РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 18 № 3 2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 18 № 3 2012

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 18, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012. 290 с.

ISSN 0134–4889

Том 18 № 3 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Том 18 № 3 2012

(Продолжение)

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.5+519.1

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ СЕРГЕЯ НИКОЛАЕВИЧА ЧЕРНИКОВА

И. И. Еремин, А. А. Махнев

В этой статье представлены краткая биография С. Н. Черникова и информация о Международной конференции “Алгебра и линейная оптимизация”, посвященной 100-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Екатеринбург, 14–19 мая 2012 г.)

I. I. Eremin, A. A. Makhnev. On the 100th Birthday of Sergei Nikolaevich Chernikov.

Chernikov’s brief biography and information on the International Conference “Algebra and Linear Optimization” (Yekaterinburg, May 14–19, 2012) dedicated to his 100th birthday are presented.

11 мая 2012 г. исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося советского алгебраиста члена-корреспондента АН УССР Сергея Николаевича Черникова. Сергей Николаевич Черников родился в г. Загорске (Сергиев Посад) Московской области. Его отец Николай Николаевич был священником, мать Анна Алексеевна — домохозяйкой. В 1928 г. он окончил среднюю школу и сразу начал работать, сначала чернорабочим, потом выучился на шофера и бухгалтера, но устроился счетоводом. Затем преподавал математику на рабочих курсах (по ноябрь 1931 г.). В 1930 г. поступил на заочное отделение физико-технического факультета Саратовского педагогического института и окончил его в 1933 г., получив специальность преподавателя физики и математики. Параллельно с учебой в институте Сергей Николаевич в 1931–1932 гг. был преподавателем математики в сельскохозяйственном техникуме в Татищевском районе Саратовской области. В 1932–1933-м учебном году преподавал физику и математику в ФЗС № 17 города Саратова. По окончании института в 1933 г. по направлению Наркомтяжпрома СССР приехал в Свердловск для преподавания математики во втузах этого наркомата. Один учебный год был ассистентом кафедры математики Уральского физико-механического института. С сентября 1934 г. Сергей Николаевич — ассистент кафедры математики Уральского индустриального института. В январе 1939 г. окончил при кафедре алгебры Московского государственного университета заочную аспирантуру и защитил кандидатсткую диссертацию. В том же году получил ученое звание доцента и в сентябре был назначен заведующим кафедрой математики Уральского индустриального (в дальнейшем политехнического) института и заведовал ею по февраль 1946 г. В 1940 г. С. Н. Черников защитил при Московском государственном университете докторскую диссертацию на тему “Локально разрешимые группы”. В январе 1941 г. ему было присвоено ученое звание профессора кафедры высшей математики. В 1945 г. приказом министерства высшего образования С. Н. Черников был переведен в Уральский государственный университет. С сентября 1945 по сентябрь 1951 г. — профессор и первый заведующий кафедрой математического анализа Уральского государственного университета им. А.М. Горького. С февраля 1947 по 1950 г. был также деканом физико-математического факультета УрГУ.

С сентября 1951 по май 1961 г. С. Н. Черников — заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии Молотовского (Пермского) госуниверситета. По совместительству с сентября 1955 по 1961 г. С. Н. Черников заведует кафедрой математики и теоретической механики Пермского сельскохозяйственного института. Как яркий ученый и талантливый педагог Сергей Николаевич снискал искреннее уважение профессорско-преподавательского состава. В частности, ректор Пермского университета В. Ф. Тиунов позднее позволил Сергею Николаевичу оставить свой пост только после того, как Черников нашел себе достойную замену в лице известного ученого-алгебраиста доцента П. И. Трофимова из Томска.

В 1961 г. С. Н. Черников по приглашению профессора С. Б. Стечкина, директора Свердловского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (в настоящее время Институт математики и механики УрО РАН), возвращается в Свердловск. Сергей Николаевич возглавил созданный им отдел алгебры, где продолжил исследования по теории групп. Не меньшее внимание в этот период он уделяет и другой сфере своих исследований — теории линейных неравенств. Одновременно с созданием отдела алгебры под пристальным вниманием С.Н. Черникова организуется лаборатория линейного программирования, которую возглавил ученик Сергея Николаевича кандидат наук (ныне академик РАН) И. И. Еремин, один из авторов этих строк.

Влияние С. Н. Черникова на развитие алгебры и математического программирования, в частности на Урале, ознаменовалось выходом целого ряда блестящих работ в этих областях и созданием активно работающих научных школ, известных как в России, так и за рубежом.

В 1965 г. С. Н. Черников по приглашению своего ученика, создателя Института кибернетики АН УССР В. М. Глушкова переехал в Киев, где с этого времени и до конца жизни заведовал отделом алгебры Института математики АН УССР; одновременно с 1965 г. он преподавал в Киевском педагогическом институте.

В Свердловске после отъезда Черникова в Киев эстафету в области алгебры и линейной оптимизации подхватили отделы алгебры и математического программирования под руководством Альберта Ивановича Старостина и Ивана Ивановича Еремина.

С. Н. Черников — один из признанных создателей современной алгебраической теории линейных неравенств. Решение актуальных задач прикладного характера во время Великой Отечественной войны в 1941–1945 гг. привело Сергея Николаевича к построению глубокой и всесторонне развитой теории линейных неравенств, которая нашла широкое применение в теории и методах оптимизации, математической экономике, распознавании образов. Здесь следует отметить научную школу теории и методов математического программирования и распознавания образов, созданную впоследствии его учениками академиком И. И. Ереминым и профессором Вл. Д. Мазуровым. Среди прочих научных центров уральскую школу оптимизации и распознавания отличают именно алгебраический подход к построению математических конструкций и обоснование результатов, по многом опирающихся на развитую С. Н. Черниковым теорию линейных неравенств.

К заслугам С. Н. Черникова относится не только создание большой новой главы современной общей теории групп, но и воспитание многочисленных молодых ученых и создание теоретико-групповых школ в Свердловске, Перми и Киеве. Его аспирантами были действительный член АН СССР В. М. Глушков, действительный член РАН И. И. Еремин, член-корреспондент АН СССР М. И. Каргаполов, около двадцати докторов наук и более сорока кандидатов наук.

В 1967 г. С. Н. Черников был избран членом-корреспондентом АН УССР. Награжден орденом "Дружбы народов" (1982), медалью "За доблестный труд в Великой Отечественной войне" (1946) и другими медалями.

Избранные публикации С. Н. Черникова

1938

Перенесение одной теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. 1938. Т. 3 (45). С. 413–416.

1940

Бесконечные локально разрешимые группы // Мат. сб. 1940. Т. 7 (49). С. 35–64.

1943

К теории локально разрешимых групп // Мат. сб. 1943. Т. 13 (55). С. 317–333.

1944

Обобщение теоремы Кронекера — Капелли о системе линейных уравнений // Мат. сб. 1944. Т. 15 (57). С. 437–448.

1945

К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. С. 71–74.

1946

Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом // Мат. сб. 1946. Т. 18 (60). С. 397–422.

1947

Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, вып. 3 (19). С. 18–59 (совм. с А. Г. Курошем).

1950

Об условии минимальности для абелевых подгрупп // Докл. АН СССР. 1950. Т. 75. С. 345–347.

1951

О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Мат. сб. 1951. Т. 28 (70). С. 119–129.

1953

Системы линейных неравенств // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, вып. 2 (54). С. 7–73.

1958

О слойно конечных группах // Мат. сб. 1958. Т. 45 (87). С. 415–416.

1963

Свертывание конечных систем линейных неравенств // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, вып. 5. С. 1075–1078.

1964

Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159, вып. 4. С. 759–760.

1965

Полиэдрально замкнутые системы линейных неравенств // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161, вып. 1. С. 55–58.

1968

Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с. (перев. на нем. яз. 1971).

1969

Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных подгрупп // Мат. заметки. 1969. Т. 6:1. С. 11–18.

1971

Отто Юльевич Шмидт (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Украинский мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 581–585.

1972

Обобщенные сверхразрешимые группы с системами дополняемых абелевых подгрупп // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, вып. 6. С. 1306–1309.

1976

Некоторые виды бесконечных групп с заданной системой дополняемых бесконечных абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. С. 660–683.

1980

Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.

Международная конференция “Алгебра и линейная оптимизация” собрала ведущих специалистов в области теории групп и ее приложений, а также в области математического программирования и теории линейных неравенств.

На открытии конференции 14 мая выступили академик РАН В. И. Бердышев (директор ИММ УрО РАН), чл.-корр. РАН А. А. Махнев (сопредседатель Оргкомитета конференции), докт. физ.-мат. наук Вл. Д. Мазуров (от секции “Линейная оптимизация”).

Были заслушаны 20 пленарных докладов: Астафьев Н. Н. “Двойственный метод Жордана–Гаусса”; Белоусов И. Н., Махнев А. А. “О расширениях сильно регулярных графов с собственным значением 2”; Зоркальцев В. И. “Наименее удаленные от начала координат точки полиэдров”; Казарин Л. С. “Факторизации групп и смежные вопросы”; Кондратьев А. С. “Распознавание конечных групп по графу простых чисел”; Левчук В. М. “Структурные вопросы и автоморфизмы алгебр и групп лиева типа”; Мазуров В. Д. “Периодические группы с дополнительными условиями конечности”; Мазуров Вл. Д. “Теория линейных неравенств в работах С. Н. Черникова”; Махнев А. А., Нирова М. С. “Реберно симметричные сильно регулярные графы с числом вершин не больше 100”; Попов Л. Д. “Ньютоновские методы в анализе несобственных задач выпуклого программирования 1-го рода”; Ремесленников В. Н. “Закон 0-1 для групп и графов”; Скарин В. Д. “О методах регуляризации несобственных задач выпуклого программирования”; Созутов А. И. “Группы с системами Фробениусовых подгрупп”; Трофимов В. И. “Симметрические расширения графов и их приложения”; Хачай М. Ю. “Вычислительная сложность и аппроксимируемость серии геометрических задач о покрытии”; Ченцов А. Г. “Компакты Стоуна в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера”; Черников Н. С. “Группы с условиями минимальности”; Шеврин Л. Н. “Полугруппы с условиями конечности и черниковские группы”; Шевченко В. Н. “Триангуляции многогранных конусов и реализация их f-векторов”; Шлепкин А. К. “О группах бернсайдова типа”.

На секции “Алгебра” было заслушано 24 доклада, на секции “Линейная оптимизация” — 13.

Одним из наиболее сильных результатов является продвижение в решении проблемы Бернсайда для групп периода 12, полученное Д. В. Лыткиной и В. Д. Мазуровым. О завершении 10-летней программы изучения графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 2, сообщили И. Н. Белоусов и А. А. Махнев. Отметим, что решением этой задачи собиралась заняться группа голландских и корейских математиков во главе с Дж. Куленом. Глубокое впечатление произвел фундаментальный доклад Н. С. Черникова о группах с условиями минимальности. В области теории и методов оптимизации в первую очередь следует отметить доклад А. Г. Ченцова о компактификации Стоуна — Чеха, описывающий новый, топологический, подход к проблеме коррекции оптимизационных задач с противоречивыми системами ограничений. Яркими были также доклады В. Н. Шевченко и М. Ю. Хачая в области комбинаторной оптимизации и теории вычислительной сложности.

Много новых впечатлений доставил вечер воспоминаний о С. Н. Черникове, прошедший 16 мая. Участники конференции почтили память выдающегося ученого, тепло говорили о его человеческих качествах и разносторонних интересах. Ученик Черникова Вл. Д. Мазуров рассказал об том, как Сергей Николаевич руководил аспирантами, в числе которых был Владимир Дмитриевич и А. Н. Фомин. Научный “внук” Черникова В. Н. Ремесленников выразил сожаление о том, что довелось мало общаться с Сергеем Николаевичем во время подготовки дипломной работы. Дочь Черникова Наталья Сергеевна рассказала о семейной жизни Сергея Николаевича в первый “свердловский” период, о долгих пеших прогулках с отцом (от 2-го профессорского дома УПИ до гастронома на ул. Вайнера и даже до центрального рынка), о непростых взаимоотношениях с ним во время “пермского” периода его жизни. Сын Черникова Николай Сергеевич уточнил детали из рассказа Натальи Сергеевны, особо остановившись на причинах переезда Сергея Николаевича из Свердловска в Пермь. Л. Н. Шеврин рассказал о своих встречах с Сергеем Николаевичем. Выступили также В. М. Левчук, А. А. Махнев, А. И. Созутов и др.

Надолго запомнится участникам конференции экскурсия на Ганину яму и по памятным местам г. Екатеринбурга.

Закрытие конференции состоялось в пятницу 18 мая. По традиции А. А. Махнев сообщил о конференциях, запланированных на 2013 год: о XV Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения" (Екатеринбург, февраль-март), посвященной 80-летию И. И. Еремина, о Международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения В. Д. Мазурова (Новосибирск, июль), и конференции по теории групп и графов, посвященнаой 60-летию со дня рождения А. А. Махнева (Екатеринбург, май). Участники конференции поблагодарили оргкомитет за большую работу по ее организации и проведению. После закрытия была сделана фотография участников и проведен шахматный блицтурнир, призерами которого стали В. И. Зенков, В. А. Белоногов и А. А. Махнев.

Еремин Иван Иванович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ermii@imm.uran.ru

Поступила 23.05.12

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
email: makhnev@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.54

ABA-GROUPS WITH CYCLIC SUBGROUP B[1]

B. Amberg, L. S. Kazarin

Some criteria to the solubility of groups of the form $G = ABA$ with a nilpotent subgroup A and a cyclic subgroup B are derived. In particular, it is proved (using the classification of the finite simple groups) that the finite group $G = ABA$ is soluble if A is a nilpotent group of odd order and B is a cyclic group and $(|A|, |B|) = 1$.

Keywords: simple group, Lie type group, sporadic simple group.

Introduction

A group G with subgroups A and B is called an ABA-group, if every element $g \in G$ can be represented in the form $g = aba_1$, where $a, a_1 \in A$, $b \in B$. A special case of this is a factorization of the form $G = AB$. Finite ABA-factorizations were studied by many authors. Among the first were D. Gorenstein and I.N. Herstein in [10] and D. Gorenstein in [11], where criteria for the solubility of such groups were found, when A and B are cyclic.

In [12] M. Guterman studied finite ABA-groups G, where A is abelian and A and B have coprime orders. He proved that G is soluble, if either B is nilpotent and A is self-normalizing, or B is an abelian group of odd order.

Ya.P. Sysak proved in [21] the solubility of such groups, if A and B are abelian Hall subgroups of G and A is of even order. In [22] he showed that $G = ABA$ is soluble, if A is abelian, B is cyclic and the orders of A and B are coprime. He studied also some cases, when A and B are abelian groups of prime power orders. In particular, he determined certain classes of soluble groups of these form.

D.L. Zagorin and L.S. Kazarin announced in [26] that a finite simple ABA-group with abelian subgroups A and B is isomorphic to a linear group $L_2(q)$ with even q. The proof of this result used the classification of all finite simple groups and was also obtained under this condition by E.P. Vdovin in [24], using different methods. In [26] it was also announced that in the case, when A is abelian and B is cyclic, the group $G = ABA$ is soluble. However the proof was never published. In a recent paper H. Alavi and C. Praeger [1] suggested a program for the investigation of ABA-factorizations, connected with automorphisms of graphs and other geometrical structures.

Using the classification of all finite simple groups, we will prove here the following theorems.

Theorem 1. *Let G be a finite ABA-group with an abelian subgroup A and a cyclic subgroup B. Then G is soluble.*

Some examples of finite groups with an ABA-factorization are presented in Section 4 at the end of the paper. In particular, we exhibit a nonsoluble finite group of the form $G = ABA$ with a nilpotent subgroup A and a cyclic subgroup B. This shows in particular that Theorem 1 is not true in general when the subgroup A is nilpotent. However, the following holds.

[1]The second author is grateful to the department of Mathematics of the University of Mainz for the warm hospitality. He also likes to thank the DFG and the RFBR (project 10-01-00324) for the financial support.

Theorem 2. *Let G be a finite group, which is represented in the form $G = ABA$ with a nilpotent subgroup A of odd order and a cyclic subgroup B. If $(|A|, |B|) = 1$, then G is soluble.*

All groups considered are finite. The notation is standard. In dealing with finite simple groups we use the notation, the terminology and the properties of groups of Lie type as in [8] and [19]. The letter p always denotes a prime and X_p is the largest power of p dividing the number of elements in the set X. Similarly, if π is a set of primes, then X_π denotes the π-part of $|X|$ and π' is the complementary subset to π in the set of all primes.

1. Prelimiaries

The first lemma deals with simple inheritance properties of ABA-groups.

Lemma 1. *Let $G = ABA$ be a group with subgroups A and B. Then every subgroup H of G containing A can be represented in the form $H = A(B \cap H)A$. In particular, $|G| \leq |A|^2|B|$. If N is a normal subgroup of G, then $G/N = \bar{A}\bar{B}\bar{A}$, where $\bar{A} = AN/N, \bar{B} = BN/N$.*

The first part of the next lemma is also well-known and can easily be proved by induction. Recall that $Z_i(G)$ is the i-th member of the upper central series of a group G and $Z_0(G) = 1$.

Lemma 2. *Let $G = ABA$ be a group with the subgroups A and B. If A is subnormal in a subgroup H of G, then $H = A(H \cap B)$. In particular, if A and B are nilpotent and for each $i \geq 1$ the following condition holds $[Z_i(A), H] \leq Z_{i-1}(A)$, then H is nilpotent.*

Proof. We only need to prove the second part of the lemma. Clearly, the set H of all elements h such that $[Z_i(A), h] \subseteq Z_{i-1}(A)$ for all $i \geq 1$ is a subgroup of G. Indeed, if $h_1, h_2 \in H$, then for every $a \in Z_i(A), i \geq 1$ and $j \in 1, 2$ we have $a^{-1}a^{h_j} \in Z_{i-1}(A)$. It follows immediately, that A is normal in $\langle A, H\rangle = AH = K$ and h_j normalizes $Z_l(A)$ for every $l \geq 1$. In this case $a^{-1}a^{h_1h_2} = (a^{-1}a^{h_1})(a^{-1}a^{h_2})^{h_1}$. Since both factors belong to $Z_{i-1}(A)$, the product h_1h_2 is in H. Therefore H is a subgroup of G. Now $Z(A) \leq Z(K)$, and by induction we obtain the desired result. The lemma is proved.

Lemma 3. *Let $G = ABA$ be a group with a nilpotent subgroup A and a cyclic subgroup B of coprime order with $|A|$. If the subgroup A normalizes a $\pi(A)'$-subgroup H of G, then either A is normal in $L = AH$, or $H = (B \cap H)^A$. In particular, in the latter case A acts transitively on the set of all cyclic subgroups of a fixed order in H.*

Proof. Assume that $L = AH$ is not nilpotent. Since $(|A|, |H|) = 1$, it follows that $H = C_H(A) \times [H, A]$. Since $L = A(L \cap B)A = HA$ we obtain that $L \cap B \leq H$. As every element $g \in H$ can be represented in the form $g = aba_1$, where $a, a_1 \in A$ and $b \in B \cap H$, we have that $ba_1a \in H$ and $a_1a \in H$, which implies $a_1a = 1$. In particular, $H = (B \cap H)^A$ and A acts transitively on the set of all cyclic subgroups in H of a fixed order. The lemma is proved.

The next lemma is Theorem 2.4 in [17].

Lemma 4. *Let G be a nonabelian simple group of Lie type over the field $GF(q)$, not isomorphic with ${}^2B_2(q)$ or ${}^2G_2(q)$. If A is an abelian subgroup of order coprime to p, then $|A| \leq 1/d(q + 1)^r$, where d is the order of the outer diagonal group of automorphisms of G and r is the (untwisted) Lie rank of G.*

The following result was proved by E.P. Vdovin (see [23], Theorem 2.2, Table 3, and [24], Main Theorem).

Lemma 5. *Let G be a nonabelian simple group. If H is a nilpotent subgroup of G, then $|H|^2 < |G|$. The maximal order of an abelian subgroup of G does not exceed $|G|^{1/3}$, provided G is not isomorphic to $L_2(q)$. If G is a group of Lie type, non-isomorphic with $L_2(2^m)$, or $U_3(3)$, then the nilpotent subgroup of largest order of G is a Sylow p-subgroup, where p is the characteristic of the field of definition of G.*

The following lemma from [2], Lemma 2.8, gives an upper bound for the order of a transitive nilpotent group. A better bound can be found in [23].

Lemma 6. *Let G be a nilpotent subgroup of a transitive permutation group of degree k. Then the order of G does not exceed 2^k.*

Lemma 7. *Let L be a nonabelian simple group, not isomorphic with $L_2(4)$. Then $4|Out(L)| < |L|^{1/2}$. In any case $|Out(L)| < |L|^{1/3}$.*

Proof. By Table (2.3) in [5] the order of $L = L_n(q)$ or $L = U_n(q)$ satisfies the inequality $|L| > q^{n(n-1)}$. The order of the outer automorphism group $Out(L)$ is $2(q-1,n)\log_p q$ for $L = L_n(q)(n \geq 3)$ and $2(q+1,n)\log_p q$ for $L = U_n(q)(n \geq 3)$. Hence $|Out(L)| \leq 2(q+1)\log_p q \leq q^2$, unless $q = 2$ or $q = 4$.

Assume that $|Out(L)| \leq q^2$. Since $q^6 \leq q^{n(n-1)} < |L|$ for $n \geq 3$ and $16q^4 \leq q^{n(n-1)}$ for $n \geq 3$ and $q \geq 4$, we obtain the desired conclusion for the case $q \neq 2, 3$ or 4. If $q = 3$, $n = 3$, then a direct computation shows that the assertion of the lemma is also true.

Clearly, for $q = 2$ we have $L = L_n(2)$ or $U_n(2)$, whereas $|Out(L)| \leq 6$ and $|L| > 2^{n(n-1)}$. If the bound in the lemma is not true, then $n < 4$ and $4|Out(L)| \leq 24$. It is easy to see that this is not the case.

Suppose that $q = 4$. Then we have $4|Out(L)| \leq 80$. Assume first that $4|Out(L)| < q^2$. Then $q^4 > q^{n(n-1)}$ only when $n = 2$, so that $L \simeq L_2(4)$. Note that we also have the inequality $|Out(L)| < |L|^{1/3}$. In the remaining subcase $n \leq 3$. This gives the inequality $4|Out(L)| \leq 16 = q^2$ for $n = 3$. Therefore $n = 2$ and $q = 4$, as required.

Using similar inequalities from [5] for the classical simple groups, we obtain the desired conclusion. For the exceptional, alternating and sporadic groups the calculations are substantially easier and we omit them. The lemma is proved.

In some cases we need inequalities that are more precise.

Lemma 8. *Let L be a nonabelian simple group, not isomorphic with $L_n(q)$, or $U_n(q)$ for $n \leq 4$. Then $|Out(L)| < |L|^{1/8}$. If $L \simeq L_4(q)$ or $U_4(q)$, then $|Out(L)| \leq |L|^{1/6}$.*

Proof. This follows from the orders of the automorphism group of the non-abelian finite simple groups and depends on bounds of expressions of the form $m \log_p q$, as in the proof of the previous lemma (see for instance [19]).

Lemma 9. *Let $A = A_1 \times A_2$ be a transitive permutation group on the set Ω, and let Δ, ∇ be the orbits of Ω of minimal cardinality of A_1 and A_2 respectively. If the orders of the subgroups A_1 and A_2 are coprime, then $|\Omega| = |\Delta||\nabla|$.*

Proof. Since Δ is an orbit of A_1 of minimal size, it follows that for every $x \in A_2$ we have that Δ^x is an orbit of A_1 with the same cardinality as Δ and either $\Delta^x = \Delta$, or $\Delta^x \cap \Delta = \varnothing$. On the other hand, for every $g \in G$ there exist $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ such that $g = a_1a_2$. Hence $\Delta^{a_1a_2} = \Delta^{a_2}$ and the number of A_1-orbits is $s = |A_2 : Stab_{A_2}(\Delta)|$. Similarly, the number of A_2-orbits in Ω is t, where t dives the order of A_1. Therefore $|\Omega| = |\Delta|s = |\nabla|t$. By the transitivity of A on Ω, it follows that $|\Delta|$ divides $|A_1|$. Since the orders of A_1 and A_2 are coprime, this implies that $|\Delta|$ divides t. But t is coprime with $|\nabla|$, and so $t \mid |\Delta|$. Therefore $t = |\Delta|$ and $|\Omega| = |\Delta||\nabla|$, as required. The lemma is proved.

In the proof of Theorem 2 we will need the following result due to C.H. Li and H. Zhang in [6].

Lemma 10. *Let G be an almost simple group with socle N, which has a soluble maximal subgroup T, and let S be a Hall subgroup of T. If S is not a Sylow 2-subgroup of G, then one of the following holds*:

(i) *S is abelian,*

(ii) *N is a classical simple group of dimension at most 8, and S is a Sylow 3-subgroup of N, or a Sylow p-subgroup of N, where p is the characteristic of the field of definition of N,*

(iii) *S is a Sylow 3-subgroup of N and N is isomorphic to one of the following groups*: $\{F_4(2),{}^2F_4(2),{}^2E_6(2),E_8(2),{}^3D_4(q),G_2(q),q\leq 3,U_9(2),U_{12}(2)\}$,

(iv) *N is a sporadic simple group and S is a Sylow subgroup of N,*

(v) *N is an alternating group of degree 16, 12 or at most 9 and S is a Sylow 3-subgroup of G.*

Proof. A complete description of the soluble maximal subgroups of all almost simple groups is contained in [6]. The required information can be found in Tables 14–20 of this paper.

2. The structure of the minimal counterexample

Let $G = ABA$ be a non-soluble group of minimal order satisfying the condition of Theorem 1 or 2, respectively. By Lemma 1 we may assume that A is a maximal nilpotent $\pi(A)$-subgroup of G. We will fix the notation for G, A, B untill the end of the proof.

Our first aim is to reduce the general situation to the case of an almost simple group.

Lemma 11. *The group G has a unique minimal normal subgroup N such that $G = AN$, $G \leq Aut(N)$ and $A \cap N \neq 1$.*

Proof. By Lemma 1, the factor group G/N is soluble for every proper normal subgroup N of G. By the minimalty of G, this implies that G has a unique minimal normal subgroup N and G/N is soluble. Moreover, $NA = A(NA \cap B)A = G$. Hence $G = AN \leq Aut(N)$. Let $N_1 \simeq L$ be a minimal normal subgroup of N. Then $G \leq Aut(L) \wr S_k$, $N = \Pi_{i=1}^k N_i$ is a product of isomorphic simple groups N_i and A acts transitively on the set $\Omega = \{N_1,\dots,N_k\}$. Note that by Lemma 6 the order of a maximal nilpotent subgroup of the symmetric group S_k does not exceed 2^k. In particular, $|A/A\cap N| \leq (2a(N_1))^k$, where $a(N_1) = |Out(N_1)|$.

We prove that $A \cap N > 1$. If this is not true, then $|A| = |G/N|$ and $|G| \leq |G/N|^2|B|$. The order of the cyclic subgroup B does not exceed $\exp(A/N)\exp(B\cap N)\exp(N)$. The exponent $\exp(X)$ of the group X is the least common divisor of the orders of its elements. It is clear that $\exp(X) \leq |X|$. It follows that $|B| \leq 2^k a(N_1)|N_1|$. Therefore

$$|N_1|^k \leq |A||B| \leq (2a(N_1))^k 2^k a(N_1)|N_1| = (4a(N_1))^k|N_1|a(N_1).$$

Assume first that N_1 is not isomorphic to $L_2(4)$. Then, by Lemma 7, we have $4a(N_1) \leq |N_1|^{1/2}$. Hence

$$|N_1|^k < |N_1|^{k/2+1}a(N_1),$$

which implies that $|N_1|^{k/2-1} \leq a(N_1)$. By Lemma 7, $k \leq 2$.

If $k = 1$, then G is an almost simple group, so that $N = N_1$. Since $A \cap N = 1$, we have that $|N| \leq a(N)^2|B\cap N|$. By Lemma 5, either $N \simeq L_2(q)$ with even q, or $|B \cap N| \leq |N|^{1/3}$. In the latter case $|N|^{2/3} \leq a(N)^2$, so that $|N| \leq a(N)^3$, contradicting Lemma 7. Observe that this includes also the case $N = L_2(4)$.

Consider next the case $k = 2$. We may use the bound $|B \cap N| \leq \exp(N_1) \leq |N_1|^{1/3}$. Hence $|N_1|^2 \leq a(N_1)^2|N_1|^{1/3}$. Thus $|N_1|^{5/3} \leq a(N_1)^2$, contradicting Lemma 7.

Suppose now that $N_1 \simeq L_2(4)$. Then $a(N_1) = 2, |N_1| = 60$ and $\exp(N_1) = 30$. We have

$$60^k \leq 30 \cdot 8^k,$$

which implies that $k \leq 2$. However, in this case $|B \cap N| \leq 15$ and $k = 1$. This contradiction proves the lemma.

By Lemma 2 we may assume in the sequel that $C_G(A) \leq A$. By the previous lemma $A \cap N$ is a nontrivial nilpotent normal subgroup of A. Therefore there exists an element $z \in Z(A) \cap N$ of prime order r, say. Since $C_G(z)$ contains A, it follows from Lemma 1 that $C_G(z) = A(C_G(z) \cap B)A$ is soluble. Thus z cannot belong to a proper normal subgroup of N. Hence $z = z_1 z_2 \dots z_k$, where $1 \neq z_i \in N_i$.

Recall that M is the largest subgroup of G normalizing each factor N_i of N. In other words, it is the kernel of the homomorphism $G \to S(\Omega) = S_k$, considered above. For every prime s dividing $|A|$ denote by A_s the Sylow s-subgroup of A and by $A_{s'}$ the Hall s'-subgroup of A. Denote by $\hat{N}_i$ the product of all N_j with $j \leq k$ leaving out N_i.

Lemma 12. *Either there exists a prime r dividing $|A \cap N|$ such that A_r acts transitively on Ω and $\pi(A/M) = \{r\}$, or $A \cap \hat{N}_i = 1$ for every $i \leq k$.*

Proof. Let r be a prime dividing $|A \cap N|$ and a be an element of order r in $A \cap M$. Assume that for some $i \leq k$ the subgroup $R = A_r \cap \hat{N}_i \neq 1$. Then for every $y \in A$ of order prime to r we have $R \cap R^y \neq 1$. Hence there exists a proper subset $\Delta \subseteq \Omega$ such that $\Delta^{A_{r'}} = \Delta$ and $k > |\Delta| \geq 1$.

Suppose that $1 < |\nabla| < l$ is an imprimitivity block in Ω of minimal size and the subgroup $K = \Pi_{N_i \in \nabla} N_i$ contains an element $a \in A_r^{\#}$. Then A_r normalizes the subgroup K. Since K is normal in N, it follows that $K \cap A_r$ contains a nontrivial element $z \in Z(A_r)$ and $C_G(z)$ is non-soluble, a contradiction. In particular, $A_r \cap \hat{N}_i = 1$ for each $i \leq k$.

If $|\nabla| = 1$, then A_r acts transitively on Ω by Lemma 9. In this case $A_{r'} \leq M$ normalizes every normal subgroup of N. In particular, k is a power of r, so that $\pi(A/M) = \{r\}$, as claimed.

Assume there is no subgroup A_r acting transitively on Ω. Then, by symmetry, $A \cap \hat{N}_i = 1$ for each $i \leq k$. The lemma is proved.

Lemma 13. *If A_r is transitive on Ω and $k > 1$, then $A_{r'} \cap \hat{N}_i = 1$ for every $i \leq k$. In particular, the order of $A_{r'}$ does not exceed $|N_1|_{r'}$.*

Proof. Assume that $\hat{N}_i = R$ has a non-trivial intersection with $A_{r'}$. Since A is nilpotent, then $E = \cap_{a \in A_r} R^a$ contains $A_{r'} \cap \hat{N}_i$. But E contains a proper imprimitivity block for A_r, which is not the case. Hence $A_{r'} \cap \hat{N}_i = 1$ for every $i \leq k$. Thus $(A_{r'} \cap N)$ is isomorphic to a subgroup of $N/\hat{N}_i \simeq N_1$. The lemma is proved.

Lemma 14. *If $k > 1$ and $A \cap \hat{N}_i = 1$ for every $i \leq k$, then $k = 2$.*

Proof. In this case the group $(A \cap N)/(A \cap \hat{N}_i)$ is isomorphic to a subgroup of N_1, and it follows from Lemma 7 that $|A \cap N|^2 < |N_1|$. We have

$$|N_1|^k \leq |A/(A \cap N)||A \cap N|^2|B| \leq (2a(N_1))^k|N_1|2^k a(N_1)|N_1|.$$

Hence

$$|N_1|^{k-2} \leq (4a(N_1))^k a(N_1).$$

By Lemma 7 this implies $k - 2 \leq k/2 + 1/3$, so that $k \leq 4$.

Assume that $k = 4$. Since a maximal nilpotent subgroup of $G/N \simeq A/N$ has order at most $8a(N_1)^4$ and a maximal cyclic subgroup of G/N has order at most $4a(N_1)$, we have $|N_1| < 2^5 a(N_1)^5$. By Lemma 7, $a(N_1) \leq |N_1|^{1/3}$. Therefore $|N_1| \leq 2^{15}$. This case is easy to handle, using [3].

Assume that $k = 3$. Then a maximal nilpotent subgroup of G/N has order at most $3a(N_1)^3$ and a maximal cyclic subgroup of N has order at most N_1. By similar considerations, it follows that $|N_1| \leq 9a(N_1)^4$. If N_1 is not isomorphic to $L_n(q)$ or $L_n(q)$ for $n \leq 4$, then we have $a(N_1) \leq |N_1|^{1/8}$ by Lemma 8. Hence $|N_1| \leq 9^2$. This is possible only, when $q = 4$ and $N_1 \simeq L_2(5) \simeq L_2(4)$.

If $N_1 \simeq L_4(q)$ or $U_4(q)$, then $a(N_1) \leq |N_1|^{1/6}$. This implies that $|N_1| \leq 9^3$, whereas $|N_1| > 2^{12}$, a contradiction. Consider the case, when $N_1 \simeq L_3(q)$, or $U_3(q)$ and $k = 3$. Then $a(N_1) \leq 6 \log_p q$ and $|N_1| \geq q^6$. Therefore

$$q^6 \leq 9(6 \log_p q)^4.$$

This forces that $q \in \{2, 3, 4, 8\}$. All these cases can be excluded by direct computations.

Assume now that $k = 3, N_1 \simeq L_2(q)$. Here $a(N_1) = (2, q-1) \log_p q$.

If $q = p$ is a prime, then $|N_1| \leq 144$, which implies that $|N_1| = 60$ and $N_1 \simeq L_2(4) \simeq L_2(5)$.

If q is odd, then q is not a prime and we may suppose that $q \geq 7$, since the case $q = 5$ will be considered later. The above inequality excludes all other cases.

If q is even, then $|N_1| = q(q^2 - 1)$ and $|B \cap N|$ divides $2(q^2 - 1)$. We will use here a slightly better bound for the order of N_1.

$$|N_1|^2 \leq 9a(N_1)^4 2(q^2 - 1).$$

Therefore

$$q^2(q^2 - 1) \leq 18a(N_1)^4 = 18(\log_2 q)^4.$$

In this case $q \leq 4$. Since $L_2(2)$ is not simple, we have $q = 4$. Note that there are only two possibilities. Either $|A \cap N|$ divides 16 and $|B/B \cap N|$ divides 4, or $|A \cap N|$ divides 12 and $|B/B \cap N|$ divides 6. In both cases we obtain a contradiction. Hence $k = 2$. The lemma is proved.

Lemma 15. *If $k > 2$, then there exists $r \in \pi(A \cap N)$ such that A_r is transitive on Ω and $A_{r'}$ fixes each $N_i (i \leq k)$. Moreover, $A_{r'} \cap \hat{N}_i = 1$ for each $i \leq k$.*

Proof. If $k > 2$, it follows from Lemmas 12, 13 and 14 that A_r is transitive on Ω for some r dividing $|A \cap N|$. Since A_r acts transitively on Ω we have $A_{r'} \cap \hat{N}_i = 1$ for all $i \leq k$ by Lemma 13. If also $A_r \cap \hat{N}_j = 1$ for some $j \leq k$, then $A \cap \hat{N}_j = 1$. By Lemma 14, in this case $k \leq 2$. Hence $A_r \cap \hat{N}_j \neq 1$ for all $j \leq k$. Then $A_r \cap N_1 \neq 1$. It follows that $A_{r'}$ fixes every N_i. Suppose that there exists a proper subset ∇ of $\Omega = \{N_1, N_2, \dots N_s\}$, say, such that $U = (\Pi_{i=1}^s N_i) \cap A_{r'} \neq 1$. Since A_r centralizes $A_{r'}$, it follows that $U \cap U^a \neq 1$ for every $a \in A_r$. Therefore $k = 1$. This contradiction proves the lemma.

Lemma 16. *If $k > 2$ and A_r acts transitively on Ω for some $r \in \pi(A \cap N)$, then $A_r \cap N = \Pi_{i=1}^k (A_r \cap N_i)$ and $A_{r'} \cap N$ is isomorphic to a subgroup of $Out(N_1)$.*

Proof. Let A_r be transitive on Ω. Then $A_{r'}$ normalizes the subgroup N_1 by Lemma 15. Moreover, $A_r \cap N_1 \neq 1$. Since A_r is transitive on Ω, for every $i \leq k$ there exists $a \in A_r$ such that $N_1^a = N_i$. Therefore $C_{N_1}(A_{r'})^a = C_{N_i}(A_{r'})$. If $v = v_1 v_2 \dots v_k \in A_r \cap N$ with $v_i \in N_i$, then for any $u \in A_{r'}$ we have that $v_i^u = v_i$, so that $v_i \in C_{N_i}(A_{r'})$ for each $i \leq k$. By Lemma 2, this implies that $A_r \cap N = \Pi_{i=1}^k (A_r \cap N_i)$.

Suppose that $A_{r'} \cap C_G(N_1) \neq 1$. Since A_r is transitive on Ω, this implies $A_{r'} \cap C_G(N_1) = A_{r'} \cap C_G(N_i)$ for every $i \leq k$ and $C_G(N_1) \leq C_G(N) = 1$ in view of Lemma 11. Hence $A_{r'} \cap C_G(N_1) = 1$ and $A_{r'} \leq Out(N_1)$. The lemma is proved.

Now we will consider the minimal counterexamples to Theorems 1 and 2 separately.

Lemma 17. *Let $G = ABA$ be a minimal conterexample to Theorem 1. Then G is an almost simple group.*

Proof. Assume that the group G is not almost simple. By Lemma 11, $G = AN$, where $N = N_1 \times \cdots \times N_k$ is the minimal normal subgroup of G and the N_i are isomorphic non-abelian simple groups, where $k > 1$. Since A is abelian, the centralizer of every element $a \in A^{\#}$ is soluble. Hence $A \cap \hat{N}_i = 1$ for each $i \leq k$. By Lemma 14, $k = 2$. Since A acts transitively on the set $\Omega = \{N_1, N_2\}$, this implies that $2 \in \pi(A)$.

We have the following inequality:

$$|N_1|^2 \leq |A/(A\cap N)||A\cap N|^2|B|.$$

Since $A/(A\cap N) \simeq G/N$ is a subgroup of the wreath product $Out(N_1) \wr C_2$ and is abelian, it is clear that $|A/(A\cap N)| \leq 2a(N_1)$ and $|B/(B\cap N| \leq 2a(N_1)$. Denote by $c(N_1)$ the largest order of a cyclic subgroup of N_1. Then $|B\cap N| \leq c(N_1)^2$. Recall that $|A\cap N|^2 \leq |N_1|$, by Lemma 5. Therefore

$$|N_1| \leq 4a(N_1)^2|B\cap N| \leq 4a(N_1)^2c(N_1)^2.$$

If $N_1 \simeq L_n(q)$, then $c(N_1) = \dfrac{q^n-1}{(q-1)d}$ with $d=(q-1,n)$. The order of N_1 is $1/d \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=2}^n(q^i-1)$. Hence

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq \frac{4a(N_1)^2}{d}.$$

Since $a(N_1) < q^2$, this implies $q^{\frac{n(n-1)}{2}} < 4/d\cdot q^4$. Therefore $n<4$.

If $n=3, q=p^m$, then we have $q^3 < 16(q-1,3)(\log_p q)^2$. Thus $q\in\{2,4\}$. Assume that $n=3, q=2$. Then $|N_1| = 168$. In this case $|A\cap N| \leq 7$, $|A/A\cap N| \leq 4$, $|B\cap N| \leq 7\cdot 4$ and we have $7^2\cdot 3^2\cdot 2^6 = |N_1|^2 \leq 4^2\cdot 7^2\cdot 7\cdot 4$, a contradiction.

Assume that $n=3, q=4$. Then $|N_1| = 2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$. The largest order of a cyclic subgroup in N_1 is 8 and the largest order of an abelian subgroup is 16. Therefore

$$2^{12}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^2 = |N_1|^2 \leq 12\cdot 16^2\cdot 12\cdot 8^2,$$

a contradiction.

Consider the case $n=2$. Then $N_1 \simeq L_2(q),\ q=p^m$ and $a(N_1) = (2,q-1)\log_p(q)$. The largest order of an abelian subgroup of N_1 is q for odd q and $q+1$ for even q. This implies that

$$|N_1|^2 \leq 4a(N_1)^2|A\cap N|^2|B\cap N|.$$

If q is even, then $q^2(q^2-1)^2 = |N_1|^2 \leq 4(\log_2 q)^2(q+1)^2(q+1)^2$, which gives a contradiction for $q>4$.

If $q=p$ is an odd prime, then $|B\cap N| \leq q(q+1)/2$ and $|N_1|^2 = 1/4q^2(q^2-1)^2 \leq 16q^2\cdot 1/2q(q+1)$. This is possible only, when $q=5$. If $q=p^m$ with $m>1$, then $|B\cap N| \leq (q^2-1)/4$ and $1/4q^2(q^2-1)^2 \leq m^2 16q^2(q^2-1)/4 = 4m^2q^2(q^2-1)$. This implies that $(q^2-1) \leq 16m^2$, a contradiction.

Thus we need to consider the case $N_1 \simeq L_2(4) \simeq L_2(5)$. If $B\cap N_1 = B\cap N_2 = 1$, then $B\cap N$ is isomorphic to a cyclic subgroup of N_1 and then $|B\cap N| \leq 5$. This leads to a contradiction. If $B\cap N_1 \neq 1$, then $|B| \leq 30$. Hence $|N_1|^2 = 60^2 \leq 16\cdot 5\cdot 30$, which is a contradiction.

Assume that $N_1 \simeq U_n(q)$, $4\geq n\geq 3$. If $n=4$, then $c(N_1) = 1/d(q^3+1)$ with $d=(4,q+1)$. Let U be the largest abelian subgroup of N_1. By Theorem 3.1 in [24] we have the following. If $q=2$, then $|U| = 27$ for $q=2$, $|U| = q^4$ for odd q and $|U| \leq q^2(q^2+1)$ for $q>3$. We have the inequality:

$$|N_1|^2 = 1/d^2\cdot q^{12}(q^4-1)^2(q^3+1)^2(q^2-1)^2 \leq 4a(N_1)^2|A\cap N|^2|B\cap N|.$$

Using Lemma 7 we obtain a contradiction.

Suppose that $n=3$. Then $c(N_1) \leq q^2-1$ and the maximal order of an abelian subgroup in N_1 is at most $(q+1)^2$. As above, we obtain a contradiction.

Thus N_1 is not isomorphic to $L_n(q)$ or $U_n(q)$ for $n\leq 4$ and by Lemma 8, we may assume that $|Out(N_1)| \leq |N_1|^{1/8}$. Also $c(N_1) \leq |N_1|^{1/3}$. Then $|N_1|^{1/3} \leq (2a(N_1))^2$. In this case we have $|N_1|^{1/3} \leq 4|N_1|^{1/4}$, so that $|N_1| \leq 4^{12}$. It follows from [3] that the nonabelian simple groups N_1 of order less than 4^{12}, not considered above, are as follows: $U_5(2), M_{23}, M_{22}, M_{12}, M_{11}, J_2, J_1, Sz(8), A_n (7\leq n\leq 10)$. The largest order of an abelian subgroup of $Out(N_1)$ in these cases is 3 for $N_1 \simeq Sz(8)$ and 2 for all other subcases. Since $|N_1| \leq (2a(N_1))^6$, we have either $N_1 \simeq Sz(8)$, or $|N_1| \leq 2^{12}$. Since all linear groups are excluded by the above considerations, $N_1 \simeq Sz(8)$. Using [3] and proceeding as in the case of the linear groups, we exclude this possibility. The lemma is proved.

Lemma 18. *Let $G = ABA$ be a minimal conterexample to Theorem 2. Then G is an almost simple group.*

Proof. Assume that the lemma is false. Then $B \leq N$ and $N_G(A) = A \rtimes B_0$, where B_0 is a subgroup of B. If $r \in \pi(A)$ and A_r is a Sylow r-subgroup of G, then, by the choice of G the group $N_G(A_r) = H = A(H \cap B)A$ is soluble. Hence there exists a Hall $\pi(A)$-subgroup V of H containing A. Since $V = A(V \cap B)A$ and $(|B|, |A|) = 1$ this implies that $V = A$. Therefore A is a Hall subgroup of G. As before, $N = N_1 \times \cdots \times N_k$ is a minimal normal subgroup of G, where the N_i are isomorphic non-abelian simple groups, $k > 1$.

If $k = 2$, then $A_r \cap \hat{N}_i \neq 1$ for some $i \leq k$ and some $r \in \pi(A)$. This implies that $A_r \cap N_j \neq 1$ for each $j \leq k$, since A is a Hall subgroup of G. Hence $A_{r'}$ normalizes each subgroup N_i and has trivial intersection with every N_i. This implies that A_r is transitive on the set $\Omega = \{N_1, N_2\}$.

If $k > 2$, then, by Lemma 16, for some $r \in \pi(A)$ the subgroup A_r acts transitively on the set $\Omega = \{N_1, \ldots, N_k\}$ and $A_{r'} \cap N = 1$. Hence $A \cap N = A_r \cap N$.

Since $V = N_G(A_r \cap N)$ contains A, it is clearly A-invariant. By the minimality of G, the group V is soluble. Since A is a Hall subgroup of G and $A_{r'} \cap N = 1$ it follows that $(|A_{r'}|, |N|) = 1$. Hence there exists an r-complement T_i in $N_{N_i}(A_r \cap N_i)$, invariant with respect to $A_{r'}$. Therefore the subgroup $S = \Pi_{i=1}^k T_i$ is invariant with respect to $A_{r'}$ and $S \simeq \bar{S} = N_N(A_r \cap N)/(A_r \cap N)$. It follows from Lemma 3, applied to $\bar{S}$ in the place of H and $\bar{A} = A/(A_r \cap N)$ instead of A, that $\bar{S} = \cup_{a \in \bar{A}} B_1^a$ for some cyclic subgroup B_1 in $\bar{S}$. Recall that S is soluble. Moreover, every Sylow subgroup of odd order in S is elementary abelian by [18].

The subgroup A_r acts transitively on the set $\{T_1, \ldots T_k\}$ modulo $A_r \cap N$, k is a power of r and $A_{r'}$ normalizes every T_i. Since $N_G(A_r)$ is soluble, the subgroups T_i are also soluble. Choose an abelian characteristic subgroup E_i in T_i modulo $A_r \cap N$. It follows that the subgroups $\langle t_1 t_2 \rangle$ and $\langle t_1 \rangle$ for $t_1 \in E_1^\#$ and $t_2 \in E_2^\#$ of the same order are not conjugate modulo $A_r \cap N$. This contradicts Lemma 3.

Therefore $N_N(A_r \cap N) = A_r \cap N$. If $r > 2$, then N_i is not simple by the theorem in [13]. If $r = 2$ and $N_i \cap A$ is not maximal in N_i, there exists a proper maximal subgroup V of G, containing A such that $N_i \cap V$ has order divisible by a prime $s > 2$. By the choice of G, the subgroup V is soluble and we may apply similar arguments to exclude this case.

Hence $N_i \cap A$ is a maximal subgroup of N_i. It follows from [4] that $N_i \simeq L_2(p)$ for a prime p of the form $p = 2^m - 1 > 7$. In this case A is a 2-group, which is not the case. This contradiction proves the lemma.

3. Proof of the theorems

3.1. Proof of Theorem 1

By Lemma 17, we must consider an almost simple group$G$ with socle N, which is non-abelian simple. The proof of Theorem 1 for a simple group is already contained in [23]. Therefore we need to consider only the case, when $G \neq N$. Thus $G = AN$ and

$$|N| \leq |G/N||A \cap N|^2|B| \leq |G/N|^2|A \cap N|^2|B \cap N|.$$

The orders of the maximal abelian subgroups in S_n are determined in [24], so that the case of the alternating groups can be excluded by direct calculations.

If N is a sporadic simple group, then the largest order of an abelian subgroup in $Aut(N)$ is stricty less than $|Aut(N)|^{1/3}$ (see [3]). Therefore these groups are not difficult to deal with, which also applies to the following 'small' groups: ${}^2F_4(2)', {}^3D_4(q), q \leq 3, G_2(3)$. Note that $G_2(2)' \simeq U_3(3)$. Thus all these groups cannot occur.

Now consider the case, when N is isomorphic to a group of Lie type over the field $GF(q)$ of characteristic p. We distinguish two cases. The first is when the order of $A \cap N$ is divisible by p. And the second when $A \cap N$ contains no elements of order p, i.e. $A \cap N$ is semisimple.

Let first $|A \cap N|$ be divisible by p. Then there exists a parabolic maximal subgroup of N, containing $A \cap N$. By the minimality of G, this subgroup is soluble. The inspection of the Dynkin diagram of N and the remarks above, show that only the following possibilities can occur: $L_2(q)$, $q > 3$, and for $q \in \{2, 3\}$ the groups $L_3(q), L_4(q)$, $U_3(q), U_4(q)$, $P\Omega_7(q), PSp_{2n}(q), n \leq 3$, $P\Omega_8^{\pm}(q)$.

Now let $|A \cap N|$ be coprime to p. By Lemma 4, the order $|A \cap N| \leq 1/d(q+1)^r$, where r is the Lie rank of the corresponding group. Using upper bounds for the orders of the cyclic subgroups of the considered groups, the following groups remain: $L_2(q), q > 3, L_n(q), 3 \leq n \leq 4$ with $q \in \{2, 3, 5, 9\}$, $U_n(q), 3 \leq n \leq 4$, $PSp_4(q)$, with $q \in \{2, 3\}$, ${}^2G_2(q), {}^2B_2(q) = Sz(q)$.

It is easy to see that these lists have many groups in common. Consider first the classical groups. The largest orders of the abelian subgroups of the corresponding simple groups are computed in [24, Theorem 3.1]. The maximal order of an abelian subgroup in N will be denoted in the sequel by $\mathfrak{a}(N)$.

Case 1. $N \simeq L_4(q)$. Here $\mathfrak{a}(N) = q^4$. The largest order of a cyclic subgroup in N is $(q^4 - 1)/(q - 1)d$, where $d = (q - 1, 4)$. The order of N is at least q^{14}/d. It should be noted that A does not contain a field automorphism, since the centralizer of every element in $A \setminus \{1\}$ is soluble. Therefore $q^2 < 4d^3$. This is impossible for $d = 1$, so that q is odd. An easy computation shows that the possible candidates for q belong to the set $\{3, 5, 9\}$. Using the order formula of N, it is easy to exclude these subcases.

Case 2. $N \simeq L_3(q)$. Here $|N| = 1/d \cdot q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1)$, $d = (q - 1, 3)$, $\mathfrak{a}(N) = (q^2 + q + 1)$ for $d = 1$ and $\mathfrak{a}(N) = q^2$ for $d = 3$. The maximal order of a cyclic subgroup of N is $(q^2 + q + 1)/d$. Proceeding as in the previous case, we conclude that the possible values for q are contained in the set $\{2, 4\}$. If $q = 2$, then $N = L_3(2) \simeq L_2(7)$ and $G \simeq PGL_2(7)$. This group has no factorizations of the form $G = ABA$ with abelian factors A and B. If $q = 4$, then the parabolic maximal subgroups of N are non-soluble. Hence $|A \cap N|$ is odd. The maximal order of an abelian subgroup of N is $(q^2 + q + 1)/3$, so this case cannot occur.

Case 3. $N \simeq L_2(q)$. We may assume that G does not contain a field automorphism. If q is odd, then the possible values for $|A \cap N|$ are q and $(q + 1)/2$. Since $AN = G \neq N$, we may assume that $G = PGL_2(q)$. Note that the Sylow p-subgroup P of N is a self-centralizing TI-subgroups of N. Hence we may assume that A is of order q or $q + 1$. By Lemma 1, the order of B is divisible by $(q - 1)/2 = |N_N(P)/P|$ in the first case. An easy computation shows that this is impossible. If $|A| = q + 1$, then either $|B| = q - 1$, or $|B| = q + 1$. The case $|B| = q$ is impossible, since $|N_G(A)| = 2(q + 1)$. The subgroup A is a TI-subgroup of $G = PGL_2(q)$. We have

$$G = N_G(A) \cup_{b \in B \setminus N_B(A)} AbA = N_G(A) \cup_{b \in B \setminus N_B(A)} N_G(A)bN_G(A).$$

It follows that $q(q^2 - 1) = 2(q + 1) + 2t(q + 1)^2$ for some $t \leq |B|/2$. In particular, $t = (q - 2)/2$. However, q is odd and t is integer, a contradiction.

Assume that q is even. Then, as above, there is only one possibility, namely $G = ABA$ with abelian A and B: $|A| = q + 1, |B| = q$. But in this case B is non-cyclic.

Case 4. $N \simeq U_4(q)$. Proceeding as in the previous cases, we exclude all possibilities except $q = 2$. The order of N is $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$, and this group is isomorphic to $PSp_4(3)$ with $|Out(N)| = 2$ (see [3]). Then $\mathfrak{a}(N) = 3^3$. Since $G \neq N$, the order of A must be even. It follows from the character table of N that $|A \cap N| \leq 2 \cdot 3^2$. Since the largest order of a cyclic subgroup of N does not exceed 9, this gives a contradiction.

Case 5. $N \simeq U_3(q)$. Here we proceed as in the Case 2 to obtain a contradiction.

Case 6. $N \simeq PSp_{2n}(q)$ or $N \simeq P\Omega_{2n+1}(q)$ with $q \in \{2, 3\}$, $n \in \{2, 3\}$. Suppose first that $n = 2$. It is well-known that $PSp_4(q) \simeq \Omega_5(q)$. If $|A \cap N|$ is divisible by the characteristic p of the field $GF(q)$, then $q = 2$ or 3. The case $q = 3$ was already considered and $PSp_4(2) \simeq S_6$ does not occur by the above arguments. The subcases $n = 3$ are even easier to handle.

Case 7. $N \simeq P\Omega_8(q)^{\pm}, q \in \{2,3\}$. Let first $q=2$. In this case $|A \cap N| \leq 3 \cdot 2^6$, by Theorem 3.1 in [24]. The order of the outer automorphism group of N is 6. Moreover, the group G/N is abelian and so $|G/N| \leq 3$. The order of a semisimple maximal abelian subgroup of N does not exceed 3^4. An easy calculation excludes this case.

If $q=3$, then $|A \cap N| \leq 2^3 \cdot 3^6$ (see Theorem 3.1 in [24]). The full outer automorphism group $Out(N)$ is isomorphic with S_4. Hence $|A/A \cap N| \leq 4$. Now an easy calculation excludes this possibility for N.

Note that the group $P\Omega_8^-(q)$ has no soluble maximal subgroups (see [6]), so that these groups also cannot occur.

Case 8. $N \simeq^2 B_2(q) \simeq Sz(q)$, or $N \simeq^2 G_2(q)$. For groups ${}^2B_2(q)$ we have $\mathfrak{a}({}^2B_2(q)) = 2^{3n+1}, q = 2^{2n+1}$ and $\mathfrak{a}({}^2G_2(q)) = q^2$ (see [20; 25]) , which excludes these groups. The theorem is proved.

3.2. Proof of Theorem 2

By Lemma 18, we have to consider an almost simple group $G = AKA$ with a nonabelian simple socle N , where A is a nilpotent Hall subgroup of G and K is cyclic. Moreover, $G = AN$ and every proper subgroup of G containing A is soluble. The subgroup K is contained in N. In the following we slightly change the notation replacing B by K to avoid confusions in dealing with groups of Lie type, where the standard notation is preferable. Indeed, the alternating groups and the sporadic simple groups are easy to handle, so we will consider only groups G with the socle N which is a group of Lie type.

As in the proof of Theorem 1, for a group N of Lie type we distinguish the following subcases: $A \cap N$ is a subgroup of a parabolic maximal subgroup of N, or the characteristic p of the field of definition of N, does not divide the order of $A \cap N$.

Consider first the case, when N is a simple group of Lie type over the field $GF(q)$ and the characteristic p divides $|A \cap N|$. This implies that a Sylow p-subgroup U of N is contained in $A \cap N$. It is well-known that this subgroup contains its centralizer. Therefore, $A \cap N = U$ is a p-group. Moreover, by Lemma 2, the complement H of U in its normalizer B in N is conjugate to the so-called Cartan subgroup of N.

By the Frattini lemma, $G = NN_G(U)$. Hence the factor group $N_G(U)/U$ has a factorization $\bar{A}\bar{K}\bar{A}$ with $\bar{A} \simeq A/U, \bar{K} \simeq KU/U$. In all cases with the possible exception $N = P\Omega_8^+(q)$ we have that $N_G(U) = \hat{U}H_1$ for some Sylow p-subgroup $\hat{U}$ of G containing U and a cyclic subgroup $H_1 \leq K$. The case $N = P\Omega_8^+(q), q$ a power of 3, leads to the conclusion that K is non-cyclic and so does not occur. Since every parabolic maximal subgroup of N, containing $A \cap N$ is soluble, we have only to consider the following groups N of Lie type: $L_2(q), U_3(q), {}^2B_2(q), {}^2G_2(q)$, i.e. the groups of Lie rank 1.

If $N \simeq L_2(q)$, then the Sylow p-subgroup U of N is of order q and $N \leq G \leq Aut(N)$. Clearly, $A \cap N$ has order q. Denote by f the order of G/N. Then $|G| = |AKA| = f|N| \leq f^2|A \cap N|^2|K|$. On the other hand, the subgroup H of N with order $q-1$, normalizing U, is contained in K. Since there is no cyclic subgroup of N containing H as a proper subgroup, we conclude that $AKA = AK < G$, a contradiction.

If $N \simeq U_3(q)$, then the subgroup H of order $(q^2-1)/(3, q+1)$, normalizes $U \in Syl_p(N)$. As before, there is no subgroup K in N, containing the complement H of U in its normalizer as a proper cyclic subgroup, which is not the case. The subcase $N \simeq^2 G_2(q)$ is excluded similarly.

Observe that N is not isomorphic to ${}^2B_2(q) \simeq Sz(q)$ because q is even.

Now we may assume that $A \cap N$ contains no elements of order p. By Theorem 1 the subgroup A is non-abelian. By Lemma 10 and results of [6], we have to consider the following possibilities for N:

$L_n(q), n \leq 8, U_n(q), n \leq 8, U_9(2), U_{12}(2), PSp_{2n}(q), n \leq 4, P\Omega_8^+(q), A_n$, $n \in \{16, 12, 9, 8, 7, 6, 5\}$ and the sporadic and exceptional simple groups of Lie type over a small field.

Case 1. $N \simeq L_n(q), n \leq 8$. Then A is a non-abelian Sylow 3-subgroup of $G = AN$ and 3 is not the characteristic of the field $GF(q)$. By Table 16 in [6] this is only the case when $N = L_6(2)$, $L_5(2)$, or $L_n(q), n \leq 3$. If $N = L_n(2), n = 6$ or 5, then a Sylow 3-subgroup of N is either abelian, or is not a Sylow 3-subgroup of a soluble maximal subgroup of N. If $n = 3$, then the order of a Sylow 3-subgroup of N is at most $3(q-1)^2$. An easy calculation shows that there is no factorization of the required form in this case. If $n = 2$, then all Sylow s-subgroups of N for $s > 2$ are abelian and since the centralizer of the field automorphism must contain a Hall subgroup of N, this is also impossible.

Case 2. $N \simeq U_n(q)$. If $n = 12, q = 2$, then the order of N is at least 2^{132}, whereas the order of a Sylow 3-subgroup of G is at most 3^{15}. But since the order of a cyclic subgroup of N is at most 3^{12}, there is no required AKA-factorization in this case.

If $n = 9$, then the order of N is at least 2^{72}, whereas the order of a Sylow 3-subgroup of G and of N is at most 3^{10}. As above, this is a contradiction. For the case $U_6(2)$ we use Table 18 in [6]. The order of a Sylow 3-subgroup of N is 3^6, whereas the order of N is at least 2^{30}. As above, this is impossible. The cases $n = 5, q = 2$, $n = 4, q = 3$ or a power of 2 are treated similarly. The remaining cases $n = 4$ or 3, when the Hall subgroup A of G is abelian, are already covered by Theorem 1.

Case 3. $N \simeq PSp_{2n}(q), n \in \{2, 3, 4\}$. This situation is described by Table 17 in [6]. The order of N is at least q^{2n^2} and the subcases where S is a Sylow 3-subgroup of N are excluded as before. The only remaining case $N = PSp_4(q)$ leads to an abelian Hall subgroup, and so is covered by Theorem 1.

Case 4. $N \simeq P\Omega_8^+(q)$. Now all subcases, where a Hall subgroup of a soluble maximal subgroup of G contains a non-abelian nilpotent Hall subgroup K, which is not a p-group for the characteristic p of the field $GF(q)$, or a 2-group can easily be excluded. The only remaining possibility is $N = P\Omega_8^+(2)$ with a Sylow 3-subgroup S. Using [16], we see that A is of order 3^5 and G contains a triviality automorphism. A direct computation also excludes this case.

Case 5. $N \simeq A_n$ for $n \in \{16, 12, 5 \leq n \leq 9\}$. In all these cases $A \cap N$ is a 3-group. Since the order of A is odd, $G = N$. An easy calculation excludes this possibility.

Case 6. N is an exceptional group of Lie type over $GF(q)$, where $q \leq 3$ and $A \cap N$ is a Sylow 3-subgroup, or a sporadic simple group, where $A \cap N$ is a Sylow s-subgroup. Using [3] and [6], Theorem 1.1, we easily calculate that this is also impossible. This proves the theorem.

4. Additional remarks

1^0. Every 2-transitive permutation group is an ABA-group where A the stabilizer of a point and the subgroup B is not contained in A. Other examples arise from the natural factorizations of the simple groups of Lie type.

Let G be a simple group of Lie type over a field of characteristic p, and let U be a Sylow p-subgroup of G. Then $B = N_G(U) = UH$ is the Borel subgroup of G and and H is its Cartan subgroup. Furthermore $N \leq N_G(H)$ and $W \simeq N/H$ is the Weyl group of G. Thus we have the factorization $G = BNB = UNU$.

A simple example of this is the following factorizations of the alternating group $G = A_5$. If A is a Sylow 5-subgroup of G and B a Sylow 2-subgroup of G, then $G = ABA$, where A and B are both abelian and A is cyclic. Another factorization of G has the form ABA, where A is a Sylow 2-subgroup of G and B is a dihedral group of order 6.

Another example is given by the symmetric group $G = S_5$ of degree 5. Let A be a Sylow 2 subgroup of G, contained in the subgroup $A_1 = S_4$ of order 24. This subgroup is the stabilizer of a point 5 in S_5. Since G is a 2-transitive permutation group, it follows that $G = A_1BA_1$ for every subgroup B, not contained in A_1. If B is the subgroup, generated by the element b of the form $(1, 2, 3)(4, 5)$ then the order of $B = \langle b \rangle$ is 6. Since the product AC of the subgroup $C = \langle (1, 2, 3) \rangle$ and 2-subgroup A of S_4 is A_1, we have $G = A_1BA_1 = ACBCB = ABA$. Observe that this is an example of a non-soluble ABA-group with a nilpotent subgroup A and a cyclic subgroup B.

The alternating group $G = A_6$, also has an ABA-factorization, where A is a Sylow 3-subgroup of G and B a dihedral group of order 8. In another ABA-factorization for the symmetric group $G = S_6$ (first observed by Ya.P. Sysak) the subgroup A is a Sylow 2-subgroup of G and B is a dihedral group of order 8.

2^0. By Burnside's well-known p^α-lemma a finite group G which contains an element z, whose centralizer has prime-power index, is not simple. But it was proved in [14] that $\langle z^G \rangle$ is soluble in this case, and A. and R. Camina have shown that the commutator subgroup of $\langle z^G \rangle$ is even a p-group, as is mentioned in [7]. Using the classification of all finite simple groups, the authors of [7] obtain the above result from [14] in the following way. If in the group G for any $a, b \in G$ the index of the centralizer of z in the subgroup $\langle a, b, z \rangle$ is a prime-power, then the index of the centralizer of z in G is also a prime-power.

The proof of the result in [14] is reduced to the case, when $G = X\langle z \rangle$ with a simple group X, z an element of prime order $r \neq p$. Finally, at the end of the proof $\langle z^G \rangle$ is an extension of a p-group by $\langle z \rangle$. In particular, $L = \langle z, z^g \rangle \neq \langle z \rangle$ is p-closed for every $g \in G \setminus C_G(z)$.

Using the theorem due to P. Flavell and G.R. Robinson in [9], for a group G with this property, it is easy to see that $G = O_p(G)C_G(z)$.

This situation is related to ABA-factorizations as follows. Let z be an element of prime order $r \neq p$ in G such that $\langle z, z^g \rangle = O_p(\langle z, z^g \rangle)\langle z \rangle \neq \langle z \rangle$ for every $g \in G \setminus C_G(z)$. Then $G = ABA$, where B is a p-group and $A = C_G(z)$, where the element z normalizes B.

Conversely, let the group $G = ABA$ be the product of a p-subgroup B and an arbitrary subgroup A. If $z \in Z(A)$ is of prime order $r \neq p$ normalizing B, then the subgroup $\langle z, z^g \rangle$ is p-closed for every $g \in G \setminus C_G(z)$. Indeed, $g = aba_1$ with $a, a_1 \in A$ and $b \in B$. Thus $\langle z, z^g \rangle = \langle z, z^{ba_1} \rangle = \langle z, z^b \rangle^{a_1}$ is p-closed.

3^0. It is well-known, that if $G = AB$ is a finite group, then $O_p(A) \cap O_p(B) \leq O_p(G)$ for every prime p (see for instance [15]). This implies that a finite simple group of Lie type cannot be the product of two of its proper parabolic subgroups. This fact can be used to give a simple proof of the corresponding result on arbitrary simple groups of Lie type (even in the infinite case).

