $g \in G$. Через $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$ обозначим граф с множеством вершин $V(G, H) = \{Hx \mid x \in G\}$ и ребрами $\{Hx, Hy\}$ такими, что $xy^{-1} \in HgH$. Тогда*

(1) *если G действует точно на $V(G, H)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$, то Γ — связный граф, $G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и G действует точно и транзитивно на вершинах и на дугах графа Γ;*

(2) *если G действует транзитивно на дугах связного графа Δ, H — стабилизатор вершины $e \in \Delta$, g является 2-элементом и вершины e, e^g смежны в Δ, то $\Delta \cong \Gamma(G, H, HgH)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$;*

(3) *если $H < M < G$, $g^2 \in H$, $G = \langle H, g\rangle$ и выполнены условия*

(i) $G = M \cup MgH$,

(ii) $H^g \cap M \le H$ и

(iii) $H \cap H^g$ действует транзитивно на $\Gamma_3(H) = \{Hm \mid m \in M - H\}$,

то $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$ — накрытие полного графа на $V(G, M)$ и G — дистанционно транзитивная группа автоморфизмов графа Γ.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [2]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^h$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2+(\mu-\lambda)x-k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $h = n(r-1)(k+1)/(n+m)$.

Положим $\delta = k-1-r\mu = a_1-c_2$. В работе [3] доказано, что для фиксированных r, δ имеется лишь конечное число допустимых массивов, кроме случаев $\delta \in \{-2, 0, 2\}$. Там же установлено, что если $\delta \in \{-2, 2\}$, то $k + 1$ — квадрат.

Если $\mu = \lambda$, то $\delta = 0$, Γ имеет массив пересечений $\{r\mu+1, \mu(r-1), 1; 1, \mu, r\mu+1\}$, $v = r(r\mu+2)$ и спектр $k^1, \sqrt{k}^f, (-1)^k, (-\sqrt{k})^f$, где $f = \binom{r}{2}\mu + r - 1 = (v - k - 1)/2$. Далее, число $\mu(r - 1)$ четно.

В данной работе предлагается программа исследования реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, основанная на классификации дважды транзитивных групп подстановок. Реализована часть этой программы в случае графов с $\lambda = \mu$. Результаты этой статьи были анонсированы в [4].

З а м е ч а н и е. Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, Σ — множество всех антиподальных классов графа Γ и $F \in \Sigma$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) Γ — реберно симметричный граф и G действует дважды транзитивно на Σ;

(2) Γ — вершинно симметричный граф и для вершины $a \in F$ группа G_a действует транзитивно на $\Sigma - \{F\}$.

Пусть Γ — реберно симметричный граф и $a \in F$. Тогда G_a действует транзитивно на $[a]$. Поэтому G_a действует транзитивно на $\Sigma - \{F\}$ и G действует дважды транзитивно на Σ.

Обратно, пусть Γ — вершинно симметричный граф, G действует транзитивно на Σ и для вершины $a \in F$ группа G_a действует транзитивно на $\Sigma - \{F\}$. Тогда для любых $K, L \in \Sigma - \{F\}$ найдется $g \in G_a$ такой, что $L = K^g$. Отсюда для единственной вершины $b \in [a] \cap K$ получим $b^g \in [a] \cap L$. Поэтому G_a действует транзитивно на $[a]$.

Напомним, что $|G_{\{F\}} : G_a| = r$, и если r взаимно просто с k (например, если $k = r\mu + 1$), то для реберной симметричности Γ достаточно вершинной симметричности и дважды транзитивного действия G на Σ.

Предложение 2 [1, теорема 2.9]. *Пусть G^X — дважды транзитивная группа подстановок степени n, $a \in X$, $H = G_a$ и T — цоколь группы G. Тогда либо*

(1) *G — почти простая группа и для (T, n) выполняется одна из следующих возможностей*:

(*i*) *знакопеременные* (A_n, n), $n \geq 5$;

(*ii*) *линейные* $(\mathrm{L}_m(q), (q^m - 1)/(q - 1))$, $m \geq 2$ *и* $(m, q) \notin \{(2, 2), (2, 3)\}$;

(*iii*) *симплектические* $(\mathrm{Sp}_{2m}(2), 2^{2m-1} \pm 2^{m-1})$, $m \geq 3$;

(*iv*) *унитарные* $(\mathrm{U}_3(q), q^3 + 1)$, $q \geq 3$;

(*v*) *Ри* $({}^2\mathrm{G}_2(q), q^3 + 1)$, $q = 3^{2a+1} \geq 27$;

(*vi*) *Судзуки* $(\mathrm{Sz}(q), q^2 + 1)$, $q = 2^{2a+1} \geq 8$;

(*vii*) *Матье* (M_n, n), $n \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$;

(*viii*) *спорадические* $(\mathrm{L}_2(11), 11)$, $(\mathrm{M}_{11}, 12)$, $(\mathrm{A}_7, 15)$, $(\mathrm{Aut}(\mathrm{L}_2(8)), 28)$, $(\mathrm{HiS}, 176)$, $(\mathrm{Co}_3, 276)$ *либо*

(2) *$G = TH$, T — элементарная абелева группа порядка $n = p^m$ и выполняется одна из следующих возможностей*:

(*i*) *линейные* $m = cd$, $d \geq 2$ *и* $\mathrm{SL}_d(p^c) \lhd H \leq \Gamma\mathrm{L}_d(p^c)$;

(*ii*) *симплектические* $m = ct$, *t четно*, $t \geq 4$ *и* $\mathrm{Sp}_t(p^c) \lhd H \leq \mathrm{Z}_{p^c-1} \circ \Gamma\mathrm{Sp}_d(p^c)$;

(*iii*) G_2*-типа* $m = 6c$, $p = 2$ *и* $\mathrm{G}_2(2^c)' \lhd H \leq \mathrm{Z}_{2^c-1} \circ \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_2(2^c))$;

(*iv*) *одномерные* $H \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^m)$;

(*v*) *исключительные* $p^m \in \{9^2, 11^2, 19^2, 29^2, 59^2\}$ *и* $\mathrm{SL}_2(5) \lhd H$, *либо*
$p^m = 2^4$ *и* A_6 *или* $\mathrm{A}_7 \lhd H$, *либо*
$p^m = 3^6$ *и* $\mathrm{SL}_2(13) \lhd H$;

(*vi*) *экстраспециальные* $p^m \in \{5^2, 7^2, 11^2, 23^2\}$ *и* $\mathrm{SL}_2(3) \lhd H$ *или* $p^m = 3^4$, $R = \mathrm{D}_8 \circ \mathrm{Q}_8 \lhd H$, $H/R \leq \mathrm{S}_5$ *и* 5 *делит* $|H|$.

Перечислим новые бесконечные серии антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, построенные на основе предложений 1, 2:

1. *Серия Судзуки.* Граф $\mathcal{S}uz(q)$ имеет массив пересечений $\{q^2, q^2 - q - 2, 1; 1, q + 1, q^2\}$, $q = 2^{2e+1} \geq 8$, $r = q - 1$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{S}uz(q)) = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$ и G_a — расширение силовской 2-подгруппы P порядка q^2 с помощью циклической группы порядка $2e + 1$.

Имеется простая конструкция графа $\mathcal{S}uz(q)$. Вершинами графа являются инволюции группы $\mathrm{Sz}(q)$, и две инволюции смежны, если порядок их произведения равен 5. Поэтому окрестность вершины в графе $\mathcal{S}uz(q)$ имеет разбиение 4-кликами.

Если граф $\mathcal{S}uz(q)$ существует, то для любого делителя s числа $q - 1$, $1 < s \leq q - 1$ существует граф $\mathcal{S}uz(q, s)$ с массивом пересечений $\{q^2, (s - 1)(q^2 - 1)/s, 1; 1, (q^2 - 1)/s, q^2\}$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{S}uz(q, s)) = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$ и G_a — расширение силовской 2-подгруппы P порядка q^2 с помощью абелевой группы порядка $(q - 1)(2e + 1)/s$.

2. *Серия Ри.* Граф $\mathcal{R}ee(q)$ имеет массив пересечений $\{q^3, q^3 - 2q^2 - 2q - 3, 1; 1, 2(q^2 + q + 1), q^3\}$, $q = 3^{2e+1} > 3$, $r = (q - 1)/2$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{R}ee(q)) = \mathrm{Aut}({}^2\mathrm{G}_2(q))$ и G_a — расширение силовской 3-подгруппы P (цоколя группы) порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $4e + 2$.

Если граф $\mathcal{R}ee(q)$ существует, то для любого делителя s числа $(q - 1)/2$, $1 < s \leq (q - 1)/2$ существует граф $\mathcal{R}ee(q, s)$ с массивом пересечений $\{q^3, (s - 1)(q^3 - 1)/s, 1; 1, (q^3 - 1)/s, q^3\}$,

$q = 3^{2e+1} > 3$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{R}ee(q,s)) = \mathrm{Aut}({}^2\mathrm{G}_2(q))$ и G_a — расширение силовской 3-подгруппы (цоколя группы) P порядка q^3 с помощью группы порядка $(q-1)(2e+1)/s$.

3. *Унитарная серия.* Граф $\mathcal{U}_3(q)$ имеет массив пересечений $\{q^3,(r-1)(q^3-1)/r,1;1,(q^3-1)/r,q^3\}$, $q=p^e>3$, r — $2'$-часть числа $(q-1)$, $G=\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_3(q))=\mathrm{Aut}(\mathrm{U}_3(q))$ и G_a — расширение силовской p-подгруппы P (цоколя группы) порядка q^3 с помощью абелевой группы порядка $(q^2-1)e/r$.

Если граф $\mathcal{U}_3(q)$ существует, то для любого неединичного делителя s $2'$-части числа $(q-1)$ существует граф $\mathcal{U}_3(q,s)$ с массивом пересечений $\{q^3,(s-1)(q^3-1)/s,1;1,(q^3-1)/s,q^3\}$, $q=p^e>3$, $G=\mathrm{Aut}(\mathcal{U}_3(q,s))=\mathrm{Aut}(\mathrm{U}_3(q))$ и G_a — расширение силовской p-подгруппы P (цоколя группы) порядка q^3 с помощью абелевой группы порядка $(q^2-1)e/s$.

Теорема 1. *Пусть Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$ и $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Γ — двудольный граф, то Γ получается удалением из $\mathrm{K}_{k+1,k+1}$ максимального паросочетания, $G\le 2\times \mathrm{S}_{k+1}$;*

(2) *если $r=k$, то либо $k=2$ и Γ — шестиугольник, либо $k=6$, Γ — вторая окрестность вершины в графе Хофмана — Синглтона и $G\le \mathrm{S}_7$;*

(3) *если $r=2<k$, то, с точностью до перехода к графу Γ_2, либо*

(*i*) *$k+1=2^{2m-1}\pm 2^{m-1}$, $G\le 2\times \mathrm{Sp}_{2m}(2)$, $m\ge 3$, $\mu=2^{2m-2}$, либо*
(*ii*) *$k=q^3$, $G\le 2\times \mathrm{P\Gamma U}_3(q)$, $q>3$ или $G\le 2\times \mathrm{Aut}({}^2\mathrm{G}_2(q))$, $q=3^{2e+1}$, $e\ge 1$, $\mu=(q+1)(q^2-1)/(2,q-1)$, либо*
(*iii*) *$k=q$, $G\le 2\times \mathrm{P\Sigma L}_2(q)$, $q\equiv 1 \pmod 4$, $\mu=(q-1)/2$, либо*
(*iv*) *$k=175$, $\mu=72$, $G=2\times \mathrm{HiS}$ или $k=275$, $\mu=112$, $G=2\times \mathrm{Co}_3$, либо*
(*v*) *$k=2^{2t}-1$, $G=2\cdot \mathrm{ASp}_{2t}(2)$, $\mu=2^{2t-1}$.*

В случае (3) граф Γ_2 также является реберно симметричным дистанционно регулярным графом с $\mu'=k-\mu-1$.

В случае (*ii*) для группы Ри ${}^2\mathrm{G}_2(q)$ в основной теореме из [1] допущена опечатка: вместо $n=3^{2e+1}+1$ должно быть $n=3^{6e+3}+1$.

Теорема 2. *Пусть Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{r\mu+1,(r-1)\mu,1;1,\mu,r\mu+1\}$ и $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $r>2$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$k=q$ — степень простого числа, r делит $q-1$, Γ имеет массив пересечений $\{q,(r-1)(q-1)/r,1;1,(q-1)/r,q\}$ и $\mathrm{L}_2(q)\lhd G$;*

(2) *$\Gamma\in\{\mathcal{S}uz(q,s),\mathcal{R}ee(q,s),\mathcal{U}_3(q,s)\}$.*

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть O_K — кольцо целых алгебраических чисел поля K. Если d — целое число, не делящееся на квадрат простого числа, $K=\mathbb{Q}(d^{1/2})$ — соответствующее квадратичное поле, то целочисленный базис кольца O_K равен $(1,(1+d^{1/2})/2)$, если $d\equiv 1 \pmod 4$, и равен $(1,d^{1/2})$, если $d\equiv 2,3 \pmod 4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это упражнение 4 из [5, гл. 2].

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g \in G$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *— непустой граф. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω *пересекает антиподальные классы* K, L, *то* $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$;

(2) *если* Ω *— непустой граф и* g *фиксирует антиподальный класс* K, *то* K *пересекает* Ω;

(3) *если* g *— элемент простого порядка* p *и* $p > \mu$, *то либо* Ω *является кликой, либо* Ω *содержится в антиподальном классе, либо* Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{t-1, \mu(s-1), 1; 1, \mu, t-1\}$;

(4) *если* g *— элемент простого порядка* p, $\lambda = \mu$ *и* p *не делит* $r-1$, *то каждая вершина из* Ω *смежна с некоторой вершиной из* $\Gamma - \Omega$.

Доказательство. Пусть Ω пересекает антиподальные классы K, L. Тогда вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Пусть Ω — непустой граф и g фиксирует антиподальный класс K. Выберем антиподальный класс L, содержащий вершину a из Ω. Тогда вершина из $[a] \cap K$ попадает в Ω.

Пусть Γ имеет t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Если $s = 1$, то Ω является кликой. Если $t = 1$, то Ω содержится в антиподальном классе. Если же $s, t > 1$, то Ω — антиподальное s-накрытие t-клики. Так как $p > \mu$, то $\mu_\Omega = \mu$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t-1, \mu(s-1), 1; 1, \mu, t-1\}$.

Пусть g — элемент простого порядка p, $a^\perp \subseteq \Omega$ и p не делит $r-1$. Тогда $\Gamma_3(a)$ содержит вершину b из Ω. Заметим, что $[b] \subset \Omega$, иначе для вершины $x \in [b] - \Omega$ подграф $[x] \cap [x^g]$ содержит b и μ вершин из $[a]$, противоречие. Теперь для вершины $y \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$ получим $|[y] \cap [y^g]| \geq 2\mu$, противоречие. Итак, $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) \subset \Omega$ и $\Gamma = \Omega$, противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $\mathrm{d}(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |X|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_k$, где p_{ij}^l — числа пересечения графа Γ.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ — строки матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [6, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{r\mu+1,\mu(r-1),1;1,\mu,r\mu+1\}$, $v=r(r\mu+2)$ *и спектром* $k^1,\sqrt{k}^f,(-1)^k,(-\sqrt{k})^f$, *где* $k=r\mu+1$, $f=\binom{r}{2}\mu+r-1$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g\in G$, χ_1 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* f *(отвечающее собственному значению* θ_1*)*, χ_2 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* k, *то*

$$\chi_1(g)=((r-1)\alpha_0(g)+((r-1)\alpha_1(g)-\alpha_2(g))/\sqrt{k}-\alpha_3(g))/(2r),$$

$$\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/r-1.$$

Если $|g|=p$ — *простое число, то* $\chi_2(g)-k$ *делится на* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\k&\mu&\mu&0\\0&k-\mu-1&k-\mu-1&k\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1)=\sqrt{k}$. Тогда

$$P_1-\sqrt{k}I=\begin{pmatrix}-\sqrt{k}&1&0&0\\k&\mu-\sqrt{k}&\mu&0\\0&(r-1)\mu&(r-1)\mu-\sqrt{k}&k\\0&0&1&-\sqrt{k}\end{pmatrix}.$$

Если $(1,x_2,x_3,x_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы $P_1-\sqrt{k}I$, то $x_2=1/\sqrt{k}$, $x_3=-\mu/(\sqrt{k}(k-\mu-1)$ и $x_4=-\mu/(k-\mu-1)$. Отсюда

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\f&f/\sqrt{k}&-(r\mu/2+1)/\sqrt{k}&-(r\mu/2+1)\\k&-1&-1&k\\f&-f/\sqrt{k}&(r\mu/2+1)/\sqrt{k}&-(r\mu/2+1)\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g)=((r-1)\alpha_0(g)+(r-1)\alpha_1(g)/\sqrt{k}-\alpha_2(g)/\sqrt{k}-\alpha_3(g))/(2r)$.

Аналогично $\chi_2(g)=(k\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_2(g)+k\alpha_3(g))/v$. Подставляя $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=v-\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/r-1$.

Остальные утверждения леммы следуют из [7, лемма 1].

Лемма 4 [1, теорема 2.5]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный недвудольный граф с массивом пересечений* $\{k,\mu(r-1),1;1,\mu,k\}$, K — *абелева подгруппа из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, *транзитивная на каждом антиподальном классе и* p — *простой делитель* r. *Тогда* p *делит* $k+1$ *и в случае* $k=r\mu+1$ *число* r — *степень* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Если Γ — двудольный граф, то по [1, следствие 2.3] Γ получается удалением из $\mathrm{K}_{k+1,k+1}$ максимального паросочетания и $G\le 2\times \mathrm{S}_{k+1}$;

Если $r=k$, то $k\in\{2,6,56\}$ и Γ — вторая окрестность вершины u в графе Мура Δ. Если $k=2$, то Γ — шестиугольник, а если $k=6$, то Γ — вторая окрестность вершины в графе Хофмана — Синглтона и $G\le \mathrm{S}_7$. Если $k=56$, то G — подгруппа из группы автоморфизмов графа Δ, действующая транзитивно на $\Delta-u^\perp$, противоречие с теоремой из [8].

Если $r=2$, то граф Γ является дистанционно транзитивным и можно применить основную теорему из [1]. Теорема 1 доказана.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{r\mu+1,(r-1)\mu,1;1,\mu,r\mu+1\}$

Пусть Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{r\mu+1,(r-1)\mu,1;1,\mu,r\mu+1\}$, $r>2$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g\in G$ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что Γ содержит $r\mu+2$ антиподальных классов, в каждом из которых r вершин. Пусть Σ — множество антиподальных классов графа Γ, K — ядро действия G на Σ, $F\in\Sigma$, $a\in F$ и C — ядро действия $G_{\{F\}}$ на F.

Если $\mu=1$, то существование графа Γ равносильно существованию дезарговой проективной плоскости порядка k (см. [2, § 1.17]). Поэтому $k=2^e$ и $\mathrm{L}_2(k)\lhd G$.

В этом разделе предполагается, что $\mu>1$ и $k=l^2d$, где d не делится на квадраты простых чисел.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $d\neq 1$, g — автоморфизм Γ порядка $2,3$ или 5, то либо $p=d=5$, либо $(r-1)\alpha_1(g)=\alpha_2(g)$ и $\chi_1(g)=((r-1)\alpha_0(g)-\alpha_3(g))/(2r)$;*

(2) *если Ω — пустой граф и $|g|=p$ — простое число, то либо*

(*i*) *p не делит r, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=v$, $\chi_1(g)=(r\alpha_1(g)-v)\sqrt{k}/(2kr)$ и $\alpha_1(g)-1$ делится на ld; если $d\neq 1$ и $(\alpha_1(g)-v/r)/(ld)$ нечетно, то d сравнимо с 1 по модулю 4, либо*

(*ii*) *p делит r, $\alpha_3(g)=tr$ и $\chi_1(g)=((r-1)\alpha_1(g)-\alpha_2(g))\sqrt{k}/(2rk)-t/2$; если $d\neq 1$ и t нечетно, то d сравнимо с 1 по модулю 4 и число $((r-1)\alpha_1(g)-\alpha_2(g))/(lrd)$ нечетно; а если $\alpha_3(g)=v$, то $\chi_1(g)=-(r\mu+2)/2$, k нечетно и μ четно;*

(3) *если Ω содержит t антиподальных классов, то $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=r(k+1-t)$ и $\chi_1(g)=(r-1)t/2+(\alpha_1(g)(r-1)-(k+1-t))\sqrt{k}/(2k)$.*

Доказательство. Если g — элемент группы, то значение характера $\chi_i(g)$ является суммой n корней из единицы степени $|g|$, где n — степень представления проекции ψ на W_i.

Заметим, что корни из единицы степени 2, 3 имеют рациональные вещественные части. Если $|g|=2,3$, то значение характера – вещественное число, поэтому оно является целым. В случае $|g|=5$ можно воспользоваться формулами $\cos 2\pi/5=(\sqrt{5}-1)/4$ и $\cos 4\pi/5=-(\sqrt{5}+1)/4$.

Таким образом, если g — автоморфизм графа Γ порядка $2,3$ или 5, то из лемм 1, 3 следует, что либо $(r-1)\alpha_1(g)=\alpha_2(g)$ и $\chi_1(g)=((r-1)\alpha_0(g)-\alpha_3(g))/(2r)$, либо $p=d=5$, $K=\mathbb{Q}(5^{1/2})$ и целочисленный базис кольца O_K равен $(1,(1+5^{1/2})/2)$ Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω — пустой граф и $|g|=p$ — простое число. Если p не делит r, то $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=v$, $\chi_1(g)=(r\alpha_1(g)-v)\sqrt{k}/(2kr)$ и $\alpha_1(g)-1$ делится на ld. Ввиду леммы 1 если число $(\alpha_1(g)-v/r)/(ld)$ нечетно, то d не сравнимо с 1 по модулю 4.

Пусть p делит r. Тогда $\alpha_3(g)=tr$ и $\chi_1(g)=((r-1)\alpha_1(g)-\alpha_2(g))\sqrt{k}/(2rk)-t/2$. Если t нечетно, то ввиду леммы 1 имеем $(r-1)\alpha_1(g)\neq\alpha_2(g)$, число d сравнимо с 1 по модулю 4 и $\chi_1(g)=a+b(1+d^{1/2})/2$, поэтому $a+b/2=-t/2$, $b=((r-1)\alpha_1(g)-\alpha_2(g))/(lrd)$ нечетно.

Если $\alpha_3(g)=v$, то $\chi_1(g)=-(r\mu+2)/2$, k нечетно и $\lambda=\mu$ четно. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω содержит t антиподальных классов. Из леммы 2 следует, что $\alpha_3(g)=0$, $|g|$ делит $k+1-t$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=r(k+1-t)$ и $\chi_1(g)=(r-1)t/2+(\alpha_1(g)(r-1)-(k+1-t))\sqrt{k}/(2k)$.

Лемма 6. *G/K — почти простая группа.*

Доказательство. Пусть выполняется аффинный случай и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}=G/K$. Если $|\bar{T}|=2^n$, то k нечетно, μ четно и $r\mu=2^n-2$, поэтому r нечетно. Пусть N — силовская 2-подгруппа из T. По лемме Фраттини можно считать, что $\mathrm{N}_G(N)$ содержит G_a. Далее, имеются r N-орбит длины 2^n. Если орбита a^N содержит вершину из $[a]$, то из транзитивности G_a на $[a]$ следует, что $[a]\subset a^N$, противоречие. Пусть g — инволюция из N. Тогда $\alpha_2(g)=v$ и $\chi_1(g)=-(k+1)\sqrt{k}/(2k)$, противоречие с леммой 1.

Пусть $|\bar{T}| = p^n$, p нечетно. Тогда $r\mu = p^n - 2$, поэтому r взаимно просто с p. Пусть N — силовская p-подгруппа из T. По лемме Фраттини можно считать, что $\mathrm{N}_G(N)$ содержит G_a. Пусть g — элемент порядка p из N. Как и выше $\alpha_2(g) = v$ и $\chi_1(g) = -(k+1)\sqrt{k}/(2k)$, противоречие с леммой 1.

Лемма 7. *Если $K = 1$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) $k = q$ *— степень простого числа,* Γ *имеет массив* $\{r\mu+1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, r\mu+1\}$ *и* $\mathrm{L}_2(q) \lhd G$;

(2) $\Gamma \in \{\mathcal{S}uz(q,r), \mathcal{R}ee(q,r), \mathcal{U}_3(q,r)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K = 1$. Ввиду леммы 6 цоколь T группы G — простая группа. Если T действует интранзитивно на множестве вершин графа Γ, то число T-орбит делит r. Если орбита a^T содержит смежную с a вершину, то из транзитивности G_a на $[a]$ следует, что $[a] \subset a^T$, противоречие. Значит, a^T является кокликой порядка, кратного $s(k+1)$. С другой стороны, ввиду границы Хофмана порядок коклики в Γ не больше $r(k+1)\sqrt{k}/(k+\sqrt{k}) = r\sqrt{k} - r(k-\sqrt{k})/(k+\sqrt{k})$. Отсюда $s(k+1) < r\sqrt{k}$.

Если $T = \mathrm{A}_n$, $n = r\mu + 2$, то $G_{\{F\}} \in \{\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{S}_{n-1}\}$ и $|G_{\{F\}} : G_a| = r$, противоречие.

Если $T = \mathrm{L}_m(q)$, $n = (q^m-1)/(q-1)$, $q = p^e$, $m \geq 2$, то r делит $(q^m-1)/(q-1) - 2$, $T_{\{F\}}$ — полупрямое произведение элементарной абелевой группы N порядка q^{m-1} на H, где H — расширение $\mathrm{SL}_{m-1}(q)$ с помощью циклической группы порядка $(q-1)/(m,q-1)$. Отсюда N содержится в ядре C группы подстановок $G^F_{\{F\}}$. В случае $m = 2$ имеем $k = q$ и $\mathrm{L}_2(q) \lhd G$.

В случае $m \geq 3$ стабилизатор ненулевого вектора e_1 действует транзитивно на множестве векторов, не попадающих в $\langle e_1 \rangle$, поэтому диаметр графа Γ равен 2, противоречие.

Если $T = \mathrm{Sp}_{2m}(2)$, $n = 2^{2m-1} \pm 2^{m-1}$, $m \geq 3$, то r — нечетный делитель $2^{2m-1} \pm 2^{m-1} - 2$ и $|T_{\{F\}} : \mathrm{O}^{\pm}_{2m}(2)| = 2$. Противоречие с тем, что число $2^{2m-2} \pm 2^{m-2} - 1$ взаимно просто с $2^{2i} - 1$ для $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Если $T = \mathrm{U}_3(q)$, $r\mu = q^3 - 1$, то $T_{\{F\}}$ — расширение группы P порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $(q^2-1)/(3,q+1)$, $|G_{\{F\}}|$ делит $|T_{\{F\}}|2e$, где $q = p^e$, $G_{\{F\}}$ содержит подгруппу G_a индекса r и r делит $(q-1)(2e, q^2+q+1)$. Так как $k+1 \geq r\sqrt{k}$, то T действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и можно считать, что $T = G$. Тогда r делит $q-1$. Если r четно, то существует частное графа Γ с антиподальными классами порядка 2. Противоречие с теоремой 1. Значит, r нечетно. Далее, G_a действует транзитивно на $\Sigma - \{F\}$ и $\Gamma = \mathcal{U}_3(q,r)$.

Если $T = {}^2\mathrm{G}_2(q)'$, $r\mu = q^3 - 1$, $q = 3^{2e+1} \geq 3$, то $T_{\{F\}}$ — расширение группы порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $(q-1)$, $|G_{\{F\}}|$ делит $|T_{\{F\}}|(2e+1)$, $G_{\{F\}}$ содержит подгруппу G_a индекса r и r делит $(q-1)(2e+1, q^2+q+1)$. Так как $k+1 \geq r\sqrt{k}$, то T действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и можно считать, что $T = G$. Тогда r делит $(q-1)$, в частности, $e > 0$. Далее, G_a действует транзитивно на $\Sigma - \{F\}$ и $\Gamma = \mathcal{R}ee(q,r)$.

Если $T = \mathrm{Sz}(q)$, $r\mu = q^2 - 1$, $q = 2^{2e+1} \geq 8$, то $T_{\{F\}}$ — расширение группы порядка q^2 с помощью циклической группы порядка $(q-1)$, $|G_{\{F\}}|$ делит $|T_{\{F\}}|(2e+1)$, $G_{\{F\}}$ содержит подгруппу G_a индекса r и r делит $(q-1)(2e+1, q+1)$. Так как $(r, q-1)(k+1) \geq r\sqrt{k}$, то T действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и можно считать, что $T = G$. Тогда r делит $(q-1)$. Далее, G_a действует транзитивно на $\Sigma - \{F\}$ и $\Gamma = \mathcal{S}uz(q,r)$.

Если T — группа Матье M_n, $r\mu + 2 = n \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$, то $G_{\{F\}} \in \{\mathrm{M}_{n-1}, \mathrm{Aut}(\mathrm{M}_{n-1})\}$ и $|G_{\{F\}} : G_a| = r$. В случае $n = 11$ имеем $r = 3 = \mu$ и $\mathrm{M}'_{10} \cong \mathrm{L}_2(9)$, противоречие. В случае $n = 12$ имеем $r = 5, \mu = 2$, противоречие. В случае $n = 22$ имеем $(\mu, r) \in \{(2,10), (4,5)\}$. Ввиду [9, предложение 1] первый случай невозможен. Во втором случае имеем противоречие с тем, что $\mathrm{M}'_{21} \cong \mathrm{L}_3(4)$. В случае $n = 23$ имеем $r\mu = 21$, противоречие с тем, что M_{22} не содержит подгрупп индекса, не большего 7. Наконец, в случае $n = 24$ имеем $r = 11, \mu = 2$, противоречие как и выше.

В спорадическом случае если $T = \mathrm{L}_2(11)$, то $G_{\{F\}} = \mathrm{A}_5$, $r = 3 = \mu$, противоречие. Если $T = \mathrm{M}_{11}$, $n = 12$, то $G_{\{F\}} = \mathrm{L}_2(11)$, $r = 5, \mu = 2$, противоречие. Если $T = \mathrm{A}_7$, $n = 15$, то $r\mu = 13$, противоречие. Если $T = \mathrm{L}_2(8), n = 28$, то $r = 13, \mu = 2$, противоречие. Если $T = \mathrm{HiS}$, $n = 176$, то $r = 87$, $\mu = 2$, противоречие. Если $T = \mathrm{Co}_3$, $n = 276$, то $r = 137$, $\mu = 2$, противоречие.

Лемма 8. *Если $K \neq 1$, то $|K| = 2$ и $T = K \times \mathrm{L}_2(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K \neq 1$. По лемме 5 k нечетно и μ четно. Из транзитивности действия $G_{\{F\}}$ на F следует, что $|K|$ делит r. Рассмотрим граф $\bar{\Gamma}$, вершинами которого являются K-орбиты и две вершины a^K, b^K смежны тогда и только тогда, когда некоторая вершина из a^K смежна с вершиной из b^K. Если $|K| < r$, то $\bar{\Gamma}$ — реберно симметричный антиподальный граф диаметра 3 с массивом пересечений $\{r'\bar{\mu} + 1, (r' - 1)\bar{\mu}, 1; 1, \bar{\mu}, r'\bar{\mu} + 1\}$, где $r' = r/|K|$, $\bar{\mu} = |K|\mu$.

Допустим, что $G = KY$, где Y — компонента группы G, действующая транзитивно на множестве вершин графа Γ. Пусть $h \in K$, $a \in F$. Тогда $a^h = a^y$ для подходящего $y \in Y$, поэтому $yh^{-1} \in G_a = Y_a$ и $h \in Y$. Отсюда $K \subset Y$ и можно считать, что $G = Y$. В случае $|K| = r$ по лемме 4 число r — степень 2.

Если $\bar{T} = \mathrm{A}_n$, $n = r\mu + 2$ четно, то $G_{\{F\}}/K \in \{\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{S}_{n-1}\}$, $|G_{\{F\}}/K : G_aK/K| = r/|K|$ и либо $r = |K|$, либо $r/|K| = 2$, $G_{\{F\}}/K = \mathrm{S}_{n-1}$ и $G_aK/K = \mathrm{A}_{n-1}$. Так как $|K| < n - 1$, то T содержит компоненту Y, являющуюся накрывающей группой для A_n, и Y действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Теперь можно считать, что $G = Y$. Если $n = 6$, то $r = \mu = 2$, противоречие. Значит, $n \geq 8$, $|K| = 2$ и $r = 4$. Отсюда $\bar{\Gamma}$ — реберно симметричный антиподальный граф диаметра 3 с массивом пересечений $\{2\bar{\mu}+1, \bar{\mu}, 1; 1, \bar{\mu}, 2\bar{\mu}+1\}$, противоречие с теоремой 1.

Пусть $\bar{T} = \mathrm{L}_m(q)$, $n = (q^m - 1)/(q - 1)$, $m \geq 2$, $q = p^e$, p — нечетное простое число, m четно, r делит $(q^m-1)/(q-1)-2$, $T_{\{F\}}/K$ — полупрямое произведение элементарной абелевой группы $\bar{N}$ порядка q^{m-1} на $\bar{H}$, где $\bar{H}$ — расширение $\mathrm{SL}_{m-1}(q)$ с помощью циклической группы порядка $(q-1)/(m, q-1)$. Ввиду [10] из действия $\bar{T}$ на K следует, что T содержит компоненту Y, являющуюся накрывающей группой для $\mathrm{L}_m(q)$.

Если $m \geq 4$, то Y действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и Y_a содержит полупрямое произведение элементарной абелевой группы E порядка q^{m-1} на подгруппу L, изоморфную $\mathrm{SL}_{m-1}(q)$. Ввиду леммы 7 можно считать, что Y — не простая группа, $G = Y$ и $G^F_{\{F\}}$ является расширением центральной подгруппы порядка s, делящего $(m, q-1)$, с помощью циклической группы порядка $(q-1)/s$. Так как $((q^m-1)/(q-1)-2, q-1) = (m-2, q-1)$, то $|K| = 2$. Рассмотрев граф $\bar{\Gamma}$, получим противоречие с леммой 7.

Итак, $m = 2$ и r делит $q - 1$. Напомним, что порядок мультипликатора Шура группы $\mathrm{L}_2(q)$, если q нечетно, равен 2, если $q = 9$, равен 6. Отсюда $|K| = 2$ и граф $\bar{\Gamma}$ имеет массив пересечений $\{q, (r'-1)2\mu, 1; 1, 2\mu, q\}$, где $r' = r/2$. По [2, замечание (*iii*) к предложению 12.5.3] либо q, r нечетны и $G = \mathrm{L}_2(q).Z_2$, либо q нечетно, r четно и $G = Z_2 \times \mathrm{L}_2(q)$.

Если $\bar{T} = \mathrm{Sp}_{2m}(2)$, $n = 2^{2m-1} \pm 2^{m-1}$, $m \geq 3$, то r — нечетный делитель $2^{2m-1} \pm 2^{m-1} - 2$ и $|T_{\{F\}}/K : \mathrm{O}^{\pm}_{2m}(2)| = 2$. Ввиду [10] из действия $\bar{T}$ на K следует, что T содержит компоненту Y, являющуюся накрывающей группой для $\mathrm{Sp}_{2m}(2)$. Повторив рассуждения из предыдущего абзаца, получим, что $r = 4$, противоречие.

Если $\bar{T} = \mathrm{U}_3(q)$, $r\mu = q^3 - 1$, то $q = p^e$, p — нечетное простое число, $T_{\{F\}}/K$ — расширение группы P порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $(q^2-1)/(3, q+1)$, $|G_{\{F\}}|$ делит $|T_{\{F\}}|2e$, $G_{\{F\}}/K$ содержит подгруппу G_aK/K индекса r и r делит $(q-1)(2e, q^2+q+1)$. Если $q = 5$, то ввиду [10] минимальная степень точного подстановочного представления группы $\mathrm{U}_3(q)$ равна 50, а $r\mu = 124$. Поэтому ввиду [10] из действия $\bar{T}$ на K следует, что T содержит компоненту Y, являющуюся накрывающей группой для $\mathrm{U}_3(q)$. Напомним, что порядок мультипликатора Шура группы $\mathrm{U}_3(q)$ делит 3. Противоречие с тем, что $3 = (3, q+1)$ делит $(q-1)(2e, q^2+q+1)$.

Если $\bar{T} = {}^2\mathrm{G}_2(q)'$, $r\mu = q^3 - 1$, $q = 3^{2e+1} \geq 3$, то $T_{\{F\}}/K$ — расширение группы порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $(q-1)$, $|G_{\{F\}}|$ делит $|T_{\{F\}}|(2e+1)$, $G_{\{F\}}/K$ содержит подгруппу G_aK/K индекса r и r — нечетный делитель $(q-1)(2e+1, q^2+q+1)$. В случае $q=3$ имеем $r=13, \mu=2$, противоречие. Значит, $e>0$, T содержит компоненту Y, типа ${}^2\mathrm{G}_2(q)$, противоречие с тем, что мультипликатор Шура группы ${}^2\mathrm{G}_2(q)$ тривиален.

Если $\bar{T}$ — группа Матье M_n, $r\mu+2=n\in\{12,22,24\}$, то $G_{\{F\}}/K\in\{\mathrm{M}_{n-1},\mathrm{Aut}(\mathrm{M}_{n-1})\}$ и $|G_{\{F\}}/K : G_aK/K| = r/|K|$. В случае $n=12$ имеем $r=5=|K|, \mu=2$, противоречие с леммой 4. В случае $n=22$ имеем $(\mu,r)\in\{(2,10),(4,5)\}$. Ввиду [9, предложение 1] первый случай невозможен. Во втором случае $\mathrm{M}_{21}'\cong \mathrm{L}_3(4)$ и ввиду леммы 4 имеем $r=10, \mu=2$ и $|K|=5$, противоречие с тем, что порядок мультипликатора Шура группы M_{22} не делится на 5. Наконец, в случае $n=24$ имеем $r=11=|K|, \mu=2$, противоречие с леммой 4.

В спорадическом случае если $T/K\cong \mathrm{M}_{11}$, $n=12$, то $r=5=|K|, \mu=2$. Если $T/K\cong \mathrm{L}_2(8)$, $n=28$, то $r=13=|K|, \mu=2$. Если $T/K=\mathrm{HiS}$, $n=176$, то $r=87=|K|$, $\mu=2$. Если $T/K=\mathrm{Co}_3$, $n=276$, то $r=137=|K|$, $\mu=2$. В любом случае имеем противоречие с леммой 4.

Лемма, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E.** Antipodal distance transitive covers of complete graphs // Europ. J. Comb. 1998. Vol. 19, no. 4. P. 455–478.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag. 1989. 485 p.
3. **Godsil C.D., Hensel A.D.** Distance regular covers of the complete graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. 1992. Vol. 56. P. 205–238.
4. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю.** Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda=\mu$ // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 1. С. 22–26.
5. **Neukirch J.** Algebraic number theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. No. 322. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 571 p.
6. **Cameron P.J.** Permutation groups // London Math. Soc. Student Texts. No. 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
7. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
8. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О группе автоморфизмов графа Ашбахера // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 3. Р. 310–313.
9. **Буриченко В.П., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15,12,1;1,2,15\}$ // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 4. Р. 375–379.
10. **Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. Р. 267–287.

Махнев Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 14.12.12

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
вед. научный сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

Циовкина Людмила Юрьевна
научный сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.658.4

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА НАГРУЖЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА К НЕСОБСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Л. Д. Попов

Предложена модификация метода нагруженного функционала, которая делает его применимым не только к обычным, разрешимым задачам, но и к несобственным задачам математического программирования 1-го рода. В случае разрешимости исходной задачи метод строит ее обычное решение, а в случае несобственности — конструирует ее обобщенное решение, имеющее весьма полезную содержательную интерпретацию. Приведены описание алгоритма, характеристика обобщенного решения, доказаны теоремы сходимости, представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: математическое программирование, несобственные задачи, обобщенные решения, метод нагруженного функционала.

L. D. Popov. On the adaptation of the least squares method to improper problems of mathematical programming.

We propose a modification of the least squares method, which allows to apply this method not only to usual feasible problems but also to improper problems of mathematical programming of the first kind. The method constructs the usual solution for feasible problems and a generalized solution for improper problems; the generalized solution has a very useful meaningful interpretation. We describe the algorithm, characterize the generalized solution, prove convergence theorems, and present results of numerical experiments.

Keywords: mathematical programming, improper problems, generalized solutions, least squares method.

Введение

Обычно при построении методов решения тех или иных математических задач (и, в том числе, задач математического программирования) исходят из естественного предположения о том, что искомое решение существует. Вместе с тем во многих приложениях информация о разрешимости исходной задачи бывает недоступной *a priori*. Поэтому весьма ценным качеством метода становится его способность работать не только с разрешимыми, но и с неразрешимыми задачами. Это означает, что метод должен не просто сообщить об отсутствии у исходной задачи решения, но и предоставить как можно более точные сведения о причинах ее неразрешимости и о тех или иных, по-возможности минимальных, изменениях, которые необходимо внести в задачу для того, чтобы она приобрела решения.

В области математического программирования неразрешимые задачи принято называть несобственными [1–3]. Задачи такого рода достаточно часто встречаются, например, в экономических приложениях [4]. Показательно, что исторически первый алгоритм линейного программирования, симплекс-метод Дж. Данцига, сталкиваясь с несобственной задачей, уже выдавал ее обобщенное решение из искусственных переменных, характеризующее минимальную в метрике l_1 невязку системы ее ограничений. Пользователю также была доступна преобразованная матрица последнего шага, ненулевые элементы которой позволяли построить граф связей между теми ограничениями, что вступают в противоречие друг с другом [5].

Аналогичными свойствами обладают также методы штрафных функций, проекционные методы, методы модифицированной функции Лагранжа и многие другие методы математического программирования (см., например, [6–12]). В данной работе будет показано, что подобными качествами обладает и метод нагруженного функционала, предложенный в свое время

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00210, 13-07-00181) и программ президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1, 12-П-1-1023 и 12-П-1-1034).

в [13–15]. Для этого он должен быть подвергнут некоторой модификации, которая и будет представлена ниже.

Статья построена следующим образом: в разд. 1 приведены исходная постановка задачи и структура ее обобщенного решения, в разд. 2 дано описание модифицированного алгоритма и теоремы сходимости, разд. 3 содержит геометрическую интерпретацию вычислений в линейном случае, в разд. 4 представлены результаты численных экспериментов, в разд. 5 рассматривается контр-пример для немодифицированной процедуры. Далее следуют краткое заключение и список литературы.

1. Постановка задачи и исходные предположения

Рассмотрим стандартную задачу выпуклого программирования

$$\inf\{f_0(x)\colon f_j(x) \le 0 \ (j = 1, \ldots, m),\ x \in \mathbb{R}^n\}; \tag{1}$$

здесь числовые функции $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ всюду конечны на $\mathbb{R}^n$, выпуклы и непрерывно дифференцируемы (последнее условие является необязательным и введено для простоты построения решающих правил и алгоритмов).

Предположим, что задача (1) — несобственная 1-го рода (противоречивая, не имеющая решения в обычном смысле). Следуя подходу, намеченному в работах [1–4], определим ее обобщенное решение. Для этого введем параметры коррекции правых частей ее ограничений $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m_+$, где $\mathbb{R}^m_+$ — неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^m$, и обозначим

$$M(u) = \{x\colon f_j(x) \le u_j \ (j = 1, \ldots, m),\ x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{2}$$

$$v(u) = \inf\{f_0(x)\colon x \in M(u)\}. \tag{3}$$

Напомним, что задача (1) называется несобственной 1-го рода, если ее ограничения противоречивы (т. е. $M(0) = \varnothing$), но при этом она может быть трансформирована в собственную задачу, т. е. разрешимую, путем коррекции одних лишь правых частей ее ограничений. В действительности мы потребуем большего и будем рассматривать лишь класс задач, в которых множества $M(u)$ либо пусты, либо ограничены (не обязательно равномерно). Как известно, для этого достаточно, чтобы было ограничено хотя бы одно из этих множеств (в силу выпуклости описывающих их функций).

В соответствии с общим принципом минимальной невязки введем вектор оптимальной коррекции

$$\bar{u} = \arg\inf_{u \in \Omega} ||u||, \quad \text{где } \Omega = \{u \ge 0\colon M(u) \ne \varnothing\}, \tag{4}$$

и в качестве обобщенного (в другой терминологии, аппроксимационного) решения исходной задачи рассмотрим оптимальный вектор(-ы) задачи

$$\bar{v} = \inf\{f_0(x)\colon f_j(x) \le \bar{u}_j \ (j = 1, \ldots, m),\ x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{5}$$

Подчеркнем, что сделанные выше предположения об ограниченности множеств (2) и выпуклости (следовательно, и непрерывности) всех входящих в исходную задачу функций гарантируют конечность и достижимость точных нижних граней в задачах (4), (5). Более того, при сделанных предположениях задача (5) v-устойчива по правым частям ограничений в следующем смысле:

$$(u_\epsilon \in \Omega,\ ||u_\epsilon - \bar{u}|| < \epsilon,\ 0 < \epsilon \to 0) \implies v(u_\epsilon) \to \bar{v}.$$

Наконец, выпишем для задачи (1) классическую квадратичную штрафную функцию

$$\Phi_0(x) = \sum_{j=1}^{m} [f_j^+(x)]^2, \quad \text{где } f_j(x)^+ = \max\{0, f_j(x)\}.$$

С ее помощью можно записать полезное равенство

$$M(\bar{u}) = \operatorname{Arg}\min_x \Phi_0(x).$$

Заметим, что в собственном случае введенное нами обобщенное решение совпадает с обычным решением задачи (1).

2. Модификация метода нагруженного функционала

Метод нагруженного функционала получил свое название от вспомогательной функции

$$\Phi(x, v) = ([f_0(x) - v]^+)^2 + \Phi_0(x), \quad v \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

которая лежит в его основе. При сделанных выше предположениях эта функция при любом фиксированном значении параметра v является всюду конечной (неотрицательной), выпуклой и непрерывно дифференцируемой от аргумента x.

Пусть v_0 — произвольная нижняя оценка для $\bar{v}$ (оптимального значения задачи (5)). Метод нагруженного функционала имеет итеративную природу и генерирует по определенным правилам, вообще говоря, бесконечную последовательность пар (v_k, x_k). В каждой паре точка x_k есть точка безусловного минимума по x вспомогательной функции (6) при фиксированном $v = v_k$. Поиск такого минимума и составляет основное содержание отдельной итерации алгоритма. При этом используются подходящие методы безусловной минимизации, арсенал которых к настоящему времени весьма обширен [15; 16]. Переход к следующей итерации происходит после переопределения величины v_{k+1}, т. е. после уточнения нижней оценки для $\bar{v}$. При уточнении используется информация, полученная в ходе минимизации $\Phi(\cdot\,, v_k)$.

Формулы, по которым производится уточнение, могут быть различными [13–15]. Мы предлагаем следующие максимально простые:

$$x_k \in \operatorname{Arg}\min_x \Phi(x, v_k), \quad v_{k+1} = f_0(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots)\,. \tag{7}$$

Суть их состоит в том, что на $(k+1)$-м шаге алгоритма в качестве уточненной оценки для $\bar{v}$ выбирается значение целевой функции в точке текущего минимума вспомогательной функции $\Phi(\cdot\,, v_k)$. Хотя такой подход не выглядит слишком эффективным, именно он позволяет методу работать как с разрешимыми, так и неразрешимыми (несобственными) задачами.

Предложенная вычислительная схема имеет примечательную геометрическую интерпретацию. Определим в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ множества

$$K = \{(u, v) \colon v \geq v(u),\ u \in \Omega\} \quad \text{и} \quad L = \{(0, v) \colon 0 \in \mathbb{R}^m,\ v - \text{любое}\}.$$

При сделанных предположениях множество K не пусто, выпукло и замкнуто. Множество L представляет собой прямую.

Нетрудно видеть, что если исходная задача (1) разрешима (собственная), то $K \cap L \neq \varnothing$, причем пара $(0, \bar{v})$ является их общей точкой с минимальной v-координатой. В несобственном случае $K \cap L = \varnothing$.

Геометрический смысл безусловной минимизации функции $\Phi(\cdot\,, v_k)$ по x состоит в поиске метрической проекции точки $(0, v_k) \in L$ на выпуклое замкнутое множество K (эта проекция при $v_k < \bar{v}$ равна $w = (u_k, f_0(x_k))$, где $u_j^k = f_j^+(x_k),\ j = 1, \dots, m$). Предлагаемое в (7) уточнение нижней оценки эквивалентно обратному проектированию точки $(u_k, f_0(x_k)) \in K$ на прямую L. В целом предложенный выше модифицированный метод нагруженного функционала реализует идею циклического проектирования стартовой точки специального вида $(0, v_0)$ поочередно на пару множеств K и L (вначале на K, затем на L, затем снова на K и т. д.).

Методы циклического (последовательного) проектирования на конечную систему замкнутых выпуклых множеств хорошо изучены (см., например, [17–21] и др.) как в предположении существования у этих множеств общих точек, так и в предположении, что подобных точек нет. В первом случае эти методы сходятся к одной из таких общих точек, а во втором — порождают так называемые замкнутые циклы неподвижности. Приведенный выше алгоритм имеет, однако, две особенности, первая из которых состоит в особой структуре множества L (это — прямая), а вторая — в специальном выборе стартовой точки (v_0 — нижняя оценка для оптимума в (5)). Поэтому предельные точки итерационной последовательности (7) будут обладать дополнительными свойствами, к изучению которых мы сейчас и переходим.

Начнем со следующего простого утверждения.

Лемма 1. *На каждом шаге процесса* (7) *выполнено условие* $\Phi_0(x_{k+1}) \le \Phi_0(x_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, в силу (7)

$$\Phi(x_{k+1}, v_{k+1}) = \min_x \Phi(x, v_{k+1}) \le \Phi(x_k, v_{k+1}).$$

Подставляя сюда определение (6), после перегруппировки слагаемых и с учетом формулы уточнения оценки $\bar v$ получаем

$$\begin{aligned}\Phi_0(x_{k+1}) &\le ([f_0(x_k) - v_{k+1}]^+)^2 + \Phi_0(x_k) - ([f_0(x_{k+1}) - v_{k+1}]^+)^2 \\ &= \Phi_0(x_k) - ([f_0(x_{k+1}) - v_{k+1}]^+)^2 \le \Phi_0(x_k),\end{aligned} \tag{8}$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Пусть на очередном шаге процесса* (7) *выполнено условие* $v_{k+1} > v_k$. *Тогда* $\Phi_0(x_k) < \Phi_0(x_{k-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из (8) при сдвиге всех индексов на единицу и при учете равенства $f_0(x_k) = v_{k+1}$.

Лемма 3. *Пусть на очередном шаге процесса* (7) *выполнены условия* $\Phi_0(x_k) > \min_x \Phi_0(x)$ *и* $v_k < \bar v$. *Тогда* $v_k < v_{k+1} < \bar v$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar x$ — произвольное решение задачи (5). В силу соотношений (7)

$$\Phi(x_k, v_k) = \min_x \Phi(x, v_k) \le \Phi(\bar x, v_k).$$

Подставляя сюда определение (6), после перегруппировки слагаемых и с учетом формулы уточнения оценки $\bar v$ получаем неравенство

$$([f_0(x_k) - v_k]^+)^2 \le ([f_0(\bar x) - v_k]^+)^2 + \Phi_0(\bar x) - \Phi_0(x_k) = (\bar v - v_k)^2 - (\Phi_0(x_k) - \min_x \Phi_0(x)),$$

так что

$$([f_0(x_k) - v_k]^+)^2 = [(v_{k+1} - v_k)^+]^2 < (\bar v - v_k)^2.$$

Отсюда

$$v_{k+1} - v_k \le (v_{k+1} - v_k)^+ < \bar v - v_k,$$

или, после преобразования, $v_{k+1} < \bar v$, что и дает первую часть утверждения.

Вторая часть утверждения следует из классических условий оптимальности первого порядка, согласно которым $\nabla_x \Phi(x_k, v_k) = 0$. Подставляя в них выражение (6), после перегруппировки слагаемых выводим

$$2\,[(f_0(x_k) - v_k)^+]\nabla f_0(x_k) = -\nabla \Phi_0(x_k).$$

Поскольку правая часть этого равенства по предположению отлична от нуля, то должна быть отличной от нуля и левая его часть, в силу чего немедленно получаем $v_{k+1} = f_0(x_k) > v_k$.

Лемма 4. *Пусть на очередном шаге процесса* (7) *выполнено условие* $v_k < \bar{v}$. *Тогда либо* $\Phi_0(x_k) > \min\limits_x \Phi_0(x)$, *либо* $v_{k+1} = \bar{v}$, *и алгоритм завершает работу* (*поскольку все последующие* $v_s = \bar{v}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, как уже отмечалось выше, на каждом шаге процесса (7) выполнено равенство

$$\nabla_x \Phi(x_k, v_k) = 2\,[(f_0(x_k) - v_k)^+]\nabla f_0(x_k) + \nabla\Phi_0(x_k) = 0. \tag{9}$$

Если при этом $\Phi_0(x_k) = \min\limits_x \Phi_0(x)$, то в силу тех же самых причин второе слагаемое в (9) равно нулю, и мы имеем сокращенное равенство

$$[(f_0(x_k) - v_k)^+]\nabla f_0(x_k) = 0.$$

Осталось заметить, что $x_k \in M(\bar{u})$, и потому $f_0(x_k) \geq \bar{v} = \min\{f_0(x)\colon x \in M(\bar{u})\}$. Это означает, что числовой множитель $(f_0(x_k) - v_k)^+ = f_0(x_k) - v_k > \bar{v} - v_k > 0$, и, следовательно, $\nabla f_0(x_k) = 0$, т. е. вновь $f_0(x_k) = \min\limits_x f_0(x)$ $(= \bar{v})$. После этого процесс (7), очевидно, стабилизируется.

Обобщая все приведенные утверждения, а также известные факты из работ по циклическому проектированию на систему выпуклых замкнутых множеств, можно сформулировать итоговое утверждение о сходимости модифицированного метода.

Теорема 1. *Пусть* $v_0 < \bar{v}$. *Тогда вне зависимости от разрешимости или неразрешимости задачи* (1) *процесс* (7) *порождает последовательность пар* (v_k, x_k) *со свойствами*:

a) $v_k \nearrow \bar{v}$;

b) $f_0(x_k) \nearrow \bar{v}$;

c) $\Phi_0(x_k) \searrow \min\limits_x \Phi_0(x) \quad (= |\bar{u}|^2)$.

Напомним, что все утверждения были доказаны в предположении, что хотя бы одно непустое множество $M(u)$ ограничено (значит, ограничены и все такие непустые множества).

З а м е ч а н и е 1. В случае разрешимости исходной задачи ее обобщенное решение совпадает с обычным, так что отдельно рассматривать разрешимый случай нет необходимости.

З а м е ч а н и е 2. Что касается скорости сходимости модифицированного метода, то она в общем случае линейна, что является типичным для методов циклического (последовательного) проектирования.

3. Особенности линейного случая

Рассмотрим как частный случай задачу линейного программирования

$$\max\{(c, x)\colon Ax = b,\ x \geq 0\}; \tag{10}$$

здесь числовая матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и векторы c и b соответствующей размерности заданы; x — вектор неизвестных; круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов. Как и ранее, будем допускать, что задача (10) — несобственная 1-го рода. Это означает, что ее ограничения могут быть несовместны, но всегда совместны ограничения двойственной к ней задачи

$$\min\{(b, w)\colon A^T w \geq c\}.$$

Вследствие этого задача с откорректированными правыми частями ограничений

$$\max\{(c, x)\colon Ax = b + u,\ x \geq 0\} \qquad (= v(u)),$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор параметров коррекции, автоматически становится разрешимой, как только система ее ограничений становится совместной.

Как и выше, обозначим $M(u) = \{x\colon Ax = b + u,\ x \geq 0\}$ и введем вектор оптимальной коррекции $\bar{u} = \arg\min\{\,||u||\colon M(u) \neq \varnothing\}$. В качестве обобщенного решения исходной задачи будем рассматривать решения (в обычном смысле этого термина) задачи

$$\bar{v} = \max\{(c,x)\colon Ax = b + \bar{u},\ x \geq 0\}. \tag{11}$$

Отметим, что допустимая область этой задачи может быть описана в терминах квадратичной штрафной функции как

$$M(\bar{u}) = \operatorname{Arg}\min_{x\geq 0} \Phi_0(x), \quad \text{где } \Phi_0(x) = \|Ax - b\|^2.$$

Как и ранее, в случае разрешимости исходной задачи $\bar{u} = 0$ и задачи (10), (11) просто совпадают.

Применим основные идеи предыдущего раздела для поиска оптимального вектора коррекции $\bar{u}$ и решения скорректированной задачи (11). Придавая этим идеям несколько иной формат, введем функцию

$$\Phi(x,v) = ((c,x) - v)^2 + \Phi_0(x), \quad v \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+.$$

При сделанных выше предположениях эта функция двух аргументов при любом фиксированном v является всюду конечной (неотрицательной), выпуклой по x и непрерывно дифференцируемой (необходимость в положительной срезке здесь отпадает).

Пусть v_0 — произвольная верхняя оценка для $\bar{v}$ (оптимального значения задачи (11)). Соотношения модифицированного процесса с учетом изменений в исходной постановке задачи примут вид

$$x_k \in \operatorname{Arg}\min_{x\geq 0} \Phi(x, v_k), \quad v_{k+1} = (c, x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{12}$$

Наиболее трудоемкая часть здесь — поиск минимума квадратичной функции $\Phi(\cdot\,, v_k)$ на неотрицательном ортанте пространства ее переменных.

Чтобы представить геометрическую интерпретацию метода, введем, как обычно, множества

$$K = \{(u,v)\colon u = Ax,\ v = (c,x),\ x \geq 0\} \quad \text{и} \quad L = \{(b,v)\colon v \text{ — любое}\}.$$

При сделанных предположениях K является многогранным конусом. Множество L — прямая (как и раньше). Нетрудно видеть, что если исходная задача (1) разрешима, то $K \cap L \neq \varnothing$, причем пара $(b, \bar{v})$ является их общей точкой с максимальной v-координатой. В несобственном случае $K \cap L = \varnothing$. Как и выше, модифицированный метод (12) реализует идею циклического проектирования стартовой точки (b, v_0) поочередно на пару множеств K и L. Обоснование сходимости процесса (12) может быть проведено по той же схеме, что применялась в предыдущем разделе в нелинейном случае.

Теорема 2. *Пусть ограничения задачи, двойственной к исходной, совместны и выполнено неравенство* $v_0 > \bar{v}$. *Тогда вне зависимости от разрешимости или неразрешимости задачи* (10) *процесс* (12) *порождает последовательность пар* (v_k, x_k) *со свойствами*:

a) $v_k \searrow \bar{v}$;

b) $(c, x_k) \searrow \bar{v}$;

c) $x_k \geq 0, \qquad (Ax_k - b) \to \bar{u}$.

З а м е ч а н и е 3. Скорость сходимости предложенного алгоритма в линейном случае также остается линейной, что выступает своеобразной платой за расширение области применимости основного метода.

З а м е ч а н и е 4. Тот факт, что в линейном случае множество K является многогранным конусом, для разрешимых задач позволяет получить конечную сходимость. Для этого уточненную оценку v_{k+1} ищут как v-координату точки пересечения прямой L с той гранью множества K, на которой размещается проекция предыдущей точки (b, v_k) (так это и было предложено в [13]). Но, как показывает контр-пример (см. разд. 5), сходимость такого процесса нарушается сразу, как только ограничения задачи становятся противоречивыми.

4. Численный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился как на разрешимых, так и на несобственных задачах линейного программирования средней размерности в каноническом формате в среде MATLAB. Разреженные матрицы коэффициентов тестовых задач генерировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением от -1 до 1. Заполненность матриц ненулевыми элементами варьировалась в пределах 10–30% в зависимости от размерности задачи. Правые части ограничений и коэффициенты целевой функции подбирались таким образом, чтобы решение задачи совпадало с некоторым заданным заранее (для несобственного случая использовалась технология из [12]). Общая схема алгоритма отвечала материалу предыдущего раздела. Верхние границы целевой функции устанавливались на порядок выше реального значения. Внутренняя оптимизация проводилась при помощи метода проекции градиента. Конечная точность по минимальной невязке и оптимальному значению целевой функции равнялась `1.0E-09`. Усредненные результаты по числу итераций представлены в таблице.

Данные экспериментов с модифицированным методом

Число задач	Размерность	Несобственность	Среднее число итераций	Вариация
50	500x1500	да	96	±60
30	1000x3000	да	368	±128
10	3000x10000	да	1954	±759
50	500x1500	нет	91	±61
30	1000x3000	нет	365	±125
10	3000x10000	нет	2082	±631

Из приведенных данных видно, что число итераций на различных типах задач примерно совпадает вне зависимости от того, разрешимы они или нет. Данные о числе итераций демонстрируют относительно невысокую скорость сходимости метода (линейную). Заметим, что вообще линейная скорость сходимости характерна для методов циклического проектирования.

5. Приложение

Приведем контр-пример, показывающий, что в несобственном случае исходный вариант метода нагруженного функционала из [13] теряет свои свойства сходимости.

Дана задача линейного программирования: найти

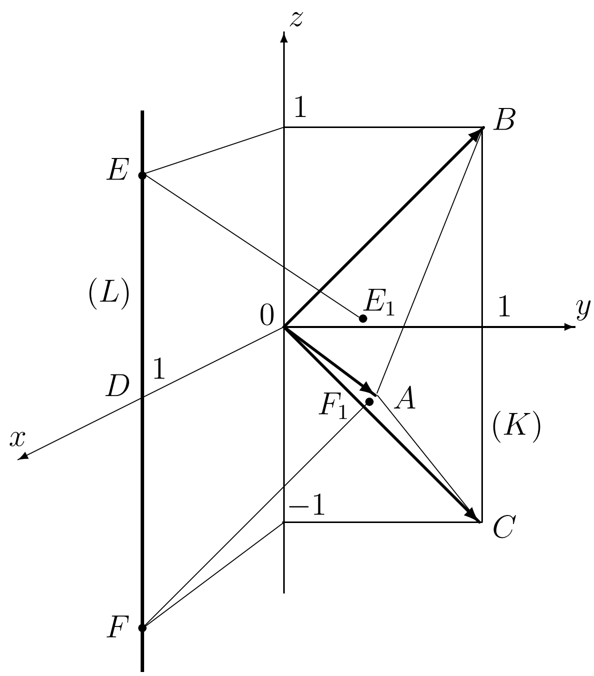
$$\begin{aligned} &\max\ z = -x_2 + x_3 \\ &\text{s.t.}\quad x_1 = 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_{1,2,3} \geq 0. \end{aligned}$$

Матричная структура исходных данных задачи имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccc} A & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \quad b \\ c & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \end{matrix}} & \end{array}$$

Выписанная задача — несобственная 1-го рода, вектор оптимальной (минимальной) коррекции равен $\bar{u} = (-1/2; 1/2)$, задача с откорректированными правыми частями ограничений разрешима (в силу ограниченности допустимого множества), и ее оптимальное значение $\bar{v} = 0$.

Многогранный конус K здесь порожден векторами $\vec{OA}(1,1,0)$, $\vec{OB}(0,1,1)$, $\vec{OC}(0,1,-1)$ (см. рисунок), а прямая L проходит через точку $D(1,0,0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{DE}(0,0,1)$. В качестве стартовой точки исходного метода возьмем точку $E(1,0,1)$, что соответствует значению $v_0 = 1 > \bar{v}$. Проекция этой точки на конус K показана на чертеже как



Чертеж конуса K и прямой L.

точка $E_1(1/3, 2/3, 1/3)$; она лежит на верхней грани этого конуса (грани, порожденной векторами $\vec{OA}(1,1,0)$ и $\vec{OB}(0,1,1)$). Следуя правилу уточнения оценки оптимального значения из [13], найдем точку пересечения этой грани с прямой L. Получим точку $F(1,0,-1)$, симметричную по отношению к точке E. Новая оценка $v_1 = -1 < \bar{v}$, что уже нарушает основную идею метода и монотонность его сходимости. Следующее проектирование текущей точки на конус приведет нас в точку $F_1(1/3, 2/3, -1/3)$. Эта точка лежит на нижней грани конуса K (грани, порожденной векторами $\vec{OA}(1,1,0)$ и $\vec{OC}(0,1,-1)$). Вновь проводя уточнение оценки оптимального значения, ищем точку пересечения нижней грани с прямой L. Это оказывается точка E, и мы вернулись туда, откуда начали свое движение. Метод зациклился.

6. Заключение

Предложена модификация метода нагруженного функционала, которая делает его применимым не только к обычным, разрешимым задачам, но и к несобственным задачам математического программирования 1-го рода. В случае, когда задача несобственная (не имеет обычного решения), модифицированный алгоритм строит ее обобщенное решение, имеющее полезную содержательную интерпретацию. Приведены описание алгоритма, характеристика обобщенного решения, доказаны теоремы сходимости, представлены результаты численных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Eremin I.I.** Theory of linear optimization. Ser. Inverse and Ill-Posed Problems. Utrecht: VSP, 2002. 336 p.
4. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
5. **Данциг Дж.** Линейное программирование, его обобщения и применения. М.: Прогресс, 1966. 600 с.

6. Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования: сб. ст / ред. И. И. Еремин, Л. Д. Попов. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1985. 136 с.
7. Исследования по несобственным задачам оптимизации: сб. ст. / ред. И. И. Еремин, А. А. Ватолин. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. 78 с.
8. Нерегулярная двойственность в математическом программировании: сб. ст. / ред. И. И. Еремин, А. А. Ватолин. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. 80 с.
9. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Двойственность и фейеровские процессы для несобственных задач линейного программирования // Оптимизация. Управление. Интеллект. 2005. № 9. С. 47–59.
10. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Фейеровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов // Изв. вузов. Математика. 2009. № 1. С. 44–65.
11. **Скарин В.Д.** Аппроксимационные и регуляризационные свойства расширенных штрафных функций в выпуклом программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №4. С. 234–250.
12. **Попов Л.Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 3–11.
13. **Лебедев В.Ю.** Приближенный алгоритм решения задачи ЛП // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14, № 4. С. 1052–1058.
14. **Разумихин Б.С.** Метод касательных для стохастических и динамических задач оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1977. № 1. С. 5–15.
15. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
16. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
17. **Брэгман Л.М.** Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 3. С. 487–490.
18. **Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В.** Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 6. С. 1212–1228.
19. **Еремин И.И.** Обобщение релаксационного метода Моцкина — Агмона // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 2. С. 183–188.
20. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 288 с.
21. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Замкнутые фейеровские циклы для несовместных систем выпуклых неравенств // Изв. вузов. Математика. 2008. № 1. С. 11–19.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 25.12.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.584+519.651

О НОВОМ СЕМЕЙСТВЕ УСЛОВНО ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. И. Роженко

Предложено новое семейство условно положительно-определенных радиальных базисных функций, которые можно использовать при построении сплайна многих переменных в $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Это семейство естественным образом расширяет известные конструкции сплайнов с натяжением и регуляризованных сплайнов.

Ключевые слова: вполне монотонная функция, радиальная базисная функция, сплайн.

A. I. Rozhenko. On a new family of conditionally positive definite radial basis functions.

A new family of conditionally positive definite radial basis functions is proposed, which can be applied for constructing multivariate splines in $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. The family is a natural generalization of known constructions of splines with tension and regularized splines.

Keywords: completely monotonic function, radial basis function, spline.

Введение

В работе предложено новое семейство радиальных базисных функций, полученное путем комбинирования классических радиальных функций и функций, построенных с помощью модифицированных функций Бесселя второго рода. Предлагаемые конструкции существенно расширяют возможности сплайн-интерполяции в $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, предоставляя широкий спектр новых условно положительно-определенных радиальных функций, соответствующих различным вариационным функционалам. Например, если классический *сплайн тонких пластин* [1], конструируемый с помощью радиальной базисной функции $r^2 \ln r$, минимизирует вторую производную сплайна в $\mathbb{R}^2$, то с помощью предложенных конструкций можно построить сплайн, минимизирующий функционал, составленный из производных разных порядков.

Идея рассматриваемого подхода была взята из работы [2], в которой были предложены радиальные базисные функции *сплайнов с натяжением* и *регуляризованных сплайнов* в $\mathbb{R}^d$ при $d = 1, 2, 3$. Применение предложенных в указанной работе функций теоретически было обосновано только для конкретных размерностей d пространства независимых переменных. В нашей работе ограничение на размерность для радиальных функций из работы [2] снято. Более того, предложенный в [2] принцип конструирования радиальных функций обобщен как по порядку используемых дифференциальных операторов в вариационном функционале, так и по гладкости приближаемых функций.

Предложенное обобщение конструируется по простым рекуррентным формулам. Легко вычисляется порядок условной положительной определенности радиальных функций нового семейства. Тем самым сразу определяется степень полинома, который надо включить в сплайн, чтобы задача сплайн-интерполяции была корректна.

Радиальную функцию можно применять в качестве базисной для сплайна в $\mathbb{R}^d$, если доказать, что она условно положительно определена относительно некоторого линейного множества функций. Обычно это множество состоит из полиномов степени, меньшей некоторого

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-07-00447) и интеграционного гранта Сибирского и Уральского отделений РАН № 32.

$m \in \mathbb{Z}_+$ (при $m = 0$ это $\{0\}$). В этом случае говорят, что радиальная функция условно положительно определена порядка m (при $m = 0$ — положительно определена).

Один из способов доказательства условной положительной определенности заключается в следующей замене аргумента у радиальной функции: $f(r) \mapsto f(\sqrt{t})$ и исследовании свойств монотонности функции аргумента t на интервале $(0, \infty)$. Например, для радиальной функции $r^2 \ln r$ сплайна тонких пластин приходим к функции $(t/2) \ln t$, вторая производная которой вполне монотонна, тем самым функция $r^2 \ln r$ имеет второй порядок условной положительной определенности.

Идея подхода, рассматриваемого в данной работе, основывается на свойствах монотонности семейства функций $h_\nu(t) = t^{\nu/2} K_\nu(\sqrt{t})$, где K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка $\nu \in \mathbb{R}$, $t \in (0, \infty)$. Порождаемые этими функциями радиальные функции введены в [3]. Мы доказываем в разд. 1 теорему 1 о том, что функции h_ν вполне монотонны. Представляет интерес полученная для этих функций простая формула дифференцирования по t: $h'_\nu(t) = -h_{\nu-1}(t)/2$. Здесь же из функций вида t^ν и $t^n \ln t$, $n \in \mathbb{Z}_+$, конструируется вспомогательное семейство функций $\tilde{h}_\nu(t)$. Фактически при $\nu \le 0$ функция $\tilde{h}_\nu$ совпадает с главным членом сингулярной части фунции h_ν. В теореме 2 устанавливается, что функция $\tilde{h}_\nu$ дифференцируется по точно таким же правилам, что и h_ν.

В разд. 2 строится параметрическое семейство функций $\{h_{\nu,n} \colon \nu \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ и доказываются в теореме 3 свойства их условной вполне монотонности. Формулы построения функций $h_{\nu,n}$ очень простые, например, $h_{\nu,0}(t) = \tilde{h}_\nu(t) - h_\nu(t)$. При построении условно положительно-определенных радиальных функций с помощью условно вполне монотонных функций важно знать ответ на вопрос: конечно ли значение полученной радиальной функции в нуле или нет? Теорема 4 дает ответ на этот вопрос для функций $h_{\nu,n}$.

В разд. 3 рассматривается семейство условно положительно-определенных радиальных функций, порождаемых функциями $h_{\nu,n}$, устанавливаются порядки их условной положительной определенности и приводятся некоторые примеры радиальных функций из этого и других рассматриваемых семейств. В частности, большинство радиальных функций, предложенных в [2], получается из функций $h_{\nu,n}$ при подходящем выборе параметров.

В разд. 4 приводятся формулы представления RBF-сплайна (сплайна, построенного методом радиальных базисных функций) и обсуждаются детали расчета функций $h_{\nu,n}$. Наконец, в заключительном разд. 5 обсуждаются свойства радиальных базисов новых семейств и устанавливается эквивалентность по порядкам гладкости и сходимости между сплайнами, построенными с помощью предложенных радиальных функций, и классическими сплайнами.

1. Семейства функций h_ν и $\tilde{h}_\nu$

Рассмотрим параметрическое семейство функций

$$h_\nu(t) = t^{\nu/2} K_\nu(\sqrt{t}), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty). \tag{1.1}$$

Здесь $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка ν (см., например, [4, § 9.6]). Функция $K_\nu(x)$ непрерывна на $(0, \infty)$, имеет особенность в нуле, положительна, монотонна и экспоненциально убывает к нулю при $x \to \infty$. Функция K_ν симметрична по ν: $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$. Следовательно,

$$h_\nu(t) = t^\nu h_{-\nu}(t) \quad \text{для всех } \nu \in \mathbb{R},\ t \in (0, \infty). \tag{1.2}$$

Определение 1. Функцию $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ называют *вполне монотонной*, если $f \in C^\infty(0, \infty)$ и $(-1)^n f^{(n)}(t) \ge 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, $t > 0$.