Every simple group G of Lie type is the product $G = BNB$ with its Borel subgroup B, the Cartan subgroup H and $N/H = W$ its Weyl subgroup. Assume that a simple group G of Lie type has a factorization of the form $G = X_1X_2$ with proper parabolic subgroups X_1 and X_2. It is well-known that every parabolic subgroup X_i of G has a factorization $X_i = BN_iB$ with $N_i/C \simeq W_i \leq W$ (see [19]). It follows from the properties of the Bruhat decomposition that a factorization $G = X_1X_2$ for two proper parabolic subgroups X_1 and X_2 of G can occur only when $W_1W_2 = W$. However, if this is the case, then the corresponding finite simple group with the same root system has a factorization as the product of two proper parabolic subgroups. This is impossible.

REFERENCES

1. **Alavi S.H., Praeger C.E.**, On triple factorizations of finite groups // J. Group Theory. 2011. Vol. 14, no. 3. P. 341–360.
2. **Amberg B., Kazarin L.** On the product of a nilpotent group and a group with non-trivial center // J. Algebra. 2007. Vol. 311, no. 1. P. 69–95.
3. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 250 p.
4. **Baumann B.** Endliche nichtauflosbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppe // J. Algebra. 1976. Vol. 38, no. 1. P. 119 –135.
5. **Brauer R., Fong P.** On the centralizers of p-elements in finite groups // Bull. London Math. Soc. 1974. Vol. 6. P. 319–324.
6. **Li C.H., Zhang H.** The finite primitive groups with soluble stabilizers and the edge-primitive s-arc transitive graphs // Proc. London Math. Soc. (3). 2011. Vol. 103, no. 3. P. 441–472.
7. **Camina A., Shumyatsky P., Sica C.** On elements of prime power index in finite groups // J. Algebra 2010. Vol. 323, no. 2. P. 522–525.
8. **Carter R.** Simple groups of Lie type. New York: Wiley-Interscience, 1972. 364 p.

9. **Flavell P., Robinson G.R.** Fixed points and coprime automorphisms and geneneralization of Glauberman's Z^*-theorem // J. Algebra. 2000. Vol. 226, no. 2. P. 714–718.
10. **Gorenstein D., Herstein I.N.** A class of solvable groups // Canad. J. Math. 1959. Vol. 11. P 311–320.
11. **Gorenstein D.** On finite groups of the form ABA // Canad. J. Math. 1962. Vol. 14. P. 195–236.
12. **Guterman M.** On ABA-groups of finite order // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 139. P. 109–143.
13. **Guralnick R.M., Malle G., Navarro G.** Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 132, no. 4. P. 973–979.
14. **Kazarin L.S.** Burnsides p^α-lemma // Math. Notes. 1990. Vol. 48, no. 1-2. 749–751.
15. **Kazarin L.S.** On the product of two groups that are close to being nilpotent // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1981. Vol. 38 (1). P. 47– 59.
16. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal $P\Omega_8^+(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1987. Vol. 110, no. 1. P. 173–242.
17. **Seitz G.M.** The root subgroups of maximal tori in finite groups of Lie type // Pacific J. Math. 1983. Vol. 106, no. 1. P. 153–244.
18. **Shult E.** On finite automorphic algebras // Ill. J. Math. 1969. Vol. 13. P. 625–653.
19. **Steinberg R.** Lectures on Chevalley groups. Yale: Yale University, 1967. 554 p.
20. **Suzuki M.** On a class of double transitive groups // Ann. of Math. (2). 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
21. **Sysak Ya.P.** Finite groups of the form ABA // Algebra and Logic. 1982. Vol. 21, no. 3. P. 234–241.
22. **Сысак Я.П.** О строении конечных ABA-групп с абелевой подгруппой A и циклической подгруппой B // Строение групп и их подгрупповая характеризация. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. С. 33–46.
23. **Vdovin E.P.** Large nilpotent subgroups of finite simple groups // Algebra and Logic. 2000. Vol. 39, no. 5. P. 301–312.
24. **Vdovin E.P.** Maximal orders of abelian subgroups in finite simple groups // Algebra and Logic. 1999. Vol. 38, no. 2. P. 67–83.
25. **Ward H.N.** On Ree's series of simple groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 121. P. 62–80.
26. **Загорин Д.Л, Казарин Л.С.** Абелевы ABA-факторизации конечных групп // Докл. АН СССР. 1996. Т. 45, № 5. С. 590–592.

Amberg Bernhard
Ph.D. Professor
Johannes Gutenberg-Universität, Mainz
e-mail: Bernhard.Amberg@t-online.de

Received January, 30, 2012

Казарин Лев Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой алгебры и мат. логики
Ярославский гос. университет им. П.Г. Демидова
e-mail: kazarin@uniyar.ac.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.41/47

THREE S.N. CHERNIKOV'S QUESTIONS

N. S. Chernikov

The author shows: the class of all periodic non-locally finite and non-locally nilpotent FNN-groups is non-empty and wide; an arbitrary binary graded $\overline{IH}$-group is solvable. At the same time, the author solves three natural S.N.Chernikov's questions. Also the author establishes that a non-Chernikov non-abelian group with normal such subgroups is solvable iff it is binary graded.

Keywords: an FNN-group, a locally nilpotent group, a locally finite group, a locally graded group, a binary graded group.

Remind the definition.

D e f i n i t i o n 1 (S.N.Chernikov [1, P. 201]). The group G is called an FNN-group if for any its subgroup $K \neq 1$ and any finitely generated subgroup $L \neq K$ of K, $N_K(L) \neq L$.

Clearly, an arbitrary locally nilpotent group is an FNN-group.

The following questions are very natural.

Q u e s t i o n 1 (S.N.Chernikov [1, P. 201]). Does the class of all FNN-groups coincide with the class of all locally nilpotent groups?

Q u e s t i o n 2 (S.N.Chernikov [1, P. 201]). Is an arbitrary periodic FNN-group locally finite?

The following author's theorem solves in the negative these questions and, in particular, shows: for any odd prime p, the class of all infinite finitely generated simple p- and FNN-groups is large.

Remind: for the group G, $\pi(G)$ is the set of all primes p for which G has an element of order p; anti-normal subgroups of G are just its subgroups $B \neq G$ such that $\forall g \in G \setminus B$, $B \cap B^g = 1$.

Theorem 1. *Let H and A be (periodic) at most countable respectively FNN- and abelian groups such that: even if one of them is not finitely generated, $2 \notin \pi(H) \cup \pi(A)$ and $H \times A$ possesses an element of order $> 10^{99}$. Then the group $H \times A$ is an anti-normal maximal subgroup of some (periodic) infinite simple 2-generator FNN-group G with conjugate maximal subgroups; the group G is non-locally finite and non-locally nilpotent and $\pi(G) = \pi(H) \cup \pi(A)$.*

Proof. According to S.V. Ivanov's Theorem [2; 3], the group $H \times A$, as any group without elements of order 2 and with an element of order $> 10^{99}$, is a maximal subgroup of some infinite 2-generator group G with anti-normal and conjugate maximal subgroups. Clearly G is non-locally finite.

Let $M \neq G$ be a normal subgroup of G. Since G is finitely generated, M belongs to some maximal subgroup V of G. Let $u \in G \setminus V$. Then $M = M \cap M^u \subseteq V \cap V^u = 1$. Thus G is simple. Consequently, it is non-locally nilpotent.

Let $g \in G$. Then g belongs to some maximal subgroup of G. So for some $x \in G$, $g^x \in H \times A$. Consequently, $\pi(G) = \pi(H \times A)$ and in the case of periodic H and A, G is periodic. Obviously $\pi(H \times A) = \pi(H) \cup \pi(A)$.

Show that G is an FNN-group. Let $K \neq 1$ be a subgroup of G and $L \neq K$ be a finitely generated subgroup of K.

First, suppose that $K \neq G$. For some $b \in G$, $K \subseteq (H \times A)^b$. Since obviously $A^b \subseteq Z((H \times A)^b)$, $N_K(L) \neq L$ if $K \cap A^b \neq L \cap A^b$. Let $K \cap A^b = L \cap A^b$. Then $KA^b/A^b \neq LA^b/A^b$. Further, LA^b/A^b is finitely generated, $(H \times A)^b/A^b \simeq H^b$ and H^b is an FNN-group. Consequently, for some $c \in K \setminus L$,

$cA^b \in (KA^b/A^b) \setminus (LA^b/A^b)$ and cA^b normalizes LA^b/A^b. Then, clearly, $c \in N_K(K \cap LA^b)$. In view of Dedekind's Lemma, $K \cap LA^b = L(K \cap A^b)$. So $K \cap LA^b = L(L \cap A^b) = L$. Thus $c \in N_K(L) \setminus L$.

Let $K = G$. For some $u \in G$, $L \subseteq (H \times A)^u = \overline{K}$. Since $\overline{K}/H^u$ or $\overline{K}/A^u$ is not finitely generated, $\overline{K}$ is not finitely generated. Consequently $L \neq \overline{K}$. Therefore as above, $N_{\overline{K}}(L) \neq L$. So $N_G(L) \neq G$.

Theorem is proven.

Recall that a group, in which all subgroups are normal, is called Dedekind. A non-abelian Dedekind group is called Hamiltonian. Remarkeble Dedekind's [4] and Baer's [5] Theorems give complete exhaustive description of finite and arbitrary Dedekind groups respectively.

Remind the definition.

D e f i n i t i o n 2 (S.N.Chernikov [6; 7; see also 8]). An infinite non-abelian group with normal infinite non-abelian subgroups is called an $\overline{IH}$-group.

The $\overline{IH}$-groups represent a natural generalization of infinite Hamiltonian groups. Infinite locally quaternion and locally dihedral 2-groups are easy examples of non-Hamiltonian $\overline{IH}$-groups. The outstanding A.Yu.Ol'shanskii's Examples of infinite simple groups with finite proper subgroups (see, for instance, [9–11]) are, of course, examples of non-Dedekind $\overline{IH}$-groups. A series of S.N.Chernikov's theorems [6; 7] (see also [8, chapter 6]) uncovered the structure of solvable $\overline{IH}$-groups.

Remind the definition.

D e f i n i t i o n 3 (S.N.Chernikov [6; 12, P. 20]). A group, in which every finitely generated (respectively every 2-generator) subgroup $\neq 1$ possesses a subgroup of finite index $\neq 1$, is called locally (respectively binary) graded.

The class of all locally graded groups is very wide. For instance, it includes: all locally finite, locally solvable, residually finite, linear, radical is the sense of B.I.Plotkin groups; all Kurosh-Chernikov classes of groups [13]. The class of all binary graded groups includes the classes of all locally graded, binary finite, binary solvable groups. S.N.Chernikov [6; 7] has established the theorem.

A locally graded $\overline{IH}$-group is solvable.

In connection with this theorem the following natural question was raised by S.N.Chernikov.

Q u e s t i o n 3 (S.N.Chernikov, [12, P. 20]). Are binary graded $\overline{IH}$-groups solvable?

Theorem of S.N.Chernikov mentioned above is an immediate consequence of the following author's theorem, which gives an affirmative answer to the last question.

Theorem 2. *Let G be an $\overline{IH}$-group. Suppose that it is binary graded or even though the intersection R of all its infinite non-abelian subgroups satisfies the following condition*:

$(*)$ for any $g, h \in R$, the subgroup $\langle g, g^h \rangle$ contains a subgroup of finite index $\neq 1$ whenever g is of infinite order or the subgroup $\langle g, h \rangle$ is periodic and also for some odd prime p, g is a p-element $\neq 1$ and $[g^p, h] = 1$.
Then G is solvable.

Proof. For any infinite non-abelian subgroup M of G, obviously, G/M is Dedekind. So in view of Baer's Theorem [5], G/M is metabelian, i.e. $G'' \subseteq M$. Therefore $G'' \subseteq R$, i.e. G/R is metabelian. Further, R has no infinite proper non-abelian subgroups and, at the same time, satisfies the minimal condition on non-abelian subgroups. Therefore in view of Theorem B [14; 15], R is Chernikov or abelian. So R has some normal in G abelian subgroup A with $|R : A| < \infty$. Then $G/C_G(R/A)$ is finite and, with regard to that $(C_G(R/A) \cap R)/A = Z(R/A)$ and G/R is solvable, $C_G(R/A)$ is solvable. Let H be the intersection of all non-abelian subgroups of G containing $C_G(R/A)$. Since $H \supseteq R$, G/H is solvable. Since $H/C_G(R/A)$ is a finite group without non-abelian proper subgroups, by Miller-Moreno Theorem [16], $H/C_G(R/A)$ is metabelian. Thus $G/C_G(R/A)$ is solvable. Theorem is proven.

Note that the definition of a binary graded group was erroneously introduced as a new definition in [14; 15].

Theorem 3. *Let G be a non-Chernikov non-abelian group with normal non-Chernikov non-abelian subgroups. Suppose that it is binary graded or even though the intersection R of all its non-Chernikov non-abelian subgroups satisfies the condition $(*)$ above. Then G is solvable.*

Proof. Repeat the proof of Theorem 2 with the following changes: "For any non-Chernikov non-abelan subgroup M of G, obviously, ..."; "Futher, R has only Chernikov and abelian proper subgroups or $R = 1$, and, at the same time, ...".

REFERENCES

1. **Chernikov S.N.** An investigation of groups with prescribed properties of their subgroups // Ukrain. Mat. Ž. 1969. Vol. 21, no. 2. P. 193–209 (in Russian).
2. **Ivanov S.V.** Three theorems on the imbedding of groups // XI All-Union symp. theory groups (Kungurka, 31.01–02.02.1989): Thes. talks. Sverdlovsk: Ural Branch Acad. Sci. USSR, 1989. P. 51–55 (in Russian).
3. **Ivanov S.V., Ol'shanskii A.Yu.** Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory // London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1991. Vol. 160. P. 258–308.
4. **Dedekind R.** Über Gruppen, deren sämmtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. 1897. Vol. 48. S. 548–561.
5. **Baer R.** Situation der Untergruppen und Structur der Gruppe // Sitz. Ber. Heidelberg Akad. 1933. Vol. 2. S. 12–17.
6. **Chernikov S.N.** Infinite non-abelian groups with the condition of invariance for infinite non-abelian subgroups // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1970. Vol. 194, no. 6. P. 1280–1283 (in Russian).
7. **Chernikov S.N.** Infinite non-abelian groups where all the infinite non-abelian subgroups are invariant // Ukrain. Mat. Ž. 1971. Vol. 23, no. 5. P. 604–628 (in Russian).
8. **Chernikov S.N.** Groups with prescribed properties of the system of subgroups. Moskva: Nauka, 1980. 384 p (in Russian).
9. **Ol'shanskii A.Yu.** Infinite groups with cyclic subgroups // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1979. Vol. 245, no. 4. P. 785–787 (in Russian).
10. **Ol'shanskii A.Yu.** An infinite group with subgroups of prime order // Izvestija Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1980. Vol. 44, № 2. P. 309–321 (in Russian).
11. **Ol'shanskii A.Yu.** Geometry of defining relations in groups. Moskva: Nauka, 1989. 448 p (in Russian).
12. **Chernikov S.N.** Infinite groups defining by properties of the system of infinite subgroups // VI All-Union symp. theory groups (Coll. works). Kiev: Nauk. dumka, 1980. P. 5–22 (in Russian).
13. **Kargapolov M.I., Merzljakov Yu.I.** Fundamentals of the theory of groups. Moskva: Nauka, 1972. 240 p (in Russian).
14. **Chernikov N.S.** Groups with minimal conditions // Fundamental. i prykl. matematika. 2008. Vol. 14, no. 5. P. 219–235 (in Russian).
15. **Chernikov N.S.** Groups with minimal conditions // J. Math. Sci. 2009. Vol. 163, no. 6. P. 774–784.
16. **Miller G.A., Moreno H.C.** Non-abelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. Vol. 4, no. 4. P. 398–404.

Received December, 27, 2011

Chernikov Nickolay Sergeevich
Dr. phys.-math. Sci.
leading scientific researcher
Institute of Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine
3, Terecshenkivska str., 01601, Kuiv-4, Ukraine
e-mail: chern@imath.kiev.ua

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.54+519.17

A NOTE ON THE EXTENDABILITY OF AN ISOMORPHISM OF SUBGRAPHS OF A GRAPH TO AN AUTOMORPHISM OF THE GRAPH[1]

V. I. Trofimov

Let Γ be an undirected connected locally finite graph such that its automorphism group is vertex-transitive and has finite vertex stabilizers. For a vertex v of Γ and a non-negative integer n, let $\langle B_\Gamma(v,n)\rangle_\Gamma$ denote the subgraph of Γ generated by the ball $B_\Gamma(v,n)$ of radius n with center v. We prove that there exists a non-negative integer c (depending only on Γ) such that, for any vertices x and y of Γ and any non-negative integer r, if an isomorphism of $\langle B_\Gamma(x,r)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(y,r)\rangle_\Gamma$ can be extended to an isomorphism of $\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(y,r+c)\rangle_\Gamma$, then it can also be extended to an automorphism of Γ. Furthermore, we give a "formula" for c. In such a form the result can also be of interest for finite graphs Γ.

Keywords: vertex-symmetric graph, extension of automorphism.

1. Introduction

Let Γ be a connected locally finite graph. Let $x_1,\dots,x_n$, where n is a positive integer, be some vertices of Γ and also $y_1,\dots,y_n$ be some vertices of Γ. Frequently (for certain Γ and $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$) the following question is of interest: does there exists an automorphism g of Γ such that $g(x_i)=y_i$ for all $i\in\{1,\dots,n\}$? Suppose we can check that the following "local" necessary condition for the existence of such an automorphism g holds: there exists an isomorphism f of the subgraph of Γ generated by some ball $B_\Gamma(x,r)$ of Γ containing vertices $x_1,\dots,x_n$ onto the subgraph of Γ generated by some ball $B_\Gamma(y,r)$ of Γ containing vertices $y_1,\dots,y_n$ such that $f(x_i)=y_i$ for all $i\in\{1,\dots,n\}$. Of course, in general this condition is not sufficient. But we prove that the condition is sufficient in the case when the group of automorphisms of Γ is vertex-transitive with finite vertex stabilizers and $B_\Gamma(x,r)$ contains $B_\Gamma(x_i,c)$ for all $i\in\{1,\dots,n\}$, where c is a non-negative integer depending only on Γ. Furthermore, we give a "formula" for c. In such a form the result can also be of interest for finite graphs Γ. The proof of the result is very simple in essence, but needs some preliminaries.

In a sense, the result is oriented towards computations in graphs. Of course, it can effectively be applied to a graph Γ, whose group of automorphisms is vertex-transitive and has finite vertex stabilizers, only if c for Γ can be chosen to be not large. But it should be mentioned that we have the latter situation (with $c\le 2$ or so), for example, for many finite graphs and for many graphs which are of interest in crystallography. Actually our decision to publish this paper was motivated by discussions during visits to the Max Planck Institute for Chemical Physics of Solids.

The main result of this paper was announced in [1].

2. Notation and terminology

Our notation and terminology are standard with a few small exceptions concerning mappings (see below). In this paper we consider only undirected graphs without loops or multiple edges. For a graph Γ, $V(\Gamma)$ is the vertex set of Γ, $E(\Gamma)$ is the edge set of Γ, and $Aut(\Gamma)$ is the automorphism group of Γ. We regard isomorphisms of graphs as mappings of vertex sets. (Thus an isomorphism f

[1]Supported in part by RFBR Grant No. 10-01-00349, Dep. Math. RAS Program (12-T-1-1003) and UB RAS – SB RAS Program (12-C-1-1018).

of a graph Γ_1 onto a graph Γ_2 is a bijection of $V(\Gamma_1)$ onto $V(\Gamma_2)$ such that, for any $x, y \in V(\Gamma_1)$, $\{x, y\} \in E(\Gamma_1)$ if and only if $\{f(x), f(y)\} \in E(\Gamma_2)$.) Correspondingly, we regard automorphisms of a graph Γ as permutations of $V(\Gamma)$. For a graph Γ and a subset X of the vertex set of Γ, the subgraph of Γ generated by X is denoted by $\langle X\rangle_\Gamma$. A graph is called locally finite if all its vertices have finite valency. For a connected graph Γ, the usual metric on the vertex set of Γ is denoted by d_Γ. If r is a non-negative real number and v is a vertex of a connected graph Γ, then $B_\Gamma(v, r)$ denotes the ball of radius r with center v in Γ, i.e. the set of vertices w of Γ such that $d_\Gamma(v, w) \leq r$.

As usual, a mapping $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ is called an extension of a mapping $f : X \to Y$, if $X \subseteq \tilde{X}$, $Y \subseteq \tilde{Y}$ and $\tilde{f}(x) = f(x)$ for all $x \in X$. If $f : X \to Y$ is a mapping and X' is a subset of X, then $f|_{X'}$ denotes the restriction of f to X', which is the mapping from X' to Y with $f|_{X'}(x) = f(x)$ for each $x \in X'$. For a mapping $f : X \to Y$, we denote by $[f]$ the surjective mapping from X onto $f(X)$ with $[f](x) = f(x)$ for each $x \in X$ (i.e. $[f]$ is the so-called right-restriction of f to $f(X)$). For mappings $f_1 : X_1 \to Y_1$ and $f_2 : X_2 \to Y_2$ such that $f_2(X_2) \subseteq X_1$, we define their product $f_1 f_2$ to be the mapping from X_2 to Y_1 with $f_1 f_2(x) = f_1(f_2(x))$ for each $x \in X_2$. (Note that we do not assume here that $X_1 = Y_2$, but only that $f_2(X_2) \subseteq X_1$.) If g is a permutation of a set X and X' is a subset of X' satisfying $g(X') = X'$, then $g^{X'} := [g|_{X'}]$ is the permutation of X' induced by g.

Let G be a permutation group on a set X. For $x \in X$, $G_x := \{g \in G : g(x) = x\}$ is the stabilizer of x in G. For $X' \subseteq X$, $G_{X'} := \{g \in G : g(x) = x \text{ for each } x \in X'\}$ is the elementwise stabilizer of X' in G. For a G-invariant subset X' of X, $G^{X'} := \{g^{X'} : g \in G\}$ is the permutation group on X' induced by G.

3. Some more preliminaries

Let Γ be a connected locally finite graph and v be a vertex of Γ. Then it is easy to see that, for any non-negative integer r, there exists an integer $r' \geq r$ such that

$$(Aut(\langle B_\Gamma(v, r')\rangle_\Gamma)_v)^{B_\Gamma(v,r)} = (Aut(\Gamma)_v)^{B_\Gamma(v,r)}. \tag{1}$$

(In fact, supposing false we have that the diameter of Γ is infinite and, for some non-negative integer r and any integer $i \geq r$, there exists $g_i \in Aut(\langle B_\Gamma(v, i)\rangle_\Gamma)_v$ such that $g_i^{B_\Gamma(v,r)} \notin (Aut(\Gamma)_v)^{B_\Gamma(v,r)}$. Since Γ is locally finite, we can suppose without loss of generality that $g_{i+1}^{B_\Gamma(v,i)} = g_i$ for all integers $i \geq r$. But now, for the automorphism g of Γ defined by $g(x) = g_i(x)$ if $x \in B_\Gamma(v, i)$ for an integer $i \geq r$, we have $g \in Aut(\Gamma)_v$ and $g^{B_\Gamma(v,r)} = g_i^{B_\Gamma(v,r)}$ for any integer $i \geq r$, a contradiction.) For any non-negative integer r, we define $\rho_{\Gamma,v}(r)$ to be the minimal integer $r' \geq r$ for which (1) holds. Note that the number $\rho_{\Gamma,v}(r)$ has the following interpretation in terms of extensions of automorphisms: $\rho_{\Gamma,v}(r)$ is the minimal integer $\geq r$ such that any automorphism of $\langle B_\Gamma(v, r)\rangle_\Gamma$ fixing v, which can be extended to an automorphism of $\langle B_\Gamma(v, \rho_{\Gamma,v}(r))\rangle_\Gamma$, can also be extended to an automorphism of Γ. In the case when $Aut(\Gamma)$ is vertex-transitive, the number $\rho_{\Gamma,v}(r)$ is independent of the choice of v and is denoted by $\rho_\Gamma(r)$. Thus, in this case, for any vertex v of Γ and any non-negative integer r, we have

$$(Aut(\langle B_\Gamma(v, \rho_\Gamma(r))\rangle_\Gamma)_v)^{B_\Gamma(v,r)} = (Aut(\Gamma)_v)^{B_\Gamma(v,r)}. \tag{2}$$

Furthermore, in this case the number $\rho_\Gamma(r)$ has the following interpretation: for any vertices v_1 and v_2 of Γ (equivalently, for some vertices v_1 and v_2 of Γ), $\rho_\Gamma(r)$ is the minimal integer $\geq r$ such that any isomorphism of $\langle B_\Gamma(v_1, r)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(v_2, r)\rangle_\Gamma$, which can be extended to an isomorphism of $\langle B_\Gamma(v_1, \rho_\Gamma(r))\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(v_2, \rho_\Gamma(r))\rangle_\Gamma$, can also be extended to an automorphism of Γ. (Here we use that, since $Aut(\Gamma)$ is vertex-transitive, any isomorphism of $\langle B_\Gamma(v_1, r)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(v_2, r)\rangle_\Gamma$ is the composition of an automorphism of $\langle B_\Gamma(v_1, r)\rangle_\Gamma$ fixing v_1 and an isomorphism of $\langle B_\Gamma(v_1, r)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(v_2, r)\rangle_\Gamma$ which can be extended to an automorphism of Γ; compare the beginning of the proof of the Theorem below.)

Let Γ be a connected graph and G be a vertex-transitive group of automorphisms of Γ with finite vertex stabilizers. Then there exists a non-negative integer s such that, for any vertex v of Γ

(equivalently, for some vertex v of Γ), we have $G_{B_\Gamma(v,s)} = 1$. We define s_G to be the minimal non-negative integer s with this property. Note that, for any vertex v of Γ and any non-negative integer n, we have

$$(G_{B_\Gamma(v,n)})^{B_\Gamma(v,n+1)} \neq 1 \text{ if and only if } n < s_G.$$

In particular, $s_G \leq \log_2(|G_v|)$. If Γ is a connected graph such that $Aut(\Gamma)$ is vertex-transitive and has finite vertex stabilizers, we define s_Γ to be $s_{Aut(\Gamma)}$. Thus, in this case, for any vertex v of Γ and any non-negative integer n, we have

$$(Aut(\Gamma)_{B_\Gamma(v,n)})^{B_\Gamma(v,n+1)} \neq 1 \text{ if and only if } n < s_\Gamma. \tag{3}$$

4. Main result

Now we can formulate our result.

Theorem. *Let Γ be a connected locally finite graph such that $Aut(\Gamma)$ is vertex-transitive and has finite vertex stabilizers. Put $c = \rho_\Gamma(s_\Gamma + 1) - 1$. Then, for any vertices x and y of Γ and any non-negative integer r, if an isomorphism of $\langle B_\Gamma(x,r)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(y,r)\rangle_\Gamma$ can be extended to an isomorphism of $\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(y,r+c)\rangle_\Gamma$, then it can also be extended to an automorphism of Γ. In other words, $\rho_\Gamma(r) \leq r + c$ for all non-negative integers r.*

Proof. Let x and y be some vertices of Γ, and r be some non-negative integer. Let f be an isomorphism of $\langle B_\Gamma(x,r)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(y,r)\rangle_\Gamma$ such that there exists an isomorphism $\tilde{f}$ of $\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma$ onto $\langle B_\Gamma(y,r+c)\rangle_\Gamma$ which is an extension of f. We need to show that f can be extended to an automorphism of Γ.

Since $Aut(\Gamma)$ is vertex-transitive, there exists an automorphism g of Γ such that $g(f(x)) = x$. Now $[gf] \in Aut(\langle B_\Gamma(x,r)\rangle_\Gamma)_x$, $[g\tilde{f}] \in Aut(\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma)_x$ and $[g\tilde{f}]$ is an extension of $[gf] = [g\tilde{f}]^{B_\Gamma(x,r)}$. If there exists an automorphism h of Γ which is an extension of $[gf]$, then the automorphism $g^{-1}h$ of Γ is an extension of f. Thus, to complete the proof, it is sufficient to show that there exists an automorphism h of Γ which is an extension of $[gf]$.

The case $r = 0$ is trivial. Suppose that $0 < r \leq s_\Gamma + 1$. Then, by the choice of c and by (2),

$$(Aut(\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma)_x)^{B_\Gamma(x,r)} \leq (Aut(\langle B_\Gamma(x,\rho_\Gamma(s_\Gamma+1))\rangle_\Gamma)_x)^{B_\Gamma(x,r)} = (Aut(\Gamma)_x)^{B_\Gamma(x,r)}.$$

Since $[g\tilde{f}] \in Aut(\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma)_x$ and $[gf] = [g\tilde{f}]^{B_\Gamma(x,r)}$, it follows that there exists an automorphism h of Γ which is an extension of $[gf]$.

Suppose that $r > s_\Gamma + 1$. Then, by the choice of c and by (2),

$$\begin{aligned}(Aut(\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma)_x)^{B_\Gamma(x,s_\Gamma)} &\leq (Aut(\langle B_\Gamma(x,\rho_\Gamma(s_\Gamma+1))\rangle_\Gamma)_x)^{B_\Gamma(x,s_\Gamma)}\\ &\leq (Aut(\langle B_\Gamma(x,\rho_\Gamma(s_\Gamma))\rangle_\Gamma)_x)^{B_\Gamma(x,s_\Gamma)} = (Aut(\Gamma)_x)^{B_\Gamma(x,s_\Gamma)}.\end{aligned}$$

Since $[g\tilde{f}] \in Aut(\langle B_\Gamma(x,r+c)\rangle_\Gamma)_x$ and $[gf] = [g\tilde{f}]^{B_\Gamma(x,r)}$, where $r > s_\Gamma + 1$, it follows that there exists an automorphism h_1 of Γ such that

$$h_1^{B_\Gamma(x,s_\Gamma)} = [gf]^{B_\Gamma(x,s_\Gamma)}. \tag{4}$$

We have $[h_1^{-1}gf] \in Aut(\langle B_\Gamma(x,r)\rangle_\Gamma)_x$. If $[h_1^{-1}gf] = 1$, then the automorphism h_1 of Γ is an extension of $[gf]$. So assume that $[h_1^{-1}gf] \neq 1$. Then, by (4), there exists a vertex z of Γ such that $d_\Gamma(x,z) < r - s_\Gamma$, $[h_1^{-1}gf](z) = z$ and $[h_1^{-1}gf]^{B_\Gamma(z,s_\Gamma)} = 1$, but $[h_1^{-1}gf]^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)} \neq 1$. Now $[h_1^{-1}g\tilde{f}]^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1+c)} \in Aut(\langle B_\Gamma(z,s_\Gamma+1+c)\rangle_\Gamma)_z$ is an extension of $[h_1^{-1}gf]^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)}$. Since, by the choice of c and by (2),

$$\begin{aligned}&(Aut(\langle B_\Gamma(z,s_\Gamma+1+c)\rangle_\Gamma)_z)^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)}\\ &\leq (Aut(\langle B_\Gamma(z,\rho_\Gamma(s_\Gamma+1))\rangle_\Gamma)_z)^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)} = (Aut(\Gamma)_z)^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)},\end{aligned}$$

it follows that there exists an automorphism h_2 of Γ such that $h_2(z) = z$ and $h_2^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)} = [h_1^{-1}gf]^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)}$. In particular, we have that $h_2 \in Aut(\Gamma)_{B_\Gamma(z,s_\Gamma)}$ and $h_2^{B_\Gamma(z,s_\Gamma+1)} \neq 1$, contrary to (3).

REFERENCES

1. **Трофимов В.И.** О продолжении изоморфизма подграфов до автоморфизма графа // Междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвященная 80-летию со дня рождения А.И. Старостина: тез.докл. Екатеринбург, 2011. С. 162–163.

Trofimov Vladimir Ivanovich
Dr. Sci. (Phys.-Math.)
Leading Researcher
Institute of Mathematics and Mechanics, UB Russian Academy of Sciences
Professor
Institute of Mathematics and Computer Sciences, Ural Federal University
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

Received January, 20, 2012

Том 18 № 3 2012

УДК 512.54

К ГИПОТЕЗЕ О ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРАХ В ГРУППАХ $\mathrm{Sp}_4(q)$ [1]

В. А. Белоногов

Ранее автором была высказана гипотеза: если конечная группа имеет два полупропорциональных неприводимых характера φ и ψ, то $\varphi(1)=\psi(1)$. В статье получено новое её подтверждение. А именно, гипотеза доказана для симплектических групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$.

Ключевые слова: конечные симплектические группы, таблица характеров, полупропорциональные характеры, малые взаимодействия.

V. A. Belonogov. On the conjecture about semiproportional characters in the groups $\mathrm{Sp}_4(q)$.

Previously, the author made the following conjecture: if a finite group has two semiproportional irreducible characters φ and ψ, then $\varphi(1)=\psi(1)$. In the present paper, a new confirmation of the conjecture is obtained. Namely, the conjecture is verified for the symplectic groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ and $\mathrm{PSp}_4(q)$.

Keywords: finite symplectic groups, character table, semiproportional characters, small interactions.

Введение

Неприводимые характеры φ и ψ конечной группы G называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого нормального подмножества D из G пропорциональны ограничения φ и ψ на D и их ограничения на $G\setminus D$. Ранее автором было получено полное описание всех пар полупропорциональных неприводимых характеров (в другой терминологии — малых D-блоков [1]) в спорадических простых группах [2]; в группах $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$, $\mathrm{GL}_2(q)$ [3]; в группах $\mathrm{PGL}_3(q)$, $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{PGU}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$ [4]; в группах $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$ [5] и в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q [6]. В [3] была высказана следующая

Гипотеза (гипотеза о полупропорциональных характерах). *Если конечная группа G имеет два полупропорциональных неприводимых характера φ и ψ, то $\varphi(1)=\psi(1)$.*

Подтверждения этой гипотезы получены для всех упомянутых выше групп. Изучению некоторых свойств произвольной группы, имеющей пару полупропорциональных неприводимых характеров, посвящена статья [7]. В статье [6] доказано отсутствие пар полупропорциональных неприводимых характеров в простых группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q, и, в частности, для них гипотеза верна. Теперь мы докажем её для групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ при нечётных q.

Теорема. *Пусть $G=\mathrm{Sp}_4(q)$, где q нечётно. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

(1) *Для группы G верна гипотеза* 1.

(2) *Если φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G, то в терминах её таблицы характеров* (*см. разд.* 2) $\{\varphi,\psi\}$ *содержится в одном из множеств* X_i, *где* $i\in\{1,\dots,13\}$, Ξ_s *и* Ξ'_s, *где* $s\in\{1,3,21,22,41,42\}$.

Отсюда и из [6] непосредственно вытекает

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программы совместных исследований УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Следствие. Гипотеза верна для групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при любых q.

Утверждение (2) теоремы будет существенно использовано при описании пар полупропорциональных неприводимых характеров групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётных q, которое предполагается дать в следующей статье.

Доказательство теоремы состоит в анализе таблиц характеров рассматриваемых групп, полученных Б. Сринивасан [8], с учётом поправок, сделанных А. Пшигоцким [9]. Эти таблицы приводятся в разд. 2, причём их представление здесь дано в более удобной форме.

Обозначения. $\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряжённых элементов группы G; g^G — класс сопряжённых элементов группы G, содержащий элемент g из G; классы сопряжённых элементов группы будем называть просто *классами группы*; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых характеров G; $\dot\cup$ — знак объединения попарно не пересекающихся множеств; $\mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}}$ — множества всех целых и целых алгебраических чисел соответственно. Запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B.

1. Предварительные результаты

Предложение 1.1 (следует из [1, теорема 833]). *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G и $g_1, g_2 \in G$. Тогда*

(1) $\varphi(g) = 0 \iff \psi(g) = 0$ *для всех* $g \in G$;

(2) *если $\varphi(g_1)$ и $\varphi(g_2)$ — ненулевые, то* $\dfrac{\varphi(g_i)}{\psi(g_i)} \in \left\{\dfrac{\varphi(1)}{\psi(1)}, -\dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}\right\}$ $(i \in \{1,2\})$ *и, в частности, либо* $\dfrac{\varphi(g_1)}{\psi(g_1)} = \dfrac{\varphi(g_2)}{\psi(g_2)}$, *либо* $\dfrac{\varphi(g_1)}{\psi(g_1)}\dfrac{\varphi(g_2)}{\psi(g_2)} = -1$;

(3) *если $|\varphi(g_1)| = |\psi(g_1)| \neq 0$, то $\varphi(g) = \pm\,\psi(g)$ для всех $g \in G$ (в частности, $\varphi(1) = \psi(1)$).*

Предложение 1.2 [7, следствие леммы 2.1]. *Если φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G и G имеет элемент g такой, что $\varphi(g)$ или $\psi(g)$ является обратимым элементом в $\widehat{\mathbb{Z}}$ (например, если $|\varphi(g)| = 1$ или $|\psi(g)| = 1$), то одно из чисел $\varphi(1)$ и $\psi(1)$ делит другое.*

2. Классы и характеры групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ с нечётным q

Пусть $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, где q нечётно. Тогда G — группа порядка $q^4(q^4-1)(q^2-1)$, $Z(G) = \langle z\rangle$ — группа порядка 2 и $G/Z(G) = \mathrm{PSp}_4(q)$ — простая группа. По определению $G = \{g \in \mathrm{GL}_4(q) \mid {}^t g A g = A\}$, где ${}^t g$ — матрица, транспонированная к g, и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица характеров $\mathrm{X}(G)$ группы G получена Б. Сринивасан в [8]. Она приводится далее в таблицах A, $B1$, $B2$, C, D, A', $B1'$, $B2'$, C' и D' с учётом поправок, сделанных А. Пшигоцким [9]. В таблице $\mathrm{X}(G)$ после двух вспомогательных полос имеется 32 нумерованных полосы, состоящих из значений нескольких характеров, указанных во второй колонке таблицы, и, подобно, после двух вспомогательных колонок имеется 23 нумерованных колонки, состоящих из значений неприводимых характеров на классах сопряжённых элементов, представители которых записаны во второй полосе.

Элементы таблицы характеров являются суммами корней из единицы $\zeta_n := e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{n}}$ ($\mathbf{i}$ — мнимая единица) при некоторых натуральных n. Они либо являются целыми числами, либо выражаются через следующие числа:

$$\sigma := \zeta_{q^2-1}\,, \qquad \alpha_m := \zeta_{q-1}^m + \zeta_{q-1}^{-m} = 2\cos\frac{2m\pi}{q-1}\,,$$
$$\tau := \zeta_{q^2+1}\,, \qquad \beta_m := \zeta_{q+1}^m + \zeta_{q+1}^{-m} = 2\cos\frac{2m\pi}{q+1}\,;$$
$$t := (q-1)/2\,,\ \ \varepsilon := (-1)^t\,,\ \ b := (-1-\varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2\,,\ \ b^* := (-1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2\,,$$
$$s(i,j) := (-1)^i + (-1)^j\,,\ \ d(i,j) := (-1)^i - (-1)^j\,.$$

Для более компактной записи таблиц положим

$$q_- := q-1 \ \text{ и } \ q_+ := q+1.$$

Заметим, что $\alpha_m = 0 \Leftrightarrow m = ((q-1)/4)(2k+1)$ и $\beta_m = 0 \Leftrightarrow m = ((q+1)/4)(2k+1)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Классы сопряжённых элементов и неприводимые характеры группы G зависят от ряда параметров, содержащихся в следующих множествах:

$$T_1 := \{1,2,\ldots,(q-3)/2\};\ \ T_2 := \{1,2,\ldots,(q-1)/2\};\ \ R_1 := \{1,2,\ldots,(q^2-1)/4\};$$

R_2 есть множество, состоящее из $(q-1)^2/4$ натуральных чисел i (начинающееся с 1) таких, что числа θ^i, θ^{-i}, θ^{qi}, θ^{-qi} попарно различны.

2.1. Классы сопряжённых элементов группы G

$\mathrm{Cl}(G) = A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C \,\dot\cup\, D$, где множества A, B, C, D описаны ниже.

Для любого элемента g группы G обозначим через g' элемент gz в случае, когда $(gz)^G \neq g^G$. Понятно, что $C_G(g') = C_G(g)$. Классы g^G и h^G группы G $(g,h \in G)$ называются *алгебраически сопряжёнными*, если существует натуральное число m такое, что $m \le |G|, (m,|G|) = 1$ и $h^G = (g^m)^G$ (тогда по [1, 2A14,2A15] при любом $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ $\chi(h) = \chi(g)^\alpha$, где α — автоморфизм поля $Q(\zeta_{|G|})$, переводящий $\zeta_{|G|}$ в $(\zeta_{|G|})^m$).

A есть множество из 14 классов сопряжённых элементов с представителями $a_1 = 1$, $a_1' = z$, a_{21}, a_{21}', a_{22}, a_{22}', a_{31}, a_{31}', a_{32}, a_{32}', a_{41}, a_{41}', a_{42}, a_{42}'. Среди этих классов имеется точно четыре (неупорядоченных) пары алгебраически сопряжённых классов:

$$\{{a_{21}}^G, {a_{22}}^G\},\ \{{a_{21}'}^G, {a_{22}'}^G\},\ \{{a_{41}}^G, {a_{42}}^G\},\ \{{a_{41}'}^G, {a_{42}'}^G\}. \tag{2.1}$$

Здесь $|C_G(a_{21})| = |C_G(a_{22})| = 2q^4(q^2-1)$, $|C_G(a_{31})| = 2q^3(q-1)$, $|C_G(a_{32})| = 2q^3(q+1)$, $|C_G(a_{41})| = |C_G(a_{42})| = 2q^2$.

$B = \dot\bigcup_{i=1}^9 B_i$, где

$B_1 = \{\, b_1(i)^G \mid i \in R_1\}$ $(\,|B_1| = |R_1| = (q^2-1)/4,\ |C_G(b_1(i))| = q^2+1\,)$,

$B_2 = \{\, b_2(i)^G \mid i \in R_2\}$ $(\,|B_2| = |R_2| = (q-1)^2/4,\ |C_G(b_2(i))| = q^2-1\,)$,

$B_3 = \{\, b_3(i,j)^G \mid i,j \in T_1, i<j\}$ $(\,|B_3| = |\{(i,j) \in T_1 \times T_1 \mid i<j\}| = (q-3)(q-5)/8$, $|C_G(b_3(i,j))| = (q-1)^2\,)$,

$B_4 = \{\, b_4(i,j)^G \mid i,j \in T_2, i<j\}$ $(\,|B_4| = |\{(i,j) \in T_2 \times T_2 \mid i<j\}| = (q-1)(q-3)/8$, $|C_G(b_4(i,j))| = (q+1)^2\,)$,

$B_5 = \{\, b_5(i,j)^G \mid i \in T_2, j \in T_1\}$ $(\,|B_5| = |T_2 \times T_1| = (q-1)(q-3)/4,\ |C_G(b_5(i,j))| = q^2-1\,)$,

$B_6 = \{\, b_6(i)^G \mid i \in T_2\}$ $(\,|B_6| = |T_2| = (q-1)/2,\ |C_G(b_6(i))| = q(q+1)(q^2-1)\,)$,

$B_7 = \{\, b_7(i)^G \mid i \in T_2\}$ $(\,|B_7| = |T_2| = (q-1)/2,\ |C_G(b_7(i))| = q(q+1)\,)$,

$B_8 = \{\, b_8(i)^G \mid i \in T_1\}$ $(\,|B_8| = |T_1| = (q-3)/2,\ |C_G(b_8(i))| = q(q-1)(q^2-1)\,)$,

$B_9 = \{\, b_9(i)^G \mid i \in T_1\}$ $(\,|B_9| = |T_1| = (q-3)/2,\ |C_G(b_9(i))| = q(q-1)\,)$.

$C = C_1 \,\dot\cup\, {C'}_1 \,\dot\cup\, C_{21} \,\dot\cup\, {C'}_{21} \,\dot\cup\, C_{22} \,\dot\cup\, {C'}_{22} \,\dot\cup\, C_3 \,\dot\cup\, {C'}_3 \,\dot\cup\, C_{41} \,\dot\cup\, {C'}_{41} \,\dot\cup\, C_{42} \,\dot\cup\, {C'}_{42}$, где

$C_1 = \{\, c_1(i)^G \mid i \in T_2\}$ $\ {C'}_1 = \{\, (c_1(i)')^G \mid i \in T_2\}$

$(\,|C_1| = |{C'}_1| = |T_2| = (q-1)/2,\ |C_G(c_1(i))| = |C_G(c_1(i)')| = q(q+1)(q^2-1)\,)$,

$C_{21} = \{\, c_{21}(i)^G \mid i \in T_2\}\,,\ C_{21}' = \{\, (c_{21}(i)')^G \mid i \in T_2\}$

$$(\,|C_{21}| = |C'_{21}| = |T_2| = (q-1)/2,\ \ |C_G(c_{21}(i))| = |C_G(c_{21}(i)')| = 2q(q+1)\,),$$
$$C_{22} = \{\, c_{22}(i)^G \mid i \in T_2\}\,,\ \ C'_{22} = \{\, (c_{22}(i)')^G \mid i \in T_2\}$$
$$(\,|C_{22}| = |C'_{22}| = |T_2| = (q-1)/2,\ \ |C_G(c_{22}(i))| = |C_G(c_{22}(i)')| = 2q(q+1)\,),$$
$$C_3 = \{\, c_3(i)^G \mid i \in T_1\}\,,\ \ C'_3 = \{\, (c_3(i)')^G \mid i \in T_1\}$$
$$(\,|C_3)| = |C'_3)| = |T_1| = (q-1)/2,\ \ |C_G(c_3(i))| = |C_G(c_3(i)')| = q(q-1)(q^2-1)\,),$$
$$C_{41} = \{\, c_{41}(i)^G \mid i \in T_1\}\,, C'_{41} = \{\, (c_{41}(i)')^G \mid i \in T_1\}$$
$$(\,|C_{41}| = |C'_{41}| = |T_1|/2 = (q-3)/2,\ \ |C_G(c_{41}(i))| = |C_G(c_{41}(i)')| = 2q(q-1)\,),$$
$$C_{42} = \{\, c_{42}(i)^G \mid i \in T_1\}\,,\ \ C'_{42} = \{\, (c_{42}(i)')^G \mid i \in T_1\}$$
$$(\,|C_{42}| = |C'_{42}| = |T_1|/2 = (q-3)/2,\ \ |C_G(c_{42}(i))| = |C_G(c_{42}(i)')| = 2q(q-1)\,).$$

D есть множество из 9 классов сопряжённых элементов с представителями d_1, d_{21}, d'_{21}, d_{22}, d'_{22}, d_{24}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}. Среди этих классов имеется точно четыре пары алгебраически сопряжённых классов:

$$\{{d_{21}}^G, {d_{22}}^G\},\ \ \{{d'_{21}}^G, {d'_{22}}^G\},\ \ \{{d_{31}}^G, {d_{33}}^G\},\ \ \{{d_{32}}^G, {d_{34}}^G\}. \tag{2.2}$$

Здесь $|C_G(d_1)| = q^2(q^2-1)^2$, $|C_G(d_{21})| = |C_G(d_{22})| = 2q^2(q^2-1)$, $|C_G(d_{31})| = |C_G(d_{32})| = |C_G(d_{33})| = |C_G(d_{34})| = 4q^2$.

З а м е ч а н и е 2.1. Представители алгебраически сопряжённых классов сопряжённых элементов записаны в одной колонке, причём в этой колонке даются значения неприводимых характеров лишь на одном из них; значения неприводимых характеров на другом получаются из значений на первом заменой b на b^* и b^* на b (значения b и b^* указаны ниже).

З а м е ч а н и е 2.2. Элементы g и g' записываются в одной колонке, где даны лишь значения характеров $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ на g. Для получения значения $\chi(g')$ нужно взять запись из 2-й колонки (в той же строке) и положить в ней $D = \chi(g)$. (Во 2-й колонке — $D = \chi(a_1)$.)

2.2. Неприводимые характеры группы G

$\mathrm{Irr}(G) = \Theta \,\dot\cup\, \mathrm{X} \,\dot\cup\, \Xi \,\dot\cup\, \Xi' \,\dot\cup\, \Phi$, где
$\Theta := \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{13}\}$, $\theta_0 = 1_G$;
$\Phi := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_9\}$,
$\mathrm{X} := \dot\cup_{i=1}^{9} \mathrm{X}_i$, где X_i состоит из характеров вида $\chi_i^{(k,l)}$ (при $i \in \{3,4,5\}$) или вида $\chi_i^{(k)}$ для определённых k и l, указанных в таблице характеров,
$\Xi := \dot\cup_{s\in S}\Xi_s$ и $\Xi' := \dot\cup_{s\in S}\Xi'_s$, где $S := \{1, 3, 21, 22, 41, 42\}$, а Ξ_s и Ξ'_s состоят из характеров $\xi_s^{(k)}$ и $\xi_s^{\prime(k)}$ соответственно при значениях k, указанных в таблице характеров.
Легко увидеть, что
$|\Theta| = |A|$;
$|\mathrm{X}_i| = |B_i|$ при $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ и, следовательно, $|\mathrm{X}| = |B|$;
$|\Xi_i| = |\Xi'_i| = |C_i| = |C'_i|$ при $i \in \{1, 3, 21, 22, 41, 42\}$ и, следовательно, $|\Xi| = |\Xi'| = |C| = |C'|$;
$|\Phi| = |D|$.

Среди характеров $\theta_1, \ldots, \theta_{13}, \varphi_1, \ldots, \varphi_9$ имеется точно восемь пар алгебраически сопряжённых характеров

$$\{\theta_1, \theta_2\},\ \{\theta_3, \theta_4\},\ \{\theta_5, \theta_6\},\ \{\theta_7, \theta_8\},\ \{\varphi_1, \varphi_2\},\ \{\varphi_3, \varphi_4\},\ \{\varphi_5, \varphi_6\},\ \{\varphi_7, \varphi_8\}. \tag{2.3}$$

Кроме того, среди характеров из $\Xi \cup \Xi'$ имеются в точности следующие пары алгебраически сопряжённых характеров:

$$\{\xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}\},\ \ \{\xi_{21}^{\prime(k)}, \xi_{22}^{\prime(k)}\},\ \ \{\xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)}\},\ \ \{\xi_{41}^{\prime(k)}, \xi_{42}^{\prime(k)}\} \text{ при соответствующих } k. \tag{2.4}$$

З а м е ч а н и е 2.3. В таблице характеров группы G алгебраически сопряжённые характеры расположены в одной строке, причём приведены значения только одного характера от каждой пары. Значение второго на любом элементе g получаются из значений первого на g заменой b на b^* и b^* на b.

Таблица А

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно

		1	2	3	4	5	6
		a_1	a_1'	a_{21}, a_{21}', $a_{22},\ a_{22}'$	a_{31}, a_{31}'	a_{32}, a_{32}'	a_{41}, a_{41}', a_{42}, a_{42}'
1	θ_0	1	D	1	1	1	1
2	θ_1, θ_2	$q^2(q^2+1)/2$	D	$-q^2 b$	0	0	0
3	θ_3, θ_4	$(q^2+1)/2$	D	$q_+/2 + qb$	$q_+/2$	$-q_-/2$	$-b^*$
4	θ_5, θ_6	$q^2(q^2-1)/2$	$-D$	$q^2 b$	0	0	0
5	θ_7, θ_8	$(q^2-1)/2$	$-D$	$q_-/2 + qb$	$q_-/2$	$-q_+/2$	b
6	θ_9	$q{q_+}^2/2$	D	$qq_+/2$	q	0	0
7	θ_{10}	$q{q_-}^2/2$	D	$-qq_-/2$	0	q	0
8	θ_{11}	$q(q^2+1)/2$	D	$-qq_-/2$	q	0	0
9	θ_{12}	$q(q^2+1)/2$	D	$qq_+/2$	0	q	0
10	θ_{13}	q^4	D	0	0	0	0
11	$\chi_1^{(k)}$ $(\,k \in R_1\,)$	$(q^2-1)^2$	$(-1)^k D$	$-(q^2-1)$	$-q_-$	q_+	1
12	$\chi_2^{(k)}$ $(\,k \in R_2\,)$	q^4-1	$(-1)^k D$	q^2-1	$-q_+$	q_-	1
13	$\chi_3^{(k,l)}$ $(k, l \in T_1, k < l)$	${q_+}^2(q^2+1)$	$(-1)^{k+l} D$	${q_+}^2$	$3q+1$	q_+	1
14	$\chi_4^{(k,l)}$ $(k, l \in T_2, k < l)$	${q_-}^2(q^2+1)$	$(-1)^{k+l} D$	${q_-}^2$	$-q_-$	$1-3q$	1
15	$\chi_5^{(k,l)}$ $(k \in T_2, l \in T_1)$	q^4-1	$(-1)^{k+l} D$	$-(q^2+1)$	q_-	$-q_+$	-1
16	$\chi_6^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q_-(q^2+1)$	D	q_-	-1	$2q-1$	-1
17	$\chi_7^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$qq_-(q^2+1)$	D	qq_-	$-q$	$-q$	0

Таблица B1

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		7	8	9	10
		$b_1(i)$ $(i \in R_1)$	$b_2(i)$ $(i \in R_2)$	$b_3(i,j)$ $(i,j \in T_1, i<j)$	$b_4(i,j)$ $(i,j \in T_2, i<j)$
1	θ_0	1	1	1	1
2	θ_1, θ_2	0	$(-1)^{i+1}$	$(-1)^{i+j}$	$(-1)^{i+j}$
3	θ_3, θ_4	0	$(-1)^{i}$	$(-1)^{i+j}$	$(-1)^{i+j}$
4	θ_5, θ_6	$(-1)^{i}$	0	0	0
5	θ_7, θ_8	$(-1)^{i+1}$	0	0	0
6	θ_9	-1	0	2	0
7	θ_{10}	1	0	0	-2
8	θ_{11}	0	1	1	-1
9	θ_{12}	0	-1	1	-1
10	θ_{13}	1	-1	1	1
11	$\chi_1^{(k)}$	$\tau^{ik}+\tau^{-ik}+$ $+\tau^{qik}+\tau^{-qik}$	0	0	0
12	$\chi_2^{(k)}$	0	$-(\sigma^{ik}+\sigma^{-ik}+$ $+\sigma^{qik}+\sigma^{-qik})$	0	0
13	$\chi_3^{(k,l)}$	0	0	$\alpha_{ik}\alpha_{jl}+\alpha_{il}\alpha_{jk}$	0
14	$\chi_4^{(k,l)}$	0	0	0	$\beta_{ik}\beta_{jl}+\beta_{il}\beta_{jk}$
15	$\chi_5^{(k,l)}$	0	0	0	0
16	$\chi_6^{(k)}$	0	$-\beta_{ik}$	0	$-\beta_{ik}\beta_{jk}$
17	$\chi_7^{(k)}$	0	$-\beta_{ik}$	0	$\beta_{ik}\beta_{jk}$

Таблица B2

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		11	12	13	14	15
		$b_5(i,j)$ $(i \in T_2, j \in T_1)$	$b_6(i)$ $(i \in T_2)$	$b_7(i)$ $(i \in T_2)$	$b_8(i)$ $(i \in T_1)$	$b_9(i)$ $(i \in T_1)$
1	θ_0	1	1	1	1	1
2	θ_1, θ_2	0	$-q$	0	q	0
3	θ_3, θ_4	0	1	1	1	1
4	θ_5, θ_6	$(-1)^{i+j+1}$	0	0	0	0
5	θ_7, θ_8	$(-1)^{i+j+1}$	0	0	0	0
6	θ_9	0	0	0	q_+	1
7	θ_{10}	0	q_-	-1	0	0
8	θ_{11}	-1	q	0	1	1
9	θ_{12}	1	-1	-1	q	0
10	θ_{13}	-1	$-q$	0	q	0
11	$\chi_1^{(k)}$	0	0	0	0	0
12	$\chi_2^{(k)}$	0	$-q_+\beta_{ik}$	$-\beta_{ik}$	$q_-\alpha_{ik}$	$-\alpha_{ik}$
13	$\chi_3^{(k,l)}$	0	0	0	$q_+\alpha_{ik}\alpha_{il}$	$\alpha_{ik}\alpha_{il}$
14	$\chi_4^{(k,l)}$	0	$-q_-\beta_{ik}\beta_{il}$	$\beta_{ik}\beta_{il}$	0	0
15	$\chi_5^{(k,l)}$	$-\beta_{ik}\alpha_{jl}$	0	0	0	0
16	$\chi_6^{(k)}$	0	$-\beta_{2ik} + q_-$	$-\beta_{2ik} - 1$	q_-	-1
17	$\chi_7^{(k)}$	0	$-q\beta_{2ik} - q_-$	1	q_-	-1

Таблица C

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		16	17	18	19
		$c_1(i), c_1(i)'$ $(i \in T_2)$	$c_{21}(i), c_{21}(i)'$, $c_{22}(i), c_{22}(i)'$ $(i \in T_2)$	$c_3(i), c_3(i)'$ $(i \in T_1)$	$c_{41}(i), c_{41}(i)'$, $c_{42}(i), c_{42}(i)'$ $(i \in T_1)$
1	θ_0	1	1	1	1
2	θ_1, θ_2	$(-1)^{i+1}q_-/2$	$(-1)^{i+1}b$	$(-1)^i q_+/2$	$(-1)^{i+1}b$
3	θ_3, θ_4	$(-1)^{i+1}q_-/2$	$(-1)^{i+1}b$	$(-1)^i q_+/2$	$(-1)^{i+1}b^*$
4	θ_5, θ_6	$(-1)^{i+1}q_+/2$	$(-1)^i b$	$(-1)^i q_-/2$	$(-1)^i b$
5	θ_7, θ_8	$(-1)^{i+1}q_+/2$	$(-1)^i b^*$	$(-1)^i q_-/2$	$(-1)^i b$
6	θ_9	0	0	q_+	1
7	θ_{10}	q_-	-1	0	0
8	θ_{11}	-1	-1	q	0
9	θ_{12}	q	0	1	1
10	θ_{13}	$-q$	0	q	0
11	$\chi_1^{(k)}$	0	0	0	0
12	$\chi_2^{(k)}$	0	0	0	0
13	$\chi_3^{(k,l)}$	0	0	$q_+(\alpha_{ik} + \alpha_{il})$	$\alpha_{ik} + \alpha_{il}$
14	$\chi_4^{(k,l)}$	$-q_-(\beta_{ik} + \beta_{il})$	$\beta_{ik} + \beta_{il}$	0	0
15	$\chi_5^{(k,l)}$	$-q_+\beta_{ik}$	$-\beta_{ik}$	$q_-\alpha_{il}$	$-\alpha_{il}$
16	$\chi_6^{(k)}$	$q_-\beta_{ik}$	$-\beta_{ik}$	0	0
17	$\chi_7^{(k)}$	$-q_-\beta_{ik}$	β_{ik}	0	0

Таблица D

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		20	21	22	23
		d_1	d_{21}, d'_{21}, d_{22}, d'_{22}	d_{31}, d_{33}	d_{32}, d_{34}
1	θ_0	1	1	1	1
2	θ_1, θ_2	$(-1)^t q$	$-(-1)^t qb$	0	0
3	θ_3, θ_4	$(-1)^t q$	$(-1)^t (q_+ + 2b)/2$	$(-1)^t (b - b^*)$	0
4	θ_5, θ_6	0	$-(-1)^t qb$	0	0
5	θ_7, θ_8	0	$(-1)^t (q_- - 2b)/2$	0	$(-1)^t (b - b^*)$
6	θ_9	${q_+}^2/2$	$q_+/2$	$q_+/2$	$-q_-/2$
7	θ_{10}	$-{q_-}^2/2$	$q_-/2$	$q_-/2$	$-q_+/2$
8	θ_{11}	$(q^2-1)/2 + q$	$q_-/2$	$-q_-/2$	$q_-/2$
9	θ_{12}	$(1-q^2)/2 + q$	$q_+/2$	$-q_-/2$	$q_+/2$
10	θ_{13}	q^2	0	0	0
11	$\chi_1^{(k)}$ ($k \in R_1$)	0	0	0	0
12	$\chi_2^{(k)}$ ($k \in R_2$)	0	0	0	0
13	$\chi_3^{(k,l)}$ ($k < l$, $k, l \in T_1$)	${q_+}^2 s(k,l)$	$q_+ s(k,l)$	$s(k,l)$	$s(k,l)$
14	$\chi_4^{(k,l)}$ ($k < l$, $k, l \in T_2$)	${q_-}^2 s(k,l)$	$-q_- s(k,l)$	$s(k,l)$	$s(k,l)$
15	$\chi_5^{(k,l)}$ ($k \in T_2, l \in T_1$)	$(q^2-1)s(k,l)$	$-s(k,l) - qd(k,l)$	$-s(k,l)$	$-s(k,l)$
16	$\chi_6^{(k)}$ ($k \in T_2$)	$(-1)^{k+1}{q_-}^2$	$(-1)^k q_-$	$(-1)^{k+1}$	$(-1)^{k+1}$
17	$\chi_7^{(k)}$ ($k \in T_2$)	$(-1)^k {q_-}^2$	$(-1)^{k+1} q_-$	$(-1)^k$	$(-1)^k$

Таблица A$'$

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		1	2	3	4	5	6
		a_1	a'_1	a_{21}, a'_{21}, a_{22}, a'_{22}	a_{31}, a'_{31}	a_{32}, a'_{32}	a_{41}, a'_{41}, a_{42}, a'_{42}
18	$\chi_8^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q_+(q^2+1)$	D	q_+	$2q+1$	1	1
19	$\chi_9^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$qq_+(q^2+1)$	D	qq_+	q	q	0
20	$\xi_1^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q_-(q^2+1)$	$(-1)^k D$	$-q^2+q_-$	q_-	q_-	-1
21	${\xi'}_1^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$qq_-(q^2+1)$	$(-1)^k D$	$-q$	0	$-2q$	0
22	$\xi_3^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q_+(q^2+1)$	$(-1)^k D$	q^2+q_+	q_+	q_+	1
23	${\xi'}_3^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$qq_+(q^2+1)$	$(-1)^k D$	q	$2q$	0	0
24	$\xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$(q^4-1)/2$	$(-1)^{k+t} D$	$-q_+/2+qq_-b$	$q_-/2$	$-q_+/2$	b^*
25	${\xi'}_{21}^{(k)}, {\xi'}_{22}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	${q_-}^2(q^2+1)/2$	$(-1)^{k+t+1} D$	$-q_-/2-qq_-b$	$-q_-/2$	$(1-3q)/2$	$-b^*$
26	$\xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	${q_+}^2(q^2+1)/2$	$(-1)^{k+t} D$	$q_+/2-qq_+b$	$(3q+1)/2$	$q_+/2$	$-b$
27	${\xi'}_{41}^{(k)}, {\xi'}_{42}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$(q^4-1)/2$	$(-1)^{k+t+1} D$	$q_-/2+qq_+b$	$q_-/2$	$-q_+/2$	b
28	φ_1, φ_2	$q_-(q^2+1)/2$	$(-1)^{t+1} D$	$-{q_-}^2/2+qb$	$q_-/2$	$q_-/2$	b
29	φ_3, φ_4	$qq_-(q^2+1)/2$	$(-1)^{t+1} D$	$qq_-/2+q^2b$	0	$-q$	0
30	φ_5, φ_6	$q_+(q^2+1)/2$	$(-1)^t D$	${q_+}^2/2+qb^*$	$q_+/2$	$q_+/2$	$-b$
31	φ_7, φ_8	$qq_+(q^2+1)/2$	$(-1)^t D$	$qq_+/2+q^2b^*$	q	0	0
32	φ_9	$q(q^2+1)$	D	q	q	q	0
	Число классов	1	1	4	2	2	4

Таблица B1′

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		7	8	9	10
		$b_1(i)$ $(i \in R_1)$	$b_2(i)$ $(i \in R_2)$	$b_3(i,j)$ $(i,j \in T_1, i<j)$	$b_4(i,j)$ $(i,j \in T_2, i<j)$
18	$\chi_8^{(k)}$	0	α_{ik}	$\alpha_{ik}\alpha_{jk}$	0
19	$\chi_9^{(k)}$	0	$-\alpha_{ik}$	$\alpha_{ik}\alpha_{jk}$	0
20	$\xi_1^{(k)}$	0	0	0	$-\beta_{ik}-\beta_{jk}$
21	${\xi'}_1^{(k)}$	0	0	0	$\beta_{ik}+\beta_{jk}$
22	$\xi_3^{(k)}$	0	0	$\alpha_{ik}+\alpha_{jk}$	0
23	${\xi'}_3^{(k)}$	0	0	$\alpha_{ik}+\alpha_{jk}$	0
24	$\xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}$	0	0	0	0
25	${\xi'}_{21}^{(k)}, {\xi'}_{22}^{(k)}$	0	0	0	$(-1)^j\beta_{ik}+(-1)^i\beta_{jk}$
26	$\xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)}$	0	0	$(-1)^j\alpha_{ik}+(-1)^i\alpha_{jk}$	0
27	${\xi'}_{41}^{(k)}, {\xi'}_{42}^{(k)}$	0	0	0	0
28	φ_1, φ_2	0	0	0	$-s(i,j)$
29	φ_3, φ_4	0	0	0	$s(i,j)$
30	φ_5, φ_6	0	0	$s(i,j)$	0
31	φ_7, φ_8	0	0	$-s(i,j)$	0
32	φ_9	0	0	$2(-1)^{i+j}$	$-2(-1)^{i+j}$
	Ч. кл.	$(q^2-1)/4$	$(q^2-1)/4$	$(q-3)(q-5)/4$	$(q-1)(q-3)/4$

Таблица B2′

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		11	12	13	14	15
		$b_5(i,j)$ $(i \in T_2, j \in T_1)$	$b_6(i)$ $(i \in T_2)$	$b_7(i)$ $(i \in T_2)$	$b_8(i)$ $(i \in T_1)$	$b_9(i)$ $(i) \in T_1)$
18	$\chi_8^{(k)}$	0	q_+	1	$\alpha_{2ik} + q_+$	$\alpha_{2ik} + 1$
19	$\chi_9^{(k)}$	0	$-q_+$	-1	$q\alpha_{2ik} + q_+$	1
20	$\xi_1^{(k)}$	$-\beta_{ik}$	$q_-\beta_{ik}$	$-\beta_{ik}$	0	0
21	${\xi'}_1^{(k)}$	$-\beta_{ik}$	$-q_-\beta_{ik}$	β_{ik}	0	0
22	$\xi_3^{(k)}$	α_{jk}	0	0	$q_+\alpha_{ik}$	α_{ik}
23	${\xi'}_3^{(k)}$	$-\alpha_{jk}$	0	0	$q_+\alpha_{ik}$	α_{ik}
24	$\xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}$	$(-1)^{j+1}\beta_{ik}$	0	0	0	0
25	${\xi'}_{21}^{(k)}, {\xi'}_{22}^{(k)}$	0	$(-1)^{i+1}q_-\beta_{ik}$	$(-1)^i\beta_{ik}$	0	0
26	$\xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)}$	0	0	0	$(-1)^i q_+\alpha_{ik}$	$(-1)^i\alpha_{ik}$
27	${\xi'}_{41}^{(k)}, {\xi'}_{42}^{(k)}$	$(-1)^{i+1}\alpha_{jk}$	0	0	0	0
28	φ_1, φ_2	$(-1)^{i+1}$	$(-1)^i q_-$	$(-1)^{i+1}$	0	0
29	φ_3, φ_4	$(-1)^{i+1}$	$(-1)^{i+1} q_-$	$(-1)^i$	0	0
30	φ_5, φ_6	$(-1)^j$	0	0	$(-1)^i q_+$	$(-1)^i$
31	φ_7, φ_8	$(-1)^{j+1}$	0	0	$(-1)^i q_+$	$(-1)^i$
32	φ_9	0	q_-	-1	q_+	1
	Число кл.	$(q-1)(q-3)/4$	$(q-1)/2$	$(q-1)/2$	$(q-3)/2$	$(q-3)/2$

Таблица C′

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (продолжение)

		16	17	18	19
		$c_1(i), c_1(i)'$ $(i \in T_2)$	$c_{21}(i), c_{21}(i)'$, $c_{22}(i), c_{22}(i)'$ $(i \in T_2)$	$c_3(i), c_3(i)'$ $(i \in T_1)$	$c_{41}(i), c_{41}(i)'$, $c_{42}(i), c_{42}(i)'$ $(i \in T_1)$
18	$\chi_8^{(k)}$	0	0	$q_+\alpha_{ik}$	α_{ik}
19	$\chi_9^{(k)}$	0	0	$q_+\alpha_{ik}$	α_{ik}
20	$\xi_1^{(k)}$	$q_- - \beta_{ik}$	$-\beta_{ik} - 1$	q_-	-1
21	${\xi'}_1^{(k)}$	$-q_- - q\beta_{ik}$	1	q_-	-1
22	$\xi_3^{(k)}$	q_+	1	$q_+ + \alpha_{ik}$	$\alpha_{ik} + 1$
23	${\xi'}_3^{(k)}$	$-q_+$	-1	$q_+ + q\alpha_{ik}$	1
24	$\xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}$	$-q_+\beta_{ik}/2$	$\beta_{ik}b$	$(-1)^i q_-$	$(-1)^{i+1}$
25	${\xi'}_{21}^{(k)}, {\xi'}_{22}^{(k)}$	$(-1)^{i+1}q_- - q_-\beta_{ik}/2$	$(-1)^i - \beta_{ik}b$	0	0
26	$\xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)}$	0	0	$(-1)^i q_+ + q_+\alpha_{ik}/2$	$(-1)^i - \alpha_{ik}b$
27	${\xi'}_{41}^{(k)}, {\xi'}_{42}^{(k)}$	$(-1)^{i+1}q_+$	$(-1)^{i+1}$	$q_-\alpha_{ik}/2$	$\alpha_{ik}b$
28	φ_1, φ_2	$q_-/2 - (-1)^i$	$b^* - (-1)^i$	$q_-/2$	b
29	φ_3, φ_4	$-q_-/2 - (-1)^i q$	$-b^*$	$q_-/2$	b
30	φ_5, φ_6	$q_+/2$	$-b^*$	$q_+/2 + (-1)^i$	$-b + (-1)^i$
31	φ_7, φ_8	$-q_+/2$	b^*	$q_+/2 + (-1)^i q$	$-b$
32	φ_9	$(-1)^i q_+$	$(-1)^{i+1}$	$(-1)^i q_+$	$(-1)^i$
	Ч. кл.	$q - 1$	$2(q - 1)$	$q - 3$	$2(q - 3)$

Таблица D′

Таблица характеров группы $\mathbf{Sp}_4(q)$, q нечётно (окончание)

		20	21	22	23
		d_1	d_{21}, d'_{21}, d_{22}, d'_{22}	d_{31}, d_{33}	d_{32}, d_{34}
18	$\chi_8^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$(-1)^k q_+{}^2$	$(-1)^k q_+$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
19	$\chi_9^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$(-1)^k q_+{}^2$	$(-1)^k q_+$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
20	$\xi_1^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q_- s(2,k)$	$q - s(2,k)$	$-s(2,k)$	$-s(2,k)$
21	${\xi'}_1^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$qq_- s(2,k)$	$(-1)^{k+1} q$	0	0
22	$\xi_3^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q_+ s(2,k)$	$s(2,k) + q$	$s(2,k)$	$s(2,k)$
23	${\xi'}_3^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$qq_+ s(2,k)$	$(-1)^k q$	0	0
24	$\xi_{21}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$(q^2-1)s(k,t)/2$	$(-1)^{k+1} q_+/2 - (-1)^t q_- b$	$s(k,t)b$	$(-1)^k b + (-1)^t b^*$
25	${\xi'}_{21}^{(k)}, {\xi'}_{22}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q_-{}^2 d(k,t)/2$	$(-1)^{k+1} q_-/2 - (-1)^t q_- b$	$-d(k,t)b$	$(-1)^{k+1} b + (-1)^t b^*$
26	$\xi_{41}^{(k)}, \xi_{42}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q_+{}^2 s(k,t)/2$	$(-1)^k q_+/2 - (-1)^t q_+ b$	$-s(k,t)b$	$(-1)^{k+1} b - (-1)^t b^*$
27	${\xi'}_{41}^{(k)}, {\xi'}_{42}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$-q_-{}^2 d(k,t)/2$	$(-1)^k q_-/2 - (-1)^t q_+ b$	$d(k,t)b$	$(-1)^k b - (-1)^t b^*$
28	φ_1, φ_2	$q_- d(2,t)/2$	$q_- d(2,t)/2 - q(-1)^t b$	$-d(2,t)/2$	$-d(2,t)/2$
29	φ_3, φ_4	$qq_- d(2,t)/2$	$q_-(-1)^t - (-1)^t b$	$s(1,t)(b^* - b)/2$	$s(2,t)(b - b^*)/2$
30	φ_5, φ_6	$q_+ s(2,t)/2$	$q_+ s(2,t)/2 + q(-1)^t b^*$	$s(2,t)/2$	$s(2,t)/2$
31	φ_7, φ_8	$qq_+ s(2,t)/2$	$q_+(-1)^t/2 + (-1)^t b^*$	$s(2,t)(b^* - b)/2$	$d(2,t)(b^* - b)/2$
32	φ_9	$(-1)^t(q^2+1)$	$(-1)^t$	$(-1)^t$	$(-1)^t$
	Ч. кл.	1	4	2	2

3. Доказательство теоремы

Мы будем рассматривать таблицу характеров $\mathrm{X}(G)$ группы G (табл. A, …, D′ выше), используя предложения 1.1 и 1.2. Тот факт, что (по п. (1) предложения 1.1) полупропорциональные неприводимые характеры группы имеют одно и то же множество корней (нулей), используется далее без оговорок.

Пусть $\widetilde{i}$ и $\widehat{j}$ означают полосу и колонку таблицы характеров $\mathrm{X}(G)$, помеченные номерами i и j соответственно. Если $g \in G$ и $\chi(g) = c$ для всех характеров χ полосы $\widetilde{i}$, то мы пишем $\widetilde{i}(g) = c$. Если на пересечении полосы $\widetilde{i}$ и колонны $\widehat{j}$ стоит конкретное число, без параметров и чисел b или b^*, то мы называем его *значением* $\widetilde{i}$ *на* $\widehat{j}$ и обозначаем через $\widetilde{i}(\widehat{j})$.

Полосы $\widetilde{i}$ и $\widetilde{j}$ будем называть *полупропорциональными*, если некоторый характер полосы $\widetilde{i}$ полупропорционален некоторому характеру полосы $\widetilde{j}$.

Будем говорить, что полосы $\widetilde{i}$ и $\widetilde{j}$ не являются равнокорневыми на элементе $g \in G$, если точно одно из значений $\widetilde{i}(g)$ и $\widetilde{j}(g)$ равно нулю. По п. (1) предложения 1.1 полосы, не являющиеся равнокорневыми хотя бы на одном элементе группы, не являются полупропорциональными.

Предположим, что

ψ и φ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G, лежащие в полосах с номерами m и n соответственно (следовательно, $\widetilde{m}$ полупропорционально $\widetilde{n}$). В противоречие с утверждением (2) теоремы пусть $m \neq n$.

Прежде всего заметим, что $\{m, n\} \neq \{25, 26\}$, применив п. (2) предложения 1.1 при $g_1 = a_1$ и $g_2 = a_{31}$. Далее, как видно из таблиц, для каждой полосы $\widetilde{s}$, отличной от $\widetilde{25}$ и $\widetilde{26}$, существует элемент g, на котором характеры этой полосы принимают значение ± 1. Из последних двух предложений согласно предложению 1.2 следует, что

$$\text{одно из чисел } \varphi(1) \text{ и } \psi(1) \text{ делит другое.} \tag{3.1}$$

Если $\varphi(1) = \psi(1)$, то, как видно из таблиц, пара $\{m, n\}$ есть одна из $\{8, 9\}$, $\{12, 15\}$, $\{16, 20\}$, $\{17, 21\}$, $\{18, 22\}$, $\{19, 23\}$, $\{24, 27\}$. Согласно п. (3) предложения 1.1 в каждом из этих случаев должно быть $\varphi(g) = \psi(g)$ для всех $g \in G$. Однако это равенство противоречиво: в первых шести случаях при $g = a_{31}$, а в последнем — при $g = a_{41}$. Следовательно, $\psi(1) \neq \varphi(1)$, а тогда согласно п. (3) предложения 1.1 справедливо следующее более сильное утверждение:

$$\text{не существует элемента } g \text{ в } G \text{ такого, что } |\varphi(g)| = |\psi(g)| \neq 0. \tag{3.2}$$

Пусть

$\mathcal{X} := \{\widetilde{1}, \widetilde{2}, \ldots, \widetilde{32}\}$,

$\mathcal{Y}$ — множество всех полос $\widetilde{s}$ таких, что любой характер, лежащий в $\widetilde{s}$, не полупропорционален никакому характеру любой другой полосы $\widetilde{t}$ (т. е. $\widetilde{s}$ не полупропорциональна с $\widetilde{t} \neq \widetilde{s}$),

$\mathcal{Z} := \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$.

Мы должны показать, что $\mathcal{Z} = \varnothing$, т. е. $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$.

Поскольку θ_0 $(= 1_G)$ в отличие от других неприводимых характеров не имеет нулевых значений, то $\widetilde{1} \in \mathcal{Y}$.

Далее, так как θ_{13} — единственный характер, имеющий значение 0 в 3-й колонке (т. е. на a_{21}), то $\widetilde{10} \in \mathcal{Y}$.

Теперь рассмотрим полосы из $\mathcal{X} \setminus \{\widetilde{1}, \widetilde{13}\}$, имеющие значение 0 в 4-й колонке. Это в точности полосы $\widetilde{2}$, $\widetilde{4}$, $\widetilde{7}$, $\widetilde{9}$, $\widetilde{21}$, $\widetilde{29}$. Следовательно, они не полупропорциональны другим полосам. $\widetilde{2}$ и $\widetilde{4}$ не являются равнокорневыми с $\widetilde{7}, \widetilde{9}, \widetilde{21}, \widetilde{29}$ на a_{22} и не являются равнокорневыми между собой на $b_1(i)$. Значит, $\{\widetilde{2}, \widetilde{4}\} \subseteq \mathcal{Y}$.

Кроме того, так как среди полос $\widetilde{7}, \widetilde{9}, \widetilde{21}, \widetilde{29}$ только $\widetilde{7}$ имеет ненулевое значение в 7-й колонке, то $\widetilde{7} \in \mathcal{Y}$.

Из $\widetilde{9}, \widetilde{21}, \widetilde{29}$ лишь $\widetilde{9}$ имеет ненулевое значение на $\widehat{7}$, и поэтому $\widetilde{9} \in \mathcal{Y}$.

Кроме того, $\widetilde{21}$ и $\widetilde{29}$ не полупропорциональны по п. (2) предложения 1.1 при $g_1 = a_1$ и $g_2 = a_{21}$ (здесь $\widetilde{29}(a_1)/\widetilde{21}(a_1) = 1/2$, но частные $\varphi_3(a_{21})\widetilde{21}/(a_{21}) = -(q_-/2+qb) = -(1+\varepsilon q\sqrt{\varepsilon q})/2$ и $\varphi_4(a_{21})/\widetilde{21}(a_{21}) = -(q_-/2+qb^*) = -(1-\varepsilon q\sqrt{\varepsilon q})/2$ отличны от $1/2$ и -2). Значит, $\{\widetilde{21}, \widetilde{29}\} \subseteq \mathcal{Y}$.

Таким образом,

$$\widetilde{1}, \widetilde{2}, \widetilde{4}, \widetilde{7}, \widetilde{9}, \widetilde{10}, \widetilde{21}, \widetilde{29} \in \mathcal{Y}, \tag{3.3}$$

и далее мы будем сравнивать между собой лишь остальные полосы (среди которых должны находиться искомые φ и ψ).

Среди полос, не упомянутых в (3.3), имеют 0 в 5-й колонке лишь $\widetilde{6}, \widetilde{8}, \widetilde{23}, \widetilde{31}$. Среди них лишь $\widetilde{6}$ имеет ненулевое значение на $b_1(i)$, и лишь $\widetilde{8}$ имеет ненулевое значение на $b_2(i)$, т. е. $\{\widetilde{6}, \widetilde{8}\} \subseteq \mathcal{Y}$.

Кроме того, по п. (2) предложения 1.1 $\widetilde{23}$ и $\widetilde{31}$ не полупропорциональны, что видно из сравнения их значений на a_1 и a_{21} (здесь $\widetilde{31}(a_1)/\widetilde{23}(a_1) = 1/2$, но частные $\varphi_7(a_{21})/\widetilde{23}(a_{21}) = q_+/2 + qb^* = (1 + \varepsilon q\sqrt{\varepsilon q})/2$ и $\varphi_8(a_{21})/\widetilde{23}(a_{21}) = q_+/2 + qb = (1 - \varepsilon q\sqrt{\varepsilon q})/2$ отличны от $1/2$ и -2). Поэтому $\{\widetilde{23}, \widetilde{31}\} \subseteq \mathcal{Y}$.

Первое нулевое значение в 6-й колонке имеют лишь $\widetilde{17}, \widetilde{19}, \widetilde{32}$. Из них лишь $\widetilde{32}$ имеет ненулевые значения в 9-й и 10-й колонках, и, следовательно, $\widetilde{32} \in \mathcal{Y}$.

Степени характеров из $\widetilde{17}, \widetilde{19}$ различны, но их значения на a_{32} имеют равные модули. По п. (3) предложения 1.1 эти характеры не полупропорциональны, и поэтому $\widetilde{17}, \widetilde{19} \in \mathcal{Y}$.

Почти все из не упомянутых выше полос имеют 0 в 7-й колонке. Из них лишь $\widetilde{3}$ имеет ненулевые значения на классах из $B2 - B_4$ (т. е. в $\widehat{8}, \widehat{9}, \widehat{10}$). Следовательно, $\widetilde{3} \in \mathcal{Y}$.

Единственными из не упомянутых выше характеров, имеющих ненулевое значение в 7-й колонке, являются характеры из $\widetilde{5}$ и (возможно) некоторые характеры из $\widetilde{11}$. Из них лишь $\widetilde{5}$ имеет ненулевое значение на B_5 (т. е. в $\widehat{11}$), и, следовательно, по (3.1) $\widetilde{5} \in \mathcal{Y}$.

Таким образом,

$$\widetilde{1} - \widetilde{10}, \widetilde{17}, \widetilde{19}, \widetilde{21}, \widetilde{23}, \widetilde{29}, \widetilde{31}, \widetilde{32} \in \mathcal{Y}. \tag{3.4}$$

Остались нерассмотренными полосы $\widetilde{11} - \widetilde{16}, \widetilde{18}, \widetilde{20}, \widetilde{22}, \widetilde{24} - \widetilde{28}, \widetilde{30}$. Среди них лишь в $\widetilde{11}$ степени характеров не делятся на $q^2 + 1$, и, следовательно, по утверждению (3.1) $\widetilde{11} \in \mathcal{Y}$.

Кроме того, полоса $\widetilde{28}$ не может быть равнокорневой ни с одной из полос $\widetilde{12} - \widetilde{16}, \widetilde{18}, \widetilde{22}, \widetilde{24} - \widetilde{30}$ (см. значения на B_5, B_6, B_7), и $\widetilde{28}$ не полупропорциональна $\widetilde{20}$ по предложению 1.1(2) (рассмотреть значения на a_1 и a_{41}). Следовательно, $\widetilde{28} \in \mathcal{Y}$.

Подобно, $\widetilde{30}$ не может быть равнокорневой ни с одной из полос $\widetilde{11} - \widetilde{16}, \widetilde{18}, \widetilde{20}, \widetilde{24} - \widetilde{28}$ (см. значения на B_5, B_6, B_9), и $\widetilde{30}$ не полупропорционально $\widetilde{22}$ по предложению 1.1(2) (рассмотреть значения на a_1 и a_{41}). Следовательно, $\widetilde{30} \in \mathcal{Y}$.

Итак,

$$\widetilde{1} - \widetilde{11}, \widetilde{17}, \widetilde{19}, \widetilde{21}, \widetilde{23}, \widetilde{28} - \widetilde{32} \in \mathcal{Y} \tag{3.5}$$

и $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \subseteq \{\widetilde{12} - \widetilde{16}, \widetilde{18}, \widetilde{20}, \widetilde{22}, \widetilde{24} - \widetilde{27}\}$. Полосы $\widetilde{12} - \widetilde{16}, \widetilde{18}, \widetilde{20}, \widetilde{22}$ имеют значения ± 1 на a_{41}, и, следовательно, по (3.2)

$$\text{полосы } \widetilde{12} - \widetilde{16}, \widetilde{18}, \widetilde{20}, \widetilde{22} \text{ попарно не полупропорциональны.} \tag{3.6}$$

Кроме того, степени характеров различных полос из $\widetilde{24}, \widetilde{25}, \widetilde{26}, \widetilde{27}$ попарно не делят одна другую (см. следующую таблицу). Следовательно, по (3.1)

$$\text{полосы } \widetilde{24}, \widetilde{25}, \widetilde{26}, \widetilde{27} \text{ попарно не полупропорциональны.} \tag{3.7}$$

Выпишем степени $\widetilde{s}(1)$ характеров из полос $\widetilde{s}$ в (3.6) и (3.7) (см. табл. 1, здесь $Q := q^2 + 1$).

Т а б л и ц а 1

$\widetilde{s}$	$\widetilde{12}$	$\widetilde{13}$	$\widetilde{14}$	$\widetilde{15}$	$\widetilde{16}$	$\widetilde{18}$	$\widetilde{20}$	$\widetilde{22}$	$\widetilde{24}$	$\widetilde{25}$	$\widetilde{26}$	$\widetilde{27}$
$\widetilde{s}(1)$	Qq_-q_+	Qq_+^2	Qq_-^2	Qq_-q_+	Qq_-	Qq_+	Qq_-	Qq_-q_+	$Qq_-q_+/2$	$Qq_-^2/2$	$Qq_+^2/2$	$Qq_-q_+/2$

Т а б л и ц а 2

$(\widetilde{m},\widetilde{n})$	$(\widetilde{12},\widetilde{24})$	$(\widetilde{12},\widetilde{27})$	$(\widetilde{13},\widetilde{26})$	$(\widetilde{14},\widetilde{25})$	$(\widetilde{15},\widetilde{24})$	$(\widetilde{15},\widetilde{27})$
$\widetilde{m}(1)/\widetilde{n}(1)$	2	2	2	2	2	2
$\widetilde{m}(a_{41})/\widetilde{n}(a_{41})$	$1/b^*, 1/b$	$1/b, 1/b^*$	$-1/b, -1/b^*$	$-1/b^*, -1/b$	$-1/b^*, -1/b$	$-1/b, -1/b^*$
$(\widetilde{m},\widetilde{n})$	$(\widetilde{24},\widetilde{20})$	$(\widetilde{24},\widetilde{22})$	$(\widetilde{25},\widetilde{20})$	$(\widetilde{26},\widetilde{22})$	$(\widetilde{27},\widetilde{20})$	$(\widetilde{27},\widetilde{22})$
$\widetilde{m}(1)/\widetilde{n}(1)$	$q_+/2$	$q_-/2$	$q_-/2$	$q_+/2$	$q_+/2$	$q_-/2$
$\widetilde{m}(a_{41})/\widetilde{n}(a_{41})$	$-b^*,\ -b$	$b^*,\ b$	$b^*,\ b$	$-b,\ -b^*$	$-b,\ -b^*$	$b\ , b^*$

Мы можем считать, что $\varphi \in \widetilde{m}$ с $m \in \{12, 13, 14, 15, 15, 18, 20, 22\}$ и $\psi \in \widetilde{n}$ с $n \in \{24, 25, 26, 27\}$. Согласно (3.1) с точностью до порядка возможны (при $m \neq n$) лишь следующие пары $(\widetilde{m},\widetilde{n})$ (см. табл. 2).

Из табл. 2 видно, что в каждом из этих 12-и случаев число $\widetilde{m}(a_{41})/\widetilde{n}(a_{41})$ отлично как от $\widetilde{m}(1)/\widetilde{n}(1)$, так и от $-\widetilde{n}(1)/\widetilde{m}(1)$, но это противоречит п. (2) предложения 1.1.

Итак, $\{\varphi,\psi\} \subseteq \widetilde{i}$, где $i \in \{1,\dots,32\}$, т. е. $m = n$ и, в частности, $\varphi(1) = \psi(1)$, т. е. верно утверждение (1) теоремы.

Для доказательства утверждения (2) остаётся исключить некоторые i в предыдущем предложении, а именно, показать, что $\{m,n\} \subseteq \widetilde{i}$, где $11 \leq i \leq 27$. Это легко увидеть, рассмотрев значения характеров на $c_{41}(1)$ (если, например, $\{\varphi,\psi\} \subseteq \widetilde{2}$, то $\varphi(c_{41}(1))/\psi(c_{41}(1)) = b/b^* \notin \{1,-1\}$).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 380 с.
2. **Белоногов В. А.** Взаимодействия и D-блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 4–44.
3. **Белоногов В. А.** О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.
4. **Белоногов В. А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.
5. **Белоногов В. А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
6. **Белоногов В. А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. С. 19–37.
7. **Белоногов В. А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 299–314.
8. **Srinivasan B.** The characters of the finite symplectic group $\mathrm{Sp}(4, q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 131, no. 2. P. 488–525.
9. **Przygocki A.** Schur indices of symplectic groups // Commun. Algebra. 1982. Vol. 10, no. 3. P. 279–310.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 26.04.2012

Том 18 № 3 2012

УДК 512.544

ГРУППЫ ФИНИТАРНЫХ ПОДСТАНОВОК И ТОПОЛОГИЯ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ[1]

В. В. Беляев

В данной работе исследуется строение замыкания группы финитарных подстановок в топологии поточечной сходимости. С помощью полученных результатов показано, в частности, что любой локально внутренний эндоморфизм (автоморфизм) произвольной подгруппы группы финитарных подстановок продолжается до некоторого локально внутреннего эндоморфизма (автоморфизма) всей группы.

Ключевые слова: группы финитарных подстановок, топология поточечной сходимости, локально внутренние эндоморфизмы и автоморфизмы групп.

V. V. Belyaev. Finitary permutation groups and the topology of pointwise convergence.

We investigate the structure of the closure of a finitary permutation group in the topology of pointwise convergence. The obtained results are used to show, in particular, that any locally inner endomorphism (automorphism) of an arbitrary subgroup from a finitary permutation group is continued to some locally inner endomorphism (automorphism) of the whole group.

Keywords: finitary permutation groups, topology of pointwise convergence, locally inner endomorphisms and automorphisms of groups.

1. Введение

Пусть $G \leqslant \mathrm{Sym}(G)$ и $\overline{G}$ — замыкание группы G в топологии поточечной сходимости на множестве всех преобразований Ω. Нетрудно понять, что $\overline{G}$ содержит лишь инъективные преобразования и, следовательно, является моноидом с правым сокращением. Вообще говоря, моноид $\overline{G}$ не является группой. Так, например, для $G = \mathrm{FSym}(\Omega)$ замыкание $\overline{G}$ совпадает с множеством всех инъективных преобразований Ω. Заметим также, что в случае группы финитарных подстановок $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ топология поточечной сходимости на G сильнее централизаторной топологии, у которой базис окрестностей единицы состоит из централизаторов конечных подмножеств из G. Отсюда, очевидно, следует, что сопоставление каждому $g \in G$ внутреннего автоморфизма $g\pi\colon x \mapsto x^g$, $x \in G$, является непрерывным отображением группы G в группу внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(G)$, где G и $\mathrm{Inn}(G)$ рассматриваются как группы подстановок множеств Ω и G, соответственно, снабженные топологиями поточечной сходимости. Непрерывное отображение $\pi\colon G \to \mathrm{Inn}(G)$ может быть продолжено до непрерывного отображения моноида $\overline{G}$ в $\overline{\mathrm{Inn}(G)}$, моноид всех локально внутренних эндоморфизмов группы G. Таким образом между моноидами $\overline{G}$ и $\overline{\mathrm{Inn}(G)}$ существует определенная связь, которая может быть описана двумя способами: топологическим и алгебраическим.

В данной работе мы используем алгебраический язык для исследования связи между моноидами $\overline{G}$ и $\overline{\mathrm{Inn}(G)}$. Такой способ, как нам представляется, проще и удобнее с точки зрения приложений. Основу предлагаемого здесь алгебраического подхода составляет понятие *псевдосопряжения*, обобщающее для инъективных преобразований обычное понятие группового сопряжения. В разд. 4 данной работы показано, что для любого инъективного преобразования g множества Ω и произвольного преобразования x существует единственное преобразование y, удовлетворяющее двум условиям: $xg = gy$ и $\mathrm{supp}(y) \subseteq \Omega^g$. Это единственное преобразование y

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00349-а) и АВПЦ “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/12136).

мы обозначаем через x^g и называем псевдосопряженным с x посредством g. Очевидно, что для подстановки g псевдосопряжение посредством g совпадает с обычным сопряжением, т. е. $x^g = g^{-1}xg$.

Важность понятия псевдосопряжения при изучении замыкания $\overline{G}$ группы финитарных подстановок G объясняется тем, что группа G инвариантна относительно действия псевдосопряжением элементами моноида $\overline{G}$, т. е. характер вложения G в $\overline{G}$ напоминает вложение нормальной подгруппы. Более точно это действие псевдосопряжением моноида $\overline{G}$ на группе G может быть описано следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ и $\overline{G}$ — замыкание группы G в топологии поточечной сходимости на множестве всех преобразований Ω. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любых $g \in \overline{G}$ и $x \in G$ преобразование x^g, псевдосопряженное с x посредством g, принадлежит G. Более того, $G^g = G_{(\Delta)}$, где $\Delta = \Omega - \Omega^g$. В частности, если $\Delta = \varnothing$ (т. е. g — биекция), то $G^g = G$.*

2. *Отображение $g\pi\colon G \to G$, определенное для $g \in \overline{G}$ равенством $x(g\pi) = x^g$, $x \in G$, является локально внутренним эндоморфизмом группы G. Более того, π — эпиморфизм моноида $\overline{G}$ на моноид $\overline{\mathrm{Inn}(G)}$ всех локально внутренних эндоморфизмов группы G.*

3. *Преобразования g и h из $\overline{G}$ индуцируют псевдосопряжением на G равные эндоморфизмы (т. е. $g\pi = h\pi$) тогда и только тогда, когда $g = zh$ для некоторого z из центра $\mathrm{Z}(\overline{G})$ моноида $\overline{G}$.*

С помощью основной теоремы 1.1 легко показать, что любой локально внутренний эндоморфизм (автоморфизм) произвольной подгруппы из группы финитарных подстановок продолжается до некоторого локально внутреннего эндоморфизма (автоморфизма) всей группы. Более того, как показывает следующий результат, существует продолжение с особым свойством.

Следствие 1.1. *Пусть $H \leqslant G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ и φ — локально внутренний эндоморфизм группы H. Тогда найдется такой локально внутренний эндоморфизм ψ группы G, что выполняются следующие утверждения.*

1. $\psi|H = \varphi$.
2. *Для любого конечного $K \subseteq G$ можно выбрать такой $h \in H$, что $x^\varphi = x^h$ для любого $x \in K$.*
3. $G^\psi \cap H = H^\varphi$.
4. $G = \bigcup_{h \in H} h^{-1}G^\psi h$.
5. *Из $H^\varphi = H$ следует $G^\psi = G$.*

Очевидно, что условия 1 и 2 следствия 1.1 являются основными, а остальные условия 3–5 тривиально следуют из первых двух.

Также основную теорему можно использовать для получения необходимых и достаточных условий того, что замыкание $\overline{G}$ есть группа. Действительно, из теоремы 1.1 вытекает, что $\overline{G}$ является центральным расширением моноида $\overline{\mathrm{Inn}(G)}$ (определение центрального расширения моноидов дано в разд. 3), поэтому $\overline{G}$ есть группа в том и только том случае, когда любой локально внутренний эндоморфизм группы G сюръективен, т. е. является автоморфизмом группы G. Проведенная редукция позволяет с помощью некоторых результатов из [1; 2] получить

Следствие 1.2. *Следующие условия для группы $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ эквивалентны.*

1. $\overline{G} \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$.
2. $\overline{\mathrm{Inn}(G)} \leqslant \mathrm{Aut}(G)$.
3. *Все точки из любой G-орбиты соизмеримы, т. е. если $\beta \in \Omega$ и $\alpha \in \beta^G$, то G_β-орбита точки α конечна.*

Обратим внимание, что согласно теореме 1.1 в том случае, когда $\overline{G}$ — группа, группа G является нормальной подгруппой в $\overline{G}$ и факторгруппа $\overline{G}/\mathrm{Z}(\overline{G})$ изоморфна группе локально внутренних автоморфизмов группы G.

2. Обозначения и терминология

В основном в данной работе используются стандартные обозначения и термины теории групп подстановок. Так, например, $\mathrm{Sym}(\Omega)$ — группа всех подстановок множества Ω с правым действием на множестве точек, $\mathrm{FSym}(\Omega)$ — группа всех финитарных подстановок Ω, т. е. подстановок с конечным носителем, $G_{(\Delta)}$ — поточечный стабилизатор $\Delta \subseteq \Omega$ в группе $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$. Однако, используя замыкания групп подстановок в топологии поточечной сходимости, мы вынуждены выходить за пределы теории групп подстановок, и поэтому необходимо пояснить те термины и обозначения, которые используются при этом.

Произвольное отображение $f\colon \Omega \to \Omega$ мы будем называть *преобразованием* множества Ω. Образ точки $\alpha \in \Omega$ при отображении f обозначается через α^f.

Множество всех преобразований Ω с операцией правой композиции является моноидом, который мы будем обозначать через $\mathrm{T}(\Omega)$ и называть *моноидом всех преобразований* множества Ω. Понятно, что $\mathrm{Sym}(\Omega)$ — подгруппа моноида $\mathrm{T}(\Omega)$.

Рассматривая преобразования Ω, мы сохраняем многие соглашения и обозначения, которые используются нами для подстановок. Так, например, $\mathrm{supp}(t) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^t \neq \alpha\}$ и $\mathrm{fix}(t) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^t = \alpha\}$ для произвольного $t \in \mathrm{T}(\Omega)$. Если $M \subseteq \mathrm{T}(\Omega)$, то $\mathrm{supp}(M) = \bigcup_{t\in M} \mathrm{supp}(t)$ и $\mathrm{fix}(M) = \bigcap_{t\in M} \mathrm{fix}(t)$. Ясно, что $\mathrm{supp}(M) \cup \mathrm{fix}(M) = \Omega$ и $\mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{fix}(M) = \varnothing$.

Ограничение преобразования $t \in \mathrm{T}(\Omega)$ на множество $\Delta \subseteq \Omega$ обозначается через $t|\Delta$. Таким образом, запись $t|\Delta = g|\Delta$ означает, что $\alpha^t = \alpha^g$ для любого $\alpha \in \Delta$.

В полугруппах для централизаторов подмножеств и центра нами применяются стандартные групповые обозначения: $\mathrm{C}_X(Y)$ — централизатор множества Y в множестве X, т. е. множество всех элементов из X, перестановочных с каждым элементом из Y; $\mathrm{Z}(S)$ — центр полугруппы S, т. е. централизатор S в S. Очевидно, $\mathrm{Z}(S)$ — подполугруппа в S.

Напомним также терминологию, связанную с фильтрами, которые используются нами в доказательстве основной теоремы.

Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ из множества M называется *фильтром* над M, если оно обладает следующими свойствами.

1. Из $X \subseteq Y \subseteq M$ и $X \in \mathcal{F}$ следует $Y \in \mathcal{F}$.
2. Из $X, Y \in \mathcal{F}$ следует $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
3. $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Фильтр $\mathcal{F}$ над M называется *ультрафильтром*, если из $X \subseteq M$ следует $X \in \mathcal{F}$ или $M - X \in \mathcal{F}$.

С помощью аксиомы выбора можно получить следующий результат: любой фильтр над M содержится в некотором ультрафильтре над M.

Наконец, несколько слов об обозначениях, связанных с морфизмами (в этом случае мы сохраняем правосторонние обозначения).

Гомоморфизм $\varphi\colon M \to M$ моноида M называется *эндоморфизмом* M. Эндоморфизм φ группы G называется *локально внутренним*, если для любого конечного $K \subseteq G$ найдется такой $g \in G$, что $x^\varphi = x^g$ для любого $x \in K$.

Очевидно, что любой локально внутренний эндоморфизм группы G является инъективным преобразованием множества G. Множество всех локально внутренних эндоморфизмов группы G образует подмоноид в моноиде всех эндоморфизмов группы G. Обозначение $\overline{\mathrm{Inn}(G)}$ для моноида всех локально внутренних эндоморфизмов группы G выбрано не случайно, а согласно нашему обозначению для оператора замыкания в топологии поточечной сходимости. Дело в том, что моноид локально внутренних эндоморфизмов можно рассматривать как замыкание группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(G)$ в топологии поточечной сходимости на $\mathrm{T}(G)$.

Основные определения и вспомогательные результаты, связанные с топологией поточечной сходимости, излагаются в следующем разделе.

3. Топология поточечной сходимости

Пусть M — произвольное подмножество из моноида $\mathrm{T}(\Omega)$ всех преобразований множества Ω.

Преобразование $f \in \mathrm{T}(\Omega)$ мы будем называть *M-предельным*, или *предельным для* M, если для любого конечного $\Delta \subseteq \Omega$ найдется такой $m \in M$, что $f|\Delta = m|\Delta$.

Множество всех M-предельных преобразований мы будем обозначать через $\overline{M}$. Нетрудно проверить, что для любых подмножеств M и N из $\mathrm{T}(\Omega)$ справедливо

1. $M \subseteq \overline{M}$.
2. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.
3. $\overline{\varnothing} = \varnothing$.
4. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

Таким образом, на моноиде $\mathrm{T}(\Omega)$ определена структура топологического пространства. Эта топология называется *топологией поточечной сходимости*, а $\overline{M}$ — *замыканием* M в топологии поточечной сходимости.

Очевидно, произведение xy преобразований x и y является непрерывной функцией от x и y в топологии поточечной сходимости.

В этом разделе работы нас будут интересовать общие свойства замыкания произвольных групп подстановок, которые потребуются в дальнейшем. Сначала отметим без доказательства несколько простых свойств замыкания.

3.1. Если M состоит из инъективных преобразований множества Ω, то любое M-предельное преобразование также является инъекцией.

3.2. $\mathrm{fix}(M) \subseteq \mathrm{fix}(m)$ для любых M и $m \in \overline{M}$.

3.3. $\mathrm{fix}(M) = \mathrm{fix}(\overline{M})$ *и* $\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(\overline{M})$ для любого $M \subseteq \mathrm{T}(\Omega)$.

3.4. Замыкание любой полугруппы преобразований из $\mathrm{T}(\Omega)$ также является полугруппой.

Так как в любой полугруппе инъективных преобразований выполняется закон правого сокращения, то справедливо следующее утверждение.

3.5. Замыкание любой группы подстановок из $\mathrm{Sym}(\Omega)$ в топологии поточечной сходимости на $\mathrm{T}(\Omega)$ является моноидом с правым сокращением.

Пусть $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$. Если f есть G-предельная подстановка множества Ω, то, очевидно, f^{-1} также является G-предельной подстановкой. Таким образом, верно утверждение

3.6. Для любой группы $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$ $\overline{G} \cap \mathrm{Sym}(\Omega)$ есть наибольшая подгруппа в $\overline{G}$.

Следующие свойства замыкания менее тривиальны, и мы приводим их с доказательствами.

3.7. $\mathrm{C}_T(M) = \mathrm{C}_T(\overline{M})$ для любого $M \subseteq T = \mathrm{T}(\Omega)$.

Доказательство. Из включения $M \subseteq \overline{M}$ следует включение $\mathrm{C}_T(M) \supseteq \mathrm{C}_T(\overline{M})$. Значит, нам достаточно доказать обратное включение $\mathrm{C}_T(M) \subseteq \mathrm{C}_T(\overline{M})$.

Пусть g — преобразование, перестановочное с каждым преобразованием из M, и h — произвольное преобразование из $\overline{M}$. Покажем, что $gh = hg$, т. е. $\alpha^{gh} = \alpha^{hg}$ для любой точки $\alpha \in \Omega$. Так как h — M-предельное преобразование, то найдется такое $m \in M$, что $h|\{\alpha, \alpha^g\} = m|\{\alpha, \alpha^g\}$. Но тогда $\alpha^{gh} = \alpha^{gm} = \alpha^{mg} = \alpha^{hg}$.

Из свойства 3.7 непосредственно вытекает справедливость следующего равенства.

3.8. $\mathrm{Z}(\overline{G}) = \mathrm{C}_{\overline{G}}(G)$ для любой группы $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$.

Кроме того, для центра замыкания группы подстановок справедливо следующее утверждение.

3.9. $\mathrm{Z}(\overline{G}) \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$ для любой группы $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$.

Доказательство. Согласно свойствам 3.1 и 3.6 достаточно показать, что произвольный $z \in \mathrm{Z}(\overline{G})$ является сюръекцией, т.е. $\Omega^z = \Omega$. Так как z есть G-предельное преобразование, то для любой точки $\alpha \in \Omega$ найдется такой $g \in G$, что $\alpha^z = \alpha^g$. Значит, $\alpha = \alpha^{zg^{-1}} = \alpha^{g^{-1}z} \in \Omega^z$ и $\Omega = \Omega^z$.

Итак, центр замыкания любой группы подстановок является подгруппой в замыкании. Это обстоятельство позволяет нам определить фактормоноид $\overline{G}/\mathrm{Z}(\overline{G})$. Множество всех сдвигов $x\mathrm{Z}(\overline{G})$, $x \in \overline{G}$, образует разбиение моноида $\overline{G}$, которое, очевидно, является конгруэнцией. Моноид M, полученный факторизацией $\overline{G}$ по этой конгруэнции, мы будем обозначать через $\overline{G}/\mathrm{Z}(\overline{G})$ и называть *фактормоноидом* моноида $\overline{G}$ по его центру $\mathrm{Z}(\overline{G})$, а сам моноид $\overline{G}$ будем называть *центральным расширением моноида* M.

4. Понятие псевдосопряжения

Основная цель данного раздела — обобщить понятие сопряжения в группах.

Теорема 4.1. *Пусть g — произвольное инъективное преобразование множества Ω. Тогда для любого $x \in \mathrm{T}(\Omega)$ найдется единственное $y \in \mathrm{T}(\Omega)$, удовлетворяющее следующим условиям.*

1. $xg = gy$.
2. $\mathrm{supp}(y) \subseteq \Omega^g$.

Доказательство. Сначала мы докажем существование y. Построение требуемого преобразования проводится в два этапа. Во-первых, инъективное преобразование g множества Ω индуцирует изоморфизм
$$\mathrm{T}(\Omega) \to \mathrm{T}(\Omega^g),$$
определенный стандартным образом: $x \to g^{-1}xg$, где $x \in \mathrm{T}(\Omega)$ и g^{-1} — отображение, обратное к биекции $g\colon \Omega \to \Omega^g$. Во-вторых, тождественно продолжая преобразования множества Ω^g на всё множество Ω, мы получаем мономорфизм
$$\mathrm{T}(\Omega^g) \to \mathrm{T}(\Omega).$$

Композиция указанных двух отображений
$$\mathrm{T}(\Omega) \to \mathrm{T}(\Omega^g) \to \mathrm{T}(\Omega)$$
представляет собой инъективный эндоморфизм моноида $\mathrm{T}(\Omega)$, который мы будем называть *псевдосопряжением* посредством g. Если y — образ преобразования x под действием псевдосопряжения посредством g, то действие y на Ω задается следующим образом:
$$\alpha^y = \begin{cases} ((\alpha^{g^{-1}})^x)^g, & \alpha \in \Omega^g; \\ \alpha, & \alpha \notin \Omega^g. \end{cases}$$
Очевидно, что $xg = gy$ и $\mathrm{supp}(y) \subseteq \Omega^g$.

Покажем теперь единственность y. Допустим, что преобразование z также удовлетворяет указанным условиям: $xg = gz$ и $\mathrm{supp}(z) \subseteq \Omega^g$. Так как y и z действуют тождественно на $\Omega - \Omega^g$, то нам достаточно проверить равенство $y|\Omega^g = z|\Omega^g$.

Пусть $\alpha \in \Omega^g$. Тогда найдется такая точка β, что $\alpha = \beta^g$. Следовательно, $\alpha^y = \beta^{gy} = \beta^{xg} = \beta^{gz} = \alpha^z$, и потому $y|\Omega^g = z|\Omega^g$.

Преобразование y, удовлетворяющее двум условиям теоремы 4.1, мы будем обозначать через x^g и называть преобразованием, *псевдосопряженным* с x посредством g.

Из теоремы 4.1 непосредственно следует

4.2. $x^g = g^{-1}xg$ для $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$.

Докажем ряд необходимых нам свойств псевдосопряжений.

4.3. $(\mathrm{supp}(x))^g = \mathrm{supp}(x^g)$ для любого инъективного преобразования g.

Доказательство. Пусть $\alpha \in (\mathrm{supp}(x))^g$. Тогда найдется такая точка β, что $\beta^x \neq \beta$ и $\beta^g = \alpha$. Следовательно, $\beta^{xg} \neq \beta^g$, и потому $\beta^{gx^g} \neq \beta^g$, т. е. $\alpha^{x^g} \neq \alpha$. Значит, $\alpha \in \mathrm{supp}(x^g)$.

Обратно, пусть $\alpha \in \mathrm{supp}(x^g)$. Тогда $\alpha \in \Omega^g$, и, следовательно, найдется такая точка β, что $\beta^g = \alpha$. Так как $\beta^{gx^g} \neq \beta^g$, то $\beta^{xg} \neq \beta^g$, и, значит, $\beta^x \neq \beta$, т. е. $\beta \in \mathrm{supp}(x)$. Поэтому $\alpha = \beta^g \in (\mathrm{supp}(x))^g$.

4.4. $(x^g)^h = x^{gh}$ для любых инъективных преобразований g и h.

Доказательство. Подсчитаем произведение xgh двумя способами. С одной стороны, $xgh = x(gh) = ghx^{gh}$. С другой стороны, $xgh = (xg)h = gh(x^g)^h$.

Так как $\mathrm{supp}((x^g)^h) = (\mathrm{supp}(x))^{gh} = \mathrm{supp}(x^{gh}) \subseteq \Omega^{gh}$, то согласно утверждению 4.1 $x^{gh} = (x^g)^h$.

4.5. Если $g|\mathrm{supp}(x) = h|\mathrm{supp}(x)$ для инъективных преобразований g, h, x, то $x^g = x^h$.

Доказательство. Так как $g|\mathrm{supp}(x) = h|\mathrm{supp}(x)$, то $(\mathrm{supp}(x))^g = (\mathrm{supp}(x))^h$. Применяя утверждение 4.3, получаем $\Delta := \mathrm{supp}(x^g) = (\mathrm{supp}(x))^g = (\mathrm{supp}(x))^h = \mathrm{supp}(x^h)$. Пусть $\alpha \in \Delta$. Ввиду условия 4.5 найдется такая точка $\beta \in \mathrm{supp}(x)$, что $\beta^g = \beta^h = \alpha$.

Так как x — инъективное преобразование, то $\beta^x \in \mathrm{supp}(x)$, и потому $\alpha^{x^g} = \beta^{gx^g} = \beta^{xg} = \beta^{xh} = \beta^{hx^h} = \alpha^{x^h}$, т. е. $\alpha^{x^g} = \alpha^{x^h}$. Таким образом, $x^g|\Delta = x^h|\Delta$, где $\Delta = \mathrm{supp}(x^g) = \mathrm{supp}(x^h)$, из чего следует равенство $x^g = x^h$.

4.6. Пусть $\mathrm{supp}(x) \subseteq \mathrm{fix}(y)$ и x, y — инъективные преобразования. Тогда $x^y = x$.

Доказательство. Так как $y|\mathrm{supp}(x) = 1|\mathrm{supp}(x)$, то согласно утверждению 4.5 $x^y = x^1$. Следовательно, $x^y = x$.

5. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ и $\overline{G}$ — замыкание G в топологии поточечной сходимости на $\mathrm{T}(\Omega)$. Анализ действия псевдосопряжением моноида $\overline{G}$ на G мы разобьем на ряд шагов.

5.1. Для произвольных $g \in \overline{G}$ и конечного множества K из $\mathrm{FSym}(\Omega)$ найдется такой $h \in G$, что $x^g = x^h$ для любого $x \in K$.

Доказательство. Пусть $\Delta = \mathrm{supp}(K)$. Так как Δ — конечное множество точек, а g — G-предельное преобразование, то найдется такой $h \in G$, что $g|\Delta = h|\Delta$ и, в частности, $g|\mathrm{supp}(x) = h|\mathrm{supp}(x)$ для каждого $x \in K$.

Из свойства 3.1 следует, что преобразование g есть инъекция. Значит, мы можем воспользоваться свойством 4.5 псевдосопряжения согласно которому $x^g = x^h$ для $x \in K$.

Из утверждения 4.3 следует, что $\mathrm{supp}(G^g) = (\mathrm{supp}(G))^g \subseteq \Omega^g$. Отсюда с помощью утверждения 5.1 получаем

5.2. Для любых $g \in \overline{G}$ и $x \in G$ преобразование x^g принадлежит G. Более того, $G^g \subseteq G_{(\Delta)}$, где $\Delta = \Omega - \Omega^g$. Отображение $g\pi\colon G \to G$, определенное для $g \in \overline{G}$ равенством $x(g\pi) = x^g$, $x \in G$, является локально внутренним эндоморфизмом группы G.

Для завершения доказательства первого утверждения теоремы 1.1 нам осталось проверить включение $G_{(\Delta)} \subseteq G^g$. Это будет сделано на следующем шаге.

5.3. Пусть $g \in \overline{G}$ и $x \in G$, причем $\mathrm{supp}(x) \in \Omega^g$. Тогда $x \in G^g$.

Доказательство. Так как $\mathrm{supp}(x) \subseteq \Omega^g$, то для любой точки $\alpha \in \mathrm{supp}(x)$ найдется такая точка $\beta = \beta(\alpha) \in \Omega$, что $\beta^g = \alpha$.

Пусть $\Delta = \{\beta(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{supp}(x)\}$. В силу конечности $\mathrm{supp}(x)$ множество Δ также конечно, и поэтому найдется такое $h \in G$, что $g|\Delta = h|\Delta$ и, следовательно, $\mathrm{supp}(x) \subseteq \mathrm{fix}(h^{-1}g)$. Применяя утверждения 4.6 и 4.4, получаем $x = x^{h^{-1}g} = (x^{h^{-1}})^g \in G^g$, и, значит, $x \in G^g$.

Обратимся теперь к отображению π, определенному в п. 5.2 и сопоставляющему каждому $g \in \overline{G}$ локально внутренний эндоморфизм $x \mapsto x^g$, $x \in G$. Из свойства 4.4 псевдосопряжения следует, что π есть гомоморфизм моноида $\overline{G}$ в моноид $\overline{\mathrm{Inn}(G)}$ всех локально внутренних эндоморфизмов группы G. Покажем, что π — эпиморфизм, т. е. π — сюръективное отображение.

5.4. Для любого локально внутреннего эндоморфизма φ группы G найдется такой $g \in \overline{G}$, что $g\pi = \varphi$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех конечных подмножеств из G. Для любого $X \in \mathcal{F}$ положим $L(X) = \{x \in G \mid \varphi|X = x\pi|X\}$. Из определения локально внутреннего эндоморфизма следует, что $L(X) \neq \varnothing$ для любого $X \in \mathcal{F}$, а из определения функтора L вытекает, что $L(X) \cap L(Y) = L(X \cup Y)$ для $X, Y \in \mathcal{F}$. Значит, семейство всех надмножеств множеств $L(X)$, $X \in \mathcal{F}$, образует фильтр над множеством G, который содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{L}$.

На каждом $L(X)$ определим отношение эквивалентности, считая x и y из $L(X)$ эквивалентными, если $x|\mathrm{supp}(X) = y|\mathrm{supp}(X)$. Так как $\mathrm{supp}(X)$ и $\mathrm{supp}(X^\varphi)$ — конечные множества, то число классов эквивалентности конечно и, следовательно, ровно один класс принадлежит ультрафильтру $\mathcal{L}$. Обозначим этот класс через $L^*(X)$.

С помощью семейства $\{L^*(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$ определим преобразование $g\colon \Omega \to \Omega$ следующим образом:

если $\alpha \in \mathrm{fix}(G)$, то положим $\alpha^g = \alpha$;

если $\alpha \in \mathrm{supp}(G)$, то найдется такое $X \in \mathcal{F}$, что $\alpha \in \mathrm{supp}(X)$. В этом случае положим $\alpha^g = \alpha^x$, где $x \in L^*(X)$.

В силу выбора семейства $\{L^*(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$ точка α^g определена однозначно, и, следовательно, преобразование g определено корректно. Более того, для любого конечного $\Delta \in \Omega$ найдется такое $X \in \mathcal{F}$, что $\Delta \cap \mathrm{supp}(G) \subseteq \mathrm{supp}(X)$, и потому $g|\Delta = x|\Delta$ для любого $x \in L^*(X)$. Отсюда следует, очевидно, что $g \in \overline{G}$. Заметим, что для любых $t \in G$ и $x \in L^*(t)$ справедливо равенство $g|\mathrm{supp}(t) = x|\mathrm{supp}(t)$. Применяя свойство 4.5 псевдосопряжения, получаем $t^g = t^x$. Но $t^x = t^\varphi$, откуда вытекает требуемое равенство $t^g = t^\varphi$ для произвольного $t \in G$. Таким образом, $g\pi = \varphi$.

Для завершения доказательства основной теоремы нам осталось показать справедливость третьего утверждения теоремы.

5.5. $g\pi = h\pi$ тогда и только тогда, когда $g = zh$ для некоторого $z \in \mathrm{Z}(\overline{G})$.

Доказательство. Пусть $g = zh$ для некоторого $z \in \mathrm{Z}(\overline{G})$. Так как $\mathrm{Z}(\overline{G}) \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$ (см. утверждение 3.9), то $x^z = z^{-1}xz$ (см. утверждение 4.2). Следовательно, $x^z = x$, и согласно утверждению 4.4 $x^{zh} = (x^z)^h = x^h$ для любого $x \in G$. Полученное равенство $x^{zh} = x^h$, $x \in G$, означает, что $g\pi = h\pi$.

Докажем обратное утверждение. Пусть g, $h \in \overline{G}$ и $g\pi = h\pi$, т. е. $x^g = x^h$ для любого $x \in G$. Отсюда следует, что $G^g = G^h$, и так как $\mathrm{fix}(G)$ содержится в $\mathrm{fix}(g)$ и в $\mathrm{fix}(h)$ (см. свойство 3.3), то с помощью утверждения 4.3 получаем $\Omega^g = (\mathrm{fix}(G) \cup \mathrm{supp}(G))^g = \mathrm{fix}(G) \cup \mathrm{supp}(G^g) = \mathrm{fix}(G) \cup \mathrm{supp}(G^h) = (\mathrm{fix}(G) \cup \mathrm{supp}(G))^h = \Omega^h$. Итак, $\Omega^g = \Omega^h$.

Положим $z = gh^{-1}$, где h^{-1} — отображение, обратное к биекции $h\colon \Omega \to \Omega^h$. Ясно, что $z \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ и $g = zh$. Следовательно, $x^{zh} = x^h$ для любого $x \in G$. Так как $x^{zh} = (x^z)^h$ и эндоморфизм $h\pi$ инъективен, то из равенства $(x^z)^h = x^h$ следует, что $x^z = x$ и, значит, z перестановочен с каждым элементом из G.

Покажем теперь, что $z \in \overline{G}$. Пусть Δ — произвольное конечное множество точек и $\Gamma = \Delta^z$. Так как g и h — G-предельные преобразования, то найдутся такие $x, y \in G$, что $g|\Delta = x|\Delta$ и $h|\Gamma = y|\Gamma$. Следовательно, $z|\Delta = xy^{-1}|\Delta$.

Таким образом, $z \in \mathrm{C}_{\overline{G}}(G)$, и согласно утверждению 3.8 имеем $z \in \mathrm{Z}(\overline{G})$.

6. Доказательства следствий

Доказательство следствия 1.1. Пусть $H \leqslant G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$. Согласно теореме 1.1 эндоморфизм φ индуцируется псевдосопряжением посредством некоторого $t \in \overline{H}$. Применяя утверждение 5.1 к паре $(t, \overline{H})$, получаем следующее утверждение: для произвольного конечного $K \subseteq G$ найдется такой $h \in H$, что $x^t = x^h$ для любого $x \in K$. Таким образом, локально внутренний эндоморфизм ψ, индуцируемый псевдосопряжением посредством t на G, имеет свойства 1 и 2 из следствия 1.1.

Покажем теперь, что ψ обладает остальными свойствами 3–5.

Сначала докажем равенство $G^\psi \cap H = H^\varphi$. Пусть $x \in G^\psi \cap H$. Тогда для некоторого $t \in G$ имеем $y^\psi = x \in H$. Также в силу свойства 2 найдется такой $h \in H$, что $y^\psi = h^{-1}yh \in H$ и $x = y^\psi = t^\varphi \in H^\varphi$. Таким образом, $G^\psi \cap H \leqslant H^\varphi$. Обратно, так как $H^\varphi = H^\psi \leqslant G^\psi$, то $H^\varphi = H^\psi \cap H \leqslant G^\psi \cap H$. Следовательно, $G^\psi \cap H = H^\varphi$.

Чтобы доказать свойство 4, очевидно, достаточно проверить включение $G \leqslant \bigcup_{h\in H} h^{-1}G^\psi h$.

Пусть $x \in G$. Тогда $x^\psi = x^k$ для некоторого $k \in H$, и потому $x = kx^\psi k^{-1} \in \bigcup_{h\in H} h^{-1}G^\psi h$.

Наконец, докажем свойство 5.

Пусть $H = H^\varphi$. Тогда $H \leqslant G^\psi$, и в силу свойства 4 $G = \bigcup_{h\in H} h^{-1}G^\psi h = G^\psi$, т. е. $G = G^\psi$.

Доказательство следствия 1.2. Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает равносильность первых двух условий следствия 1.2. Покажем, что условие 3 равносильно первым двум.

Пусть $G \leqslant \mathrm{FSym}(\Omega)$ и $\overline{G} \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$. Пересечение $\overline{G} \cap \mathrm{FSym}(\Omega)$, названное в работе [1] финитарным пополнением группы G, согласно [1, основная теорема] представимо в виде прямой суммы групп типа A и B. Если в этом представлении все прямые слагаемые имеют тип A, то непосредственно из определения типа A следует, что все точки из любой G-орбиты соизмеримы.

Допустим, что финитарное пополнение $\overline{G} \cap \mathrm{FSym}(\Omega)$ имеет прямые слагаемые типа B. В этом случае согласно [2, основная теорема] $\overline{G} \cap \mathrm{FSym}(\Omega)$ содержит подгруппу H, изоморфную $\mathrm{FSym}(\Sigma)$ для некоторого бесконечного множества Σ. Очевидно, что H обладает несюръективными локально внутренними эндоморфизмами, и поэтому замыкание $\overline{H}$ не содержится в $\mathrm{Sym}(\Omega)$. Но $\overline{H} \leqslant \overline{G} \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$. Полученное противоречие показывает, что прямых слагаемых типа B нет, и, следовательно, условие 3 вытекает из первых двух условий.

Обратно предположим, что все точки из любой G-орбиты соизмеримы, и покажем в этом случае, что $\overline{G} \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$, т. е. любое G-предельное преобразование является подстановкой множества Ω.

Пусть g — произвольное G-предельное преобразование. Тогда образ любой G-орбиты Δ под действием g содержится в Δ, и, значит, для доказательства биективности преобразования g нам достаточно показать, что ограничение действия g на Δ является подстановкой множества Δ.

Итак, пусть Δ — G-орбита точки $\alpha \in \Omega$. Так как $g \in \overline{G}$, то найдется такой $h \in G$, что $\alpha^g = \alpha^h$, и, значит, $\alpha^{gh^{-1}} = \alpha$. Положим $t = gh^{-1}$. Так как $g = th$, то нам достаточно доказать биективность преобразования t. С этой целью рассмотрим все G_α-орбиты множества Δ. В силу того, что $\alpha^t = \alpha$ и t — G-предельное преобразование, образ любой G_α-орбиты Γ под действием t содержится в Γ. Воспользовавшись инъективностью преобразования t и конечностью множества Γ, вытекающей из соизмеримости всех точек Δ, получаем $\Gamma^t = \Gamma$, из чего и следует биективность t, а значит, и g, на всем множестве Δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.В.** Прямые суммы финитарных групп подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №. 2. С. 45–49.
2. **Беляев В.В.** Сплетения групп финитарных подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №. 4. С. 38–43.

Беляев Виссарион Викторович
Поступила 18.01.2012
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: v.v.belyaev@list.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 517.972

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ВЫБОРА ОЧЕРЕДНОСТИ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ГРУППОЙ ОБЪЕКТОВ[1]

Ю. И. Бердышев

Предложены метод решения задачи о выборе очередности сближения нелинейной системы третьего порядка с группой движущихся точек за кратчайшее время и метод построения ломаной минимальной длины, которая последовательно соединяет прямоугольники при наличии препятствий.

Ключевые слова: управление, нелинейный объект, последовательное сближение.

Yu. I. Berdyshev. On some problems of choosing the order in which a control system approaches a group of objects.

We propose a method for choosing the order in which a nonlinear third-order system approaches a group of moving points in a minimum time and a method for constructing a shortest polygonal path for the sequential connection of rectangles in the case of obstacles. connecting rectangles if there are restrictions.

Keywords: control, nonlinear object, sequential approach.

1. Введение

В данной работе предлагается общий подход к решению двух различных по содержанию оптимизационных задач, в основе которого лежат необходимые условия оптимальности, получаемые при решении более простых вспомогательных задач. Основное внимание уделено построению метода решения задачи о выборе очередности (маршрута) сближения за кратчайшее время управляемого объекта (преследователя), описываемого нелинейной системой, моделирующей движение самолета (автомобиля) в горизонтальной плоскости [1], с группой точек (целей), движущихся по прямым с постоянными скоростями. Время сближения минимизируется как по дискретному векторному параметру — маршруту (очередности), так и по "непрерывному" параметру — управляющей функции. При заданной очередности сближения рассматриваемая задача вырождается в нелинейную задачу последовательного управления. Решение последней может быть найдено с использованием необходимых условий оптимальности [2–4], полученных на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [5]. Таким образом, если для каждого возможного маршрута определить соответствующее время сближения с целями, а затем выбрать тот маршрут, которому соответствует наименьшее время, то рассматриваемая задача будет решена. Заметим, что при большом числе m целей указанный путь решения является весьма трудоемким. Это связано с тем, что, во-первых, даже при заданной очередности возникают сложности решения рассматриваемой задачи, обусловленные невозможностью ее разбиения на ряд последовательно решаемых "двухточечных задач" без потери качества. Здесь при движении от одной точки к другой необходимо использовать информацию о всех последующих точках, подлежащих обходу. Во-вторых, число всевозможных маршрутов, равное $m!$, может быть очень большим. Для того чтобы не проводить трудоемких построений оптимальных траекторий для каждого возможного маршрута, предлагается воспользоваться необходимым условием оптимальности маршрута, полученным в [6]. Это условие, позволяющее

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН "Математическая теория управления" (проекты 12-П-1-1019, 12-П-1012) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00537, 11-01-90432-укр-ф-а).

существенно сократить множество маршрутов, претендующих на оптимальность, положено в основу предлагаемого здесь метода решения задачи.

Суть метода заключается в следующем. Вначале решается более простая вспомогательная задача о выборе очередности сближения с целями, в которой движение управляемого объекта описывается системой "простых движений". В этом случае оптимальной (в смысле быстродействия) траекторией объекта при фиксированном маршруте $j \in \mathbf{J}$ ($\mathbf{J}$ — множество всевозможных маршрутов) будет ломаная D_j, угловыми точками которой являются точки встречи объекта с целями. При этом время сближения со всеми целями будет пропорционально длине этой ломаной. Поэтому вспомогательная задача эквивалентна задаче выбора из множества $\mathbf{J}$ такого маршрута p, для которого соответствующая ломаная D_p имеет наименьшую длину. Если цели неподвижны, то это известная задача коммивояжера, решение которой можно получить стандартными методами (например, методом динамического программирования или методом ветвей и границ [7–10]). Следует отметить, что и при подвижных целях на основе метода динамического программирования разработан алгоритм решения этой задачи [11]. После определения маршрута p — решения вспомогательной задачи строится оптимальная (в смысле быстродействия) траектория L_p^0 исходной нелинейной системы, вычисляется разность a длин траекторий L_p^0 и D_p. Затем определяется множество $\mathbf{J}^0$ тех маршрутов j, для которых разность длин ломаных D_j и D_p не превосходит величину a. Согласно [6, теорема 1] оптимальный маршрут в исходной задаче принадлежит множеству $\mathbf{J}^0$. Здесь важно, что при определении множества $\mathbf{J}^0$ достаточно лишь один раз при маршруте p построить оптимальную траекторию нелинейного объекта (для вычисления величины a), а затем надо сравнивать только длины ломаных D_j $(j \in \mathbf{J})$ — траекторий системы простых движений.

Первая часть данной статьи продолжает исследования работы [6], где в качестве примера рассмотрен случай трех целевых точек. Использование решения этого примера совместно с принципом оптимальности Беллмана позволяет дополнительно сократить число маршрутов преследователя, претендующих на оптимальность. В частности, при пяти прямолинейно движущихся целях со скоростью $v \leq 0.01$ число маршрутов можно сократить со 120 до 20, а затем из этих 20 маршрутов с использованием теоремы 1 из [6] выделить только те маршруты, которые принадлежат множеству $\mathbf{J}^0$. Здесь следует отметить также работу [12], в которой необходимое условие оптимальности маршрута преследователя было получено в случае неподвижных целевых точек.

Аналогичный подход можно использовать и при решении другой рассматриваемой здесь комбинаторной задачи о построении ломаной наименьшей длины, последовательно соединяющей группу заданных открытых прямоугольников, каждый из которых имеет на границе точку входа и точку выхода. При этом ломаная должна содержать отрезки вход-выход, но не должна иметь общих точек с этими прямоугольниками за исключением точек, лежащих на указанных отрезках. Искомая ломаная также не должна иметь общих точек с дополнительно заданными открытыми прямоугольниками (препятствиями). Заметим, что последняя задача является частным случаем задач, исследованных в [13–16] на основе метода динамического программирования.

2. Сближение нелинейного управляемого объекта с группой движущихся точек

Движение управляемого объекта (преследователя) в горизонтальной плоскости описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{x} = \cos\,\theta, \quad \dot{y} = \sin\,\theta, \quad \dot{\theta} = u; \quad |u| \leq 1. \tag{2.1}$$

Эта система описывает простейшую модель движения самолета, автомобиля в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью, равной единице. Здесь x, y — координаты объекта, отождествляемого с точкой на плоскости, θ — угол между вектором скорости объекта и осью x,

u — управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению и характеризующий скорость изменения угла θ. Неравенство в (2.1) ограничивает радиус кривизны траектории объекта плоскости. А именно, радиус кривизны не может быть меньше единицы. Система (2.1) функционирует на конечном достаточно большом промежутке времени $T_* = [0, t^0]$. Начальное состояние объекта задано, а именно, объект находится в точке $W_0 = (0, 0)$, а его вектор скорости направлен по оси абсцисс.

На плоскости x, y заданы m движущихся целей $\mathcal{W}_i$ (убегающих), координаты которых в каждый момент времени t определяются соотношениями

$$x_i(t) = x_{i0} + tv\cos\beta_i, \quad y_i(t) = y_{i0} + tv\sin\beta_i \quad (i \in \overline{1, m}),$$

где $\overline{1, m}$ — множество всех натуральных чисел, не превосходящих m; x_{i0}, y_{i0} — координаты начальных положений W_{i0} целей $\mathcal{W}_i$; v и β_i — постоянные. Предполагается, что величина $v > 0$ и меньше единицы. Положение цели $\mathcal{W}_i$ в момент времени t будем обозначать через $W_i(t)$. Будем говорить, что объект (2.1) сблизился с целью $\mathcal{W}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, если в некоторый момент времени t_i местоположения объекта и цели на плоскости xy совпадут.

Очередность (маршрут) сближения будем отождествлять с перестановкой $j = (j(1), \ldots, j(m))$ первых m натуральных чисел. Множество всех маршрутов обозначим через $\mathbf{J}$. Очевидно, что мощность этого множества равна $m!$. В качестве множества допустимых управлений преследователя выберем $\mathbf{U}$ — множество всех измеримых по Борелю функций $U : T_* \to [-1, 1]$. Вначале при фиксированном $j \in \mathbf{J}$ определим управление $U_j^0 \in \mathbf{U}$, обеспечивающее поимку преследователем всех целей за наименьшее время. Искомое управление U_j^0 существует [17]. Заметим, что в [18] для существования оптимального управления в более общей задаче использовалось множество $\mathcal{R}$ (см. [17]) обобщенных программных управлений-мер μ на T_*, являющееся расширением множества $\mathbf{U}$. В [3] приведены необходимые условия оптимальности управления и условия выравнивания, накладывающие ограничения на моменты встречи преследователя с убегающими. При этом показано, что при упомянутых геометрических ограничениях оптимальная траектория объекта (2.1), порожденная управлением U_j^0 при маршруте j, $j \in \mathbf{J}$, которую далее будем обозначать через L_j^0, состоит из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых, а длина L_j^0 равна времени поимки преследователем всех целей. Таким образом, каждому маршруту $j \in \mathbf{J}$ можно поставить в соответствие число T_j — время поимки преследователем всех целей.