Теорема 1. *Функция h_ν дифференцируется по правилу*

$$h'_\nu(t) = -\frac{h_{\nu-1}(t)}{2} \quad \textit{для всех } \nu \in \mathbb{R},\ t \in (0, \infty) \tag{1.3}$$

и вполне монотонна при всех ν.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства формулы (1.3) воспользуемся формулой Бассета для функций $K_\nu(z)$ при $\nu + 1/2 > 0$, $z > 0$ (см., например, [4, п. 9.6.25]):

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2z)^\nu}{\Gamma(1/2)} \int\limits_0^\infty \frac{\cos u}{(u^2+z^2)^{\nu+1/2}}\, du. \tag{1.4}$$

Формулу (1.3) докажем сначала для $\nu > 0$. С учетом (1.4)

$$h_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)}(2t)^\nu \int\limits_0^\infty \frac{\cos u}{(u^2+t)^{\nu+1/2}}\, du, \quad \nu > 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} h'_\nu(t) &= \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)}\, 2\nu(2t)^{\nu-1} \int\limits_0^\infty \frac{\cos u}{(u^2+t)^{\nu+1/2}}\, du - \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(1/2)}\, (2t)^\nu \int\limits_0^\infty \frac{\cos u}{(u^2+t)^{\nu+3/2}}\, du \\ &= \nu t^{\nu/2-1} K_\nu(\sqrt{t}) - \frac{t^{(\nu-1)/2}}{2}\, K_{\nu+1}(\sqrt{t}) = \frac{t^{(\nu-1)/2}}{2}\Big(\frac{2\nu}{\sqrt{t}} K_\nu(\sqrt{t}) - K_{\nu+1}(\sqrt{t})\Big) \\ &= -\frac{t^{(\nu-1)/2}}{2}\, K_{\nu-1}(\sqrt{t}) = -\frac{h_{\nu-1}(t)}{2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

В предпоследнем равенстве в (1.5) мы воспользовались известным рекуррентным соотношением $K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -2\nu z^{-1} K_\nu(z)$.

Теперь докажем формулу (1.3) при $\nu \le 0$. Учитывая тождество $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ и (1.4), имеем

$$h_\nu(t) = t^{\nu/2} K_{-\nu}(\sqrt{t}) = \frac{\Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)}\, 2^{-\nu} \int\limits_0^\infty \frac{\cos u}{(u^2+t)^{-\nu+1/2}}\, du, \quad \nu \le 0.$$

Отсюда

$$h'_\nu(t) = -\frac{\Gamma(-\nu+3/2)}{\Gamma(1/2)}\, 2^{-\nu} \int\limits_0^\infty \frac{\cos u}{(u^2+t)^{-\nu+3/2}}\, du = -\frac{h_{\nu-1}(t)}{2}.$$

Из формулы (1.3) и положительности функции h_ν следуют ее вполне монотонность. Теорема доказана. $\square$

Далее нам потребуются разложение функции h_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, в степенной ряд, полученное из [4, пп. 9.6.10, 9.6.11]:

$$\begin{aligned} h_n(t) = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}(-t/4)^k \\ + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \big[\ln(t/4) - \psi(k+1) - \psi(n+k+1)\big] \frac{(t/4)^k}{k!\,(n+k)!}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}$ — логарифмическая производная гамма-функции, $\gamma = 0.577215\ldots$ — константа Эйлера. Из (1.6) выделим член при t^n:

$$\tilde{h}_n(t) \equiv (-1)^{n+1} \frac{t^n[\ln(t/4) - \psi(1) - \psi(n+1)]}{n!\, 2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.7}$$

Из оценки $K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu)/2 \cdot (z/2)^{-\nu}$ при малых z и $\operatorname{Re}\nu > 0$ [4, п. 9.6.9], тождества $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ и формулы (1.6) при $n = 0$ легко получить оценку функции h_ν вблизи нуля:

$$h_\nu(t) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(-\nu)t^\nu}{2^{\nu+1}}, & \nu < 0, \\ \tilde{h}_0(t), & \nu = 0, \\ \Gamma(\nu)2^{\nu-1}, & \nu > 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Продолжим функцию $\tilde{h}_n$, определенную в (1.7) при $n \in \mathbb{Z}_+$, по правилу

$$\tilde{h}_\nu(t) = \frac{\Gamma(-\nu)t^\nu}{2^{\nu+1}}, \quad \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) легко заключить, что $\tilde{h}_\nu(t) \sim h_\nu(t)$ при $\nu \le 0$ для малых t. Другими словами, функция $\tilde{h}_\nu$ — главный член сингулярной части функции h_ν при $\nu \le 0$. Очевидно, что $\tilde{h}_\nu$ — вполне монотонная функция при $\nu < 0$. Ясно также, что при $\nu \ge 0$ функция $\tilde{h}_\nu$ не является вполне монотонной.

О п р е д е л е н и е 2. Функцию $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ будем называть *условно вполне монотонной порядка* m, если $f \in C^\infty(0,\infty)$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ — наименьшее число, при котором функция $(-1)^m f^{(m)}$ вполне монотонна.

Очевидно, что условно вполне монотонная функция порядка 0 вполне монотонна.

Теорема 2. *Функция $\tilde{h}_\nu$ дифференцируется по правилу*

$$\tilde{h}'_\nu(t) = -\frac{\tilde{h}_{\nu-1}(t)}{2} \quad \textit{для всех } \nu \in \mathbb{R},\ t \in (0,\infty), \tag{1.10}$$

вполне монотонна при $\nu < 0$ и условно вполне монотонна порядка $\lfloor \nu \rfloor + 1$ при $\nu \ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\tilde{h}'_\nu(t) = \frac{\Gamma(-\nu) \cdot \nu t^{\nu-1}}{2^{\nu+1}} = -\frac{\Gamma(-\nu+1)t^{\nu-1}}{2^{\nu+1}} = -\frac{\tilde{h}_{\nu-1}(t)}{2}.$$

При $\nu = 0$

$$\tilde{h}'_0(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{t}{4} - \gamma\right) = -\frac{1}{2t} = -\frac{\tilde{h}_{-1}(t)}{2}.$$

При $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tilde{h}'_\nu(t) &= \frac{d}{dt}\left\{(-1)^{\nu+1}\frac{t^\nu[\ln(t/4) - \psi(1) - \psi(\nu+1)]}{\nu!\,2^{\nu+1}}\right\} \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,2^{\nu+1}}\left\{\nu t^{\nu-1}[\ln(t/4) - \psi(1) - \psi(\nu+1)] + t^{\nu-1}\right\} \\ &= -\frac{(-1)^\nu \nu}{\nu!\,2^{\nu+1}} t^{\nu-1}[\ln(t/4) - \psi(1) - \psi(\nu)] = -\frac{\tilde{h}_{\nu-1}(t)}{2}. \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали формулу (1.10).

Свойства монотонности функций $\tilde{h}_\nu$, сформулированные в теореме, хорошо известны (см., например, [5]) и элементарно следуют из (1.10) и положительности функций $\tilde{h}_\nu$ при $\nu < 0$. Теорема доказана. $\square$

2. Семейство функций $h_{\nu,n}$

С помощью функций h_ν и $\tilde h_\nu$ мы сконструируем семейство функций $h_{\nu,n}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, воспользовавшись следующим утверждением.

Утверждение 1. *Пусть $f \in C^\infty(0,\infty)$ — вполне монотонная функция и ее производные порядков $n = 0,\dots,m$ имеют конечный предел в нуле. Тогда справедливы оценки*

$$(-1)^n\biggl(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0)\biggr) \le 0 \quad \textit{при}\ \ t \ge 0,\ \ n = 0,\dots,m. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция f вполне монотонна, то она не возрастает на $(0,\infty)$. Отсюда $f(t) \le f(0)$ и неравенство (2.1) доказано при $n = 0$. Далее, поскольку функция $-f'$ также вполне монотонна, то f выпукла вниз. Следовательно, при условии, что функция f' ограничена в нуле, $f(t) \ge f(0) + tf'(0)$ и (2.1) доказано при $n = 1$. Продолжая эти рассуждения дальше, получаем оценку $f(t) \le f(0) + tf'(0) + (t^2/2)f''(0)$ и так далее. Утверждение доказано. $\square$

Зададим функции $h_{\nu,n}$ по рекуррентной формуле:

$$h_{\nu,0}(t) = \tilde h_\nu(t) - h_\nu(t); \qquad h_{\nu,n}(t) = \frac{\tilde h_{\nu+n}(t)}{n!\,2^n} - h_{\nu,n-1}(t), \quad n = 1,2,\dots \tag{2.2}$$

Таким образом,

$$h_{\nu,n}(t) = (-1)^{n+1}\biggl(h_\nu(t) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\tilde h_{\nu+k}(t)}{k!\,2^k}\biggr). \tag{2.3}$$

Теорема 3. *Функция $\tilde h_{\nu,n}$ дифференцируется по правилу*

$$h'_{\nu,n}(t) = -\frac{h_{\nu-1,n}(t)}{2} \quad \textit{для всех}\ \nu \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ t \in (0,\infty), \tag{2.4}$$

вполне монотонна при $\nu+n<0$ и условно вполне монотонна порядка $\lfloor\nu\rfloor+n+1$ при $\nu+n \ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула дифференцирования (2.4) вытекает из (1.3), (1.10).

Пусть $\nu + n < 0$. Пользуясь тождеством (1.2), формулами (1.8) и (1.9), из (2.3) получаем

$$h_{\nu,n}(t) = (-1)^{n+1}t^\nu\biggl(h_{-\nu}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k t^k}{k!\,2^k}\cdot\frac{\Gamma(-\nu-k)}{2^{\nu+k+1}}\biggr)$$

$$= (-1)^{n+1}t^\nu\biggl(h_{-\nu}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k h_{-\nu-k}(0)}{2^k}\biggr) = (-1)^{n+1}t^\nu\biggl(h_{-\nu}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}h_{-\nu}^{(k)}(0)\biggr). \tag{2.5}$$

Поскольку $-\nu-n>0$, все производные функции $h_{-\nu}$ до порядка n включительно ограничены в нуле. Отсюда, привлекая (2.1), из (2.5) заключаем, что функция $h_{\nu,n}$ неотрицательна при $\nu+n<0$, а следовательно вполне монотонна.

При $\nu+n \ge 0$ имеем: $(-1)^{\lfloor\nu\rfloor+n+1}h_{\nu,n}^{(\lfloor\nu\rfloor+n+1)}(t) = 2^{-\lfloor\nu\rfloor-n-1}h_{\nu_1,n}(t)$, где $\nu_1 = \nu-\lfloor\nu\rfloor-n-1 < -n$. Поскольку функция $h_{\nu_1,n}$ вполне монотонна, заключаем, что функция $h_{\nu,n}$ условно вполне монотонна порядка $\lfloor\nu\rfloor+n+1$. Теорема доказана. $\square$

Радиальные функции, используемые в качестве базисных в задаче сплайн-аппроксимации, должны быть непрерывны в нуле. Поэтому в следующей теореме исследуется поведение функции $h_{\nu,n}$ вблизи нуля.

Теорема 4. *Функция $h_{\nu,n}$ ведет себя при малых t следующим образом*:

$$h_{\nu,n}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{\tilde{h}_{\nu+n+1}(t)}{(n+1)!\,2^{n+1}}, & \nu \le -n-1, \\ O(1), & -n-1 < \nu < 0, \\ o(1), & \nu = 0, \\ (-1)^{n+1}\Gamma(\nu)2^{\nu-1}, & \nu > 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о построим в порядке оценок, приведенных в формуле (2.6). Первый случай разобъем на два: при $\nu+n < -1$ и $\nu+n=-1$.

1. При $\nu+n<-1$ функция $h_{-\nu}^{(n+1)}(t) = (-1)^{n+1}h_{-\nu-n-1}(t)/2^{n+1}$ ограничена в нуле. Поэтому из (2.5), (1.3) и (1.8) выводим

$$h_{\nu,n}(t) = (-1)^{n+1}t^{\nu}\left(\frac{t^{n+1}h_{-\nu}^{(k)}(0)}{(n+1)!} + o(t^{n+1})\right) = \frac{t^{\nu+n+1}h_{-\nu-n-1}(0)}{(n+1)!\,2^{n+1}} + o(t^{\nu+n+1})$$

$$= \frac{t^{\nu+n+1}\Gamma(-\nu-n-1)2^{-\nu-n-2}}{(n+1)!\,2^{n+1}} + o(t^{\nu+n+1}) = \frac{\tilde{h}_{\nu+n+1}(t)}{(n+1)!\,2^{n+1}} + o(t^{\nu+n+1}).$$

Отсюда получаем оценку в (2.6) при $\nu+n<-1$.

2. При $\nu+n=-1$ из (2.5) имеем

$$h_{-n-1,n}(t) = (-1)^{n+1}t^{-n-1}\left(h_{n+1}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k h_{n+1-k}(0)}{2^k}\right)$$

$$= (-1)^{n+1}t^{-n-1}\left(h_{n+1}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k(n-k)!\,2^{n-k}}{2^k}\right)$$

$$= (-1)^{n+1}t^{-n-1}\left(h_{n+1}(t) - 2^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k)!}{k!}(-t/4)^k\right). \tag{2.7}$$

Подставляя в (2.7) формулу (1.6) разложения в ряд функции h_ν при $\nu=n+1$ и отбрасывая в ней члены порядков малости $n+2$ и выше, получаем

$$h_{-n-1,n}(t) = -\frac{\ln(t/4)-\psi(1)-\psi(n+2)}{(n+1)!\,2^{n+2}} + O(t\ln t) = \frac{\tilde{h}_0(t)-(\psi(n+2)+\gamma)/2}{(n+1)!\,2^{n+1}} + O(t\ln t).$$

3. Из уже доказанных оценок при $\nu+n\le -1$ и формулы дифференцирования (2.4) заключаем, что $h_{\nu,n}(t) = p_{\lfloor\nu\rfloor+n+1}(t) + O(t^{\nu+n+1})$ при $\nu\in(-1-n,0)\setminus\mathbb{Z}$ и $h_{\nu,n}(t) = p_{\nu+n}(t) + O(t^{\nu+n+1}\ln t)$ при $\nu\in(-1-n,0)\cap\mathbb{Z}$, где $p_k(t)$ — некоторый полином степени k. Следовательно, $h_{\nu,n}(t)=O(1)$ при $-1-n<\nu<0$ и оценка в (2.6) при этих ν установлена.

4. При $\nu=0$ все члены в формуле (2.3), кроме первых двух h_0 и $\tilde{h}_0$, стремятся к нулю при $t\to 0$. Поэтому достаточно показать, что $h_{0,0}(t) = \tilde{h}_0(t)-h_0(t) = o(1)$. Из (1.6) при $n=0$ выводим

$$h_{0,0}(t) = \tilde{h}_0(t) - \tilde{h}_0(t)\cdot\left(1+\frac{t}{4}+O(t^2)\right) - \frac{t}{4} + O(t^2) = -\frac{t}{4}(\tilde{h}_0(t)+1)+o(t) = \frac{t}{4}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{t}{4}+\gamma-1\right)+o(t).$$

Отсюда следует оценка в (2.6) для $\nu=0$.

5. При $\nu>0$ все члены в формуле (2.3), кроме h_ν, стремятся к нулю при $t\to 0$. Учитывая оценку из (1.8) для $h_\nu(t)$ при $\nu>0$, получаем требуемую оценку в (2.6) для $\nu>0$. Теорема доказана. □

3. Условно положительно-определенные радиальные функции

О п р е д е л е н и е 3. Непрерывную функцию $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ называют *условно положительно-определенной порядка* $m \in \mathbb{Z}_+$ *в* $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, если для любого конечного множества различных точек $t_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \lambda_i \lambda_j g(|t_i - t_j|) > 0$$

для всех нетривиальных наборов коэффициентов $\{\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, N\}$, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i p(t_i) = 0, \tag{3.1}$$

где $p(t)$ — всевозможные полиномы степени, меньшей m. Здесь $|t_i - t_j|$ — евклидово расстояние между точками, а набор коэффициентов нетривиален, если содержит хотя бы один коэффициент, отличный от нуля. При $m = 0$ ограничения (3.1) отсутствуют и функцию f называют *положительно-определенной.*

Приводимое далее утверждение показывает связь условно вполне монотонных функций с условно положительно-определенными. Мы даем ее с небольшим упрощением (не рассматривается случай условной положительности).

Утверждение 2 (Мичелли [6]). *Пусть функция $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ условно вполне монотонна порядка $m \in \mathbb{Z}_+$, имеет конечный предел при $t \to 0$ и ее m-я производная не является константой. Тогда функция $f(r^2)$ условно положительно определена порядка m в $\mathbb{R}^d$ для любого $d \in \mathbb{N}$.*

З а м е ч а н и е. От условия конечности предела в нуле в этом утверждении можно избавиться с помощью сдвига аргумента функции на положительную величину. Очевидно также, что при умножении аргумента функции на положительную величину свойства монотонности не изменяются. Другими словами, функция $f(\alpha(t+\beta))$ при $\alpha, \beta > 0$ будет условно вполне монотонна и ограничена в нуле, если $f(t)$ условно вполне монотонна.

В табл. 1 приведены радиальные функции, построенные по функциям семейств, рассмотренных в данной работе. Во второй графе таблицы указан порядок условной положительной определенности этих функций с помощью функции положительной срезки $(x)_+ = \max\{x, 0\}$. В последней графе приводятся ограничения, накладываемые на параметр $c \in \mathbb{R}$. Предполагается также, что $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Т а б л и ц а 1

Функция	Порядок	Ограничение
$h_\nu(a^2(r^2+c^2))$	0	$c \neq 0$ при $\nu \leq 0$
$\tilde{h}_\nu(a^2(r^2+c^2))$	$(\lfloor\nu\rfloor + 1)_+$	$c \neq 0$ при $\nu \leq 0$
$h_{\nu,n}(a^2(r^2+c^2))$	$(\lfloor\nu\rfloor + n + 1)_+$	$c \neq 0$ при $\nu + n \leq -1$

Радиальные функции, построенные по функции $\tilde{h}_\nu$, хорошо известны (см., например, [5]): это степенная функция $\Gamma(-\nu)r^{2\nu}$ ($\nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$); радиальная базисная функция сплайна тонких пластин $r^2 \ln r$ и его обобщения — полигармонического сплайна $(-1)^{n+1} r^{2n} \ln r$ ($n \in \mathbb{N}$); мультиквадрик $(-1)^{\lfloor\nu\rfloor+1}(r^2+c^2)^\nu$ ($\nu > 0$) и обратный мультиквадрик $(r^2+c^2)^\nu$ ($\nu < 0$); радиальная базисная функция DMM-сплайна [7]: $(-1)^{n+1}(r^2+c^2)^n \ln(r^2+c^2)$ ($n \in \mathbb{N}$).

В табл. 2 приведены формулы для некоторых радиальных функций из табл. 1 при конкретных значениях параметров. Коэффициент c указан в случаях, когда порождающая функция

Таблица 2

№ п/п	Функция	Формула	Порядок
1	$h_{-1/2}(t) = \sqrt{\pi/(2t)}\, e^{-\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi/2}\,(r^2+c^2)^{-1/2}e^{-(r^2+c^2)^{1/2}}$	0
2	$h_0(t) = K_0(\sqrt{t})$	$K_0((r^2+c^2)^{1/2})$	0
3	$h_{1/2}(t) = \sqrt{\pi/2}\, e^{-\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi/2}\, e^{-r}$	0
4	$h_{3/2}(t) = \sqrt{\pi/2}\, e^{-\sqrt{t}}(\sqrt{t}+1)$	$\sqrt{\pi/2}\, e^{-r}(r+1)$	0
5	$\tilde{h}_{-1/2}(t) = \sqrt{\pi/(2t)}$	$\sqrt{\pi/2}\,(r^2+c^2)^{-1/2}$	0
6	$\tilde{h}_0(t) = -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t}{4} - \gamma$	$-\dfrac{1}{2}\ln(r^2+c^2) + \ln 2 - \gamma$	1
7	$\tilde{h}_{1/2}(t) = -\sqrt{\pi t/2}$	$-\sqrt{\pi/2}\, r$	1
8	$\tilde{h}_{3/2}(t) = \dfrac{1}{3}\sqrt{\pi t^3/2}$	$\dfrac{1}{3}\sqrt{\pi/2}\, r^3$	2
9	$h_{-1/2,0}(t) = \sqrt{\pi/(2t)}\,(1-e^{-\sqrt{t}})$	$\sqrt{\pi/2}\,\dfrac{1}{\varphi r}(1-e^{-\varphi r})$	0
10	$h_{0,0}(t) = -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t}{4} - \gamma - K_0(\sqrt{t})$	$-\ln\dfrac{\varphi r}{2} - \gamma - K_0(\varphi r)$	1
11	$h_{1/2,0}(t) = -\sqrt{\pi/2}\,(\sqrt{t} + e^{-\sqrt{t}})$	$-\sqrt{\pi/2}\,(\varphi r + e^{-\varphi r})$	1
12	$h_{-1/2,1}(t) = \sqrt{\pi/(2t)}\,(-t/2 - 1 + e^{-\sqrt{t}})$	$\sqrt{\pi/2}\,\dfrac{\tau}{r}\left(-\dfrac{r^2}{2\tau^2} - 1 + e^{-r/\tau}\right)$	1
13	$h_{0,1}(t) = \dfrac{t}{8}\left(\ln\dfrac{t}{4} + 2\gamma - 1\right) + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t}{4} + \gamma + K_0(\sqrt{t})$	$\dfrac{r^2}{4\tau^2}\left(\ln\dfrac{r}{2\tau} + \gamma - \dfrac{1}{2}\right) + \ln\dfrac{r}{2\tau} + \gamma + K_0\left(\dfrac{r}{\tau}\right)$	2
14	$h_{1/2,1}(t) = \sqrt{\pi/2}\left(\dfrac{\sqrt{t^3}}{6} + \sqrt{t} + e^{-\sqrt{t}}\right)$	$\sqrt{\pi/2}\left(\dfrac{r^3}{6\tau^3} + \dfrac{r}{\tau} + e^{-r/\tau}\right)$	2

не ограничена в нуле и в порождаемой ею радиальной функции этот коэффициент отличен от нуля. В формулах 9–11 используется подстановка $t \mapsto (\varphi r)^2$, а в 12–14 — $t \mapsto (r/\tau)^2$, где φ и τ — некоторые положительные числа.

К радиальной функции можно применить следующие преобразования, не изменяющие свойства условной положительной определенности: умножить функцию на положительную константу, а также добавить к функции полином $p_{m-1}(r^2)$ степени не выше $m-1$, где m — порядок условной положительной определенности. Например, при $m = 1$ можно добавить константу, а при $m = 2$ — функцию $a + br^2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

С учетом этого замечания получаем следующее соответствие перечисленных функций сплайнам, рассмотренным в [2]: $h_{1-d/2,0}$ (см. табл. 2, формулы 10, 11) — радиальная базисная функция сплайна с натяжением в $\mathbb{R}^d$ при $d = 1, 2$; $h_{1-d/2,1}$ (см. табл. 2, формулы 12, 13) — радиальная базисная функция регуляризованного сплайна в $\mathbb{R}^d$ при $d = 2, 3$. Отметим небольшие расхождения с [2]: порядок условной положительной определенности функции $h_{-1/2,1}$ равен единице, поэтому в качестве тренда (определение см. в следующем разделе), добавляемого к регуляризованному сплайну в $\mathbb{R}^3$, можно взять константу (в [2] требуется линейная функция, т.е. порядок равен 2); в формуле (55) радиальной базисной функции регуляризованного сплайна в $\mathbb{R}^2$ имеется опечатка (в аргументе функции ln вместо τ написано π), которая, к сожалению, тиражируется во многих работах, имеющих ссылки на [2].

4. Построение RBF-сплайна

Пусть функция $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ условно положительно определена порядка $m \in \mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{R}^d$ и $\omega = \{t_i \in \mathbb{R}^d,\ i = 1,\dots,N\}$ — некоторое множество различных точек. Тогда RBF-сплайн (см., например, [8]), построенный с помощью радиальной функции g на сетке ω, определяется как

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i g(|t - t_i|) + q(t), \tag{4.1}$$

где q — некоторый полином степени $m-1$, а коэффициенты сплайна $\{\lambda_i\}$ удовлетворяют ограничениям (3.1) для всех полиномов $p(t)$ степени меньшей m.

Функция q в (4.1) и функции p в (3.1) выбираются из пространства полиномов степени $m-1$, называемого *трендом сплайна*. Число m будем называть *порядком полиномиального тренда*. Пространство тренда сплайна можно расширить, например, увеличив степень полиномов или добавив в базис этого пространства произвольные непрерывные линейно-независимые функции. При этом надо, конечно, потребовать, чтобы ограничения (3.1) выполнялись для всех функций расширенного тренда. Итак, если радиальная функция g условно положительно определена порядка m, то порядок полиномиального тренда сплайна должен быть как минимум m, но может быть и больше.

С помощью RBF-сплайна (4.1) можно интерполировать данные, заданные на сетке ω: если в узлах сетки задать некоторые условия интерполяции $\sigma(t_j) = z_j$, $j = 1,\dots,N$, то с учетом (3.1) приходим к системе линейных уравнений с $(N+K)\times(N+K)$-матрицей, решая которую, выводим коэффициенты сплайна. Здесь K — размерность пространства тренда сплайна. Полученная система уравнений будет однозначно разрешима, если сетка ω *невырождена относительно тренда сплайна* P, т.е. если задача интерполяции $p(t_i) = 0$, $i = 1,\dots,N$, $p \in P$, имеет только нулевое решение.

Для построения матрицы системы уравнений сплайн-интерполяции и для расчета значения сплайна в произвольной точке требуется уметь вычислять значения функции $g(r)$ при $r \ge 0$. В нашем случае $g(r) = h(a^2(r^2 + c^2))$, где h — любая функция из табл. 1, например $h_{\nu,n}$.

Расчет значения функций $h_{\nu,n}(t)$ при $t > 0$ можно выполнять по рекуррентной формуле (2.2), но лучше использовать формулу (2.3), в которой можно выполнить оптимизацию, вынеся из-под суммы общую часть функций $\tilde{h}_{\nu+k}$. При этом под знаком суммы останется полином от t. В случае целых ν константы, добавляемые к $\ln(t/4)$, можно отбросить.

Значение $h_{\nu,n}(0)$ получается предельным переходом при $t \to 0$. Согласно (2.6), $h_{0,n}(0) = 0$ и $h_{\nu,n}(0) = (-1)^{n+1}\Gamma(\nu)2^{\nu-1}$ при $\nu > 0$. При $\nu \in (-n-1, 0)$ известно только, что это значение конечно. Поэтому требуется провести дополнительные исследования, чтобы получить вычислительные формулы для $h_{\nu,n}(0)$ в этом случае. Такие формулы легко вывести для целых и полуцелых значений ν, воспользовавшись (1.6) и формулой

$$h_{n+1/2}(t) = \sqrt{\pi/2}\, e^{-\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,2^k}\, t^{(n-k)/2}, \quad n \in Z_+, \tag{4.2}$$

полученной из представления функции $K_{n+1/2}(z)$ (см., например, [9, п. 7.2.6]). Для вычисления $h_\nu(t)$ при отрицательных полуцелых ν пользуемся (1.2) и (4.2).

5. Обсуждение результатов

Новые возможности, предоставляемые семействами h_ν и $h_{\nu,n}$, ставят исследователя перед проблемой выбора подходящей радиальной функции. Необходимо понять, какими гладкостными характеристиками обладает сплайн, построенный на базе конкретной радиальной функции, каковы оценки сходимости сплайна к интерполируемой функции при сгущении сетки узлов интерполяции, к какому классу функций должна принадлежать интерполируемая функция, чтобы сходимость имела место, наконец, какой вариационный функционал минимизирует построенный сплайн.

Далее мы наметим некоторые ответы на перечисленные вопросы. Определим линейный оператор $\mathcal{R}_\nu$, сопоставляющий функции f остаточный член ее разложения в нуле в ряд Тейлора степени, меньшей ν:

$$\mathcal{R}_\nu f(t) = f(t) - \sum_{k\in\mathbb{Z}_+,\ k<\nu} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k.$$

Отметим, что $\mathcal{R}_\nu f = f$ при $\nu \le 0$. Отметим также, что $\mathcal{R}_\nu \tilde{h}_\nu = \tilde{h}_\nu$ по построению функции $\tilde{h}_\nu$.

Из (1.8) при $\nu \le 0$ и идентичности формул дифференцирования (1.3) и (1.10) заключаем, что $\mathcal{R}_\nu h_\nu(t) \sim \tilde{h}_\nu(t)$ при малых t. Следовательно, RBF-сплайн, построенный с помощью $h_\nu(r^2)$ при $\nu > 0$ (далее h_ν-сплайн), в окрестности i-го узла сетки имеет вид $O(\tilde{h}_\nu(|t-t_i|^2)) + p(t)$, где $p(t)$ — полином степени $2k$, $k = \lceil \nu \rceil - 1$. Поскольку функции h_ν и $\tilde{h}_\nu$ имеют одинаковое количество производных, ограниченных в нуле, порядки гладкости h_ν-сплайна и $\tilde{h}_\nu$-сплайна в узлах сетки совпадают. Учитывая, что оценки сходимости RBF-сплайнов при сгущении сетки узлов интерполяции определяются порядком гладкости их радиальной функции в нуле (см., например, [10]), можно ожидать одинаковые порядки сходимости h_ν-сплайна и $\tilde{h}_\nu$-сплайна при сгущении сетки узлов интерполяции в ограниченной подобласти.

Возможности интерполирования с помощью h_ν-сплайнов шире, чем у $\tilde{h}_\nu$-сплайнов, поскольку минимальный порядок полиномиального тренда у h_ν-сплайна равен нулю, а у $\tilde{h}_\nu$-сплайна — $\lfloor \nu \rfloor + 1$. Сравним также h_ν-сплайн со сплайном, построенном на базе Гауссиана $g(r) = e^{-r^2}$. Из [4, п. 9.7.2] заключаем, что $h_\nu(r^2) \approx e^{-r}$. Поэтому радиальная функция h_ν-сплайна убывает к нулю существенно медленнее Гауссиана, что в целом хорошо отражается на поведении функции в зонах, где узлы сетки редки. Еще аргумент в пользу h_ν-сплайна по сравнению с $\tilde{h}_\nu$-сплайном — "почти локальность" радиальной функции — $h_\nu(r^2) \approx 0$ при достаточно большом r. Этот факт позволяет использовать базисы из радиальных функций $h_\nu(r^2)$ в *уточняющей сплайн-аппроксимации*, когда решение строится по большим объемам данных с постепенной детализацией.

Аналогично из (2.6) при $\nu \le -n-1$ и идентичности формул дифференцирования (1.10), (2.4) заключаем, что $\mathcal{R}_{\nu+n+1} h_{\nu,n}(t) \sim \tilde{h}_{\nu+n+1}(t)/((n+1)!\,2^{n+1})$ при малых t. Поэтому можно ожидать близкие порядки сходимости $h_{\nu,n}$-сплайна и $\tilde{h}_{\nu+n+1}$-сплайна.

Особые свойства $h_{\nu,n}$-сплайна связаны с видом вариационного функционала, им минимизируемого. Функциональное пространство, соответствущее сплайну, построенному с помощью некоторой условно положительно-определенной радиальной функции $g(r)$ порядка $m \in Z_+$ в $\mathbb{R}^d$, называют естественным (native) пространством [11]. Оно однозначно определяется через саму радиальную функцию и пространство тренда P.

Вид вариационного функционала, минимизируемого сплайном в естественном пространстве, определяется тройкой $\langle g, P, \mathbb{R}^d \rangle$ или, в терминах условно вполне монотонной функции h порядка m, тройкой $\langle h, m, d \rangle$. Положим

$$\Phi_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \big(D^\alpha f(t)\big)^2\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — мультииндекс порядка k, D^α — оператор частной производной мультииндекса α.

В табл. 3 приведено соответствие вариационных функционалов сплайна с натяжением и регуляризованного сплайна тройке $\langle h, m, d \rangle$, доказанное в [2]. В последней графе дана ссылка на номер соответствующей формулы из табл. 2. С помощью параметров φ и τ можно варьировать вид решения. Например, изменяя параметр φ в $h_{1/2,0}$-сплайне в $\mathbb{R}^1$ от очень малых значений до очень больших, получаем, что решение будет трансформироваться от кубического сплайна к кусочно-линейному.

Т а б л и ц а 3

Функционал	d	m	h	Формула
$\varphi^2\Phi_1(f)+\Phi_2(f)$	1	1	$h_{1/2,0}(t)$	11
$\varphi^2\Phi_1(f)+\Phi_2(f)$	2	1	$h_{0,0}(t)$	10
$\Phi_2(f)+\tau^2\Phi_3(f)$	2	2	$h_{0,1}(t)$	13
$\Phi_2(f)+\tau^2\Phi_3(f)$	3	2	$h_{-1/2,1}(t)$	12

Автор выражает благодарность А.Ю. Бежаеву и В.Л. Мирошниченко за полезные замечания и предложения по улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Duchon J.** Spline minimizing rotation-invariant seminorms in Sobolev spaces // Lect. Notes Math. Vol. 571. Berlin: Springer, 1977. P. 85–100.
2. **Mitáš L., Mitášová H.** General variational approach to the interpolation problem // Comput. Math. Appl. 1988. Vol. 16, no. 12. P. 983–992.
3. **Matérn B.** Spatial variation. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 151 p. (Lect. Notes in Statistics; vol. 36.)
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган; ред. пер. В.А. Диткин, Л.Н. Кармазина. М.: Наука, 1979. 832 с.
5. **Schaback R., Wendland H.** Characterization and construction of radial basis functions // Multivariate approximation and applications / eds. N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, A. Pinkus. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. P. 1–24.
6. **Micchelli C.A.** Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions // Constr. Approx. 1986. Vol. 2, no. 1. P. 11–22.
7. **Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л.** Построение математической модели универсальной характеристики радиально-осевой гидротурбины // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Том. 1, № 1. С. 77–88.
8. **Powell M.J.D.** The theory of radial basis function approximation in 1990 // Advances in numerical analysis / ed. W.A. Light. Vol. II: Wavelets, subdivision algorithms and radial basis functions. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. P. 105–210.
9. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции: пер. с англ. / ред. Л.А. Люстерник, А.Р. Янпольский; ред. пер. Н.Я. Виленкин. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 297 с.
10. **Schaback R., Wendland H.** Inverse and saturation theorems for radial basis function interpolation // Math. Comp. 2002. Vol. 71, no. 238. P. 669–681.
11. **Madych W.R., Nelson S.A.** Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. II // Math. Comp. 1990. Vol. 54, no. 189. P. 211–230.

Роженко Александр Иосифович
д-р физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
e-mail: rozhenko@oapmg.sscc.ru

Поступила 24.01.2013

Том 19 № 2 2013

УДК 519.853

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

Рассматриваются проблемы, возникающие при применении метода регуляризованной функции Лагранжа для оптимальной коррекции задач выпуклого программирования с возможно противоречивой системой ограничений. В числе исследуемых проблем — существование вектора оптимальной коррекции, разрешимость аппроксимирующей задачи и двойственной к ней, вопросы регуляризации несобственных задач. Устанавливаются условия согласования параметров регуляризации и точности аппроксимации, приводятся соответствующие оценки сходимости.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод регуляризованной функции Лагранжа, методы регуляризации некорректных задач оптимизации.

V. D. Skarin. On the optimal correction of contradictory problems of convex programming.

Some problems arising from the application of the regularized Lagrange function method for the optimal correction of convex programming problems in which the system of constraints can be contradictory are considered. Among the problems under consideration, there are the existence of an optimal correction vector, feasibility of an approximating problem and of the problem dual to it, and issues related to the regularization of improper problems. Agreement conditions for the regularization parameters and approximation error are established and convergence estimates are given.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, regularized Lagrange function method, regularization methods for ill-posed optimization problems.

Введение

В работе рассматриваются некоторые проблемы, связанные с аппроксимацией задач выпуклого программирования с возможно несовместной системой ограничений. Подобные противоречивые модели представляют интерес как с точки зрения математической теории, так и, что особенно актуально, в связи с анализом прикладных задач, возникающих в практике управления производственно-экономической деятельностью. Распространенность противоречивых задач обуславливает необходимость разработки эффективных объективных процедур их оптимальной коррекции, т. е. методов преобразования модели с несовместностью в семейство разрешимых задач. Здесь объективность процедуры означает, что ей не требуется предварительная информация о наличии допустимых решений в анализируемой задаче и в случае разрешимости последней автоматически будет получено требуемое решение. Оптимальная же коррекция предполагает, что из множества возможных аппроксимирующих задач выбирается одна конкретная, оптимальная с точки зрения некоторого критерия, как правило, минимизирующего степень изменения условий исходной задачи.