З а д а ч а 1 состоит в выборе очередности (маршрута) s, при котором

$$T_s = \min_{j \in \mathbf{J}} T_j. \tag{2.2}$$

Заметим, что даже при заданном маршруте j, $j \in \mathbf{J}$, построение оптимальной траектории L_j^0 является весьма трудным делом. Поэтому желательно заранее (до решения задачи 1) уменьшить число маршрутов, для которых будет необходимо строить L_j^0. В связи с этим предлагается сформулировать более простую вспомогательную маршрутную задачу, решение которой можно получить стандартными методами (например, методом динамического программирования или методом ветвей и границ [7–10]), а затем использовать это решение для сокращения числа маршрутов, претендующих на оптимальность в исходной задаче.

В с п о м о г а т е л ь н а я з а д а ч а 1. Пусть движение объекта описывается системой

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad (u_1^2 + u_1^2 \leq 1),$$

которую называем "системой простых движений". Тогда при любом фиксированном маршруте j оптимальной (в смысле быстродействия) траекторией объекта будет ломаная D_j, соединяющая начальную точку W_0 с точками $W_i(t_{j(i)})$ $(i \in \overline{1, m})$ совмещения местоположений объекта и целей в указанном порядке j. Длину этой ломаной далее будем обозначать через τ_j. Здесь наша задача состоит в выборе маршрута p, при котором соответствующая ломаная D_p имеет наименьшую длину

$$\tau_p = \min_{j \in \mathbf{J}} \tau_j. \tag{2.3}$$

Если цели $\mathcal{W}_i$ ($i \in \overline{1,m}$) неподвижны, то это известная маршрутная задача, которой посвящено большое число работ (см., например, [7–10]).

Отметим, что при любом $j \in \mathbf{J}$ имеют место неравенства

$$T_j > \tau_j. \tag{2.4}$$

Эти неравенства означают, что при любом маршруте j ($j \in \mathbf{J}$) криволинейная траектория объекта (2.1) длинее ломаной D_j, являющейся траекторией системы простых движений. Пусть $a = T_p - \tau_p$ и

$$\mathbf{J}^0 = \{j \in \mathbf{J} \colon \tau_j - \tau_p \le a\}. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.4) следует, что $a > 0$. Справедлива

Теорема 1 [6]. *Маршрут s ($s \in \mathbf{J}$), доставляющий оптимум в задаче 1, достаточно выбирать только из множества $\mathbf{J}^0$.*

Каждый оптимальный маршрут в исходной задаче определяется соотношением (2.2), поэтому множество $\mathbf{J}^0$ содержит все оптимальные маршруты. Заметим, что при определении множества $\mathbf{J}^0$ достаточно лишь один раз при маршруте p построить оптимальную траекторию нелинейного объекта (2.1) (для вычисления величины a), а затем надо сравнивать только длины τ_j ломаных D_j ($j \in \mathbf{J}$) — траекторий системы простых движений.

П р и м е р 1. Пусть $m = 4$; координаты x_{i0}, y_{i0} начальных положений целей $\mathcal{W}_i$, $i \in \overline{1,4}$, имеют следующие значения: $x_{10} = 3.5$, $y_{10} = -3$; $x_{20} = 11.3$, $y_{20} = 1$; $x_{30} = 12$, $y_{30} = 5.9$; $x_{40} = 2.2$, $y_{40} = 13.2$; направления целей определяются соответственно углами $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 3\pi/2$, $\beta_4 = 5\pi/4$; величина v скоростей целей равна 0.1. Требуется при заданных условиях решить задачу 1.

В результате вычислений установлено, что, во-первых, для вспомогательной задачи 1 оптимальным будет маршрут $p = (1,2,3,4)$, которому соответствует ломаная D_p длины $\tau_p = 31.36$; во-вторых, длина T_p траектории L_p^0 объекта (2.1) равна 34.5 и $a = T_p - \tau_p = 3.14$; в-третьих, множество $\mathbf{J}^0$ (2.5) при вычисленном параметре a состоит из единственного маршрута $p = (1,2,3,4)$, который и является оптимальным в исходной задаче 1.

Применение стандартных методов решения маршрутных задач (см. [7–10]) целесообразно при наличии большого количества пунктов следования (целевых точек) и как следствие требует значительных затрат машинного времени. Например, при использовании метода динамического программирования необходимо насчитывать и запоминать по слоям значения функции Беллмана.

Далее в данном пункте предлагается один из методов решения вспомогательной задачи 1. Этот метод, использующий специфику задачи и принцип Беллмана, целесообразно применять при небольшом количестве движущихся целей и малой величине их скорости. В данной работе рассмотрен случай, когда $m \le 5$ и $v \le 0.01$. Заметим, что при разработке методов решения задач, близких к задачам коммивояжера, специалистов по дискретной оптимизации интересуют случаи, когда число объектов, подлежащих обходу, больше десяти, т. е. $m > 10$. Но рассматриваемая в данной работе задача существенно сложнее задачи дискретной оптимизации. Это связано с тем, что здесь обход объектов совершает управляемая система, описываемая нелинейной системой дифференциальных уравнений, и даже при заданной очередности обхода определение оптимальной (в смысле быстродействия) траектории этой системы весьма затруднительно. Поэтому представляет интерес даже случай, когда $m \le 5$.

Для полноты изложения метода решения задачи 1 при $m = 5$ приведем результаты работы [6], касающиеся решения этой задачи при $m = 3$.

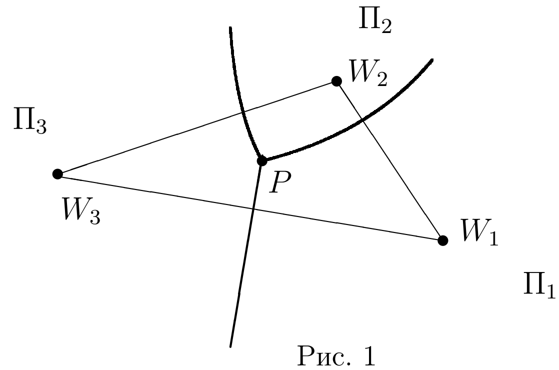


Рис. 1

Случай трех неподвижных целей. Пусть ρ_{ik} — расстояние между целями W_i и W_k $(i \in \overline{1,3},\ k \in \overline{1,3} \setminus i)$; $\rho_{12} = a,\ \ \rho_{23} = b$, $\rho_{13} = c$. При этом цели W_i $(i \in \overline{1,3})$ пронумерованы так, что

$$a \le b \le c.$$

В [6] определено разбиение плоскости xy на области Π_i $(i \in \overline{1,3})$, приведено аналитическое описание линий, которые их разделяют (см. рис. 1). При $b = c$ эти линии являются отрезками серединных перпендикуляров сторон треугольника $W_1W_2W_3$, а при $b \ne c$ линии, разделяющие области Π_1, Π_2, и Π_2, Π_3, преобразуются в части гипербол. В [6] также доказано, что зависимость оптимального маршрута p во вспомогательной задаче 1 от принадлежности начальной точки W_0 преследователя одной из областей Π_i $(i \in \overline{1,3})$ определяется следующей формулой:

$$p = \begin{cases} (1,2,3), & W_0 \in \Pi_1, \\ (2,1,3), & W_0 \in \Pi_2, \\ (3,1,2), & W_0 \in \Pi_3. \end{cases} \tag{2.6}$$

Случай пяти неподвижных целей. Здесь будем использовать принцип оптимальности Беллмана, из которого следует, что если две из пяти целей уже пройдены, например, в очередности W_5, W_4, то оставшиеся три точки должны быть пройдены в очередности, определяемой формулой (2.6), где вместо W_0 следует подставить W_4. Это позволит число $N = 5! = 120$ всех рассматриваемых маршрутов сократить до $N_1 = 2C_5^3 = 20$ (C_5^3 — число сочетаний из пяти по три). При этом разбивать плоскость xy на области Π_1, Π_2, Π_3 нужно только $10 = C_5^3$ раз.

Случай трех движущихся целей. Используя соотношения (3.1), (3.2) из [6], можно выделить на плоскости xy (см. рис. 2) три области G_i $(i \in \overline{1,3})$, обладающие следующим свойством: оптимальный маршрут p будет гарантированно определяться формулой (2.6), если в ней заменить Π_i на G_i. Каждая область G_i $(i \in \overline{1,3})$ ограничена двумя соответствующими ей гиперболами. В частности, область G_1 ограничена гиперболами

$$r_{03} - r_{01}/k_1 = k_2, \tag{2.7}$$

$$r_{02} - r_{01}/k_1 = k_3,$$

где

$$k_1 = (1-v)^5/(1+v)^5, \quad k_2 = 4v[a/(1-v) + b/(1+v)](1+v)^2/(1-v)^3,$$

$$k_3 = [2v(3+v^2)a/[(1-v)^2(1+v)^2] + b/(1-v) - c/(1+v)](1+v)^3/(1-v)^2,$$

$a = \rho_{12}$, $\ b = \rho_{23}$, $c = \rho_{13}$, r_{0i} — расстояние между переменной точкой $W = (x,y)$ и начальным положением цели $\mathcal{W}_i$ $(i \in \overline{1,3})$. Области G_i $(i \in \overline{1,3})$ изображены на рис. 2, где точками W_i, $i \in \overline{1,3}$, обозначены начальные положения целей. При этом заметим, что чем меньше

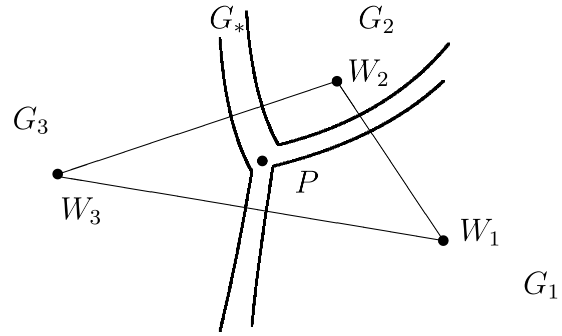


Рис. 2

величина v скорости движущихся целей, тем "ближе" границы областей G_i к соответствующим границам Π_i ($i \in \overline{1,3}$). Исключив из плоскости xy области G_i ($i \in \overline{1,3}$), получим некоторую область, обозначаемую далее через G_* (см. рис. 2). По определению области G_i ($i \in \overline{1,3}$) не пересекаются. Поэтому область G_* является связной. Она имеет три лепестка, каждый из которых расположен вдоль соответствующей границы области Π_i ($i \in \overline{1,3}$) (см. рис. 1, 2). Область G_* ограничена частями упомянутых шести гипербол — границами областей G_i ($i \in \overline{1,3}$). В частности, лепесток, расположенный вдоль серединного перпендикуляра отрезка W_1W_3, ограничен частями гипербол (2.7) и

$$k_1 r_{01} - r_{03} = k_4 \qquad (k_4 = 4v[a/(1+v) + b/(1-v)](1-v)^2/(1+v)^3).$$

Фокусами этих гипербол являются точки W_1 и W_3. Поэтому каждая из них пересекает прямую, проходящую через точки W_1 и W_3 в единственной точке. Расстояние между этими двумя точками пересечения обозначим через l_{13}. Фактически l_{13} — ширина лепестка в окрестности отрезка W_1W_3. Оценим l_{13}. Разложив в ряд по v коэффициенты $k_1,\ k_2,\ k_3$ и отбросив слагаемые порядка малости v^2, можно установить, что $l_{13} \le v[5c + 4(a+b)]$.

Аналогично оценим ширину l_{12} и l_{23} лепестков, пересекающих соответственно отрезки W_1W_2 и W_2W_3 в окрестностях последних. Можно показать справедливость соотношений $l_{12} \le v[8a + b + c]$, $l_{23} \le v[8b + a + c)]$. Из этих неравенств следует, что при $v \le 0.01$, величины l_{ik} ($i \in \overline{1,3},\ k \in \overline{1,3} \setminus i$) будут значительно меньше длин соответствующих сторон треугольника $W_1W_2W_3$, а сами лепестки области G_* будут в достаточной близости от границ множеств Π_i.

Если $W_0 \in G_*$, то первая цель сближения выбирается в зависимости от того, в каком из лепестков области G_* находится начальная точка W_0. Например, если этот лепесток "расположен вдоль" серединного перпендикуляра отрезка W_1W_3, то первой целью сближения может быть $\mathcal{W}_1$ либо $\mathcal{W}_3$. При этом общее время сближения с целями при выборе маршрута, начинающегося с цели $\mathcal{W}_1$, будет мало (порядка v) отличаться от общего времени сближения при выборе маршрута, начинающегося с цели $\mathcal{W}_3$. Здесь необходимо сравнить времена t_{0123} и t_{0321} поимок целей $\mathcal{W}_i$ ($i \in \overline{1,3}$) соответственно при маршрутах $(1,2,3)$ и $(3,2,1)$, которые вычисляются рекуррентно с использованием (3.1) из [6] по следующим формулам:

$$t_{01} = d_{01}(0); \quad t_{012} = t_{01} + d_{12}(t_{01}); \quad t_{0123} = t_{012} + d_{23}(t_{012}); \tag{2.8}$$

$$t_{03} = d_{03}(0); \quad t_{032} = t_{03} + d_{32}(t_{03}); \quad t_{0321} = t_{032} + d_{21}(t_{032}). \tag{2.9}$$

Аналогично определяется оптимальный маршрут в случае принадлежности начальной точки W_0 другим лепесткам области G_*.

Случай пяти движущихся целей. Здесь будем также использовать принцип оптимальности Беллмана, из которого следует, что если две (например, $\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_4$) из пяти целей уже пойманы (в указанной очередности) и в момент поимки цель $\mathcal{W}_4$ находилась в положении W_4, то оставшиеся три цели $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ должны быть пойманы либо в очередности, определяемой формулой

$$p = \begin{cases} (1,2,3), & W_4 \in G_1, \\ (2,1,3), & W_4 \in G_2, \\ (3,1,2), & W_4 \in G_3 \end{cases} \tag{2.10}$$

(при $W_4 \in G_1 \cup G_2 \cup G_3$), либо в результате сравнения одной из следующих пар времен: (t_{0123}, t_{0321}), (t_{0213}, t_{0123}), (t_{0213}, t_{0321}) при $W_4 \in G_*$. Это позволяет множество $\mathbf{J}$ всех маршрутов (мощности $N = 5! = 120$) сократить до множества $\mathbf{J}_1$ (мощности $N_1 = 2C_5^3 = 20$). При разбиении плоскости xy на области G_1, G_2, G_3, G_* в качестве начального момента времени выбирается t_{054} — момент, в который объект (2.1) сближается с целью $\mathcal{W}_4$. Этот момент с использованием формулы (3.1) из [6] определяется однозначно:

$$t_{05} = d_{05}(0), \quad t_{054} = t_{05} + d_{54}(t_{05})$$

(t_{05} — момент поимки цели $\mathcal{W}_5$).

Метод решения задачи 1 при пяти целях. Вначале сократим множество $\mathbf{J}$ всех возможных маршрутов до множества $\mathbf{J}_1$. В силу своего построения $\mathbf{J}_1$ содержит маршрут p, являющийся решением вспомогательной задачи 1, в которой преследователь описывается системой простых движений. Для каждого маршрута $j \in \mathbf{J}_1$ определим ломаную D_j и ее длину τ_j, равную общему времени сближения системы простых движений с целями $\mathcal{W}_i$, $i \in \overline{1,5}$, выберем маршрут p с наименьшим значением τ_p. Важно, что здесь осуществляется перебор элементов множества $\mathbf{J}_1$, а не исходного множества $\mathbf{J}$, имеющего большую мощность. Затем с использованием необходимых условий оптимальности [2] построим локально оптимальную траекторию L_p^0 объекта (2.1), соответствующую маршруту p и состоящую из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых [3]. Вычислим длину траектории L_p^0, равную времени T_p сближения объекта (2.1) с целями $\mathcal{W}_i$, $i \in \overline{1,5}$, в очередности p, а также разность $a = T_p - \tau_p$. Далее определим множество $\mathbf{J}^0$ (2.5) всех маршрутов, претендующих на оптимальность в задаче 1. Для каждого маршрута $j \in \mathbf{J}^0$ строим траекторию L_j^0 и определяем ее длину T_j. Решением задачи 1 будет тот маршрут s, которому соответствует наименьшая величина T_s из T_j, $j \in \mathbf{J}^0$.

Предложение. *Предлагаемый метод решения задачи* 1 *при пяти прямолинейно движущихся целях со скоростью* $v \leq 0.01$ *позволяет вначале с использованием формул* (2.6), (2.10) *сократить число маршрутов преследователя* (2.1), *претендующих на оптимальность* (*по быстродействию*) *со* 120 *до* 20, *а затем из этих* 20 *маршрутов с использованием теоремы* 1 *выделить только те маршруты, которые принадлежат множеству* $\mathbf{J}^0$ (*см.* (2.5)).

Здесь важно отметить, что при данном методе траектории L_j^0 нелинейной системы (2.1) строятся не для всех $j \in \mathbf{J}$, а только для $j \in \mathbf{J}^0$.

3. Комбинаторная задача

На плоскости xy имеется n (n — заданное натуральное число) непересекающихся открытых прямоугольников $K_i = \{(x,y)\colon a_i < x < a_i + \alpha;\ b_i < y < b_i + \beta\}$. Здесь a_i, b_i $(i \in \overline{1,n}), \alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные числа. Объединение прямоугольника K_i со своей границей ∂K_i обозначим соответственно через $\bar{K}_i$. На границах ∂K_i каждого из первых m $(m \leq n)$ прямоугольников K_i $(i \in \overline{1,m})$ заданы две точки: M_i^b — вход и M_i^e — выход. Остальные $n - m$ прямоугольников являются препятствиями. Вне прямоугольников $\bar{K}_i$ $(i \in \overline{1,n})$ задана начальная точка W_0.

Очередность (маршрут) обхода прямоугольников K_i $(i \in \overline{1,m})$ будем отождествлять с перестановкой $j = (j(1), \ldots, j(m))$ первых m натуральных чисел. Множество всех маршрутов, как и в предыдущем разделе, обозначим через $\mathbf{J}$. При фиксированном маршруте j $(j \in \mathbf{J})$ построим ломаную Λ_j, состоящую из отрезков $M_{j(k)}^b M_{j(k)}^e$ и ломаных $\lambda_{j(k)}$, соединяющих точки

$M^e_{j(k-1)}$, $M^b_{j(k)}$ $(k \in \overline{1,m})$, не пересекающихся с $\bar{K}_i$ $(i \in \overline{1,n})$ и имеющих наименьшую длину. Здесь для единообразия точку W_0 обозначим через $M^e_{j(0)}$. Каждому маршруту $j \in \mathbf{J}$ поставим в соответствие величину Ω_j — длину ломаной Λ_j, последовательно соединяющей точку W_0 с прямоугольниками $\bar{K}_i$ $(i \in \overline{1,m})$ в очередности j и являющейся кратчайшей ломаной при этой очередности и указанных ограничениях.

З а д а ч а 2. Требуется среди всех маршрутов j, $j \in \mathbf{J}$, определить маршрут r, при котором величина Ω_r является наименьшей среди всех величин Ω_j, $j \in \mathbf{J}$.

Заметим, что ломаную Λ_j можно рассматривать как оптимальную (в смысле быстродействия) траекторию "системы простых движений" при заданном маршруте j $(j \in \mathbf{J})$ и наличии препятствий $\bar{K}_i$ $(i \in \overline{1,n})$.

Следует отметить работы [19; 20], в которых исследованы задачи перемещения управляемого объекта при наличии ограничений. В частности, в [19] предлагается численный метод решения задачи, где требуется построить путь, по которому можно провести подвижный многоугольник из начального положения в некоторую область за наименьшее время так, чтобы этот многоугольник не пересекался с внутренностями фазовых ограничений. В данной работе при решении маршрутной (комбинаторной) задачи 2 используется более простая управляемая система, но с большим количеством целевых объектов и препятствий.

В с п о м о г а т е л ь н а я з а д а ч а 2. Пусть точки W_i $(i \in \overline{1,m})$ являются серединами отрезков $M^b_i M^e_i$, соединяющих вход M^b_i и выход M^e_i в прямоугольниках K_i; θ_j — длина ломаной Q_j, соединяющей W_0 с точками W_i $(i \in \overline{1,m})$ в указанном порядке j. Задача состоит в определении маршрута q, при котором длина θ_q является наименьшей среди всех θ_j, $j \in \mathbf{J}$.

На рис. 3 изображены ломаные Λ_j, Q_j в случае, когда $m = 3$, $j = (1, 2, 3)$. При этом точки W_i обозначены кружками, участки Λ_j вне прямоугольников K_i (ломаные $\lambda_{j(k)}$) отмечены жирными линиями. Заметим, что при любом $j \in \mathbf{J}$ имеют место неравенства $\Omega_j > \theta_j$, аналогичные (2.4) и означающие, что при любом маршруте j $(j \in \mathbf{J})$ длина Ω_j ломаной Λ_j больше длины θ_j ломаной Q_j. Этот факт следует из того, что при любом $i \in \overline{1,m}$ длина участка ломаной Λ_j, соединяющего точки W_{i-1}, W_i, меньше длины отрезка $W_{i-1}W_i$. Пусть $b = \Omega_q - \theta_q$ и

$$\mathbf{J}^* = \{j \in \mathbf{J}:\ \theta_j - \theta_q \le b\}. \tag{3.1}$$

Теорема 2. *Маршрут* r $(r \in \mathbf{J})$, *доставляющий оптимум в задаче* 2, *достаточно выбирать только из множества* $\mathbf{J}^*$.

Доказательство проводится от противного. А именно, предположим, что соотношение $\theta_r - \theta_q \le b$ неверно, а справедливо неравенство $\theta_r > \theta_q + b$. Тогда с учетом неравенств $\Omega_j > \theta_j$ $(j \in \mathbf{J})$ имеем $\Omega_r > \theta_r > \theta_q + b = \Omega_q$, т. е. $\Omega_r > \Omega_q$, что невозможно ввиду оптимальности маршрута r в задаче 2.

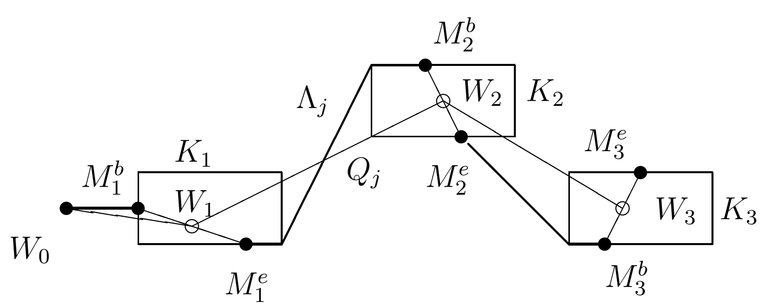


Рис. 3

При определении множества $\mathbf{J}^*$ достаточно лишь один раз при маршруте q построить ломаную Λ_q, вычислить ее длину θ_q и величину b, а затем сравнивать только длины θ_j ломаных Q_j, $(j \in \mathbf{J})$, а не длины ломаных Λ_j. Теорема 2 позволяет существенно сузить множество маршрутов, претендующих на оптимальность.

Замечание. При построении ломаных $\lambda_{j(k)}$, соединяющих точки $M^e_{j(k-1)}$, $M^b_{j(k)}$ $(k \in \overline{1,m})$, не пересекающихся с $\bar{K}_i$ $(i \in \overline{1,m})$ и являющихся составными частями ломаных Λ_j, можно использовать стандартный алгоритм Дейкстры, применяемый при построении транспортных сетей с заданной матрицей переходов.

При построении звеньев каждой ломаной $\lambda_{j(k)}$ приходится рассматривать большое число случаев взаимного расположения точек $M^e_{j(k-1)}$, $M^b_{j(k)}$ $(k \in \overline{1,m})$ и прямоугольников $\bar{K}_i$ $(i \in \overline{1,m})$. Опишем краткую схему предлагаемого здесь метода построения ломаной $\lambda_{j(k)}$. Вначале строим эту ломаную (обозначая ее через $\lambda^*_{j(k)}$) с учетом только взаимного положения двух прямоугольников $\bar{K}_{j(k-1)}$, $\bar{K}_{j(k)}$ и расположенных на них двух точек $M^e_{j(k-1)}$, $M^b_{j(k)}$. Для этого вычислим координаты точек $M^\varepsilon_{j(k-1)}$ и $M^\varepsilon_{j(k)}$, находящихся на отрезке $M^e_{j(k-1)}M^b_{j(k)}$ и достаточно близко к концам этого отрезка (ε — малый параметр, определяющий указанную близость). Возможны четыре случая.

1. $M^\varepsilon_{j(k-1)} \notin K_{j(k-1)}$ и $M^\varepsilon_{j(k)} \notin K_{j(k)}$.

2. $M^\varepsilon_{j(k-1)} \notin K_{j(k-1)}$ и $M^\varepsilon_{j(k)} \in K_{j(k)}$.

3. $M^\varepsilon_{j(k-1)} \in K_{j(k-1)}$ и $M^\varepsilon_{j(k)} \notin K_{j(k)}$.

4. $M^\varepsilon_{j(k-1)} \in K_{j(k-1)}$ и $M^\varepsilon_{j(k)} \in K_{j(k)}$.

В первом случае ломаная $\lambda^*_{j(k)})$ будет совпадать с отрезком $M^e_{j(k-1)}M^b_{j(k)}$. Во втором случае ломаной $\lambda^*_{j(k)}$ может быть только одна из двух кратчайших ломаных, обходящих прямоугольник $K_{j(k)}$ справа или слева. Заключительным отрезком этой ломаной будет сторона (или часть стороны) прямоугольника $K_{j(k)}$. В третьем случае ломаной $\lambda^*_{j(k)}$ может быть только одна из двух кратчайших ломаных, обходящих прямоугольник $K_{j(k-1)}$ справа или слева. Начальным отрезком этой ломаной будет сторона (или часть стороны) прямоугольника $K_{j(k-1)}$. Наиболее сложный вид ломаная $\lambda^*_{j(k)}$ будет иметь в случае 4. Здесь начальным и конечным участками ломаной $\lambda^*_{j(k)}$ будут части сторон прямоугольников $K_{j(k-1)}$, $K_{j(k)}$, на которых соответственно находятся точки $M^e_{j(k-1)}$, $M^b_{j(k)}$. Для выявления $\lambda^*_{j(k)}$ требуется сравнить по длине как минимум четыре ломаные, обходящие справа и слева прямоугольники $K_{j(k-1)}$, $K_{j(k)}$.

После построения $\lambda^*_{j(k)}$ будем ее корректировать в зависимости от местоположений тех прямоугольников K_i, которые она пересекает, обходя их справа или слева в той очередности, в которой они встречаются при движении по ломаной $\lambda^*_{j(k)}$ от точки $M_{j(k-1)}$ к точке $M_{j(k-1)}$.

Пример 1. Пусть $m = 5$, $n = 8$. Предполагается, что при любом $i \in \overline{1,5}$ точки M^e_i и M^b_i находятся соответственно в середине верхней и нижней граней прямоугольника K_i. Поэтому точки W_i — середины отрезков $M^e_iM^b_i$ — являются центрами тяжести прямоугольников K_i. На рис. 4 W_i отмечены жирными точками. Пусть координаты x^*_i, y^*_i точек W_i имеют следующие значения: $x^*_1 = 40, y^*_1 = -20$, $x^*_2 = 190, y^*_2 = 20$, $x^*_3 = 140, y^*_3 = 90$, $x^*_4 = 30, y^*_4 = 120$, $x^*_5 = 90, y^*_i = 50$, а координаты начальной точки W_0 равны нулю. При этом $\alpha = 12$, $\beta = 6$, $a_6 = 105$, $b_6 = 10$; $a_7 = 35$, $b_7 = 50$; $a_8 = 65$, $b_8 = 100$. На рис. 4 границы прямоугольников $\bar{K}_i$ $(i \in \overline{1,5})$ отмечены сплошными линиями, границы остальных трех прямоугольников отмечены точками. В результате вычислений установлено, что решением вспомогательной задачи 2 в данном примере является маршрут $r = (1, 5, 4, 3, 2)$.

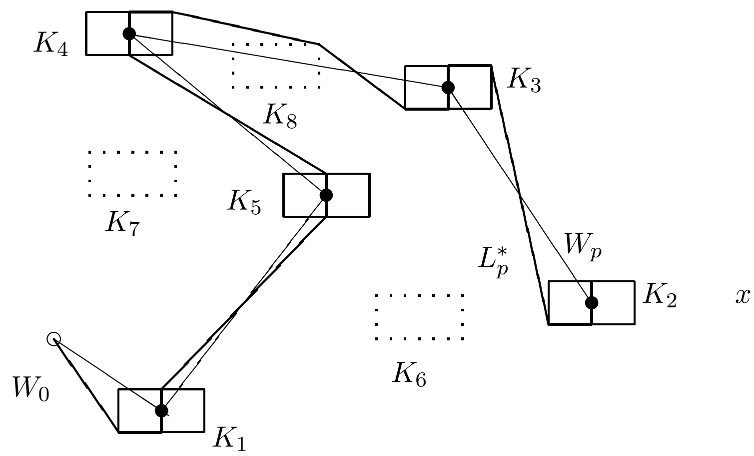


Рис. 4

При этом маршруте r длина θ_r ломаной Q_r, соединяющей точку W_0 с точками W_i в очередности r, равна 275. Ломаная Λ_r на рис. 4 отмечена жирными линиями. Длина траектории Λ_r в данном случае равна 307. Поэтому величина $b = 32$.

Оказывается, что множество $\mathbf{J}^*$ состоит из единственного маршрута $r = (1, 5, 4, 3, 2)$, который и является оптимальным в задаче 2.

4. Заключение

Разработан общий подход к решению двух различных по содержанию маршрутных задач, в основе которого лежат необходимые условия оптимальности, получаемые при решении более простых вспомогательных задач. Так, для выбора маршрута обхода управляемым нелинейным объектом группы движущихся точек формулируется более простая вспомогательная задача, где нелинейный объект заменяется "системой простых движений". После определения оптимального маршрута (очередности) p во вспомогательной задаче строятся оптимальные траектории D_p и L_p^0, соответствующие этому маршруту, во вспомогательной и исходной задачах вычисляется разность a длин этих траекторий. Затем определяется множество $\mathbf{J}^0$ тех маршрутов j, для которых разность длин траекторий D_j и D_p не превосходит величину a. Доказывается, что необходимым условием оптимальности маршрута в исходной задаче является его принадлежность указанному множеству $\mathbf{J}^0$.

При решении комбинаторной задачи о построении ломаной наименьшей длины, последовательно соединяющей группу заданных открытых прямоугольников при наличии препятствий, также формулируется вспомогательная задача, решение которой, получаемое стандартными методами [7–10], используется при построении множества $\mathbf{J}^*$ всех маршрутов, претендующих на оптимальность в исходной задаче.

Важно, что при построении множества $\mathbf{J}^0$ достаточно сравнивать только длины траекторий простых движений, а при построении множества $\mathbf{J}^*$ — только длины ломаных в упрощенных задачах, соответствующих возможным маршрутам. При этом оптимальную траекторию L_p^0 нелинейного объекта (2.1) достаточно построить лишь для маршрута p — решения вспомогательной задачи, а кратчайшую ломаную во второй (исходной) задаче достаточно построить лишь для маршрута q — решения соответствующей вспомогательной задачи.

Предлагаемые методы решения задач иллюстрируются примерами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 497 с.
2. **Бердышев Ю.И.** Об одной задаче последовательного сближения нелинейной управляемой системы третьего порядка с группой движущихся точек // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 5. С. 742–752.
3. **Бердышев Ю.И.** О задаче последовательного обхода одним нелинейным объектом двух движущихся точек // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 43–52.
4. **Бердышев Ю. И.** Об одной нелинейной задаче последовательного управления с параметром // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. Вып. 3. С. 58–63.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
6. **Бердышев Ю. И.** О выборе очередности сближения нелинейного объекта с группой движущихся точек // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. Вып. 1. С. 32–39.
7. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
8. **Коротаева Л.Н., Сесекин А.Н., Ченцов А.Г.** Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1107–1113.
9. **Меламед И.И., Сергеев С.И.** Задачи коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 1. С. 3–34.
10. **Ченцов А. Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 240 с.
11. **Сихарулидзе Г. Г.** Об одном обобщении задачи коммивояжера. I // Автоматика и телемеханика. 1971. № 8. С. 116–123.
12. **Бердышев Ю.И.** О выборе маршрута в одной нелинейной задаче последовательного сближения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 8–15.
13. **Ченцов А. Г.** Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Докл. АН 2008. Т. 423, № 3. С. 303–307.
14. **Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А.** Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–201.
15. **Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А.** Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Изв. вузов. Математика. 2010. № 6. С. 64–81.
16. **Ченцов А. Г.** Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. Вып. 3. С. 52–66.
17. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
18. **Бердышев Ю. И.** К задаче последовательного обхода нелинейным управляемым объектом совокупности гладких многообразий // Дифференц. уравнения и процессы управления. 1999. № 2. С. 3–27.
19. **Матвийчук А. Р.** Задача об оптимальном по быстродействию управлении подвижным объектом на плоскости при наличии фазовых ограничений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. Вып. 1. С. 89–95.
20. **Матвийчук А. Р., Ушаков В. Н.** О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. Вып. 1. С. 5–20.

Бердышев Юрий Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: berd@imm.uran.ru

Поступила 20.01.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

О ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП[1]

Н. Н. Воробьев

Все рассматриваемые группы конечны. Совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$ называется *ортогональной* (А.Н. Скиба, 1999), если: 1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и 2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$. Для произвольной ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ мы обозначаем совокупность всех групп, изоморфных группам вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Говорят, что $\mathfrak{F}$ является *прямым произведением* классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, если совокупность $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ является ортогональной системой классов и $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга. Доказано, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален в том и только в том случае, когда n-кратно ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

N. N. Vorob'ev. On direct products of classes of finite groups.

All groups considered are finite. A set $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ of non-empty classes of groups $\mathfrak{F}_i$ is called *orthogonal* (Skiba, 1999) if: (1) either $|I| = 1$ or $|I| > 1$ and (2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ for all $i, j \in I$, $i \neq j$. For any orthogonal system of classes $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ we denote by $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ the set of all groups isomorphic to groups of the form $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, where $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ for some $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. The class $\mathfrak{F}$ is said to be the *direct product* of classes $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ if the set $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ is an orthogonal system of classes and $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Let $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, where $\mathfrak{F}_i$ is a Fitting class. We prove that the Fitting class $\mathfrak{F}$ is n-multiply ω-local if and only if each of the Fitting classes $\mathfrak{F}_i$ is n-multiply ω-local.

Keywords: finite group, Fitting class, n-multiply ω-local Fitting class.

Введение

В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны.

Символом p всегда обозначается некоторое простое число, $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Напомним, что группа G называется *ωd-группой,* если для каждого композиционного фактора H/K группы G имеет место $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$.

Классом групп называется такая совокупность групп $\mathfrak{X}$, что если $G \in \mathfrak{X}$ и $H \cong G$, то $H \in \mathfrak{X}$. Символами (1), $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{G}_{p'}$ и $\mathfrak{G}_{\omega d}$ обозначаются соответственно класс всех единичных групп, класс всех p-групп, класс всех p'-групп и класс всех таких групп, в которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом,* если каждый гомоморфный образ любой группы A из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. *Формацией* называется такой гомоморф групп $\mathfrak{F}$, что каждая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой (обозначаемой $G^{\mathfrak{F}}$), факторгруппа по которой снова принадлежит $\mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *S_n-замкнутым* или *нормально наследственным,* если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $H \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$. *Классом Фиттинга* называется такой нормально наследственный класс групп $\mathfrak{F}$, что каждая группа G обладает наибольшей нормальной подгруппой (обозначаемой $G_{\mathfrak{F}}$), которая принадлежит $\mathfrak{F}$.

О п р е д е л е н и е 1. Совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$ называется *ортогональной* (А.Н. Скиба [22]), если:

[1]Исследования автора выполнены при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований БРФФИ–РФФИ (проект Ф10Р-231).

1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и
2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для всех i, $j \in I$, $i \neq j$.

Отметим, что всякая ортогональная система классов Фиттинга (формаций) является ортогональной системой элементов решетки всех классов Фиттинга (решетки всех формаций соответственно) в обычном смысле [15, с. 238].

Следуя [22], для произвольной ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ (в частности, пишем $\mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2 \bigotimes \ldots \bigotimes \mathfrak{F}_t$, если $I = \{1, 2, \ldots, t\}$) мы обозначаем совокупность всех групп, изоморфных группам вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Говорят, что $\mathfrak{F}$ является *прямым произведением* классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, если совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является ортогональной системой классов, и $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$.

Пусть L — решетка классов групп и $\mathfrak{F} \in L$. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ *прямо разложим* в решетке L, если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq L$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо неразложимым* в решетке L.

П р и м е р 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех p-разложимых групп. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \bigotimes \mathfrak{G}_{p'}$, т. е. $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех классов Фиттинга и в решетке всех формаций.

П р и м е р 2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in\mathbb{P}} \mathfrak{N}_p$, т. е. $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех классов Фиттинга и в решетке всех формаций.

П р и м е р 3. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — класс всех абелевых p-групп и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{G}_{p'}$. Тогда согласно [22, следствие 4.3.6] класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2$ является формацией. Поэтому класс $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех формаций. С другой стороны, $\mathfrak{F}$ не является классом Фиттинга. Значит, $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех классов Фиттинга.

П р и м е р 4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп. Тогда $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех классов Фиттинга. Действительно, если $\mathfrak{M}$ является собственным подклассом Фиттинга класса $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} = (1)$ согласно [16].

Покажем теперь, что $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех формаций. Предположим, что это неверно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2$ для некоторых неединичных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, и поэтому всякая группа порядка p принадлежит $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$, противоречие.

Прямые разложения классов групп оказались полезными при решении некоторых открытых вопросов теории классов групп и при построении классов Фиттинга (формаций) с различными заданными свойствами. Здесь мы лишь коротко отметим замечательные работы [1; 7], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля — Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку в каждой конечной группе, и книгу А.Н. Скибы [22], в которой прямые разложения классов групп нашли применение при решении многих открытых вопросов теории классов.

Целью данной работы является дальнейшее изучение прямых разложений классов групп.

Все рассматриваемые обозначения и терминология стандартны. Читатель может воспользоваться [2–4], если это необходимо.

1. Предварительные результаты

Напомним, что для любой непустой формации $\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ обозначают класс всех групп G с $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$.

Функции вида

$$f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называются *ω-локальными функциями Хартли* или, короче, *ω-локальными H-функциями.* Для произвольной ω-локальной H-функции f символом $LR_\omega(f)$ обозначается класс $(G \mid G^{\omega d} \in$

$f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ при всех $p \in \omega \cap \pi(G)$). Если класс Фиттинга $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой ω-локальной H-функции f, то $\mathfrak{F}$ называют *ω-локальным классом Фиттинга* с ω-локальной H-функцией f [24].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{X}$ называется D_0-замкнутым, если прямое произведение любого набора групп из $\mathfrak{X}$ снова принадлежит $\mathfrak{X}$.

Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно ω-локальным. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-локальным ($n \geqslant 1$), если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где все непустые значения ω-локальной H-функции f $(n-1)$-кратно ω-локальны (см. [24]).

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{M}$ — непустой D_0-замкнутый подкласс класса групп $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Ввиду того, что класс $\mathfrak{M}$ является D_0-замкнутым, $A_1 \in \mathfrak{M}$, $A_2 \in \mathfrak{M}, \ldots, A_t \in \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$G \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_1}) \bigotimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_2}) \bigotimes \ldots \bigotimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_t}) \subseteq \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i).$$

Значит,

$$\mathfrak{M} \subseteq \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i).$$

Обратно. Пусть $G \in \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$. Тогда найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_t}$. Так как класс $\mathfrak{M}$ D_0-замкнут, получаем $G \in \mathfrak{M}$. Значит, $\bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i) \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — произвольная ортогональная система классов групп, где $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ — разбиение множества I (для любых $j_1, j_2 \in J$, где $j_1 \neq j_2$, имеет место $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing$). Тогда, если $\mathfrak{F}_j = \bigotimes_{i\in I_j} \mathfrak{H}_i$, $j \in J$ и $\mathfrak{F} = \bigotimes_{j\in J} \mathfrak{F}_j$, то $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие $j_1, j_2, \ldots, j_k \in J$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots, A_k \in \mathfrak{F}_{j_k}$. Следовательно, найдутся такие $i_1^1, i_2^1, \ldots, i_l^1; \ldots; i_1^k, i_2^k, \ldots, i_m^k \in I$, что $A_1 = B_1^1 \times B_2^1 \times \ldots \times B_l^1$, где $B_1^1 \in \mathfrak{H}_{i_1^1}$, $B_2^1 \in \mathfrak{H}_{i_2^1}, \ldots, B_l^1 \in \mathfrak{H}_{i_l^1}; \ldots; A_k = B_1^k \times B_2^k \times \ldots \times B_m^k$, где $B_1^k \in \mathfrak{H}_{i_1^k}$, $B_2^k \in \mathfrak{H}_{i_2^k}, \ldots, B_m^k \in \mathfrak{H}_{i_m^k}$. Значит, $G = B_1^1 \times B_2^1 \times \ \ldots \times B_l^1 \times \ \ldots \times B_1^k \times B_1^2 \times \ \ldots \times B_m^k$. Поэтому $G \in \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$.

Обратно. Пусть $G \in \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$. Тогда найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{H}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{H}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{H}_{i_t}$. Значит, найдутся такие $j_1, j_2, \ldots, j_s \in J$, что $\mathfrak{H}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1}$, $\mathfrak{H}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_t} \subseteq \mathfrak{F}_{j_s}$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{F}_{j_1} \bigotimes \mathfrak{F}_{j_2} \bigotimes \ldots \bigotimes \mathfrak{F}_{j_s} \subseteq \bigotimes_{j\in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ — некоторые D_0-замкнутые классы, и группа A имеет вид $A = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, то подгруппы A_1, A_2 характеристичны в A.*

Доказательство. Пусть α — произвольный автоморфизм группы A. Допустим, что $A_1 \neq A_1^\alpha$. Тогда $A_1 \subset A_1 \times A_1^\alpha$ и

$$|A| = \frac{|A_1 \times A_1^\alpha||A_2|}{|A_1 \times A_1^\alpha \cap A_2|}.$$

Ясно, что $|A_1 \times A_1^{\alpha}||A_2| > |A_1||A_2| = |A|$. Поэтому $|A_1 \times A_1^{\alpha} \cap A_2| \neq 1$. Но $A_1 \times A_1^{\alpha} \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Следовательно,

$$A_1 \times A_1^{\alpha} \cap A_2 \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1).$$

Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ — ортогональная система* C*-замкнутых классов, где* $\mathrm{C} \in \{\mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0, \mathrm{Q}, \mathrm{R}_0, \mathrm{D}_0\}$. *Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t$ —* C*-замкнутый класс.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\mathrm{C} = \mathrm{D}_0$. Пусть $A_1 \in \mathfrak{F}, A_2 \in \mathfrak{F}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие $i_1^1, i_2^1, \dots, i_t^1; \dots; i_1^t, i_2^t, \dots, i_t^t \in I$, что $A_1 = B_1^1 \times B_2^1 \times \dots \times B_t^1$, где $B_1^1 \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^1 \in \mathfrak{F}_2, \dots, B_t^1 \in \mathfrak{F}_t; \dots; A_t = B_1^t \times B_2^t \times \dots \times B_t^t$, где $B_1^t \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^t \in \mathfrak{F}_2, \dots, B_t^t \in \mathfrak{F}_t$. Тогда

$$G = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t = B_1^1 \times B_2^1 \times \dots \times B_t^1 \times \dots \times B_1^t \times B_2^t \dots \times B_t^t$$

$$\cong (B_1^1 \times B_1^2 \times \dots \times B_1^t) \times (B_2^1 \times B_2^2 \times \dots \times B_2^t) \times \dots \times (B_t^1 \times B_t^2 \dots \times B_t^t),$$

где ввиду D_0-замкнутости классов $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ имеем $B_1^1 \times B_1^2 \times \dots \times B_1^t \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^1 \times B_2^2 \times \dots \times B_2^t \in \mathfrak{F}_2, \dots, B_t^1 \times B_t^2 \dots \times B_t^t \in \mathfrak{F}_t$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

В случае $\mathrm{C} = \mathrm{Q}$ и $\mathrm{C} = \mathrm{R}_0$ см. доказательство [22, теорема 4.3.2], а в случае $\mathrm{C} = \mathrm{S}_n$ и $\mathrm{C} = \mathrm{N}_0$ см. доказательство [12, лемма 4].

Лемма доказана.

Заметим, что лемма 4 при $t = 2$ в разрешимом случае вытекает из работы В.А. Ведерникова [9, лемма 4].

Лемма 5. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ — некоторые* D_0*-замкнутые классы, и группа A имеет вид $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_t$, то подгруппы $A_1, A_2, \dots, A_t$ характеристичны в A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $t = 2$ лемма верна в силу леммы 3.

Пусть $t > 2$. По лемме 1 $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \bigotimes \mathfrak{F}_3 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t) = (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) \bigotimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) \bigotimes \dots \bigotimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_t) = (1) \bigotimes (1) \bigotimes \dots \bigotimes (1) = (1)$. Таким образом, система $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \bigotimes \mathfrak{F}_3 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t$ ортогональна. Поэтому ввиду леммы 3 A_1 — характеристическая подгруппа группы $A = A_1 \times (A_2 \times \dots \times A_t)$.

Лемма доказана.

Лемма 6 (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков [24]). *Пусть $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$. Если $O^p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, где $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 7 (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков [24]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G_{\omega d} \not\subseteq G_{\mathfrak{F}}$, либо найдется такое простое число $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{F}})$, что $F^p(G) \notin f(p)$.*

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален в том и только в том случае, когда n-кратно ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}_i$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга для любого $i \in I$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Рассмотрим прежде случай, когда $n = 0$. Пусть H — нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие индексы $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Следовательно, ввиду лемм 2 и 4

$$H \in \mathfrak{F}_{i_1} \bigotimes \left(\mathfrak{F}_{i_2} \bigotimes \cdots \bigotimes \mathfrak{F}_{i_t}\right) = \mathfrak{F}_{i_1} \bigotimes \mathfrak{F}_{i_2} \bigotimes \cdots \bigotimes \mathfrak{F}_{i_t} \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}.$$

Итак, класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп.

Пусть $G = AB$, где A, B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Тогда найдутся такие индексы $i_1, i_2, \ldots, i_t; j_1, j_2, \ldots, j_a \in I$, что $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$ и $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_a$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}; B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, $B_2 \in \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots, B_a \in \mathfrak{F}_{j_a}$. Ввиду леммы 5 подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_t; B_1, B_2, \ldots, B_a$ нормальны в G. Следовательно, $G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_b$, где каждый сомножитель C_i удовлетворяет одному из следующих условий:

1) C_i совпадает с A_{i_l} для некоторого индекса $i_l \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_a\}$;

2) $C_i = B_{j_l}$ для некоторого индекса $j_l \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$;

3) $C_i = A_{i_l} B_{j_k}$ для некоторого индекса $i_l = j_k$.

Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $n > 0$ и f_i — минимальная l_ω^{n-1}-значная H-функция n-кратно ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ для каждого $i \in I$. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда если $i \neq j$, то по условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Значит, $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$. Построим ω-локальную H-функцию f таким образом, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$,

$$f(p) = \begin{cases} f_i(p), & \text{если } p \in \pi_i \text{ для некоторого } i \in I, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$.

Пусть $LR_\omega(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $LR_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа и $M = G_{\mathfrak{F}}$ — ее комонолит. Поскольку $G \in LR_\omega(f)$, то $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то по построению ω-локальной H-функции f найдется такое $i \in I$, что $f(p) = f_i(p) \neq \varnothing$. Последнее означает, что $p \in \pi_i$. Значит, $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i$.

Предположим, что $\omega \cap \pi(G/M) = \varnothing$. Тогда $G^{\omega d} = G$. Так как при этом $G \in LR_\omega(f)$, то

$$G = G^{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $\omega \cap \pi(G/M) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/M)$. Если G/M — неабелева группа, то $F^p(G) = G$. Поэтому

$$G = F^p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть G/M – p-группа. Тогда

$$F^p(G) = O^p(G) \in f(p) = f_i(p).$$

Отсюда по лемме 6 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, справедливо включение $LR_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LR_\omega(f)$. Тогда G — комонолитическая группа. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$. Значит, $F^p(G) \in f_i(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Кроме того, поскольку $G \in \mathfrak{F}$ и $G^{\omega d}$ нормальна в G, получаем $G^{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Поэтому $G \in LR_\omega(f)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq LR_\omega(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Пусть теперь класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален и f — его минимальная l_ω^{n-1}-значная H-функция. Пусть $i \in I$ и f_i — такая ω-локальная H-функция, что $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$,

$$f_i(p) = \begin{cases} f(p), & \text{если } p \in \pi_i, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$.

Предположим, что $\mathfrak{F}_i$ не входит в $LR_\omega(f_i)$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LR_\omega(f_i)$. Тогда G — комонолитическая группа и $M = G_{LR_\omega(f_i)}$ — ее комонолит. Поскольку $G \notin LR_\omega(f_i)$, то по лемме 7 либо $G^{\omega d} \not\subseteq G_{LR_\omega(f_i)}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G/G^{\omega d})$, что $F^p(G) \notin f_i(p)$. Но $G \in \mathfrak{F}_i$ и $G^{\omega d}$ нормальна в G. Значит, $G^{\omega d} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$. К тому же, из того, что $G \in \mathfrak{F}$ для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$, получаем

$$F^q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Следовательно, $G \in LR_\omega(f_i)$. Противоречие. Значит, имеет место включение $\mathfrak{F}_i \subseteq LR_\omega(f_i)$.

Допустим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $LR_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда группа G комонолитична с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/M) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из того, что $G \in LR_\omega(f_i)$, следует, что $F^p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \varnothing$, и по построению ω-локальной H-функции f_i получаем $p \in \pi_i$. Поэтому $\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i$. Кроме того, $f_i \leqslant f$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Ввиду комонолитичности группы G найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_j$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \varnothing.$$

Значит, $i = j$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LR_\omega(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально ω-локален, когда тотально ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

При $n = 1$ из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. (Н.Н. Воробьев [11]). *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-локален, когда ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Если в теореме 1 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

Следствие 3. (Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба [12]). *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно локален, когда n-кратно локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален, когда локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Пусть C — операция на классах групп. Будем говорить, что непустой класс групп $\mathfrak{F}$ *прямо C-разложим*, если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных C-замкнутых классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо C-неразложимым.*

Следующая теорема является аналогом теоремы Ремака — Шмидта.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ C-*замкнутые неединичные классы* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо* C-*неразложимы, где* $\mathrm{D}_0 \leq \mathrm{C}$. *Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Доказательство. Пусть $i \in I$. Тогда по лемме 1 имеет место равенство $\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}_j)$. Понятно, что пересечение любых двух C-замкнутых классов снова является C-замкнутым классом. Значит, поскольку класс $\mathfrak{F}_i$ по условию прямо C-неразложим, то для некоторого $j \in J$ справедливо равенство $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}_j$, т. е. $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$.

Заметим, что если найдутся таких два различных индекса j_1, $j_2 \in J$, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_1}$ и $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_2}$, то $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_1} \cap \mathfrak{M}_{j_2} = (1)$, т. е. $\mathfrak{F}_i = (1)$, что противоречит условию. Следовательно, индекс $j = \varphi(i)$ такой, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$ однозначно определен.

Покажем теперь, что если $j = \varphi(i)$, т. е. $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$, то $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_j$. По лемме 1 получаем $\mathfrak{M}_j = \bigotimes_{k\in I}(\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{M}_j)$. Значит, $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$ для некоторого $k \in I$. В свою очередь, $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi(k)}$. Значит, $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{F}_k = \mathfrak{M}_{\varphi(k)}$, и поэтому $\varphi(j) = k$, т. е. отображение φ сюръективно и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ для любого $i \in I$.

Покажем теперь, что отображение φ инъективно. Предположим, что для $i_1 \neq i_2$ и i_1, $i_2 \in I$ имеет место $\varphi(i_1) = \varphi(i_2) = j$. Тогда по определению отображения φ $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{M}_j$ и $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{M}_j$. Кроме того, по доказанному выше найдется такой индекс k, что $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$. Значит, $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$ и $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$. Поэтому $\mathfrak{F}_{i_1} = \mathfrak{F}_{i_2} = \mathfrak{F}_k$. Следовательно, $i_1 = i_2$. Противоречие. Значит, отображение φ инъективно. Поэтому $|I| = |J|$.

Теорема доказана.

Следствие 5 (А.Н. Скиба [22]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *формации* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех формаций. Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Следствие 6 (Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба [12]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *классы Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех классов Фиттинга. Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Следствие 7. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *разрешимые классы Шунка* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех классов Шунка. Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Отметим, наконец, что в серии работ В.А. Ведерникова и его учеников (см., например, [8;10;14;17]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальной теории расслоенных формаций и биканонических классов Фиттинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M.D.** On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. 1992. Vol. 148, no. 1. P. 42–52.
2. **Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M.** Classes of finite groups. Dordrecht: Springer, 2006. 385 p.
3. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Ser.: De Gruyter Expo. Math., 4. Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co, 1992. 891 p.
4. **Guo Wenbin.** The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Science Press; Kluwer Academic Publishers, 2000. 258 p.
5. **Guo Wenbin, Shum K.P.** On totally local formations of groups // Comm. Algebra. 2002. Vol. 30, no. 5. P. 2117–2131.
6. **Safonov V.G.** On τ-closed totally saturated group formations with Boolean sublattices // Algebra and Discrete Math. 2008. No. 2. P. 109–122.

7. **Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н.** О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры: сб. тр. / Ин-т математики АН Украины; отв. ред. Н.С. Черников. Киев, 1993. С. 27–54.
8. **Ведерников В.А.** Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.
9. **Ведерников В.А.** О локальных формациях конечных групп // Мат. заметки. 1989. Т. 46, вып. 6. С. 32–37.
10. **Ведерников В.А., Сорокина М.М.** Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, вып. 3. С. 125–144.
11. **Воробьев Н.Н.** О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга // Вестн. Витебского ун-та. 1997. № 3. С. 55–58.
12. **Воробьев Н.Н., Скиба А.Н.** О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 523–530.
13. **Го Вэньбинь.** Об одном вопросе теории кратно локальных формаций // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1263–1270.
14. **Камозина О.В.** Булевы решетки кратно Ω-биканонических классов Фиттинга // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, вып. 3. С. 47–53.
15. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков [и др.]; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.
16. **Савельева Н.В., Воробьев Н.Т.** О проблеме существования максимальных подклассов Фиттинга в минимальном π-нормальном классе Фиттинга // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. 2009. № 1. С. 29–37.
17. **Скачкова Ю.А.** Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, вып. 3. С. 42–46.
18. **Скиба А.Н.** О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Тр. Гомельского семинара. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.
19. **Скиба А.Н.** Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. С. 21–31.
20. **Скиба А.Н.** О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Изв. вузов. Математика. 1994. № 10. С. 75–80.
21. **Скиба А.Н.** О дополняемых подформациях // Вопросы алгебры. 1996. Вып. 9. С. 114–118.
22. **Скиба А.Н.** Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
23. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.
24. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

Воробьев Николай Николаевич
канд. фiз.-мат. наук, доцент
докторант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: vornic2001@yahoo.com

Поступила 12.12.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ[1]

А. Р. Данилин, А. П. Зорин

Рассматривается задача оптимального граничного управления решениями уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей с малым коэффициентом при операторе Лапласа и интегральными ограничениями на управление. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения задачи.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin, A. P. Zorin. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem in a bounded domain.

A problem of optimal boundary control of solutions of an elliptic-type equation with a small coefficient at the Laplace operator and integral constraints on the control in a bounded domain with smooth boundary is considered. A complete asymptotic expansion of the solution of this problem in powers of the small parameter is obtained.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ — ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega$. Будем предполагать, что $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ есть многообразие с краем Γ класса C^∞. Через $d\Gamma$ будет обозначаться мера на поверхности Γ, порождаемая мерой dx.

Рассматривается следующая задача граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z - a(x) z = f(x), \quad x \in \Omega,\ z \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$J(u) := \int\limits_\Omega z^2(x)\,dx + \nu^{-1} \int\limits_\Gamma u^2(x)\,d\Gamma \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \tag{1.2}$$

где $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций [2;3], $\partial z/\partial n$ — производная функции z в точке $x \in \Gamma$ по направлению внешней (по отношению к области Ω) нормали,

$$\begin{gathered} a(\cdot), f(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha^2 > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \mathcal{U} := \big\{ u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \colon |||u||| \leqslant 1 \big\}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь через $|||\cdot|||$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. В пространстве $L_2(\Omega)$ для нормы и скалярного произведения используются обозначения $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ соответственно.

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00679-а), ФЦП 02.740.11.0612 и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математике и физике” (проект 12-П-1-1009).

Данная работа является обобщением работы [4] на случай невыпуклых областей и расширенным вариантом заметки [5].

Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [6–9].

Единственное оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ в задаче (1.1), (1.2) и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ находятся как решение следующей задачи [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.36), (2.49)]:

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta z_\varepsilon - a(x)z_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2\Delta p_\varepsilon - a(x)p_\varepsilon + z_\varepsilon = 0, & z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g(x) + u_\varepsilon(x), \quad \varepsilon^2\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

$$\forall\, v(\cdot) \in \mathcal{U} \quad \langle p_\varepsilon + \nu^{-1}u_\varepsilon, v - u_\varepsilon\rangle \geqslant 0.$$

В работе [4, лемма 1, соотношение (2.5)] было доказано, что оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ определяется равенством $u_\varepsilon(\cdot) = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon(\cdot)|_\Gamma$, где $z_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot)$ и λ_ε есть единственное решение задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta z_\varepsilon - a(x)z_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2\Delta p_\varepsilon - a(x)p_\varepsilon + z_\varepsilon = 0, & z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = g(x), \quad \varepsilon^2\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\lambda_\varepsilon \in (0;\nu]\colon\ (\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| \leqslant 1) \wedge \big((\nu - \lambda_\varepsilon)(1 - \lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||) = 0\big). \tag{1.5}$$

В силу свойств эллиптических операторов имеют место соотношения $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Цель работы — изучить поведение $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ и построить асимптотическое разложение $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ с точностью до любой степени параметра ε.

Отметим, что монография [1] посвящена рассмотрению условий разрешимости задач управления, подобных задаче (1.1), (1.2), и зависимость от малого параметра в ней не рассматривалась.

2. Априорные оценки и разрешимость краевых задач

Как и в [4], для получения априорных оценок используются априорные оценки для эллиптических операторов [3;10] и частный случай неравенства Эрлинга [11, с. 315] $\exists\, K > 0\ \ \forall\, y(\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})\ \forall\, \varepsilon \in (0;\varepsilon_0)\ |||y|||^2 \leqslant K\left(\varepsilon^{-1}\|y\|^2 + \varepsilon\|\nabla y\|^2\right)$.

Отметим, что в дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области Ω и коэффициента $a(\cdot)$, часто будем обозначать одними и теми же буквами K или C.

Методами работы [4] в рассматриваемом случае получаются следующие априорные оценки.

Лемма 1. *Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3).
Если $y(\cdot) = y_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ есть решение задачи

$$\varepsilon^2\Delta y - a(x)y = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon^2\frac{\partial y}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma,$$

то найдется $K > 0$ такое, что

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|y_\varepsilon\|,\, \varepsilon|||y_\varepsilon|||,\, \varepsilon^{3/2}\|\nabla y_\varepsilon\|\} \leqslant K(|||g||| + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \tag{2.1}$$

Лемма 2. *Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3) *и $\lambda_\varepsilon \in (0;\nu]$.*
Если $z_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ есть решение задачи (1.4), *то найдется $K > 0$ такое, что*

$$\begin{gathered} \max\{\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\|,\, \varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon\|,\, \varepsilon|||p_\varepsilon|||,\, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_\varepsilon\|\} \leqslant K(|||g||| + \varepsilon^{1/2}\|f\|), \\ \max\{\varepsilon|||z_\varepsilon|||,\, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_\varepsilon\|\} \leqslant K(|||g||| + \lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Следствие 1. *Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3).

Если $z_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ есть решение задачи (1.4), (1.5), *то при $\varepsilon \to 0$ справедливы следующие асимптотические представления*:

$$\|z_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^{-1/2}\big), \quad |||z_\varepsilon||| = O\big(\varepsilon^{-1}\big),$$
$$\|p_\varepsilon\| = O\big(\varepsilon^{-1/2}\big), \quad |||p_\varepsilon||| = O\big(\varepsilon^{-1}\big).$$

Теорема 1. *Пусть функции $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Gamma})$, функция $a(\cdot)$ удовлетворяет условию* (1.3), *а $\lambda > 0$. Тогда задача*

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta z - a(x)z = f_1(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2\Delta p - a(x)p + z = f_2(x), & z,\, p \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2\dfrac{\partial z}{\partial n} + \lambda p(x) = g_1(x), \quad \varepsilon^2\dfrac{\partial p}{\partial n} = g_2(x), & x \in \Gamma \end{cases} \tag{2.3}$$

разрешима, ее решение единственно и при некотором K, не зависящем ни от ε, ни от f_i, g_i, $i = \overline{1,2}$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered} \max\{\varepsilon^{3/2}\|z\|,\, \varepsilon^{3/2}\|p\|,\, \varepsilon^2|||p|||,\, \varepsilon^{5/2}\|\nabla p\|\} \\ \leqslant K\big(\varepsilon|||g_1||| + (\varepsilon+\lambda)|||g_2||| + \varepsilon^{3/2}\|f_1\| + (\varepsilon+\lambda)\varepsilon^{1/2}\|f_2\|\big), \\ \max\{\varepsilon^3|||z|||,\, \varepsilon^{7/2}\|\nabla z\|\} \\ \leqslant K(\varepsilon+\lambda)\big(\varepsilon|||g_1||| + (\varepsilon+\lambda)|||g_2||| + \varepsilon^{3/2}\|f_1\| + (\varepsilon+\lambda)\varepsilon^{1/2}\|f_2\|\big). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Априорные оценки решения (2.4) есть следствие оценок (2.1) и (2.2). Здесь мы докажем разрешимость задачи (2.3) и единственность ее решения при фиксированном $\varepsilon > 0$.

Для сокращения записи введем следующие обозначения $A := \varepsilon^2\Delta - a(x)$, $\quad D := \varepsilon^2\partial/\partial n$.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Определим отображение $\mathcal{A}$ пространства $E := (H^2(\Omega))^2$ в $G := (L_2(\Omega))^2 \times (H^{1/2}(\Gamma))^2$ формулой

$$\mathcal{A}(z,p) := (Az, Ap + z, Dz + \lambda p, Dp).$$

Пусть $F := (H^1(\Omega))^2$. Тогда E компактно вложено в F. Покажем, что

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, z, p \in H^2(\Omega) \quad ||(z,p)||_E \leqslant C\big(||\mathcal{A}(z,p)||_G + ||(z,p)||_F\big). \tag{2.5}$$

В силу утверждения 1° теоремы 5.1 из [3, гл. 2, п. 5]

$$\exists\, C_1 > 0\colon ||(z,p)||_E \leqslant ||z)||_{H^2(\Omega)} + ||p||_{H^2(\Omega)}$$

$$\leqslant C_1\Big(||Az||_{L_2(\Omega)} + ||Dz||_{H^{1/2}(\Gamma)} + ||z||_{H^1(\Omega)} + ||Ap||_{L_2(\Omega)} + ||Dp||_{H^{1/2}(\Gamma)} + ||p||_{H^1(\Omega)}\Big)$$

$$\leqslant C_1\Big(||Az||_{L_2(\Omega)} + ||Ap+z||_{L_2(\Omega)} + ||z||_{L_2(\Omega)} + ||Dz+\lambda p||_{H^{1/2}(\Gamma)} + \lambda||p||_{H^{1/2}(\Gamma)} + ||Dp||_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

$$+ ||z||_{H^1(\Omega)} + ||p||_{H^1(\Omega)}\Big).$$

Но в силу теоремы о следах [3, гл. 1, п. 8, теорема 8.3]

$$\exists\, C_2 > 0\colon ||z||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2||z||_{H^2(\Omega)}, \quad ||p||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2||p||_{H^2(\Omega)},$$

что и завершает доказательство неравенства (2.5).

Таким образом, по лемме Питре [12; 3, гл. 2, п. 5, лемма 5.1] образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут, а его ядро конечномерно. Но в силу априорных оценок (2.4) ядро оператора $\mathcal{A}$ состоит из одного нуля, т. е. оператор $\mathcal{A}$ инъективен.

2. Покажем, что $\mathcal{A}$ сюръективен. Пусть $f_1^*, f_2^* \in L_2(\Omega)$, $g_1^*, g_2^* \in H^{-1/2}(\Gamma)$ таковы, что

$$\forall\, z,p \in H^2(\Omega)\ 0 = \langle \mathcal{A}(z,p), (f_1^*, f_2^*, g_1^*, g_2^*)\rangle := (Az, f_1^*) + (Ap+z, f_2^*) + \langle Dz+\lambda p, g_1^*\rangle + \langle Dp, g_2^*\rangle, \quad (2.6)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает стандартную билинейную форму, определяющую двойственность между пространствами и сопряженными к ним пространствами. Отметим, в частности, что значение билинейной формы $\langle f, g^*\rangle$, определяющей двойственность между $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ в случае, когда $g^* \in L_2(\Gamma)$, совпадает со скалярным произведением f и g^* в $L_2(\Gamma)$.

Наша цель в дальнейшем — доказать, что $f_1^* = f_2^* = 0$ и $g_1^* = g_2^* = 0$, что в силу замкнутости образа $\mathcal{A}$ даст сюръективность этого оператора.