В начале 80-х годов прошлого столетия И. И. Еремин для задач линейного и выпуклого программирования ввел понятие несобственной модели [1; 2] как задачи, для которой нарушаются классические соотношения двойственности. Противоречивые модели составляют основной класс несобственных задач.

Пусть исходная задача выпуклого программирования (ВП) имеет вид

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X\}, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00210, 13-07-00181) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

где $X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ функции ($i = 0, 1, \dots, m$). Построим для (1) функцию Лагранжа $L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$, $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \ge 0$. Обозначим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \colon \inf_x L(x, \lambda) > -\infty\}$.

Будем считать, что допустимое множество X в задаче (1) может быть пустым. В случае пустоты X согласно классификации из [2] задача (1) будет несобственной (НЗ) 1-го рода, если $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$, и несобственной 3-го рода, если $X = \varnothing$, $\Lambda = \varnothing$. Чаще встречаются и более исследованы НЗ ВП 1-го рода (см., например, [2–4]). Если в таких задачах заменить множество X на $X_\xi = \{x \colon f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, так, чтобы $X_\xi \ne \varnothing$, то $\inf\{f_0(x) \colon x \in X_\xi\} > -\infty$.

Пусть $E = \{\xi \colon X_\xi \ne \varnothing\}$. В качестве оптимальной аппроксимации для (1) представляется естественным рассмотреть задачу

$$\min\{f_0(x) \colon x \in X_{\bar\xi}\}, \tag{2}$$

где $\bar\xi = \arg\min\{\|\xi\| \colon \xi \in E\}$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы). Если в (1) $X \ne \varnothing$, то $\bar\xi = 0$ и задачи (1), (2) совпадают.

В данной работе исследуется метод оптимальной коррекции НЗ ВП, т. е. метод отыскания параметра $\bar\xi$ и решения задачи (2), основанный на применении регуляризованной по обеим переменным функции Лагранжа

$$L_\sigma(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \alpha\,\|x\|^2 - \beta\|\lambda\|^2,$$

где $\sigma = [\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2$, $\sigma > 0$. Особое внимание уделяется обсуждению ряда проблем, возникающих при использовании данного метода, таких как существование вектора $\bar\xi$, разрешимость задачи (2) и двойственной к ней, выполнение для (2) теоремы Куна — Таккера.

1. Функция $L_\sigma(x, \lambda)$ в анализе НЗ ВП 1-го рода

Определим функции

$$\varphi_\sigma(x) = \max_{\lambda \ge 0} L_\sigma(x, \lambda), \qquad \psi_\sigma(\lambda) = \min_x L_\sigma(x, \lambda).$$

Так как $L_\sigma(x, \lambda)$ — сильно выпуклая по x и сильно вогнутая по λ функция, то $\varphi_\sigma(x)$ и $\psi_\sigma(\lambda)$ определены для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ соответственно. Легко убедиться, что $\varphi_\sigma(x) = L_\sigma(x, \lambda(x))$, где $\lambda(x) = (1/2\beta) f^+(x)$, $f^+(x) = [f_1^+(x), \dots, f_m^+(x)]$. Поэтому

$$\varphi_\sigma(x) = f_0(x) + (1/4\beta)\,\|f^+(x)\|^2 + \alpha\,\|x\|^2.$$

Очевидно, что $\varphi_\sigma(x)$ — сильно выпуклая функция с модулем сильной выпуклости α.

Явный вид функции $\psi_\sigma(\lambda)$ в общем случае задачи ВП получить не удается, тем не менее нетрудно проверить, что $\psi_\sigma(\lambda)$ — сильно вогнутая на $\mathbb{R}^m_+$ функция с модулем сильной вогнутости β. Отсюда вытекает существование единственных точек $x^\sigma = \arg\min\limits_x \varphi_\sigma(x)$ и $\lambda^\sigma = \arg\max\limits_{\lambda \ge 0} \psi_\sigma(\lambda)$ таких, что

$$\varphi_\sigma(x^\sigma) = \psi_\sigma(\lambda^\sigma) = L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma).$$

Итак, функция $L_\sigma(x, \lambda)$ для любого $\sigma > 0$ имеет единственную седловую точку $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ независимо от наличия допустимых точек в задаче (1). В то же время классическая функция Лагранжа $L(x, \lambda)$ заведомо не имеет седловых точек, когда $X = \varnothing$. Этот факт может служить обоснованием применимости функции $L_\sigma(x, \lambda)$ для анализа противоречивых моделей ВП и для построения на ее основе методов коррекции НЗ ВП.

Предположим, что в задаче (1) множество X_ξ непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0$. Тогда будет ограничено X_ξ и для любого $\xi \in E$. Кроме того, в этом случае множество E

будет выпуклым и замкнутым. Поэтому вектор $\bar\xi$, определяющий задачу (2), существует и единственен. Нетрудно увидеть, что $\bar\xi = f^+(\tilde x)$, где $\tilde x \in \widetilde X = \operatorname{Arg}\min\limits_x \|f^+(x)\|$, при этом $X_{\bar\xi} = \widetilde X$. Понятно, что при ограниченности $X_{\bar\xi}$ задача (2) разрешима в некоторой точке $\bar x$.

Если для (2) построить двойственную к ней задачу

$$\max_{\lambda\in\Lambda}\{\psi_{\bar\xi}(\lambda) = \inf_x L_{\bar\xi}(x,\lambda)\}, \tag{3}$$

где $L_{\bar\xi}(x,\lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \bar\xi)$, то можно утверждать [5], что задачи (2) и (3) будут связаны соотношением двойственности $f_0(\bar x) = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\psi_{\bar\xi}(\lambda)$. Однако задача (3) может и не иметь оптимального вектора $\bar\lambda = \arg\max\limits_{\lambda\in\Lambda}\psi_{\bar\xi}(\lambda)$.

Случай, когда двойственная задача (3) разрешима, т. е. существует $[\bar x, \bar\lambda]$ — седловая точка функции $L_{\bar\xi}(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$, был исследован в [3] (см. также [6]). Были установлены зависящие от α и β оценки уклонений значений $f(x^\sigma)$ от $\bar\xi$, $f_0(x^\sigma)$ от $f_0(\bar x)$, $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ от $[\bar x, \bar\lambda]$, которые характеризуют соответствующую сходимость при $\sigma\to 0$. Если, например, $\sigma\to 0$, $\beta = o(\alpha)$, то из этих оценок вытекает, что $x^\sigma \to \bar x_0$, где $\bar x_0$ — нормальное решение задачи (2): $\bar x_0 = \arg\min\{\|x\|\colon x\in\bar X\}$, $\bar X$ — множество решений (2).

2. Случай разрешимости двойственной задачи

Задача (3) будет разрешима, если функции $f_i(x)$ $(i = 1,\dots,m)$ аффинные. Если в (2) ограничения существенно выпуклые, то для разрешимости (3), как известно, требуются определенные дополнительные условия, например условие регулярности Слейтера. Поскольку условие Слейтера заведомо не выполняется для (2), то можно применить прием ε-расширения условий задачи (см., например, работу И. И. Еремина [7]).

Наряду с (2) рассмотрим расширенную задачу

$$\min\{f_0(x)\colon x\in X_{\bar\xi+e}\}, \tag{4}$$

где $e = [\varepsilon,\dots,\varepsilon]\in\mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$. Задача (4) удовлетворяет условию Слейтера в любой точке множества $X_{\bar\xi}$. Поэтому для $\bar x_\varepsilon$ — решения задачи (4) существует вектор $\bar\lambda_\varepsilon$ такой, что пара $[\bar x_\varepsilon, \bar\lambda_\varepsilon]$ будет седловой точкой функции $L_{\bar\xi,\varepsilon}(x,\lambda) = L_{\bar\xi}(x,\lambda) - (\lambda, e)$ в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$. Запишем для (4) условия Куна — Таккера

$$\nabla_x L(\bar x_\varepsilon, \bar\lambda_\varepsilon) = 0, \qquad \bar\lambda_i^\varepsilon(f_i(\bar x_\varepsilon) - \bar\xi_i - \varepsilon) = 0, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

где $\bar\xi_i$, $\bar\lambda_i^\varepsilon$ — компоненты векторов $\bar\xi$ и $\bar\lambda_\varepsilon$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\xi\in\mathbb{R}^m_+$ множество X_ξ непусто и ограничено, $\bar x$ — решение задачи* (2), $\bar f = f_0(\bar x)$. *Тогда справедливы оценки*:

$$\|(f(x^\sigma) - \bar\xi)^+\| \le \sqrt{\beta}\,K(\sigma,\varepsilon); \tag{6}$$

$$f_0(x^\sigma) - \bar f \le \alpha\,\|\bar x\|^2; \tag{7}$$

$$\bar f - f_0(x^\sigma) \le \bar f - \bar f_\varepsilon + \sqrt{\beta}\,K(\sigma,\varepsilon), \tag{8}$$

где $K(\sigma,\varepsilon) = 2\sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda_\varepsilon\| + (4\beta\,\|\bar\lambda_\varepsilon\|^2 + 4\alpha\,\|\bar x_\varepsilon\|^2 + C_1\,(\varepsilon/\beta))^{1/2}$, $\bar f_\varepsilon = f_0(\bar x_\varepsilon)$, $C_1 = \sqrt{m}\,(2\,\|\bar\xi\| + \sqrt{m}\,\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки x^σ следует

$$f_0(x^\sigma) + (1/4\,\beta)\,\|f^+(x^\sigma)\|^2 \le \bar f + (1/4\,\beta)\,\|f^+(\bar x)\|^2 + \alpha\,\|\bar x\|^2,$$

откуда сразу вытекает оценка (7). Аналогично из соотношения $\varphi_\sigma(x^\sigma) \le \varphi(\bar x_\varepsilon)$ получим

$$f_0(x^\sigma) + (1/4\,\beta)\,\|f^+(x^\sigma)\|^2 \le \bar f_\varepsilon + (1/4\,\beta)\,\|f^+(\bar x_\varepsilon)\|^2 + \alpha\,\|\bar x_\varepsilon\|^2. \tag{9}$$

Так как $\bar{x}_\varepsilon$ — допустимая в задаче (4) точка, то

$$\|f^+(\bar{x}_\varepsilon)\|^2 \le \|\bar{\xi} + e\|^2 \le \|\bar{\xi}\|^2 + C_1\varepsilon. \tag{10}$$

Учитывая условия (5), имеем

$$\bar{f}_\varepsilon - f_0(x^\sigma) \le (\bigtriangledown f_0(\bar{x}_\varepsilon),\, \bar{x}_\varepsilon - x^\sigma) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^\varepsilon\, (\bigtriangledown f_i(\bar{x}_\varepsilon),\, x^\sigma - \bar{x}_\varepsilon)$$

$$\le \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^\varepsilon\, (f_i(x^\sigma) - f_i(\bar{x}_\varepsilon)) = (\bar{\lambda}_\varepsilon,\, f(x^\sigma) - \bar{\xi} - e) \le \|\bar{\lambda}_\varepsilon\|\, \|(f(x^\sigma) - \bar{\xi})^+\|. \tag{11}$$

Вспоминая определение вектора $\bar{\xi}$, запишем $\sum\limits_{i=1}^m \bar{\xi}_i \bigtriangledown f_i(\bar{x}) = 0$. Соответственно,

$$0 = \sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i\, (\bigtriangledown f_i(\bar{x}), x - \bar{x}) \le (\bar{\xi},\, f(x)) - \|\bar{\xi}\|^2 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{12}$$

Для любых векторов a и b из $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\|(a-b)^+\|^2 \le \|a^+ - b\|^2$. С помощью (12) оценим

$$\|(f(x^\sigma) - \bar{\xi})^+\|^2 \le \|f^+(x^\sigma) - \bar{\xi}\|^2 = \|f^+(x^\sigma)\|^2 - 2(f^+(x^\sigma),\, \bar{\xi}) + \|\bar{\xi}\|^2 \le \|f^+(x^\sigma)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2.$$

Отсюда с учетом (9), (10), (11) получим

$$\|(f(x^\sigma) - \bar{\xi})^+\|^2 \le 4\beta(\bar{f}_\varepsilon - f_0\,(x^\sigma) + \alpha\|\bar{x}_\varepsilon\|^2) + C_1\varepsilon \le 4\beta\,\|\bar{\lambda}_\varepsilon\|\,\|(f(x^\sigma) - \bar{\xi})^+\| + 4\alpha\beta\,\|\bar{x}_\varepsilon\|^2 + C_1\varepsilon,$$

что влечет неравенство

$$(\|(f(x^\sigma) - \bar{\xi})^+\| - 2\beta\|\bar{\lambda}_\varepsilon\|)^2 \le 4\beta^2\,\|\bar{\lambda}_\varepsilon\|^2 + 4\alpha\beta\|\bar{x}_\varepsilon\|^2 + C_1\varepsilon$$

и, окончательно, оценку (6).

Оценка (8) выводится из (11) и (6).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *при этом* $\alpha \to 0$, $\varepsilon = \beta/\alpha \to 0$, $\varepsilon/\alpha^2 \to 0$. *Тогда* $x^\sigma \to \bar{x}_0$.

Доказательство. Так как множество $\bar{X}$ решений задачи (2) непусто и ограничено, то задача (2) устойчива относительно изменений правых частей ограничений [8, теорема 26.3], т. е. предельные точки последовательности $\{\bar{x}_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$ лежат в множестве $\bar{X}$ и $\bar{f}_\varepsilon \to \bar{f}$. Из неравенства $\varphi_\sigma(x^\sigma) \le \varphi_\sigma(\bar{x})$ следует $\alpha\,\|x^\sigma\|^2 \le \bar{f} - f_0(x^\sigma) + \alpha\,\|\bar{x}\|^2$. С учетом (8) отсюда получаем

$$\|x^\sigma\|^2 \le \|\bar{x}\|^2 + 1/\alpha\,(\bar{f} - \bar{f}_\varepsilon) + \sqrt{\beta}/\alpha\, K(\sigma,\, \varepsilon). \tag{13}$$

Функция $g(\varepsilon) = \bar{f}_\varepsilon$ может быть интерпретирована как функция чувствительности задачи (2). Она является выпуклой функцией [9] и удовлетворяет [10] неравенству Липшица на всяком ограниченном множестве $[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$. Таким образом, будем считать, что $\bar{f} - \bar{f}_\varepsilon = g(0) - g(\varepsilon) \le K_1\varepsilon$, где в качестве константы K_1 можно взять [10], например, значение правой производной функции $g(\varepsilon)$ в точке ε_0. Таким образом, из (13) имеем

$$\|x^\sigma\|^2 \le \|\bar{x}\|^2 + \varepsilon/\alpha\, K_1 + 2\,\beta/\alpha\,\|\bar{\lambda}_\varepsilon\| + (4\,(\beta^2/\alpha^2)\,\|\bar{\lambda}_\varepsilon\|^2 + 4\,(\beta/\alpha)\,\|\bar{x}_\varepsilon\|^2 + C_1\,(\varepsilon/\alpha^2))^{1/2}.$$

Легко показать(см., например, [7]), что $\varepsilon\bar{\lambda}_i^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому с учетом условий на изменение параметров в теореме 2 из последнего неравенства вытекает, что предельные точки x' последовательности $\{x^\sigma\}$ удовлетворяют неравенству $\|x'\| \le \|\bar{x}_0\|$. Так как по теореме 1

$x' \in \bar{X}$, то в силу единственности нормального решения задачи (2) получаем $x' = \bar{x}_0$.

Теорема доказана.

В качестве примера последовательностей, удовлетворяющих условиям теоремы 2, можно взять $\alpha = \alpha_k = 1/\sqrt{k}$, $\beta = \beta_k = 1/k^2$, $\varepsilon = \varepsilon_k = 1/(k\sqrt{k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $k \to \infty$.

Условия на изменение параметров α, β, ε в теореме 2 можно ослабить, если задаться целью найти решение задачи (2) приближенно по функции с заданной точностью δ.

Следствие 1. *Пусть последовательности* $\sigma_k = [\alpha_k, \beta_k]$, ε_k *выбраны следующим образом*: $\beta_k = \varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$, $\alpha_k = \alpha_0$ $(\forall k)$, *где* $\alpha_0 \|\bar{x}_0\|^2 \le \delta$, $\delta > 0$. *Тогда* $|\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x^{\sigma_k}) - \bar{f}\,| \le \delta$.

В самом деле, из неравенства (13) следует ограниченность последовательности $\{x^{\sigma_k}\}$. Пусть x' — предельная точка $\{x^{\sigma_k}\}$ при $k \to \infty$. Тогда из оценок (6), (7) получим $x' \in X_{\bar{\xi}}$, $\bar{f} \le f_0(x') \le \bar{f} + \delta$.

3. Неограниченность множеств X_ξ

Рассуждения в разд. 1, 2 предполагают непустоту и ограниченность множества X_ξ при некотором ξ. Это предположение гарантирует существование и единственность вектора оптимальной коррекции $\bar{\xi}$ в задаче (2). Однако нередко возникают НЗ ВП 1-го рода, когда задача определения $\min\{\|\xi\| \colon \xi \in E\}$ не имеет оптимального элемента.

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу в пространстве $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$:

$$\min\{-x_1 \colon e^{x_1} - x_2 \le 0,\ x_2 \le 0\}. \tag{14}$$

В этой задаче $\inf\limits_x \|f^+(x)\| = \inf\{\,\|\xi\| \colon \xi \in E\} = 0$, но соответствующие нижние границы не достигаются. Очевидно также, что множество X_ξ непустое и неограниченное для любого $\xi > 0$. Запишем для (14) двойственную функцию:

$$\psi(\lambda) = \inf_x\{L(x,\lambda) = -x_1 + \lambda_1(e^{x_1} - x_2) + \lambda_2 x_2\} = L(x(\lambda),\, \lambda),$$

где $\lambda = [\lambda_1,\, \lambda_2] \ge 0$, $x(\lambda)$ — решение уравнения $\nabla_x L(x,\lambda) = [-1 + \lambda_1 e^{x_1},\, -\lambda_1 + \lambda_2] = 0$. Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $x(\lambda) = [-\ln\lambda_1, 0]$, $\psi(\lambda) = 1 + \ln\lambda_1$, $\sup\limits_{\lambda\ge 0} \psi(\lambda) = +\infty$. Очевидно, в задаче (14) $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$, т. е. (14) — НЗ ВП 1-го рода.

Построим задачу

$$\min\{-x_1 \colon e^{x_1} - x_2 \le \xi_1,\ x_2 \le \xi_2\}. \tag{15}$$

Она разрешима для любого $\xi = [\xi_1, \xi_2] > 0$, ее решением будет $\bar{x}_\xi = [\ln(\xi_1 + \xi_2), \xi_2]$, $\bar{f} = -\ln(\xi_1 + \xi_2)$. Двойственная функция для задачи (15) $\psi_\xi(\lambda) = \inf\limits_x \{L_\xi(x,\lambda) = L(x,\lambda) - \lambda_1\xi_1 - \lambda_2\xi_2\}$ приводится к виду $\psi_\xi(\lambda) = 1 + \ln\lambda_1 - \lambda_1(\xi_1 + \xi_2)$. Здесь $\max\limits_{\lambda\ge 0} \psi_\xi(\lambda) = -\ln(\xi_1 + \xi_2)$ и достигается при $\lambda = \bar{\lambda}_\xi = [\bar{\lambda}_1^\xi, \bar{\lambda}_2^\xi]$, $\bar{\lambda}_1^\xi = \bar{\lambda}_2^\xi = 1/(\xi_1 + \xi_2)$. Таким образом, для задачи (15) выполнена теорема двойственности, а пара $[\bar{x}_\xi, \bar{\lambda}_\xi]$ является седловой точкой функции $L_\xi(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2_+$ для любого $\xi > 0$.

Пусть (1) — НЗ ВП 1-го рода, но оптимальный вектор коррекции $\bar{\xi}$ из (4) не существует. Обозначим $F(x) = \|f^+(x)\|^2$, $F^* = \inf\limits_x F(x)$, $F^* \ge 0$. Выберем последовательность точек x^k так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} F(x^k) = F^*$. Для получения $\{x^k\}$ можно применить, например, один из методов градиентного типа [11] безусловной минимизации функций многих переменных (x^0 — произвольная точка $\mathbb{R}^n$). Положим $\xi^k = f^+(x^k)$. Образуем задачу

$$\min\{f_0(x) \colon x \in X_{\xi^k}\}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{16}$$

Так как $x^k \in X_{\xi^k}$, то ограничения задачи (16) совместны для любого k. Эта задача может иметь решения (как в примере 1), но может быть и неразрешимой. Так, если в примере 1 положить $f_0(x) = e^{x_1}$, то множество Λ будет непустым (оно содержит точку $[0, 0]$), т. е. задача (14) с новой $f_0(x)$ будет оставаться НЗ ВП 1-го рода, но $\inf\{e^{x_1} : x = [x_1, x_2] \in X_{\xi^k}\} = 0$ не достигается.

Рассмотрим случай, когда задача (16) разрешима для любого k. Обозначим $\bar{x}_k$ — решение задачи (16), $f_0(\bar{x}_k) = \bar{f}_k$. Будем также считать, что разрешима при этом и двойственная к (16) задача, т. е. найдется вектор $\bar{\lambda}_k \geq 0$ такой, что пара $[\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k]$ будет удовлетворять соотношениям Куна — Таккера: $\bigtriangledown_x L(\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k) = 0$, $(\bar{\lambda}_k, f(\bar{x}_k) - \xi^k) = 0$. Пусть значение F^* определяется с заданной точностью $\delta > 0$:

$$F(x^k) - F^* \leq \delta \qquad (\forall k \geq k_0). \tag{17}$$

Поскольку при этом [11] $\varliminf\limits_{k\to\infty} (\bigtriangledown_x F(x^k),\, x - x^k) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$, то будем считать, что и

$$(\bigtriangledown_x F(x^k),\, x - x^k) \geq -\delta \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\, k \geq k_0). \tag{18}$$

Для краткости обозначим $x^{k_0} = x_\delta$, $\bar{x}_{k_0} = \bar{x}_\delta$, $f_0(\bar{x}_\delta) = \bar{f}_\delta$, $\xi^{k_0} = \xi_\delta$, $\bar{\lambda}_{k_0} = \bar{\lambda}_\delta$. Как и в разд. 2, исследуем связь между задачей (16) и задачей нахождения седловой точки функции $L_\sigma(x, \lambda)$.

Покажем, что метод регуляризованной функции Лагранжа и в случае неразрешимой задачи нахождения вектора $\bar{\xi}$ определяет величину коррекции противоречивых ограничений исходной постановки (1).

Теорема 3. *Пусть x^σ — точка минимума на $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi_\sigma(x) = \max\limits_{\lambda\geq 0} L_\sigma(x, \lambda)$. Тогда для любого значения параметра $\sigma > 0$ справедливы соотношения*:

$$\|(f(x^\sigma) - \xi_\delta)^+\| \leq \sqrt{\beta}\, B(\sigma, \delta); \tag{19}$$

$$\|f^+(x^\sigma) - \xi_\delta\| \leq \sqrt{\beta}\, B_1^{1/2}(\sigma, \delta); \tag{20}$$

$$0 \leq F(x^\sigma) - F^* \leq \beta\, B_1(\sigma, \delta), \tag{21}$$

где $B(\sigma, \delta) = 2[\sqrt{\beta}\, \|\bar{\lambda}_\delta\| + (\alpha\, \|\bar{x}_\delta\|^2 + \beta\, \|\bar{\lambda}_\delta\|^2 + \delta/4\beta)^{1/2}]$, $B_1(x, \delta) = 4(\alpha\, \|\bar{x}_\delta\|^2 + \sqrt{\beta}\, \|\bar{\lambda}_\delta\| B(\sigma, \delta) + \delta/4\beta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем придерживаться схемы доказательства теоремы 1. Так как
$\varphi_\sigma(x^\sigma) \leq \varphi_\sigma(\bar{x}_\delta)$, то

$$1/4\beta\, (F(x^\sigma) - F(\bar{x}_\delta)) \leq \bar{f}_\delta - f_0(x^\sigma) + \alpha\, \|\bar{x}_\delta\|^2 \tag{22}$$

и, соответственно, с учетом (17)

$$F(x^\sigma) - F^* \leq 4\beta\, (\bar{f}_\delta - f_0(x^\sigma)) + 4\alpha\beta\, \|\bar{x}_\delta\|^2 + \delta. \tag{23}$$

По аналогии с (11) выводится неравенство

$$\bar{f}_\delta - f_0(x^\sigma) \leq \|\bar{\lambda}_\delta\|\, \|(f(x^\sigma) - \xi_\delta)^+\|. \tag{24}$$

В силу выпуклости функции $F(x)$ и определения вектора $\xi_\delta = [\xi_1^\delta, \ldots, \xi_m^\delta]$ имеем (см. (12))

$$(\bigtriangledown F(x_\delta),\, x - x_\delta) = 2\sum_{i=1}^m \xi_i^\delta\, (\bigtriangledown f_i(x_\delta),\, x - x_\delta) \leq 2\, (\xi_\delta,\, f(x)) - 2\, \|\xi_\delta\|^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Поэтому из (18) следует $(\xi_\delta, f(x^\sigma)) - \|\xi_\delta\|^2 \geq -\delta/2$. Тогда

$$\|f^+(x^\sigma) - \xi_\delta\|^2 = F(x^\sigma) - 2\, (\xi_\delta, f^+(x^\sigma)) + \|\xi_\delta\|^2 \leq F(x^\sigma) - \|\xi_\delta\|^2 + \delta.$$

Из (22) и (24) с учетом последнего неравенства получим

$$\|(f(x^\sigma)-\xi_\delta)^+\|^2 \le \|f^+(x^\sigma)-\xi_\delta\|^2 \le F(x^\sigma)-F(\bar x_\delta)+\delta$$
$$\le 4\beta\,\|\bar\lambda_\delta\|\,\|(f(x^\sigma)-\xi_\delta)^+\| + 4\alpha\beta\,\|\bar x_\delta\|^2+\delta. \tag{25}$$

Таким образом,

$$(\|(f(x^\sigma)-\xi_\delta)^+\| - 2\beta\,\|\bar\lambda_\delta\|)^2 \le 4\alpha\beta\,\|\bar x_\delta\|^2 + 4\beta^2\,\|\bar\lambda_\delta\|^2+\delta$$

и, следовательно, имеет место оценка (19): $\|(f(x^\sigma)-\xi_\delta)^+\| \le \sqrt{\beta}\,B(\sigma,\delta)$.

Применяя (19) к (23), получим

$$\bar f_\delta - f_0(x^\sigma) \le \sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda_\delta\| B(\sigma,\delta). \tag{26}$$

Из (23) и (26) выводим соотношение (21):

$$0 \le F(x^\sigma)-F^* \le 4\beta\,(\alpha\|\bar x_\delta\|^2 + \sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda_\delta\|\,B(\sigma,\delta)+\delta/4\beta).$$

И, наконец, оценка (20) справедлива в силу неравенств (25) и (19).

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $0<\alpha\le\alpha_0$. *Имеют место неравенства*:

$$\lim_{\beta\to 0}\|(f(x^\sigma)-\xi_\delta)^+\| \le \sqrt{\delta}, \qquad \lim_{\beta\to 0}\|f^+(x^\sigma)-\xi_\delta\| \le \sqrt{\delta}, \qquad F^* \le \lim_{\beta\to 0} F(x^\sigma) \le F^*+\delta.$$

4. Неразрешимость аппроксимационной задачи

В разд. 3 рассматривался случай, когда аппроксимационная задача (16), поставленная в соответствие исходной НЗ ВП 1-го рода, была разрешима. В то же время в примере 1 было показано, что задача (16) не всегда имеет решение.

Если нижняя грань $f_0(x)$ в (16) не достигается, то имеет смысл применить к (16) один из методов регуляризации [12] некорректных задач оптимизации и уже затем рассматривать связь между решением новой регуляризованной задачи и нахождением седловой точки функции $L_\sigma(x,\lambda)$.

Так, в методе регуляризации Тихонова для (16) строится задача определения

$$\min\{\Phi_\gamma(x)\colon x\in X_{\xi^k}\}, \tag{27}$$

где $\Phi_\gamma(x)=f_0(x)+\gamma\|x\|^2$, $\gamma>0$. Задача (27) при $X_{\xi^k}\ne\varnothing$ разрешима в единственной точке x^*_γ, при этом (см., например, [13]) $f_0(x^*_\gamma)\searrow \bar f_k$, $\Phi^*_\gamma\searrow\bar f_k$ $(\gamma\to 0)$, где $\Phi^*_\gamma=\Phi_\gamma(x^*_\gamma)$. Если же задача (16) имеет решение, то x^*_γ сходится при $\gamma\to 0$ к нормальному решению задачи (16).

Обозначим через $L_{\gamma,\xi}(x,\lambda)=\Phi_\gamma(x)+(\lambda, f(x)-\xi^k)$ функцию Лагранжа для задачи (27), $\lambda\in\mathbb{R}^m_+$. Пусть $[x^*_\gamma,\lambda^*_\gamma]$ — ее седловая точка в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$. Поскольку задача (27) разрешима для любого $\gamma>0$, то, рассматривая ее вместо (16), мы придем к следующему аналогу теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $0<\gamma\le\alpha$. *Тогда справедливы следующие неравенства*:

$$\|(f(x^\sigma)-\xi_\delta)^+\| \le 2\sqrt{\beta}\,C_0(\sigma,\delta,\gamma); \qquad \|f^+(x^\sigma)-\xi_\delta\| \le 2\sqrt{\beta}\,C_1^{1/2}(\sigma,\delta,\gamma);$$
$$0\le F(x^\sigma)-F^* \le 4\beta\,C_1(\sigma,\delta,\gamma),$$

где $C_0(\sigma,\delta,\gamma)=\sqrt{\beta}\,\|\lambda^*_\gamma\| + (\alpha_1\|x^*_\gamma\|^2+\beta\|\lambda^*_\gamma\|^2+\delta/4\beta)^{1/2}$, $C_1(\sigma,\delta,\gamma)=2\sqrt{\beta}\,\|\lambda^*_\gamma\|\,C_0(\sigma,\delta,\gamma)+\alpha_1\|x^*_\gamma\|^2+\delta/4\beta$, $\alpha_1=\alpha-\gamma$.

Из анализа оценок, приведенных в теореме 4, следует, что имеет смысл положить $\alpha_1 = 0$, т. е. параметр α функции $L_\sigma(x, \lambda)$ выбирать равным γ. В этом случае метод регуляризованной функции Лагранжа в части исследования поведения x-составляющей седловой точки $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ становится эквивалентным методу Тихонова.

Заметим, что применение методов регуляризации для НЗ ВП помимо решения вопросов разрешимости аппроксимационных задач позволяет уменьшить число анализируемых типов несобственности. Так, наряду с несобственной задачей (1), у которой $X = \varnothing$ (т. е. (1) — НЗ ВП 1-го или 3-го рода), рассмотрим регуляризованную по Тихонову задачу

$$\min\{\Phi_\gamma(x)\colon x \in X\}. \tag{28}$$

Функция Лагранжа для (28) $L_\gamma(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \gamma\,\|x\|^2$ при любом фиксированном векторе $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ достигает минимума по x в единственной точке. Поэтому в задаче (28) допустимое множество X пусто, в то время как множество двойственных переменных $\Lambda = \{\lambda\colon \inf_x L_\gamma(x, \lambda) > -\infty\}$ совпадает с $\mathbb{R}^m_+$. Так что близкая к (1) задача (28) может быть несобственной только 1-го рода. Подобная ситуация возникает и при применении других известных методов регуляризации некорректных оптимизационных задач, таких как метод квазирешений и метод невязки [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Скарин В.Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
4. **Попов Л.Д.** Применение модифицированного prox-метода для оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. Т. 3. С. 261–266.
5. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
6. **Скарин В.Д.** О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.
7. **Еремин И.И.** О задачах выпуклого программирования с противоречивыми ограничениями // Кибернетика. 1971. № 4. С. 124–129.
8. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
9. Введение в нелинейное программирование / К.-Х. Эльстер, Р. Рейнгардт, М. Шойбле, Г. Донат. М.: Наука, 1985. 264 с.
10. **Рокафеллар Р.Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
11. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
12. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
13. **Скарин В.Д.** Регуляризованная функция Лагранжа и методы коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 116–146.

Поступила 9.01.2013

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: skavd@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 517.977.1

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАДАЧИ О СБЛИЖЕНИИ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИТЯГИВАНИИ К МНОЖЕСТВУ РАЗРЕШИМОСТИ [1]

В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, Г. В. Паршиков

Изучается задача о сближении нелинейной управляемой системы с компактным целевым множеством в фазовом пространстве в фиксированный момент времени. Предлагается алгоритм построения решения этой задачи, основанный на максимальном притягивании движения управляемой системы к множеству разрешимости.

Ключевые слова: управляемая система, игровая задача о сближении, множество достижимости, множество разрешимости, интегральная воронка, инвариантность, слабая инвариантность.

V. N. Ushakov, A. R. Matviychuk, G. V. Parshikov. A method for constructing a resolving control in an approach problem based on attraction to the solvability set.

The problem of approach of a nonlinear control system to a compact target set in the phase space at a fixed time is studied. An algorithm for constructing a solution of this problem based on maximum attraction of the system's motion to the solvability set is proposed.

Keywords: control system, game problem of approach, reachable set, solvability set, integral funnel, invariance, weak invariance.

Введение

В работе рассматривается нелинейная управляемая система на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении системы с компактным целевым множеством в фазовом пространстве в конечный момент времени [1–4].

Работа является фактически дополнением к работе [5], посвященной той же задаче о сближении. Здесь предлагается один метод решения задач о сближении, основанный так же, как и в [5], на использовании множества разрешимости задачи. Метод включает в себя процедуру приближенного построения разрешающего управления в задаче о сближении, не предполагающую наличия посредника между движением системы и множеством разрешимости задачи о сближении — поводыря. Основу построения разрешающего управления составляет выбор локального управления, максимально сближающего движение с множеством разрешимости.

В отличие от работы [5], в данной статье мы считаем, что сечения множества разрешимости вычисляются приближенно, и в реальности мы конструируем разрешающее управление, зная лишь эти приближенно вычисленные сечения.

Работа примыкает к исследованиям [1–15].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ № НШ-5927.2012.1, грантов РФФИ № 13-01-96055-р-урал-а и 12-01-31300 мол_а и программы Президиума РАН “Математические модели и алгоритмы в управляемых системах с нелинейной динамикой” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1012/4).

1. Задача о сближении управляемой системы с целевым множеством в $\mathbb{R}^n$

Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь u — вектор управляющих воздействий, удовлетворяющий включению $u \in P$, где P — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$.

Предполагается, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет следующим условиям.

Условие A. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна по совокупности переменных t, x, u и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $L = L(D) \in [0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2.$$

Условие B. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P.$$

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Полагаем $\mathcal{F}(t, x) = \{f(t, x, u); u \in P\}$, $F(t, x) = \mathrm{co}\mathcal{F}(t, x)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$; здесь $\mathrm{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$ векторов f.

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать дифференциальное включение (д.в.) на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x). \tag{1.2}$$

Решения $x(t)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы (1.1) и д.в. (1.2) определим здесь как такие абсолютно непрерывные вектор-функции, которые удовлетворяют соответственно соотношениям $\dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t))$ и $\dfrac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t))$ почти всюду (п.в.) на $[t_0, \vartheta]$, где $u(t)$ — некоторое допустимое управление, т. е. такая измеримая по Лебегу вектор-функция на $[t_0, \vartheta]$, что $u(t) \in P$ на $[t_0, \vartheta]$.

Точно так же, как и в [5], определяются множества достижимости $X(t, t_0, x_0)$ и $X(t, t_0, X_0)$ $(t \in [t_0, \vartheta]$, $X_0 \subset \mathbb{R}^n)$ системы (1.1).

Условие C. $\mathcal{F}(t, x) = F(t, x)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Поскольку для системы (1.1) предполагается выполнение условия **C**, то множества $X(t, t_0, x_0)$ и $X(t, t_0, X_0)$ суть в то же время и множества достижимости д.в. (1.2).

Из множеств достижимости $X(t, t_0, x_0)$ и $X(t, t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ (точнее, из множеств $(t, X(t, t_0, x_0))$ и $(t, X(t, t_0, X_0))$, $t \in [t_0, \vartheta]$) составляются соответствующие интегральные воронки системы (1.1) (д.в. (1.2)) на $[t_0, \vartheta]$:

$$X(t_0, x_0) = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X(t, t_0, x_0)) \text{ и } X(t_0, X_0) = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X(t, t_0, X_0)).$$

Здесь обозначено $(t, X) = \{(t, x) \colon x \in X\}$.

При X_0 — компакте в $\mathbb{R}^n$ интегральная воронка $X(t_0, X_0)$ есть компакт в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Как известно, интегральные воронки управляемых систем играют важную роль при решении различных задач теории управления, и в том числе рассматриваемой здесь задачи о сближении.