3. В силу независимости z и p соотношения (2.6) распадаются на два:

$$\forall\, z \in H^2(\Omega) \qquad (Az, f_1^*) + (z, f_2^*) + \langle Dz, g_1^*\rangle = 0, \quad (2.7)$$

$$\forall\, p \in H^2(\Omega) \qquad (Ap, f_2^*) + \langle \lambda p, g_1^*\rangle + \langle Dp, g_2^*\rangle = 0. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.7) показывает, что $(Az, f_1^*) + \langle Dz, g_1^*\rangle = -(z, f_2^*)$. Тем самым по утверждению 2° теоремы 5.1 из [3, гл. 2, п. 5], примененной к оператору (A, D), получим

$$f_1^* \in H^2(\Omega), \quad g_1^* \in H^{3/2}(\Gamma). \quad (2.9)$$

4. По теореме о следах [3, гл. 1, п. 8, теорема 8.3] отображение

$$H^m(\Omega) \ni q \mapsto (q|_\Gamma, Dq) \in H^{m-1/2}(\Omega) \times H^{m-3/2}(\Omega) \quad (2.10)$$

является сюръективным. Поэтому

$$\exists\, \widetilde{g}_1^* \in H^3(\Omega)\colon D\widetilde{g}_1^* = g_1^*. \quad (2.11)$$

Подставив в (2.8) $D\widetilde{g}_1^*$ вместо g_1^* и применив формулу Грина к функциям p и $D\widetilde{g}_1^*$

$$(A\widetilde{g}_1^*, p) = (\widetilde{g}_1^*, Ap) + \langle D\widetilde{g}_1^*, p\rangle - \langle \widetilde{g}_1^*, Dp\rangle, \quad (2.12)$$

получим $(Ap, f_2^*) + \langle Dp, g_2^*\rangle = -\lambda\langle p, g_1^*\rangle = -\lambda\langle p, D\widetilde{g}_1^*\rangle = -\lambda(A\widetilde{g}_1^*, p) + \lambda(\widetilde{g}_1^*, Ap) - \lambda\langle\widetilde{g}_1^*, Dp\rangle$ или $(Ap, f_2^* - \lambda\widetilde{g}_1^*) + \langle Dp, g_2^* + \lambda\widetilde{g}_1^*\rangle = (-\lambda A\widetilde{g}_1^*, p)$. Поскольку $\lambda A\widetilde{g}_1^* \in H^1(\Omega)$, то снова применяя утверждение 2° теоремы 5.1 из [3, гл. 2, п. 5], получим, что $f_2^* - \lambda\widetilde{g}_1^* \in H^3(\Omega)$, $g_2^* + \lambda\widetilde{g}_1^* \in H^{5/3}(\Omega)$. Это с учетом (2.11) дает

$$f_2^* \in H^3(\Omega), \quad g_2^* \in H^{5/2}(\Gamma). \quad (2.13)$$

Соотношения (2.9) и (2.13) показывают, что f_1^* и f_2^* лежат в области определения оператора A.

5. Теперь, взяв в соотношениях (2.7), (2.8) $z, p \in \overset{o}{H}{}^2(\Omega)$ и применив формулу Грина (2.12), получим, что $(z, Af_1^* + f_2^*) = 0$ и $(p, Af_2^*) = 0$, что в силу плотности $\overset{o}{H}{}^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ дает

$$Af_1^* + f_2^* = 0 \ \text{ и } \ Af_2^* = 0. \quad (2.14)$$

6. Теперь применим формулу Грина (2.12) к равенствам (2.7), (2.8) в общем случае — $z, p \in H^2(\Omega)$ и учтем соотношения (2.14). В итоге получим, что

$$\forall\, z \in H^2(\Omega) \qquad \langle Dz, \widetilde{g}_1^* + f_1^*\rangle - \langle z, Df_1^*\rangle = 0,$$

$$\forall\, p \in H^2(\Omega) \qquad \langle p, \lambda\widetilde{g}_1^* - Df_2^*\rangle + \langle Dp, g_2^* + f_2^*\rangle = 0.$$

Отсюда в силу сюръективности отображения следа (2.10) получим равенства

$$\widetilde{g}_1^* = -f_1^*,\ Df_1^* = 0, \quad Df_2^* - \lambda\widetilde{g}_1^* = 0, \quad g_2^* = -f_2^*|_\Gamma, \tag{2.15}$$

которые с учетом (2.14) дают $Af_2^* = 0,\ Af_1^* + f_2^* = 0, \quad Df_2^* + \lambda f_1^* = 0, \quad Df_1^* = 0.$

Поэтому пара $\{f_1^*, f_2^*\}$ удовлетворяет однородной задаче (2.3) и тем самым $f_1^* = f_2^* = 0$. Равенства (2.15) показывают, что и $g_1^* = g_2^* = 0$. □

Методами работы [4] и в данном случае получаются следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(\cdot), g(\cdot)$ *и* $a(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* (1.3), *а при* $r \in [r_1; r_2]$ *и* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ *для* $z_{\varepsilon,r}(\cdot)$ — *оптимальных решений задачи* (1.1), (1.2) *с* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ *справедливы равенства* $|||u_{\varepsilon,r}||| = r$. *Тогда*

$$\exists\ K > 0 \quad \forall\ r, r' \in (r_1; r_2) \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0) \quad |||u_{\varepsilon,r} - u_{\varepsilon,r'}||| \leqslant K\varepsilon^{-3}|r - r'|.$$

Лемма 3. *Пусть* $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ *и удовлетворяют условиям* (1.3), *а* $z_\varepsilon(\cdot)$, $p_\varepsilon(\cdot)$ *и* λ_ε *есть решение задачи* (1.4), (1.5). *Если*

$$|||g||| > 1, \tag{2.16}$$

то $\lambda_\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В дальнейшем будем считать, что условие (2.16) выполнено, тем самым при всех малых $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| = 1. \tag{2.17}$$

Теорема 3. *Пусть функции* $f_{1,\varepsilon,m}(\cdot), f_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_{1,\varepsilon,m}(\cdot), g_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Gamma})$, *функция* $a(\cdot)$ *удовлетворяет условию* (1.3), *фукнция* $g(\cdot)$ — *условию* (2.16), *а* $\lambda_m(\varepsilon)$ *и* $h_m(\varepsilon)$ — *некоторые функции от* ε *и* $\lambda_m \in (0; \nu]$ *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$. *Если*

$$\max\{\|f_{i,\varepsilon,m}\|, \|\nabla f_{i,\varepsilon,m}\|, |||g_{i,\varepsilon,m}|||, |h_m(\varepsilon)| \colon i = 1, 2\} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \to 0,$$

а z_m, p_m — *решение задачи*

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta z_m - a(x)z_m = f(x) + f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2\Delta p_m - a(x)p_m + z_m = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_m, p_m \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2\dfrac{\partial z_m}{\partial n} + \lambda_m p_m(x) = g(x) + g_{1,\varepsilon,m}(x), \quad \varepsilon^2\dfrac{\partial p_m}{\partial n} = g_{2,\varepsilon,m}(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

$$\lambda_m|||p_m||| = 1 + h_m,$$

то для $z_{\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_m$, $p_{\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_m$, $\lambda_{\varepsilon,m} := \lambda_\varepsilon - \lambda_m$, *где* $z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon$, — *решение задачи* (1.4), (2.17), *справедливы следующие асимптотические оценки*:

$$\max\bigl\{\varepsilon^{1/2}\|z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon|||z_{\varepsilon,m}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2}\|p_{\varepsilon,m}\|,$$
$$\varepsilon|||p_{\varepsilon,m}|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_{\varepsilon,m}\|, \lambda_{\varepsilon,m}\bigr\} = O(\varepsilon^{m-7}), \quad \varepsilon \to 0.$$

3. Построение асимптотики

В силу теоремы 3 для построения асимптотического разложения решения рассматриваемой задачи нужно построить его *формальное асимптотическое решение* (ф. а. р.) (см., например, [13, с. 10]). Его построение осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения [14; 15].

Внешнее разложение решения ищем в виде рядов

$$z_{out}(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}z_k(x),\quad p_{out}(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}p_k(x),\quad \varepsilon\to 0.$$

Коэффициенты $z_k(x), p_k(x)$ находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$\begin{cases} z_0(x)=-f(x)[a(x)]^{-1}, & z_{2k}(x)=\Delta z_{2k-2}[a(x)]^{-1}, \qquad k\geq 1,\\ p_0(x)=-f(x)[a(x)]^{-2}, & p_{2k}=[\Delta p_{2k-2}+z_{2k}]\,[a(x)]^{-1}, \quad k\geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Все $z_k(x), p_k(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})$, но не удовлетворяют граничным условиям.

Для того чтобы устранить невязку в граничных условиях, нужно построить экспоненциально убывающие функции в окрестности всей границы Γ, удовлетворяющие соответствующей однородной системе.

В силу гладкости Γ в ее окрестности можно ввести систему координат $(s;\tau)$, где s — координаты на Γ, а τ — расстояние от текущей точки $x\in\Omega$ до Γ.

Пограничный слой имеет ширину порядка ε, а поправочные функции (внутреннее разложение) нужны не во всей области Ω, а лишь в ее малой окрестности. Поэтому после построения поправочные функции нужно умножить на срезающую функцию η, т. е. функцию с носителем в малой окрестности границы и равной тождественно 1 в некоторой меньшей окрестности границы.

В пограничном слое надо перейти к новым *растянутым* координатам (см., например, [13, с. 31–34]) $\xi=\tau\varepsilon^{-1}$ и к следующему виду внутреннего разложения:

$$Z(s,\xi,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k Z_k(s,\xi),\quad P(s,\xi,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k P_k(s,\xi),\quad \lambda_\varepsilon=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\lambda_k. \tag{3.2}$$

При этом ряды $Z(s,\xi)$ и $P(s,\xi)$ должны быть ф. а. р. соответствующей однородной системы уравнений.

При переходе к новым координатам оператор $Au=\varepsilon^2\Delta u-a(x,y)u$ перейдет в оператор

$$\mathcal{L}_\varepsilon u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\varepsilon L_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+\varepsilon^2 L_2 u-\widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)u.$$

Здесь L_1 и L_2 — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s, с гладкими коэффициентами от s и τ.

Подставляя в эту однородную систему ряды (3.2) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ в ряды Тейлора по переменной $\tau=\varepsilon\xi$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z_{-1}}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)Z_{-1}=0, & \dfrac{\partial^2 P_{-1}}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)P_{-1}+Z_{-1}=0,\\ \dfrac{\partial^2 Z_m}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)Z_m=F_m(s,\xi), & m\geqslant 0,\\ \dfrac{\partial^2 P_m}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)P_m+Z_m=G_m(s,\xi), & m\geqslant 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $F_m(s,\xi)$ и $G_m(s,\xi)$ линейно выражаются через предыдущие функции Z_k, P_k и их производные и полиномиально зависят от ξ и гладко от s, а функция $a(x)=\widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\xi^i\widetilde{a}_i(s)$ разложена в ряд по степеням малого параметра.

Подстановка соответствующих рядов в граничные условия приведет к следующим системам:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial Z_{-1}}{\partial\xi}(s,0)+\lambda_1 P_{-1}(s,0)=\widetilde{g}(s),\\ \ldots\\ -\dfrac{\partial Z_m}{\partial\xi}(s,0)+\lambda_1 P_m(s,0)+\lambda_{m+2}P_{-1}(s,0)=g_m(s,0),\quad m\geqslant 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P_{-1}}{\partial \xi}(s,0) = 0, \\ \dots \\ -\dfrac{\partial P_m}{\partial \xi}(s,0) = q_m(s,0), \quad m \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $\widetilde{g}(s)$ есть $g(\cdot)$ в новых координатах, а функции $g_m(\cdot)$, $q_m(\cdot)$ определяются внешним разложением, функциями Z_k, P_k и скалярами λ_k при $k < m$, при этом Z_m и P_m должны экспоненциально убывать при $\xi \to +\infty$.

Дополнительное условие (2.17) приводит к системе

$$\begin{cases} \lambda_1 |||P_{-1}(s,0)||| = 1, \\ \lambda_m + \dfrac{\lambda_1}{|||P_{-1}(s,0)|||^2} \langle P_{m-2}(s,0), P_{-1}(s,0)\rangle = h_m, \quad m > 1, \end{cases} \tag{3.6}$$

где константы h_m определяются внешним разложением, функциями Z_k, P_k и скалярами λ_k при $k < m$ с помощью операций сложения, умножения и взятия скалярного произведения в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Непосредственный анализ (аналогичный проведенному в [4]) получившихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра s, показывает, что эти системы при выполнении сформулированных условий (1.3), (2.16) на известные функции исходной системы разрешимы единственным образом.

В частности, для определения функций $Z_{-1}(s,\xi)$ и $P_{-1}(s,\xi)$ и величины λ_1 получаются соотношения

$$Z_{-1}(s,\xi) = C_{-1}(s) e^{-\widehat{a}(s)\xi}, \quad P_{-1}(s,\xi) = B_{-1}(s) e^{-\widehat{a}(s)\xi} + \frac{1}{2\widehat{a}(s)} C_{-1}(s) \xi e^{-\widetilde{a}(s)\xi},$$

где B_{-1} и C_{-1} выражаются через λ_1 следующим образом:

$$B_{-1}(s) = \frac{\widehat{g}(s)}{\lambda_1 + 2\widehat{a}^3(s)}, \quad C_{-1}(\varphi) = \frac{2\widehat{a}^2(s)\widetilde{g}(s)}{\lambda_1 + 2\widehat{a}^3(s)}$$

(здесь $\widehat{a}(s) := \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}$).

Поэтому уравнение $\lambda_1 |||P_{-1}(s,0)||| = 1$ имеет вид $\lambda_1^2 \displaystyle\int_{\Gamma_s} \frac{\widetilde{g}^2(s)\, dS}{(2\widehat{a}^3(s) + \lambda_1)^2} = 1$ или, при замене $\mu = \frac{1}{\lambda_1}$, $F(\mu) := \displaystyle\int_{\Gamma_s} \frac{\widetilde{g}^2(s)\ dS}{(2\mu\widehat{a}^3(s) + 1)^2} = 1$ (здесь Γ_s — граница Γ в переменных s, а dS — соответствующая мера на Γ_s).

Функция $F(\mu)$ строго убывает, $\lim_{\mu\to+\infty} F(\mu) = 0$, а $\displaystyle\lim_{\mu\to+0} F(\mu) = \int_{\Gamma_s} \widetilde{g}^2(s) dS = |||g||| > 1$. Тем самым уравнение для λ_1 разрешимо единственным образом. По λ_1 однозначно находятся и $Z_{-1}(s,\xi)$ и $P_{-1}(s,\xi)$.

Аналогично доказательству [4, теорема 4] доказывается и следующая, итоговая, теорема.

Теорема 4. *Пусть функции* $a(\cdot)$, $g(\cdot)$ *и* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* (1.3) *и* (2.16),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x)$$

— это ряды с коэффициентами, определяемыми по формуле (3.1), *а коэффициенты рядов*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_m, \quad \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m Z_m(s,\xi) \quad \text{и} \quad \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m P_m(s,\xi)$$

суть единственные решения задач (3.3)–(3.6).

Тогда ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_m$ *есть асимптотическое при* $\varepsilon \to 0$ *разложение величины* λ_ε, *а ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x) + \eta(s,\tau) \cdot \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m Z_m(s,\tau/\varepsilon) \ \text{и} \ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x) + \eta(s,\tau) \cdot \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m P_m(s,\tau/\varepsilon),$$

где x *и* τ, s *связаны введенной системой координат, суть равномерные как в смысле пространства* $H^1(\Omega)$, *так и в смысле пространства* $C(\overline{\Omega})$ *асимптотические разложения при* $\varepsilon \to 0$ *функций* $z_\varepsilon(x)$ *и* $p_\varepsilon(x)$.

Здесь λ_ε, $z_\varepsilon(x)$ *и* $p_\varepsilon(x)$ — *решение задачи* (1.4), (2.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
3. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
4. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
5. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 4. С. 1–4.
6. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
7. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
8. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. 1992. № 2. С. 70–74. (Математика, естествознание, технические науки).
9. **Капустян В.Е.** Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением // Докл. АН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
10. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа М.: Наука, 1964. 540 с.
11. **Морен К.** Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
12. **Peetre J.** Another approach to elliptic boundary problems // Comm. Pure. Appl. Math. 1961. Vol. 14. C. 711–731.
13. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
14. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регуляроное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.
15. **Ильин А.М.** Пограничный слой // Современ. поблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. М.: ВНИТИ, 1988. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.)

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, доцент
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 14.01.2012

Зорин Александр Павлович
ассистент
Уральский государственный педагогический университет

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.658.4

ВНУТРЕННИЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ[1]

И. И. Еремин, Л. Д. Попов

В функцию Лагранжа задачи линейного программирования включены дополнительные логарифмические слагаемые барьерного типа со штрафным параметром. В результате задача поиска седловых точек модифицированного Лагранжиана становится безусловной (седловая точка ищется относительно всего пространства прямых и двойственных переменных). Формулируются теоремы асимптотической сходимости к искомому решению и аналоги теорем двойственности для возникающих оптимизационных минимаксных и максиминных постановок.

Ключевые слова: линейное программирование, двойственность, внутренние штрафные функции.

I. I. Eremin, L. D. Popov. Interior penalty functions and duality in linear programming.

Logarithmic additive terms of barrier type with a penalty parameter are included into the Lagrange function of a linear programming problem. As a result, the problem of searching for saddle points of the modified Lagrangian becomes unconstrained (the saddle point is sought with respect to the whole space of primal and dual variables). Theorems on the asymptotic convergence to the desired solution and analogs of the duality theorems for the arising optimization minimax and maximin problem statements are formulated.

Keywords: linear programming, duality, inner penalty functions.

Введение

Вопросы двойственности являются основными в проблематике математического программирования [1; 2]. В данной работе сделана попытка построить асимптотические схемы двойственности для задач линейного программирования на основе классического Лагранжиана и внешних функций штрафа. Последние были введены в вычислительный инструментарий математического программирования достаточно давно (см. [3–8] и др.). С их помощью исходная экстремальная задача с ограничениями может быть сведена к (вообще говоря, бесконечной) серии однотипных задач безусловной минимизации взвешенной суммы исходной целевой функции и функции внутреннего штрафа. При определенном изменении штрафного параметра решение безусловной задачи сходится к искомому решению задачи с ограничениями. В данной работе на примере функции Лагранжа задачи линейного программирования рассматриваются вопросы асимптотического сведения задач поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций относительно некоторой конструктивно описываемой области (в данном случае — неотрицательного ортанта евклидова пространства) к серии параметрических задач поиска седловых точек некоторых вспомогательных функций уже без таких ограничений. Вспомогательные функции строятся на основе исходной функции путем включения в последнюю дополнительных слагаемых — логарифмических барьеров. Формулируются теоремы сходимости метода, близкого современным вариантам метода центрального пути, и аналоги теорем двойственности для возникающих оптимизационных минимаксных и максиминных постановок.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00273) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1, 12-П-1-1023 и 12-П-1-1034).

1. Постановка задачи и исходные предположения

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\max\{(c,x)\,\big|\,Ax \le b,\ x \ge 0\} \tag{1.1}$$

и задачу, двойственную к ней,

$$\min\{(b,y)\,\big|\,A^T y \ge c,\ y \ge 0\}. \tag{1.2}$$

Здесь числовая матрица A размерности $m \times n$ и векторы b и c (соответствующей размерности) заданы, векторы x и y соответственно прямых и двойственных неизвестных необходимо найти, круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов. Для краткости будем обозначать через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ столбцы матрицы A и через $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — ее строки.

Пусть исходные задачи разрешимы и $\bar{\gamma}$ — их общее оптимальное значение, а $\bar{X}$ и соответственно $\bar{Y}$ — их оптимальные множества. Хорошо известно, что любые пары оптимальных векторов $\bar{x} \in \bar{X}$ и $\bar{y} \in \bar{Y}$ (и только они) образуют седловые точки функции Лагранжа исходной задачи

$$F(x,y) = (c,x) - (Ax - b,\ y) \qquad \big(= (b,y) - (A^T y - c,\ x)\big)$$

относительно области $\Omega = \{[x,y]\,|\,x \ge 0,\ y \ge 0\}$, т. е. $\bar{x} \ge 0,\ \bar{y} \ge 0$, и выполнены двусторонние неравенства

$$F(x,\bar{y}) \le F(\bar{x},\bar{y}) \le F(\bar{x},y) \qquad \forall x \ge 0 \qquad \forall y \ge 0. \tag{1.3}$$

Отмеченная эквивалентность задач (1.1), (1.2) задаче поиска седловой точки (1.3) является продуктивной идейной основой широкого спектра вычислительных методов линейного программирования, однако практически в каждом таком методе (см. приведенную библиографию) функция Лагранжа подвергается модификации с тем, чтобы получить те или иные привлекательные вычислительные свойства. В основном в функцию Лагранжа включают либо регуляризирующие, либо штрафные слагаемые, причем используются главным образом функции внешнего штрафа. Ниже мы включим в исходную седловую функцию штрафные слагаемые типа логарифмических барьеров. Это позволит, с одной стороны, усилить свойства выпуклости-вогнутости классической функции Лагранжа, а с другой — учесть требования неотрицательности переменных конструктивным путем, получив в итоге задачу поиска седловой точки относительно всего пространства ее переменных. При этом мы усилим предположения относительно исходных задач и потребуем существования прямой и двойственной точек Слейтера x_S и y_S соответственно, т. е. точек, удовлетворяющих условиям $Ax_S < b,\ x_S > 0$ и $A^T y_S > c,\ y_S > 0$. Вследствие этого оптимальные множества $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ исходной и двойственной к ней задач будут не только не пусты, но и ограничены. Приведенное условие обычно фигурирует в исследованиях по методам центрального пути [9].

2. Применение барьеров в задаче о седловой точке

Пусть $\epsilon > 0$ — малый числовой параметр. Построим расширенную функцию Лагранжа задач (1.1), (1.2)

$$F_\epsilon(x,y) = (c,x) - (Ax - b,\ y) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \epsilon \sum_{j=1}^{m} \ln y_j \tag{2.1}$$

и рассмотрим задачу поиска ее седловой точки $[\bar{x}_\epsilon, \bar{y}_\epsilon] > 0$, определяемой как (положительное) решение бесконечной системы неравенств

$$F_\epsilon(x,\bar{y}_\epsilon) \le F_\epsilon(\bar{x}_\epsilon,\bar{y}_\epsilon) \le F_\epsilon(\bar{x}_\epsilon,y) \qquad \forall x > 0 \qquad \forall y > 0.$$

Подчеркнем, что требование положительности прямых и двойственных переменных учтено здесь путем включения в функцию Лагранжа слагаемых барьерного типа. Как будет показано ниже, искомые седловые точки лежат внутри допустимой области функции (2.1), что ставит рассматриваемую задачу в один ряд с задачами поиска седловых точек гладких выпукло-вогнутых[2] функций относительно всего пространства.

Обсудим условия существования седловых точек функции (2.1) и проанализируем их связь с решением исходных задач (1.1), (1.2).

Введем функцию

$$\Phi_\epsilon(x) = \inf_{y>0} F_\epsilon(x,y).$$

Нетрудно видеть, что при всех положительных x

$$\Phi_\epsilon(x) = \begin{cases} (c,x) + \epsilon \sum\limits_{j=1}^{m} \ln\bigl(b_j - (a_j,x)\bigr) + \epsilon \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i - m(\ln\epsilon - 1)\epsilon, & \text{если } Ax < b; \\ -\infty \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{2.2}$$

В самом деле, если $(a_{j_0}, x) - b_{j_0} \geq 0$ хотя бы при одном индексе j_0, то за счет неограниченного роста переменной y_{j_0} можно сделать значение $F_\epsilon(x,y)$ сколь угодно малым, что и объясняет нижнюю строку в (2.2). Если же $(a_j, x) - b_j < 0$ при всех j, то уравнение

$$\nabla_y F_\epsilon(x,y) = b - Ax - \epsilon \begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ \dots \\ 1/y_m \end{pmatrix} = 0$$

разрешимо относительно положительных значений двойственных переменных. Решение $y^\epsilon(x)$ имеет компоненты

$$y_j^\epsilon(x) = \epsilon/(b_j - (a_j,\, x)) > 0 \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{2.3}$$

и определяет точку минимума функции $F_\epsilon(x, \cdot)$ по двойственным переменным. Для обоснования первой строки формулы (2.2) остается подставить компоненты этой точки в выражение для $F_\epsilon(x,y)$.

Таким образом, функция $\Phi_\epsilon(x)$ определена и конечна внутри допустимой области прямой задачи (1.1) и отличается от классической барьерной функции, ассоциированной с прямой задачей, лишь постоянным слагаемым $m(\ln\epsilon - 1)\epsilon$. Из общей теории логарифмических барьерных функций [9] следует

Утверждение 1. *Пусть ограничения задач* (1.1), (1.2) *удовлетворяют условию Слейтера. Тогда при любом $\epsilon > 0$ существует $\bar{x}_\epsilon > 0$ — единственная точка максимума функции $\Phi_\epsilon(x)$, причем она является* (*единственным*) *решением системы нелинейных уравнений*

$$\nabla\Phi_\epsilon(x) = c - \epsilon \sum_{j=1}^{m} a_j \bigl(b_j - (a_j,\, x)\bigr)^{-1} + \epsilon \begin{pmatrix} 1/x_1 \\ 1/x_2 \\ \dots \\ 1/x_n \end{pmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

Точки $\bar{x}_\epsilon$ при $\epsilon \in (0, +\infty)$ составляют так называемый *центральный путь* задачи (1.1).

Применим аналогичные рассуждения к функции

$$\Psi_\epsilon(y) = \sup_{x>0} F_\epsilon(x,y).$$

[2] Функция $F_\epsilon(x,y)$ выпукла по двойственным и вогнута по прямым переменным.

Нетрудно видеть, что при всех положительных y

$$\Psi_\epsilon(y) = \begin{cases} (b,y) - \epsilon \sum\limits_{i=1}^{n} \ln\big((A_i,y) - c_i\big) - \epsilon \sum\limits_{j=1}^{m} \ln y_j + n(\ln\epsilon - 1)\epsilon, \text{ если } A^T y > c; \\ +\infty \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{2.5}$$

В самом деле, если $(A_{i_0}, y) - c_{i_0} \le 0$ хотя бы при одном значении индекса i_0, то за счет неограниченного роста переменной x_{i_0} можно сделать значение $F_\epsilon(x,y)$ сколь угодно большим, что и объясняет нижнюю строку в (2.5). Если же $(A_i, y) - c_i > 0$ при всех i, то уравнение

$$\nabla_x F_\epsilon(x,y) = c - A^T y + \epsilon \begin{pmatrix} 1/x_1 \\ 1/x_2 \\ \dots \\ 1/x_n \end{pmatrix} = 0$$

разрешимо относительно положительных значений прямых переменных. Это решение $x^\epsilon(y)$ имеет компоненты

$$x_i^\epsilon(y) = \epsilon/((A_i,x) - c_i) > 0 \qquad (i = 1,\dots,n) \tag{2.6}$$

и определяет точку максимума функции $F_\epsilon(\cdot,\, y)$ по прямым переменным. Для обоснования верхней строки формулы (2.5) остается подставить компоненты этой точки в выражение для $F_\epsilon(x,y)$.

Таким образом, функция $\Psi_\epsilon(y)$ определена и конечна внутри допустимой области двойственной задачи (1.2) и отличается от классической барьерной функции, ассоциированной с двойственной задачей, лишь постоянным слагаемым $n(\ln\epsilon - 1)\epsilon$. Из общей теории логарифмических барьерных функций следует

Утверждение 2. *Пусть ограничения задач* (1.1), (1.2) *удовлетворяют условию Слейтера. Тогда при любом $\epsilon > 0$ существует $\bar y_\epsilon > 0$ — единственная точка минимума функции $\Psi_\epsilon(y)$, причем она является* (*единственным*) *решением системы нелинейных уравнений*

$$\nabla\Psi_\epsilon(y) = b - \epsilon \sum_{i=1}^{n} A_i\big((A_i,y) - c_i\big)^{-1} - \epsilon \begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ \dots \\ 1/y_m \end{pmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

Точки $\bar y_\epsilon$ при $\epsilon \in (0,+\infty)$ составляют так называемый *центральный путь* задачи (1.2).

Пусть теперь $\bar x_\epsilon$ и $\bar y_\epsilon$ взяты из утверждений 1–2. Пара $[\bar x_\epsilon, \bar y_\epsilon] > 0$ на самом деле является седловой точкой функции (2.1). Чтобы показать это, заметим вначале, что

$$\max_{x>0} \Phi_\epsilon(x) = \Phi_\epsilon(\bar x_\epsilon) = F_\epsilon(\bar x_\epsilon, y^\epsilon(\bar x_\epsilon)),$$

где (см. (2.3))

$$y^\epsilon(\bar x_\epsilon)_j = \epsilon/\big(b_j - (a_j, \bar x_\epsilon)\big) > 0 \qquad (j = 1,\dots,m). \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, однако, что компоненты вектора $y^\epsilon(\bar x_\epsilon)$ удовлетворяют системе нелинейных уравнений (2.7). В самом деле, в силу (2.4), (2.8) имеем

$$\nabla\Phi_\epsilon(x)\Big|_{x=\bar x_\epsilon} = \underbrace{c - \epsilon \sum_{j=1}^{m} a_j\big(b_j - (a_j, \bar x_\epsilon)\big)^{-1}}_{c - A^T y^\epsilon(\bar x_\epsilon)} + \epsilon \begin{pmatrix} 1/\bar x_1^\epsilon \\ 1/\bar x_2^\epsilon \\ \dots \\ 1/\bar x_n^\epsilon \end{pmatrix} = 0,$$

откуда покомпонентно

$$(A_i,\, y^\epsilon(\bar x_\epsilon)) - c_i = \epsilon/\bar x_\epsilon^i > 0 \qquad (i = 1,\dots,n),$$

что и влечет искомое равенство (вновь опираемся на (2.8))

$$\nabla\Psi_\epsilon(y)\Big|_{y=y^\epsilon(\bar x_\epsilon)} = \underbrace{b-\epsilon\sum_{i=1}^{n}A_i\big((A_i,y^\epsilon(\bar x_\epsilon))-c_i\big)^{-1}}_{b-A\bar x_\epsilon} - \epsilon\begin{pmatrix}1/y_1^\epsilon(\bar x_\epsilon)\\ 1/y_2^\epsilon(\bar x_\epsilon)\\ \dots\\ 1/y_m^\epsilon(\bar x_\epsilon)\end{pmatrix} = b-A\bar x_\epsilon-b+A\bar x_\epsilon=0.$$

Следовательно, $y^\epsilon(\bar x_\epsilon)=\bar y_\epsilon$ и

$$\max_{x>0}\Phi_\epsilon(x)=\Phi_\epsilon(\bar x_\epsilon)=F_\epsilon(\bar x_\epsilon,\, y^\epsilon(\bar x_\epsilon))=F_\epsilon(\bar x_\epsilon,\bar y_\epsilon).$$

Аналогично,

$$\min_{y>0}\Psi_\epsilon(y)=\Psi_\epsilon(\bar y_\epsilon)=F_\epsilon(x^\epsilon(\bar y_\epsilon),\,\bar y_\epsilon),$$

где (см. (2.6))

$$x^\epsilon(\bar y_\epsilon)_i=\epsilon/\big((A_i,\bar y_\epsilon)-c_i\big)>0 \qquad (i=1,\dots,n). \tag{2.9}$$

Нетрудно видеть, однако, что компоненты вектора $x^\epsilon(\bar y_\epsilon)$ удовлетворяют системе нелинейных уравнений (2.4). В самом деле, в силу (2.7), (2.9) имеем

$$\nabla\Psi_\epsilon(y)\Big|_{y=y^\epsilon(\bar x_\epsilon)} = \underbrace{b-\epsilon\sum_{i=1}^{n}A_i\big((A_i,\bar y_\epsilon)-c_i\big)^{-1}}_{b-Ax^\epsilon(\bar y_\epsilon)} - \epsilon\begin{pmatrix}1/\bar y_1^\epsilon\\ 1/\bar y_2^\epsilon\\ \dots\\ 1/\bar y_m^\epsilon\end{pmatrix}=0,$$

откуда покомпонентно

$$b_j-(a_j,x^\epsilon(\bar y_\epsilon))=\epsilon/\bar y_j^\epsilon \qquad (j=1,\dots,m),$$

что и влечет искомое равенство (вновь опираемся на (2.9))

$$\nabla\Phi_\epsilon(x)\Big|_{x=x^\epsilon(\bar y_\epsilon)} = \underbrace{c-\epsilon\sum_{j=1}^{m}a_j\big(b_j-(a_j,x^\epsilon(\bar y_\epsilon))\big)^{-1}}_{c-A^T\bar y_\epsilon} + \epsilon\begin{pmatrix}1/x_1^\epsilon(\bar y_\epsilon)\\ 1/x_2^\epsilon(\bar y_\epsilon)\\ \dots\\ 1/x_n^\epsilon(\bar y_\epsilon)\end{pmatrix} = c-A^T\bar y_\epsilon-c+A^T\bar y_\epsilon=0.$$

Следовательно, $x^\epsilon(\bar y_\epsilon)=\bar x_\epsilon$ и

$$\min_{y>0}\Psi_\epsilon(y)=\Psi_\epsilon(\bar y_\epsilon)=F_\epsilon(x^\epsilon(\bar y_\epsilon),\,\bar y_\epsilon)=F_\epsilon(\bar x_\epsilon,\bar y_\epsilon).$$

Окончательно имеем

$$\max_{x>0}\Phi_\epsilon(x)=\min_{y>0}\Psi_\epsilon(y)=F_\epsilon(\bar x_\epsilon,\bar y_\epsilon).$$

Все сказанное позволяет сформулировать

Утверждение 3. *Пусть ограничения задач* (1.1), (1.2) *удовлетворяют условию Слейтера. Тогда при любом $\epsilon>0$ существует $[\bar x_\epsilon,\bar y_\epsilon]>0$ — единственная седловая точка функции $F_\epsilon(x,y)$. При этом найдутся такие положительные константы K_1, K_2, K_3, что*

1. $\rho\,(\bar x_\epsilon,\bar X)<\epsilon\,K_1$,
2. $\rho\,(\bar y_\epsilon,\bar Y)<\epsilon\,K_2$,
3. $|(c,\bar x_\epsilon)-(b,\bar y_\epsilon)|<\epsilon\,K_3$.

Здесь $\rho\,(\cdot,\cdot)$ — функция евклидова расстояния от точки до множества.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из известных фактов теории логарифмических барьерных функций и метода центрального пути.

3. Барьерные функции и двойственность

Обратимся теперь к задачам поиска максимина и минимакса расширенной функции Лагранжа. Эти задачи имеют вид

$$\bar{\gamma}_\epsilon = \sup_{x>0} \Phi_\epsilon(x) = \sup_{x>0} \inf_{y>0} F_\epsilon(x,y)$$

и

$$\bar{\gamma}_\epsilon = \inf_{y>0} \Psi_\epsilon(y) = \inf_{y>0} \sup_{x>0} F_\epsilon(x,y).$$

С учетом результатов двух первых разделов эти задачи можно представить как задачи выпуклого программирования с ограничениями-равенствами — первую как

$$\max \Big\{ (c,x) + \epsilon \sum_{j=1}^{m} \ln u_j + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - m(\ln \epsilon - 1)\epsilon \;\Big|\; Ax + u = b \Big\} \tag{3.1}$$

и вторую как

$$\min \Big\{ (b,y) - \epsilon \sum_{i=1}^{n} \ln v_i + \epsilon \sum_{j=1}^{m} \ln y_j + n(\ln \epsilon - 1)\epsilon \;\Big|\; A^T y - v = c \Big\}. \tag{3.2}$$

Утверждение 4. *Задачи выпуклого программирования* (3.1) *и* (3.2) *являются двойственными друг к другу в классическом смысле и находятся в отношении совершенной двойственности.*

В самом деле, выпишем обычную функцию Лагранжа задачи (3.1)

$$L(x,u,w) = (c,x) + \epsilon \sum_{j=1}^{m} \ln u_j + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - m(\ln \epsilon - 1)\epsilon - (w,\ Ax + u - b).$$

Очевидно, что задача (3.1) может рассматриваться как ее максимин

$$\bar{\gamma}_\epsilon = \sup_{x>0,u>0} \inf_{w} L(x,u,w).$$

Рассмотрим классическую двойственную (минимаксную) задачу

$$\inf_{w} \sup_{x>0,u>0} L(x,u,w) \tag{3.3}$$

и исследуем свойства ее целевой функции

$$\zeta(w) = \sup_{x>0,u>0} L(x,u,w).$$

Нетрудно видеть, что при предположении $A^T w - c > 0$ и $w > 0$ точки максимума функции $L(x,u,w)$ по прямым переменным могут быть найдены из уравнений

$$\nabla_x L(x,u,w) = c + \epsilon \begin{pmatrix} 1/x_1 \\ 1/x_2 \\ \dots \\ 1/x_n \end{pmatrix} - A^T w = 0, \qquad \nabla_u L(x,u,w) = \epsilon \begin{pmatrix} 1/u_1 \\ 1/u_2 \\ \dots \\ 1/u_m \end{pmatrix} - w = 0,$$

что дает нам векторы $x(w)$ и $u(w)$ с компонентами

$$x_i(w) = \epsilon / \big((A_i,\ w) - c_i\big) > 0 \qquad (i = 1,\dots,n), \qquad u_j(w) = \epsilon / w_j > 0 \qquad (i = 1,\dots,m)$$

и само значение максимума

$$\zeta(w) = L(x(w), u(w), w)$$

$$= (b, w) + (c - A^T w,\, x(w)) - (w, u(w)) + \epsilon \sum_{j=1}^{m} \ln u_j(w) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \ln x_i(w) - m(\ln \epsilon - 1)\epsilon$$

$$= (b, w) - \epsilon \sum_{i=1}^{n} \ln\big((A_i, w) - c_i\big) + \epsilon \sum_{j=1}^{m} \ln w_j + n(\ln \epsilon - 1)\epsilon = \Psi_\epsilon(w).$$

При всех прочих w значение $\zeta(w)$ с очевидностью равно $+\infty$. Таким образом, задача (3.3) (с точностью до обозначений переменных) совпадает с задачей

$$\bar{\gamma}_\epsilon = \inf_{y>0} \Psi_\epsilon(y)$$

и тем самым с задачей (3.2).

Аналогичные рассуждения можно провести и для задачи (3.2), которая является обычной двойственной задачей для (3.1). То, что эти задачи находятся в отношении совершенной двойственности (достижимость и совпадение их оптимальных значений), фактически было показано в двух первых разделах данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Eremin I.I.** Theory of linear optimization. Utrecht: VSP, 2002. 284 p. (Ser. Inverse and ill-posed problems.)
2. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
3. **Зангвилл У.И.** Нелинейное программирование. Единый подход. М.: Сов. радио, 1973. 312 с.
4. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
5. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
6. Введение в нелинейное программирование / К.-Х. Эльстер, Р. Рейнгард, М. Шойбле, Г. Донат; пер. с нем. под ред. И.И. Еремина. М.: Наука, 1985. 284 с.
7. **Фиакко А., Мак–Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
8. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
9. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1997. 484 c.

Еремин Иван Иванович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ermii@imm.uran.ru

Поступила 25.02.2012

Попов Леонид Денисович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: popld@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.17

КЛАССИФИКАЦИЯ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С $b_1 = 6$[1]

К. С. Ефимов

Неориентированный v-вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k, каждое ребро содержится точно в λ треугольниках, и пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, содержит точно μ вершин, называется вполне регулярным с параметрами (v, k, λ, μ). В работе завершена классификация вполне регулярных графов с $b_1 = 6$, где $b_1 = k - \lambda - 1$.

Ключевые слова: вполне регулярный граф, дистанционно регулярный граф.

K. S. Efimov. Classification of amply regular graphs with $b_1 = 6$.

An undirected graph with v vertices in which the degrees of all vertices are equal to k, each edge is contained in exactly λ triangles, and the intersection of the neighborhoods of any two vertices at distance 2 contains exactly μ vertices is called amply regular with parameters (v, k, λ, μ). We complete the classification of amply regular graphs with $b_1 = 6$, where $b_1 = k - \lambda - 1$.

Keywords: amply regular graph, distance-regular graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и любые две смежные вершины графа Γ содержат точно λ общих соседей. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1, \ldots, m_n$. Если $m_1 = \ldots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$ решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Если X — конечное множество, то *графом Джонсона* для m-подмножеств из X называется граф с множеством вершин, равным множеству $\binom{X}{m}$ всех m-элементных подмножеств X, причем две вершины a, b смежны тогда и только тогда, когда $|a \cap b| = m - 1$. Если множество X состоит из n элементов, то такой граф обозначим через $J(n, m)$.

Полный (вполне несвязный) подграф данного графа называется *кликой* (*кокликой*).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-C-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-C-1-1009).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в регулярном графе Γ степени k, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ с $[w]$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$ с $[w]$). Положим $a_i(u,w) = k - b_i(u,w) - c_i(u,w)$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v,k,λ) значение $b_1 = b_1(u,w)$ не зависит от выбора ребра $\{u,w\}$ и равно $k-\lambda-1$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если для любого $i \in \{0,\ldots,d\}$ и любых вершин u,w находящихся на расстоянии i в Γ, имеем $b_i(u,w) = b_i$ и $c_i(u,w) = c_i$.

В [1, следствие 1.1.6] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{n\times 2}$. В работах А.А. Махнева и его учеников [2–4] были изучены вполне регулярные графы с $2 \le b_1 \le 5$. В статье [5] изучение вполне регулярных графов с $b_1 = 6$ было редуцировано к исследованию графов с $k \in \{10,11,12\}$. В [6; 7] рассмотрены случаи $b_1 = 6$, $k = 10, 11$. В данной работе изучены вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ и $k = 12$.

Теорема 1. *Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v,12,5,\mu)$. Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $\mu = 6$, *и Γ — граф с параметрами* $(25,12,5,6)$;

(2) $\mu = 4$, *и Γ — граф Джонсона* $J(7,3)$;

(3) $\mu = 2$, *и Γ является 7×7-решеткой*;

(4) $\mu = 1$, *Γ — реберный граф регулярного графа Δ без треугольников степени 7 и обхвата, не меньшего* 5.

Из этой теоремы и результатов [5–7] следует более общая теорема, завершающая описание вполне регулярных графов с $b_1 = 6$.

Теорема 2. *Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с $b_1 = 6$. Тогда Γ — один из следующих графов*:

(1) *полный многодольный граф $K_{r\times 7}$, граф с параметрами $(25,12,5,6)$, 7×7-решетка, треугольный граф $T(9)$, дополнительный граф к 5×5-решетке или к треугольному графу $T(7)$, граф Хофмана — Синглтона или его дополнение, граф с параметрами $(26,10,3,4)$ или его дополнение*;

(2) *полный двудольный граф $K_{8,8}$ с удаленным максимальным паросочетанием, граф Тэйлора с параметрами $(28,13,6,6)$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Пэли $P(13)$, или граф Тэйлора с параметрами $(32,15,8,6)$, в котором окрестности вершин изоморфны треугольному графу $T(6)$*;

(3) $\mu = 1$, *окрестность каждой вершины является 7-кокликой или объединением изолированных n-клик для $n = 2, 3$ или* 6;

(4) $\mu = 2$, *и либо*

(*i*) *Γ является ректаграфом с $v \le 2^7$ и диаметра, не большего 7 (в случае $v = 2^7$ или $d(\Gamma) = 7$ граф Γ является 7-кубом), либо*

(*ii*) *окрестность каждой вершины в Γ является объединением четырех изолированных ребер, либо*

(*iii*) *Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9,6,1;1,2,9\}$, граф Конвея — Смита или граф Доро*;

(5) $\mu = 3$, *и либо*

(*i*) *Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8,6,1;1,3,8\}$, либо*

(*ii*) *Γ — локально девятиугольный граф диаметра 3, каждый μ-подграф является 3-кокликой или объединением изолированной вершины и ребра, $b_2(u,x) \le 3$ для любых вершин u,x с $d(u,x) = 2$ и $|\Gamma_3(u)| \le 10$, либо*

(*iii*) *$k = 10$, диаметр Γ равен 3 и $34 \le v \le 37$, либо*

(*iv*) *$k = 11$, диаметр Γ равен 3, $v = 36$ и $\Gamma_3(u)$ является 2-кликой для некоторой вершины u*;

(6) $\mu = 4$, *и Γ — граф Джонсона* $J(7,3)$.

1. Доказательство теоремы 1

Приведем некоторые вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теоремы, и докажем п. (1), (4) теоремы 1.

Лемма 1.1 [8, лемма 3.1]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда либо $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ и кратность собственного значения $n-m$ равна $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu=\lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\qquad n=m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Лемма 1.2 [1, следствие 4.2.6]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, являющийся антиподальным r-накрытием n-клики. Тогда $n-2-\lambda=(r-1)\mu$ и Γ имеет новые собственные значения θ и τ, являющиеся корнями квадратного уравнения $x^2-(\lambda-\mu)x-(n-1)$, и кратность θ*

$$m_\theta=\frac{n(n-1)(r-1)}{n-1+\theta^2}.$$

Лемма 1.3. *Пусть Γ — вполне регулярный граф с $b_1=6$ и $k=12$. Тогда выполняется одно из утверждений*:

(1) *диаметр Γ равен 2, и либо Γ — граф в половинном случае с параметрами $(25,12,5,6)$, либо Γ является 7×7-решеткой;*

(2) *$\mu=1$, Γ — реберный граф регулярного графа Δ без треугольников степени 7 и обхвата, не меньшего 5;*

(3) *Γ содержит геодезический 3-путь u,w,y,z, и либо*

(*i*) *$\mu=2$, $k_2=36$ и подграфы $[u]\cap[y]$ и $[w]\cap[z]$ являются кликами;*

(*ii*) *$\mu=3$, $k_2=24$ и $c_3(u,z)\geq 4$;*

(*iii*) *$\mu=4$, $k_2=18$ и $c_3(u,z)\geq 5$.*

Доказательство. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v,12,5,\mu)$. По условию целочисленности μ делит $k\cdot b_1=72$. Поэтому $\mu\in\{1,2,3,4,6,8,9\}$.

Пусть диаметр Γ равен 2 и Γ имеет собственное значение $-m$. Если Γ — граф в половинном случае, то Γ имеет параметры (25,12,5,6). Если Γ не является графом в половинном случае, то по лемме 1.1 $m-1$ делит 6, $\mu=7+(m-1)-6/(m-1)$ и $n=m-1+6/(m-1)$. Если $m=2$, то Γ — граф Зейделя и является 7×7-решеткой. Если $m=4$, то $n=5$ и Γ — дополнительный граф к графу Зейделя. Так как $b_1=6$, то $\bar\Gamma$ является 5×5-решеткой или треугольным графом $T(7)$. Противоречие с тем, что $k=12$. Если $m=3$, то $n=5$ и граф $\bar\Gamma$ также имеет собственные значения 2 и -3, поэтому $\bar b_1=6$. Теперь $k=6+\mu$, поэтому $\bar b_1=6$. Так как $k-\mu=\bar b_1=6$, то $\mu=6$ и Γ является графом в половинном случае. Пункт (1) теоремы 1 доказан.

Пусть диаметр Γ больше 2. По теореме Ноймайера из [1] имеем $\mu\leq 6$, и если $\mu=6$, то Γ — граф Тэйлора. Противоречие с тем, что либо граф Тэйлора не содержит треугольников, либо окрестность любой его вершины является сильно регулярным графом с параметрами $(12,2\mu',\lambda',\mu')$.

В случае $\mu=1$ окрестность любой вершины является объединением двух изолированных 6-клик. Поэтому Γ — реберный граф регулярного графа Δ без треугольников степени 7 и обхвата, не меньшего 5. Пункт (4) теоремы 1 доказан.

Зафиксируем геодезический 3-путь u,w,y,z и положим $k_i=|\Gamma_i(u)$.

В случае $\mu=2$ имеем $k_2=36$. Если $[w]\cap[z]$ является кокликой $\{y,y'\}$, то $[w]$ содержит по 5 вершин из $[y]$, $[y']$, но тогда $|[w]|\geq 13$. Противоречие.

В случае $\mu = 3$ имеем $k_2 = 24$. Если $c_3(u,z) = 3$, то любая вершина из $\Gamma_2(u) \cap [z] = \{y = y_1, y_2, y_3\}$ смежна со всеми вершинами из $\Gamma_2(z) \cap [u] = \{w, w_2, w_3\}$, поэтому $\Gamma_2(u) \cap [z]$ является кликой и $(\Gamma_2(u) \cap [z]) \cup (\Gamma_2(z) \cap [u])$ является 6-кликой. Положим $[u] \cap [w] - \{w_2, w_3\} = \{f_1, f_2, f_3\}$ и $[y_i] \cap [w] - (\{w_2, w_3\} \cup \{y_1, y_2, y_3\}) = \{g_i\}$. Тогда $\{g_1, g_2, g_3\}$ является кликой, и g_i смежна с двумя вершинами из $\{f_1, f_2, f_3\}$. Допустим, что $g_1, g_2, g_3 \in [f_1]$. Тогда можно считать, что $f_1 \in [f_2] - [f_3]$, причем $u, w \in [f_1] \cap [f_3]$, поэтому f_3 смежна не более чем с одной вершиной из $\{g_1, g_2, g_3\}$ и степень f_3 в $[w]$ не больше 4, противоречие. Значит, каждая вершина f_i смежна точно с двумя вершинами из $\{g_1, g_2, g_3\}$, $\{f_1, f_2, f_3\}$ является кликой, и можно считать, что f_i не смежна с g_i. Противоречие с тем, что $[f_i] \cap [g_i]$ содержит 4 вершины из $\{g_1, g_2, g_3\} \cup \{f_1, f_2, f_3\}$. Итак, $c_3(u,z) \geq 4$.

В случае $\mu = 4$ имеем $k_2 = 18$. Если $c_3(u,z) = 4$, то любая вершина из $\Gamma_2(u) \cap [z]$ смежна со всеми вершинами из $\Gamma_2(z) \cap [u]$, поэтому $\Gamma_2(u) \cap [z]$ является кликой, противоречие с тем, что $\lambda = 5$. Лемма доказана.

Случай $\mu = 4$. В данном подразделе предполагается,что Γ — вполне регулярный граф с параметрами $(v, 12, 5, 4)$. По лемме 1.3 диаметр Γ больше 2. Зафиксируем обозначения: u, w, y, z — геодезический 3-путь в Γ, и $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Тогда $k_2 = 18$.

Лемма 1.4. *Для любых двух вершин a, e с $d(a,e) = 2$ выполняются следующие утверждения*:

(1) *подграф $[a] \cap [e]$ не содержит двух изолированных вершин*;

(2) *$[a] \cap [e]$ не является 3-лапой*;

(3) *если $[a] \cap [e]$ содержит изолированную вершину b, то $[a] \cap [e] - \{b\}$ — треугольник и $b_2(a,e) + b_2(e,a) = 0$.*

Доказательство. Пусть $d(a,e) = 2$. Тогда $|([a] - [e]) \cup ([e] - [a])| = 16$.

Если $[a] \cap [e]$ содержит две изолированные вершины b, c, то $[b] \cup [c]$ содержит ровно 8 вершин из $[e]$, а $[b] \cap [c]$ содержит не более одной вершины из $[a]$ или из $[e]$, скажем, из $[e]$. Противоречие с тем, $[b] \cup [c]$ содержит не менее 9 вершин из $[e]$. Утверждение (1) доказано.

Если $[a] \cap [e]$ является 3-лапой $\{b, c_1, c_2, c_3\}$, где $c_i \in [b]$, то $|([e] - [a]) \cap [c_i]| = 4$. Так как $[c_1] \cap [c_2]$ содержит a, b, e и не более одной вершины из $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$, то можно считать, что $[c_1] \cap [c_2]$ не пересекает $[e] - [a]$. Противоречие с тем, что $[c_3] \cap ([e] - [a])$ содержит не менее двух вершин из $[c_1]$ или из $[c_2]$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $[a] \cap [e]$ содержит изолированную вершину b. Положим $[a] \cap [e] - \{b\} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Если $\{c_1, c_2, c_3\}$ является 2-путем, то можно считать, что $[c_1] \cap [c_3]$ не пересекает $[e] - \{c_2\}$. Тогда $[b]$ содержит не менее трех вершин из $[c_1] \cap [e]$ или из $[c_3] \cap [e]$ и соответствующий подграф $[b] \cap [c_i]$ содержит не меньше 5 вершин, что противоречит условию. Значит, $\{c_1, c_2, c_3\}$ является треугольником. Тогда число треугольников с основанием в $\{c_1, c_2, c_3\}$ и вершиной вне $\{a, e\} \cup \{c_1, c_2, c_3\}$ равно 6. Далее, $[b]$ содержит по 5 вершин из $[a]$ и из $[e]$.

Если вершина c_1 смежна с двумя вершинами из $[a] \cap [b]$, то она не смежна с вершинами из $[e] \cap [b]$ и смежна с тремя вершинами из $[e] - ([a] \cup b^{\perp})$, в частности, $[e]$ не пересекает $\Gamma_3(a)$. Если, кроме того, вершина c_2 смежна с двумя вершинами из $[e] \cap [b]$, то $[a]$ не пересекает $\Gamma_3(e)$. Если же $[c_2]$ и $[c_3]$ содержат по одной вершине из $[e] \cap [b]$, и по две вершины из $[e] - ([a] \cup b^{\perp})$, то $[c_2]$ и $[c_3]$ содержат по одной вершине из $[a] \cap [b]$, и две вершины из $[a] - ([e] \cup b^{\perp} \cup [c_1])$. Поэтому $[c_2] \cap [c_3]$ содержит a, e, c_1, вершину из $[e] - ([a] \cup b^{\perp})$ и две вершины из $[a] - ([e] \cup b^{\perp} \cup [c_1])$, противоречие. Итак, любая вершина из $\{c_1, c_2, c_3\}$ смежна не более чем с одной вершиной из $[a] \cap [b]$. Если c_1 не смежна с вершинами из $[a] \cap [b]$, то $[c_1]$ содержит $[a] - ([e] \cup b^{\perp})$, и мы получим противоречие, как и выше. Значит, вершины из $\{c_1, c_2, c_3\}$ смежны с разными парами вершин из $[a] - ([e] \cup b^{\perp})$ и $[a]$ не пересекает $\Gamma_3(e)$. Симметрично, $[e]$ не пересекает $\Gamma_3(a)$.

Лемма 1.5. *Для любых двух вершин a, e с $d(a,e) = 2$ выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $[a] \cap [e]$ — объединение изолированных ребер, то $b_2(a,e) + b_2(e,a) = 0$;*

(2) *если* $[a]\cap[e]$ *является* 3*-путем, то* $b_2(a,e)+b_2(e,a)=0$,
(3) *если* $[a]\cap[e]$ *содержит вершину степени* 1*, то* $b_2(a,e)+b_2(e,a)=0$.

Доказательство. Пусть $d(a,e)=2$. Тогда $|([a]-[e])\cup([e]-[a])|=16$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $[a]\cap[e]$ является объединением изолированных ребер $\{b,b'\}$, $\{c,c'\}$, $[e]\cap\Gamma_3(a)$ содержит вершину d и $\Sigma=[e]-([a]\cup[d])$. Тогда $|\Sigma|=2$ и любая вершина из $\{b,b',c,c'\}$ смежна с одной или двумя вершинами из Σ.

Допустим, что $[b]$ содержит Σ. Если $[c]$ содержит Σ, то $[a]-[e]\subset[b]\cup[c]$. В этом случае $[c']$ содержит вершину из Σ, не более одной вершины из $([a]-[e])\cap[b]$ и не менее трех вершин из $([a]-[e])\cap[c]$. Теперь $[c]\cap[c']$ содержит a,e, вершину из Σ и три вершины из $[a]-[e]$, противоречие с тем, что $\lambda=5$. Значит, $[c]$, $[c']$ содержат по одной вершине из Σ и из $[a]\cap[b]$ и по три вершины из $[a]-([e]\cup[b])$. Теперь $[c]\cap[c']$ содержит a,e, две вершины из $[a]-([e]\cup[b])$ и вершину из $[e]\cap[d]$. Отсюда $[c]\cup[c']$ содержит $[e]\cap[d]$, и можно считать, что $[b]$ пересекает $[c]\cap[e]\cap[d]$. Итак, $[b]\cap[c]$ содержит a,e, вершину из $[a]-[e]$, вершину из Σ и вершину из $[e]\cap[d]$, противоречие с тем, что $\mu=4$.

Значит, любая вершина из $\{b,b',c,c'\}$ смежна точно с одной вершиной из Σ. Если $[b]\cap[c]$ содержит две вершины из $[e]-[a]$, то $[a]-[e]\subset[b]\cup[c]$. В этом случае $[c']$ содержит вершину из $([e]-[a])\cap[b]$, не более одной вершины из $([a]-[e])\cap[b]$ и не менее трех вершин из $([a]-[e])\cap[c]$. Теперь $[c]\cap[c']$ содержит a,e, вершину из $[e]-[a]$ и три вершины из $[a]-[e]$, противоречие с тем, что $\lambda=5$. Значит, $[c]\cap[c']$ содержит a,e, вершину из $\Sigma-[b]$, две вершины из $[e]\cap[d]$ и вершину из $[a]-([e]\cup[b])$. Противоречие с тем, что $\lambda=5$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $[a]\cap[e]$ является 3-путем c_1,c_2,c_3,c_4. Если вершина e изолирована в $[c_1]\cap[c_4]$, то $\{([e]-[a])\cap[c_1],([e]-[a])\cap[c_4]\}$ является разбиением $[e]-[a]$ и $b_2(a,e)=0$. В этом случае $([e]-[a])\cap[c_2]$ содержит не более одной вершины из $[c_4]$ и не менее двух вершин из $[c_1]$. Аналогично, $([e]-[a])\cap[c_3]$ содержит не более одной вершины из $[c_1]$ и не менее двух вершин из $[c_4]$. Ввиду леммы 1.4 подграф $[c_1]\cap[c_4]-\{e\}$ — треугольник, и $[a]-[e]$ содержит по две вершины из $[c_1]\cap[c_4]$, $[c_1]-[c_4]$ и из $[c_4]-[c_1]$. Если $([e]-[a])\cap[c_2]$ содержит ноль вершин из $[c_4]$ и 3 вершины из $[c_1]$, то $[c_2]$ содержит три вершины из $[a]-([e]\cup[c_1])$, точно одна из которых попадает в $[c_4]$. Если же $([e]-[a])\cap[c_2]$ содержит одну вершину из $[c_4]$ и две вершины из $[c_1]$, то $[c_2]$ содержит три вершины из $[a]-([e]\cup[c_4])$, точно одна из которых попадает в $[c_1]$. В любом случае две вершины d_1,d_2 из $[a]-([e]\cup[c_1]\cup[c_4])$ попадают в $[c_2]\cap[c_3]$, и $b_2(e,a)=0$.

Пусть $b_2(a,e)+b_2(e,a)>0$. Без ограничения общности, $[e]\cap\Gamma_3(a)$ содержит вершину f. Как показано выше, вершины a,e не являются изолированными в $[c_1]\cap[c_4]$. Поэтому $[c_3]\cap[c_4]$ является 3-путем a,d,d',e. Если $[c_3]$ не пересекает $[c_1]\cap([e]-[a])$, то $[c_3]\cap[c_4]$ содержит 3 вершины из $[e]-([a]\cup\{f\})$. В этом случае $[c_3]$ не пересекает $[c_4]\cap([a]-[e])$, поэтому $[c_3]\cap[c_1]$ содержит 2 вершины из $[a]-[e]$, противоречие. Значит, $[c_3]$ содержит вершину из $[c_1]\cap([e]-[a])$ и две из $[c_4]\cap([e]-[a])$. Поэтому $[c_3]$ не пересекает $[c_1]\cap([a]-[e])$ и $[c_3]\cap[c_4]$ содержит 2 вершины из $[a]-[e]$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $[a]\cap[e]$ содержит вершину b степени 1 и $f\in[e]\cap\Gamma_3(a)$. Положим $\Phi=[e]\cap\Gamma_2(a)$, $\Psi=[a]\cap\Gamma_2(e)$. Ввиду утверждения (2) леммы, $[a]\cap[e]-\{b\}$ — треугольник $\{c_1,c_2,c_3\}$, причем можно считать, что $b\in[c_1]$. Далее, имеем $|[c_2]\cap\Phi\cap[b]|\le 1$, поэтому $|\Phi|=7$, иначе $|\Phi|=6$ и Φ содержит по вершине из $[c_2]\cap[b]$, $[c_3]\cap[b]$ и две вершины из $[c_2]\cap[c_3]$, противоречие с тем, что $[c_2]\cup[c_3]\cup[b]$ содержит не менее 10 вершин из Ψ. Без ограничения общности $[c_2]$ содержит вершину из $\Phi\cap[b]$. Если $[c_3]$ содержит вершину из $\Phi\cap[b]$, то $[c_2]\cap[c_3]$ содержит две вершины из $\Psi-[b]$ и не пересекает Φ, противоречие. Значит, $[c_3]$ не пересекает $\Phi\cap[b]$, $[c_2]\cap[c_3]$ содержит две вершины из $\Phi-[b]$ и не пересекает Ψ, снова противоречие. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *диаметр* Γ *равен* 3;
(2) *если* $[u]\cap[y]$ *является кликой, то* $b_2(u,y)\le 1$;
(3) *если* $b_2(u,y)\ge 2$*, то* $\Gamma_3(u)\cap[y]$ *является* 2*-кликой и* $[u]\cap[y]$ *— четырехугольник.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть диаметр Γ больше 3 и u, w, y, z, o — геодезический путь в Γ. Если $[u] \cap [y]$ содержит две несмежные вершины b, c, то $[b] \cap [c]$ не пересекает $[y] \cap \Gamma_2(u)$ и $[y] \cap \Gamma_2(u)$ содержит по три вершины из $[b]$, $[c]$, противоречие. Значит, $[u] \cap [y]$ и $[o] \cap [y]$ являются кликами. Ввиду леммы 1.5 степень y в подграфе $[w] \cap [z]$ не меньше 2, поэтому $[w] \cap \Gamma_2(u) \cap [y]$ совпадает с $[z] \cap \Gamma_2(u) \cap [y]$ для любой вершины $z \in [y] \cap [o]$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $b_2(u, y) \geq 2$, $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит две вершины z, z' и $[u] \cap [y]$ является кликой. Ввиду леммы 1.5 степень y в каждом из подграфов $[w] \cap [z]$, $[w] \cap [z']$ не меньше 2, поэтому $[w] \cap \Gamma_2(u) \cap [y]$ содержит две вершины из $[z] \cap [z'] \cap [y]$. Если вершины z, z' несмежны, то $|[z] \cap [z'] \cap [y]| \geq 4$, противоречие. Значит, вершины z, z' смежны, и если $|[z] \cap [z'] \cap [y]| \leq 3$, то получим противоречие с тем, что найдутся две вершины из $[u] \cap [y]$, попадающие в окрестности двух вершин из $[z] \cap [z'] \cap [y]$. Итак, $|[z] \cap [z'] \cap [y]| = 4$, $\Gamma_2(u) \cap [y] - [z] = \{x, x'\}$, $[x] \cap [x']$ содержит y и 4 вершины из $[z] \cap [z'] \cap [y]$. Противоречие с тем, что любая вершина из $[z] \cap [z'] \cap [y]$ смежна не более чем с одной вершиной из $[u] \cap [y]$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $[u] \cap [y] = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит две вершины z, z'. Без ограничения общности вершины a_1, a_3 несмежны. Тогда $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит по три вершины из $[a_1] - [a_3]$ и из $[a_3] - [a_1]$, поэтому $|[y] \cap \Gamma_3(u)| \geq 6$ и $b_2(a, y) = 2$. Если вершины z, z' несмежны, то степень y в графе $[z] \cap [z']$ не меньше 4, противоречие. Поэтому $\Gamma_3(u) \cap [y]$ является 2-кликой.

Допустим, что $[u] \cap [y]$ не является четырехугольником. Тогда вершины a_2, a_4 смежны и $[y] \cap \Gamma_2(u)$ содержит по три вершины из $[a_1]$, $[a_3]$. Далее, вершины z, z' смежны, и $[z] \cap [y]$ содержит по две вершины из $[a_1]$, $[a_3]$. Если $[a_2] \cap [a_4]$ не пересекает $[y] \cap \Gamma_2(u)$, то $([a_2] \cup [a_4]) \cap \Gamma_2(u)$ содержит 4 вершины из $[z] \cap [z'] \cap [y]$. Положим $\Gamma_2(u) \cap [y] - [z] = \{x, x'\}$. Тогда $[x]$ содержит y, x', вершину из $\{a_1, a_3\}$ и три вершины из $[z] \cap [z'] \cap [y]$. Противоречие с тем, что число ребер между $[z] \cap [z'] \cap [y]$ и $[y] - ([z] \cap [z'])$ не меньше $8 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$. Итак, $[a_2] \cap [a_4]$ содержит вершину b из $[y] \cap \Gamma_2(u)$. Без ограничения общности $b \in [a_1] \cap \Gamma_2(u)$. Так как $[b] \cap [y] = \{a_1, a_2, a_4, z, z'\}$, то подграф $[a_1] \cap [z]$ является четырехугольником, противоречие с тем, что для вершины b' из $[a_1] \cap [z] - b^{\perp}$ подграф $[b] \cap [b']$ содержит a_1, y, z, z' и вершину из $[b] \cap [b'] - z^{\perp}$.

Лемма 1.7. Γ *— граф Джонсона* $J(7, 3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если u, w, y, z, o — геодезический путь в Γ, то $b_2(u, y) \geq 4$, противоречие с леммой 1.6. Значит, диаметр Γ равен 3.

Так как число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше 36, но не меньше $5k_3$, то $k_3 \leq 7$. Если $\Gamma_3(u)$ содержит геодезический 2-путь z_1, z_2, z_3, то $[z_1] \cap [z_3]$ содержит 4 вершины из $\Gamma_3(u)$ и число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше $4 \cdot 6 + 2 \cdot 8$, противоречие. Значит, $\Gamma_3(u)$ — объединение изолированных клик.

Если $\Gamma_3(u)$ не является кликой, то число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше 20, противоречие. Итак, $\Gamma_3(u)$ является k_3-кликой, число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ равно $k_3(13 - k_3)$, поэтому $k_3 \leq 4$.

Если $k_3 = 1$, то $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)$ — октаэдр, противоречие с тем, что антипод вершины из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)$ попадает в $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)$.

Если $k_3 = 2$, $\Gamma_3(u) = \{z, z'\}$, то $\Gamma_2(u)$ содержит 5 вершин из $[z] \cap [z']$ и по 6 вершин из $[z] - [z']$, $[z'] - [z]$, противоречие с тем, что для вершины $w \in \Gamma_2(z) \cap \Gamma_3(z')$ получим $|[w] \cap \Gamma_2(u)| \leq 5$.

Если $k_3 = 3$, $\Gamma_3(u) = \{z_1, z_2, z_3\}$, то $\Gamma_2(u)$ содержит по 4 вершины из $[z_i] \cap [z_j']$ для различных i, j и по две вершины из $[z_i] - ([z_j \cup [z_{6-i-j}]$. Положим $\Gamma_3(z_i) - \{u\} = \{w_i, x_i\}$. Тогда $\Gamma_2(u) \cap [w_1]$ содержит по 2 вершины из $[z_2] - ([z_1 \cup [z_3]$, $[z_3] - ([z_1 \cup [z_2]$ и из $[z_2 \cap [z_3]$, поэтому $\Gamma_2(u) - [z_1]$ содержит 4 вершины из $[w_1] \cap [x_1]$ и по две вершины из $[w_1] - [x_1]$, $[x_1] - [w_1]$. Отсюда вершина из $\Gamma_2(u) \cap [z_1] \cap [z_2]$ смежна с единственной вершиной из $\{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$ и с тремя вершинами из $[u] - \{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$. Теперь для $[w_1] \cap [z_2] \cap [z_3] = \{y_1, y_2\}$ четырехугольники $[u] \cap [y_1]$ и $[u] \cap [y_2]$ имеют не более двух общих вершин. Далее, каждая вершина из $\{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$ смежна с тремя вершинами из $[u] - \{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$, и каждая вершина из $[u] - \{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$ $[u] \cap [y_2]$ смежна с тремя вершинами из

$\{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$. Отсюда $\{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$ и $[u] - \{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$ — шестиугольники, и для любой вершины из шестиугольника $\{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$ ее окрестность в $[u] - \{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$ является 3-кокликой. Противоречие с тем, что пересечение окрестностей w_1 и подходящей вершины из $\{w_2, x_2\}$ содержит u, две вершины из $[z_3] - ([z_1] \cup [z_2])$ и три вершины из $[u] - \{w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3\}$.

Если $k_3 = 4$, то Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{12, 6, 2; 1, 4, 9\}$ и Γ — граф Джонсона $J(7, 3)$. Лемма, а вместе с ней и п. (2) теоремы 1 доказаны.

Случай $\mu = 3$. В данном подразделе предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами $(v, 12, 5, 3)$. По лемме 1.3 диаметр Γ больше 2. Зафиксируем обозначения: u, w, y, z — геодезический 3-путь в Γ, $\Delta = [u] \cap \Gamma_2(y)$, $\Sigma = [y] \cap \Gamma_2(u)$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Тогда $k_2 = 24$.

Лемма 1.8. *Для любых двух вершин* a, e *с* $d(a, e) = 2$ *выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *подграф* $[a] \cap [e]$ *является кликой*;

(2) $[a] \cap [e]$ *является геодезическим* 2-*путем, и* $b_2(a, e) + b_2(e, a) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d(a, e) = 2$. Тогда $|([a] - [e]) \cup ([e] - [a])| = 18$.

Пусть $[a] \cap [e]$ содержит изолированную вершину. Тогда число ребер между $[a] \cap [e]$ и $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ не меньше 26. Если $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ содержит вершину, смежную с тремя вершинами из $[a] \cap [e]$, то $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ содержит 6 вершин, смежных с парами вершин из $[a] \cap [e]$, противоречие. Если же $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ не содержит вершин, смежных с тремя вершинами из $[a] \cap [e]$, то $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ содержит 8 вершин, смежных с парами вершин из $[a] \cap [e]$, снова противоречие.

Пусть $[a] \cap [e]$ является геодезическим путем c_1, c_2, c_3. Тогда число ребер между $[a] \cap [e]$ и $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ равно 22. Если $z \in [e] \cap \Gamma_3(a)$, то $\Gamma_2(a) \cap [y]$ содержит не более 5 вершин из $[z]$ и не более трех вершин вне $[z]$. Далее, $[c_1] \cap [y]$ содержит не более двух вершин из $[z]$ и не менее двух вершин из $\Gamma_2(a) - [z]$, противоречие с тем, что $[c_1] \cap [c_3]$ содержит a, e, c_2 и вершину из $\Gamma_2(a) \cap [y] - [z]$.

Лемма 1.9. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *диаметр* Γ *равен* 3;

(2) *окрестность любой вершины в* Γ *не является графом Тервиллигера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть u, w, y, z, o — геодезический 4-путь в Γ. Тогда подграфы $[u] \cap [y] = \{w_1, w_2, w_3\}$ и $[y] \cap [o] = \{z_1, z_2, z_3\}$ являются треугольниками. Положим $[w_1] \cap [y] - [u] = \{y_1, y_2, y_3\}$. Тогда любая вершина из $\{z_1, z_2, z_3\}$ смежна точно с двумя вершинами из $\{y_1, y_2, y_3\}$. Если вершина y_3 смежна точно с двумя вершинами z_2, z_3 из $\{z_1, z_2, z_3\}$, то $[y_3] \cap [z_1]$ содержит y, z_2, z_3 и вершину из $\{y_1, y_2\}$, противоречие. Значит, можно считать, что $[y_1] \cap [y_2]$ содержит z_1, z_2, z_3 и $[z_1] \cap [z_2] = \{y, y_1, y_2, z_3, o\}$. Повторив рассуждения с вершиной w_2 вместо w_1, получим противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\Delta = [u]$ является регулярным графом Тервиллигера диаметра 2 степени 5 с $\mu_\Delta = 2$ на 12 вершинах. Тогда для любой вершины $w \in \Delta$ подграф $\Delta(b)$ является геодезическим графом на 5 вершинах. Поэтому $\Delta(w)$ — пятиугольник или 4-лапа. Если Δ — локально пятиугольный граф, то Δ является графом икосаэдра, противоречие. Если же $\Delta(w)$ является 4-лапой, то $\Delta_2(w)$ содержит не менее 12 вершин, снова противоречие. Лемма доказана.

Пусть $a \in \Gamma_2(u)$ и подграф $[a] \cap [u]$ является геодезическим 2-путем b_1, b_2, b_3. Тогда $[a] \cap \Gamma_2(u)$ содержит по 4 вершины из $[b-1] - [b_3]$, $[b_3] - [b_1]$ и вершину c вне $[b_1] \cup [b_3]$. Далее, $[a] \cap [c]$ содержит не более двух вершин в каждом из подграфов $\{b_2\} \cup ([b-1] - [b_3])$, $\{b_2 \cup ([b_3] - [b_1])$. Противоречие с тем, что степень вершины c в графе $[a]$ не больше 4. Итак, случай $\mu = 3$ невозможен.

Случай $\mu = 2$**.** В этом подразделе предполагается,что Γ — вполне регулярный граф с параметрами $(v, 12, 5, 2)$. По лемме 1.3 диаметр Γ больше 2. Зафиксируем обозначения: u, w, y, z — геодезический 3-путь в Γ, и $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Тогда $k_2 = 36$.

Лемма 1.10. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *окрестность любой вершины в* Γ *является объединением двух изолированных* 6*-клик*;
(2) *любой* μ*-подграф в* Γ *является кокликой.*

Доказательство. Пусть $[a]$ не содержит 6-клик. Для любой вершины $b \in [a]$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит не менее 4 пар несмежных вершин. Поэтому $[a]$ содержит не менее 48 геодезических 2-путей. Противоречие с тем, что $[a]$ содержит не более $6 \cdot 12/2$ пар несмежных вершин.

Значит, для любой вершины a подграф $[a]$ содержит 6-клику L. Тогда L и $[a] - L$ — изолированные 6-клики в $[a]$. Утверждение (1) доказано.

Теперь $[a]$ содержит 36 пар несмежных вершин, и $\Gamma_2(a)$ содержит 36 вершин, смежных с парами несмежных вершин из $[a]$. Лемма доказана.

Из лемм 1.3 и 1.10 следует, что диаметр Γ равен 2 и Γ является 7×7-решеткой. Пункт (3) теоремы 1 доказан.

2. Доказательство теоремы 2

Напомним определения некоторых графов, участвующих в формулировке теоремы. *Графом Хофмана — Синглтона* называется сильно регулярный граф с параметрами $(50, 7, 0, 1)$. *Графом Конвея — Смита* называется единственный дистанционно регулярный граф на 63 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$. *Графом Доро* называется единственный дистанционно регулярный граф на 65 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4, ; 1, 2, 5\}$.

Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с $b_1 = 6$. Если диаметр Γ равен 2, то ввиду [5] Γ является одним из графов в п. (1) заключения теоремы 2.

Пусть диаметр Γ больше 2. По [5, теорема 2] Γ — один из следующих графов:

(1) полный двудольный граф $K_{8,8}$ с удаленным максимальным паросочетанием, граф Тэйлора с параметрами $(28, 13, 6, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Пэли $P(13)$, или граф Тэйлора с параметрами $(32, 15, 8, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны треугольному графу $T(6)$;

(2) $\mu = 4$, $k = 12$, $c_3(u, y) \geq 6$ для любых вершин u, y с $d(u, y) = 3$, и диаметр Γ равен 3;

(3) $\mu = 3$, и либо

(i) Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$, либо

(ii) Γ — локально девятиугольный граф диаметра 3, каждый μ-подграф является 3-кокликой или объединением изолированной вершины и ребра, $b_2(u, x) \leq 3$ для любых вершин u, x с $d(u, x) = 2$ и $|\Gamma_3(u)| \leq 10$, либо

(iii) $k = 10$, либо

(iv) $k = 11$, Γ является графом диаметра 3 и $c_3(u, y) \geq 5$ для любых вершин u, y с $d(u, y) = 3$;

(4) $\mu = 2$, и либо

(i) Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, граф Конвея — Смита или граф Доро, либо

(ii) Γ является ректаграфом с $v \leq 2^7$ и диаметра, не большего 7 (в случае $v = 2^7$ или $d(\Gamma) = 7$ граф Γ является 7-кубом), либо

(iii) окрестность каждой вершины в Γ является объединением четырех изолированных ребер;

(5) $\mu = 1$, и окрестность каждой вершины является 7-кокликой или объединением изолированных n-клик для $n = 2, 3$ или 6.

Отсюда либо $\mu = 4$ и $k = 12$, либо $\mu = 3$ и $k = 10, 11$.

Если $\mu = 3$, то ввиду [6; 7] либо $k = 10$, диаметр Γ равен 3 и $34 \leq v \leq 37$, либо $k = 11$, диаметр Γ равен 3, $v = 36$ и $\Gamma_3(u)$ является 2-кликой для некоторой вершины u.

Если $\mu = 4$, то ввиду теоремы 1 Γ — граф Джонсона $J(7, 3)$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Махнев А.А.** О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68. С. 159–172.
3. **Васильев С.А., Махнев А.А.** О вполне регулярных графах с $b_1 = 4$ // Изв. Гомел. гос. ун-та. Гомель, 2006. С. 101–108.
4. **Казарина В.И., Махнев А.А.** О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$ // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 1. С. 29–42.
5. **Ефимов К.С., Махнев А.А.** Вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ // Журн. Сиб. федер. ун-та. 2009. Т. 2, № 1. С. 63–77.
6. **Ефимов К.С., Махнев А.А., Нирова М.С.** О вполне регулярных графах с $k = 10$, $\lambda = 3$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 75–90.
7. **Ефимов К.С., Махнев А.А.** О вполне регулярных графах с $k = 11$, $\lambda = 4$ // Междунар. конф. по алгебре и геометрии: тез. докл. Екатеринбург, 2011. С. 75–90.
8. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.

Ефимов Константин Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com

Поступила 13.01.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕСВЯЗНЫМ ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ[1]

М. Р. Зиновьева, В. Д. Мазуров

Определены конечные простые неабелевы группы с графом простых чисел, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса.

Ключевые слова: конечная простая группа, граф простых чисел, группа Фробениуса, двойная группа Фробениуса.

M. R. Zinov'eva, V. D. Mazurov. On finite groups with disconnected prime graph.

All finite simple nonabelian groups that have the same prime graph as a Frobenius group or a 2-Frobenius group are found.

Keywords: finite simple group, prime graph, Frobenius group, 2-Frobenius group.

Введение

Для конечной группы G через $\omega(G)$ обозначается *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. Пусть $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n. Обозначим $\pi(|G|)$ через $\pi(G)$. На множестве $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля, или графом простых чисел группы* G и обозначается через $GK(G)$. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \ldots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $GK(G)$. Если порядок G четен, то считаем, что $2 \in \pi_1$.

Множество вершин графа называется *кокликой*, если его вершины попарно не смежны. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(2, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих число 2.

Первым результатом о конечных группах с несвязным графом простых чисел стала теорема Грюнберга и Кегеля, полученная ими в неопубликованной работе (доказательство этой теоремы было опубликовано в 1981 г. в [1, теорема A]). В заключении этой теоремы возникли случаи групп Фробениуса и двойных групп Фробениуса.

Группой Фробениуса называется группа G, содержащая собственную нетривиальную подгруппу H такую, что $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$. По теореме Фробениуса (см., например, [2]) группы Фробениуса исчерпываются полупрямыми произведениями $G = FH$, где F — нетривиальная нормальная подгруппа в G, $H \neq 1$ и $C_F(h) = 1$ для любого нетривиального элемента h из H. Подгруппа F называется *ядром* группы Фробениуса G, а H — ее *дополнением*.

Согласно [3] *двойной группой Фробениуса* называется группа G, в которой есть нормальная подгруппа H, являющаяся группой Фробениуса с ядром A, по которому фактор-группа G/A

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-00324, 11-01-00456, 11-01-91158), программы совместных исследований СО РАН и УрО РАН (проект 12-С-1-1018) и федеральной целевой программы “Научно-образовательные кадры инновационной России, 2009–2013 гг.” (государственный контракт 14.740.11.0346).

является группой Фробениуса с ядром H/A. В работе первого автора [4] определены конечные простые группы с таким же спектром, как у некоторой группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса.

Возникает естественный вопрос: *какие конечные простые группы имеют тот же граф простых чисел, как группы Фробениуса или двойные группы Фробениуса?* Под равенством графов $GK(S)$ и $GK(G)$ для конечных групп S и G будем понимать совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно.

В данной работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть S — конечная простая неабелева группа. Тогда и только тогда $GK(S) = GK(G)$ для некоторой группы Фробениуса G с разрешимым дополнением, когда S изоморфна одной из групп $A_2(q)$ $(q+1 = 2^k,\ (q-1)_3 \neq 3)$, ${}^2A_2(q)$ $(q-1 = 2^k, (q+1)_3 \neq 3)$, ${}^2A_3(2)$, $C_3(2)$, $C_2(q)$ $(q > 2)$, $D_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, J_2, A_9, A_{12}.*

Теорема 2. *Пусть G — группа Фробениуса с неразрешимым дополнением H, а S — конечная простая неабелева группа. Тогда и только тогда $GK(G) = GK(S)$, когда выполняется в точности одно из следующих утверждений*:

(а) *H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2, 5)$, и S изоморфна одной из групп $A_2(5)$, $A_2(9)$, ${}^2A_2(5)$, $A_3(3)$, ${}^2F_4(2)'$ или M_{12};*

(б) *H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2, 5)\times Z$, где Z — 41-группа, и S изоморфна ${}^2A_2(81)$;*

(в) *H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2, 5)\times Z$, где Z — 13-группа, и S изоморфна ${}^2A_2(25)$.*

Теорема 3. *Пусть S — конечная простая неабелева группа. Тогда и только тогда $GK(S) = GK(G)$ для некоторой двойной группы Фробениуса G, когда S изоморфна одной из групп $A_2(q)$ $(q+1 = 2^k,\ (q-1)_3 \neq 3)$, ${}^2A_2(q)$ $(q-1 = 2^k, (q+1)_3 \neq 3)$, ${}^2A_3(2)$, $C_3(2)$, $C_2(q)$ $(q > 2)$, $D_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, J_2, A_9, A_{12}.*

Обозначения конечных простых групп взяты из [5].

1. Предварительные результаты

Лемма 1 [2]. *Пусть $G = FH$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Тогда*

(а) *Подгруппа F является наибольшей нильпотентной нормальной в G подгруппой, и $|H|$ делит $|F| - 1$.*

(б) *Любая подгруппа порядка pq из H, где p и q — (необязательно различные) простые числа, является циклической. В частности, любая силовская подгруппа из H — циклическая либо (обобщенная) кватернионная группа.*

(в) *Если порядок H четен, то H содержит единственную инволюцию.*

(г) *Если подгруппа H неразрешима, то в ней есть подгруппа $S \times Z$ индекса 1 или 2, где $S \cong SL_2(5)$ и $(|S|, |Z|) = 1$.*

Лемма 2. *Если G — двойная группа Фробениуса, то $G = ABC$, где A и AB — нормальные подгруппы в G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B соответственно. При этом B и C — циклические группы, и порядок B нечетен.*

Доказательство. Пусть H — нормальная подгруппа в G, являющаяся группой Фробениуса с ядром A. Тогда $(|A|, |H : A|) = 1$. По теореме Шура — Цассенхауза в H существует дополнение B к A, и все эти дополнения сопряжены. Поэтому $G = AN_G(B)$. Так как $N_A(B) = 1$, то $N_G(B) \cap A = 1$ и $N_G(B) \cong G/A$ — группа Фробениуса с ядром $B \cong H/A$. Поскольку снова $(|B|, |N_G(B) : B|) = 1$, то в $N_G(B)$ есть дополнение C к B.

Так как B — ядро и одновременно дополнение в двух разных группах Фробениуса, то по п. (в) леммы 1 порядок B нечетен и по пп. (а) и (б) этой леммы B — циклическая группа.

Поскольку группа автоморфизмов циклической группы абелева, то по п. (б) леммы 1 C — циклическая группа.

Лемма доказана.

В дальнейшем будем называть A *нижним ядром*, а B — *верхним ядром* двойной группы Фробениуса $G = ABC$.

Лемма 3. (а) *Если G — двойная группа Фробениуса или разрешимая группа Фробениуса, то $GK(G)$ — объединение двух компонент связности, каждая из которых является полным графом. В частности, $t(G) = 2$.*

(б) *Если G — неразрешимая группа Фробениуса, то $GK(G)$ — объединение двух компонент связности, одна из которых — полный граф, а вторая содержит вершины 2, 3, 5 и является полным графом, из которого удалено ребро $\{3, 5\}$. В частности, $t(G) = 3$, $t(2, G) = 2$.*

Доказательство. Пусть G — двойная группа Фробениуса. По лемме 2 $G = ABC$, где A и AB — нормальные подгруппы, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B соответственно. При этом B и C — циклические группы. Если p и q — простые числа, одно из которых делит $|B|$, а другое делит $|G : B|$, то из определения группы Фробениуса вытекает, что (p, q) не является ребром в $GK(G)$, поэтому $GK(B)$ является компонентой связности графа $GK(G)$. С другой стороны, (p, q) по леммам 1 и 2 является ребром в $GK(G)$, если p и q одновременно делят порядок A или порядок B. Пусть, наконец, p делит $|A|$ и q делит $|C|$. Предположим, что $\{p, q\}$ не является ребром в $GK(G)$. Пусть Q — подгруппа порядка q из C, P — силовская p-подгруппа из A, R — подгруппа простого порядка r из B. Тогда PRQ — группа Фробениуса с ядром P и дополнением RQ порядка rq. По лемме 1 RQ — циклическая группа, что противоречит тому, что BC — группа Фробениуса с ядром B. Поэтому наше предположение неверно и все пары различных элементов из $\pi(A) \cup \pi(C)$ являются ребрами в $GK(G)$.

Пусть G — группа Фробениуса с ядром K и дополнением H. По п. (а) леммы 1 все простые числа, делящие $|K|$, смежны в $GK(G)$, и ни одно из них не смежно ни с одним простым числом, делящим $|H|$.

Таким образом, $GK(G)$ — дизъюнктное объединение полного графа $GK(K)$ и графа $GK(H)$.

Пусть вначале H разрешима, p и q — различные простые числа, делящие порядок H. Если одно из них равно 2, то p и q смежны в $GK(H)$ по п. (в) леммы 1. Пусть p и q нечетны и U — холлова $\{p, q\}$-подгруппа из H. По п. (б) леммы 1 в U все силовские подгруппы циклические, и, следовательно, U — метациклическая группа. Поэтому U содержит подгруппу порядка pq, которая по п. (б) леммы 1 является циклической группой. Отсюда $\{p, q\}$ — ребро в $GK(H)$, и, таким образом, $GK(H)$ является полным графом.

Если, наконец, H неразрешима, то по лемме 1 H содержит подгруппу индекса 1 или 2, изоморфную $S \times Z$, где $S \cong SL_2(5)$ и $(|S|, |Z|) = 1$. Очевидно, 3 и 5 не смежны в $GK(H)$ и любое простое число из $\pi(S)$ смежно в $GK(H)$ с любым простым числом из $\pi(Z)$. Кроме того, как показано в предыдущем абзаце, граф $GK(Z)$ полон.

Лемма доказана.

2. Доказательство теорем

В следующем предложении π_1, π_2 обозначают конечные непустые непересекающиеся множества простых чисел.

Предложение. 1. Для любых π_1 и π_2 существует разрешимая группа Фробениуса G такая, что π_1 и π_2 — компоненты связности графа $GK(G)$.

2. Подмножества π_1 и π_2 тогда и только тогда являются компонентами связности графа $GK(G)$ для некоторой неразрешимой группы Фробениуса G, когда одно из этих множеств содержит 2, 3 и 5.

3. Подмножества π_1 и π_2 тогда и только тогда являются компонентами связности графа $GK(G)$ для некоторой двойной группы Фробениуса, когда (с точностью до перестановки π_1, π_2) найдется число $p \in \pi_1$ такое, что $q-1$ делится на p для любого $q \in \pi_2$.

Доказательство. 1. Пусть $\pi_1 = \{p_1, \dots, p_r\}$, $\pi_2 = \{q_1, \dots, q_s\}$ и $n = q_1 \dots q_s$. Пусть m_i — такое натуральное число, что $p_i^{m_i} - 1$ делится на n $(i = 1, \dots, r)$. Если F_i — поле порядка $p_i^{m_i}$, то его мультипликативная группа F_i^* содержит элемент x_i порядка n. Пусть F_i^+ — аддитивная группа поля F_i, $F = F_1^+ \oplus \dots \oplus F_r^+$ и G — полупрямое произведение F на циклическую группу $\langle x \rangle$, где действие x на слагаемом F_i^+ — это умножение в поле F_i на элемент x_i. Тогда G — группа Фробениуса, и граф $GK(G)$ имеет точно две компоненты π_1, π_2, являющиеся полными графами.

2. Необходимость вытекает из леммы 3. Докажем достаточность. Пусть по-прежнему $\pi_1 = \{p_1, \dots, p_r\}$, $\pi_2 = \{q_1, \dots, q_s\}$ и $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$. Положим $n = q_4 \dots q_s$. Как в доказательстве п. 1, для $i = 1, \dots, r$ построим поле F_i, рассмотрим векторное пространство V_i размерности 2 над F_i и зафиксируем в нем некоторый базис b_i.

Рассмотрим линейные преобразования α_i и β_i пространства V_i, матрицы которых в базисе b_i равны соответственно

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ -\lambda_i & \lambda_i^{-1} \end{pmatrix} \text{ и } B_i = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i^{-1} \\ -\lambda_i & 0 \end{pmatrix},$$

где λ_i — элемент порядка 5 из F_i^*. Непосредственно проверяется, что $A_i^5 = (A_iB_i)^3 = E_i$, где E_i — единичная матрица, а $B_i^2 = -E_i$.

Теперь из [6, I.19.9] вытекает, что $\langle A_i, B_i \rangle / \langle -E_i \rangle \cong A_5$, а из [6, V.25.7] следует, что $\langle A_i, B_i \rangle \cong SL_2(5)$.

Заметим, что характеристические числа любого нетривиального элемента X из $\langle A_i, B_i \rangle$ отличны от 1. Действительно, так как $A_i, B_i \in SL_2(F_i)$, то $\langle A_i, B_i \rangle \leq SL_2(F_i)$, и, таким образом, если 1 — характеристический корень элемента $X \in \langle A_i, B_i \rangle$, то оба характеристических корня элемента X равны 1, т. е. матрица X подобна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & 1 \end{pmatrix}$, и, значит, X является p_i-элементом. Так как $(|SL_2(5)|, p_i) = 1$, то $X = E_i$. Это означает, что любое нетривиальное преобразование из $S_i = \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cong SL_2(5)$ оставляет неподвижным только нулевой вектор из V_i.

Пусть ξ_i — элемент порядка $q_4 \dots q_s$ из F_i^*. Очевидно, любое преобразование из $Z_i = \langle \xi_i \varepsilon_i \rangle$, отличное от тривиального преобразования ε_i пространства V_i, также оставляет неподвижным только нулевой вектор из V_i, и, поскольку $(|Z_i|, |S_i|) = 1$, то же самое верно для $H_i = \langle S_i, Z_i \rangle = S_i \times Z_i$.

Если теперь $H = SL_2(5) \times Z \cong H_i$ и G — полупрямое произведение $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ на H, где действие H на V_i для $i = 1, \dots, r$ совпадает с действием H_i, то G — группа Фробениуса и компоненты связности графа $GK(G)$ совпадают с π_1 или π_2.

3. Докажем вначале достаточность. Пусть $\pi_1 = \{p_1, \dots, p_r\}$, $\pi_2 = \{q_1, \dots, q_s\}$ и для определенности $p = p_1$ делит $q_j - 1$ для любого $j = 1, \dots, s$. Для $i = 1, \dots, r$ рассмотрим F_i — конечное поле характеристики p_i, мультипликативная группа F_i^* которого содержит элемент λ_i порядка $n = q_1 \dots q_s$. Пусть $\lambda_i = \lambda_{i1} \dots \lambda_{is}$, где $\lambda_{ij} \in F_i^*$ и порядок λ_{ij} равен q_j для $j = 1, \dots, s$. Так как по условию $q_j - 1$ делится на p, циклическая группа $\langle \lambda_{ij} \rangle$ обладает автоморфизмом φ_{ij} порядка p. Пусть φ_i — автоморфизм группы $\langle \lambda_i \rangle$, определенный равенством $\lambda_i^{\varphi_i} = \lambda_1^{\varphi_{i1}} \dots \lambda_s^{\varphi_{is}}$, и k_i — число, для которого $\lambda_i^{\varphi_i} = \lambda_i^{k_i}$.

Для $i = 1, \dots, s$ пусть V_i — векторное пространство размерности p над F_i, в котором мы зафиксируем некоторый базис b_i. Рассмотрим в $GL(V_i)$ группу, порожденную преобразованиями β_i и γ_i, матрицы которых в базисе b_i равны соответственно

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i^{k_i} & & O \\ & & \ddots & \\ & O & & \lambda_i^{k_i^{p-1}} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $C_i^{-1}B_iC_i = B_i^{k_i}$, поэтому $\langle B_i, C_i\rangle$ — группа Фробениуса порядка np, и все группы $\langle B_i, C_i\rangle$ изоморфны одной и той же группе H.

Пусть G — полупрямое произведение $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ на H, где действие H на каждом слагаемом V_i совпадает с действием H_i. Так как V_iB_i — группа Фробениуса, то G — двойная группа Фробениуса, в которой нижнее ядро совпадает с $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, а верхнее с B.

Пусть теперь G — двойная группа Фробениуса. По лемме 2 $G = ABC$, где A и AB нормальны в G, B и C — циклические подгруппы. Положим $\pi_1 = \pi(AC)$, $\pi_2 = \pi(B)$. Тогда π_1 и π_2 — компоненты графа $GK(G)$. Пусть $p \in \pi(C)$ и C_p — подгруппа порядка p из C. Если $q \in \pi_2$ и B_q — подгруппа порядка q из B, то B_qC_p — группа Фробениуса порядка qp с ядром порядка q и дополнением порядка p. По п. (a) леммы 1 $q-1$ делится на p.

Предложение доказано.

Перейдем к доказательству основных результатов.

Доказательство теоремы 1. По п. (a) леммы 3 $t(G) = 2$. Значит, $t(S) = 2$. По [1, 7–10] S изоморфна одной из групп $A_2(q)$ $(q+1 = 2^k,\ (q-1)_3 \neq 3)$, ${}^2A_2(q)$ $(q-1 = 2^k, (q+1)_3 \neq 3)$, ${}^2A_3(2)$, $C_3(2)$, $C_2(q)$ $(q > 2)$, $D_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, J_2, A_n.

Рассмотрим графы простых чисел знакопеременных групп. При $5 \leq n \leq 17$ непосредственно проверяется, что только у групп A_9 и A_{12} графы состоят из двух компонент связности, каждая из которых является полным графом. По [8, лемма 1] при $n \geq 18$ существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Эти числа несмежны в $GK(S)$, поэтому $t(S) \geq 3$. Но $t(S) = 2$; противоречие.

По предложению разрешимые группы Фробениуса с указанными множествами порядков элементов существуют.

Теорема 1 доказана.

Следуя [9], введем обозначение: если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначим минимальное натуральное число n с условием $q^n \equiv 1 \pmod r$. Если $r = 2$, то пусть $e(2, q) = 1$ при $q \equiv 1 \pmod 4$ и $e(2, q) = 2$ при $q \equiv 3 \pmod 4$. Говорят, что простое число r с условием $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Обозначим через r_i примитивный простой делитель числа $q^i - 1$, т. е. r_i делит $q^i - 1$ и не делит $q^j - 1$ для каждого $j < i$.

Доказательство теоремы 2. Пусть S — конечная простая неабелева группа лиева типа над полем характеристики p. По п. (б) леммы 3 $t(S) = 3$, $t(2, S) = 2$, причем 3 и 5 — единственные несмежные вершины в $\pi_1(G)$. По [1, 7–10] S изоморфна одной из групп $A_2(q)$ $(q + 1 = 2^k,\ (q-1)_3 = 3)$, $A_2(q)$ $(q+1 \neq 2^k,\ (q-1)_3 \neq 3)$, q нечетно, ${}^2A_2(q)$ $(q-1 = 2^k, (q+1)_3 = 3)$, ${}^2A_2(q)$ $(q-1 \neq 2^k, (q+1)_3 \neq 3)$, q нечетно, $A_3(3)$, $A_4(q)$, q нечетно, $A_5(2)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, $A_6(2)$, ${}^2A_4(q)$, q нечетно, ${}^2A_5(5)$, $B_3(3)$, $C_3(3)$, $C_4(2)$, $D_4(3)$, ${}^3D_4(q)$ $(q > 2)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{12}, He, McL, HN, A_n.

Заметим, что числа 3 и 5 являются вершинами пересечения максимальных коклик, поэтому ввиду [10] S не изоморфна следующим группам: $A_5(2)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, $A_6(2)$, ${}^2A_5(5)$, $C_4(2)$, $D_4(3)$, He, McL, HN. С помощью [10] исследуем подробнее вершины пересечения максимальных коклик других групп из списка в предыдущем абзаце.

Заметим, что либо $p = 5$, либо 5 делит $q^4 - 1$, поэтому $r_i \neq 5$ при $i \in \{3, 5, 6, 7, 8, 12\}$. Кроме того, либо $p = 3$, либо 3 делит $q^2 - 1$, поэтому $r_i \neq 3$ при $i \geq 3$.

Предположим, что $S \cong A_2(q)$ $(q+1=2^k,\ (q-1)_3=3)$. Согласно [11] имеем $q=p$. Так как $\{3,p,r_3\}=\{3,5,r\}$ и $r_3 \neq 5$, то $p=5$, $q=5$. Но $5+1\neq 2^k$; противоречие.

Предположим, что $S \cong A_2(q)$ $(q+1\neq 2^k,\ (q-1)_3\neq 3)$. Тогда $\{p,r_2,r_3\}=\{3,5,r\}$, где r — некоторое нечетное простое число. Так как $r_3 \neq 3,5$, то $r_3=r$ и либо $p=3$ и $r_2=5$, либо $p=5$ и $r_2=3$. Заметим, что либо 3 — единственный примитивный делитель q^2-1, либо 5 — единственный примитивный делитель q^2-1. Пусть $p=3$ и 5 делит $q^2-1=3^{2f}-1$. Так как 5 делит 3^4-1 и не делит 3^2-1, то 4 делит $2f$, т. е. f четно. Если $f\geq 4$, то по теореме Жигмонди (см. [12]) существует примитивный делитель $t\neq 5$ числа $3^{2f}-1=q^2-1$; противоречие. Значит, $f=2$, $q=9$, $S\cong A_2(9)$. По [5] $\pi_1(S)=\{2,3,5\}$, граф $\pi_1(S)$ является полным графом, из которого удалено ребро $\{3,5\}$. По п. (г) леммы 1 группа H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2,5)\times Z$. Так как $\pi(H)=\{2,3,5\}$, то $Z=1$.

Пусть $p=5$ и 3 делит $q^2-1=5^{2f}-1$. Так как 3 делит 5^2-1 и не делит $5-1$, то f четно. Если $f\geq 2$, то по теореме Жигмонди существует примитивный делитель $t\neq 3$ числа $5^{2f}-1=q^2-1$; противоречие. Значит, $f=1$, $q=5$, $S\cong A_2(5)$. По [5] $\pi_1(S)=\{2,3,5\}$. Как в предыдущем абзаце, группа H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2,5)$.

Предположим, что $S\cong^2 A_2(q)$ $(q-1=2^k,(q+1)_3=3)$. Тогда $\{3,p,r_6\}=\{3,5,r\}$. Согласно [11] либо $q=9$, либо $q=p$. Так как $(9+1)_3=1\neq 3$, то $q=p$. Так как $r_6\neq 5$, то $p=5$, $q=5$, $S\cong^2 A_2(5)$. По [5] $\pi_1(S)=\{2,3,5\}$. Как в предпоследнем абзаце, группа H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2,5)$.

Предположим, что $S\cong^2 A_2(q)$ $(q-1\neq 2^k,(q+1)_3\neq 3)$. Тогда $\{p,r_1,r_6\}=\{3,5,r\}$, где r — некоторое нечетное простое число. Так как $r_6\neq 3,5$, то $r_6=r$ и либо $p=3$ и $r_1=5$, либо $p=5$ и $r_1=3$. Заметим, что либо 3 — единственный примитивный делитель $q-1$, не равный 2, либо 5 — единственный примитивный делитель $q-1$, не равный 2. Пусть $p=3$ и 5 делит $q-1=3^f-1$. Так как 5 делит 3^4-1 и не делит 3^2-1, то 4 делит f. Если $f\geq 5$, то по теореме Жигмонди (см. [12]) существует примитивный делитель $t\neq 5$ числа $3^f-1=q-1$; противоречие. Значит, $f=4$, $q=81$, $S\cong^2 A_2(81)$. По [13, лемма 10] $\pi_1(S)=\{2,3,5,41\}$, граф $\pi_1(S)$ является полным графом, из которого удалено ребро $\{3,5\}$. По п. (г) леммы 1 группа H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2,5)\times Z$, где Z — 41-группа.

Пусть $p=5$ и 3 делит $q-1=5^f-1$. Так как 3 делит 5^2-1 и не делит $5-1$, то f четно. Если $f\geq 3$, то по теореме Жигмонди существует примитивный делитель $t\neq 3$ числа $5^f-1=q-1$; противоречие. Значит, $f=2$, $q=25$, $S\cong^2 A_2(25)$. По [13, лемма 10] $\pi_1(S)=\{2,3,5,13\}$, граф $\pi_1(S)$ является полным графом, из которого удалено ребро $\{3,5\}$. По п. (г) леммы 1 группа H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2,5)\times Z$, где Z — 13-группа.

Предположим, что S изоморфна одной из групп $A_3(3)$, ${}^2F_4(2)'$ или M_{12}. По [5] $\pi_1(S)=\{2,3,5\}$, граф $\pi_1(S)$ является полным графом, из которого удалено ребро $\{3,5\}$. По п. (г) леммы 1 группа H содержит подгруппу индекса не более 2, изоморфную $SL(2,5)\times Z$. Так как $\pi(H)=\{2,3,5\}$, то $Z=1$.

Предположим, что $S\cong A_4(q)$, q нечетно. Тогда $\{r_4,r_5\}=\{3,5\}$, но $3\notin\{r_4,r_5\}$; противоречие.

Предположим, что $S\cong^2 A_4(q)$, q нечетно. Тогда $\{r_4,r_{10}\}=\{3,5\}$, но $3\notin\{r_4,r_{10}\}$; противоречие.

Предположим, что $S\cong B_3(3)$ или $S\cong C_3(3)$. Тогда $\{r_3,r_6\}=\{3,5\}$, но $3\notin\{r_3,r_6\}$; противоречие.

Предположим, что $S\cong^3 D_4(q)$ $(q>2)$. Тогда $5\notin\{r_3,r_6,r_{12}\}$; противоречие.

Рассмотрим графы простых чисел знакопеременных групп. При $5\leq n\leq 7$ непосредственно проверяется, что граф A_n имеет 3 компоненты связности, а при $n\geq 8$ вершины 3 и 5 смежны в $GK(A_n)$.

По предложению неразрешимые группы Фробениуса с указанными множествами порядков элементов существуют.

Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. По п. (a) леммы 3 $t(G) = 2$. Значит, $t(S) = 2$. Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.

В предложении достаточно взять $p = 2$. Тогда 2 делит $q - 1$ для любого $q \in \pi_2$, поэтому двойные группы Фробениуса с указанными множествами порядков элементов существуют.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
2. **Бусаркин В.М., Горчаков Ю.Н.** Конечные расщепляемые группы. M.: Наука, 1968. С. 180.
3. **Gruenberg K.W., Roggenkamp K.W.** Decomposition of the augmentation ideal and the relation modules of a finite group // Proc. London Math. Soc. 1975. Vol. 31. P. 149–166.
4. **Алеева М.Р.** О конечных простых группах с множеством порядков элементов. как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 323–339.
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. S. 794.
7. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
8. **Кондратьев А.С., Мазуров В. Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
9. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
10. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
11. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
12. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, № 1. P. 265–284.
13. **Алеева М.Р.** О композиционных факторах конечных групп с множеством порядков элементов, как у группы $U_3(q)$ для нечетного q // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 249–268.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Поступила 20.02.2012

Мазуров Виктор Данилович
д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН
советник РАН
Институт математики СО РАН

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.6: 519.85

ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ НА ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ[1]

В. И. Зоркальцев

Многие прикладные задачи сводятся к общей геометрической проблеме поиска наименее удаленной от начала координат точки линейного многообразия в конечномерных пространствах. При этом используются разные способы конкретизации этой проблемы, в том числе поиск октаэдрических и евклидовых проекций — векторов линейного многообразия с минимальными октаэдрическими и евклидовыми нормами. В данной статье рассматриваются свойства и взаимосвязи решений проблемы определения наименее удаленных от начала координат точек линейных многообразий при различных ее конкретизациях, в том числе свойства октаэдрических и евклидовых проекций, исследуется влияние на эти проекции варьирования весовых коэффициентов в нормах.

Ключевые слова: линейное многообразие, проекции, евклидовы нормы, октаэдрические нормы.

V. I. Zorkal'tsev. Octahedral and Euclidean projections of a point to a linear manifold.

Many applied problems reduce to the general geometric problem of finding a point of a linear manifold in a finite-dimensional space that is closest to the origin. There are many specific formulations of this problem, including the search for octahedral and Euclidean projections, i.e., vectors of the linear manifold with smallest octahedral and Euclidean norms. We consider the properties of solutions to the problem of finding points of linear manifolds that are closest to the origin and relations between these solutions under various specifications of the problem. In particular, we study the properties of octahedral and Euclidean projections and analyze the influence on these projections of variation of weight coefficients in the norms.

Keywords: linear manifold, projections, Euclidean norms, octahedral norms.

1. Введение

Подмножество векторов n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ со всеми положительными компонентами будем обозначать $\mathbb{R}^n_{++}$. Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$J_0(x) = \{i : x_i = 0\}, \qquad J_+(x) = \{i : x_i > 0\}, \qquad J_-(x) = \{i : x_i < 0\}, \qquad J(x) = \{i : x_i \neq 0\}$$

— подмножества номеров компонент с нулевыми, положительными, отрицательными и ненулевыми значениями. Набор номеров $J(x)$ будем называть *носителем вектора* x.

За счет использования символов $\subset$ и $\subseteq$ будем различать ситуации строгого (включено и не совпадает) и нестрогого (возможно, совпадает) включения одного множества в другое. Для множества векторов X выражения $\operatorname{co} X$, $\operatorname{cl} X$ обозначают выпуклую оболочку X и замыкание X. Выражение $\operatorname{ri} X$ для выпуклого множества X из $\mathbb{R}^n$ обозначает относительную внутренность X — множество внутренних точек области X относительно минимального линейного многообразия, содержащего X [1].

Исходным объектом исследований является непустое, не содержащее начало координат m-мерное линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Его обозначим Y. Линейное подпространство, параллельное многообразию Y, обозначим S. Его можно определить как сдвиг на вектор $-y$ многообразия Y: $S = Y - y$, где y — любой вектор из Y. Линейное подпространство, ортогональное S, обозначим $S^{\perp} = \{z \in \mathbb{R}^n \colon (z, s) = 0 \ \forall\, s \in S\}$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00306а).

Считаем, что функция $\mathrm{sign}(\alpha)$ от вещественного α имеет значения: 1, если $\alpha > 0$; 0, если $\alpha = 0$; -1, если $\alpha < 0$. Символ rank обозначает ранг матрицы.

Рассматриваемую в данной статье проблему можно представить в следующем виде. Найти вектор y из линейного многообразия Y, ближайший к нулевому вектору (началу координат в $\mathbb{R}^n$):

$$|y - 0| \to \min, \qquad y \in Y. \tag{1}$$

Здесь $|y - 0|$ — некоторая (уточняемая далее) характеристика близости векторов нулевого и y.

В конкретных задачах, сводящихся к геометрической проблеме (1), обычно используются следующие два способа задания линейного многообразия.

1. Сдвиг на заданный вектор $d \in \mathbb{R}^n$ линейного подпространства, определяемого в виде линейных комбинаций некоторого конечного набора векторов:

$$Y = \{y = d - G\lambda\colon \lambda \in \mathbb{R}^m\}, \tag{2}$$

где G — матрица размера $n \times m$, столбцы которой состоят из векторов g^i, $i = 1, \ldots, m$, при некотором целом положительном m. Можем считать, что столбцы матрицы G линейно независимы.

2. Множество решений системы линейных уравнений

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n\colon Ay = b\}, \tag{3}$$

где заданными являются вектор $b \in \mathbb{R}^r$ и матрица A размера $r \times n$ с компонентами a_{ij}, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n$ при некотором целом положительном r. Далее будем считать, что строки матрицы A линейно независимы и $r = n - m$.

Приведем примеры задач, сводящихся к проблеме (1). В первых двух примерах используется представление линейного многообразия в форме (2). В остальных двух — в форме (3).

П р и м е р 1. Оценка параметров линейной регрессии. Вероятно, это наиболее известная прикладная задача. Пусть $j = 1, \ldots, n$ — номера наблюдений, $i = 1, \ldots, m$ — номера факторов, g_j^i — значение i-го фактора в j-м наблюдении, d_j — наблюдаемое значение результирующего показателя. Величины

$$y_j = d_j - \sum_{i=1}^{m} g_j^i \lambda_i, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

характеризуют погрешность представления результирующего показателя в виде линейной функции от показателей-факторов. Необходимо найти такие значения параметров линейной регрессии λ_i, при которых абсолютные значения погрешностей были бы минимальными.

П р и м е р 2. Поиск псевдорешений в моделях с противоречивыми условиями. Пусть $i = 1, \ldots, m$ — номера технологических способов, $j = 1, \ldots, n$ — номера используемых и производимых ресурсов, g_j^i — удельные расходы или выпуски продукции, d_i — требуемые объемы производства или объемы располагаемых ресурсов. Компоненты вектора λ характеризуют искомые интенсивности использования технологических способов.

Если система условий несовместна, $G\lambda \neq d$ при любом λ, то есть резон выбирать такой набор интенсивности использования технологических способов, при котором дисбалансы, характеризуемые компонентами вектора y, были бы минимальными по абсолютной величине.

П р и м е р 3. Выбор из множества решений наиболее близких к началу координат. Система уравнений $Ax = b$ может также представлять балансовую модель производства и потребления ресурсов. Искомые интенсивности использования технологических способов составляют вектор y.

В тех случаях, когда условия модели позволяют иметь неединственное решение, есть смысл отдавать предпочтения решениям, наиболее близким к нулевому вектору.

П р и м е р 4. Поиск допустимых решений, максимально приближенных к заданному недопустимому. Пусть система линейных уравнений $Ax = c$ при заданном $c \in \mathbb{R}^r$ характеризует условия, накладываемые на значения вектора решений x. Пусть имеется некоторое нормативное решение $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ (полученное в результате экспертных оценок или другим путем), не удовлетворяющее данной системе линейных уравнений.

Требуется по возможности минимально изменить вектор $\tilde{x}$ с тем, чтобы для скорректированного вектора $x = \tilde{x} + y$ выполнялись все ограничения. Здесь y — вектор корректировок в область допустимых по условиям задачи решений. Он должен удовлетворять условию $Ay = b$, где $b = c - A\tilde{x}$. Необходимо выбрать вектор корректировок y с минимальными абсолютными значениями компонент.

Такого типа постановки были, например, реализованы в [2; 3] применительно к решению проблемы выбора согласованных показателей модели потоков продукции межотраслевого баланса. В [3] такая же постановка использовалась для согласования системы цен, налогов и рентных платежей на базе уравнений формирования цен в модели межотраслевого баланса.

З а м е ч а н и е. Все рассмотренные задачи могут ставиться, как это нередко и делается, в более сложном, чем представлено здесь, виде — с ограничениями в виде неравенств, с нелинейными зависимостями, применительно к множествам решений оптимизационных моделей. Изучение случаев линейных ограничений и только в виде равенств может рассматриваться как основа и необходимый этап для анализа более сложных постановок.

Данная статья является развитием ранее выполненных исследований свойств наименее удаленных от начала координат точек линейного многообразия [4–6]. В [7; 8] представлены результаты по развитию этих исследований применительно к полиэдрам — множествам решений систем линейных неравенств.

Далее считаем, что выражения (2), (3) задают одно и то же линейное многообразие. Это выполняется в том и только в том случае, если

$$Ad = b, \qquad Ag^i = 0, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} G = n.$$

Подпространства — параллельное многообразию Y и ортогональное ему — определяются следующими равносильными условиями:

$$\begin{aligned} S &= \{s = G\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}^m\}, & S^\perp &= \{s \in \mathbb{R}^n \colon G^T s = 0\}, \\ S &= \{s \in \mathbb{R}^n \colon As = 0\}, & S^\perp &= \{s = A^T u \colon u \in \mathbb{R}^r\}. \end{aligned}$$

Считаем, что столбцы матрицы G линейно независимы. Поэтому векторы g^i, $i = 1, \dots, m$, образуют базис подпространства S, размерности Y и S равны m.

2. Способы доопределения проблемы

Сформулированная в начале предыдущего параграфа проблема нуждается в доопределении. Необходимо уточнить, что понимается под близостью искомого вектора к нулевому. Приведем три возможных ответа на этот вопрос.

1. Максимизация (по включению) множества компонент искомого вектора.

О п р е д е л е н и е 1. Векторы линейного многообразия Y с нерасширяемыми наборами нулевых компонент называются *особыми векторами* многообразия Y. Они образуют множество

$$B = \{q \in Y \colon \neg\exists y \in Y,\ J_0(q) \subset J_0(y)\}.$$

Теорема 1 [5]. *Число особых векторов линейного многообразия Y конечно и не более, чем $C_n^m = n! \,/\, (n-m)!m!$.*

2. Вычисление Парето-оптимального решения многокритериальной задачи минимизации абсолютных значений каждой из компонент искомого вектора

$$|y_j| \to \min, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad y \in Y. \tag{4}$$

Определение 2. *Парето-оптимальным* решением задачи (4) является такой вектор $y \in Y$, для которого нельзя уменьшить абсолютное значение любой из компонент, не увеличив абсолютное значение какой-либо другой компоненты и не выходя из множества Y.

Обозначим Q — множество Парето-оптимальных решений задачи (4). Из определения Парето-оптимальных решений вытекает следующее утверждение, которое в [5] было приведено без доказательства.

Лемма 1. *Вектор $x \in Y$ не будет находиться в множестве Q, если и только если существует вектор $s \in S$ такой, что*

$$J(s) \neq \varnothing, \qquad J_-(s) \subseteq J_+(x), \qquad J_+(s) \subseteq J_-(x). \tag{5}$$

Доказательство. Рассматривается вектор x из Y. Пусть для некоторого $s \in S$ выполняются соотношения (5). Тогда при достаточно малом положительном λ для $y = x + \lambda s$ будут выполняться неравенства

$$0 < y_j \leq x_j, \quad j \in J_+(x), \qquad x_j \leq y_j < 0, \quad j \in J_-(x).$$

Причем для $j \in J(s)$ неравенства будут выполняться только в строгой форме, из чего следует, что

$$|y_j| \leq |x_j|, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

и для $j \in J(s)$ эти неравенства выполняются в строгой форме. Следовательно, $x \notin Q$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $x \notin Q$. Следовательно, для некоторого $y \in Y$ выполняется (6). Причем для некоторого j это неравенство выполняется в строгой форме. Отсюда следует, что для вектора $s = y - x$ будут выполняться соотношения (5).

Лемма доказана.

Соотношения (5) можно представить в виде системы линейных уравнений и неравенств. Из теорем об альтернативных системах линейных неравенств [1;9] и леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Вектор $x \in Y$ будет находиться в множестве Q в том и только в том случае, если существует вектор $z \in S^\perp$, при котором*

$$J_+(x) \subseteq J_+(z), \qquad J_-(x) \subseteq J_-(z). \tag{7}$$

Доказательство. Можно воспользоваться следующим вариантом теорем об альтернативных системах линейных неравенств: либо существует $s \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$As = 0, \qquad s \neq 0, \qquad \begin{array}{l} s_j \leq 0, \quad j \in J_+(x), \\ s_j \geq 0, \quad j \in J_-(x), \end{array}$$

либо существует $u \in \mathbb{R}^{n-m}$ такой, что $(A^T u)_j > 0, \;\; j \in J_+(x), \;\; (A^T u)_j < 0, \;\; j \in J_-(x)$.

Это утверждение совпадает с теоремой Гордона при $J_+(x) = \varnothing$ [9, с. 59]. Из этого частного случая вытекает справедливость приведенного утверждения в общем случае, в том числе при $J_+(x) \neq \varnothing$. Первая из приведенных систем линейных уравнений и неравенств равносильна (5). Вторая равносильна (7) при $z = A^T u$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Особые векторы линейного многообразия Y являются Парето-оптимальными решениями задачи* (4), *т. е. $B \subseteq Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in B$. Предположим, что $x \notin Q$. Тогда согласно лемме 1 при некотором $s \in S$ выполняются соотношения (5). Определим λ как максимальное число, при котором

$$x_j + \lambda s_j \geq 0, \quad j \in J_+(x), \qquad x_j + \lambda s_j \leq 0, \quad j \in J_-(x).$$

Следовательно, для вектора $y = x + \lambda s$ будут выполняться соотношения $J_+(y) \subseteq J_+(x)$, $J_-(y) \subseteq J_-(x)$. Причем хотя бы одно из них, в зависимости от того, где реализуется значение λ, будет выполняться в строгой форме. Это противоречит условию $x \in B$. Предположение неверно.

Теорема доказана.

3. Минимизация штрафной функции f от векторов линейного многообразия

$$f(y) \to \min, \qquad y \in Y. \tag{8}$$

Чтобы такая задача соответствовала рассматриваемой проблеме, штрафная функция должна удовлетворять определенным условиям. А именно: она должна возрастать при увеличении значения любой из компонент, если это значение положительное, и при уменьшении значения компоненты, если оно отрицательное. Для дифференцируемых функций это условие равносильно следующему:

$$\operatorname{sign} \nabla_j f(y) = \operatorname{sign} y_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Оптимальное решение задачи (8) обозначим $y(f) = \arg\min\{f(y) \colon y \in Y\}$. Если задача имеет неединственное решение, то $y(f)$ — любое из этих решений.

Множество всех решений обозначим $Y(f) = \operatorname{Arg}\min\{f(y) \colon y \in Y\}$.

В данной статье ограничимся рассмотрением двух типов штрафных функций. В обоих случаях h — заданный вектор весовых коэффициентов из $\mathbb{R}^n_{++}$.

1) Штрафная функция $\varphi_h(y) = \sum_{j=1}^n h_j\,|y_j|$ — сумма взвешенных модулей компонент вектора переменных — является *октаэдрической нормой* в $\mathbb{R}^n$. Ее использование в задаче (8) означает, что отыскивается *октаэдрическая проекция* начала координат на линейное многообразие. Функция φ_h является выпуклой, и ее множество Лебега $L(\varphi_h, \alpha) = \{y \colon \varphi_h(y) \leq \alpha\}$ является ограниченным при любом $\alpha \geq 0$. Следовательно, при этой штрафной функции задача (8) имеет решение. Причем может быть несколько оптимальных решений даже при одном значении вектора весовых коэффициентов. Эти решения образуют политоп — множество, представимое в виде выпуклой оболочки конечного числа векторов. Данный факт следует из ограниченности множества Лебега при α, равном оптимальному значению функции $f = \varphi_h$ в задаче (8). Естественно, что множество решений может изменяться при изменении вектора весовых коэффициентов h.

Лемма 3. *Вектор $y \in Y$ будет решением задачи* (8) *при $f = \varphi_h$ для некоторого $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ в том и только в том случае, если при любом $s \in S$*

$$\sum_{j \in J(y)} \operatorname{sign} y_j\, h_j s_j + \sum_{j \in J_0(y)} h_j\,|s_j| \geq 0. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in Y$ и $y \neq y(\varphi_h)$, т. е. при некотором $x \in Y$

$$\varphi_h(y) > \varphi_h(x). \tag{10}$$

Пусть $s = x - y$. Из (10) следует, что $0 > \varphi_h(x) - \varphi_h(y) = \sum\limits_{j=1}^n h_j(|x_j| - |y_j|)$. Если $j \in J_0(y)$, то $|x_j| - |y_j| = |x_j| = |s_j|$. При $j \in J(y)$ возможны 4 случая:

если $x_j \geq 0,\ y_j > 0$, то $|x_j| - |y_j| = x_j - y_j = s_j \operatorname{sign} y_j$;
если $x_j \leq 0,\ y_j < 0$, то $|x_j| - |y_j| = -x_j + y_j = s_j \operatorname{sign} y_j$;
если $x_j > 0,\ y_j < 0$, то $|x_j| - |y_j| = x_j + y_j > -x_j + y_j = s_j \operatorname{sign} y_j$;
если $x_j < 0,\ y_j > 0$, то $|x_j| - |y_j| = -x_j - y_j > x_j - y_j = s_j \operatorname{sign} y_j$.

Следовательно,
$$\sum_{j=1}^{n} h_j(|x_j| - |y_j|) \geq \sum_{j\in J(y)} \operatorname{sign} y_j\, h_j s_j + \sum_{j\in J_0(y)} h_j\,|s_j|.$$
Поэтому при данном s
$$0 > \sum_{j\in J(y)} \operatorname{sign} y_j\, h_j s_j + \sum_{j\in J_0(y)} h_j\,|s_j|.$$
Итак, из (10) следует, что при некотором $s \in S$ неравенство (9) не выполняется.

И, наоборот, если для $y \in Y$ при некотором $s \in S$ не выполняется неравенство (9), то для вектора $x = y + \lambda s$ при достаточно малом положительном λ будет выполняться неравенство (10). А именно, следует взять положительное λ такое, чтобы выполнялись неравенства $y_j + \lambda s_j > 0, \quad j \in J_+(y), \quad y_j + \lambda s_j < 0, \quad j \in J_-(y)$. Тогда при любом $j \in J(y)$ $|y_j + \lambda s_j| = |y_j| + \lambda\, s_j \operatorname{sign} y_j$. Отсюда, учитывая, что при данном s выполняется обратное к (9) неравенство, имеем
$$\sum_{j=1}^{n} h_j|x_j| = \sum_{j=1}^{n} h_j|y_j + \lambda s_j| = \sum_{j=1}^{n} h_j|y_j| + \lambda\Big(\sum_{j\in J(y)} h_j s_j \operatorname{sign} y_j + \sum_{j\in J_0(y)} h_j|s_j|\Big) < \sum_{j=1}^{n} h_j|y_j|.$$
Следовательно, $y \neq y(\varphi_h)$.

Лемма доказана.

2) Функция $f_h(y) = 1/2\sum_{j=1}^{n} h_j\,(y_j)^2$ — сумма взвешенных квадратов компонент вектора переменных — является строго выпуклой. Она имеет ограниченное множество Лебега $L(f_h,\alpha) = \{y\colon f_h(y) \leq \alpha\}$ при любом $\alpha \geq 0$. Следовательно, при $f = f_h$ для любого $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ задача (8) имеет единственное решение.

Функция f_h является результатом дифференцируемого возрастающего преобразования (возведения в квадрат и умножения на 0,5) *евклидовой нормы* $||y||_h = \left(\sum h_j(y_j)^2\right)^{1/2}$. Поэтому использование функции f_h в задаче (8) дает такой же результат, что и использование функции $||\;||_h$. Решение задачи с одной из этих функций является и решением задачи (8) с использованием другой функции. Поэтому решение $x(f_h)$ является *евклидовой проекцией* начала координат на линейное многообразие. Отметим, что, варьируя компоненты вектора весовых коэффициентов h, будем получать разные евклидовы нормы, которые могут порождать разные евклидовы проекции начала координат на линейное многообразие.

Дифференцируемая выпуклая функция имеет минимум на линейном многообразии Y в данной точке, если в этой точке производная данной функции по любому направлению из линейного подпространства S равна нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Вектор $y \in Y$ будет решением задачи* (8) *при $f = f_h$ для данного $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ в том и только в том случае, если при любом $s \in S$ $\sum_{j=1}^{n} h_j y_j s_j = 0$.*

Следующие две теоремы устанавливают связь октаэдрических и евклидовых проекций с Парето-оптимальными решениями.

Функция $\varphi_h(y)$ является взвешенной с положительными весами суммой целевых функций многокритериальной задачи (4). Поэтому при $f = \varphi_h$ для любого $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ решением задачи (8) будут Парето-оптимальные решения задачи (4). Справедлива

Теорема 3. *При любом $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ $Y(\varphi_h) \subseteq Q$.*

Функция $f_h(y)$ является взвешенной с положительными весами суммой возрастающих преобразований (возведением в квадрат при неотрицательных значениях) целевых функций многокритериальной задачи (4). Поэтому при $f = f_h$ для любого $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ решения задачи (8) будут также Парето-оптимальными решениями задачи (4). Справедлива

Теорема 4. *При любом $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ $y(f_h) \in Q$.*

3. Строение множества Парето-оптимальных решений

Прежде чем рассматривать строение множеств октаэдрических и евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие, исследуем структуру множества Парето-оптимальных решений задачи (4), в котором согласно теоремам в конце предыдущего раздела находятся октаэдрические и евклидовы проекции. Сначала введем некоторые определения, связанные с возможными соотношениями наборов номеров двух векторов из Y с положительными и отрицательными компонентами.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $x \in Y$, $y \in Y$.

1. Векторы x и y будем называть *векторами с одинаковыми наборами*, если

$$J_+(x) = J_+(y), \qquad J_-(x) = J_-(y). \tag{11}$$

2. Векторы x и y будем называть *векторами с различающимися наборами*, если для них не выполняются равенства (11).

3. Вектор x будем называть *вектором с суженными относительно y наборами*, если

$$J_+(x) \subseteq J_+(y), \qquad J_-(x) \subseteq J_-(y), \qquad J(x) \subset J(y). \tag{12}$$

4. Вектор y будем называть *вектором с расширенными относительно x наборами*, если для этих векторов выполняются соотношения (12).

5. Вектор y из Y будем называть *вектором с несужаемыми наборами*, если не существует в Y вектора x, при котором выполняются соотношения (12).

6. Пусть L — некоторое множество векторов из $\mathbb{R}^n$. Вектор x из L будем называть *вектором с нерасширяемыми в множестве L наборами*, если не существует в L вектора y, при котором выполняются соотношения (12).

Лемма 5. *Множество особых векторов линейного многообразия и множества векторов линейного многообразия с несужаемыми наборами совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $y \in B$, то не существовует вектора y из Y, при котором выполняются соотношения (12), поскольку последнее из соотношений в (12) противоречит условию $y \in B$ по определению B. Поэтому y будет вектором линейного многообразия с несужаемыми наборами.

Пусть y — вектор из множества векторов Y с несужаемыми наборами. Предположим, что $y \notin B$. Тогда согласно определению B существует вектор $z \in B$ такой, что $J(z) \subset J(y)$. Следовательно, для вектора $s = z - y$ выполняются соотношения

$$J(s) \subseteq J(y), \tag{13}$$

$$(J_+(s) \cap J_-(y)) \cup (J_-(s) \cap J_+(y)) \neq \varnothing. \tag{14}$$

Из (13) следует, что при достаточно малых положительных λ для вектора $x = y + \lambda s$ будут выполняться первые два соотношения в (12). Из (14) следует, что существует максимальное значение λ, при котором выполняются первые два соотношения в (12). В этом случае одно из этих двух соотношений выполняется в строгой форме. Это означает выполнение для вектора x всех трех соотношений в (12), что противоречит исходному условию принадлежности вектора y множеству векторов Y с несужаемыми наборами. Предположение неверно. Рассматриваемый вектор y должен находиться в B.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $y \in Q$, то любой вектор из Y с одинаковыми с y или с суженными относительно y наборами будет находиться в Q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 1. Пусть $y \in Q$ и x — вектор из Y с одинаковыми или суженными относительно y наборами. В обоих случаях

$$J_+(x) \subseteq J_+(y), \qquad J_-(x) \subseteq J_-(y). \tag{15}$$

Предположим, что $x \notin Q$. Тогда при некотором $s \in S$ должны выполняться соотношения (5). В силу (15) эти же соотношения будут выполняться при замене вектора x на вектор y. Следовательно, $y \notin Q$, что противоречит исходному условию. Предположение неверно.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Любой вектор y из Q, не принадлежащий B, представляется в виде выпуклой комбинации векторов из B с суженными относительно y наборами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in Q$, $y \notin B$ и K — конечный набор векторов из Q с одинаковыми или суженными относительно y наборами, в выпуклой оболочке которых находится вектор y. Можем считать, что изначально K состоит из одного рассматриваемого вектора y. Пусть x — вектор из K, не находящийся в B. Следовательно, существует $d \in B$, при котором $J(d) \subset J(x)$. Положим $s = x - d$. Отметим, что

$$J(s) \neq \varnothing, \qquad J(s) \subset J(x). \tag{16}$$

Положим $\lambda_1 = \max\{\lambda\colon x_j + \lambda s_j \geq 0,\ j \in J_+(x);\ x_j + \lambda s_j \leq 0,\ j \in J_-(x)\}$, $\lambda_2 = \max\{\lambda\colon x_j - \lambda s_j \geq 0,\ j \in J_+(x);\ x_j - \lambda s_j \leq 0,\ j \in J_-(x)\}$ и определим векторы $x^1 = x + \lambda_1 s$, $x^2 = x - \lambda_2 s$. Отметим, что из (16) и леммы 1 следует, что величины λ_1, λ_2 существуют. Эти величины обе положительные. Носители векторов x^1 и x^2 строго включены в носитель вектора x, т. е. $J(x^1) \subset J(x)$, $J(x^2) \subset J(x)$. При этом $J_+(x^1) \subseteq J_+(x)$, $J_-(x^1) \subseteq J_-(x)$, $J_+(x^2) \subseteq J_+(x)$, $J_-(x^2) \subseteq J_-(x)$. Вектор x будет выпуклой комбинацией векторов x^1 и x^2: $x = \gamma x^1 + (1-\gamma)x^2$ при $\gamma = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$. Исключим из K вектор x и включим в этот набор векторы x^1 и x^2. Новый набор будет обладать теми же свойствами, при этом векторы x^1 и x^2 имеют суженные наборы относительно ранее находившегося в K вектора x. Поэтому через конечное число таких замен получим в K только опорные векторы.

Лемма доказана.

Лемма 8. *В множестве Q существует конечное число векторов с нерасширяемыми в множестве Q наборами, которые имеют различающиеся наборы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Номер каждой компоненты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ может находиться в одном и только в одном из множеств $J_+(x)$, $J_-(x)$, $J_0(x)$. Число различающихся по этим множествам векторов в $\mathbb{R}^n$ равно 3^n. Это число является верхней оценкой для числа векторов с различающимися наборами в любом подмножестве $\mathbb{R}^n$, в том числе для множества векторов из Q с нерасширяемыми наборами.

Лемма доказана.

Пусть l — максимальное число векторов в Q с нерасширяемыми в рамках Q наборами, которые имеют различающиеся наборы. Обозначим такие векторы q^i, $i = 1, \ldots, l$. Для каждого $q^i \notin B$ существует конечное множество векторов из B с суженными относительно q^i наборами, что следует из теоремы 1 и леммы 5. Пусть Q_i — выпуклая оболочка таких векторов. Если $q^i \in B$, то считаем множество Q_i состоящим из одного вектора. Заметим, что все векторы из Q_i будут иметь либо одинаковые с q^i, либо суженные относительно q^i наборы. Поэтому, согласно лемме 6, $Q_i \subseteq Q$, $i = 1, \ldots, l$.

Согласно лемме 7 любой вектор из Q находится в каком-либо из множеств Q_i, $i = 1, \ldots, l$. Итак, получим доказательство соотношения

$$\bigcup_{i=1}^{l} Q_i = Q. \tag{17}$$

Отсюда следует несколько важных свойств множества Парето-оптимальных решений.

Во-первых, из (17) вытекает их замкнутость, поскольку политопы и, следовательно, объединения их конечного числа являются замкнутыми множествами. Справедлива

Теорема 5. $\operatorname{cl} Q = Q$.

Во-вторых, из (17) вытекает ограниченность множества Парето-оптимальных решений. Все они находятся в выпуклой оболочке опорных векторов. Учитывая теорему 2, получаем, что выпуклая оболочка опорных векторов является минимальным выпуклым множеством, содержащим Q. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 6. $Q \subseteq \operatorname{co} B$.

Теорема 7. $\operatorname{co} Q = \operatorname{co} B$.

4. Множество евклидовых проекций

Множество всех евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие Y обозначим $P_2 = \{y(f_h)\colon h \in \mathbb{R}^n_{++}\}$.

Согласно теореме 4 все евклидовы проекции находятся среди Парето-оптимальных решений многокритериальной задачи (4)

$$P_2 \subseteq Q. \tag{18}$$

Как было показано в [3; 4] на примерах, множество P_2 может быть незамкнутым, и в этом несложно убедиться, рассмотрев даже случай $n = 2$. Уже по этой причине соотношение (16) может не выполняться в виде равенства, так как Q — замкнутое множество. Одним из результатов данного раздела будет доказательство того, что возможная незамкнутость P_2 является единственной причиной возможного несовпадения P_2 и Q.

В данном разделе в целях упрощения записи евклидову проекцию при использовании евклидовой нормы с вектором весовых коэффициентов $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ будем обозначать $x(h)$. Итак, полагаем $x(h) = x(f_h)$.

Лемма 9. *Пусть задана последовательность векторов $h^\tau \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\tau = 0, 1, 2, \ldots$ такая, что при $\tau \to \infty$*

$$h_j^\tau \to \infty, \qquad j \in H, \tag{19}$$

$$h_j^\tau \to h_j, \qquad j \in L, \tag{20}$$

где $h_j > 0$ для всех $j \in L$. Здесь $H,\ L$ — некоторое разбиение множества номеров компонент n-мерного вектора $L \cap H = \varnothing$, $L \cup H = \{i = 1, \ldots, n\}$. Пусть существует вектор

$$x = \arg\min\Big\{\sum_{j \in L} h_j\,(y_j)^2\colon y \in Y,\ y_j = 0,\ j \in H\Big\}. \tag{21}$$

Тогда $\lim\limits_{\tau \to \infty} x\,(h^\tau) = x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, отметим, что коль скоро определенный в (21) вектор x существует, то он единственный, обладающий указанными свойствами в силу строгой выпуклости квадратичной функции вещественного числа.

Так как для всех τ выполняется неравенство

$$\sum_{j \in H} h_j^\tau\,(x_j\,(h^\tau))^2 + \sum_{j \in L} h_j^\tau\,(x_j\,(h^\tau))^2 \le \sum_{j \in L} h_j^\tau\,(x_j)^2, \tag{22}$$

то в силу (19) $x_j\,(h^\tau) \to 0,\ \tau \to \infty,\ j \in H$.