Сформулируем задачу о сближении системы (1.1) с компактным целевым множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$ в фиксированный момент времени ϑ. При условиях A, B, C, наложенных на систему (1.1), предложим и обсудим одну схему решения задачи. Эта схема основывается на использовании множества разрешимости задачи, которое можно трактовать в терминах так называемого “обратного” времени как интегральную воронку системы (1.1), записанную в “обратном” времени и начинающуюся на целевом множестве (см. [5]). Множество разрешимости задачи о сближении обладает свойством слабой инвариантности [5], которое нами активно используется при конструировании разрешающего управления.

Учитывая специфику задачи о сближении, будем называть решения системы (1.1) (д.в. (1.2)) движениями системы (1.1) (д.в. (1.2)).

Итак, пусть M — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Задача 1.1 (задача о сближении). Требуется найти допустимое управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$ системы (1.1) (д.в. (1.2)) на промежутке $[t_0, \vartheta]$, которое удовлетворяет включению $x^*(\vartheta) \in M$.

Отметим, что не при любых значениях параметров (t_0, x_0), ϑ и M задача 1.1 разрешима.

В работе [5] указана ограниченная и замкнутая область $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, содержащая все исходные позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ системы (1.1), из которых, как из начальных, разрешима задача о сближении с M в момент ϑ. Из определения области D следует, что для любых $(t_*, x_*) \in D$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и любого движения $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$ системы (1.1) (д.в. (1.2)) верно включение $(t, x(t)) \in D$ при $t \in [t_*, t^*]$.

Именно эту область D вместе с константами $L = L(D)$ и $K = \max\{\|f\|\colon f \in F(t,x), (t,x) \in D\} < \infty$ мы используем в последующих рассуждениях и выкладках.

Множество разрешимости $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ есть множество тех исходных позиций $(t_*, x_*) \in D$, из которых, как из начальных, разрешима задача о сближении системы (1.1) с M в момент ϑ. Это множество может быть описано при помощи интегральной воронки некоторой управляемой системы на $[t_0, \vartheta]$, дуальной к системе (1.1).

А именно наряду с “прямым” временем $t \in [t_0, \vartheta]$ вводится так называемое “обратное” время $\tau \in [t_0, \vartheta]\colon \tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Системе (1.1) сопоставляется управляемая система в $\mathbb{R}^n$, отвечающая “обратному” времени τ:

$$\frac{dz}{d\tau} = f^0(\tau, z, v), \quad \tau \in [t_0, \vartheta]; \tag{1.3}$$

здесь $f^0(\tau, z, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, v)$, где $(\tau, z, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$.

Тогда множество разрешимости W определяется равенством: $W(t) = Z(\tau)$, $t = t_0 + \vartheta - \tau$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$; здесь $Z(\tau)$ — сечения интегральной воронки $Z = Z(t_0, M) \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ системы (1.3) (см. [5, с. 272]).

Множество $Z(t_0, M)$ можно в общем случае системы (1.1) построить лишь приближенно. Теме вычислений и оценки множеств достижимости управляемых систем посвящены работы [6–15].

Подробное изложение одной из схем приближенного вычисления интегральной воронки управляемой системы можно найти, например, в работе [7]. Вместе с тем мы получаем и приближенно вычисленное множество W. В настоящей работе мы не будем концентрироваться на описании процедур приближенного вычисления множества W, считая, что оно уже вычислено приближенно. Исходя из этого предположения, опишем в следующем параграфе метод приближенного построения разрешающего управления в задаче 1.1, который кратко охарактеризован во введении к этой работе. Приведем также оценку отклонения от целевого множества M в момент ϑ движения системы (1.1), сконструированного по этому методу.

2. Метод приближенного построения разрешающего управления в задаче о сближении, основанный на максимальном притягивании движений к W

Приступим к описанию метода построения приближенного решения задачи 1.1. Для конструирования решения будем использовать, как и в [5], множество разрешимости $W \subset D$ задачи 1.1, имеющее своим последним сечением (по времени) множество $W(\vartheta) = M$.

А именно зададим на оси t некоторое разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с равными шагами $\Delta_j = t_{j+1} - t_j = \Delta$, $j = \overline{0, N-1}$.

Предполагаем, что мы умеем вычислять лишь приближенно и множества $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$, и локальные множества достижимости $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ как множества $\tilde{X}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) = x^{(j)} + \Delta F(t_j, x^{(j)})$.

Множества $\tilde{X}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ представляют собой множества достижимости в момент t_{j+1} д.в.

$$\frac{dx}{dt} \in F(t_j, x^{(j)}), \quad x(t_j) = x^{(j)}.$$

Между множествами $X(t^*, t_*, x_*)$ и $\tilde{X}(t^*, t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in D$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$ имеет место, как известно, хорошая степень близости:

$$d(X(t^*, t_*, x_*), \tilde{X}(t^*, t_*, x_*)) \leqslant \omega(t^* - t_*);$$

здесь $\omega(\delta) = \delta\omega^*((1+K)\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$; $\omega^*(\rho) = \max\{\|f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)\| \colon (t_*, x_*)$ и (t^*, x^*) из $D, |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \rho, u \in P\}$, $\rho \in (0, \infty)$; выбор числа K оговорен выше.

Считаем, что множества $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$ вычислены как некоторые множества $W^a(t_j)$ $((t_j, W^a(t_j)) \subset D)$ с погрешностью, не превосходящей некоторой заданной величины $\varepsilon(\Delta) > 0$:

$$d(W(t_j), W^a(t_j)) \leqslant \varepsilon(\Delta),$$

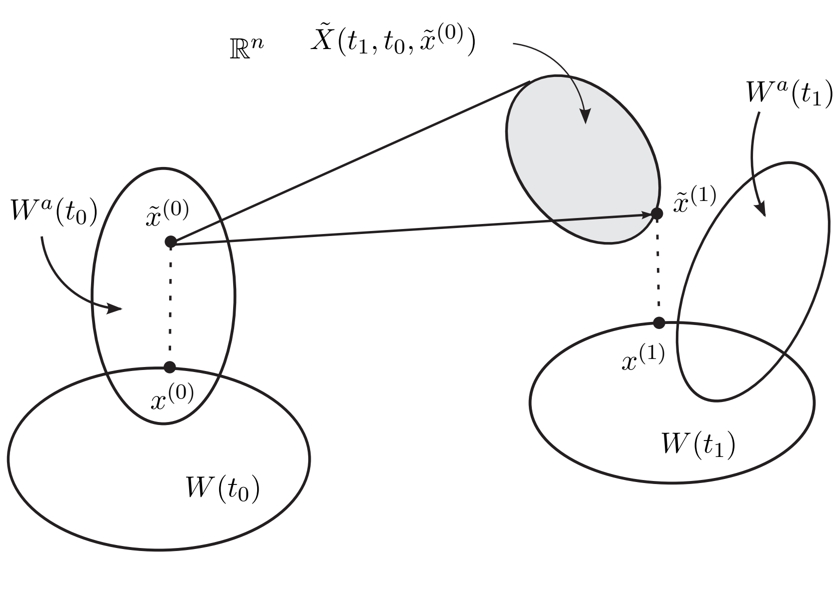
где $d(W_1, W_2)$ — хаусдорфово расстояние между множествами W_1 и W_2 в $\mathbb{R}^n$.

Это предположение отличается от предположения аналогичного характера в работе [5] тем, что здесь мы не умеем точно вычислять множества $W(t_j)$, а только с некоторой погрешностью. Это вносит определенные усложнения в выкладки, на основе которых выводится оценка отклонения движения системы (1.1) в момент ϑ от M. В связи с этим предположением ситуация с выбором начальной точки отличается от ситуации с выбором начальной точки в работе [5], где начальная точка x_0 выбиралась из условия $x_0 \in W(t_0)$.

Здесь, считая, что множества $W^a(t_j)$, $j = \overline{0, N}$, уже нами вычислены, рассмотрим начальный промежуток $[t_0, t_1]$ разбиения Γ.

Выберем произвольную точку $\tilde{x}^{(0)} \in W^a(t_0)$ в качестве начальной точки и рассмотрим множество $\tilde{X}(t_1, t_0, \tilde{x}^{(0)}) = \tilde{x}^{(0)} + \Delta F(t_0, \tilde{x}^{(0)}) = \{\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \Delta f(t_0, \tilde{x}^{(0)}, u) \colon u \in P\}$.

Для системы (1.1) управление $u^*(t)$ на $[t_0, t_1)$ определим равенством $u^*(t) = u^{(0)} \in P$, где точка $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \Delta f(t_0, \tilde{x}^{(0)}, u^{(0)})$ — ближайшая в $\tilde{X}(t_1, t_0, \tilde{x}^{(0)})$ к множеству $W^a(t_1)$ (см. рисунок).



Пусть $x^{(0)}$ — ближайшая точка к $\tilde{x}^{(0)}$ в множестве $W(t_0)$. Тогда $\|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| \leqslant \varepsilon(\Delta)$ и, кроме того, справедливы соотношения

$$\tilde{X}(t_1, t_0, x^{(0)}) \cap W(t_1)_{\omega(\Delta)} \neq \varnothing,$$

$$d(\tilde{X}(t_1, t_0, \tilde{x}^{(0)}), \tilde{X}(t_1, t_0, x^{(0)})) \leqslant e^{L\Delta}\|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| \leqslant e^{L\Delta}\varepsilon(\Delta);$$

здесь W_ω — ω-окрестность множества W в $\mathbb{R}^n$, $\omega > 0$.

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\tilde{X}(t_1, t_0, \tilde{x}^{(0)}) \cap W(t_1)_{\xi_1(\Delta)} \neq \varnothing;$$

здесь $\xi_1(\Delta) = e^{L\Delta}\varepsilon(\Delta) + \omega(\Delta)$.

Из этого соотношения и оценки $d(W(t_1), W^a(t_1)) \leqslant \varepsilon(\Delta)$ вытекает

$$\rho(\tilde{x}^{(1)}, W^a(t_1)) \leqslant \xi_1(\Delta) + \varepsilon(\Delta),$$

$$\rho(\tilde{x}^{(1)}, W(t_1)) \leqslant \xi_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta).$$

Здесь $\rho(x, W)$ — евклидово расстояние от точки x до множества W в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим следующий промежуток $[t_1, t_2]$ разбиения Γ.

Для системы (1.1) управление $u^*(t)$ на $[t_1, t_2)$ определим равенством $u^*(t) = u^{(1)} \in P$, где точка $\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \Delta f(t_1, \tilde{x}^{(1)}, u^{(1)})$ — ближайшая в $\tilde{X}(t_2, t_1, \tilde{x}^{(1)})$ к множеству $W^a(t_2)$.

Пусть $x^{(1)}$ — ближайшая точка в $W(t_1)$ к $\tilde{x}^{(1)}$.

Справедливы соотношения

$$\tilde{X}(t_2, t_1, x^{(1)}) \cap W(t_2)_{\omega(\Delta)} \neq \varnothing, \tag{2.4}$$

$$d(\tilde{X}(t_2, t_1, x^{(1)}), \tilde{X}(t_2, t_1, \tilde{x}^{(1)})) \leqslant e^{L\Delta}\|\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}\|.$$

В соответствии с $\|\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}\| = \rho(\tilde{x}^{(1)}, W(t_1)) \leqslant \xi_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)$, выводим

$$d(\tilde{X}(t_2, t_1, \tilde{x}^{(1)}), \tilde{X}(t_2, t_1, x^{(1)})) \leqslant e^{L\Delta}\big(\xi_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big). \tag{2.5}$$

Принимая во внимание (2.4) и (2.5), получаем

$$\tilde{X}(t_2, t_1, \tilde{x}^{(1)}) \cap W(t_2)_{\xi_2(\Delta)} \neq \varnothing, \tag{2.6}$$

где $\xi_2(\Delta) = e^{L\Delta}\big(\xi_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \omega(\Delta)$.

Из (2.6) и $d\big(W(t_2), W^a(t_2)\big) \leqslant \varepsilon(\Delta)$ следует

$$\rho(\tilde{x}^{(2)}, W^a(t_2)) \leqslant \xi_2(\Delta) + \varepsilon(\Delta),$$

$$\rho(\tilde{x}^{(2)}, W(t_2)) \leqslant \xi_2(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta).$$

Далее рассмотрим промежуток $[t_2, t_3]$ разбиения Γ.

Определим для системы (1.1) управление $u^*(t) = u^{(2)} \in P$ на $[t_2, t_3)$ так, что точка $\tilde{x}^{(3)} = \tilde{x}^{(2)} + \Delta f(t_2, \tilde{x}^{(2)}, u^{(2)})$ — ближайшая в $\tilde{X}(t_3, t_2, \tilde{x}^{(2)})$ к множеству $W^a(t_3)$.

Пусть $x^{(2)}$ — ближайшая точка в $W(t_2)$ к $\tilde{x}^{(2)}$. Тогда справедливо неравенство

$$d(\tilde{X}(t_3, t_2, \tilde{x}^{(2)}), \tilde{X}(t_3, t_2, x^{(2)})) \leqslant e^{L\Delta}\rho(\tilde{x}^{(2)}, W(t_2)) \leqslant e^{L\Delta}\big(\xi_2(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big). \tag{2.7}$$

Справедливо также соотношение $\tilde{X}(t_3, t_2, x^{(2)}) \cap W(t_3)_{\omega(\Delta)} \neq \varnothing$.

Исходя из этого соотношения и (2.7), получаем

$$\tilde{X}(t_3, t_2, \tilde{x}^{(2)}) \cap W(t_3)_{\xi_3(\Delta)} \neq \varnothing; \tag{2.8}$$

здесь $\xi_3(\Delta) = e^{L\Delta}\big(\xi_2(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \omega(\Delta)$.

Из (2.8), учитывая определение множества $W^a(t_3)$, выводим

$$\tilde{X}(t_3, t_2, \tilde{x}^{(2)}) \cap W^a(t_3)_{\xi_3(\Delta)+\varepsilon(\Delta)} \neq \varnothing,$$

откуда следует

$$\rho(\tilde{x}^{(3)}, W^a(t_3)) \leqslant \xi_3(\Delta) + \varepsilon(\Delta),$$
$$\rho(\tilde{x}^{(3)}, W(t_3)) \leqslant \xi_3(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta).$$

Далее, продолжая конструировать по аналогии управления $u^*(t)$ на промежутках $[t_3, t_4)$, $[t_4, t_5)$, …, $[t_{N-1}, t_N]$ разбиения Γ (т.е. полагая $u^*(t) = u^{(j)} \in P$ при $t \in [t_j, t_{j+1})$) и определяя на каждом промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ ломаную Эйлера для системы (1.1) равенством

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}^{(j)} + (t - t_j) f(t_j, \tilde{x}^{(j)}, u^{(j)}), \text{ при } t \in [t_j, t_{j+1}],$$

получаем следующую рекуррентную оценку отклонения узловых точек $\tilde{x}^{(j+1)}$, $j = \overline{0, N-1}$ этой ломаной от множеств $W^a(t_{j+1})$:

$$\rho(\tilde{x}^{(j+1)}, W^a(t_{j+1})) \leqslant \xi_{j+1}(\Delta) + \varepsilon(\Delta);$$

здесь $\xi_{j+1} = e^{L\Delta}\big(\xi_j(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \omega(\Delta)$.

Из определениея величин $\xi_j(\Delta)$, $j = \overline{0, N-1}$ следует

$$\xi_{j+1}(\Delta) = e^{(j+1)L\Delta}\varepsilon(\Delta) + \sum_{k=0}^{j} e^{kL\Delta}\omega(\Delta) + \sum_{k=1}^{j} e^{kL\Delta} 2\varepsilon(\Delta). \tag{2.9}$$

В частности, имеем при $j = N - 1$

$$\xi_N(\Delta) = e^{L(\vartheta - t_0)}\varepsilon(\Delta) + \frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{e^{L\Delta} - 1}\omega(\Delta) + \frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{e^{L\Delta} - 1} 2\varepsilon(\Delta) - 2\varepsilon(\Delta).$$

Учитывая это равенство и оценку $\rho(\tilde{x}^{(N)}, M) = \rho(\tilde{x}^{(N)}, W(t_N)) \leqslant \xi_N(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)$, получаем

$$\rho(\tilde{x}^{(N)}, M) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)}\varepsilon(\Delta) + \frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{L}\omega^*((1+K)\Delta) + \frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{L} 2(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)). \tag{2.10}$$

Теперь уточним выбор числа $\varepsilon(\Delta)$, ограничивающего погрешности вычислений множеств $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$. Для того чтобы обеспечить сходимость концевых точек $\tilde{x}^{(N)}$ ломаных Эйлера $\tilde{x}(t)$ к M при диаметре Δ разбиения Γ, стремящемся к нулю, полагаем, что функция $\varepsilon(\Delta)$ удовлетворяет условию $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$. При таком определении функции $\varepsilon(\Delta)$ правая часть оценки (2.10) имеет порядок по переменной $\Delta \downarrow 0$, равный минимальному из порядков величин $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)$ и $\omega^*((1+K)\Delta)$. В частности, если мы, зная функцию $\omega^*(\rho)$, $\rho \in (0, \infty)$, положим $\varepsilon(\Delta) = \Delta\omega^*((1+K)\Delta)$, то порядок правой части оценки (2.10) определится как порядок величины $\omega^*((1+K)\Delta)$. Таким образом, если мы вычисляем множества $W(t_j)$ как множества $W^a(t_j)$ с точностью до $\varepsilon(\Delta) = \omega(\Delta)$, то правая часть оценки (2.10) есть величина того же самого порядка по $\Delta \downarrow 0$, что и $\omega^*((1+K)\Delta)$.

Допустим теперь, что управляемая система (1.1) стационарна. Тогда для нее можно подменить функцию $\omega^*((1+K)\Delta)$ функцией $\omega^*(\Delta) = LK\Delta$, $\Delta \in (0, \infty)$. При такой замене, проведенной для стационарной системы (1.1), правая часть оценки (2.10) примет вид

$$e^{L(\vartheta - t_0)}\varepsilon(\Delta) + (e^{L(\vartheta - t_0)} - 1)K\Delta + \frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{L} 2(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)). \tag{2.11}$$

Видим, что для стационарной управляемой системы (1.1) правая часть (2.11) оценки (2.10) имеет порядок, равный минимальному из порядков величин $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)$, Δ при $\Delta \downarrow 0$.

На этом завершим анализ оценки (2.10) величины $\rho(\tilde{x}^N, M) = \rho(\tilde{x}(\vartheta), M)$ с точки зрения зависимости правой части оценки от Δ при $\Delta \downarrow 0$.

Мы выяснили, в какую окрестность множества M обеспечено попадание концевой точки $\tilde{x}(\vartheta)$ ломаной Эйлера $\tilde{x}(t)$, порожденной кусочно-постоянным управлением $u^*(t)$, отвечающим разбиению Γ.

Выясним теперь, в какую окрестность множества M приводит то же самое управление $u^*(t)$ движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = \tilde{x}^{(0)} \in W^a(t_0)$ системы (1.1) в момент ϑ.

Итак, рассмотрим движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = \tilde{x}^{(0)}$ системы (1.1), порожденное управлением

$$u^*(t) = u^{(j)} \in P \quad \text{при } t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Это движение $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет соотношениям

$$x^*(t) = z^{(j)} + \int\limits_{t_j}^{t} f(t, x^*(t), u^{(j)})\, dt, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1},$$

здесь обозначено $z^{(j)} = x^*(t_j)$.

Будем рассматривать это движение $x^*(t)$ последовательно по шагам $[t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$ и сравнивать его с ломаной Эйлера $\tilde{x}(t)$ в моменты $t_j \in \Gamma$.

На первом шаге $[t_0, t_1]$ разбиения Γ имеем

$$x^*(t_1) = z^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t), u^{(0)})\, dt, \quad \tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t_0, \tilde{x}^{(0)}, u^{(0)})\, dt,$$

откуда следует равенство

$$x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)} = \int\limits_{t_0}^{t_1} (f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, z^{(0)}, u^{(0)}))\, dt$$

Согласно построению области D все рассматриваемые нами позиции содержатся в D, в частности $(t_0, \tilde{x}^{(0)}) = (t_0, z^{(0)}) \in D$ и $(t, x^*(t)) \in D$ при $t \in [t_0, t_1]$. Принимая это во внимание, оценим величину

$$\|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, z^{(0)}, u^{(0)})\|, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Справедлива следующая оценка при $t \in [t_0, t_1]$:

$$\|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, z^{(0)}, u^{(0)})\| \leqslant \omega^*(|t - t_0| + \|x^*(t) - z^{(0)}\|) \leqslant \omega^*((1 + K)\Delta). \tag{2.12}$$

Из оценки (2.12) вытекает

$$\|x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)}\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, z^{(0)}, u^{(0)})\|\, dt \leqslant \omega(\Delta). \tag{2.13}$$

На втором шаге $[t_1, t_2]$ разбиения Γ имеем

$$x^*(t_2) = z^{(1)} + \int\limits_{t_1}^{t} f(t, x^*(t), u^{(1)})\, dt, \qquad \tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \int\limits_{t_1}^{t} f(t_1, \tilde{x}^{(1)}, u^{(1)})\, dt,$$

откуда следует равенство

$$x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)} = (z^{(1)} - \tilde{x}^{(1)}) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \big(f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, \tilde{x}^{(1)}, u^{(1)})\big)\, dt.$$

Принимая во внимание $(t_1,\tilde{x}^{(1)})\in D$ и $(t,x^*(t))\in D$, оценим величину

$$\|f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\tilde{x}^{(1)},u^{(1)})\|,\quad t\in[t_1,t_2).$$

Справедливо равенство

$$\begin{gathered}f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\tilde{x}^{(1)},u^{(1)})\\ =\big(f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,z^{(1)},u^{(1)})\big)+\big(f(t_1,z^{(1)},u^{(1)})-f(t_1,\tilde{x}^{(1)},u^{(1)})\big),\end{gathered}$$

откуда выводим

$$\begin{gathered}\|f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\tilde{x}^{(1)},u^{(1)})\|\\ \leqslant\|f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,z^{(1)},u^{(1)})\|+\|f(t_1,z^{(1)},u^{(1)})-f(t_1,\tilde{x}^{(1)},u^{(1)})\|\\ \leqslant\omega^*((1+K)\Delta)+L\|z^{(1)}-\tilde{x}^{(1)}\|.\end{gathered}$$

Учитывая это неравенство и (2.13), получаем

$$\|f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\tilde{x}^{(1)},u^{(1)})\|\leqslant\omega^*((1+K)\Delta)+L\omega(\Delta),\quad t\in[t_1,t_2),$$

и, соответственно, справедлива оценка

$$\begin{gathered}\|x^*(t_2)-\tilde{x}^{(2)}\|\leqslant\|z^{(1)}-\tilde{x}^{(1)}\|+\int\limits_{t_1}^{t_2}\|f(t,x^*(t),u^{(1)})-f(t_1,\tilde{x}^{(1)},u^{(1)})\|\,dt\\ \leqslant\omega(\Delta)+\Delta(\omega^*((1+K)\Delta)+L\omega(\Delta))=\omega(\Delta)+(1+L\Delta)\omega(\Delta).\end{gathered}$$

Отсюда следует оценка

$$\|x^*(t_2)-\tilde{x}^{(2)}\|\leqslant\omega(\Delta)+e^{L\Delta}\omega(\Delta).\tag{2.14}$$

Далее рассмотрим следующий шаг $[t_2,t_3]$. На этом шаге справедливы равенства

$$x^*(t_3)=x^*(t_2)+\int\limits_{t_2}^{t_3}f(t,x^*(t),u^{(2)})\,dt,$$

$$\tilde{x}^{(3)}=\tilde{x}^{(2)}+\int\limits_{t_2}^{t_3}f(t_2,\tilde{x}^{(2)},u^{(2)})\,dt,$$

из которых вытекает

$$x^*(t_3)-\tilde{x}^{(3)}=(z^{(2)}-\tilde{x}^{(2)})+\int\limits_{t_2}^{t_3}\big(f(t,x^*(t),u^{(2)})-f(t_2,\tilde{x}^{(2)},u^{(2)})\big)\,dt.$$

Учитывая включения $(t_2,\tilde{x}^{(2)})\in D$ и $(t,x^*(t))\in D$, $t\in[t_2,t_3]$, оценим величину

$$\|f(t,x^*(t),u^{(2)})-f(t_2,\tilde{x}^{(2)},u^{(2)})\|,\quad t\in[t_2,t_3].$$

Из равенства

$$\begin{gathered}f(t,x^*(t),u^{(2)})-f(t_2,\tilde{x}^{(2)},u^{(2)})\\ =(f(t,x^*(t),u^{(2)})-f(t_2,z^{(2)},u^{(2)}))+(f(t_2,z^{(2)},u^{(2)})-f(t_2,\tilde{x}^{(2)},u^{(2)})),\end{gathered}$$

следует оценка при $t\in[t_2,t_3]$

$$\|f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, \tilde{x}^{(2)}, u^{(2)})\|$$
$$\leqslant \|f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, z^{(2)}, u^{(2)})\| + \|f(t_2, z^{(2)}, u^{(2)}) - f(t_2, \tilde{x}^{(2)}, u^{(2)})\|$$
$$\leqslant \omega^*((1+K)\Delta) + L\|z^{(2)} - \tilde{x}^{(2)}\|.$$

Учитывая это неравенство и (2.14), получаем

$$\|f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, \tilde{x}^{(2)}, u^{(2)})\| \leqslant \omega^*((1+K)\Delta) + L(\omega(\Delta) + e^{L\Delta}\omega(\Delta)), \quad t \in [t_2, t_3).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\|x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)}\| \leqslant \|z^{(2)} - \tilde{x}^{(2)}\| + \int\limits_{t_2}^{t_3} \|f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, \tilde{x}^{(2)}, u^{(2)})\|\, dt$$
$$\leqslant \omega(\Delta) + e^{L\Delta}\omega(\Delta) + \omega(\Delta) + L\Delta(\omega(\Delta) + e^{L\Delta}\omega(\Delta)).$$

Из этой оценки имеем

$$\|x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)}\| \leqslant \sum_{k=0}^{2} e^{Lk\Delta}\omega(\Delta).$$

Продолжая рассматривать далее последующие промежутки $[t_3, t_4]$, $[t_4, t_5]$, $\ldots$, $[t_{N-1}, t_N]$ разбиения Γ и сравнивать для них движение $x^*(t)$ и ломаные Эйлера $\tilde{x}(t)$, а точнее сравнивать точки $x^*(t_j)$ и $\tilde{x}^{(j)}$, получим оценку

$$\|x^*(t_j) - \tilde{x}^{(j)}\| \leqslant \sum_{k=0}^{j-1} e^{Lk\Delta}\omega(\Delta).$$

В частности, для последней пары точек $x^*(t_N)$, $\tilde{x}^{(N)}$ выводим оценку

$$\|x^*(t_N) - \tilde{x}^{(N)}\| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} e^{Lk\Delta}\omega(\Delta) \leqslant \frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{L}\, \omega^*((1+K)\Delta). \tag{2.15}$$

Из оценок (2.10) и (2.15) вытекает оценка

$$\rho(x^*(t_N), M) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)}\varepsilon(\Delta) + 2\,\frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{L}(\omega^*((1+K)\Delta) + \Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)). \tag{2.16}$$

В частном случае, когда $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta) = \omega^*((1+K)\Delta)$, оценка (2.16) переходит в следующую оценку:

$$\rho(x^*(t_N), M) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)}\omega(\Delta) + 4\frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{L}\omega^*((1+K)\Delta). \tag{2.17}$$

Порядок правой части оценки (2.17) определяется в этом случае порядком функции $\omega^*((1+K)\Delta)$ при $\Delta \downarrow 0$.

Введем обозначение

$$\varkappa(\Delta) = e^{L(\vartheta - t_0)}\omega(\Delta) + 4\frac{e^{L(\vartheta - t_0)} - 1}{L}\omega^*((1+K)\Delta).$$

На основе приведенных построений и выкладок сформируем следующую теорему.

Теорема. Путь $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ — равномерное разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \dfrac{\vartheta - t_0}{N}$ и $\{W^a(t_j)\colon t_j \in \Gamma\}$ — такая система замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$, что

$\max\limits_{t_j \in \Gamma} d(W^a(t_j), W(t_j)) \leqslant \varepsilon(\Delta)$. Тогда движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0 \in W^a(t_0)$ системы (1.1), порожденное на $[t_0, \vartheta]$ кусочно-постоянным управлением $u^*(t)$ (см. с. 281), удовлетворяет неравенству $\rho(x^*(\vartheta), M) \leqslant \varkappa(\Delta)$.

Пусть $\delta' \varepsilon(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$. Из определения $\varkappa(\Delta)$ следует, что для любого $\varepsilon^* > 0$ можно указать разбиение Γ с таким маленьким диаметром $\Delta > 0$, что $\varkappa(\Delta) \leqslant \varepsilon^*$, и тогда $\rho(x^*(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon^*$, т. е. $x^*(\vartheta) \in M_{\varepsilon^*}$.

Таким образом, управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, отвечающее разбиению Γ с достаточно малым $\Delta > 0$, порождает движения $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0 \in W^a(t_0)$ такие, что $x^*(\vartheta) \in M_{\varepsilon^*}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Красовский Н.Н.** Лекции по теории управления. Вып. 4: Основная игровая задача наведения. Поглощение цели. Экстремальная стратегия. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-т, 1970. 96 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: 1974. 456 с.
4. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх, I // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, №4. С. 738–741.
5. Инвариантность множеств при конструировании решений задачи о сближении / В.Н. Ушаков, А.Р. Матвийчук, А.В. Ушаков, Г.В. Паршиков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 264–283.
6. **Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Построение интегральных воронок дифференциальных включений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 7. С. 965–977.
7. **Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппрооксимации областей достижимости управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 179–187.
8. **Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.** Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 4. С. 23–39. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
9. **Никольский М.С.** Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вестн. МГУ. 1987. № 4. С. 31–34. (Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика.)
10. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser, 1997. 321 p.
11. **Kurzhanski A.A., Varaiya P.** Ellipsoidal toolbox. 2005. URL: http://code.google.com/p/ellipsoids.
12. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
13. **Гусев М.И.** Оценки множества достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 82–94.
14. **Филиппова Т.Ф.** Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 223–232.
15. **Костоусова Е.К.** Об ограниченности и неограниченности внешних полиэдальных оценок множеств достижимости линейных дифференциальных систем. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 134–145.

Поступила 20.11.2012

Ушаков Владимир Николаевич
член-корр. РАН, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Матвийчук Александр Ростиславович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: matv@uran.ru

Паршиков Григорий Викторович
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: grigory.parshikov@uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 004.021

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, АССОЦИИРОВАННОЙ С ЗАДАЧЕЙ ФАКТОРИЗАЦИИ[1]

Р. Т. Файзуллин, В. И. Дулькейт, Ю. Ю. Огородников

Рассматривается гибридный метод поиска приближенного решения задачи “3-Выполнимость”, ассоциированной с задачей “Факторизация”. Метод состоит из двух стадий: сегментного генетического алгоритма и метода последовательных приближений. Предложена методика поиска наиболее вероятных битов решения, состоящая из нескольких независимых тестов. Данная методика позволяет приблизиться к области сходимости гибридного метода и определять несколько битов сомножителей.

Ключевые слова: задача “Выполнимость”, факторизация, сегментный генетический алгоритм, минимизация.

R. T. Faizullin, V. I. Dul’keit, Yu. Yu. Ogorodnikov. Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem.

We consider a hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem. The method consists of two stages: a segment genetic algorithm and the method of successive approximations. We propose a method for finding most probable bits of the solution. The method consists of several independent tests and makes it possible to approach the convergence domain of the hybrid method and determine several bits of the factors.

Keywords: satisfiability problem, factorization, segment genetic algorithm, minimization.

Введение

Задача “Выполнимость” (SAT) — одна из основных задач теории комбинаторной оптимизации, обладающая широким спектром приложений в области искусственного интеллекта, проектирования компьютерных систем и криптографического анализа.

Общие методы анализа шифров могут быть разделены на две группы. В первую группу можно отнести алгоритмы, существенно использующие технологии реализации конкретных стандартов шифрования: DES, ГОСТ, AES и т. д. Другой подход опирается на фундаментальные результаты теоретических разделов математики: алгебры, логики, дискретной и непрерывной оптимизации. Представителями этой группы, в частности, являются такие общие методы, как дифференциальный и линейный криптоанализ, а также метод дифференциальных искажений.

Применительно к AES создателями алгоритма была разработана специфическая Saturation attack [1]. Известная интерполяционная атака [2] и метод квадратичных уравнений уже имеют более общую математическую природу, позволяющую применить богатый арсенал дискретной математики. Основным подходом проверки криптографической стойкости асимметричных шифров в настоящее время являются алгоритмы числового решета в поле чисел общего вида и различные модификации алгоритмов ρ- и λ-Полларда, основывающиеся на детерминированном случайном блуждании по группе [3]. Данные методы требуют привлечения обширного математического аппарата, хотя они специфичны в существующих практических реализациях. Сообщения, появляющиеся время от времени, подтверждают стойкость известных алгоритмов. Так, хотя исследователи и “подбираются” к рабочим размерам ключей, но ситуация

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-07-00294-а).

не является критичной. Например, для факторизации чисел $\sim 2^{1000}$ требуется задействовать на несколько месяцев вычислительные мощности кластеров из самых верхних позиций списка Топ-500. Тем самым увеличение длины ключа в полтора или два раза принципиально решает вопрос о криптостойкости.

В рамках нового логического подхода к криптоанализу исследуемый криптографический алгоритм описывается в терминах программы для машины Тьюринга. Подстановка открытого и шифрованного текстов в эту программу в качестве исходных данных и ожидаемого ответа естественным образом сводит задачу криптоанализа к задаче проверки выполнимости подходящей булевой функции (SAT). Часть выполняющего набора истинности является ключом исследуемого алгоритма шифрования.

Идея такого подхода впервые была предложена в работе [4] в процессе построения базы сложных с вычислительной точки зрения примеров постановок задачи SAT для сравнительного тестирования разрабатываемых эвристических алгоритмов решения этой задачи. В рамках подхода обоснована криптографическая стойкость ряда специализированных датчиков псевдослучайных чисел и проведены исследования стойкости нескольких раундов алгоритмов DES и ГОСТ. В целом проведенные эксперименты подтвердили вычислительную трудноpешаемость (с точки зрения переборных алгоритмов) постановок, индуцируемых задачами криптоанализа. Для большинства известных эвристических методов [5] характерно так называемое состояние насыщения, при котором сколь угодно малое увеличение точности приближения влечет несоизмеримый рост трудоемкости алгоритма.

Один из современных подходов к построению приближенных алгоритмов для задачи SAT базируется на сведении задачи поиска выполняющего набора истинности к задаче минимизации подходящей (не обязательно выпуклой) гладкой функции с последующим применением к последней методов непрерывной оптимизации [6; 7]. Обратим внимание на принципиальное отличие таких методов от “переборных” алгоритмов локального поиска — на каждой итерации алгоритма сдвиг по антиградиенту производится по всем переменным одновременно.

Постановки, индуцируемые задачами криптоанализа, в частности задачей “Факторизация”, характеризуются тем, что выполняющий набор истинности (и, следовательно, глобальный минимум построенной функции) определяются однозначно, что повышает эффективность процедур минимизации последней. С другой стороны, решение исходной задачи криптоанализа нахождения точного решения ее вещественной релаксации, вообще говоря, не требует. Достаточно восстановить верные значения лишь части битов (компонент выполняющего набора) с вероятностью статистически значимо превышающей 50%. Таким образом, использование приближенных итерационных методов минимизации гладких функций в данной ситуации представляется вполне оправданным.

Другое перспективное направление поиска решений задач криптоанализа связано с известными генетическими алгоритмами — стохастическими, эвристическими методами оптимизации, впервые предложенными Холландом [8] и имитирующими процессы биологической эволюции и естественного отбора.

Представляется естественной идея комплексного решения задачи, объединяющая различные методы: логический, алгебраический, непрерывный и т. п. Одним из таких подходов является построение гибридного алгоритма поиска приближенного решения задачи “Факторизация”, состоящего из двух стадий: сегментного генетического алгоритма, являющегося обобщением обычной схемы генетического алгоритма, и метода последовательных приближений, применяемого к задаче минимизации функции, ассоциированной с задачей “3-Выполнимость” (3-SAT). Этот алгоритм и рассматривается в данной статье.

1. Предварительные сведения

Исследуем проблему построения эффективных приближенных алгоритмов решения задачи “Факторизация”, к которой сводится задача анализа асимметричных шифров.

З а д а ч а “Факторизация”. Дано: натуральное составное число N. Найти: натуральные числа p, q такие, что $N = p\,q$.

Вычислительный статус данной задачи до сих пор не выяснен. Несмотря на то что близкая к ней задача PRIMES проверки натурального числа на простоту полиномиально разрешима [9], задача “Факторизация” скорее всего NP-трудна, даже при дополнительном условии единственности разложения числа N на множители.