Поскольку согласно теореме 4 векторы $x(h^\tau)$ находятся в ограниченном множестве Q, то существуют их предельные значения при $\tau \to \infty$. Для каждого предельного значения в силу (19), (20) неравенство (22) будет переходить в равенство. Следовательно, этим предельным значением может быть только определенный в (21) вектор x.

Лемма доказана.

Заметим, из леммы 9 в случае $H = \varnothing$ вытекает непрерывность вектор-функции $x(h)$ при $h \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Лемма 10. *Любой вектор $x \in Q$ с нерасширяемыми в рамках Q наборами является евклидовой проекцией начала координат на линейное многообразие Y.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in Q$ и в Q не существует вектора y, при котором для данного x выполняются соотношения (12). Поскольку $x \in Q$, то согласно лемме 2 существует вектор $z \in S^\perp$, при котором для данного x выполняются соотношения (7). Положим

$$h_j = z_j \,/\, x_j, \qquad j \in J(x), \tag{23}$$

$$h_j = t, \qquad j \in J_0(x) \tag{24}$$

при некотором $t > 0$. Для доказательства леммы достаточно установить, что $x = x(h)$ при векторе h с компонентами (23), (24).

Предположим обратное. Пусть существует вектор $y \in Y$ такой, что

$$f_h(y) < f_h(x). \tag{25}$$

Сначала рассмотрим возможный случай

$$J(y) \subseteq J(x). \tag{26}$$

Положим $s = y - x$. Согласно (25), (26) $J(s) \neq \varnothing$, $J(s) \subseteq J(x)$. При этом

$$(\nabla f_h(x), s) < 0. \tag{27}$$

Так как $\nabla_j f_h(x) = 0$, $j \in J_0(x)$, $\nabla_j f_h(x) = h_j x_j$, $j \in J(x)$ и в силу (23) $h_j x_j = z_j$, $j \in J(x)$, то неравенство (27) означает, что $(z^T, s) < 0$, а это противоречит соотношениям $s \in S$, $z \in S^\perp$. Полученное противоречие доказывает, что не существует вектора $y \in Q$, при котором выполняются оба соотношения (25), (26). Это также означает, что вектор x является решением задачи

$$\sum_{j \in J(x)} h_j\, (y_j)^2 \to \min, \qquad y \in Y, \qquad y_j = 0, \qquad j \in J_0(x).$$

Пусть y^t — вектор $x(h)$ при h, определяемом по правилам (23), (24), где величина t рассматривается как положительный, возрастающий до ∞ параметр. Предположим (в отличие от условия (26)), что при начальном и последующих значениях t

$$J(y^t) \cap J_0(x) \neq \varnothing. \tag{28}$$

В силу леммы 9 $y^t \to x$ при $t \to \infty$. Поэтому найдется такое значение t, при котором $J_+(x) \subseteq J_+(y^t)$, $J_-(x) \subseteq J_-(y^t)$. При этом согласно (28) хотя бы одно из этих соотношений будет выполняться в строгой форме. Поскольку согласно теореме 4 $y^t \in Q$ при данном t, то полученные соотношения будут противоречить тому, что x — вектор из Q с нерасширяемыми в рамках Q наборами.

Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения (25).

Лемма доказана.

Векторы Q с нерасширяемыми наборами в рамках Q образуют относительную внутренность введенных в предыдущем разделе политопов Q_i, $i = 1, \ldots, l$. Лемма 10 означает, что $\operatorname{ri} Q_i \subseteq P_2$, $i = 1, \ldots, l$. В силу (17), (18) $\bigcup_{i=1}^{l} \operatorname{ri} Q_i \subseteq P_2 \subseteq Q$. Так как $\operatorname{cl}\operatorname{ri} Q_i = Q_i$, то получаем следующее утверждение.

Теорема 8. $\mathrm{cl}\, P_2 = Q$.

Из этой теоремы и установленной в результате доказательства леммы 9 непрерывности зависимости евклидовых проекций от вектора весовых коэффициентов $h \in \mathbb{R}^n_{++}$, вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. *Множества P_2 и Q являются связными.*

5. Множество октаэдрических проекций

Множество всех октаэдрических проекций начала координат на линейное многообразие Y обозначим $P_1 = \bigcup_{h \in \mathbb{R}^n_{++}} Y(\varphi_h)$. Согласно теореме 3 все октаэдрические проекции находятся среди Парето-оптимальных решений многокритериальной задачи (4), т. е. $P_1 \subseteq Q$. Одним из результатов данного раздела будет доказательство обратного соотношения, означающего, что множества P_1 и Q совпадают.

Из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть задан вектор $h \in \mathbb{R}^n_{++}$. Если $y \in Y(\varphi_h)$, то любой вектор x из Y с одинаковыми или суженными относительно y наборами также будет находиться среди октаэдрических проекций при данном векторе весовых коэффициентов.*

Доказательство. Если для вектора y при $s \in S$ выполняется неравенство (9), то оно будет выполняться при замене y на другой вектор x из Y с одинаковыми с y или суженными относительно y наборами. Действительно, при замене на вектор с одинаковыми наборами величина в левой части неравенства (9) не изменится. При замене y на вектор x с суженными наборами величина в левой части неравенства (9) при одном и том же $s \in S$ либо не изменится, либо возрастет. В обоих случаях при замене вектора y на вектор x неравенство (9) сохраняется. Согласно лемме 3 $x \in Y(\varphi_h)$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, учитывая леммы 6, 7, получаем следующее важное свойство октаэдрических проекций, сформулированное в приведенной ниже теореме. Это утверждение было доказано в [10] для случая "обыкновенной" октаэдрической нормы (т. е. с единичными весами) применительно к проблеме оценки параметров линейной регрессии.

Теорема 11. *При любом $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ множество октаэдрических проекций $Y(\varphi_h)$ содержит особые векторы, т. е. $Y(\varphi_h) \cap B \neq \varnothing$.*

Теорему 11 можно интерпретировать как частный случай введенного С. Н. Черниковым "принципа граничных решений" [11]. Согласно этой теореме, если $Y(\varphi_h)$ состоит только из одного вектора, то это будет вектор из B. Если же $Y(\varphi_h)$ содержит не один вектор, то в множество $Y(\varphi_h)$ входят несколько векторов из B. Учитывая лемму 7, получаем, что если y — вектор из $Y(\varphi_h)$ с нерасширяемыми в рамках $Y(\varphi_h)$ наборами, то в $Y(\varphi_h)$ будут входить все векторы из B, имеющие суженные относительно y наборы.

Лемма 11. *Любой вектор $x \in Q$ с нерасширяемыми в рамках Q наборами является октаэдрической проекцией начала координат на линейное многообразие Y.*

Доказательство. Пусть $x \in Q$ и в Q не существует вектора y, при котором выполняется соотношение (12). В силу леммы 10 вектор x будет евклидовой проекцией начала координат на Y при весовых коэффициентах (23), (24). Положим

$$h^1_j = h_j\,|x_j|, \qquad j \in J(x), \tag{29}$$

$$h^1_j = t, \qquad j \in J_0(x).$$

Предположим, что вектор x не является октаэдрической проекцией с вектором весовых коэффициентов h^1. Из леммы 3 следует, что найдется вектор $s \in S$, при котором

$$\sum_{j \in J(x)} \operatorname{sign}(x_j) h_j^1 s_j + \sum_{j \in J_0(x)} t_j \, |s_j| < 0.$$

Так как

$$t_j x_j s_j \le t_j \, |s_j|, \quad j \in J_0(x), \quad \operatorname{sign}(x_j) h_j^1 s_j = h_j x_j s_j, \quad j \in J(x),$$

то из (29) следует, что $\sum h_j x_j s_j < 0$. Это по лемме 4 означает, что x не является евклидовой проекцией с вектором весовых коэффициентов h. Получаем противоречие с исходным условием, которое доказывает ошибочность предположения.

Лемма доказана.

Учитывая теоремы 3, 10, получаем следующее утверждение.

Теорема 12. $P_1 = Q$.

Заключение

Отметим некоторые результаты представленных исследований.

1. Наиболее общим подходом к формулировке проблемы определения наименее удаленной от начала координат точки линейного многообразия, очевидно, следует считать поиск Парето-оптимальных решений многокритериальной задачи (4) — минимизации абсолютных значений всех компонент вектора. Как было доказано, множество Парето-оптимальных решений Q является ограниченным, причем выпуклая оболочка этого множества представляет собой политопом — выпуклой оболочкой конечного числа векторов. Этот конечный набор векторов составляют векторы многообразия с минимальным носителем B. На основе этого можно, например, оценивать диапазоны возможных вариаций отдельных компонент вектора переменных в рамках множества Q.

Множество Q может быть невыпуклым. Вместе с тем оно обладает рядом свойств, присущих выпуклым множествам. В частности, как было доказано, оно является связным. Важными особенностями множества Q являются его замкнутость и возможность его представления в виде объединения конечного числа политопов.

2. Как было установлено, множество октаэдрических проекций P_1 начала координат на линейное многообразие, образуемое в результате варьирования вектора весовых коэффициентов $h \in \mathbb{R}^n_{++}$, совпадает с множеством Парето-оптимальных решений Q. Правда, это совпадение обусловлено неоднозначностью октаэдрических проекций при некоторых весовых коэффициентах $h \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Если октаэдрическая проекция при данном $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ единственна, то это будет вектор из множества B. Остальные векторы из Q могут быть получены только в том случае, если при данном h октаэдрическая проекция неединственная. В этом случае обязательно среди проекций окажутся векторы из B.

Естественно, что в силу “скачкообразного” изменения и неединственности значений при некоторых h из $\mathbb{R}^n_{++}$ октаэдрических проекций не может быть и речи о непрерывном их изменении при изменении вектора весовых коэффициентов h.

3. Множество евклидовых проекций P_2 может совпадать только с частью множества Q, причем эта “часть” сколь угодно близка ко всему множеству Q. Замыкания евклидовых проекций $\operatorname{cl} P_2$, как было доказано, совпадает с Q и, следовательно, с множеством октаэдрических проекций P_1. Это означает, что любой вектор из Q и, следовательно, из P_1 можно получить с любой требуемой точностью, используя метод наименьших квадратов за счет варьирования весовых коэффициентов.

При этом евклидовы проекции имеют ряд преимуществ по сравнению с октаэдрическими проекциями. Во-первых, евклидова проекция при любом векторе весовых коэффициентов

$h \in \mathbb{R}^n_{++}$ единственна. Она непрерывно изменяется при изменениях вектора h. Наконец, она удобна для вычисления. Задача нахождения евклидовой проекции с любым вектором $h \in \mathbb{R}^n_{++}$ сводится к решению системы линейных уравнений.

Приведенные здесь результаты исследований могут быть полезны не только для математического моделирования, но и для вычислительной математики. Уместно отметить, что началом исследований послужило доказательство ограниченности множества евклидовых проекций точки на линейное многообразие [12]. Этот факт в [12] и в ряде последующих работ использовался для теоретического обоснования алгоритмов внутренних точек.

Одна из особенностей представленных здесь исследований по сравнению с ранее выполненными в [5;6] состоит в активном использовании теорем об альтернативных системах линейных неравенств (лемма 2). Это отражает высокую важность данных теорем, в том числе как инструмента теоретических исследований. Уместно отметить, что теоремы об альтернативных системах линейных неравенств равносильны использованным С. Н. Черниковым теоремам о неравенствах-следствиях [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
2. **Батреева И.В., Беденков А.Р., Зоркальцев В.И., Садов С.Л.** Согласование частных прогнозов в балансовых моделях. Сыктывкар: Коми НЦ УрО АН СССР, 1990. 27 с.
3. **Зоркальцев В.И., Черникова Л.И.** Рента, налоги и структура цен. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1991. 22 с.
4. **Зоркальцев В.И.** Метод наименьших квадратов и его конкуренты. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1993. 30 с.
5. **Зоркальцев В.И.** Наименее удаленные от начала координат точки линейного многообразия // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 5. С. 801–810.
6. **Зоркальцев В.И.** Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск: Наука, 1995. 220 с.
7. **Зоркальцев В.И.** Проекции начала координат на полиэдр // Методы оптимизации и их приложения: сб. тр. XV Байкальской междунар. школы-семинара. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2011. Т. 2. Мат. программирование. С. 96–101.
8. **Зоркальцев В.И.** Наименее удаленные от начала координат решения системы линейных неравенств // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. мат. Иркутск: ИГУ, 2011. Т. 4, № 2. С. 102–103.
9. **Зоркальцев В.И., Киселёва М.А.** Системы линейных неравенств (учеб. пособие). Иркутск: ИГУ, 2007. 128 с.
10. **Лакеев А.В., Носков С.И.** Метод наименьших модулей для линейной регрессии: число нулевых ошибок аппроксимации // Методы оптимизации и их приложения: сб. тр. XV Байкальской междунар. школы-семинара. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2011. Т. 2. Мат. программирование. С. 117–120.
11. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 480 с.
12. **Зоркальцев В.И.** Относительно внутренняя точка оптимальных решений. Сыктывкар: Коми фил. АН СССР, 1984. 48 с.

Зоркальцев Валерий Иванович
д-р техн. наук, профессор
зав. лабораторией
Институт систем энергетики СО РАН
e-mail: zork@isem.sei.irk.ru

Поступила 12.01.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.17+512.54

О ГРАФЕ КОММУТИРОВАНИЯ TI-ПОДГРУПП В УНИТАРНЫХ ГРУППАХ[1]

Н. Д. Зюляркина

В данной работе исследуется граф коммутирования $\Gamma(A)$ циклической TI-подгруппы A порядка 4 в конечной группе G с квазипростой обобщенной подгруппой Фиттинга $F^*(G)$. Доказано, что если $F^*(G)$ — унитарная группа, то граф $\Gamma(A)$ является кокликой или реберно регулярным, но не кореберно регулярным графом.

Ключевые слова: конечная группа, циклическая TI-подгруппа, граф коммутирования.

N. D. Zyulyarkina. On the commutation graph of cyclic TI-subgroups in unitary groups.

In this work the commutation graph $\Gamma(A)$ of a cyclic TI-subgroup A of order 4 in a finite group G with quasi-simple generalized Fitting subgroup $F^*(G)$ is investigated on subject of the symmetric property. We prove that, if $F^*(G)$ is a unitary group, then the graph $\Gamma(A)$ is either a coclique or an edge-regular but not coedge-regular graph.

Keywords: finite group, cyclic TI-subgroup, commutation graph.

Введение

Подгруппа A группы G называется *TI-подгруппой* в G, если $A \cap A^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus N_G(A)$. В случае, когда A — TI-подгруппа четного порядка конечной группы, A называется *подгруппой корневого типа*, если индекс $|A : N_A(A^g)|$ нечетен для любого элемента $g \in G$, для которого число $|N_A(A^g)|$ четно.

Конечные группы, содержащие 2-группу A, являющуюся TI-подгруппой, активно изучались, и в настоящий момент наименее исследованными остались случаи, когда A либо циклическая, либо элементарная абелева. Заметим, что если A — циклическая 2-группа, то достаточно изучить ситуацию, когда $|A| = 4$.

В дальнейшем будем считать, что G — конечная группа, $A \leq G$, $A = \langle a \rangle \simeq Z_4$ и $a_0 = a^2$. Непосредственно из определений вытекают следующие две леммы.

Лемма 1. *Подгруппа A является TI-подгруппой в G тогда и только тогда, когда она нормальна в $C_G(a_0)$.*

Лемма 2. *Подгруппа A является подгруппой корневого типа в G тогда и только тогда, когда условие $[a_0, a_0^g] = 1$ для $g \in G$ влечет $[A, A^g] = 1$.*

Далее будем предполагать, что A есть TI-подгруппа в G.

Одним из основных методов исследования групп, содержащих TI-подгруппу, является индукция. Кроме того, существенно различаются случаи, когда G содержит компоненты, а когда нет. Справедлива

Лемма 3 [1, доказательство леммы 1.1]. *Подгруппа A нормализует любую компоненту группы G.*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Ввиду леммы 3 при исследовании групп, содержащих компоненты, вопрос сводится к изучению групп вида $G = F^*(G)A$, где $F^*(G)$ — квазипростая группа. Поэтому для построения индукционных предположений полезно иметь информацию о том, для каких известных квазипростых групп возможна такая конструкция и какими свойствами в таких группах обладает подгруппа A.

В дальнейшем будем предполагать, что группа G представима в виде $G = XA$, где $X = F^*(G)$ — частное $SU_n(q)$ по ее центральной подгруппе порядка d, q нечетно, а A — циклическая TI-подгруппа порядка 4 в G, не лежащая в $Z(F^*(G))$. Через X^* обозначим множество таких расширений группы X, что для группы $\tilde{X}$ из X^* любой элемент из $\tilde{X} - X$ индуцирует на X внешний внутренне-диагональный автоморфизм.

Возможности для $G = F^*(G)A$ описаны в [2; 3; 6]. Как следует из описания, в большинстве случаев элемент a индуцирует на $F^*(G)$ внутренний или внутренне-диагональный автоморфизм, и лишь для некоторых классических групп небольшой размерности a индуцирует внутренне-полевой или внутренне-графовый автоморфизм.

Для инволюции $w \in GL_n(q)$ обозначим через ${}_w$ группу $C_{GL_n(q)}(w)$, а через V_w^+ и V_w^- — связанные с ней подпространства, определенные в [4].

Для изучения групп с заданными свойствами можно исследовать связанные с ними комбинаторные объекты (графы, схемы, геометрии и др.) Одним из таких объектов является граф коммутирования. Мы рассматриваем только неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Если G — группа и A — TI-подгруппа группы G, то *граф коммутирования* $\Gamma(A) = \Gamma_G(A)$ определяется как граф, в котором вершинами служат подгруппы, сопряженные с A в G, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они различны и поэлементно коммутируют.

Граф коммутирования инволюций $\Gamma(a_0)$ определяется как $\Gamma(\langle a_0 \rangle)$. Заметим, что если A является подгруппой корневого типа, то граф $\Gamma(A)$ будет изоморфен графу $\Gamma(a_0)$.

Граф Γ будем называть *полным графом* или *кликой*, если в нем любые две различные вершины смежны. Граф Γ называется *кокликой*, если в нем вершины попарно не смежны.

Окрестностью вершины u графа Γ называется множество $[u]$ всех вершин графа Γ, смежных с u. Для двух смежных (соответственно несмежных) вершин u и v графа Γ обозначим через $\lambda(u, v)$ (соответственно $\mu(u, v)$) число элементов в $[u] \cap [v]$.

Особое внимание в теории графов уделяется графам с различными условиями симметричности, описанными в [4]. В данной статье продолжается изучение графов коммутирования TI-подгрупп в группах, близких к простым, на предмет их симметричности.

Доказана

Теорема 1. *Пусть $G = XA$, X — частное группы $SU_n(q)$ по ее центральной подгруппе, q нечетно и либо $G \notin X^*$, либо a_0 соответствует инволюции типа 1 или $n-1$ из $U_n(q)$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) $n = 2$, *и* $\Gamma(A)$ *является кокликой*;

(2) $n \geq 3$, $G \in X^*$, $\Gamma(A)$ *является вершинно и реберно транзитивным графом диаметра* 2, *но не является кореберно регулярным графом, причем для двух несмежных вершин c и g графа $\Gamma(A)$ число $\mu(c, g)$ при четном n равно $q^{n-3}(q^{n-2}-1)/(q+1)$ или $q^{n-2}(q^{n-3}+1)/(q+1)$, а при нечетном n равно $q^{n-3}(q^{n-2}+1)/(q+1)$ или $q^{n-2}(q^{n-3}-1)/(q+1)$*;

(3) $n \geq 3$, $G \notin X^*$, *и* $\Gamma(A)$ *является кокликой.*

1. Свойства унитарных пространств

В этом разделе будем считать, что V — это векторное пространство над полем $k = GF(q^2)$, q нечетно, с определенной на нем эрмитовой формой $(*, *)$; это пространство будем называть унитарным. Если $\alpha \in k$, то через $\bar{\alpha}$ будем обозначать образ α при действии полевого автоморфизма порядка 2.

Если M — непустое подмножество из V, то *ортогональным дополнением к* M будем называть множество $M^{\perp} = \{y \in V \mid \forall x \in M\ (x, y) = 0\}$.

Радикалом V называется подпространство $V^* = V^{\perp}$.

Пространство V называется *невырожденным*, если $V^* = \{0\}$.

Вектор $v \in V$ называется *изотропным*, если $(v.v) = 0$.

Лемма 4. *Пусть* V *— невырожденное унитарное пространство размерности* m, *а* L *— его подпространство размерности* $m-1$. *Тогда* $dimL^* \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное и выберем в L^* два линейно независимых вектора e_1 и e_2. Пусть $V = L + \langle e \rangle$. Ввиду невырожденности V получим, что $(e_1, e) = \alpha \neq 0$ и $(e_2, e) = \beta \neq 0$. Пусть $e' = \beta e_1 - \alpha e_2$. Заметим, что $e' \in L^*$ и $e' \neq 0$. Очевидно, что $(e', e) = 0$ и, следовательно, $e' \in V^*$. Противоречие с невырожденностью V.

Лемма 5. *Пусть* V *— невырожденное унитарное пространство размерности* m. *Тогда существует его подпространство* L *размерности* $m-1$ *такое, что* $dimL^* = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

С л у ч а й 1. Если m четно, то в V существует базис $\{e_1, \ldots e_{m/2}, e'_1 \ldots e'_{m/2}\}$ такой, что $(e_i, e'_i) = 1\ \forall i = 1 \ldots m/2$ и $(v, w) = 0$ для всех остальных базисных векторов v и w. Тогда подпространство $L = \langle e_1, \ldots e_{m/2}, e'_1 \ldots e'_{(m/2)-1} \rangle$ будет требуемым, так как $e_{m/2} \in L^*$ и по предыдущей лемме $dimL^* \leq 1$.

С л у ч а й 2. Если m нечетно, то выберем в V неизотропный вектор v. Будет справедливо следующее представление: $V = \langle v \rangle \perp \langle v \rangle^{\perp}$. Заметим, что $\langle v \rangle^{\perp} = V'$ является невырожденным унитарным пространством четной размерности $m-1$. Следовательно, в V' есть подпространство L' размерности $m-2$ такое, что $dimL'^* = 1$. В качестве L можно взять $\langle v \rangle \perp L'$.

Лемма 6. *Пусть* V *— невырожденное унитарное пространство размерности* m *над полем* $k = GF(q^2)$, q *нечетно и* N *— количество неизотропных векторов в* V. *Тогда имеет место один из следующих случаев*:

(a) m *четно, и* $N = q^{m-1}(q-1)(q^m-1)$;

(b) m *нечетно, и* $N = q^{m-1}(q-1)(q^m+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим элементы из k в виде $x + y\rho$, где x и y содержатся в $k_0 = GF(q)$, а $\rho^2 = \gamma$, $\gamma \in (k_0 - k_0^2)$. Тогда для $\alpha = x + y\rho$ получим $\bar{\alpha} = x - y\rho$. Подсчитаем N' — количество изотропных векторов в V. Зафиксируем в V ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_m$. Пусть $v = \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_m e_m$ — вектор из V и $\alpha_i = x_i + y_i\rho$, $x_i, y_i \in k_0$. Вектор v изотропен тогда и только тогда, когда $x_1^2 + \ldots + x_m^2 - \gamma(y_1^2 + \ldots + y_m^2) = 0$. Число решений полученного уравнения над k_0 по [5, теорема 6.26] равно $q^{2m-1} + (q-1)q^{m-1}$ при четном m и $q^{2m-1} - (q-1)q^{m-1}$ при нечетном m. Учитывая, что в V содержится q^{2m} векторов, получим требуемое. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1 в случае, когда a индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм

В этом разделе будем считать, что X — частное $SU_n(q)$ по центральной подгруппе порядка d, $G \in X^*$, a_0 соответствует инволюции типа 1 или $n-1$ из $U_n(q)$ и ввиду [3] выполняется условие $q + 1 \equiv 0(4)$.

Теорема 2. *Если* $n = 2$, *то граф* $\Gamma(A)$ *является кокликой. Если* $n \geq 3$, *то* $\Gamma(A)$ *является вершинно и реберно транзитивным графом диаметра* 2, *но не является кореберно регулярным графом, причем для двух различных несмежных вершин* c *и* g *возможны следующие значения* $\mu(c, g)$:

при четном n
(1) $\mu(c,g) = q^{n-3}(q^{n-2}-1)/(q+1)$,
(2) $\mu(c,g) = q^{n-2}(q^{n-3}+1)/(q+1)$;

при нечетном n
(1) $\mu(c,g) = q^{n-3}(q^{n-2}+1)/(q+1)$,
(2) $\mu(c,g) = q^{n-2}(q^{n-3}-1)/(q+1)$.

Доказательство теоремы 2 проведем в виде последовательности лемм.

Лемма 7. *Подгруппа A является TI-подгруппой корневого типа за исключением случая, когда $X = PSU_2(q)$.*

Доказательство. При указанных ограничениях $C_G(a_0) = C_G(a)$, и лемма следует из леммы 2.

Лемма 8. *Если $X = PSU_2(q)$, то $\Gamma(A)$ является кокликой.*

Доказательство. Из [3, доказательство теоремы 2.1] следует, что $C_G(a_0)$ является диэдральной группой. Поэтому A является единственной подгруппой из A^G, попавшей в $C_G(a_0)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $G = XA = XB$, где a_0 соответствует инволюции типа 1 из $U_n(q)$, B — циклическая TI-подгруппа порядка 4 из G с инволюцией b_0, соответствующей инволюции типа $n-1$ $U_n(q)$. Тогда графы $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ изоморфны.*

Доказательство. Если $n = 2$, то $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ совпадают. Пусть $n > 2$, a_0 соответствует инволюции u типа 1 из $U_n(q)$, а b_0 соответствует инволюции v типа $n-1$ из $U_n(q)$. Можно считать, что $v = -I_V u$. Для любого $g \in G$ будет выполняться равенство $v^g = -I_V u^g$. Очевидно, что отображение $\varphi(u^g) = -I_V u^g$ задает требуемый изоморфизм графов. Лемма доказана.

Далее будем считать, что a_0 соответствует инволюции типа 1 из $U_n(q)$ и $n > 2$. Через Γ обозначим граф $\Gamma(a_0)$, изоморфный $\Gamma(A)$.

Лемма 10. *Пусть (u,v) и (u',v') — две пары различных коммутирующих инволюций типа 1 из $U_n(q)$. Тогда они сопряжены с помощью элемента из $SU_n(q)$.*

Доказательство. По [7, разд. 3C] инволюции одинакового типа из $GU_n(q)$ сопряжены посредством элемента из $SU_n(q)$. Поэтому существует такой элемент x из $SU_n(q)$, что $u^x = u'$. Заметим, что v^x централизует u'. По [7, разд. 3C] заключаем, что v^x и v содержатся в $GU(V^+_{u'})$ и поэтому сопряжены посредством элемента y из $SU(V^+_{u'})$, который централизует u'. Окончательно получаем, что $(u,v)^{xy} = (u',v')$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Граф Γ является вершинно и реберно транзитивным.*

Доказательство. Заметим, что любой элемент группы G индуцирует на Γ автоморфизм посредством сопряжения. Вершинная транзитивность следует из определения Γ, а реберная транзитивность получается из предыдущей леммы.

Следствие. *Граф Γ является реберно регулярным.*

Лемма 12. *Пусть u и v — инволюции типа 1 из $U_n(q)$. Они коммутируют тогда и только тогда, когда V^-_v является неизотропным подпространством из V^+_u.*

Доказательство. Это следует из строения централизатора инволюции в $GU_n(q)$, описанного в [7, разд. 3C]. Лемма доказана.

Лемма 13. *Граф Γ не является кореберно регулярным, и для несмежных вершин c и g возможны следующие значения для $\mu(c,g)$:*

при четном n
(1) $\mu(c,g) = q^{n-3}(q^{n-2}-1)/(q+1)$,
(2) $\mu(c,g) = q^{n-2}(q^{n-3}+1)/(q+1)$;

при нечетном n
(1) $\mu(c,g) = q^{n-3}(q^{n-2}+1)/(q+1)$,
(2) $\mu(c,g) = q^{n-2}(q^{n-3}-1)/(q+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим две несмежные вершины c и g из Γ, которым соответствуют инволюции u и v типа 1 из $U_n(q)$. Пусть $L_1 = V_u^+$, $L_2 = V_v^+$, $W_1 = V_u^- = \langle w_1 \rangle$ и $W_2 = V_v^- = \langle w_2 \rangle$. Рассмотрим подпространство $L = L_1 \cap L_2$. Так как $dimL_1 = dimL_2 = n-1$, то $dimL \geq n-2$.

Случай, когда $dimL = n-1$, невозможен, так как при этом $W_1 = W_2 = L^\perp$ и $u = v$. Следовательно, подпространства L_1 и L_2 различны, и $dimL = n-2$.

С л у ч а й 1. $\langle w_1 \rangle + \langle w_2 \rangle + L = V$. Заметим, что $V = L \perp \langle w_1, w_2 \rangle$ и L является невырожденным унитарным пространством. Подсчитаем количество инволюций типа 1, централизующих u и v. Пусть t — такая инволюция. По лемме 12 t инвертирует одномерное неизотропное подпространство из L. Верно и обратное: если инволюция инвертирует одномерное неизотропное подпространство из L, то она централизует u и v. Ввиду этого для определения количества таких инволюций достаточно подсчитать число различных одномерных неизотропных подпространств из L. По лемме 6 в L будет $q^{n-3}(q-1)(q^{n-2}-1)$ неизотропных векторов при четном n и $q^{n-3}(q-1)(q^{n-2}+1)$ при нечетном n. Так как каждое неизотропное подпространство размерности 1 содержит в точности q^2-1 неизотропных векторов, то искомых подпространств будет $q^{n-3}(q^{n-2}-1)/(q+1)$ для четного n и $q^{n-3}(q^{n-2}+1)/(q+1)$ для нечетного n. Эта ситуация описана в п. (1).

С л у ч а й 2. $\langle w_1 \rangle + \langle w_2 \rangle + L \neq V$. В этом случае векторы w_1 и w_2 связаны равенством $w_2 = w_1 + e$, где $e \in L^*$. Такая ситуация возможна ввиду леммы 5.

Подсчитаем количество инволюций типа 1, централизующих u и v. Пусть t — такая инволюция. По лемме 12 t инвертирует одномерное неизотропное подпространство из L. Верно и обратное: если инволюция инвертирует одномерное неизотропное подпространство из L, то она централизует u и v. Ввиду этого для определения количества таких инволюций достаточно подсчитать число различных одномерных неизотропных подпространств из L. L является вырожденным подпространством, и $dimL^* = 1$ по лемме 4. Рассмотрим фактор-пространство $\bar{L} = L/L^*$. Тогда $\bar{L}$ невырожденно, и $dim\bar{L} = n-3$. По лемме 6 в $\bar{L}$ будет $q^{n-4}(q-1)(q^{n-2}+1)$ неизотропных векторов при четном n и $q^{n-4}(q-1)(q^{n-2}-1)$ при нечетном n. Каждому неизотропному вектору из $\bar{L}$ соответствуют в точности q^2 различных неизотропных векторов из L, а так как каждое неизотропное подпространство размерности 1 содержит в точности q^2-1 неизотропных векторов, то искомых подпространств будет $q^{n-2}(q^{n-3}+1)/(q+1)$ для четного n и $q^{n-2}(q^{n-3}-1)/(q+1)$ для нечетного n. Эта ситуация описана в п. (2).

Доказательство данной леммы завершает доказательство теоремы 2.

3. Доказательство теоремы 1 в случае, когда a индуцирует на X не внутренне-диагональный автоморфизм

В этом разделе доказывается

Теорема 3. *Пусть $G = XA$, X — частное $SU_n(q)$, q нечетно и $G \notin X^*$. Тогда $\Gamma(A)$ является кокликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [3, теорема 4.1] получим, что $F^*(G) \simeq PSU_3(5)$, $A \not\leq F^*(G)$ и a индуцирует на $F^*(G)$ внутренне-графовый автоморфизм.

Рассмотрим группу $PSU_3(5)\langle\tau\rangle = \{gZ\tau^\varepsilon\}$, где $g \in SU_3(5)$, $Z = Z(SU_3(5))$, $\varepsilon = 0, 1$ и τ — инверсно-транспонирующий автоморфизм. (Заметим, что его действие для данной группы совпадает с действием полевого автоморфизма φ порядка 2. Далее для $\lambda \in GF(5^2)$ через $\bar{\lambda}$ будем обозначать λ^φ.) Элементами матрицы g являются элементы поля $GF(5^2) = \{c + d\alpha \mid c, d \in Z_5, \alpha^2 = 2\}$.

По [3, теорема 4] элемент a представим в виде $a = gZ\tau$, где

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а инволюция a_0 имеет вид $g'Z$, где

$$g' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $B = \langle b \rangle$ — это подгруппа, сопряженная с A и $[A, B] = 1$. Представим b в виде $b = hZ\tau$, где $h \in SU_3(5)$. Так как b централизует a_0, то можно считать, что

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & 0 \\ h_3 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие $[a, b] = 1$ приведет к равенству

$$\begin{pmatrix} \bar{h}_3 & \bar{h}_4 & 0 \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_2 & h_1 & 0 \\ -h_4 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $h_3 = -\bar{h}_2$ и $h_1 = h_4 = 0$.

Так как b^2 является инволюцией, то $h_2^2 = 1$, что приводит к равенству $A = B$. Теорема 3 доказана.

Теорема 1 следует из теорем 2 и 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Плотно вложенные подгруппы с абелевым слиянием // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 19–26.
2. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Циклические TI-подгруппы порядка 4 в исключительных группах Шевалле // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 1994. Т. 3. С. 41–49.
3. **Зюляркина Н.Д.** Циклические TI-подгруппы порядка 4 в классических группах Шевалле нечетной характеристики // Тр. Ин-та математики им. С. Л. Соболева. Вопросы алгебры и логики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996. С. 89–110.
4. **Зюляркина Н.Д.** О графе коммутирования циклических TI-подгрупп в линейных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 114–120.
5. **Лидл Р., Нидеррайтер Г.** Конечные поля: в 2 т. М.: Мир, 1988. 808 с.
6. **Махнев А.А.** TI-подгруппы в группах типа характеристики 2 // Мат. сб. 1985. Т. 127, № 2. С. 239–244.
7. **Harris M.E.** Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over field of odd order // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272, no. 1. P. 1–65.

Зюляркина Наталья Дмитриевна
Поступила 29.01.2012
канд. физ.-мат. наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет
докторант Института математики и механики УрО РАН
e-mail: toddeath@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ n-МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА[1]

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Зафиксируем натуральное число n. Предположим, что в конечной группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта. Доказывается: если $n \in \{1, 2, 3\}$, то G метанильпотентна; если $n \geq 4$ и группа G разрешима, то нильпотентная длина G не превышает $n - 1$.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, подгруппа Шмидта, нильпотентная длина.

V. N. Knyagina, V. S. Monakhov. On the permutability of n-maximal subgroups with Schmidt subgroups.

A Schmidt group is a nonnilpotent group in which every proper subgroup is nilpotent. Let us fix a positive integer n and assume that each n-maximal subgroup of a finite group G is permutable with any Schmidt subgroup. We prove that, if $n \in \{1, 2, 3\}$, then G is metanilpotent and, if $n \geq 3$ and G is solvable, then the nilpotent length of G is at most $n - 1$.

Keywords: finite group, solvable group, Schmidt subgroup, nilpotent length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Группой Шмидта* называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. В работе [1] исследованы группы, у которых максимальные подгруппы перестановочны с некоторыми подгруппами Шмидта.

Подгруппа H группы G называется 2-*максимальной подгруппой*, если существует максимальная подгруппа M в группе G такая, что H содержится в M в качестве максимальной подгруппы. Аналогично определяется 3-максимальная подгруппа и т. д. В общем случае для натурального $n > 1$ подгруппа K группы G называется n-*максимальной подгруппой* в G, если существует цепочка подгрупп

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_{n-1} \subset K_n = G$$

такая, что K_i является максимальной подгруппой в K_{i+1} для каждого $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

В настоящей заметке исследуются группы, в которых n-максимальные подгруппы перестановочны с некоторыми подгруппами Шмидта. Доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Зафиксируем натуральное число n и простое число p. Предположим, что в p-разрешимой группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой p-нильпотентной pd-подгруппой Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $n \in \{1, 2, 3\}$, то $l_p(G) \leq 1$;*

2) *если $n \geq 4$, то $l_p(G) \leq n - 2$.*

Теорема 2. *Зафиксируем натуральное число n. Предположим, что в группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $n \in \{1, 2, 3\}$, то G метанильпотентна*;

2) *если $n \geq 4$ и группа G разрешима, то нильпотентная длина G не превышает $n - 1$.*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ-БРФФИ (проект Ф 10Р-231).

Симметрическая группа степени 4 имеет 2-длину, равную 2, и нильпотентную длину, равную 3. В ней каждая 4-максимальная подгруппа единична. Значит, при $n = 4$ оценки p-длины и нильпотентной длины точные.

Кроме того, в теореме 3 доказано, что при $p = 2$ разрешимости группы G в случае $n \in \{1, 2, 3\}$ в теореме 1 заранее можно не требовать. Поскольку существуют простые группы с единичными 4-максимальными подгруппами, например, $PSL(2,5)$, то группа, у которой каждая 4-максимальная подгруппа перестановочна с каждой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка, может быть неразрешимой.

1. Необходимые обозначения и вспомогательные леммы

Будем придерживаться обозначений и определений, принятых в [2]. Если порядок подгруппы X делится на простое число p, то говорят, что X — *pd-подгруппа*. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется *p-замкнутой*; *p-нильпотентной* называется группа G, в которой существует нормальная подгруппа K такая, что $G = KP$, $K \cap P = 1$, где P — силовская p-подгруппа в G. Через $l_p(G)$ обозначается p-длина p-разрешимой группы G [2, VI.6]. Длина самого короткого нормального ряда разрешимой группы G с нильпотентными факторами обозначается через $n(G)$ и называется *нильпотентной длиной* группы G [2, III.4.7]. Если G — разрешимая группа и $n(G) \leq 2$, то G называют *метанильпотентной* группой.

Свойства групп Шмидта изложены в [2, III.5; 3]. Условимся называть $S_{\langle p,q \rangle}$-*группой* группу Шмидта порядка $p^a q^b$ с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой. Если X и Y — подгруппы группы G, то $X^Y = \langle X^y \mid y \in Y \rangle$. Если H и K — подгруппы группы G и $G = HK$, то H называют *добавлением* к K в G. Кроме того, если $G \neq H_1 K$ для каждой собственной подгруппы H_1 из H, то H — *минимальное добавление* к K в G. Подгруппа A группы G называется *недобавляемой* в G, если $G \neq AX$ для каждой собственной подгруппы X из G.

Лемма 1 [1, леммы 1, 2, 3, 10]. 1. *Если в группе G нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

2. *Если в группе G нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G 2-замкнута.*

3. *Если p-разрешимая группа не является p-замкнутой группой, то в ней существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта.*

4. *Всякая неразрешимая группа содержит недобавляемую 2-нильпотентную подгруппу Шмидта четного порядка.*

Лемма 2 [4, лемма 4]. *Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами B_1, $B_2, \ldots, B_n$. Тогда A перестановочна с подгруппой $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n \rangle$, порожденной ими.*

Лемма 3. *Зафиксируем простые числа p и q, $p \neq q$, и натуральное число n. Пусть G — группа, N — ее нормальная подгруппа. Если в G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппой, то каждая n-максимальная подгруппа из G/N перестановочна с любой $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппой из G/N.*

Доказательство. Пусть M/N — n-максимальная подгруппа в G/N, а A/N — $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа из G/N. По [1, лемма 4] подгруппа $A = S^L N$, где S — $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа из минимального добавления L к N в A. Так как M n-максимальна в G, то по условию $MS^l = S^l M$ для любого $l \in G$. Тогда $MS^L = S^L M$ по лемме 2 и $MA = AM$. Теперь M/N и A/N перестановочны. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть M — максимальная подгруппа p-разрешимой группы G. Если M нормальна в G, то $l_p(G) \leq 1 + l_p(M)$.*

Доказательство. Предположим, что подгруппа $O_{p',p}(G)$ содержится в M. Тогда $O_{p',p}(G) \subseteq O_{p',p}(M)$ и $M/O_{p',p}(G)$ — нормальная максимальная подгруппа в $G/O_{p',p}(G)$. По индукции $l_p(G) - 1 = l_p(G/O_{p',p}(G)) \leq 1 + l_p(M/O_{p',p}(G))$. Так как подгруппа M нормальна в группе G, а подгруппа $O_{p',p}(M)$ характеристическая в M, то $O_{p',p}(M)$ нормальна в G и $O_{p',p}(M) \subseteq O_{p',p}(G)$. Поэтому $O_{p',p}(M) = O_{p',p}(G)$, $l_p(M/O_{p',p}(G)) = l_p(M) - 1$ и $l_p(G) \leq 1 + l_p(M)$.

Пусть теперь $O_{p',p}(G)$ не содержится в M. Тогда $G = O_{p',p}(G)M$, $G/O_{p',p}(G) \simeq M/M \cap O_{p',p}(G)$, и

$$l_p(G) = 1 + l_p(G/O_{p',p}(G)) = 1 + l_p(M/M \cap O_{p',p}(G)) \leq 1 + l_p(M).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть M — максимальная подгруппа разрешимой группы G. Если M нормальна в G, то $n(G) \leq 1 + n(M)$.*

Доказательство. Предположим, что подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ содержится в M. Тогда M/F — нормальная максимальная подгруппа в G/F. По индукции $n(G/F) = n(G) - 1 \leq 1 + n(M/F)$. Так как $F(M) \subseteq F$, то $F(M) = F$, поэтому $n(M/F) = n(M) - 1$ и $n(G) \leq 1 + n(M)$.

Пусть теперь F не содержится в M. Тогда $G = FM$, $G/F \simeq M/M \cap F$, и

$$n(G) = 1 + n(G/F) = 1 + n(M/M \cap F) \leq 1 + n(M).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Если M циклическая, то коммутант группы G нильпотентен.*

Доказательство. По [2, теорема IV.7.4] группа G разрешима. Если $F(G)$ не содержится в M, то $G = F(G)M$ и $G' \subseteq F(G)$. Если $F(G) \subseteq M$, то $F(G)$ циклическая. По [2, теорема II.4.2] $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ и $G/C_G(F(G))$ абелева как группа автоморфизмов циклической группы. Теперь опять $G' \subseteq C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть A и B — подгруппы группы G, $A \subseteq B$, $B \neq G$. Если $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$, то A^B субнормальна в G. В частности, если $A = B$, то A субнормальна в G.*

Доказательство. Согласно [5, теорема 7.2.5] подгруппа $A^B \cap B^A$ субнормальна в G. Подгруппа A содержится в B, поэтому A^B также содержится в B. Значит, $A^B = A^B \cap B^A$ субнормальна в G. При $A = B$ подгруппа $A^B = A$, поэтому A субнормальна в G. Лемма доказана.

Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром $\mathrm{Core}_G M = \bigcap\limits_{x \in G} M^x$, то группу G называют *примитивной*, а подгруппу M — ее *примитиватором* [6].

Лемма 8 [2, II.3.2; 6, I.8]. *Пусть G — примитивная разрешимая группа с примитиватором M. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi(G) = 1$;

2) *$F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой подгруппой порядка p^n для некоторого простого p*;

3) *в группе G есть единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$*;

4) *$G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$*;

5) *M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.*

Неоднократно будет использоваться следующая лемма.

Лемма 9 [2, VI.4.5]. *Пусть A и B — подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$.*

2. Доказательство теоремы 1

1. Пусть в p-разрешимой группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой p-нильпотентной pd-подгруппой Шмидта и $n \in \{1,2,3\}$. С помощью индукции по $|G|$ докажем, что $l_p(G) \le 1$. Условия теоремы наследуют все фактор-группы по лемме 3, поэтому по индукции $l_p(G/N) \le 1$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N. Если $l_p(G) > 1$, то по [2, VI.6.9] $O_{p'}(G) = 1$, $\Phi(G) = 1$, $F = F(G) = O_p(G)$ является минимальной нормальной подгруппой группы G, $C_G(F) = F$, $G = [F]M$, M — максимальная подгруппа в G, $\mathrm{Core}_G M = 1$, $O_p(M) = 1$. Если порядок M не делится на p, то $l_p(G) \le 1$. Пусть M — pd-группа. Поскольку M не p-замкнута, то по утверждению 3 леммы 1 в M существует p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта S. Так как $\mathrm{Core}_G M = 1$, то найдется элемент $x \in G$ такой, что S не содержится в M^x. Теперь отдельно рассмотрим каждое значение $n \in \{1,2,3\}$.

Случай $n=1$. По условию подгруппы S и M^x перестановочны, поэтому $SM^x = G$, а по лемме 1 $SM = G = M$, противоречие. Поэтому предположение $l_p(G) > 1$ неверно и $l_p(G) \le 1$.

Случай $n=2$. Пусть M_1 и M_2 — различные максимальные подгруппы из M. Они существуют, поскольку M содержит подгруппу Шмидта S, а значит, M не может быть циклической примарной подгруппой. Используя лемму 2, получаем $S^x M = S^x\langle M_1, M_2\rangle = \langle M_1, M_2\rangle S^x = MS^x$, поэтому $S^x M = G$. Но теперь $M^x M = G$, что невозможно ввиду леммы 9. Поэтому допущение $l_p(G) > 1$ неверно и $l_p(G) \le 1$.

Случай $n=3$. Предположим, что $S \ne M$, и пусть H — максимальная в M подгруппа, содержащая S. Тогда $[F]H$ — максимальная в G подгруппа и каждая ее 2-максимальная подгруппа является 3 максимальной в G. Применяя к подгруппе $[F]H$ случай 2, можно утверждать, что $l_p([F]H) \le 1$. Из равенства $C_G(F) = F$ следует, что $O_{p'}([F]H) = 1$. Поэтому $[F]H$ p-замкнута, что невозможно, поскольку подгруппа H не p-замкнута. Значит, предположение $S \ne M$ неверно и $S = M$ — максимальная подгруппа. Так как $O_p(S) = 1$, то $S = [Q]P$, где $|P| = p$ и $|Q| = q^t$, $q \in \pi(G)$.

Предположим, что $t = 1$. Тогда F — 2-максимальная подгруппа группы G. Поскольку $|F| > p$, то подгруппа F_1 из F индекса p будет 3-максимальной в G. По условию $F_1 S$ — подгруппа группы G, т. е. подгруппа F_1 нормальна в G, противоречие.

Итак, $t \ge 2$. Тогда максимальная подгруппа Q_1 из Q будет неединичной 3-максимальной подгруппой в G. По условию подгруппы Q_1 и S^x перестановочны для любого $x \in G$. Так как $\mathrm{Core}_G S = 1$, то найдется $y \in G$ такой, что Q_1 не содержится в S^y. Но тогда $G = S^y Q_1$, а это противоречит тому, что $|G : S^y| = |F|$. Поэтому допущение $l_p(G) > 1$ неверно и $l_p(G) \le 1$. Утверждение 1 доказано.

2. Пусть M — нормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда в подгруппе M каждая $(n-1)$-максимальная подгруппа перестановочна с любой p-нильпотентной pd-подгруппой Шмидта. Если $n-1 \ge 4$, то по индукции $l_p(M) \le (n-1)-2$. Если $n-1 \le 3$, то $n-1 = 3$, и из утверждения 1 следует, что $l_p(M) \le 1 = (n-1)-2$. В силу леммы 4 $l_p(G) \le l_p(M)+1$, поэтому $l_p(G) \le n-2$. Теорема 1 доказана.

3. Разрешимость группы в случае $p = 2$ и $n \in \{1,2,3\}$

Теорема 3. *Зафиксируем натуральное число $n \in \{1,2,3\}$. Если в группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка, то G разрешима.*

Доказательство. Используем индукцию по $|G|$. Предположим, что группа G неразрешима. Тогда по утверждению 4 леммы 1 существует недобавляемая в G 2-нильпотентная подгруппа Шмидта S четного порядка. Отдельно рассмотрим каждое значение n.

С л у ч а й $n = 1$. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G. По условию M и S перестановочны, т. е. MS — подгруппа группы G. Отсюда следует, что $S \subseteq M$, а поскольку M — произвольная максимальная подгруппа, то $S \subseteq \Phi(G)$, противоречие. Следовательно, допущение неверно, и G разрешима.

С л у ч а й $n = 2$. Ясно, что существует максимальная в G подгруппа M, не содержащая S. Если M циклическая, то по лемме 6 группа G метанильпотентна, а значит, разрешима, противоречие. Поэтому M нециклическая и содержит не менее двух максимальных подгрупп. Пусть M_1 и M_2 — различные максимальные подгруппы из M. Тогда M_1 и M_2 — 2-максимальные подгруппы группы G, и по условию $SM_1 = M_1S$, $SM_2 = M_2S$. Согласно лемме 2 $SM = S\langle M_1, M_2\rangle = \langle M_1, M_2\rangle S = MS$. Значит, SM — подгруппа группы G и $SM = G$. Противоречие с недобавляемостью подгруппы S. Поэтому предположение неверно, и G разрешима.

С л у ч а й $n = 3$. Пусть в группе G каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна с любой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка. Применяя к каждой максимальной подгруппе из G случай $n = 2$, получим, что все собственные подгруппы в G разрешимы. По лемме 3 условия теоремы наследуются фактор-группами, поэтому G — простая группа. По [7, теорема 24] в группе G существует неединичная 3-максимальная подгруппа H. Так как $HS^x = S^xH$ для любого $x \in G$, то по [2, VI.4.10] группа $G = HS$. Противоречие с недобавляемостью подгруппы S. Итак, разрешимость группы при $n = 3$ установлена. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2

1. Пусть в группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта. Если $n = 1$, то метанильпотентность группы G следует из [1, теорема 2 (3)]. Пусть $n \in \{2, 3\}$. С помощью индукции по $|G|$ докажем, что и в этих случаях группа G метанильпотентна. Условия теоремы наследуют все фактор-группы по лемме 3, поэтому по индукции G/N метанильпотентна для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N. В силу теоремы 3 группа G разрешима. Поскольку класс всех метанильпотентных групп является насыщенной формацией, то по индукции группа G примитивна: $\Phi(G) = 1$, $F = F(G)$ является минимальной нормальной подгруппой группы G, $C_G(F) = F$, $G = [F]M$, M — максимальная подгруппа в G, $\mathrm{Core}_G M = 1$ и $O_p(M) = 1$, где $\pi(F) = \{p\}$, см. лемму 8. По индукции подгруппа M метанильпотентна. Предположим, что M не нильпотентна. Тогда в M существует подгруппа Шмидта $S = [Q]\langle a\rangle$, где Q — нормальная силовская q-подгруппа, $\langle a\rangle$ — циклическая силовская r-подгруппа. Поскольку $\mathrm{Core}_G M = 1$, то существует $x \in G$ такой, что S не содержится в M^x.

С л у ч а й $n = 2$. Пусть M_1 и M_2 — различные максимальные подгруппы из M. Они существуют, поскольку M содержит подгруппу Шмидта S, а значит, M не может быть циклической примарной подгруппой. Подгруппы M_1 и M_2 являются 2-максимальными в группе G, поэтому M_1 и M_2 перестановочны с S^x. Ввиду леммы 2 $S^xM = S^x\langle M_1, M_2\rangle = \langle M_1, M_2\rangle S^x = MS^x$, поэтому $S^xM = G$. Но теперь $G = S^xM \subseteq M^xM$, что невозможно ввиду леммы 9. Поэтому допущение неверно, и M нильпотентна.

С л у ч а й $n = 3$. Предположим, что $S = M$ — максимальная в G подгруппа. Тогда $Q_1 \times \langle a^r\rangle$ — 3-максимальная в G подгруппа, где Q_1 — максимальная подгруппа из Q. Для любого $g \in G$ $S^g(Q_1 \times \langle a^r\rangle) \subseteq M^gM \neq G$. Но по условию $S^g(Q_1 \times \langle a^r\rangle)$ — подгруппа группы G, и она содержит максимальную подгруппу S^g, поэтому $Q_1 \times \langle a^r\rangle \subseteq S^g$. Это означает, что $Q_1 \times \langle a^r\rangle \subseteq \mathrm{Core}_G S = 1$, т. е. подгруппа $Q_1 \times \langle a^r\rangle = 1$. Последнее равенство возможно, только когда $|Q| = q$ и $|\langle a\rangle| = r$. Но в этом случае F — 2-максимальная в G подгруппа, и для максимальной подгруппы F_1 из F произведение F_1S будет подгруппой по условию. Теперь F_1 — нормальная в G подгруппа, поэтому $F_1 = 1$ и $|F| = p$. Поскольку $F = C_G(F)$, то M должна быть циклической группой порядка, делящего $r - 1$, противоречие.

Итак, S не максимальна в G, т. е. S — собственная в M подгруппа. Предположим, что S 2-максимальна в G. Тогда подгруппа Шмидта $S = [Q]\langle a\rangle$ перестановочна с 3-максимальными подгруппами $(Q \times \langle a^r\rangle)^g$ и $(\Phi(Q) \times \langle a\rangle)^g$ для каждого $g \in G$ по условию. Поэтому S перестановочна с подгруппой $\langle (Q \times \langle a^r\rangle)^g, (\Phi(Q) \times \langle a\rangle)^g\rangle = S^g$ для каждого $g \in G$. В этом случае подгруппа S субнормальна в G по лемме 7, а значит, Q субнормальна в G и Q^G — неединичная нормальная в G q-подгруппа. Теперь $Q^G \subseteq O_q(G) \subseteq F$, противоречие.

Итак, S не является максимальной подгруппой в G и не является 2-максимальной. Значит, S содержится в подгруппе H, которая содержится в подгруппе M, и H является 3-максимальной подгруппой в G. По условию $SH^g = H^gS$ для любого $g \in G$, а по лемме 7 подгруппа S^H субнормальна в G. Но каждая минимальная нормальная подгруппа содержится в нормализаторе субнормальной подгруппы, т. е. $F \subseteq N_G(S^H)$. Поскольку $F \cap S^H \subseteq F \cap M = 1$, то $FS^H = F \times S^H$, что противоречит равенству $F = C_G(F)$. Утверждение 1 теоремы 2 доказано.

2. Пусть M — нормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда в подгруппе M каждая $(n-1)$-максимальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта. Если $n-1 \geq 4$, то по индукции $n(M) \leq (n-1)-1$. Если $n-1 \leq 3$, то $n-1 = 3$, и из утверждения 1 следует, что $n(M) \leq 2 = (n-1)-1$. В силу леммы 5 $n(G) \leq 1 + n(M) \leq 1 + (n-1) - 1 = n-1$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Князина В. Н., Монахов В. С.** О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Том 17, № 4. С.126–133.
2. **Huppert B.** Endliche Gruppen, I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1967. 793 p.
3. **Монахов В. С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Праці Украін. мат. конгресу–2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. Секц. 1. С. 81–90.
4. **Князина В. Н., Монахов В. С.** Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
5. **Lennox J. C., Stonehewer S. E.** Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press, 1987. 253 p.
6. **Gaschutz W.** Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes on Pure Math. No. 11. Canberra: Australian National University, 1979. 100 p.
7. **Huppert B.** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Vol. 60, no. 4. P. 409–434.

Князина Виктория Николаевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь
e-mail: knyagina@inbox.ru

Поступила 21.11.2011

Монахов Виктор Степанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Victor.Monakhov@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, КАК У ГРУППЫ $Aut(J_2)$[1]

А. С. Кондратьев

Описаны конечные группы с графом простых чисел как у группы $Aut(J_2)$. Тем самым решена проблема, поставленная Б. Хосрави.

Ключевые слова: конечная группа, группа $Aut(J_2)$, граф простых чисел, распознавание по графу простых чисел.

A. S. Kondrat'ev. Finite groups having the same prime graph as the group $Aut(J_2)$. This solves the problem posed by B. Khosravi.

Finite groups having the same prime graph as the group $Aut(J_2)$ are described.

Keywords: finite group, group $Aut(J_2)$, prime graph, recognition by prime graph.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \le i \le s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Группа G называется *распознаваемой* (*по спектру*), если любая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ изоморфна G. С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [6]) тесно связано направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Здесь под равенством графов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ понимается совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

Недавно было завершено доказательство распознаваемости любой конечной простой группы по своим порядку и спектру (см. [1]). Кажется весьма правдоподобной гипотеза, что конечные простые группы, как правило, распознаваемы даже по своим порядку и графу простых чисел. Для многих конечных простых групп эта гипотеза подтверждена. Для спорадических простых групп это сделано еще в 1996 г. Г. Ченом [11].

В 2003 г. в работе М. Хаги [13] были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу простых чисел, а именно спорадические простые группы J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24} и Co_2, а также получено некоторое описание (но не полная классификация) конечных групп G

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа. Результаты [3, теоремы 5 и 6], касающиеся спорадических групп M_{11}, M_{12} и J_2, существенно уточняют соответствующие результаты М. Хаги.

Б. Хосрави [16–18] получил аналогичные результаты для групп автоморфизмов всех конечных спорадических простых групп, кроме $Aut(J_2)$, и поставил задачу описания строения конечных групп G таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(Aut(J_2))$. Заметим, что если S — спорадическая простая группа, то $|Aut(S) : Inn(S)| \leq 2$, а графы $\Gamma(S)$ и $\Gamma(Aut(S))$ несвязны, кроме графов $\Gamma(Aut(J_2))$ и $\Gamma(Aut(McL))$.

В данной работе задача Хосрави решена. Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(Aut(J_2))$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *G разрешима, 2-дополнение в G есть группа Фробениуса, ядро которой является 7-группой, а дополнение — циклической $\{3,5\}$-группой B порядка, делящегося на 15, фактор-группа $G/O_{\{2,7\}}(G)$ изоморфна подгруппе порядка, делящего $8|B|$, из $Hol(B)$;*

(2) *G разрешима, 2-дополнение R в G есть группа Фробениуса вида $A \rtimes B$, где $A = F(R)$ — $\{3,5\}$-группа порядка, делящегося на 15, и B — циклическая 7-группа, фактор-группа $O_{7'}(G)/O_2(G)$ имеет нормальное 2-дополнение $F(R)O_2(G)/O_2(G)$ и фактор-группа $G/O_{7'}(G)$ изоморфна B или диэдральной группе порядка $2|B|$;*

(3) *G разрешима, 2-дополнение R в G есть 2-фробениусова группа вида $A \rtimes B \rtimes C$, где $A = F(R)$ — $\{3,5\}$-группа порядка, делящегося на 5, B — циклическая 7-группа и $|C| = 3$, фактор-группа $O_{7'}(G)/O_2(G)$ имеет нормальное 2-дополнение $F(R)O_2(G)/O_2(G)$ и фактор-группа $G/O_{7'}(G)$ изоморфна группе Фробениуса порядка $3|B|$ или $6|B|$;*

(4) *$G/O_2(G)$ изоморфна одной из групп A_8, S_8, A_9, S_9, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $O_8^+(2):2$, J_2, $Aut(J_2)$;*

(5) *$G/O_2(G)$ изоморфна расширению нетривиальной нильпотентной $\{3,5\}$-группы A посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_2(B) \times L$, где группа L изоморфна A_7, группа $B/O_2(B)$ изоморфна A_7 или S_7, группа L индуцирует (сопряжением) на каждом p-главном факторе группы $(G/O_2(G))^\infty$ неприводимый 6-мерный $GF(p)A_7$-модуль для $p \in \{3,5\}$;*

(6) *$G/O_2(G)$ изоморфна расширению нильпотентной $\{3,5\}$-группы A порядка, делящегося на 5, посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_2(B) \times L$, где группа L изоморфна $U_3(3)$, группа $B/O_2(B)$ изоморфна $U_3(3)$ или $G_2(2)$, группа L индуцирует на каждом 3-главном факторе группы $(G/O_2(G))^\infty$ естественный унитарный 3-мерный $GF(9)U_3(3)$-модуль или 6-мерный неприводимый $GF(9)U_3(3)$-модуль, а на каждом ее 5-главном факторе — 6-мерный абсолютно неприводимый $GF(5))U_3(3)$-модуль;*

(7) *$G/O_2(G)$ изоморфна расширению нильпотентной $\{3,5\}$-группы A порядка, делящегося на 5, посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_2(B) \times L$, где группа L изоморфна $L_2(7)$, группа $B/O_2(B)$ изоморфна $L_2(7)$ или $PGL_2(7)$, группа L индуцирует на каждом p-главном факторе группы $(G/O_2(G))^\infty$ 3-мерный неприводимый $GF(p^2)L_2(7)$-модуль или 6-мерный абсолютно неприводимый $GF(p)L_2(7)$-модуль для $p \in \{3,5\}$;*

(8) *$G/O_2(G)$ изоморфна полупрямому произведению нетривиальной абелевой 3-группы A на группу B такому, что $F^*(B) = O_2(B) \circ L$, где группа L изоморфна $2{\cdot}L_3(4)$ или $2{\cdot}U_4(3)$, группа $B/F^*(B)$ изоморфна подгруппе из D_8, инволюция из $Z(L)$ инвертирует A и группа L индуцирует на каждом 3-главном факторе группы AL точный неприводимый 6-мерный $GF(3)L$-модуль;*

(9) *$G/O_2(G)$ изоморфна полупрямому произведению нетривиальной абелевой 3-группы A на группу B такому, что $F^*(B) = O_2(B) \circ L$, где группа L изоморфна $2^2{\cdot}L_3(4)$, группа $B/F^*(B)$ изоморфна подгруппе из 2^2, $Z(L)$ порождается инволюциями z_1 и z_2, для которых $A = C_A(z_1) \times C_A(z_2)$, и группа L индуцирует на каждом 3-главном факторе группы AL точный неприводимый 6-мерный $GF(3)2{\cdot}L_3(4)$-модуль;*

(10) *$G/O_2(G)$ изоморфна полупрямому произведению абелевой $\{3,5\}$-группы A на группу B такому, что $F^*(B) = O_2(B) \circ L$, где группа L изоморфна $2{\cdot}J_2$, группа $B/O_2(B)$ изоморфна J_2 или $Aut(J_2)$, инволюция из $Z(L)$ инвертирует A, и группа L индуцирует на каждом*

3-главном факторе группы AL точный неприводимый 6-мерный $GF(9)L$-модуль, а на каждом ее 5-главном факторе — точный неприводимый 6-мерный $GF(5)L$-модуль;

(11) $G/O_2(G)$ изоморфна расширению нильпотентной $\{3,5\}$-группы A порядка, делящегося на 5, посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_2(B) \circ L$, где группа L изоморфна $SL_2(7)$, группа $B/O_2(B)$ изоморфна $L_2(7)$ или $PGL_2(7)$ и группа L индуцирует на каждом p-главном факторе группы $(G/O_2(G))^\infty$ для $p \in \{3,5\}$ либо неточный неприводимый L-модуль с ядром порядка 2 (см. п. (7)), либо точный 6-мерный неприводимый $GF(p^2)L$-модуль.

Каждый из пп. (1)–(11) теоремы реализуется.

Замечание. Группы наименьших порядков из пп. (1)–(3) теоремы имеют вид $2 \times (7^4 : 15)$, $2 \times ((3^6 \times 5^6) : 7))$, $2 \times ((5^6 : 7) : 3)$ соответственно.

Из теоремы вытекает

Следствие. *Конечная группа с порядком и графом простых чисел, как у группы $Aut(J_2)$, изоморфна $Aut(J_2)$, $2 \times J_2$ или $\widehat{J}_2$.*

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [4; 7–9; 15]. Через G^∞ будем обозначать последний член ряда коммутантов конечной группы G. Расщепляемое расширение группы A посредством группы B обозначается через $A \rtimes B$ или $A : B$. Нерасщепляемое расширение группы A посредством группы B обозначается через $A{\cdot}B$. Если n — натуральное число и p — простое число, то, как в [9], через n обозначается также циклическая группа порядка n, а через p^n — элементарная абелева группа порядка p^n.

Если группа G действует на группе или модуле H, то будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$.

1. Вспомогательные результаты

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Предложение 1.1 (теорема Грюнберга — Кегеля [20, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) G — группа Фробениуса;

(2) G — 2-фробениусова группа;

(3) G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \le A \le Aut(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \le s(P)$ и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [2, лемма 4]).

Предложение 1.2. *Пусть G — конечная квазипростая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — точный абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, взаимно простого с $p|Z(G)|$, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Следующий результат, принадлежащий В. Д. Мазурову [5, лемма 1], часто используется при решении задачи распознавания конечных групп по спектру или графу простых чисел.

Предложение 1.3. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G и G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Мы получаем следующий аналог предложения 1.3, который имеет самостоятельный интерес.

Предложение 1.4. *Пусть q — нечетное простое число, $q-1$ не равно степени числа 2 и G — конечная группа вида $G = P \leftthreetimes (T \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где P — нетривиальная $\{2,q\}'$-группа, T — 2-группа, $|x| = q$ и $C_G(P) = Z(P)$. Если $[T,x] \neq 1$, то $C_P(x) \neq 1$.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка к предложению. Из минимальности контрпримера следует, что P является p-группой для некоторого простого числа p. Ввиду [12, 5.3.5, 5.3.6] имеем $T = C_T(x)[T,x]$ и $[T,x] = [T,x,x]$, поэтому $T = [T,x] \neq 1$. Так как $T\langle x \rangle$ действует точно на $P/\Phi(P)$, то P — элементарная абелева p-группа. По [12, 5.3.8] группа T обладает $\langle x \rangle$-инвариантной специальной подгруппой E такой, что $\langle x \rangle$ действует нетривиально и неприводимо на $E/\Phi(E)$ и тривиально на $\Phi(E)$. Поэтому $T = E$.

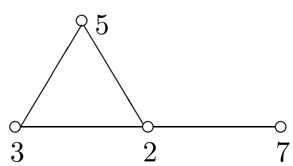
Предположим, что $\Phi(T) = 1$. Тогда $T\langle x \rangle$ — группа Фробениуса. По предложению 1.3 имеем $C_P(x) \neq 1$, что противоречит предположению.

Итак, $T' = \Phi(T) = Z(T)$ — нетривиальная элементарная абелева 2-группа. Если $|Z(T)| = 2$, то T — экстраспециальная 2-группа, поэтому ввиду [8, 36.1] имеем $C_P(x) \neq 1$, что противоречит предположению.