Традиционный подход к решению задачи “Факторизация” основан на ее полиномиальной сводимости к задаче SAT. Известно несколько вариантов такого сведения, среди которых наиболее эффективным признан алгоритм [8] консервативного сведения к задаче 3-SAT. С точки зрения последующей вещественной релаксации задачи SAT путем сведения ее к задаче минимизации подходящей гладкой функции перспективность этого алгоритма сведения обусловлена следующими соображениями:

1) аппроксимирующая функция задает алгебраическую поверхность шестого порядка, что облегчает выявление ее особенностей и применение аналитических методов алгебраической геометрии;

2) удается неявно оценить окрестность точки экстремума, в которой функция обладает свойством выпуклости;

3) известно [10], что процедура минимизации приводит к стационарной точке функции, округление компонент которой содержит (в заданных позициях) верные биты искомых сомножителей.

Осуществим переход от задачи SAT к экстремальной задаче на подмножестве $[0,1]^N$ вещественного N-мерного пространства. Переход основан на построении функции специального вида, глобальный минимум которой соответствует решению исходной задачи.

Пусть постановка задачи SAT задается булевой функцией, определенной на множестве векторов $y = [y_1, \ldots, y_N] \in \{false, true\}^N$, представленной в конъюнктивно-нормальной форме (КНФ):

$$L^*(y) = \prod_{i=1}^{M} G_i^*(y), \quad \text{где} \quad G_i^*(y) = \sum_{j=1}^{N} q_{i,j}^*(y),$$

$$q_{i,j}^*(y) = \begin{cases} y_j, & \text{если переменная } y_j \text{ входит в } i\text{-й дизъюнкт непосредственно,} \\ \bar{y}_j, & \text{если переменная } y_j \text{ входит в } i\text{-й дизъюнкт с отрицанием,} \\ false & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Стандартным образом сопоставим исходной КНФ эквивалентную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) по правилу

$$L(y) = \overline{L^*(y)} = \sum_{i=1}^{M} G_i(y), \ \text{где} \ \ G_i(y) = \prod_{j=1}^{N} q_{i,j}(y) \ \text{и} \ \ q_{i,j}(y) = \overline{q_{i,j}^*(y)}. \tag{1}$$

Вектору булевых переменных y сопоставим вещественный вектор $x = [x_1, \ldots, x_N]$ по формулам

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } y_j = true, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Форме L^* сопоставим функцию $F\colon [0,1]^N \to \mathbb{R}_+$, определяемую соотношением

$$F(x) = \sum_{i=1}^{M} C_i(x),$$

где $C_i(x) = \prod_{j=1}^{N} p_{i,j}(x)$ и

$$p_{i,j}(x) = \begin{cases} x_j^2, & \text{если } q_{i,j}^*(y) = \bar{y}_j, \\ (1 - x_j)^2, & \text{если } q_{i,j}^*(y) = y_j, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По построению форма L^* обладает выполняющим набором истинности y^* (т. е. соответствующая ей постановка задачи SAT разрешима) тогда и только тогда, когда минимум функции F достигается и равен нулю, что эквивалентно выполнению в точке минимума x^* условий

$$C_i(x^*) = 0, \quad (i = 1, \dots, M).$$

Очевидно, каждому выполняющему набору истинности y^* формы L^* соответствует точка x^* минимума функции F, координаты которой определяются равенствами (2).

2. Свойства аппроксимирующей функции

Пусть далее L^* — выполнимая 3-КНФ с N переменными и M дизъюнктами. Сопоставим каждому ее дизъюнкту G_i^* набор $J_i' = \{j_1, j_2, j_3\}$ номеров входящих в него переменных. Зафиксировав пару (y, y^*) наборов истинности, среди которых набор y^* является выполняющим, а y — нет, определим множества индексов дизъюнктов с несовпадающими (при y и y^*) значениями литералов:

$$\begin{aligned} I_F(y, y^*) \quad &= \{i \colon \exists j \in J_i' \colon y_j \neq y_j^*\}, \\ I_{F,k}(y, y^*) \ &= \{i \in I_F(y, y*) \colon |\{j \in J_i' \colon y_j^* \neq y_j\}| = k\} \quad (k \in \{1, 2, 3\}). \end{aligned}$$

Очевидно, построенные подмножества $I_{F,1}(y, y^*)$, $I_{F,2}(y, y^*)$ и $I_{F,3}(y, y^*)$ образуют разбиение множества $I_F(y, y^*)$. Введем в рассмотрение множества

$$\Phi_{F,s}(y, y^*) = \{i \in I_{F,s}(y, y^*) \colon y_j = false, \ (j \in J_i')\}$$

и зададим функцию $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ равенством $f(t) = F((1-t)x + tx^*)$. По построению функция f является сужением функции F на отрезок $[x, x^*]$.

Теорема 1. 1. *Пусть* $|\Phi_{F,1}(y, y^*)| \geq M/9$, *тогда* $f(t)$ *— монотонно убывающая функция.* 2. *Если справедливо условие* $|\Phi_{F,1}(y, y^*)| \geq M/3$, *то* $f(t)$ *выпукла на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. По построению функция $f(t)$ представима в виде

$$f(t) = A_1(1-t)^6 + A_2(1-t)^4 + A_3(1-t)^2 + A_4t^2(1-t)^4 + A_5t^4(1-t)^2 + A_6t^2(1-t)^2,$$

где $A_i \in \mathbb{Z}_+$, $|\Phi_{F,1}(y, y^*)| = A_3$ и $M \geqslant A_1 + \ldots + A_6$.

1. Покажем, что f монотонно убывает на отрезке $[0, 1]$. Пусть $A_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $a_i \in \mathbb{Z}_+$ и $A_4, A_5, A_6 > 0$. Поскольку $A_1(1-t)^6 + A_2(1-t)^4$ — монотонно убывающая функция (на этом отрезке), достаточно в силу линейности операции дифференцирования обосновать монотонность функций

$$g_1(t) = (1-t)^2(1 + c_1t^2(1-t)^2), \ g_2(t) = (1-t)^2(1 + c_2t^4) \text{ и } \ g_3(t) = (1-t)^2(1 + c_3t^2),$$

где $c_1 = a_1/A_4, c_2 = a_2/A_5$ и $c_3 = a_3/A_6$.

Дифференцируя функцию $g_1(t)$, имеем $g_1'(t) = -2(1-t)(c_1 + t(1-t)^2(3t-1))$. Поскольку $1 - t \geqslant 0$, достаточно указать условие, при котором

$$c_1 - t(1-t)^2(1-3t) \geqslant 0. \tag{3}$$

Неравенство (3), очевидно, выполнено при $t > 1/3$. Полагая $h(t) = t(1-t)^2(1-3t)$, найдем

$$\arg\max\Big\{h(t) \colon t \in \Big[0, \frac{1}{3}\Big]\Big\} = \frac{1}{24}(9 - \sqrt{33}),$$

следовательно, $g_1(t)$ монотонно убывает на отрезке $[0,1]$ при

$$c_1 \geqslant \frac{7}{100} > h\Big(\frac{1}{24}(9-\sqrt{33})\Big).$$

Далее дифференцируем функцию $g_2'(t) = -2(1-t)(c_2+3t^4-2t^3)$. Рассуждая по аналогии, укажем условие, обеспечивающее неотрицательность $c_2+3t^4-2t^3$ при произвольном $t\in[0,1]$. Поскольку

$$\max\{2t^3-3t^4\colon t\in[0,1]\} = \frac{1}{16},$$

то функция $g_2(t)$ монотонно убывает на отрезке $[0,1]$ при $c_2 \geqslant 1/16$.

Наконец, $g_3'(t) = -2(1-t)(c_3+2t^2-t) \leqslant 0$ на $[0,1]$ при $c_3 > 1/8$. Объединяя полученные оценки, имеем: функция $f(t)$ монотонно убывает на отрезке $[0,1]$ при

$$A_3 > \frac{7}{100}A_4 + \frac{1}{16}A_5 + \frac{1}{8}A_6. \tag{4}$$

Однако неравенство (4) вытекает непосредственно из условия теоремы, поскольку

$$A_3 \geqslant \frac{M}{9} \geqslant \frac{(A_3+A_4+\ldots+A_6)}{9},$$

и, следовательно, $A_3 \geqslant (A_4+A_5+A_6)/8$.

2. Выведем условия выпуклости функций $g_1(t),\ldots,g_3(t)$, пользуясь свойством выпуклости суммы выпуклых функций. Неравенство

$$g_1''(t) \geqslant 0 \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

справедливо при

$$c_1 \geqslant \frac{1}{3} > -\min\{(15t^2-10t+1)(t-1)^2\colon t\in[0,1]\} = \frac{1}{10}(1+\sqrt{5}).$$

Аналогично $g_2''(t)$ принимает на отрезке $[0,1]$ неотрицательные значения при

$$c_2 \geqslant \frac{1}{3} > -\min\{(15t^2-20t+6)t^2\colon t\in[0,1]\} = \frac{1}{10}(1+\sqrt{5}).$$

Наконец, соотношение

$$g_3''(t) = 2(c_3+6t^2-6t+1) \geqslant 0 \ (t\in[0,1])$$

выполнено при $c_3 \geqslant 1/2$.

По условию

$$A_3 \geqslant \frac{M}{3} \geqslant \frac{(A_3+A_4+\ldots+A_6)}{3},$$

откуда $A_3 \geqslant (A_4/3+A_5/3+A_6/2)$, и, следовательно, функция $f(t)$ выпукла на отрезке $[0,1]$.

Теорема доказана.

Доказанная теорема содержит неявную оценку окрестности оптимального решения x^*, при попадании в которую начальное приближение x, может быть достроено до оптимальной точки методами локальной минимизации. Проведенные численные эксперименты показали, что если начальное приближение x близко к оптимальной точке x^* в метрике Хемминга, а именно $\|x-x^*\|_1 \equiv \sum_{i=1}^N |x_i-x_i^*| \leq N/7$, то метод последовательных приближений, примененный к построенной выше вещественной релаксации задачи 3-SAT, сходится к решению за несколько итераций.

Опишем методику поиска наиболее вероятных значений битов, позволяющую выбирать приближение, максимально близкое к точке глобального экстремума. Предлагаемая методика состоит из нескольких независимых тестов.

Первый тест основан на подстановке найденного описанным выше двухэтапным методом набора истинности y в 3-КНФ, индуцированную исходной задачей "Факторизация". Исследование структуры индексных множеств J_i', соответствующих невыполненным дизъюнктам, позволяет оценить позиции битов, подлежащих инвертированию.

Следующий тест основан на приведенных ниже таблицах частот верного восстановления значений битов (компонент оптимального решения), полученных в результате неоднократного применения метода последовательных приближений к поиску выполняющих наборов исходной 3-КНФ. Для заданной позиции бита чем больше частота нахождения его верного значения (в длительном эксперименте) уклоняется от порогового значения 0.5, тем выше и вероятность верного определения значения этого бита. Например, если частота равна 1, то во всех испытаниях значение данного бита было найдено верно. Наоборот, если частота близка к нулю, то, скорее всего, алгоритм не способен точно восстанавливать верное значение данного бита и следует каждый раз инвертировать соответствующую компоненту приближения. Наихудший случай соответствует близости частоты к значению 0.5, при котором ничего определенного о значении данного бита сказать не удается.

В качестве третьего теста можно воспользоваться эвристикой, позволяющей определять нулевые значения битов так называемой матрицы умножения путем сведения задачи 3-SAT к серии классических задач линейной алгебры [11].

Предложенные вероятностные тесты могут быть полезны не только для определения начального приближения для двухэтапного метода, но и могут служить основой для восстановления сомножителей с помощью простейших алгоритмов, используемых, например, при решении так называемых крипторифмов.

3. Сегментный генетический алгоритм

Эволюционные (или генетические) алгоритмы — это эвристические методы поиска, используемые для решения задач оптимизации и моделирования путем случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию.

Генетические алгоритмы принято описывать посредством биологических терминов таких, как *ареал, геном, индивид, кроссинговер, мутация, наследование, отбор, поколение, популяция, родители, фитнесс-функция.* Традиционно индивид отождествляется с определяющим его геномом, представимым в виде битовой строки. Каждому индивиду произвольного поколения сопоставляется значение фитнесс-функции, оценивающей его приспособленность к условиям ареала.

Как известно, задача 3-SAT состоит в поиске выполняющего набора истинности для заданной 3-КНФ, определяющей ее постановку. Сопоставим этой форме эквивалентную 3-ДНФ по формулам (1), которая и будет являться моделью среды обитания (ареала). Моделью генома в данном случае является произвольный набор истинности y, вернее, сопоставляемый ему по формуле (2) бинарный вектор x размерности N. В качестве исходной популяции выбирается набор из L случайно сформированных геномов. Приспособленность генома x будем оценивать долей дизъюнктов исходной 3-КНФ, выполненных при подстановке в нее набора истинности y.

В целях повышения эффективности процесса поиска решения будем использовать несколько параллельно работающих *решателей* — реализаций генетического алгоритма. В основе такого подхода лежит идея декомпозиции задачи 3-SAT путем разделения исходной 3-КНФ на подформулы с последующим их распределением между решателями, оперирующими, таким образом, различными функциями приспособленности. По построению один и тот же геном может иметь различную степень приспособленности с точки зрения различных решателей. Получаемые подформулы будем называть подзадачами или сегментами. Формирование подзадач однозначно определяется разбиением множества номеров переменных исходной 3-КНФ. Каждой подзадаче соответствует свое подмножество переменных, определяющее ее структуру. Подмножества переменных попарно не пересекаются. Способ построения такого разбиения определяется неоднозначно. Воспользуемся алгоритмом, подробно описанным в работе [12].

На каждой итерации генетического алгоритма часть индивидов текущей популяции используется для порождения индивидов нового поколения. В качестве родителей выбираются индивиды с близкими (предпочтительно наиболее высокими) значениями функции приспособленности. Оператор кроссинговера задается выбором случайной позиции бита в геноме, называемой *точкой разрыва*. Геном потомка формируется из геномов родителей путем конкатенации начальной части (до точки разрыва) генома первого из них и завершающей части генома второго. Полученный в результате геном подвергается случайной *мутации*, при которой значения случайно выбранных битов инвертируются. Теоретико-множественное объединение текущего и вновь построенного поколений подвергается упорядочению по убыванию фитнесс-функции (функции приспособленности), после чего новая популяция формируется путем отбора заданного числа наиболее приспособленных индивидов.

По завершении работы всех решателей каждый из них возвращает геном с наивысшим значением приспособленности. Совокупность построенных геномов используется для построения окончательного результата. Несмотря на то, что каждый решатель оперирует геномами полной длины N, на результирующее решение влияют лишь те биты возвращаемого им генома, позиции которых однозначно определяются назначенной ему подзадачей.

4. Метод последовательных приближений

Для поиска глобального минимума определенной выше функции $F(x)$ применим метод последовательных приближений. Приравняв градиент функции $F(x)$ к 0, получим систему нелинейных уравнений для нахождения стационарных точек:

$$\left(\sum_{k\in T(j)}\prod_{l=1,l\neq j}^{N} p_{k,l}(x)\right)x_j - \sum_{k\in Q(j)}\prod_{l=1,l\neq j}^{N} p_{k,l}(x) = 0 \quad (j=1,\ldots,N), \tag{5}$$

в которой $T(j) = \{k \in \{1,\ldots,M\}\colon p_{k,j}(x) \not\equiv 1\}$ и $Q(j) = \{k \in \{1,\ldots,M\}\colon p_{k,j}(x) = (1-x_j)^2\}$. Применим для решения системы (5) простой итерационный метод:

$$\left(\sum_{k\in T(j)}\prod_{l=1,l\neq j}^{N} p_{k,l}(x(t))\right)x_j(t+1) - \sum_{k\in Q(j)}\prod_{l=1,l\neq j}^{N} p_{k,l}(x(t)) = 0 \quad (j=1,\ldots,N).$$

В качестве начального приближения вектора $x(0)$, как правило, берется случайным образом сформированный вектор длины N.

В качестве начального предлагается выбирать приближение, полученное на очередной итерации описанного выше генетического алгоритма. После выполнения заданного числа итераций метода выполняется инверсия случайно выбранных битов соответствующего набора истинности, после чего найденные приближения передаются на вход генетического алгоритма в качестве стартовой популяции.

5. Численные эксперименты

Раздел посвящен обсуждению результатов численного моделирования, полученных с использованием описанного выше двухэтапного метода.

Таблица 1

Среднее качество аппроксимации после фиксированного числа итераций

Число переменных N	Число дизъюнктов M	Значение $F(x(0))$	Значение $F(x(W))$
50	7000	813.0	108.317
60	7500	858.0	116.36
95	8000	923.0	123.379
150	10000	1171.0	154.159
3600	14200	1780.0	3.212
5220	20640	2476.0	16.677
14700	58400	3716.0	42.549

Таблица 2

Зависимость качества аппроксимации от числа итераций

Число итераций W	Значение $F(x(W))$
100	436.916
200	223.881
300	167.471
500	141.451
700	131.445
800	125.917
1000	123.842

Таблица 3

Распознаваемость отдельных компонент решения при $\gamma = 0.2$

Общее число битов N	Размер сомножителей K	Число распознаваемых битов T	T/N	Средняя ошибка
59400	200	38912	0.6550	0.1871
134100	300	86174	0.6462	0.1821
238800	400	157869	0.6661	0.1865
373500	500	247230	0.6619	0.1878
538200	600	355666	0.6626	0.1876

Таблица 4

Распознаваемость отдельных компонент решения при $\gamma = 0.3$

Общее число битов N	Размер сомножителей K	Число распознаваемых битов T	T/N	Средняя ошибка
59400	200	19329	0.3254	0.1241
134100	300	46081	0.3436	0.1259
238800	400	78648	0.3293	0.12406
373500	500	123298	0.3433	0.12505
538200	600	178039	0.3308	0.1249

Таблица 5

Распознаваемость отдельных компонент решения при $\gamma = 0.4$

Общее число битов N	Размер сомножителей K	Число распознаваемых битов T	T/N	Средняя ошибка
59400	200	2132	0.0360	0.0879
134100	300	6014	0.4480	0.0858
238800	400	1398	0.0059	0.0907
373500	500	1821	0.0040	0.0908
538200	600	2714	0.0050	0.0917

Таблица 1 содержит результаты минимизации функции F для фиксированного числа итераций $W = 1000$ и нескольких значений N и M, усредненные по 100 случайным постановкам задач для каждого набора значений параметров.

Таблица 2 отражает зависимость среднего значения функции F от числа итераций двухэтапного метода при фиксированных значениях числа переменных $N = 97536$, дизъюнктов $M = 389120$ и $F(x(0)) = 49293.0$. Прослеживается постепенное снижение скорости сходимости.

В табл. 3–5 приведены результаты статистического исследования вероятности верного распознавания битов выполняющего набора задачи 3-SAT, порождаемой задачей "Факторизация". Для каждого из пяти значений размеров сомножителей p и q описанным выше алгоритмом найдены приближенные решения 800 случайных постановок данной задачи, полученных с применением качественного источника случайных чисел. Бит, находящийся в позиции i выполняющего набора истинности (значение i-й компоненты набора), считается распознаваемым, если частота ν_i выпадения события $y_i = y_i^*$ в серии задач удовлетворяет условию $|\nu_i - 1/2| > \gamma$. Средняя ошибка (распозваемости бита) вычисляется по формуле

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1/2 - |\nu_i - 1/2|).$$

Как видно из полученных результатов, отношения T/N в целом остаются практически постоянными при увеличении размерности задачи. Средняя ошибка также стабилизируется на некотором определенном значении. Случайность полученных результатов компенсируется большим количеством независимых испытаний и безошибочным восстановлением начальных и завершающих битов сомножителей. Любопытно, что алгоритму удается также верно распознавать биты $p_{K/2}, q_{K/2}, p_{K/2+1}$ и $q_{K/2+1}$, занимающие средние позиции в записи искомых сомножителей p и q.

Заключение

В статье описан двухэтапный алгоритм, сочетающий дискретный и непрерывный подходы к приближенному решению задачи 3-SAT, ассоциированной с задачей "Факторизация". Проведены численные эксперименты, предложены предварительные аналитические обоснования. Предложена методика оценки статистического оценивания отдельных битов неизвестных сомножителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Daemon J., Knudsen L., Rijmen V.** The block cipher square // Lect. Not. Comput. Sci.: Proc. of Fast Software Encryption'97. 1997. Vol. 1267. P. 149–165.
2. **Courtois N., Pipzyk J.** Cryptanalysis of block ciphers with overdefined systems of equations // Lect. Not. Comput. Sci.: Proc. Asiacrypt'02. 2002. Vol. 2501. P. 267–287.
3. **Koblitz N., Menezes A., Vanstone S.** The state of elliptic curve cryptography // Des. Codes Cryptogr. 2000. Vol. 19, no. 2-3. P. 173–193.
4. **Cook S.A., Mitchel D.G.** Finding hard instances for the satisfiability problem: A survey // DIMACS: Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. Proc. Satisfiability problem: theory and applications. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 35. P. 1–18.
5. Algorithms for the satisfability (SAT) problem / J. Gu, P.W. Purdom, J. Franco, B.W. Wah // DIMACS: Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. Proc. Satisfiability problem: theory and applications. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 35. P. 19–152.
6. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Физматлит, 1976. 192 с.
7. **Крейнович В.Я.** Семантика итеративного метода С.Ю. Маслова // Вопр. кибернетики. Проблемы сокращения перебора. М.: Изд-во АН СССР, 1987. С. 30–62.

8. **Holland J.H.** Adaptation in natural and artificial systems. An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975. 183 p.
9. **Agrawal M., Kayal N., Saxena N.** PRIMES is in P // Annal. of Math. 2004. Vol. 160, no. 2. P. 781–793.
10. **Дулькейт В.И., Файзуллин Р.Т., Хныкин И.Г.** Алгоритм минимизации функционала, ассоциированного с задачей 3-SAT и его практические применения // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 1. С. 68–73.
11. **Файзуллин Р.Т.** Задачи линейной алгебры, соотнесенные с задачей Выполнимость // Прикл. дискрет. математика. Приложение. 2009. № 1. С. 90–91.
12. **Огородников Ю.Ю., Файзуллин Р.Т.** Двухэтапный метод поиска приближенного решения задачи Выполнимость // Динамика систем, механизмов и машин: материалы 8-й Междунар. науч.-техн. конф. Омск, 2012. С. 367–371.

Файзуллин Рашит Тагирович
д-р тех.-мат. наук, профессор
проректор
Омский государственный технический университет
e-mail: r.t.faisullin@mail.ru

Поступила 10.02.2013

Дулькейт Владимир Иванович
к-т физ.-мат. наук,
программист
ООО Люксофт
e-mail: vidulkeyt@mail.ru

Огородников Юрий Юрьевич
студент
Омский государственный университет
e-mail: yogorodnikov@googlemail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.853.5

НЕВЫПУКЛАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ОПОРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ[1]

О. В. Хамисов

Рассматривается специальный класс задач конечномерной оптимизации, в которых целевая функция и функции-ограничения имеют так называемые опорные выпуклые функции-мажоранты и опорные вогнутые функции-миноранты. Для задач с ограничениями-неравенствами предлагаются и обосновываются методы последовательной выпуклой оптимизации, сходящиеся к стационарным решениям. Для задач с ограничениями-равенствами предлагаются процедуры локального поиска с вогнутыми минорантами.

Ключевые слова: выпуклые и вогнутые опорные функции, локальный поиск, стационарная точка.

O. V. Khamisov. Nonconvex optimization with nonlinear support functions.

We consider a special class of finite-dimensional optimization problems, in which the objective function and the constraint functions have convex support majorant functions and concave support minorant functions. For problems with inequality constraints, we propose and validate methods of successive convex optimization that converge to stationary solutions. For problems with equality constraints, we propose local search procedures with concave minorants.

Keywords: convex and concave support functions, local search, stationary point.

Введение

В статье рассматриваются методы локального поиска в задачах невыпуклого программирования, основанные на представлении целевой функции и функций-ограничений в виде верхней огибающей (или поточечного супремума) вспомогательного семейства вогнутых непрерывных функций и одновременно в виде нижней огибающей (или поточечного инфимума) семейства выпуклых непрерывных функций. Данная идея продиктована желанием обобщить свойство выпуклой функции быть представленной в виде верхней огибающей семейства аффинных функций, что в выпуклой оптимизации привело к разработке эффективных вычислительных схем, ярким представителем которых является метод опорных плоскостей. Переход от выпуклых функций к невыпуклым требует замены семейства аффинных функций другими семействами функций. Первой работой в этом направлении можно считать статью Э. Беккенбаха [1], опубликованную в 1937 г. Далее эта тема исследовалась в монографиях и статьях [2–6]. Основное внимание в этих работах было уделено теоретическим результатам. Особо следует отметить монографию [5], в которой теоретические результаты присутствуют наравне с практическими алгоритмами глобальной оптимизации. В цикле работ, связанных с теорией двойственности и ее обобщениями, необходимо выделить работы И. И. Еремина, основные результаты которых изложены в монографиях [7; 8]. Несомненный интерес в данном случае представляет анализ невыпуклых случаев (см. также [9]). В упомянутых монографиях была разработана теория двойственности для так называемой задачи *кусочно-линейного программирования* и предложен метод точных штрафных функций для ее решения.

Возможность рассмотрения семейства вогнутых непрерывных функций в качестве вспомогательного семейства была впервые отмечена В. П. Булатовым в 1984 г. Термин “функция, имеющая вогнутую миноранту” был также введен В. П. Булатовым. Дальнейший существенный

[1]Работа поддержана совместным интеграционным проектом СО и УрО РАН “Теория и методы решения задач дискретной оптимизации и их применение в информационно-телекоммуникационных системах”.

вклад в этом направлении внесла статья [10]. Взгляд на невыпуклую функцию как на функцию, являющуюся верхней огибающей некоторого семейства вогнутых непрерывных функций, оказался плодотворным и позволил разработать новые эффективные методы глобальной оптимизации.

Введем необходимые определения. Пусть даны множество $X \subset \mathbb{R}^n$ и скалярная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что функция f имеет *вогнутую опорную функцию-миноранту* на множестве X, если существует функция $\psi\colon \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\psi(x,y) \text{ вогнута по } x \quad \forall\, y \in X, \quad f(x) \ge \psi(x,y) \;\; \forall\,(x,y) \in X \times X, \quad f(y) = \psi(y,y) \;\; \forall\, y \in X.$$

Множество всех функций f, имеющих вогнутую опорную функцию-миноранту на X, обозначим через $CM(X)$ и каждую функцию $f \in CM(X)$ будем для краткости называть c.m. функцией на множестве X (“concave minorant” — вогнутая миноранта). Функция $f \in CM(\mathbb{R}^n)$ называется просто c.m. функцией.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что функция f имеет *выпуклую опорную функцию-мажоранту* на множестве X, если существует функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\varphi(x,y) \text{ выпукла по } x \;\; \forall\, y \in X, \quad f(x) \le \varphi(x,y) \;\; \forall\,(x,y) \in X \times X, \quad f(y) = \varphi(y,y) \;\; \forall\, y \in X.$$

О п р е д е л е н и е 3. Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет включениям $f \in CM(X)$, $-f \in CM(X)$, то она называется c.m. *симметричной* (c.m.s.[2]) функцией на X.

Множество всех c.m. симметричных функций на X обозначим через $CMS(X)$. Если функция $f \in CMS(\mathbb{R}^n)$, то f называется c.m. симметричной функцией. Очевидно, что c.m. симметричная функция имеет и вогнутую миноранту, и выпуклую мажоранту в каждой точке X.

В дальнейшем выражения “вогнутая (выпуклая) миноранта (мажоранта)” и “вогнутая (выпуклая) опорная функция” будут использоваться как синонимы выражения “вогнутая (выпуклая) опорная функция-миноранта (мажоранта)”.

Функции, имеющие вогнутые опорные миноранты, впервые рассматривались в [11]. Термины “c.m. функция” и “c.m.s. функция” были введены в [12]. Различные свойства c.m. функций исследовались в [10; 13; 14]. Конструктивные правила нахождения вогнутых и выпуклых опорных функций детально описаны в [15; 16].

Класс c.m. функций весьма широк. Достаточно упомянуть, что липшицевые функции, d.c. функции (функции, представимые в виде разности двух выпуклых функций), $C^{1,1}$- и C^2-функции являются c.m. функциями. Выпуклые функции представляют собой частный случай c.m. функций, опорная миноранта выпуклой функции есть, очевидно, ее опорная аффинная функция. К упоминавшимся выше конструктивным свойствам c.m.s. функций относятся сумма, разность, произведение, отношение двух c.m.s. функций, композиция; максимум и минимум конечного числа c.m.s. функций также являются c.m.s. функциями. Конструктивность здесь понимается в следующем смысле. Если известны, например, опорные миноранты и мажоранты двух c.m.s. функций, то нетрудно указать правило (алгоритм) построения опорных минорант и мажорант для суммы, разности, произведения и т. д. этих двух функций. В общем случае процедура построения опорных минорант и мажорант для явно заданной функции может быть автоматизирована (компьютеризирована). Все это дает основание для введения специального класса задач, решению которых и посвящена данная статья.

Рассмотрим следующую задачу математического программирования:

$$\min f_0(x), \tag{1}$$

$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

[2] c.m. symmetric.

$$f_i(x) = 0, \quad i = m+1, \ldots, m+l, \tag{3}$$

$$x \in X, \tag{4}$$

где $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество, $f_i \in CMS(X)$, $i = 0, \ldots, m+l$. Данная задача будет в дальнейшем называться задачей c.m. программирования. Вогнутые миноранты функций f_i будут обозначаться через ψ_i, выпуклые мажоранты — через φ_i, $i = 0, \ldots, m+l$.

1. Оптимизация с выпуклыми опорными функциями

1.1. Минимизация на выпуклых множествах. Гладкий случай

Рассмотрим задачу c.m. программирования без ограничений (2) и (3) и будем предполагать, что f_0 непрерывно дифференцируема на открытом выпуклом множестве $S \supset X$. Для решения данной задачи предлагается использовать следующую процедуру.

П р о ц е д у р а л о к а л ь н о г о у л у ч ш е н и я LOCAL-I

Входная информация: целевая функция f_0, ее выпуклая функция-мажоранта φ_0, выпуклое компактное множество X.

Ш а г 0. Задать некоторую стартовую точку $x^0 \in X$. Установить $k \leftarrow 0$.

Ш а г 1. Решить вспомогательную задачу выпуклого программирования

$$\varphi_0(x, x^k) \to \min, \tag{5}$$

$$x \in X. \tag{6}$$

Пусть x^{k+1} — оптимальное решение задачи (5), (6).

Ш а г 2. Если $x^k = x^{k+1}$, стоп. Иначе, установить $k \leftarrow k+1$ и перейти на шаг 1.

Точки x^k и x^{k+1} удовлетворяют неравенству $\varphi_0(x^k, x^k) \geq \varphi_0(x^{k+1}, x^k)$. Из определения опорной функции-мажоранты и последнего неравенства имеем

$$f_0(x^k) = \varphi_0(x^k, x^k) \geq \varphi_0(x^{k+1}, x^k) \geq f_0(x^{k+1}),$$

т. е. процедура локального улучшения генерирует невозрастающую относительно целевой функции последовательность точек. Нетрудно видеть, что процедура LOCAL-I обладает следующими свойствами:

1. Поскольку последовательность $f_0(x^k)$ ограничена снизу и монотонно не возрастает, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x^k) = \underline{f}_0(x^0)$, который в общем случае зависит от стартовой точки x^0.

2. В силу компактности множества X последовательность x^k состоит из множества сходящихся подпоследовательностей, и для любой сходящейся подпоследовательности x^{k_j} $\lim\limits_{j\to\infty} f_0(x^{k_j}) = \underline{f}_0(x^0)$.

Процедура локального улучшения не гарантирует в общем случае нахождения даже стационарной точки. Примером этого может служить применение процедуры LOCAL-I к минимизации липшицевой функции $f(x)$ с выпуклой опорной функцией-мажорантой $\varphi_L(x, y) = f(y) + L\|x - y\|$. Очевидно, минимум по x функции $\varphi_L(x, y)$ всегда достигается в точке y. Поэтому использование функции $\varphi_L(x, y)$ в задаче (5), (6) не даст никакого результата, процедура остановится в начальной точке x^0.

Предположим теперь, что функция $\varphi_0(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x при любом фиксированном y, через $\nabla_x \varphi_0(x, y)$ обозначим соответствующий градиент. Нетрудно заметить, что функция $F(x, y) = \varphi_0(x, y) - f_0(x)$ достигает своего минимума по x в точке y на открытом выпуклом множестве S. Следовательно, ее градиент в точке y должен обращаться в 0, т. е.

$$\nabla_x \varphi_0(y, y) = \nabla f_0(y) \quad \forall\, y \in S. \tag{7}$$

Вернемся к анализу сходимости процедуры LOCAL-I. Полученное на шаге 1 решение x^{k+1} удовлетворяет неравенству $\nabla\varphi_0(x^{k+1},x^k)^T(x-x^{k+1}) \geq 0 \ \ \forall\, x \in X$. Если итерационный процесс конечен, то $x^k = x^{k+1}$, и в силу (7) имеем $\nabla f_0(x^k)^T(x-x^k) \geq 0 \ \forall\, x \in X$, т.е. точка x^k удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Теорема 1. *Пусть f_0 — непрерывно дифференцируемая функция, ее опорная мажоранта $\varphi_0(x,y)$ непрерывно дифференцируема по x при каждом фиксированном y и непрерывна по y при каждом фиксированном x. Если процедура локального улучшения генерирует бесконечную последовательность точек, то каждая предельная точка этой последовательности есть стационарная точка задачи* (1)–(4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x^* — предельная точка последовательности $\{x^k\}$. Из (7) имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0(x,x^*) &= \varphi_0(x^*,x^*) + \nabla_x\varphi_0(x^*,x^*)^T(x-x^*) + o_{\varphi_0}(\|x-x^*\|)\\ &= f_0(x^*) + \nabla f_0(x^*)^T(x-x^*) + o_{\varphi_0}(\|x-x^*\|).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nabla f_0(x^*)^T(x-x^*) + o_{\varphi_0}(\|x-x^*\|) = \varphi_0(x,x^*) - f_0(x^*). \tag{8}$$

Пусть $\{x^{k_j}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к x^*. По построению

$$f_0(x^{k_{j+1}}) \leq f_0(x^{k_j+1}) \leq \varphi_0(x^{k_j+1},x^{k_j}) \leq \varphi_0(x,x^{k_j}) \ \ \forall\, x \in X. \tag{9}$$

Переходя к пределу в (9) при $j \to \infty$, получаем $f_0(x^*) \leq \varphi_0(x,x^*)$. Из этого неравенства и из (8) следует

$$\nabla f_0(x^*)^T(x-x^*) + o_{\varphi_0}(\|x-x^*\|) \geq 0 \ \ \forall\, x \in X. \tag{10}$$

Пусть $x \in X$ и $x_\tau = x^* + \tau(x-x^*)$. В силу выпуклости X $x_\tau \in X \ \ \forall\, \tau \in [0,1]$. Подставляя x_τ в (10), получим

$$\tau\nabla f_0(x^*)^T(x-x^*) + o_{\varphi_0}(\tau\|x-x^*\|) \geq 0 \ \ \forall\, \tau \in [0,1]. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\nabla f_0(x^*)^T(x-x^*) \geq -\frac{o_{\varphi_0}(\tau\|x-x^*\|)}{\tau} \ \ \forall\, \tau \in [0,1]. \tag{12}$$

Переходя в (12) к пределу при $\tau \to 0$, получим $\nabla f_0(x^*)^T(x-x^*) \geq 0$ для любого $x \in X$, т.е. x^* — стационарная точка.

Теорема доказана.

При выполнении дополнительных условий можно гарантировать сходимость к стационарной точке всей последовательности $\{x^k\}$.

Теорема 2. *Пусть процедура* LOCAL-I *генерирует бесконечную последовательность точек и в дополнение к условиям теоремы* 1 *выполняются следующие условия:*

i) *$\varphi_0(x,y)$ сильно выпукла по x с константой $\theta_0 > 0$ равномерно по y;*

ii) *градиент $\nabla_x\varphi_0(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_0 равномерно по y.*

Тогда последовательность $\{x^k\}$ сходится к стационарной точке задачи (1)–(4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению

$$\varphi_0(x^k,x^k) \geq \varphi_0(x^{k+1},x^k) \geq \varphi_0(x^{k+1},x^{k+1}). \tag{13}$$

Следовательно, в силу ограниченности последовательности $\varphi_0(x^k,x^k)$ снизу справедливо

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi_0(x^k,x^k) - \varphi_0(x^{k+1},x^{k+1})) = 0. \tag{14}$$

В силу сильной выпуклости функции $\varphi_0(x, y)$ имеем

$$\varphi_0(x^k, x^k) - \varphi_0(x^{k+1}, x^k) \geq \theta_0 \|x^k - x^{k+1}\|^2. \tag{15}$$

Из (13)–(15) и компактности X следует сходимость последовательности x^k:

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*. \tag{16}$$

Из условия ii) следует $\|\nabla_x \varphi_0(x^{k+1}, x^k) - \nabla_x \varphi_0(x^k, x^k)\| \leq L_0 \|x^{k+1} - x^k\|$, и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \nabla_x \varphi_0(x^{k+1}, x^k) = \lim_{k\to\infty} \nabla_x \varphi_0(x^k, x^k) = \lim_{k\to\infty} \nabla f_0(x^k) = \nabla f_0(x^*). \tag{17}$$

Поскольку x^{k+1} — оптимальное решение задачи (5), (6), то

$$\nabla \varphi_0(x^{k+1}, x^k)^T (x - x^{k+1}) \geq 0 \quad \forall\, x \in X. \tag{18}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (18) и учитывая (16) и (17), получаем требуемое неравенство $\nabla f_0(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если $\varphi_0(x, y)$ не является сильно выпуклой по x, то можно перейти к функции-мажоранте $\varphi_\varepsilon(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varepsilon \|x - y\|^2$ при некотором $\varepsilon > 0$. Очевидно, $\varphi_\varepsilon(x, y)$ сильно выпукла по x с константой сильной выпуклости ε.

П р и м е р 1. Предположим, что $f_0 \in C^{1,1}(X)$, т. е. $\|\nabla f_0(x) - \nabla f_0(y)\| \leq L_0 \|x - y\|$, где $L_0 > 0$ — константа, тогда (см. [17])

$$f_0(x) \leq f_0(y) + \nabla f_0(y)^T (x - y) + \frac{1}{2} L_0 \|x - y\|^2 = \varphi_0(x, y). \tag{19}$$

Следовательно, в силу (19) задача (5), (6) будет иметь вид

$$\varphi_0(x, x^k) = f_0(x^k) + \nabla f_0(x^k)^T (x - x^k) + \frac{L_0}{2} \|x - x^k\|^2 \to \min, \tag{20}$$

$$x \in X. \tag{21}$$

Безусловный минимум $\tilde{x}^k$ функции $\varphi_0(x, x^k)$ определяется из соотношения $\nabla_x \varphi_0(x^{k+1}, x^k) = 0$, откуда

$$\tilde{x}^k = x^k - \frac{1}{L_0} \nabla f_0(x^k). \tag{22}$$

Если $\tilde{x}^k \in X$, то $x^{k+1} = \tilde{x}^k$ и соответствующий итерационный процесс, определяемый процедурой LOCAL-I, совпадает с методом градиентного спуска с фиксированной длиной шага. Если $\tilde{x}^k \notin X$, найдем проекцию точки $\tilde{x}^k$ на множество X, решая задачу

$$\|x - \tilde{x}^k\|^2 \to \min, \tag{23}$$

$$x \in X. \tag{24}$$

Учитывая (22), нетрудно видеть, что

$$\|x - \tilde{x}^k\|^2 = \frac{2}{L_0} \Big(\nabla f_0(x^k)^T (x - x^k) + \frac{L_0}{2} \|x - x^k\|^2 \Big) + \frac{1}{L_0^2} \|\nabla f_0(x^k)\|^2. \tag{25}$$

Из (25) следует, что задачи (20), (21) и (23), (24) эквивалентны. Следовательно, процедура LOCAL-I, использующая в качестве опорной мажоранты функцию (20), представляет собой один из вариантов метода проекций градиента.

П р и м е р 2. Пусть f_0 — вогнутая дифференцируемая функция, X — выпуклый многогранник. В этом случае опорная мажоранта $\varphi_0(x, x^k) = f_0(x^k) + \nabla f_0(x^k)^T(x - x^k)$ есть аффинная функция, следовательно, процедура LOCAL-I генерирует последовательность задач линейного программирования.

П р и м е р 3. В некоторых случаях выпуклость множества X несущественна. Предположим, что $f_0(x) = x^T Q x$, $X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|^2 = 1\}$, Q — симметричная матрица размера $n \times n$. Найдем, используя, например, принцип диагонального доминирования, $\tilde{\rho} \geq 0$ такое, что матрица $\tilde{Q} = Q - \tilde{\rho} \cdot I$ будет отрицательно определена, I — единичная матрица размера $n \times n$. Перейдем к задаче минимизации вогнутой функции $\tilde{f}_0(x) = x^T \tilde{Q} x$ на множестве X. В силу построения $f_0(x) = \tilde{f}_0(x) + \rho \ \forall\, x \in X$. Как и в предыдущем примере, опорная мажоранта $\tilde{\varphi}_0$ функции $\tilde{f}_0$ аффинна по x, т.е. $\tilde{\varphi}_0(x, x^k) = 2(x^k)^T \tilde{Q} x - (x^k)^T \tilde{Q} x^k$. Нетрудно убедиться, что решение соответствующей задачи (5), (6) (где вместо φ_0 используется $\tilde{\varphi}_0$) определяется равенством $x^{k+1} = -\tilde{Q} x^k \,/\, \|\tilde{Q} x^k\|$, которое является основой так называемого степенного метода нахождения минимального собственного числа матрицы $\tilde{Q}$. Если $\tilde{\lambda}_{\min}$ — минимальное собственное число $\tilde{Q}$, то $\lambda_{\min} = \tilde{\lambda}_{\min} + \rho$ — минимальное собственное число Q.

П р и м е р 4. Пример 3 можно обобщить следующим образом. Пусть $f_0(x) = x^T Q x + c^T x$, $X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^T G x + p^T x + r = 0\} \neq \varnothing$, причем матрица G такова, что ее минимальное собственное число $\sigma_{\min} > 0$. Введем в рассмотрение матрицу $Q_\rho = Q - \rho \cdot G$, зависящую от скалярного параметра $\rho \geq 0$. Тогда (см., например, [18]) $\lambda_{\rho,\max} \leq \lambda_{\max} - \rho \cdot \sigma_{\min}$, где $\lambda_{\rho,\max}$ — максимальное собственное число Q_ρ, $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число Q. Найдем $\tilde{\rho} = \lambda_{\max}/\sigma_{\min}$. Тогда $\lambda_{\tilde{\rho},\max} \leq 0$, матрица $\tilde{Q} = Q_{\tilde{\rho}} = Q - \tilde{\rho} \cdot G$ отрицательно полуопределена, а функция

$$\tilde{f}_0(x) = x^T \tilde{Q} x + \tilde{c}^T x, \tag{26}$$

где $\tilde{c} = c - \tilde{\rho} \cdot p$, вогнута. Кроме того, $f_0(x) = \tilde{f}_0(x) - \tilde{\rho}\, r \ \ \forall\, x \in X$. Будем далее рассматривать задачу минимизации функции $\tilde{f}_0$ на X. Опорная аффинная по x мажоранта есть

$$\tilde{\varphi}_0(x, x^k) = (2\tilde{Q} x^k + \tilde{c})^T x - (x^k)^T \tilde{Q} x^k. \tag{27}$$

Соответствующая задаче (5), (6) задача выпуклого программирования имеет вид

$$(d^k)^T x \to \min, \tag{28}$$

$$x^T G x + p^T x + r \leq 0, \tag{29}$$

где $d^k = 2\tilde{Q} x^k + \tilde{c}$. Решение задачи (28), (29) находится следующим образом. Сначала находится оптимальное значение двойственной переменной

$$\lambda^{k+1} = \sqrt{\frac{(d^k)^T G^{-1} d^k}{p^T G^{-1} p - 4r}}, \tag{30}$$

а затем оптимальный вектор

$$x^{k+1} = -\frac{1}{2\lambda^{k+1}} G^{-1}(d^k + \lambda^{k+1} p). \tag{31}$$

Поскольку G положительно определена, то и обратная матрица G^{-1} также положительно определена. Множество $X \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $p^T G^{-1} p - 4r > 0$, поэтому вычисление двойственной переменной в (30) корректно определено.

1.2. Минимизация на выпуклых множествах. Негладкий случай

Снова будем рассматривать задачу минимизации c.m.s. функции на выпуклом компактном множестве без предположения ее дифференцируемости. В этом случае используются так называемые *касательные* миноранты и мажоранты.

Определение 4. Пусть $f \in CMS(X)$. Выпуклую опорную функцию-мажоранту φ будем называть выпуклой *касательной* функцией-мажорантой, если

$$\varphi(x,y) - f(x) = o_\varphi(\|x-y\|), \tag{32}$$

где $o_\varphi(t)$ такое, что $\lim\limits_{t\to 0} o_\varphi(t)\,/\,t = 0$.

Определение 5. Пусть $f \in CMS(X)$. Вогнутую опорную функцию-миноранту ψ будем называть вогнутой *касательной* функцией-минорантой, если

$$f(x) - \psi(x,y) = o_\psi(\|x-y\|), \tag{33}$$

где $o_\psi(t)$ такое, что $\lim\limits_{t\to 0} o_\psi(t)\,/\,t = 0$.

В силу выпуклости по x для каждой опорной мажоранты $\varphi(x,y)$ определен субдифференциал

$$\partial_x\varphi(y,y) = \{p \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(x,y) - \varphi(y,y) \geq p^T(x-y)\} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, y \in X.$$

Аналогично в силу вогнутости по x для каждой опорной миноранты $\psi(x,y)$ определен супердифференциал

$$\partial_x\psi(y,y) = \{p \in \mathbb{R}^n \colon \psi(x,y) - \psi(y,y) \leq p^T(x-y)\} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, y \in X.$$

Теорема 3. *Пусть функция $f \in CMS(X)$, $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — ее касательные опорные функции. Тогда $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — дифференцируемые по x функции.*

Доказательство. Зафиксируем $y \in X$. Из (32) и (33) следует

$$\varphi(x,y) - \psi(x,y) = o_\varphi(\|x-y\|) + o_\psi(\|x-y\|) = o(\|x-y\|) \geq 0.$$

Выберем $\tilde{p} \in \partial_x\varphi(y,y)$. Тогда

$$\tilde{p}^T(x-y) \leq \varphi(x,y) - \varphi(y,y) = \psi(x,y) + o(\|x-y\|) - \psi(y,y) \leq q^T(x-y) + o(\|x-y\|)\ \forall\, q \in \partial_x\psi(y,y),$$

откуда $(\tilde{p}-q)^T(x-y) \leq o(\|x-y\|)$.

Предположим, что существует $\tilde{q} \neq \tilde{p}$. Пусть $x = y + \tau(\tilde{p}-\tilde{q})\,/\,(\|\tilde{p}-\tilde{q}\|)$. Тогда из последнего неравенства имеем $\|\tilde{p}-\tilde{q}\| \leq \lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{1}{\tau}\, o(\tau\|\tilde{p}-\tilde{q}\|) = 0$, что противоречит тому, что $\tilde{q} \neq \tilde{p}$. Следовательно, $q = \tilde{p}\ \ \forall\, q \in \partial_x\psi(y,y)$, т. е. $\partial_x\psi(y,y)$ состоит из одной точки. Следовательно, функция $\psi(x,y)$ дифференцируема.

Доказательство дифференцируемости $\varphi(x,y)$ по x повторяет приведенные выше рассуждения с заменой $\varphi(x,y)$ на $\psi(x,y)$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть заданы функции $f_1,\, f_2 \in CMS(X)$, имеющие выпуклые касательные мажоранты $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$. Тогда следующие функции:*

i) $F(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \ \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \ \alpha_i \geq 0, \ \ i = 1,2;$

ii) $G(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$

также имеют выпуклые касательные мажоранты.

Доказательство. i) Очевидно, функция $\varphi_F(x,y) = \alpha_1\varphi_1(x,y) + \alpha_2\varphi_2(x,y)$ будет выпуклой касательной мажорантой функции $F(x)$.

ii) Согласно определению $\varphi_i(x,y) = f_i(x) + o_i(\|x-y\|)$, $i = 1,2$. Определим бесконечно малую величину $\overline{o}(\|x-y\|) = \max\{o_1(\|x-y\|), o_2(\|x-y\|)\} \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\} &= \max\{f_1(x,y) + o_1(\|x-y\|), f_2(x,y) + o_2(\|x-y\|)\} \\ &\leq \max\{f_1(x,y), f_2(x,y)\} + \overline{o}(\|x-y\|).\end{aligned}$$

Следовательно, $0 \le \max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\} - \max\{f_1(x,y), f_2(x,y)\} \le \overline{o}(\|x-y\|)$, т. е. функция $\varphi_G(x,y) = \max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ является касательной мажорантой функции $G(x)$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть заданы функции f_1, $f_2 \in CMS(X)$, имеющие вогнутые касательные миноранты $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$. Тогда функции:*

i) $F(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, 2$;

ii) $G(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$

также имеют вогнутые касательные миноранты.

Касательные мажоранты обладают следующим свойством.

Теорема 6. *Пусть $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ — две касательные мажоранты* c.m.s. *функции f. Тогда $\partial_x \varphi_1(y,y) = \partial_x \varphi_2(y,y)$.*

Доказательство. Вектор $p \in \partial_x \varphi_1(y,y)$ в том и только в том случае, когда (см. [19])

$$\varphi_1'(y,y;d) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\varphi_1(y+\tau d, y) - \varphi_1(y,y)}{\tau} \ge p^T d \quad \forall\, d,$$

где $\varphi_1'(y,y;d)$ — производная по направлению d. Так как $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ — касательные мажоранты, то

$$\varphi_1(x,y) - f(x) = o_1(\|x-y\|), \quad \varphi_2(x,y) - f(x) = o_2(\|x-y\|).$$

Тогда

$$p^T d \le \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\varphi_2(y+\tau d, y) - \varphi_2(y,y) + o_1(\tau\|d\|) - o_2(\tau\|d\|)}{\tau} = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\varphi_2(y+\tau d, y) - \varphi_2(y,y)}{\tau},$$

т. е. $p \in \partial_x \varphi_2(y,y)$. Следовательно, $\partial_x \varphi_1(y,y) \subset \partial_x \varphi_2(y,y)$.

Обратное включение доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Определение 6. Если функция $f \in CMS(X)$ имеет выпуклую касательную мажоранту $\varphi(x,y)$ в точке $y \in X$, то f супердифференцируема в точке y. *Супердифференциалом* функции f в точке $y \in X$ называется множество $\partial_{c.m.s.} f(y) = \partial_x \varphi(y,y)$. Другими словами, супердифференциал c.m.s. функции в некоторой точке — это субдифференциал ее касательной мажоранты в той же точке. В силу теоремы 6 супердифференциал $\partial_{c.m.s.} f(y)$ определяется однозначно.

Перейдем к задаче локальной минимизации c.m.s. функции на множестве X.

Теорема 7. *Пусть x^* — оптимальное решение задачи минимизации недифференцируемой* c.m.s. *функции f на выпуклом компактном множестве X, f супердифференцируема в точке x^*. Тогда существует вектор $p \in \partial_{c.m.s.} f(x^*)$ такой, что $p^T(x - x^*) \ge 0 \ \ \forall\, x \in X$.*

Доказательство. Поскольку $\varphi(x, x^*) \ge f(x) \ge f(x^*) = \varphi(x^*, x^*) \ \ \forall\, x \in X$, то x^* есть точка минимума функции $\varphi(x, x^*)$ на X, что равносильно существованию вектора $p \in \partial_x \varphi(x^*, x^*)$ такого, что $p^T(x - x^*) \ge 0 \ \ \forall\, x \in X$. В силу определения супердифференцируемости $p \in \partial_{c.m.s.} f(x^*)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если в условиях теоремы* 7 *точка $x^* \in \operatorname{int}(X) \ne \varnothing$, то $0 \in \partial_{c.m.s.} f(x^*)$.*

На основании полученных результатов логично ввести следующее определение стационарной точки.

О п р е д е л е н и е 7. Точка $x^* \in X$ такая, что c.m.s. функция f супердифференцируема в ней и $\exists p \in \partial_{c.m.s.} f(x^*)\colon p^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X$, называется *стационарной* (критической) точкой функции f на множестве X.

Теперь нетрудно проанализировать сходимость процедуры LOCAL-I в случае недифференцируемой функции f_0.

Теорема 8. *Пусть* c.m.s. *функция f_0 супердифференцируема в каждой точке выпуклого компактного множества X и точка $x^0 \in X$, касательная мажоранты $\varphi_0(x, y)$, непрерывна по совокупности переменных (x, y). Тогда каждая предельная точка последовательности $\{x^k\}$, генерируемой процедурой* LOCAL-I

$$x^{k+1} \in \operatorname{Arg\,min}\{\varphi_0(x, x^k)\colon x \in X\}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

является стационарной точкой f_0 на X в смысле определения 7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу построения $\varphi(x^{k+1}, x^k) \leq \varphi(x, x^k) \quad \forall x \in X$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ (если необходимо, то на подпоследовательности), получаем для предельной точки неравенство $\varphi(x^*, x^*) \leq \varphi(x, x^*) \quad \forall x \in X$. Далее, повторяя доказательство теоремы 7, показываем, что x^* есть стационарная точка.

Теорема доказана.

1.3. Минимизация с ограничениями-неравенствами

В данном разделе рассматривается задача c.m. программирования (1), (2), (4). Для ее решения предлагается следующая процедура.

П р о ц е д у р а л о к а л ь н о г о у л у ч ш е н и я LOCAL-II

Входная информация: целевая функция f_0, выпуклая мажоранта φ_0 функции f_0, функции-ограничения f_i, выпуклые мажоранты φ_i функций f_i, $i = 1, \ldots, m$, выпуклое компактное множество X.

Ш а г 0. Задать некоторую стартовую точку $x^0 \in X$. Установить $k \leftarrow 0$.

Ш а г 1. Точка x^{k+1} находится из решения задачи выпуклого программирования:

$$\varphi_0(x, x^k) \to \min,$$
$$\varphi_i(x, x^k) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x \in X.$$

Ш а г 2. Если $x^k = x^{k+1}$, стоп. Иначе, обновить $k \leftarrow k + 1$, перейти на шаг 1.

Условия сходимости процедуры LOCAL II определяются следующей теоремой.

Теорема 9. *Если x^0 — допустимая точка задачи* c.m.s. *программирования без ограничений-равенств* (1), (2), (4), *функции f_i, $i = 0, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы, мажоранты $\varphi_i(x, y)$, $i = 0, \ldots, m$, непрерывны по совокупности переменных (x, y) и непрерывно дифференцируемы по x, то любая предельная точка процедуры* LOCAL II *есть стационарная точка задачи* (1), (2), (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу построения

$$f_0(x^k) = \varphi_0(x^k, x^k) \geq \varphi_0(x^{k+1}, x^k) \geq \varphi_0(x^{k+1}, x^{k+1}) = f_0(x^{k+1}), \tag{34}$$

$$\varphi_0(x^{k+1}, x^k) \leq \varphi_0(x, x^k) \quad \forall x \in X\colon \varphi_i(x, x^k) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{35}$$

Пусть $\{x^{k_j}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к точке x^*. Из (34) и (35) получаем

$$\varphi_0(x^{k_{j+1}}, x^{k_{j+1}}) \leq \varphi_0(x, x^{k_j}) \quad \forall x \in X\colon \varphi_i(x, x^{k_j}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{36}$$

Переходя к пределу в (36) при $j \to \infty$, получаем

$$\varphi_0(x^*, x^*) \le \varphi_0(x, x^*) \quad \forall\, x \in X \colon \varphi_i(x, x^*) \le 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{37}$$

В силу дифференцируемости и выпуклости функций $\varphi_i(x, y)$ по x условие (37) эквивалентно тому, что существуют числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$\begin{gathered} \left[\lambda_0^* \nabla_x \varphi_0(x^*, x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla_x \varphi_i(x^*, x^*)\right]^T (x - x^*) \ge 0 \quad \forall\, x \in X, \\ \lambda_i^* \varphi_i(x^*, x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{gathered} \tag{38}$$

В силу одновременной дифференцируемости f_i и φ_i, $i = 0, \dots, m$, условия (38) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \left[\lambda_0^* \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*)\right]^T (x - x^*) \ge 0 \quad \forall\, x \in X, \\ \lambda_i^* f_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{gathered} \tag{39}$$

откуда следует, что x^* — стационарная точка задачи c.m.s. программирования без ограничений-равенств (1), (2), (4).

Теорема доказана.

2. Оптимизация с выпуклыми и вогнутыми опорными функциями

Учет ограничений-равенств существенно усложняет решение соответствующей задачи c.m. программирования и особенно анализ сходимости. Поэтому в данном разделе рассматривается задача только с одним ограничением равенством:

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ h(x) = 0, \quad x \in X. \end{gathered} \tag{40}$$

C.m.s. функции f, h и соответствующие им опорные миноранты и мажоранты предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Процедура локального поиска в этом случае имеет следующий вид.

П р о ц е д у р а л о к а л ь н о г о у л у ч ш е н и я LOCAL-III

Входная информация: целевая функция f, выпуклая мажоранта φ_f функции f, функция-ограничение h, выпуклая мажоранта $\varphi_h(x, y)$ и вогнутая миноранта $\psi_h(x, y)$ функции h, выпуклое компактное множество X.

Ш а г 0. Задать некоторую стартовую точку $x^0 \in X$. Установить $k = 0$.

Ш а г 1. Определить функцию $\omega_k(x) = \begin{cases} \psi_h(x, x^k), & \text{если } h(x^k) > 0, \\ -\varphi_h(x, x^k), & \text{если } h(x^k) < 0. \end{cases}$

Ш а г 2. Точка x^{k+1} — стационарная точка задачи:

$$\begin{gathered} \varphi_f(x, x^k) \to \min, \\ \omega_j(x) \le 0, \quad j = 0, \dots, k, \quad x \in X. \end{gathered} \tag{41}$$

Ш а г 3. Если $h(x^{k+1}) = 0$, стоп. Иначе, обновить $k = k + 1$, перейти на шаг 1.

Задача (41) является задачей минимизации выпуклой функции при обратно-выпуклых ограничениях (функции $\omega_k(x)$ вогнуты). Невыпуклая допустимая область в задаче (41) — плата за аппроксимацию ограничений-равенств. Стандартный прием при решении задач вида (41) состоит в последовательной линеаризации обратно-выпуклых ограничений. Такой подход исследован в [20], где указаны условия сходимости процессов линеаризации к стационарной точке.

Теорема 10. *Сделаем следующие предположения*:

i) *функция* $\varphi_f(x,y)$ *сильно выпукла по* x *равномерно по* y;

ii) *функции* $\psi_h(x,y)$, $\varphi_h(x,y)$ *удовлетворяют условию Липшица по* x *равномерно по* y;

iii) *градиенты* $\nabla_x\varphi_f(x,y)$, $\nabla_x\varphi_h(x,y)$, $\nabla_x\psi(x,y)$ *непрерывны по совокупности переменных* (x,y);

iv) *задача* (41) *разрешима* $\forall\, k$;

v) *на каждой итерации в стационарном решении задачи* (41) *активно только одно ограничение*;

vi) *каждое ограничение активно конечное число раз*;

vii) *соответствующие активным ограничениям множители Лагранжа равномерно ограничены.*

Тогда последовательность $\{x^k\}$, *генерируемая процедурой* LOCAL III, *сходится к стационарной точке задачи* (40).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из сильной выпуклости $\varphi_f(x,y)$ следует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к некоторой точке x^* по аналогии с теоремой 2. Не уменьшая общности, будем считать, что $h(x^k) > 0\ \forall\, k$. Тогда $\omega_j(x) = \psi_h(x,x^j)$. По построению $\psi(x^{k+1},x^k) \le 0$. В силу равномерной липшицевости $\psi(x,y)$ имеем

$$h(x^k) = \psi_h(x^k,x^k) \le \psi_h(x^k,x^k) - \psi_h(x^{k+1},x^k) \le L\|x^k - x^{k+1}\|.$$

Откуда следует $\lim_{k\to\infty} h(x^k) = h(x^*) = 0$, т.е. предельная точка x^* является допустимой. С учетом условий теоремы каждая стационарная точка x^{k+1} такова, что

$$\begin{gathered}[\lambda_0^k\nabla_x\varphi_f(x^{k+1},x^k) + \lambda_{j_k}\nabla_x\psi_h(x^{k+1},x^{j_k})]^T(x - x^{k+1}) \ge 0 \quad \forall\, x \in X,\\ \lambda_{j_k}\psi_h(x^{k+1},x^{j_k}) = 0, \quad 0 \le \lambda_0^k \le \overline{\lambda}_0, \quad 0 \le \lambda_{j_k} \le \overline{\lambda},\end{gathered} \tag{42}$$

где j_k — номер активного ограничения на k-й итерации. Переходя к пределу в (42) при $k \to \infty$ (и, если необходимо, к подпоследовательности) и учитывая условия данной теоремы и дифференцируемость f и h и опорных функций, получаем условия стационарности относительно x^* для задачи (40).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Beckenbach E.F.** Generalized convex functions // Bull. Am. Math. Soc. 1937. Vol. 43. P. 363–371.
2. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
3. **Кутателадзе С.С., Рубинов А.М.** Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976. 255 с.
4. **Palaschke D., Rolewicz S.** Foundations of mathematical optimization. Convexity without linearity. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 596 p.
5. **Rubinov A.M.** Abstract convexity and global optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 495 p.
6. **Singer I.** Abstract convex analysis. New York: J. Wiley & Sons, 1997. 491 p.
7. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
8. **Еремин И.И.** Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 180 с.
9. **Еремин И.И.** Решение систем выпуклых включений // Методы выпуклого программирования и некоторые приложения. Свердловск: Изд-во УрО РАН, 1992. С. 41–46.
10. **Норкин В.И.** О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, вып. 7. С. 992–1006.
11. **Булатов В.П.** Методы решения многоэкстремальных задач (глобальный поиск) // Методы оптимизации и их приложения. Ч.1: Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1989. С. 131–157.

12. **Khamisov O.V.** Functions with concave minorant. A general view: manuscript / Institut für Opeartions Research der Universität. Zurich, 1994. 25 p.
13. **Хамисов О.В.** Глобальная оптимизация функций с вогнутой опорной минорантой // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 47, вып. 11. С. 1830–1842.
14. **Khamisov O.V.** On optimization properties of functions, with a concave minorant // J. Global Optim. 1999. Vol. 14, no. 1. P. 79–101.
15. **Ершов А.Р., Хамисов О.В.** Автоматическая глобальная оптимизация // Дискрет. анализ и исследование операций. Сер. 2. 2004. Т. 11, № 2. С. 45–68.
16. **Хамисов О.В.** Методы выпуклых и вогнутых опорных функций в задачах глобальной оптимизации: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Иркутск, 2010. 275 с.
17. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
18. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
19. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
20. **Булатов В.П.** Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977. 159 с.

Хамисов Олег Валерьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
e-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

Поступила 11.01.2013

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

УДК 519.6

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

А. Г. Ченцов

Исследуются представления ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств, реализуемых на основе обобщенных декартовых произведений. Устанавливается структура возникающего при этом пространства ультрафильтров, которая в более традиционных измеримых пространствах сводится к реализации компакта Стоуна в виде тихоновского произведения. Применение разрабатываемых методов может быть связано с построением расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера; в упомянутых расширениях ультрафильтры могут использоваться в качестве обобщенных элементов, что на идейном уровне допускает аналогию с компактификацией Стоуна — Чеха. Особенность предлагаемой реализации связана с возможностью использования измеримых пространств, для которых удается дать полное описание множества свободных ультрафильтров, что приводит для измеримых пространств с алгебрами множеств к исчерпывающему представлению соответствующего компакта Стоуна. Настоящий выпуск посвящен юбилею И. И. Еремина; автору довелось нередко обсуждать с ним самые разные вопросы, связанные с математическими исследованиями, и неизменно эти обсуждения способствовали более глубокому пониманию сути проблем. Автор высоко ценит возможность такого общения и благодарен И. И. Еремину, внесшему большой вклад в развитие математической науки и образования на Урале.

Ключевые слова: измеримое пространство, тихоновское произведение, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. On the question of representation of ultrafilters in a product of measurable spaces.

We study representations of ultrafilters of widely understood measurable spaces that are realized by means of generalized Cartesian products. The structure of the arising ultrafilter space is established; in more traditional measurable spaces, this structure reduces to the realization of the Stone compact space in the form of a Tikhonov product. The methods developed can be applied to the construction of extensions of abstract attainability problems with constraints of asymptotic nature; in such extensions, ultrafilters can be used as generalized elements, which admits a conceptual analogy with the Stone–Čech compactification. The proposed implementation includes the possibility of using measurable spaces, for which the set of free ultrafilters can be described completely. This results in an exhaustive representation of the corresponding Stone compact space for measurable spaces with algebras of sets. The present issue is devoted to I.I. Eremin's jubilee; the author had many discussion with him on very different topics related to mathematical investigations, and the discussions inevitably led to a deeper understanding of their essence. The author appreciates the possibility of such communication and is grateful to Eremin, who contributed significantly to the development of the mathematical science and education in the Urals.

Keywords: measurable space, Tychonoff product, ultrafilter.

1. Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, ИП — измеримое пространство, ОЭ — обобщенный элемент, п/а — полуалгебра, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, УП — упорядоченная пара, у/ф — ультрафильтр.

В статье рассматриваются некоторые представления у/ф широко понимаемых ИП, связанные с применением данных у/ф в качестве ОЭ в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости. Основная цель работы состоит в построении для таких ИП конструктивных представлений так называемых свободных у/ф (у/ф с пустым пересечением всех своих множеств), играющих важную роль в вопросах описания эффектов, возникающих при соблюдении ограничений асимптотического характера. Потребность в "хорошо устроенных" пространствах ОЭ возникает, в частности, в задачах управления при построении расширений (см. [1–5]); в

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00537-а, 13-01-90414_укр_ф_а) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12-П-1-1012, 12-П-1-1019).

этих задачах нередко отсутствует устойчивость даже по результату, и важно бывает определить качество, достижимое при соблюдении ограничений “на грани фола”. Подобные эффекты имеют место и в задачах математического программирования (см. [6; 7]). Их существо состоит в скачкообразном изменении достигаемого качества при сколь угодно малом ослаблении стандартных ограничений.

В [1, гл. III] введена полезная классификация решений задач управления: точные, обобщенные и приближенные. При этом сама возможность наиболее быстрого достижения “истинного” качества связывается с обобщенными решениями (или управлениями), выбираемыми из некоторого компакта. Последний конструировался при этом в пространстве мер либо мерозначных функций (обобщенных управлений). Построение упомянутого компакта допускает идейные аналогии с компактификациями в общей топологии, хотя есть и определенные различия в подходах. В связи с упомянутыми аналогиями имеет смысл выделить компактификацию Стоуна — Чеха (см. [8;9] и др.); особо отметим реализацию [10, с. 165–167] в связи с построениями [11;12], где рассматривалась задача о достижимости в ТП при ограничениях асимптотического характера (данная задача может рассматриваться как далеко идущее обобщение известной в теории управления задачи о построении области достижимости, имеющей многочисленные применения в инженерных исследованиях). Основное достоинство применяемой в [11; 12] конструкции на основе компактификации Стоуна—Чеха состоит в том, что указывается весьма универсальный и согласующийся с идеями общей топологии подход к представлению “асимптотической реальности”. Возникает, однако, затруднение, связанное с отсутствием конструктивных вариантов построения свободных у/ф, отвечающих за асимптотические эффекты, не реализуемые обычными решениями.

Возможна вместе с тем модификация вышеупомянутого подхода (см. [13; 14]), в рамках которой используются компакты Стоуна (пространства Стоуна), реализуемые в классе у/ф соответствующей алгебры множеств; в [15] приведен пример ИП, для которого удается дать исчерпывающее описание компакта Стоуна. В [16;17] последовательно развивается общий подход к применению у/ф в задаче об “асимптотической” достижимости, связанный с применением более общих ИП и их аналогов. Последнее весьма существенно, в частности, в реализациях, использующих декартовы произведения (при перемножении двух ИП с алгебрами множеств в виде семейства измеримых прямоугольников реализуется “всего лишь” полуалгебра). В настоящей работе мы следуем данному подходу, обращаясь к построению его реализации в классе бесконечных (вообще говоря) произведений у/ф пространств-сомножителей.

2. Общие обозначения и определения общего характера

Используем стандартную теоретико-множественную символику, включающую кванторы, пропозициональные связки, специальные символы ($\varnothing$ — пустое множество; def заменяет фразу “по определению”). *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если u — объект, то через $\{u\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее u.

Через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м произвольного множества H; $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Для всяких множеств A и B через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B; если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии f. Далее широко используется индексная форма записи отображений (см. [1]): если A, B — непустые множества и $b_\alpha \in B\ \forall \alpha \in A$, то $(b_a)_{a \in A}$ есть def отображение $f \in B^A$, для которого $f(\mathbf{a}) = b_{\mathbf{a}}$ $\forall \mathbf{a} \in A$. Отображение $(b_a)_{a\in A}$ именуем (обобщенным) кортежем в B. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$ и при $n \in \mathbb{N}$ полагаем $\overline{1,n} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$.

Специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество I, тогда $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ — множество всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(I)$,

$$\pi[I] \triangleq \big\{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\ \&\ (I \in \mathcal{I})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\big\} \tag{2.1}$$

есть множество всех π-систем [18] п/м I с “нулем” и “единицей”. При этом

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}, \qquad (\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

суть множества всех топологий I и всех алгебр п/м I соответственно. При $\mathcal{J} \in \pi[I]$, $M \in \mathcal{P}(I)$ и $n \in \mathbb{N}$ через $\Delta_n(M, \mathcal{J})$ обозначается множество всех кортежей $(J_k)_{k\in\overline{1,n}}\colon \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{J}$, для каждого из которых: 1) M есть объединение всех множеств J_k, $k \in \overline{1,n}$; 2) $J_p \cap J_q = \varnothing$ $\forall p \in \overline{1,n}\ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}$. Введено множество всех разбиений M в сумму n множеств из $\mathcal{J}$. В виде $\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(I \setminus L, \mathcal{I}) \neq \varnothing\}$ имеем множество всех п/а п/м I; разумеется, $(\mathrm{alg})[I] \subset \Pi[I]$. Рассматриваем алгебры п/м I, порожденные [19, гл. I] п/а множеств:

$$\mathbf{a}_I^0(\mathcal{J}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(A, \mathcal{J}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I] \quad \forall \mathcal{J} \in \Pi[I].$$

Полагаем, наконец, что $\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in I \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\}$ (множество π-систем, различающих точки и “измеримые” множества); $\Pi[I] \subset \tilde{\pi}^0[I]$.

Через $\beta_0[I]$ обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))$, для каждого из которых $\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда $\beta_0[I]$ — множество всех БФ I. Через $\mathfrak{F}[I]$ (через $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$) обозначаем множество всех фильтров (всех у/ф) множества I (см. [20, гл. I]). При этом БФ определяют фильтры по стандартному правилу: $(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset F\} \in \mathfrak{F}[I]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[I]$. Если $x \in I$, то $(I - \mathrm{ult})[x] \triangleq \{S \in \mathcal{P}(I) \mid x \in S\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ (тривиальный у/ф, соответствующий точке x).

При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $x \in I$ имеем $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \beta_0[I]$, а $N_\tau(x) \triangleq (I - \mathbf{fi})[N_\tau^0(x)] = \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N_\tau^0(x)\colon G \subset H\} \in \mathfrak{F}[I]$ (фильтр окрестностей [20, гл. I] точки x в ТП (I, τ)). Ясно, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_0[I]$.

Условимся о некоторых обозначениях, связанных с (обобщенными) декартовыми произведениями, фиксируя до конца настоящего пункта непустое множество $\mathbb{H}$ и учитывая, что $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(M_{\mathbf{i}})) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))\ \forall (M_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H})^I\ \forall \mathbf{i} \in I$. Разумеется, с учетом аксиомы выбора имеем [21], что

$$\prod_{i\in I} M_i = \{f \in \mathbb{H}^I \mid f(i) \in M_i\ \forall i \in I\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H}^I) \quad \forall (M_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H})^I. \tag{2.2}$$

Если N — множество, то через $\mathfrak{P}[N]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{N} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(N))$ со свойством $N \in \mathcal{N}$ (заметим, что $\pi[N] \subset \mathfrak{P}[N]$). При $(M_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}'(\mathbb{H})^I$ и $(\mathcal{M}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{P}[M_i]$ полагаем, что

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{M}_i \triangleq \Big\{S \in \mathcal{P}\Big(\prod_{i\in I} M_i\Big) \mid \exists (N_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i\colon \Big(S = \prod_{i\in I} N_i\Big)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(I)\colon M_j = N_j\ \forall j \in I \setminus K)\Big\}. \tag{2.3}$$

Рассматриваем (2.3) как естественную структуру на соответствующем множестве вида (2.2), подразумевая, что

$$\Big(\prod_{i\in I} M_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{M}_i\Big)$$

есть произведение “пространств” $(M_i, \mathcal{M}_i)$, $i \in I$.

Фильтры π-систем. В пределах настоящего пункта фиксируем $\mathcal{I} \in \pi[I]$ и полагаем, что

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\& \\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{I}\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\}, \tag{2.4}$$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}, \tag{2.5}$$

$$\beta^0_{\mathcal{I}}[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[I] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{I}\}.$$

В (2.4) введены фильтры, а в (2.5) — у/ф ИП $(I, \mathcal{I})$ (далее пары вида $(I, \mathcal{I})$ называем ИП, понимая, конечно, данный термин расширительно), $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \neq \varnothing$. Из (2.4), (2.5) следует, что

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{I}}[I]. \tag{2.6}$$

В [15, предложение 3.1] указаны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы операция (2.6) переводила БФ в у/ф. При $x \in I$ в виде $((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] \overset{\triangle}{=} (I - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})$ имеем тривиальный фильтр ИП $(I, \mathcal{I})$, соответствующий x. Тогда

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\Big\} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \setminus \{((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] \colon x \in I\} \tag{2.7}$$

является множеством всех свободных у/ф ИП $(I, \mathcal{I})$. При этом $(\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]) \Longleftrightarrow (((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\ \forall x \in I)$. Пусть

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\}\ \forall L \in \mathcal{I}. \tag{2.8}$$

Непустое семейство $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(L) \colon L \in \mathcal{I}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$ есть база топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$, определяемой в терминах (2.8) стандартным [9, гл. 1] способом; эта топология порождает хаусдорфово ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]) \tag{2.9}$$

(если $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[I]$, то (2.9) — компакт (компактное хаусдорфово ТП), пространство Стоуна). В дальнейшем исследуются представления $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$ при конкретизации $\mathcal{I}$, использующей аппарат декартовых произведений. В этой связи отметим, что $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}[I]\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})$.

3. Произведение ультрафильтров

Фиксируем далее непустые множества X и Y, а также отображение $\Sigma \in \mathcal{P}'(Y)^X$ (мультифункция с непустыми значениями); условимся, что $E_x \overset{\triangle}{=} \Sigma(x)\ \forall x \in X$. Получаем равенство $\Sigma = (E_x)_{x \in X}$. В этих обозначениях введем (обобщенное) декартово произведение

$$E \overset{\triangle}{=} \prod_{x \in X} E_x = \{g \in Y^X \mid g(s) \in E_s\ \forall s \in X\}; \tag{3.1}$$

тогда (по аксиоме выбора) $E \neq \varnothing$. С учетом (2.1) имеем, что $\pi[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))\ \forall x \in X$; можно рассматривать декартово произведение множеств $\pi[E_x]$, $x \in X$. Фиксируем (обобщенный) кортеж

$$(\mathcal{L}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \pi[E_x] \tag{3.2}$$

($\mathbf{l} \overset{\triangle}{=} (\mathcal{L}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))^X$ и $\mathbf{l}(s) = \mathcal{L}_s \in \pi[E_s]\ \forall s \in X$). Имеем декартово произведение

$$\prod_{x \in X} \mathcal{L}_x = \{(L_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(Y)^X \mid L_s \in \mathcal{L}_s\ \forall s \in X\},$$

элементами которого являются обобщенные кортежи в $\mathcal{P}(Y)$.

З а м е ч а н и е 3.1. Отметим важный частный случай, когда $E_x = Y \ \forall x \in X$. Тогда $E = Y^X$ и $(\mathcal{L}_x)_{x \in X} \in \pi[Y]^X$.

В общем случае (3.1), (3.2) имеем (см. (2.3)) с очевидностью, что

$$\mathcal{L} \stackrel{\triangle}{=} \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \in \pi[E] \tag{3.3}$$

(далее $\mathcal{L}$ понимается только в смысле (3.3)). Рассматриваем $(E, \mathcal{L})$ как произведение ИП $(E_x, \mathcal{L}_x), \ x \in X$. Будем исследовать связь между $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и системой $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \ x \in X$. Попутно будут отмечены соотношения, связывающие $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x), \ x \in X$. Учитываем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)) \ \forall x \in X$. Исходя из этого, определяем декартовы произведения множеств $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x), \ x \in X$, а также множеств $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \ x \in X$. При этом

$$\begin{gathered} \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) = \{(\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))^X \mid \mathcal{F}_s \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_s) \ \forall s \in X\}, \\ \prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \in \mathcal{P}'\Big(\prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)\Big). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Если $(\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)$, то, в частности, $(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$ есть отображение из X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$, а потому

$$\prod_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{(F_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X \mid F_s \in \mathcal{F}_s \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)^X) \tag{3.5}$$

(в (3.5) имеем (см. (3.4)) непустое множество отображений из X в $\mathcal{P}'(Y)$). Принимая во внимание второе соотношение в (3.4), конструкцию (3.5) можно реализовать для кортежей у/ф. Наконец,

$$\begin{gathered} \prod_{x \in X} F_x = \{f \in Y^X \mid f(s) \in F_s \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}'(E) \ \forall (\mathcal{F}_x)_{x \in X} \\ \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \ \forall (F_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x; \end{gathered} \tag{3.6}$$

в (3.6) учитываем, что при всяком выборе кортежа из первого множества в (3.4) реализуется отображение из X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$, для которого при $s \in X$ значением является непустое подсемейство $\mathcal{P}(E_s)$. Достаточно традиционна следующая конструкция: если $(\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)$, то (см. (2.3))

$$\begin{gathered} \bigotimes_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \exists (F_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x \colon \\ (F = \prod_{x \in X} F_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon F_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \end{gathered} \tag{3.7}$$

(доказательство (3.7) легко следует из определений). В дальнейшем более существенно свойство

$$\bigotimes_{x \in X} \mathcal{U}_x \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x), \tag{3.8}$$

устанавливаемое с использованием [16, (5.8)]. Итак, (3.8) определяет правило перевода кортежей у/ф в у/ф произведения пространств. Рассмотрим построение обратной операции, полагая при $s \in X$ и $A \in \mathcal{P}(E_s)$, что $(A - \mathrm{repl})[s] \in \mathcal{P}(Y)^X$ определяется условиями

$$((A - \mathrm{repl})[s](s) \stackrel{\triangle}{=} A) \& \big((A - \mathrm{repl})[s](x) \stackrel{\triangle}{=} E_x \ \forall x \in X \setminus \{s\}\big). \tag{3.9}$$

Можно рассматривать декартово произведение множеств $(A - \mathrm{repl})[s](x), \ x \in X$. В частности, в (3.9) можно полагать, что $A \in \mathcal{L}_s$. Легко видеть, что

$$(s - \mathbb{PR})[\mathcal{F}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{L \in \mathcal{L}_s \mid \prod_{x \in X} (L - \mathrm{repl})[s](x) \in \mathcal{F}\big\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_s) \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \forall s \in X. \tag{3.10}$$

Разумеется, (3.10) применимо в случае у/ф. Более того, с учетом [16, (5.8)] устанавливается свойство

$$(s - \mathbb{PR})[\mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_s) \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall s \in X. \tag{3.11}$$

Обращаясь к (3.10) (к (3.11)), получаем при $\mathfrak{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ (при $\mathfrak{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$) кортеж $((x - \mathbb{PR})[\mathfrak{V}])_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)$ (кортеж $((x - \mathbb{PR})[\mathfrak{V}])_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$). Нетрудно показать, что

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{x \in X} (x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}] \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{3.12}$$

В частности, из (3.12) извлекается очевидное следствие

$$\mathcal{U} = \bigotimes_{x \in X} (x - \mathbb{PR})[\mathcal{U}] \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{3.13}$$

Далее имеем с учетом (3.7), (3.8) следующие два равенства:

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) = \Big\{ \bigotimes_{x \in X} \mathcal{F}_x \colon (\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \Big\}, \quad \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \Big\{ \bigotimes_{x \in X} \mathcal{U}_x \colon (\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \Big\}. \tag{3.14}$$

В связи с (3.14) отметим свойство: если $(A_x)_{x \in X} \colon X \longrightarrow \mathcal{P}'(Y)$, $(B_x)_{x \in X} \colon X \longrightarrow \mathcal{P}'(Y)$, то

$$\Big(\prod_{x \in X} A_x = \prod_{x \in X} B_x \Big) \Longleftrightarrow (A_x = B_x \ \forall x \in X). \tag{3.15}$$

С учетом (3.15) получаем из (3.7), что $\forall (\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \ \forall s \in X$

$$\mathcal{F}_s = (s - \mathbb{PR})\big[\bigotimes_{x \in X} \mathcal{F}_x \big]. \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что определяемое посредством (3.7) отображение

$$(\mathcal{F}_x)_{x \in X} \longmapsto \bigotimes_{x \in X} \mathcal{F}_x \colon \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x) \longrightarrow \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \tag{3.17}$$

инъективно. С учетом первого равенства в (3.14) имеем, что (3.17) — биекция $\prod\limits_{x \in X} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_x)$ на $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$.

Свойство (3.16) применимо к у/ф: если $(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$ и $s \in X$, то

$$\mathcal{U}_s = (s - \mathbb{PR})\Big[\bigotimes_{x \in X} \mathcal{U}_x \Big]. \tag{3.18}$$

В свою очередь, из (3.8) и (3.18) вытекает, что отображение

$$(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \longmapsto \bigotimes_{x \in X} \mathcal{U}_x \colon \prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \tag{3.19}$$

инъективно. С учетом второго равенства в (3.14) получаем, что (3.19) есть биекция $\prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Условимся обозначать далее через φ биекцию (3.19), а через ψ — биекцию $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ на $\prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$, обратную к φ (итак, $\varphi^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{\psi(\mathcal{U})\}$ при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$). Легко видеть (см. (3.13)), что справедливо следующее

Предложение 3.1. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, *то* $\psi(\mathcal{U}) = ((x - \mathbb{PR})[\mathcal{U}])_{x \in X}$.

З а м е ч а н и е 3.2. Для биекции (3.17) соответствующая обратная биекция определяется подобно последнему предложению: если α — биекция (3.17), β — биекция, обратная к α, то $\beta(\mathcal{F}) = ((x - \mathbb{PR})[\mathcal{F}])_{x\in X}\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$.

З а м е ч а н и е 3.3. Легко видеть, что произведение тривиальных фильтров есть тривиальный фильтр: $((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[f] = \bigotimes_{x\in X}((E_x,\mathcal{L}_x) - \mathrm{ult})[f(x)]\ \forall f \in E$. С учетом (2.7) проверяется также следующее свойство: если $(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$, то

$$\Big(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{U}_x \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\Big) \Longleftrightarrow (\exists s\in X\colon \mathcal{U}_s \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_s)).$$

4. Произведения ультрафильтров (свойство гомеоморфности)

Рассмотрим (в дополнение к положениям предыдущего раздела) вопросы, связанные с оснащением пространств у/ф топологиями. Для краткости полагаем далее при $x \in X$, что $\tau_x \overset{\triangle}{=} \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}_x}[E_x]$; тогда $\tau_x \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)]$ превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$ в хаусдорофово ТП (см. (2.9)). Получаем "набор" $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x),\tau_x),\ x\in X$, хаусдорфовых ТП, для которого может быть введено тихоновское произведение [20]. В целях полноты изложения приведем соответствующее построение. Отметим, что при $x\in X$ $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \neq \varnothing$ и, как следствие, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)))$; кроме того, $\tau_x \in \mathfrak{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x))$. Стало быть, $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x))_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)))^X$ и $(\tau_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathfrak{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x))$. С учетом (2.3) конструируем π-систему:

$$\bigotimes_{x\in X}\tau_x = \Big\{G\in\mathcal{P}\Big(\prod_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\Big) \mid \exists (N_x)_{x\in X}\in\prod_{x\in X}\tau_x\colon$$
$$\Big(G = \prod_{x\in X}N_x\Big)\&\big(\exists K\in\mathrm{Fin}(X)\colon N_x = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\ \forall x\in X\setminus K\big)\Big\} \in \pi\Big[\prod_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\Big] \tag{4.1}$$

(напомним, что $\tau_x \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)]$ при $x\in X$). В частности, семейство (4.1) является базой топологии непустого множества $\prod_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$. Эта, определяемая единственным образом, топология (тихоновского произведения) есть

$$\Theta \overset{\triangle}{=} \Big\{G\in\mathcal{P}\Big(\prod_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\Big) \mid \forall(\mathcal{U}_x)_{x\in X}\in G\ \exists \mathbb{B}\in\bigotimes_{x\in X}\tau_x\colon ((\mathcal{U}_x)_{x\in X}\in\mathbb{B})\&(\mathbb{B}\subset G)\Big\}$$
$$\in (\mathrm{top})\big[\prod_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\big]; \tag{4.2}$$

разумеется, (4.1) — подсемейство Θ. Вместе с тем располагаем (см. (3.3)) хаусдорфовым ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]). \tag{4.3}$$

При этом (см. (3.19)) $\varphi\colon \prod\limits_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; φ — биекция.

Предложение 4.1. *Отображение* φ *есть гомеоморфизм* ТП $\big(\prod\limits_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x),\Theta\big)$ *на* ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что φ — непрерывное отображение, фиксируя произвольный кортеж $\eta\in\prod_{x\in X}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$ и получая, в частности, отображение из X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$;

$$\mathcal{W}_x \overset{\triangle}{=} \eta(x)\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\ \forall x\in X.$$

Согласно определению φ(3.19) имеем (см. (3.7), (3.8)) представление

$$\varphi(\eta) = \bigotimes_{x\in X}\mathcal{W}_x \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{4.4}$$

Выберем произвольную окрестность $\Omega \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\varphi(\eta))$. С учетом [16, (5.16)] подберем $\mathbb{L} \in \varphi(\eta)$, для которого $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \subset \Omega$. Используя (3.7), (3.8) и (4.4), подберем далее $(\mathbb{L}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{W}_x$ так, что $\mathbb{L} = \prod_{x \in X} \mathbb{L}_x$ и для некоторого $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X)$

$$\mathbb{L}_s = E_s \ \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \tag{4.5}$$

При этом $\mathbb{L}_x \in \mathcal{W}_x \ \forall x \in X$ (см. (3.4)). Тогда [16, (5.16)]

$$\Phi_{\mathcal{L}_x}(\mathbb{L}_x) \in N^0_{\tau_x}(\mathcal{W}_x) \ \forall x \in X.$$

Согласно (2.4) $E_s \in \mathcal{U} \ \forall s \in X \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}_s)$. Это означает (см. (2.8), (4.5)), что при $s \in X \setminus \mathbb{K}$

$$\Phi_{\mathcal{L}_s}(\mathbb{L}_s) = \Phi_{\mathcal{L}_s}(E_s) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_s). \tag{4.6}$$

Получили, как следствие, кортеж $(\Phi_{\mathcal{L}_x}(\mathbb{L}_x))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \tau_x$ со свойством (4.6). Следуя общим определениям [21], введем (см. (2.8)) множество $\Lambda \triangleq \prod_{x \in X} \Phi_{\mathcal{L}_x}(\mathbb{L}_x) \in \mathcal{P}(\prod_{x \in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x))$, для которого согласно (4.1) справедливо включение

$$\Lambda \in \bigotimes_{x \in X} \tau_x \tag{4.7}$$

(учитываем (4.6)). При этом по выбору $\mathbb{L}_x,\ x \in X$, имеем следующее положение. А именно $\mathcal{W}_x \in \Phi_{\mathcal{L}_x}(\mathbb{L}_x) \ \forall x \in X$; тогда, коль скоро $\eta = (\mathcal{W}_x)_{x \in X}$, следует по определению Λ, что $\eta \in \Lambda$. Поэтому согласно (4.2), (4.7)

$$\Lambda \in N^0_{\Theta}(\eta). \tag{4.8}$$

Выберем произвольно $\hat{\eta} \in \Lambda$. Тогда $\hat{\eta} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)$, а потому $\hat{\eta}$ есть отображение из X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$ и при этом $\hat{\mathcal{U}}_x \triangleq \hat{\eta}(x) \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) \ \forall x \in X$. Кроме того, из определения Λ вытекает, что

$$\hat{\mathcal{U}}_x \in \Phi_{\mathcal{L}_x}(\mathbb{L}_x) \ \forall x \in X. \tag{4.9}$$

Напомним, что $\hat{\eta} = (\hat{\mathcal{U}}_x)_{x \in X}$. Согласно (3.19) справедливо равенство $\varphi(\hat{\eta}) = \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathcal{U}}_x$. Из (2.8) и (4.9) получаем, что $\mathbb{L}_x \in \hat{\mathcal{U}}_x$ при $x \in X$. С учетом (4.5) имеем по выбору $\mathbb{L}_x,\ x \in X$, следующее свойство (см. (3.7), (3.8)): $\mathbb{L} \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathcal{U}}_x$ (в самом деле $(\mathbb{L}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathcal{U}}_x$, справедливо (4.5) и $\mathbb{L} = \prod_{x \in X} \mathbb{L}_x$). В итоге $\mathbb{L} \in \varphi(\hat{\eta})$ и, как следствие (см. (2.8)), $\varphi(\hat{\eta}) \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$. В частности, $\varphi(\hat{\eta}) \in \Omega$. Поскольку выбор $\hat{\eta}$ был произвольным, установлено, что $\varphi^1(\Lambda) \subset \Omega$. Учитывая (4.8) и то, что Ω выбиралось произвольно, получаем, что $\forall A \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\varphi(\eta)) \ \exists B \in N_{\Theta}(\eta) \colon \varphi^1(B) \subset A$. Это означает, что отображение φ непрерывно в точке η, которая выбиралась произвольно. Следовательно, φ(3.19) непрерывно в смысле топологий Θ и $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ (см. (4.3)).

Покажем, что φ-образ открытого множества открыт. Пусть $\Gamma \in \Theta$. Рассмотрим $\varphi^1(\Gamma) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$. Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in \varphi^1(\Gamma)$. Тогда $\mathfrak{U} = \varphi(\gamma)$, где $\gamma \in \Gamma$. В частности, $\gamma \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)$. Это означает, что γ — отображение из X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$ и при этом $\mathfrak{U}_x \triangleq \gamma(x) \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) \ \forall x \in X$. Разумеется, $\gamma = (\mathfrak{U}_x)_{x \in X}$ и согласно (3.19)

$$\mathfrak{U} = \varphi(\gamma) = \bigotimes_{x \in X} \mathfrak{U}_x. \tag{4.10}$$

Поскольку $\gamma \in \Gamma$, для некоторого множества $\mathbf{B} \in \bigotimes\limits_{x \in X} \tau_x$ имеют место свойства

$$(\gamma \in \mathbf{B}) \& (\mathbf{B} \subset \Gamma). \tag{4.11}$$

Согласно (4.1) $\mathbf{B}$ есть п/м $\prod\limits_{x \in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)$ и для некоторого $(N^*_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \tau_x$

$$\Big(\mathbf{B} = \prod_{x \in X} N^*_x\Big) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon N^*_x = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) \ \forall x \in X \setminus K). \tag{4.12}$$

С учетом (4.12) зафиксируем такое множество $\mathbf{K} \in \mathrm{Fin}(X)$, что

$$N_x^* = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \ \forall x \in X \setminus \mathbf{K}. \tag{4.13}$$

Из (4.11) и (4.12) следует, что $\mathfrak{U}_x \in N_x^* \ \forall x \in X$. С другой стороны, $N_x^* \in \tau_x$ при $x \in X$, поэтому $N_x^* \in N_{\tau_x}^0(\mathfrak{U}_x)$. Учтем теперь [16, (5.16)] и определение топологий $\tau_x,\ x \in X$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{L}_x \triangleq \{L \in \mathfrak{U}_x \mid \Phi_{\mathcal{L}_x}(L) \subset N_x^*\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{U}_x) \ \forall x \in X. \tag{4.14}$$

Напомним, что при $x \in X$ $\mathfrak{U}_x \subset \mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\} \subset \mathcal{P}'(E_x) \subset \mathcal{P}'(Y)$ и $\mathfrak{U}_x \neq \varnothing$. С учетом (4.14) получаем, что $(\mathfrak{L}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))^X$, а тогда (аксиома выбора) имеем свойство

$$\prod_{x \in X} \mathfrak{L}_x = \{(L_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X \mid L_s \in \mathfrak{L}_s \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)^X). \tag{4.15}$$

Во всяком случае множество (4.15) непусто. Пусть

$$(L_x^0)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathfrak{L}_x. \tag{4.16}$$

В (4.16) получили отображение из X в $\mathcal{P}'(Y)$, для которого $L_x^0 \in \mathfrak{L}_x \ \forall x \in X$. Тогда согласно (4.14) имеем при $x \in X$, что $L_x^0 \in \mathfrak{U}_x$ и при этом

$$\Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^0) \subset N_x^*. \tag{4.17}$$

Введем в рассмотрение (обобщенный) кортеж $(L_x^*)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X$ посредством правила

$$(L_s^* \triangleq L_s^0 \ \forall s \in \mathbf{K})\&(L_t^* \triangleq E_t \ \forall t \in X \setminus \mathbf{K}). \tag{4.18}$$

Тогда (см. (2.4), (2.5), (2.8)) при $x \in X \setminus \mathbf{K}$ $\Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^*) = \Phi_{\mathcal{L}_x}(E_x) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)$ и согласно (4.13) $\Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^*) = N_x^*$. С учетом (4.17), (4.18) реализуется система вложений

$$\Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^*) \subset N_x^* \ \forall x \in X. \tag{4.19}$$

Заметим, что $E_s \in \mathfrak{U}_s$ при $s \in X$. С учетом (4.18) получаем теперь, что

$$L_x^* \in \mathfrak{U}_x \ \forall x \in X. \tag{4.20}$$

Согласно (2.8) $\Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^*) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \mid L_x^* \in \mathcal{U}\} \in \tau_x$ при $x \in X$ (учли то, что $(\mathbb{UF})[E_x; \mathcal{L}_x]$ — база топологии τ_x). Тогда

$$(\Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^*))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \tau_x \tag{4.21}$$

и определено следующее множество-произведение:

$$\Psi \triangleq \prod_{x \in X} \Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^*) \in \mathcal{P}\Big(\prod_{x \in X} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x)\Big). \tag{4.22}$$

Более того, поскольку $\mathbf{K} \in \mathrm{Fin}(X)$ и $\Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^*) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}_x) \ \forall x \in X \setminus \mathbf{K}$, из (4.1), (4.21) и (4.22) извлекается важное свойство. Именно, $\Psi \in \bigotimes_{x \in X} \tau_x$ и, в частности, $\Psi \in \Theta$. Отметим, что $\mathfrak{U}_x \in \Phi_{\mathcal{L}_x}(L_x^0)$ и $\mathfrak{U}_x \in \Phi_{\mathcal{L}_x}(E_x)$ при $x \in X$. В итоге (см. (4.18)) $\mathfrak{U}_t \in \Phi_{\mathcal{L}_t}(L_t^*) \ \forall t \in X$. Согласно (4.22)

$$\gamma = (\mathfrak{U}_x)_{x \in X} \in \Psi.$$

Получили свойство $\Psi \in N_\Theta^0(\gamma)$, причем в соответствии с (4.11), (4.12), (4.19) и (4.22)

$$\Psi \subset \mathbf{B} \subset \Gamma. \tag{4.23}$$

В силу (4.20) $L^*_x \in \mathcal{L}_x \ \forall x \in X$. В итоге

$$(L^*_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x. \tag{4.24}$$

В связи с (4.24) полезно отметить и то, что (см. (4.20))

$$(L^*_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathfrak{U}_x. \tag{4.25}$$

Введем в рассмотрение следующее множество-произведение:

$$\mathbf{L}^* \stackrel{\triangle}{=} \prod_{x\in X} L^*_x = \{f \in Y^X \mid f(s) \in L^*_s \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}(E) \tag{4.26}$$

(см. (3.1)). Разумеется, из (3.3), (4.18) и (4.24) вытекает, что $\mathbf{L}^* \in \mathcal{L}$. Более того, из (3.7), (4.18) и (4.25) получаем, что

$$\mathbf{L}^* \in \bigotimes_{x\in X} \mathfrak{U}_x. \tag{4.27}$$

С учетом (2.8) имеем, с другой стороны, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}^*) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \mathbf{L}^* \in \mathcal{U}\} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]. \tag{4.28}$$

При этом (см. (4.10), (4.27)) $\mathbf{L}^* \in \mathfrak{U}$, а тогда из (4.28) извлекается включение

$$\mathfrak{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}^*). \tag{4.29}$$

Выберем произвольно у/ф $\mathfrak{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}^*)\colon \mathfrak{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом

$$\mathbf{L}^* \in \mathfrak{V}. \tag{4.30}$$

Используя сюръективность φ(3.19), подберем кортеж $v \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)$, для которого $\mathfrak{V} = \varphi(v)$; при этом v есть отображение из X в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$, для которого

$$\mathfrak{V}_x \stackrel{\triangle}{=} v(x) \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) \ \forall x \in X. \tag{4.31}$$

Согласно (3.19) имеем очевидное равенство

$$\mathfrak{V} = \bigotimes_{x\in X} \mathfrak{V}_x. \tag{4.32}$$

С учетом (4.30) и (4.32) получаем, что для некоторого кортежа

$$(V_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathfrak{V}_x \tag{4.33}$$

справедливо равенство $\mathbf{L}^* = \prod\limits_{x\in X} V_x$ и при этом $\exists K \in \mathrm{Fin}(X)\colon V_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K$. В силу (4.26) получаем равенство

$$\prod_{x\in X} L^*_x = \prod_{x\in X} V_x. \tag{4.34}$$

Согласно (2.4), (2.5) и (4.25) $L^*_x \neq \varnothing \ \forall x \in X$. Аналогичным образом из (2.4), (2.5), (4.31) и (4.33) $V_x \neq \varnothing \ \forall x \in X$. Итак, $(L^*_x)_{x\in X}$ и $(V_x)_{x\in X}$ — суть кортежи непустых п/м Y. Поэтому из (3.15) и (4.34) вытекает система равенств $L^*_x = V_x \ \forall x \in X$. С учетом (4.33) имеем включения $L^*_x \in \mathfrak{V}_x \ \forall x \in X$. Из (2.8) и (4.31) получаем, что

$$\mathfrak{V}_x \in \Phi_{\mathcal{L}_x}(L^*_x) \ \forall x \in X. \tag{4.35}$$

Из (4.22) и (4.35) следует свойство $v = (\mathfrak{V}_x)_{x \in X} \in \Psi$. В частности (см. (4.23)), $v \in \Gamma$. Поэтому $\mathfrak{V} \in \varphi^1(\Gamma)$. Поскольку выбор $\mathfrak{V}$ был произвольным, установлено вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}^*) \subset \varphi^1(\Gamma). \tag{4.36}$$

Из (4.28), (4.29) и (4.36) получаем, в частности, что $\exists B \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\colon (\mathfrak{U} \in B)\&(B \subset \varphi^1(\Gamma))$. Поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, справедливо утверждение, что

$$\forall \mathcal{U} \in \varphi^1(\Gamma)\ \exists B \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\colon (\mathcal{U} \in B)\&(B \subset \varphi^1(\Gamma)). \tag{4.37}$$

По определению $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ следует из (4.37), что $\varphi^1(\Gamma) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$. Поскольку выбор множества Γ был произвольным, установлено, что $\varphi^1(G) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\ \forall G \in \Theta$. Коль скоро свойство непрерывности φ доказано ранее, имеем, что φ — открытая биекция, т. е. гомеоморфизм (см. [22, 1.4.18]).

5. Ультрафильтры на бесконечных произведениях измеримых пространств

Рассмотрим одну возможность применения предложения 4.1 в случае более традиционных ИП. Следуем при этом соглашениям двух предыдущих разделов (см., в частности, (3.1), (3.3), (3.19), (4.1), (4.2)) при дополнительном предположении: $\mathcal{L}_x \in \Pi[E_x]\ \forall x \in X$. Итак, далее в виде $(E_x, \mathcal{L}_x),\ x \in X$, имеем ИП с п/а множеств. Иными словами, в дальнейшем

$$(\mathcal{L}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \Pi[E_x]. \tag{5.1}$$

Отметим, что (в случае (5.1)) при $x \in X$ ТП $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \tau_x)$ — непустой компакт (см. [23, следствие 4.1]). Из (3.3), (5.1) вытекает, что

$$\mathcal{L} = \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \in \Pi[E]. \tag{5.2}$$

Свойство является естественным обобщением [24, предложение 5.2.2] (см. в этой связи известное положение [19, теорема 3.1.1], касающееся произведения стандартных ИП); обоснование (5.2) отличается понятными техническими деталями и в данном кратком изложении опущено, ТП $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$ есть непустой компакт [23, следствие 4.1]. Рассматриваем далее алгебру

$$\mathcal{A} \overset{\triangle}{=} a^0_E(\mathcal{L}) \in (\mathrm{alg})[E], \tag{5.3}$$

получая в виде ТП $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E])$ компакт Стоуна. Введем в рассмотрение естественное правило продолжения $\mathcal{L}$-фильтров до $\mathcal{A}$-фильтров: с учетом [23, (3.14)] имеем, что при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ $\psi[\mathcal{A};\mathcal{F}] \overset{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{A} \mid \exists F \in \mathcal{F}\colon F \subset A\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A})$. В качестве $\mathcal{F}$ может использоваться у/ф. Более того (см. [23]),

$$\psi[\mathcal{A};\mathcal{U}] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}). \tag{5.4}$$

С учетом (5.4) определяем отображение $\psi[\mathcal{A};\cdot]$ в виде

$$\mathcal{U} \longmapsto \psi[\mathcal{A};\mathcal{U}]\colon \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}). \tag{5.5}$$

При этом отображение $\psi[\mathcal{A};\cdot]$(5.5) есть [23, предложение 4.1] гомеоморфизм ТП $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$ на $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E])$.

Теорема 5.1. *Отображение* $(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \longmapsto \psi[\mathcal{A}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{U}_x]\colon \prod_{x \in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) \longrightarrow \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})$ *есть гомеоморфизм ТП* $\big(\prod_{x \in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \Theta\big)$ *на* $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о получается (см. [22, раздел I.4]) непосредственной комбинацией предложения 4.1 и [23, предложение 4.1]. Итак (см. (4.2)), в терминах компактов $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \tau_x)$, $x \in X$, реализуется исчерпывающее представление требуемого компакта $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E])$, где $\mathcal{A}$ определяется посредством (3.3) и (5.3). Заметим, что в качестве $(E_x, \mathcal{L}_x),\ x \in X$, могут использоваться ИП с алгебрами множеств.

6. Частный случай

В настоящем разделе полагаем, что $Y = \mathbb{R}$; кроме того, полагаем заданными две вещественнозначные функции $f \in \mathbb{R}^X$ и $g \in \mathbb{R}^X$, для которых $f(x) < g(x)\ \forall x \in X$. Пусть далее $E_x = [f(x), g(x)]\ \forall x \in X$. Оснащаем каждое такое множество алгеброй, порожденной системой промежутков, следуя [15]. Тогда при $x \in X$

$$\mathfrak{I}_x \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\Lambda \in \mathcal{P}(E_x) \mid \exists c \in E_x\ \exists d \in E_x\colon (]c, d[\subset \Lambda)\&(\Lambda \subset [c, d])\Big\} \in \Pi[E_x],$$

а $\mathcal{L}_x \stackrel{\triangle}{=} a^0_{E_x}(\mathfrak{I}_x) \in (\mathrm{alg})[E_x]$; $(E_x, \mathcal{L}_x)$ есть ИП с алгеброй множеств. Определяем $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ посредством (5.2), после чего конструируем алгебру $\mathcal{A}$, используя (5.3). Если $x \in X$, то [15, (3.14), (6.5)] получаем, что

$$\Big(\mathcal{J}^{(-)}_{x,t} \stackrel{\triangle}{=} \{[c, t[\colon c \in [f(x), t[\} \in \beta^0_{\mathcal{L}_x}[E_x]\ \forall t \in]f(x), g(x)]\Big)\&\Big(\mathcal{J}^{(+)}_{x,t} \stackrel{\triangle}{=} \{]t, c]\colon c \in]t, g(x)]\} \in \beta^0_{\mathcal{L}_x}[E_x]\ \forall t \in [f(x), g(x)[\Big); \tag{6.1}$$

посредством БФ (6.1) исчерпывающим образом характеризуется $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_x)$. В самом деле, как показано в [15, (6.9), (6.10)], $\forall x \in X$

$$\Big(\mathfrak{A}^{(-)}_{x,t} \stackrel{\triangle}{=} (E_x - \mathbf{fi})[\mathcal{J}^{(-)}_{x,t} \mid \mathcal{L}_x] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_x)\ \forall t \in]f(x), g(x)]\Big)\&\Big(\mathfrak{A}^{(+)}_{x,t} \stackrel{\triangle}{=} (E_x - \mathbf{fi})[\mathcal{J}^{(+)}_{x,t} \mid \mathcal{L}_x] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_x)\ \forall t \in [f(x), g(x)[\Big).$$

Более того, справедливы [15, предложение 6.1] следующие равенства:

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_x) = \Big\{\mathfrak{A}^{(-)}_{x,t}\colon t \in]f(x), g(x)]\} \cup \{\mathfrak{A}^{(+)}_{x,t}\colon t \in [f(x), g(x)[\Big\}\ \forall x \in X. \tag{6.2}$$

Из (6.2) вытекает представление множеств $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)$, $x \in X$. Действительно,

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}_x) \cup \Big\{((E_x, \mathcal{L}_x) - \mathrm{ult})[t]\colon t \in E_x\Big\}\ \forall x \in X.$$

Итак, (6.2) определяет множества $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x)$, $x \in X$. Это означает, что конструктивно реализуется ТП $\big(\prod_{x \in X} \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}_x), \Theta\big)$, гомеоморфное $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E])$; конкретный вид гомеоморфизма указан в теореме 5.1. Тем самым достигается исчерпывающее представление компакта Стоуна.

Заметим, что в рассматриваемом случае $E = \{h \in \mathbb{R}^X \mid f(x) \le h(x) \le g(x)\ \forall x \in X\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 230 с.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 286 с.
6. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы. Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностр. лит., 1959. С. 263–267.
7. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
8. **Архангельский А.В.** Компактность // Итоги науки и техники. Сер. “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления”. 1989. Т. 50. С. 7–128.
9. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
10. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.

11. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Соврем. математика и ее прил. / АН Грузии. Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
12. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, no. 2. P. 1045–1206.
13. **Ченцов А.Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
14. **Ченцов А.Г.** Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 225–239.
15. **Ченцов А.Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
16. **Ченцов А.Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
17. **Ченцов А.Г.** К вопросу о структуре множеств притяжения в топологическом пространстве // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 1(39). С. 147–150.
18. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
19. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
20. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
21. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
22. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
23. **Ченцов А.Г.** К вопросу о представлении элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
24. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ. 2008. 388 с.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 2.11.2012

Том 19 № 2 2013

БАДКОВ ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВИЧ

6 марта 2013 г. на 73-м году жизни после тяжелой болезни скончался ведущий научный сотрудник отдела теории приближения функций Института математики и механики УрО РАН Владимир Михайлович Бадков. После окончания с отличием в 1962 г. механико-математического факультета Одесского госуниверситета В. М. Бадков поступил на работу в Свердловское отделение МИАН (ныне Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН), где прошел путь от старшего лаборанта до ведущего научного сотрудника. В 1969 г. он защитил кандидатскую, а в 1995 г. — докторскую диссертацию.

В. М. Бадков — крупный специалист по теории ортогональных полиномов. Он установил ряд глубоких результатов для алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов с особенностями веса достаточно общего вида, в частности, аналоги известных результатов Карлесона — Ханта о сходимости почти всюду соответствующих рядов Фурье, весовые аналоги неравенств Маркова, Бернштейна, Никольского, точные по порядку поточечные оценки многочленов, ортогональных на окружности. Он получил тонкие результаты об асимптотике ортогональных полиномов, функций Лебега и верхних граней уклонения сумм Фурье на классах функций. Им опубликовано около ста научных работ. Много лет он преподавал в Уральском государственном университете на математико-механическом факультете. Студенты с неизменным интересом слушали цикл его спецкурсов, в которых значительная часть излагаемых результатов принадлежала лектору.

В. М. Бадков брался за решение трудных проблем, при этом его отличали постоянство и настойчивость, настоящая увлеченность и стремление найти свой собственный подход, нестандартный метод решения. Он обладал энциклопедическими знаниями, не только в области математики, но и в вопросах, далеких от нее, и всегда готов был щедро поделиться своими знаниями с любым собеседником.

Владимир Михайлович Бадков был доброжелательным, отзывчивым и очень ответственным человеком, светлая память о нем навсегда сохранится в наших сердцах.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 2 2013

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Н. М. Юркова
TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 20.05.13. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37, 7. Уч.-изд. л. 30. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226