Таким образом, $\Phi(T) = Z(T\langle x \rangle)$ — нециклическая элементарная абелева 2-группа. Так как p не делит $|T\langle x \rangle|$, по теореме Машке (см. [12, теорема 3.3.1]) $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, где каждую подгруппу P_i можно рассматривать как неприводимый $GF(p)T\langle x \rangle$-модуль. Поскольку $C_T(P) = 1$, можно считать, что $C_{\Phi(T)}(P_1) < \Phi(T)$. Если $C_T(P_1) \not\leq \Phi(T)$, то $C_T(P_1)$ — нетривиальная нормальная подгруппа в $T\langle x \rangle$ и, следовательно, $T = \Phi(T)C_T(P_1) = C_T(P_1)$, что противоречиво. Поэтому $C_T(P_1) < \Phi(T)$. Ввиду минимальности группы G имеем $P = P_1$ и $C_T(P_1) = 1$. Поскольку $\Phi(T)$ — нециклическая элементарная абелева 2-группа, в $\Phi(T)$ найдется инволюция t такая, что $C_P(t) \neq 1$. Но тогда $C_P(t)$ — собственная подгруппа в P, нормальная в G, что противоречит неприводимости $GF(p)T\langle x \rangle$-модуля P. Предложение доказано.

2. Доказательство теоремы

Лемма 2.1. *Граф $\Gamma(Aut(J_2))$ имеет вид*



.

Доказательство. Утверждение леммы следует из [9].

Лемма 2.2. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и $\Gamma(G)$ есть подграф графа $\Gamma(Aut(J_2))$. Тогда G изоморфна одной из групп A_5, $L_2(7)$, A_6, $L_2(8)$, $U_3(3)$, $U_4(2)$, A_7, A_8, A_9, $L_2(49)$, $L_3(4)$, $U_3(5)$, $U_4(3)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, J_2.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 2.1 и [9;10;14;19]. Лемма доказана.

Пусть далее G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(Aut(J_2))$. В частности, G является $\{2,3,5,7\}$-группой.

Пусть сначала G разрешима и R — 2-дополнение в G. Тогда по лемме 2.1 граф $\Gamma(R)$ несвязен, и, следовательно, по предложению 1.1 подгруппа R — либо группа Фробениуса, либо 2-фробениусова группа. Положим $\pi = \{3,5\}$. Ввиду известных свойств конечных групп Фробениуса можно считать, что $\pi_1(R) = \pi$ и $\pi_2(R) = \{7\}$.

Пусть R — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B.

Предположим, что $7 \in \pi(A)$. Тогда A — 7-группа и B — π-группа порядка, делящегося на 15. Легко понять, что B — циклическая π-холлова подгруппа в G и $O_\pi(G) = 1$. Ввиду [12, теорема 6.3.2] имеем $C_G(B) \le O_{\pi',\pi}(G)$ и $O_{\pi',\pi}(G) = O_{\pi'}(G)B$, откуда следует справедливость утверждения (1) теоремы.

Предположим, что $7 \in \pi(B)$. Тогда A — нильпотентная π-группа порядка, делящегося на 15, а B — циклическая 7-холлова подгруппа в G. Положим $\tilde{G} = G/O_2(G)$ и $K = O_{7'}(G)$. Тогда $1 \ne O(\tilde{K}) = O_\pi(\tilde{K}) = F(\tilde{K}) \le \tilde{A}$, причем $C_{\tilde{K}}(F(\tilde{K})) = Z(F(\tilde{K}))$. Покажем, что группа $\tilde{K}$ является $2'$-замкнутой. Предположим противное. Тогда $O(\tilde{K}) < O_{2',2}(\tilde{K}) < O_{2',2,2'}(\tilde{K})$. Пусть $\tilde{T}$ — (нетривиальная) силовская 2-подгруппа в $O_{2',2}(\tilde{K})$. Тогда ввиду [12, теорема 6.3.2] имеем $C_{\tilde{K}}(\tilde{T}) \le O_{2',2}(\tilde{K})$. По лемме Фраттини $\tilde{G} = O(\tilde{K})N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, и, следовательно, в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ найдется элемент $\tilde{x}$ порядка 7. Применяя предложение 1.4 к группе $O(\tilde{K}) \leftthreetimes (\tilde{T} \leftthreetimes \langle x \rangle)$, получаем, что $\tilde{T}$ централизует элемент $\tilde{x}$. Но тогда элемент $\tilde{x}$ действует тождественно на фактор-группе $\tilde{K}/O_{2',2}(\tilde{K})$ и, значит, централизует элемент порядка 3 или 5 из $\tilde{K}$, что противоречит лемме 2.1. Итак, группа $\tilde{K}$ является $2'$-замкнутой. Ввиду [12, теорема 6.3.2] имеем $C_{\tilde{G}}(B) \le KB$, откуда следует справедливость утверждения (2) теоремы.

Пусть R — 2-фробениусова группа вида $R = A \leftthreetimes (B \leftthreetimes C)$. Ясно, что B — циклическая 7-группа, и, следовательно, $|C| = 3$ и A — нильпотентная π-группа. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим справедливость утверждения (3) теоремы.

Пусть далее группа G неразрешима, $S = S(G)$ — ее наибольшая разрешимая нормальная подгруппа и $\overline{G} = G/S$. Ясно, что неабелевы композиционные факторы группы $\overline{G}$ изоморфны некоторым простым группам из заключения леммы 2.2.

Лемма 2.3. *Порядок группы S не делится на* 7.

Доказательство. Предположим, что $7 \in \pi(S)$ и $P \in Syl_7(S)$. По лемме Фраттини $G = SN_G(P)$.

Предположим, что $N_G(P)$ содержит элементарную подгруппу V порядка 9 или 25. Тогда $C_P(v) \ne 1$ для некоторого неединичного элемента $v \in V$, и, следовательно, $\omega(G)$ содержит 21 или 35, что противоречит лемме 2.1.

Таким образом, силовские 3- и 5-подгруппы в $\overline{G}$ циклические. Поэтому ввиду леммы 2.2 группа $\overline{G}$ почти проста, и ее цоколь изоморфен одной из групп A_5, $L_2(7)$, $L_2(8)$ или $L_2(49)$. Так как группа $\overline{G}$ не содержит элемент порядка 15, а группа G содержит такой элемент, то $\pi(S)$ содержит некоторое число $q \in \{3, 5\}$. Пусть R — $\{q, 7\}$-холлова подгруппа в S, содержащая P, и $Q \in Syl_q(R)$. Так как группа R разрешима и граф $\Gamma(R)$ несвязен, то по теореме Грюнберга — Кегеля либо R — группа Фробениуса с ядром P и дополнением Q, либо $q = 3$, R — 2-фробениусова группа и $F(R) = O_3(R)$. Поэтому по крайней мере одна из подгрупп P, Q циклична.

Предположим, что P циклична. Поскольку тогда группа $Aut(P)$ абелева, то $\overline{C_G(P)}$ содержит цоколь группы $\overline{G}$, а значит, в $C_G(P)$ есть элемент порядка 3, что невозможно.

Итак, Q циклична. Поэтому R — группа Фробениуса с ядром P и дополнением Q. Если 7 делит порядок группы $\overline{G}$, то, рассуждая, как в предыдущем абзаце, показываем, что в $C_G(Q)$ есть элемент порядка 7, что невозможно. Поэтому группа $\overline{G}$ изоморфна A_5 или S_5.

Положим $N = N_G(R)$. Поскольку $\{q, 7\}$-холловы подгруппы в разрешимой группе S сопряжены (см. [12, 6.4.1]), то $G = SN$ и, следовательно, $N/(N \cap S) \cong \overline{G}$. Как и выше, показываем, что $C_N(Q)(N \cap S)$ содержит цоколь группы $N/(N \cap S)$. Поэтому группа $C_N(Q)/C_{N \cap S}(Q)$ изоморфна A_5 или S_5. Ясно, что $C_{N\cap S}(Q) = Q \times K$, где K — некоторая $\{q, 7\}'$-подгруппа. Далее, фактор-группа $C_N(Q)/K$ является центральным расширением группы, изоморфной Q, посредством группы, изоморфной A_5 или S_5. Поскольку мультипликатор Шура группы A_5 имеет порядок 2, то силовская q-подгруппа в $C_N(Q)$ нециклическая и, следовательно, содержит нециклическую подгруппу W порядка q^2. Но $C_P(w) \ne 1$ для некоторого неединичного элемента $w \in W$, и, следовательно, G содержит элемент порядка $7q$, что противоречит лемме 2.1.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Группа $\overline{G}$ почти проста, и порядок ее цоколя делится на* 7.

Доказательство. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G}$. Тогда $M = M_1 \times \dots \times M_n$, где $M_1, \dots, M_n$ — изоморфные неабелевы простые группы.

Предположим, что $n > 1$. Тогда по лемме 2.1 $7 \notin \pi(M)$, откуда по лемме 2.2 M_1 изоморфна A_5, A_6 или $U_4(2)$.

По лемме 2.1 $7 \notin \pi(S)$ и, следовательно, $7 \in \pi(\overline{G}/M)$. Пусть x — элемент порядка 7 в $\overline{G}$. Так как группа $N_{\overline{G}}(M_1)/C_{\overline{G}}(M_1)$ изоморфна подгруппе $7'$-группы $Aut(M_1)$, то если элемент x нормализует M_1, он централизует M_1, и, следовательно, $21 \in \omega(\overline{G})$, что противоречит лемме 1.1. Поэтому подгруппа $K := \langle M_1, x\rangle$ изоморфна сплетению $M_1 \wr 7$, и, следовательно, $C_{K'}(x) \cong M_1$, откуда опять $21 \in \omega(G)$, что противоречиво.

Итак, $n = 1$, т. е. M проста. Если в $\overline{G}$ найдется отличная от M минимальная нормальная подгруппа N, то по доказанному выше N проста и централизует M. Теперь, рассуждая, как выше, приходим к противоречию.

Итак, M есть простой цоколь группы $\overline{G}$, т. е. $\overline{G}$ почти проста. Второе утверждение леммы следует из лемм 2.2 и 2.3 и [9].

Лемма доказана.

Пусть далее $M := Soc(\overline{G})$.

Лемма 2.5. *Если $M \in \{L_2(8), L_2(49), A_8, A_9, S_6(2), O_8^+(2)\}$, то $S = O_2(G)$. В частности, группа M не изоморфна $L_2(8)$ и $L_2(49)$.*

Доказательство. Предположим, что выполняется условие леммы, но $S \neq O_2(G)$. Тогда ввиду леммы 2.3 $\pi(S)$ содержит число $p \in \{3, 5\}$. По [9] группа M содержит подгруппу, изоморфную либо группе Фробениуса вида $2^3 : 7$, либо элементарной группе порядка 49 (при $M \cong L_2(49)$). Через R обозначим 2-дополнение в полном прообразе в G этой подгруппы.

Пусть выполняется первый случай. По лемме 2.3 $|R|_7 = 7$, и, следовательно, R — группа Фробениуса с ядром $R \cap S = F(R) = O_3(R) \times O_5(R)$ и дополнением порядка 7. Поэтому $N_H(F(R)) = F(R) \leftthreetimes L$, где $L = O_2(L) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|x| = 7$ и $[O_2(L), x] \neq 1$. По предложению 1.3 $C_{F(R)}(x) \neq 1$, что противоречит лемме 2.1.

Пусть выполняется второй случай. Тогда $R/(R \cap S) \cong 7^2$, и, следовательно, R не может быть ни группой Фробениуса, ни 2-фробениусовой группой, что противоречиво.

Итак, $S = O_2(G)$. Если M изоморфна $L_2(8)$ или $L_2(49)$, то в группе G нет элемента порядка 15, что противоречит лемме 2.1.

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Если $S = O_2(G)$, то выполняется утверждение* (4) *теоремы.*

Доказательство. Предположим, что G — контрпример к лемме. Тогда из лемм 2.2, 2.4 и 2.5 следует, что $M \in \{L_3(4), U_3(5), U_4(3)\}$. Кроме того, группа $\overline{G}$ содержит элемент порядка 15, поэтому ввиду [9] группа $\overline{G}$ содержит элемент порядка 21, что противоречит лемме 2.1.

Лемма доказана.

Ввиду лемм 2.5 и 2.6 будем предполагать далее, что $S \neq O_2(G)$. Тогда ввиду леммы 2.3 $\pi(S)$ содержит число $p \in \{3, 5\}$. Кроме того, ввиду лемм 2.2, 2.4 и 2.5 группа M изоморфна $L_2(7)$, $U_3(3)$, A_7, $L_3(4)$, $U_3(5)$, $U_4(3)$ или J_2. По [9] группа M содержит подгруппу, изоморфную группе Фробениуса вида $7 : 3$. Пусть H — полный прообраз в G этой подгруппы и R — 2-дополнение в H. Тогда $|R|_7 = 7$, и, следовательно, для разрешимой группы H выполняется утверждение (3) теоремы. Таким образом, R — 2-фробениусова группа вида $F(R) : 7 : 3$, где $F(R) = R \cap S = O_3(R) \times O_5(R)$, причем $F(R)$ — 2-дополнение в S и $O_2(G)F(R) = O_{2,2'}(S)$.

Без ограничения общности будем считать далее, что $O_2(G) = 1$. Тогда $S = F(G) \leftthreetimes T$ для силовской 2-подгруппы T в S. По лемме Фраттини имеем $G = SN_G(T)$, и, следовательно, $N_G(T)$ содержит элемент x порядка 7. Применяя предложение 1.4 к группе $F(G) \leftthreetimes T \leftthreetimes \langle x\rangle$, получаем, что T централизует элемент x. Поэтому $\overline{C_G(T)}$ содержит M. Пусть $L := C_G(T)^\infty$. Тогда фактор-группа $F(G)L/F(G)$ изоморфна накрывающей группе $\widehat{M}$ для M, причем $Z(\widehat{M})$ является 2-группой.

Лемма 2.7. *Если $Z(\widehat{M}) = 1$, то выполняется одно из утверждений (5) – (7) теоремы.*

Доказательство. Пусть $Z(\widehat{M}) = 1$. Тогда простая группа M действует на $F(G)$ так, что $C_{F(G)}(g) = 1$ для элемента g порядка 7 из M. Применяя предложение 1.2 для элемента g и таблицы 3-модулярных и 5-модулярных характеров Брауэра группы M из [7;9], получим утверждение леммы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда группа M изоморфна $L_2(7)$. Пусть $p \in \{3, 5\}$. По предложению 1.2 и таблице p-модулярных характеров Брауэра группы M из [7] существуют только следующие абсолютно неприводимые M-модули над полем характеристики p, на которых элемент g действует свободно: два 3-мерных с полем определения $GF(p)(\sqrt{-7}) = GF(p^2)$ и один 6-мерный с полем определения $GF(p)$. Поскольку два 3-мерных модуля алгебраически сопряжены, то по [15, теорема VII.1.16] существуют единственный 6-мерный неприводимый, но не абсолютно неприводимый $GF(p)M$-модуль (он изоморфен 3-мерному $GF(p^2)M$-модулю, рассматриваемому над полем $GF(p)$), и единственный 6-мерный абсолютно неприводимый $GF(p)M$-модуль.

Лемма доказана.

Пусть далее $Z(\widehat{M}) \neq 1$. Тогда ввиду [9] группа $\widehat{M}$ изоморфна $SL_2(7)$, $Z{\cdot}L_3(4)$, где группа Z изоморфна нетривиальной подгруппе из 4×4, $2{\cdot}U_4(3) \cong \Omega_6^-(3)$, $4{\cdot}U_4(3) \cong SU_4(3)$ или $2{\cdot}J_2$. Квазипростая группа $\widehat{M}$ действует точно на $F(G)$ так, что $C_{F(G)}(x) = 1$ для элемента x порядка 7 из $\widehat{M}$. Ввиду леммы 2.7 можно считать, что $C_{F(G)}(Z(\widehat{M}) = 1$. Применяя предложение 1.2 и таблицу 3-модулярных и 5-модулярных характеров Брауэра группы $\widehat{M}$ из [7; 9], получим, что выполняется одно из утверждений (8)–(11) теоремы.

Теорема доказана.

3. Доказательство следствия

Пусть G — конечная группа такая, что $|G| = |J_2|$ и $\Gamma(G) = \Gamma(Aut(J_2))$. Тогда $|G| = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Пусть G разрешима. Тогда 2-дополнение в G имеет порядок $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ и поэтому согласно теореме является либо группой Фробениуса вида $(3^3 \times 5^2) : 7$, либо 2-фробениусовой группой вида $(3^3 \times 5^2) : (7 : 3)$. Это невозможно, так как 7 не делит $5^2 - 1$.

Итак, G неразрешима. Ввиду теоремы группа $\overline{G} = G/S(G)$ почти проста с цоколем M, изоморфным $L_2(7)$, $U_3(3)$, A_7, A_8, A_9, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $L_3(4)$, $U_4(3)$ или J_2, причем фактор-группа $\overline{G}/M$ является 2-группой.

Если $M \in \{A_8, A_9, S_6(2), O_8^+(2)\}$, то $S(G) = O_2(G)$, а это противоречит тому, что $|A_8|_5 = 5$, $|A_9|_3 = 3^4$, $|S_6(2)|_2 = 2^9$ и $|O_8^+(2)|_2 = 2^{12}$.

Если $M \cong U_4(3)$, то $|M|_3 = 3^6$; противоречие с тем, что $|G|_3 = 3^3$.

Если $M \cong A_7$, то $|M|_3 = 3$ и, следовательно, $21 \in \omega(G)$; противоречие с леммой 2.1.

Если $M \in \{L_2(7), U_3(3)\}$, то $|S(G)|_5 = 5^2$ и, следовательно, $35 \in \omega(G)$; противоречие с леммой 2.1.

Если $M \cong L_3(4)$, то $|S(G)|_5 = 5$ и, следовательно, $35 \in \omega(G)$; противоречие с леммой 2.1.

Итак, $M \cong J_2$. Если $\overline{G} \cong Aut(J_2)$, то $G \cong Aut(J_2)$. Если $\overline{G} \cong J_2$, то $|S(G)| = 2$ и, следовательно, G изоморфна $2 \times J_2$ или $\widehat{J}_2$.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В.Д.** Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 658–728.
2. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** $C55$-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
3. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
4. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
5. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
6. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
7. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
8. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
9. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. **Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. 2001. Vol. 241, no. 2. P. 658–668.
11. **Chen G.** A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. Vol. 3, no. 1. P. 49–58.
12. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 528 p.
13. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.
14. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
15. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
16. **Khosravi B.** On the prime graph of the automorphism groups of sporadic simple groups // Arch. Math. (Brno). 2009. Vol. 45, no. 2. P. 83–94.
17. **Khosravi B.** A characterization of the automorphism groups of sporadic groups by the set of orders of maximal abelian subgroups // Kumamoto J. Math. 2009. Vol. 22. P. 17–34.
18. **Khosravi B.** On the prime graph of a finite group // Proc. Groups — St Andrews 2009. London Math. Soc. Lect. Not. Ser. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Vol. 388, no. 2. P. 424-428.
19. **Shi W.J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. 1991. 36 (17). P. 1281–1283.
20. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 12.02.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ $GF(2)A_7$ -МОДУЛЕЙ[1]

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

Доказано, что если G — конечная группа с нетривиальной нормальной 2-подгруппой Q такой, что $G/Q \cong A_7$ и элемент порядка 5 из G действует без неподвижных точек на Q, то расширение G над Q расщепляемо, Q элементарная абелева и Q есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G, каждая из которых как G/Q-модуль изоморфна одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(2)A_7$-модулей, сопряженных относительно внешнего автоморфизма группы A_7.

Ключевые слова: конечная группа, $GF(2)A_7$-модуль, вполне приводимое представление, граф простых чисел.

A. S. Kondrat'ev, I. V. Khramtsov. The complete reducibility of some $GF(2)A_7$-modules.

It is proved that, if G is a finite group with a nontrivial normal 2-subgroup Q such that $G/Q \cong A_7$ and an element of order 5 from G acts without fixed points on Q, then the extension of G by Q is splittable, Q is an elementary abelian group, and Q is the direct product of minimal normal subgroups of G each of which is isomorphic, as a G/Q-module, to one of the two 4-dimensional irreducible $GF(2)A_7$-modules that are conjugate with respect to an outer automorphism of the group A_7.

Keywords: finite group, $GF(2)A_7$-module, completely reducible representation, prime graph.

Введение

Интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости — характеризации группы по некоторому набору ее арифметических параметров. Одной из таких проблем является характеризация конечной группы по графу простых чисел.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G. *Графом простых чисел* $\Gamma(G)$ группы G называется граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

В рамках общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов простых чисел прежде всего привлекает внимание класс групп с несвязным графом простых чисел. Это объясняется тем, что указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга — Кегеля [20, теорема A] о конечных группах с несвязным графом простых чисел. Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна.

При изучении групп с несвязным графом простых чисел возникают нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных групп. Рассмотрим одну такую проблему. Пусть G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, не изоморфная ни группе Фробениуса, ни двойной группе Фробениуса. Обозначим через $F(G)$ подгруппу Фиттинга группы G. Тогда по теореме Грюнберга — Кегеля группа $\overline{G} = G/F(G)$ почти проста и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009) и Совета по грантам Президента РФ (проект МК-3395.2012.1).

известна ввиду результатов [2; 13; 20]. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ для $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G. Любой неединичный элемент x из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек (свободно) на $F(G)$, т. е. $C_{F(G)}(x) = 1$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G, причем $K < L \leq F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, называется *p-главным фактором* группы G, и его можно рассматривать как точный неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей, на которые некоторый элемент простого порядка (отличного от p) из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.

Уточняя эту проблему, мы приходим к следующей постановке. Пусть G — конечная группа, Q — нетривиальная нормальная подгруппа в G, $\overline{G} := G/Q$ — известная группа и элемент некоторого простого порядка из $G \setminus Q$ действует на Q без неподвижных точек. По теореме Дж. Томпсона [19] подгруппа Q нильпотентна. Естественными являются следующие вопросы.

1) *Каковы главные факторы группы G, входящие в Q?*

2) *Каково строение группы Q?*

3) *Если Q элементарная абелева, то будет ли действие $\overline{G}$ на Q вполне приводимо?*

4) *Будет ли расширение G над Q расщепляемым?*

Несмотря на важность этой проблематики, по ней имеется не так много результатов. Первой работой, посвященной исследованию случая, когда $\overline{G}$ — простая неабелева группа, была классическая работа Г. Хигмана [10]. Если группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(2^m)$, $m \geq 2$ и элемент порядка 3 из G действует на Q без неподвижных точек, то Г. Хигман дал полные (положительные) ответы на все сформулированные выше вопросы. В частности, Q — элементарная абелева 2-группа, действие $\overline{G}$ на Q вполне приводимо и каждый 2-главный фактор группы G изоморфен естественному $GF(2^m)SL_2(2^m)$-модулю. Позже Л. Мартино в работах [14; 15] получил аналогичный результат для случая, когда группа $\overline{G}$ изоморфна $Sz(2^n)$ и элемент порядка 5 из G действует на Q без неподвижных точек. Продолжая работу Хигмана, У. Стюарт [18] показал, что $Q = 1$ в случае, когда группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(q)$, q нечетно, $q > 5$ и элемент порядка 3 из G действует на Q без неподвижных точек. Работы А. Принса [16], Г. Цурека [21], Д. Холта и В. Плескена [11] были посвящены случаю, когда $Q = O_2(G)$, группа $\overline{G}$ изоморфна A_5 и элемент порядка 5 из G действует на Q без неподвижных точек. Этот случай оказался трудным, поскольку в этом случае Q уже может не быть абелевой группой. Принс [16] и Цурек [21] дали полные (положительные) ответы на вопросы 1), 3) и 4). В частности, Q есть произведение $\overline{G}$-инвариантных подгрупп Q_i, изоморфных либо гомоциклической 2-группе ранга 4, либо специальной 2-группе порядка 2^8 с центром порядка 2^4 (изоморфной унипотентному радикалу некоторой параболический максимальной подгруппы в $U_5(2)$). Причем в первом случае каждый 2-главный фактор группы G, входящий в Q_i, изоморфен ортогональному (подстановочному) $GF(2)A_5$-модулю, а во втором случае группа $Z(Q_i)$ изоморфна ортогональному $GF(2)A_5$-модулю, а $Q_i/Z(Q_i)$ — естественному $GF(4)SL_2(4)$-модулю. По раннему результату Г. Хигмана теоретической верхней оценкой для ступени нильпотентности группы Q была 6. Цурек [21] предположил, что такой оценкой будет 2. Однако в дальнейшем Д. Холт и В. Плескен [11] доказали, что ступень нильпотентности группы Q не превосходит 3, и построили пример группы Q порядка 2^{28}, когда эта граница достигается. Используя компьютер, они также показали, что примера меньшего порядка не существует. Принс [16; 17] показал, что в случае, когда $Q = O_2(G)$, группа $\overline{G}$ изоморфна A_6 и элемент порядка 5 из G действует на Q без неподвижных точек, вопросы 1)–4) решаются положительно. В [1; 3; 4] доказано, что в случае, когда $O(G) \neq 1$, группа $\overline{G}$ изоморфна A_6 и элемент порядка 5 из G действует на Q без неподвижных точек, группа $O(Q)$ абелева, $O(Q) = O_3(G)$ и 3-главные факторы группы G изоморфны 4-мерному неприводимому подстановочному $GF(3)\overline{G}$-модулю.

Если $Soc(\overline{G})$ — группа лиева типа над полем характеристики p, то для решения проблемы 1) полезен результат Гуральника — Тьепа [9], описывающий все унисингулярные простые группы лиева типа. Простая группа S лиева типа над полем характеристики p называется *унисингулярной*, если каждый элемент $s \in S$ имеет неединичную неподвижную точку в каждой неединичной абелевой p-группе, на которой действует S. Если таблица неприводимых p-модулярных брауэровых характеров цоколя группы $\overline{G}$ известна, то для решения проблемы 1) можно применить лемму 1, сформулированную ниже.

В данной работе доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа с нетривиальной нормальной 2-подгруппой Q такой, что $G/Q \cong A_7$. Предположим, что элемент порядка 5 из G действует без неподвижных точек на Q. Тогда расширение G над Q расщепляемо, Q элементарная абелева и Q есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G, каждая из которых как $GF(2)G/Q$-модуль изоморфна одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(2)A_7$-модулей, сопряженных относительно внешнего автоморфизма группы A_7.*

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [5–8; 12].

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [1, лемма 4]).

Лемма 1. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть G — группа, изоморфная A_7, и V — 4-мерный неприводимый $GF(2)G$-модуль. Если $S \in Syl_2(G)$, то $dim\ C_V(S) = 1$.*

Доказательство. Ввиду [8] все инволюции в G сопряжены. Группа G содержит подгруппу D, изоморфную D_{10}. Подгруппа D порождается двумя инволюциями t_1 и t_2. Ясно, что $dim\ C_V(t_1) = dim\ C_V(t_2) \in \{2, 3\}$. Если $dim\ C_V(t_1) = 3$, то $C_V(D) \neq 0$; противоречие с тем, что элемент порядка 5 из D действует на V без неподвижных точек, поэтому $dim\ C_V(t) = 2$ для всех инволюций t из G. Пусть $S \in Syl_2(G)$ и $W = C_V(S)$. Ясно, что $W \neq 0$. Предположим, что $dim\ W > 1$. Тогда $dim\ W = 2$. Подгруппа S содержится в подгруппе $R \cong S_4$ из G. Пусть $U = O_2(R)$. Тогда подпространство $W = C_V(U)$ является R-допустимым, и, следовательно, R централизует W. Подгруппа R содержит подгруппу $\langle x\rangle \leftthreetimes \langle t\rangle$, изоморфную S_3. Тогда $V = [\langle x\rangle, V] \oplus W$ и 2-мерное подпространство $[\langle x\rangle, V]$ является t-допустимым. Поэтому $C_{[\langle x\rangle,V]}(t) \neq 0$, и, следовательно, $dim\ C_V(t) = 3$; противоречие. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Пусть выполнены условия теоремы. Положим, $\overline{G} = G/Q$. Так как G содержит подгруппу, изоморфную A_6, то ввиду [16, теорема 2] подгруппа Q является элементарной абелевой 2-группой, и поэтому ее можно рассматривать как $GF(2)\overline{G}$-модуль. По [6] каждый 2-главный фактор группы G изоморфен одному из двух неприводимых 4-мерных $GF(2)A_7$-модулей, сопряженных относительно внешнего автоморфизма группы A_7. Используя индукцию по числу 2-главных факторов группы G, достаточно рассмотреть случай, когда группа G имеет в точности два 2-главных фактора. В этом случае $|Q| = 2^8$. Пусть Q_1 — собственное G-допустимое подпространство из Q. Тогда $Q_1 \trianglelefteq G$ и $|Q_1| = 2^4$. Из условия вытекает, что $\overline{G}$ действует неприводимо на Q_1 и Q/Q_1 (так как уже силовская 5-подгруппа из $\overline{G}$ так действует). Группа $\overline{G}$ содержит подгруппу $\overline{M}$, изоморфную A_6. Пусть M — полный прообраз в G подгруппы $\overline{M}$. По [17, теорема 1] в Q есть подгруппа Q_2 порядка 16 такая, что $Q = Q_1 \times Q_2$ и M нормализует Q_2. Ввиду [6] и леммы 1 в $\overline{M}$ есть элемент порядка 3, действующий свободно на Q_1 и Q/Q_1. Поэтому $\overline{M}$ действует транзитивно на неединичных элементах каждой из групп Q_1 и Q/Q_1. Пусть t — инволюция из Q_2, $T = Q_1 \times \langle t \rangle$ и $N = N_G(T)$. Тогда $|G\colon N| = 15$. Ввиду [8] имеем $\overline{N} \cong L_2(7)$ и $\overline{N_M(T)} \cong S_4$.

Возьмем в N элемент z порядка 7. Ясно, что $|C_Q(z)| = 4$. Далее, по теореме Машке $C_Q(z) = \langle v \rangle \times \langle t_1 \rangle$, где $Q_1 = [Q_1, \langle z \rangle] \times \langle v \rangle$ и $T = Q_1 \times \langle t_1 \rangle$. Поэтому $\langle z \rangle$-орбиты на T исчерпываются четырьмя одноэлементными орбитами ($\{1\}, \{v\}, \{t_1\}, \{vt_1\}$) и четырьмя орбитами длины 7. Если $t \in \{t_1, vt_1\}$, то $|G : C_G(t)| = 15$ и, следовательно, $Q_2 = \{1\} \bigcup t^G \lhd G$, т. е. G действует вполне приводимо на Q. Поэтому далее будем считать, что $|G : C_G(t)| = 15 \cdot 7 = 105$.

Поскольку Q_2 и T нормальны в $N_M(T)$, то подгруппа $\langle t \rangle = Q_2 \bigcap T$ нормальна в $N_M(T)$, т. е. $C_G(t) = N_M(T)$.

Имеем $N_N(z) = (\langle v \rangle \times \langle t_1 \rangle) \times (\langle z \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где $\langle z, x \rangle$ — группа Фробениуса порядка 21. Если $C_N(\langle v, t_1 \rangle) > N_N(\langle z \rangle)$, то $\langle v, t_1 \rangle$ централизует N. Но тогда подгруппа $\langle v \rangle \times \langle t_1 \rangle \times \langle t \rangle$ централизует $N_M(T)$ и, в частности, централизует силовскую 2-подгруппу в $\overline{M}$, что противоречит лемме 2.

Итак, $C_N(\langle v, t_1 \rangle) = N_N(\langle z \rangle)$.

Предположим, что v централизует N. Тогда $C_N(t_1) = C_N(vt_1) = N_N(\langle z \rangle)$, и, следовательно, $|N : C_N(t_1)| = |N : C_N(vt_1)| = 8$.

Покажем, что t_1 и vt_1 не сопряжены в N. Предположим противное: существует элемент $g \in N$ такой, что $gt_1g^{-1} = vt_1$. Тогда g не лежит в $C_N(t_1)$. Поскольку $\overline{N} = \overline{N_N(\langle z \rangle)S}$, где S — силовская 2-подгруппа из $N_M(T)$, то можно считать, что $g \in S$. Имеем $g^2t_1g^{-2} = t_1$, т. е. g^2 централизует подгруппу $\langle v, t_1 \rangle$, откуда $\overline{N_N(\langle v, t_1 \rangle)}$ содержит $\langle \overline{N_N(\langle z \rangle)}, \overline{g} \rangle = \overline{N}$. Следовательно, $\langle v, t_1 \rangle \lhd N$ и $|N : C_N(t_1)| = 2$, что противоречит доказанному выше.

Таким образом, $T \backslash Q_1$ разбивается на N-классы сопряженных элементов с представителями t, t_1 и vt_1, а это противоречит тому, что $|T \setminus Q_1| = 16$.

Итак, v не централизует N, и, следовательно, $C_N(v) = N_N(\langle z \rangle)$, откуда $|N : C_N(v)| = 8$. Можно считать, что $|N : C_N(t_1)| = 8$.

Имеем $T \setminus Q_1 = t^N \bigcup t_1^N \bigcup \{vt_1\}$. Поэтому $\langle t \rangle \times \langle vt_1 \rangle$ централизует $N_M(T)$ и, следовательно, централизует в $\overline{G}$ подгруппу $\overline{N_M(T)}$, изоморфную S_4. Но тогда четверная подгруппа $\langle tQ_1 \rangle \times \langle t_1Q_1 \rangle$ из Q/Q_1 централизует силовскую 2-подгруппу из $\overline{N_M(T)}$, которая является силовской 2-подгруппой в $\overline{G}$, что противоречит лемме 2.

Вполне приводимость доказана.

Докажем теперь расщепляемость расширения G над Q. По [16, теорема 2] расширение Q посредством $\overline{M}$ расщепляемо. Теперь теорема Гашюца [7, (10.4)] влечет, что G расщепляема над Q.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** $C55$-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
2. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
4. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
5. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.

6. An atlas of Brauer characters // C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
7. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
8. Atlas of finite groups // J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Guralnick R.M., Tiep P.H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6, no. 3. P. 271–310.
10. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.
11. **Holt D.F., Plesken W.** A_5-invariant 2-groups with no trivial sections // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1986. Vol. 37, no. 145. P. 39–47.
12. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
13. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
14. **Martineau P.** On representations of the Suzuki groups over fields of odd characteristic // J. London Math. Soc. (2) 1972. Vol. 6. P. 153–160.
15. **Martineau R.P.** On 2-modular representations of the Suzuki groups // Amer. J. Math. 1972. Vol. 94. P. 55–72.
16. **Prince A.R.** On 2-groups admitting A_5 or A_6 with an element of order 5 acting fixed point freely // J. Algebra. 1977. Vol. 49, no. 2. P. 374–386.
17. **Prince A.R.** An analogue of Maschke's theorem for certain representations of A_6 over $GF(2)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect A. 1982. Vol. 91, no. 3–4. P. 175–177.
18. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 426, no. 4. P. 653–680.
19. **Thompson J.** Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. 1959. Vol. 45. P. 578–581.
20. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
21. **Zurek G.** Über A_5-invariante 2-Gruppen // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1982. H. 155. 92 S.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 11.03.2012

Храмцов Игорь Владимирович
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ihramtsov@gmail.com

Том 18 № 3 2012

УДК 519.95

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

В. Д. Мазуров, А. И. Смирнов

Рассматривается задача интерпретации трехмерных изображений по их плоским проекциям с точностью до набора видимых граней. Для проекций выпуклых многогранников демонстрируется алгоритм интерпретации на основе максимальных совместных подсистем некоторой несовместной системы линейных неравенств, моделирующей требования видимости граней многогранника. Приводится ряд модельных примеров, в частности, алгоритм применяется для интерпретации куба Неккера.

Ключевые слова: многогранник, грань, интерпретация, линейные неравенства.

V. D. Mazurov, A. I. Smirnov. Interpretation of contradictory images by means of systems of linear inequalities.

We consider the problem of interpretation of three-dimensional images from their flat projections up to the set of visible faces. For projections of convex polytopes, we present an interpretation algorithm based on maximum feasible subsystems of a certain infeasible system of linear inequalities modeling the visibility requirement for faces of the polytope. A number of model examples are given; in particular, the algorithm is applied for interpretation of the Necker cube.

Keywords: polytope, face, interpretation, linear inequalities.

Введение

В работах С. Н. Черникова и его учеников разработан универсальный подход к исследованию систем линейных неравенств: метод граничных решений, метод фундаментального свертывания и другие основополагающие методы, применимые не только к совместным, но и к несовместным системам линейных неравенств. Широкое распространение аппарата теории линейных неравенств при моделировании самых различных систем обусловило многообразие сфер применения этих методов. Одной из таких новых областей применения, как будет показано далее, стал анализ плоских изображений трехмерных объектов.

Вопросы автоматической обработки изображений приобрели в последнее время особую актуальность. Задачи разработки прикладных интеллектуальных и робототехнических систем и связанные с ними проблемы понимания механизмов человеческого зрения, задачи интерпретации изображений в компьютерной томографии стимулировали рост исследований в области обработки изображений, и как следствие в последнее десятилетие в этой области были значительные результаты [1]. Особый прогресс был достигнут в разработке методов решения задач восстановления трехмерных объектов по двумерным цифровым изображениям. В данной работе применяется метод максимально совместных подсистем (МСП) для восстановления трехмерной структуры многогранника по его известным ортогональным проекциям.

В классической постановке этой задачи предполагается наличие нескольких ракурсов изображения, позволяющих разрабатывать алгоритмы на основе хорошо апробированных проективных методов, таких, как например, алгоритм восстановления по стереопаре (Standard and Wide-base Stereo) и других (см. обзор [1]). Но в настоящее время внимание исследователей смещается в область восстановления трехмерных сцен по одному изображению [2; 3]. Интересен в связи с этим проект Корнуельского университета (Cornell University) "Make3D", начавшийся

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00273) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

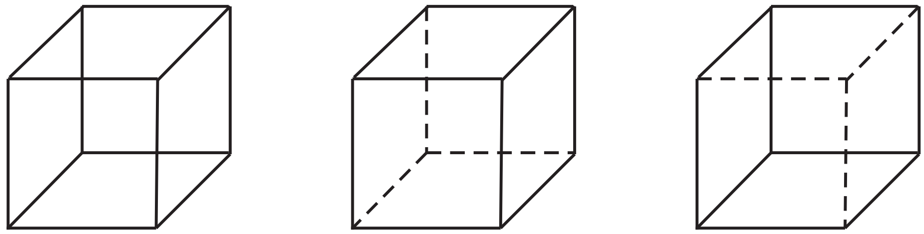


Рис. 1. Куб Неккера и его возможные пространственные интерпретации.

в Стенфордском университете [4] и также имеющий целью решение пока еще не ставшей типичной задачи восстановления трехмерной модели сцены всего по одному фотоснимку. Этот проект показал, что значительный объем информации содержится в так называемых монокулярных признаках (monocular cues) самого изображения, которые до этого зачастую игнорировались. Для понимания механизмов формирования видимых образов особый интерес представляет анализ неоднозначных изображений, которые допускают две или более интерпретации (так называемые трансформирующиеся или обращающиеся изображения).

В данной работе рассматривается одна из разновидностей этой задачи — задача интерпретации плоских проекций трехмерных объектов — прозрачных многогранников, заданных их скелетами. Эта задача важна не только в прикладном аспекте, но и с точки зрения понимания механизмов восприятия и интерпретации изображений человеческим мозгом. Особенно интересен аспект восприятия человеком так называемых двойственных и противоречивых отображений, эта задача интенсивно исследуется в последние годы философами, психологами и математиками [5].

Одним из самых простых и самых исследованных изображений такого рода является куб Неккера — контурное изображение, соответствующее параллельной проекции вершин и ребер куба на плоскость. Это изображение и две его возможные пространственные интерпретации приведены на рис. 1.

При достаточно длительном наблюдении эта фигура как бы спонтанно (самопроизвольно) "переворачивается": одна объемная проекция сменяется другой. По-видимому, в данном случае обе интерпретации равноправны, и мозг "пробует" каждую из этих гипотез поочередно, не имея оснований выбрать окончательно одну из них, так как полностью отсутствует контекстная информация, помогающая принять решение в распознавании обычных зрительных образов (отсутствует перспектива — нет разницы в размерах граней). Другие известные примеры аналогичного характера — каркас полуоткрытой книги ("фигура Маха") и "лестница Шредера" [6].

Закономерности динамики восприятия таких неоднозначных фигур подробно анализировались, в частности, Дж. Кальоти [7], показавшим, что во многих отношениях они сходны с явлениями самоорганизации в диссипативных структурах за порогом неустойчивого, критического состояния. Особенностью этих процессов является динамическое чередование (инверсия) двух стационарных состояний, в которых находится система. Куб Неккера — представитель класса "каркасных моделей" [8], содержащих только вершины и ребра объекта.

Цель данной работы — демонстрация нового подхода к решению задачи трехмерной интерпретации плоских изображений на основе поиска максимальных (по включению) совместных подсистем некоторой несовместной системы линейных неравенств. В качестве класса трехмерных объектов при этом используется класс выпуклых многогранников, а неравенства упомянутой несовместной системы ограничений отражают требования видимости граней этого многогранника.

Следуя работе [1], под изображением мы будем понимать непустое множество точек на плоскости. Содержательным обоснованием этому может служить то, что любое реальное (нецветное) изображение можно аппроксимировать изображением, состоящим лишь из точек.

1. Постановка задачи

Предлагаемые методы используют математический аппарат теории несовместных систем неравенств [9–13] и не ограничиваются случаем трехмерных сцен, поэтому приведем общую постановку задачи [14; 15].

Пусть L_1, L_2 — вещественные линейные пространства, $L = L_1 \times L_2$ — декартово произведение пространств и задана проекция P выпуклого многогранника $Q \subset L$ на подпространство L_1

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} M_P^i = \pi_{L_1} \bigcup_{i=1}^{k} M_Q^i,$$

где π_{L_1} — оператор проектирования на подпространство L_1, M_Q^i $(i = 1, \dots, k)$ — множество граней исходного многогранника размерности $i-1$, M_P^i — множество их проекций. Таким образом, $M = M_P^1$ — множество точек-проекций вершин многогранника, M_P^2 — множество проекций ребер и так далее. Множество M в дальнейшем считаем упорядоченным. Требуется восстановить многогранник Q в виде

$$Q = \{q = [p, y_p] \in L \colon p \in P\},$$

где $p \in L_1,\ y_p \in L_2$, $y = [y_p \in L_2 \colon p \in P]$ — искомый вектор.

Предлагаемый подход заключается в следующем. Пусть $q_i = [p_i, y_i]$ $(i = 1, \dots, t)$ — вершины многогранника Q, определяющие некоторую его грань $q_1 q_2 \dots q_t$, и каким-либо образом на множестве кортежей $[q_1 q_2 \dots q_t]$ задан (в соответствии с проекциями) предикат V. Грань $q_1 q_2 \dots q_t = \mathrm{co}\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$, соответствующая кортежу $[q_1 q_2 \dots q_t]$, называется *видимой*, если $V(q_1 q_2 \dots q_t) = 1$. Тогда наборы видимых граней многогранника Q соответствуют максимальным совместным подсистемам системы

$$V(q_1 q_2 \dots q_t) = 1 \qquad (\forall\, p_1 p_2 \dots p_t \subset P).$$

Рассмотрим подробнее задачу восстановления трехмерного многогранника по его плоской проекции. Пусть имеется некий трехмерный многогранник Q, определяемый множеством его вершин M_Q, ребер M_Q^2 и граней M_Q^3, и известна проекция P этого многогранника на некоторую плоскость, задаваемую вектором нормали $\vec{n}$. Требуется по известной проекции восстановить исходный многогранник с точностью до некоторого отношения эквивалентности, которое будет определено ниже. Восстановленный многогранник будем называть интерпретацией его проекции. Та же терминология будет употребляться и для его составных частей: вершин, ребер, граней. Пусть проекции вершин, ребер и граней исходного многогранника Q составляют множества M_P, M_P^2 и M_P^3 соответственно.

Введем на плоскости проекции прямоугольную систему координат x_1, x_2. Третью координату y направим вдоль вектора $\vec{n}$. Таким образом, каждой вершине $q = (x_1, x_2, y)$ многогранника Q соответствует некоторая точка $p = (x_1, x_2)$ фигуры P. Определим на множестве прообразов фигуры P отношение *эквивалентности* и будем считать задачу реконструкции многогранника решенной, если будут найдены представители всех классов эквивалентности.

Введем на множестве граней M_Q^3 многогранника Q следующее отношение порядка.

О п р е д е л е н и е 1. Будем считать, что грань Γ_1 предшествует грани Γ_2, если существует точка $x = (x_1, x_2)$, принадлежащая внутренности пересечения $\gamma_1 \cap \gamma_2$ проекций γ_1 и γ_2 этих граней, имеющая прообразы $z_1 = (x_1, x_2, y_1)$ и $z_2 = (x_1, x_2, y_2)$ на гранях Γ_1 и Γ_2 соответственно, причем $y_1 < y_2$.

Поскольку в этом определении выбор точки x неоднозначен, необходимо показать его корректность, т. е. независимость от выбора этой точки. Предположим, что выполняются следующие условия:

(A1): многогранник Q — выпуклый;

(A2): многогранник Q — ограниченный;
(A3): многогранник Q — телесный.

Лемма 1. *Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $x' = (x'_1, x'_2)$ — любые две точки внутренности пересечения $\gamma_1 \cap \gamma_2$ проекций γ_1 и γ_2 граней Γ_1 и Γ_2 соответственно с прообразами $z_1 = (x_1, x_2, y_1)$, $z'_1 = (x'_1, x'_2, y'_1)$ и $z_2 = (x_1, x_2, y_2)$, $z'_2 = (x'_1, x'_2, y'_2)$ на гранях Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда неравенства $y_1 < y_2$ и $y'_1 < y'_2$ выполняются или не выполняются одновременно.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует пара точек $x = (x_1, x_2)$ и $x' = (x'_1, x'_2)$, для которых выполнены предположения леммы, и, тем не менее, для одной из них $y_1 < y_2$, а для другой $y'_1 > y'_2$. Рассмотрим отрезки $[z_1, z'_1]$ и $[z_2, z'_2]$. Так как точки x и x' являются внутренними точками проекций γ_1 и γ_2 граней Γ_1 и Γ_2 соответственно, то и точки z_1, z'_1, z_2, z'_2 являются внутренними точками своих граней. Поскольку точки z_1, z_2 и z'_1, z'_2 лежат на параллельных прямых, то указанные отрезки лежат в одной плоскости, определяемой этими прямыми, и все их точки являются внутренними точками граней Γ_1 и Γ_2 соответственно. Но тогда эти отрезки пересекаются в некоторой точке $\tilde{z}$. Эта точка принадлежит и грани Γ_1, и грани Γ_2, следовательно, $\tilde{z} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$. Мы получили, что грани Γ_1 и Γ_2 пересекаются, причем точка пересечения $\tilde{z}$ является внутренней точкой каждой из них, что невозможно. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A3). *Тогда для любой грани Γ многогранника Q существует ровно одна другая грань этого многогранника, сравнимая с ней по введенному выше отношению порядка.*

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — некоторая внутренняя точка проекции γ некоторой грани Γ многогранника Q и точка $z = (x_1, x_2, y) \in \Gamma$. Проведем через точку x прямую l, параллельную оси Oy (т. е. перпендикулярную плоскости проекции P). Покажем, что эта прямая пересекает еще хотя бы одну грань многогранника Q.

В силу условия (A3) существует точка z_1 — внутренняя точка многогранника Q, не лежащая на грани Γ. Пусть z'_1 — точка пересечения перпендикуляра, опущенного из точки z_1 на плоскость проекции, с гранью Γ. Отрезок $[z_1, z]$ в силу условия (A1) полностью состоит из точек многогранника Q, поэтому можно считать, что точка z'_1 — внутренняя точка грани Γ. Выберем точку z_2 на продолжении отрезка $[z'_1, z]$ так, чтобы эта точка так же (как и точка z) принадлежала грани Γ и точка z лежала внутри отрезка $[z'_1, z_2]$. Тогда отрезок $[z_1, z_2]$ пересекает прямую l в некоторой точке $z_3 \in Q$. Итак, мы получили на прямой l еще одну точку $z_3 \neq z$ многогранника Q, и, следовательно, отрезок $[z, z_3]$ полностью состоит из точек многогранника Q. Из условия (A2) вытекает, что на луче — продолжении отрезка $[z, z_3]$ существует точка, не принадлежащая многограннику Q, и, следовательно, существует точка $z' \in l$, лежащая на границе многогранника Q, т. е. на некоторой его грани Γ'.

Итак, показано, что прямая l пересекает многогранник Q по крайней мере в двух точках z и z'. Покажем, что других граничных точек многогранника на этой прямой нет.

Предположим существование точки z_0 такой, что $z_0 \neq z$, $z_0 \neq z'$, $z_0 \in l \cap Q$, и пусть порядок следования этих точек на прямой l, например, следующий: z, z', z_0. Тогда точка z', с одной стороны, — граничная точка многогранника Q, так как $z' \in \Gamma'$, с другой стороны, в силу условия (A1) является внутренней точкой этого многогранника, так как $z' \in (z, z_0)$. Полученное противоречие показывает, что прямая l пересекает ровно две грани многогранника Q. Согласно данному выше определению, это означает наличие ровно двух сравнимых граней Γ и Γ'.

Лемма доказана.

В соответствии с естественной интерпретацией будем называть минимальные по введенному упорядочению элементы множества M^3_Q *видимыми гранями.* Многогранники, у которых грани, имеющие одну и ту же грань-проекцию, одновременно видимы или невидимы, будем считать эквивалентными. Таким образом, задачу интерпретации плоской проекции многогранника можно уточнить следующим образом: *восстановить исходный многогранник с точностью до набора видимых граней.*

Заметим, что эта задача эквивалентна задаче нахождения минимальных (по включению) покрытий выпуклой оболочки coM_P проекций вершин многогранника Q проекциями его граней. Это обстоятельство, с одной стороны, дает один из возможных подходов к решению исходной задачи и, с другой стороны, может служить критерием решения для найденного набора граней.

З а м е ч а н и е. Набор видимых граней, естественно, зависит от направления зрения, т. е. от направления оси Oy. При смене направления этой оси на противоположное, как нетрудно заметить, максимальные грани становятся минимальными, и, наоборот, минимальные грани переходят в максимальные.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Задача интерпретации плоской проекции многогранника при условиях* (A1)–(A3) *имеет ровно два решения: первое состоит из набора минимальных граней многогранника Q, второе — из набора максимальных его граней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы вытекает из доказанных лемм и сделанного выше замечания.

2. Интерпретация вершин, ребер, граней

Заметим, что во всех интерпретациях ребра, принадлежащие границе проекции многогранника coM_P, будут видимы. Далее, из видимости граней большей размерности (ребер, граней в трехмерном случае) следует видимость граней меньшей размерности, ее составляющих (вершин, ребер соответственно).

Перед решением задачи полезно проверить выполнение некоторых простых условий, вытекающих из наших требований: соотношения Эйлера $|M_P|-|M_P^2|+|M_P^3|=2$ и условия, согласно которым из каждой вершины должны исходить как минимум три ребра.

Перейдем к интерпретации вершин. Пусть $p\in M_P$. Если эта точка лежит на границе проекции многогранника, то эта вершина видима в любой интерпретации. Пусть теперь точка p лежит внутри проекции многогранника. Тогда существует грань $p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}$, ее содержащая. Находим разложение

$$p=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j p_{i_j},\qquad \alpha_j\ge 0\qquad (\forall\, j\in\overline{1,k}),\qquad \sum_{j=1}^{k}\alpha_j=1.$$

Если $p_{i_j}=(x_1^{i_j},x_2^{i_j})$, $q_{i_j}=(x_1^{i_j},x_2^{i_j},y_j)$, $p=(x_1,x_2)$, $q=(x_1,x_2,y)$, то вершину q считаем видимой, если $y<\sum_{j=1}^{k}\alpha_j y_j$.

Перейдем к вопросу об интерпретации ребер. Итак, пусть имеется ребро $p_1p_2\in M_P^2$. Как замечено ранее, видимости вершин (если хоть одна из них не лежит на границе coM_p) достаточно для видимости ребра. Но метод интерпретации проекций, основанный на интерпретации вершин, не гарантирует для полученного многогранника выполнение перечисленных условий; класс интерпретаций в этом случае слишком широк и содержит различные "вычурные" фигуры. Поэтому мы будем пользоваться следующим усилением метода интерпретации вершин.

Пусть $p_1=(x_1^1,x_2^1)$, $p_2=(x_1^2,x_2^2)$, $q_1=(x_1^1,x_2^1,y_1)$, $q_2=(x_1^2,x_2^2,y_2)$, $p_j^i=(x_1^{i,j},x_2^{i,j})$, $q_j^i=(x_1^{i,j},x_2^{i,j},y_{ij})$ $(i\in\overline{1,r},\ j\in\overline{1,k_i})$. Найдем все грани $\Gamma_i=p_1^i\dots p_{k_i}^i$ $(i\in\overline{1,r})$, которые пересекают ребро p_1p_2. Построим разложения

$$p_1=\sum_{s=1}^{k_i}\alpha_{1s}^i p_s^i,\qquad p_2=\sum_{s=1}^{k_i}\alpha_{2s}^i p_s^i,\qquad \sum_{s=1}^{k_i}\alpha_{ts}^i=1\qquad (t=1,2).$$

Далее, считаем, что ребро q_1q_2 видимо тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:

$$y_1 < \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_{1s}^i y_{is}, \qquad y_2 < \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_{2s}^i y_{is} \qquad (i \in \overline{1,r}).$$

Получим подобные системы для всех ребер из M_P^2 и объединим их:

$$\left.\begin{array}{c} A_1 y < 0, \\ \cdots \\ A_n y < 0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Здесь $n = |M_P^2|$, y — вектор, составленный из всех полученных переменных y_1, y_2, y_{is} (его размерность равна $|M_P|$).

Необходимо учесть также отсутствие "изгибов" граней с числом вершин более трех. Это дает систему равенств (возможно, пустую) вида $By = 0$, позволяющую снизить размерность системы (1). В итоге получаем систему неравенств

$$\left.\begin{array}{c} \tilde{A}_1 \tilde{y} < 0, \\ \cdots \\ \tilde{A}_n \tilde{y} < 0, \end{array}\right\} \tag{2}$$

где вектор $\tilde{y}$ содержит лишь часть переменных вектора y.

Теперь находим все МСП системы (2) и выбираем из них те, которые достаточны для интерпретации ребер, т. е. целиком составлены из некоторых матриц $\tilde{A}_i$. Таким образом, данный алгоритм решает поставленную задачу интерпретации полностью.

Рассмотрим некоторые модельные примеры.

3. Демонстрация работы алгоритма

Пример 1. Рассмотрим следующую проекцию (рис. 2): $M_P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $p_1 = (-1, 0)$, $p_2 = (0, -1)$, $p_3 = (1, 2)$, $p_4 = (2, 0)$, $M_P^1 = \{p_1p_2,\ p_1p_3,\ p_1p_4,\ p_2p_3,\ p_2p_4,\ p_3p_4\}$.

Невидимыми могут быть ребра q_1q_4 и q_2q_3.

1) Ребро q_1q_4. Если q_1 "заслоняется" продолжением грани $q_2q_3q_4$, то

(a1) $\quad 5y_1 < 6y_2 + 3y_3 - 4y.$

Если q_4 "заслоняется" продолжением грани $q_1q_2q_3$, то

(a2) $\quad 4y_4 < -5y_1 + 6y_2 + 3y_3.$

2) Ребро q_2q_3. Если q_2 "заслоняется" продолжением грани $q_1q_3q_4$, то

(a3) $\quad 6y_2 < 5y_1 - 3y_3 + 4y_4.$

Если q_3 "заслоняется" продолжением грани $q_1q_2q_4$, то

(a4) $\quad 3y_3 < 5y_1 - 6y_2 + 4y_4.$

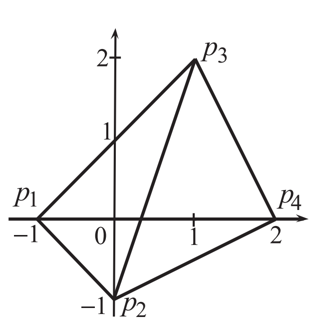


Рис. 2

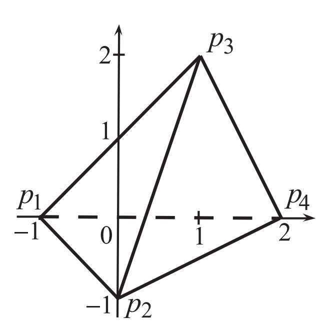


Рис. 3

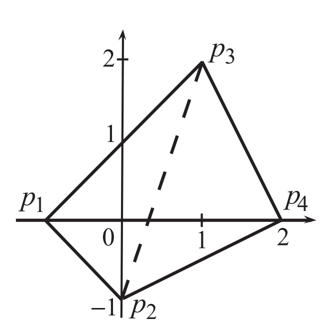


Рис. 4

Обозначая $h(y) = 5y_1 - 6y_2 - 3y_3 + 4y_4$, получаем систему неравенств

$$\left.\begin{array}{ll} (a1) & h(y) < 0, \\ (a2) & h(y) < 0, \\ (a3) & -h(y) < 0, \\ (a4) & -h(y) < 0, \end{array}\right\}$$

которая имеет две МСП. Первая МСП, содержащая два первых неравенства, соответствует видимости ребра q_2q_3 (рис. 3), вторая, содержащая последние два неравенства, соответствует видимости ребра q_1q_4 (рис. 4).

П р и м е р 2. Рассмотрим следующую проекцию (рис. 5): $M_P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, $p_1 = (-3,0)$, $p_2 = (-1,-1)$, $p_3 = (0,4)$, $p_4 = (1,1)$, $p_5 = (2,0)$, $M_P^1 = \{p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_5, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_5\}$.

Невидимыми могут быть ребра q_1q_4, q_2q_3, q_3q_4, q_4q_5.

1) Ребро q_1q_4:

(b1) $q_1 \in q_2q_3q_5 \;\Rightarrow\; 14y_1 < 20y_2 + 5y_3 - 11y_5$,

(b2) $q_4 \in q_2q_3q_5 \;\Rightarrow\; 7y_4 < y_2 + 2y_3 + 4y_5$,

(b3) $q_4 \in q_1q_2q_3 \;\Rightarrow\; 11y_4 < -8y_1 + 13y_2 + 6y_3$.

2) Ребро q_2q_3:

(b4) $q_2 \in q_1q_3q_4 \;\Rightarrow\; 13y_2 < 8y_1 - 6y_3 + 11y_4$,

(b5) $q_3 \in q_1q_2q_4 \;\Rightarrow\; 6y_3 < 8y_1 - 13y_2 + 11y_4$.

3) Ребро q_3q_4:

(b6) $q_4 \in q_2q_3q_5 \;\Rightarrow\; 7y_4 < y_2 + 2y_3 + 4y_5$.

4) Ребро q_4q_5:

(b7) $q_4 \in q_2q_3q_5 \;\Rightarrow\; 7y_4 < y_2 + 2y_3 + 4y_5$.

Уравнение, соответствующее требованию $q_5 \in q_1q_2q_4$, имеет вид

(b8) $4y_1 - 5y_2 - 5y_4 + 6y_5 = 0$.

Обозначая $h(y) = 14y_1 - 20y_2 - 5y_3 + 11y_5$, получаем с учетом этого уравнения систему неравенств

$$\left.\begin{array}{ll} (b1) & h(y) < 0, \\ (b2) & h(y) < 0, \\ (b3) & h(y) < 0, \\ (b4) & -h(y) < 0, \\ (b5) & -h(y) < 0, \\ (b6) & h(y) < 0, \\ (b7) & h(y) < 0. \end{array}\right\}$$

Эта система имеет две МСП; первая содержит четвертое и пятое неравенства, вторая — все остальные. В соответствии с этим получаем две интерпретации: в первой видимы ребра q_1q_4, q_3q_4, q_4q_5 (рис. 6), во второй видимо ребро q_2q_3 (рис. 7).

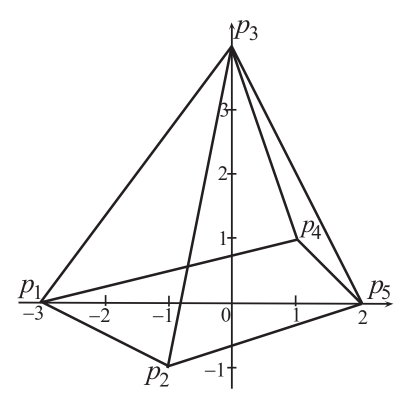


Рис. 5

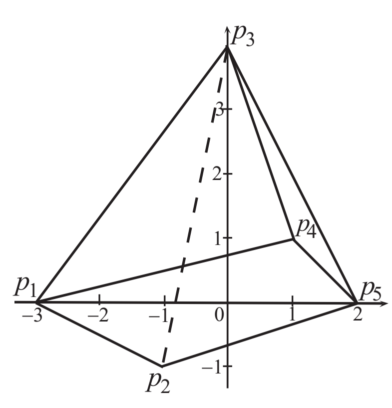


Рис. 6

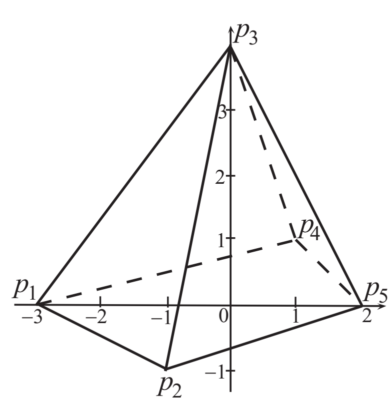


Рис. 7

П р и м е р 3. Куб Неккера [7] (рис. 8).

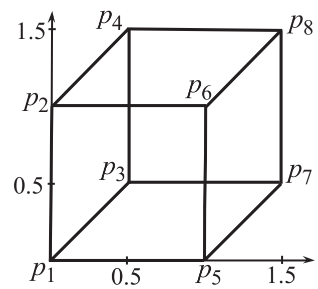


Рис. 8

Пусть $M_P = \{p_1, p_2, \dots, p_8\}$, где $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (0,1)$, $p_3 = (0.25, 0.5)$, $p_4 = (0.25, 1.5)$, $p_5 = (1,0)$, $p_6 = (1,1)$, $p_7 = (1.25, 0.5)$, $p_8 = (1.25, 1.5)$. Множество ребер имеет вид $M_P^2 = \{p_1p_2,\ p_1p_3,\ p_1p_5,\ p_2p_4,\ p_2p_6,\ p_3p_4,\ p_3p_7,\ p_4p_8, ,p_5p_6,\ p_5p_7,\ p_6p_8,\ p_7p_8\}$, где $|M_P^2| = 12$ и каждой точке $p_i = (x_1^i, x_2^i)$ соответствует вершина $q_i = (x_1^i, x_2^i, y_i)$ многогранника в трехмерном пространстве. Заметим, что ребра p_1p_2, p_2p_4, p_4p_8, p_7p_8, p_5p_7, p_1p_5 всегда видимы (при любой интерпретации).

Составим систему уравнений относительно вектора $y = [y_1, y_2, \dots, y_8]$, вытекающую из факта отсутствия “изгибов” граней:

$$\left.\begin{array}{lll}
q_1 \in q_2q_5q_6 & \Rightarrow & y_1 - y_2 - y_5 + y_6 = 0, \\
q_5 \in q_6q_7q_8 & \Rightarrow & y_5 - y_6 - y_7 + y_8 = 0, \\
q_3 \in q_4q_7q_8 & \Rightarrow & y_3 - y_4 - y_7 + y_8 = 0, \\
q_1 \in q_2q_3q_4 & \Rightarrow & y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 0, \\
q_1 \in q_3q_5q_7 & \Rightarrow & y_1 - y_3 - y_5 + y_7 = 0, \\
q_2 \in q_4q_7q_8 & \Rightarrow & y_3 - y_4 - y_7 + y_8 = 0.
\end{array}\right\}$$

Эта система эквивалентна следующей, выражающей переменные y_4, y_6, y_7, y_8 через y_1, y_2, y_3, y_5:

$$\left.\begin{array}{l}
y_4 = y_1 + y_2 + y_3, \\
y_6 = -y_1 + y_2 + y_5, \\
y_7 = -y_1 + y_3 + y_5, \\
y_8 = -2y_1 + y_2 + y_3 + y_5.
\end{array}\right\}$$

Перейдем к составлению системы неравенств, отражающей факт видимости соответствующих ребер многогранника. Внутри многогранника со M_P лежат ребра p_1p_3, p_2p_6, p_3p_4, p_3p_7, p_5p_6, p_6p_8. Следовательно, только соответствующие им ребра исходного многогранника могут “заслоняться” другими гранями и быть невидимыми в некоторых интерпретациях.

1) Ребро q_1q_3 может “заслоняться” только гранью $q_1q_2q_6q_5$. Отсюда единственное неравенство, вытекающее из соотношения $p_3 = 0.25p_1 + 0.5p_2 + 0.25p_5$,

(c1) $\quad y_3 < 0.25y_1 + 0.5y_2 + 0.25y_5 = 0.$

2) Ребро q_2q_6 может “заслоняться” гранями $q_1q_2q_4q_3$ и $q_3q_4q_8q_7$. Поскольку вершина q_2 всегда видима, в первом случае достаточно написать неравенство, вытекающее из невозможности пересечения ребер и граней, а именно, точка q_6 должна быть “впереди” плоскости — продолжения грани $q_1q_2q_4q_3$. Из соотношения $p_6 = -2p_1 - p_2 + 4p_3$ получаем

(c2) $\quad y_6 < -2y_1 - y_2 + 4y_3.$

Во втором случае, когда рассматривается грань $q_3q_4q_8q_7$, из соотношений $p_2 = 1.25p_4 + 0.5p_7 - 0.75p_8$, $p_6 = 0.25p_4 + 0.5p_7 + 0.25p_8$ аналогично получаем еще два неравенства:

(c3) $\quad y_2 < 1.25y_4 + 0.5y_7 - 0.75y_8;$

(c4) $\quad y_6 < 0.25y_4 + 0.5y_7 + 0.25y_8.$

Далее более кратко будем записывать лишь рассматриваемые ребра, грани, соотношения и соответствующие неравенства.

3) Ребро q_3q_4. Грани $q_1q_2q_6q_5$ и $q_2q_4q_8q_6$. Соотношения $p_3 = 0.25p_1 + 0.5p_2 + 0.25p_5$, $p_4 = -0.75p_1 + 1.5p_2 + 0.25p_5$, $p_3 = 1.5p_2 - p_4 + 0.5p_6$. Неравенства
(c5) (c1),
(c6) $y_4 < -0.75y_1 + 1.5y_2 + 0.25y_5$,
(c7) $y_3 < 1.5y_2 - y_4 + 0.5y_6$.

4) Ребро q_3q_7. Грани $q_1q_2q_6q_5$ и $q_5q_6q_8q_7$. Соотношения $p_3 = 0.25p_1 + 0.5p_2 + 0.25p_5$, $p_3 = 2p_5 + 2p_6 - 3p_7$, $p_7 = -0.75p_1 + 0.5p_2 + 1.25p_5$. Неравенства
(c8) (c1),
(c9) $y_3 < 2y_5 + 2y_6 - 3y_7$,
(c10) $y_7 < -0.75y_1 + 0.5y_2 + 1.25y_5$.

5) Ребро q_5q_6. Грани $q_1q_3q_7q_5$ и $q_3q_4q_8q_7$. Соотношения $p_5 = 0.25p_4 + 1.5p_7 - 0.75p_8$, $p_6 = 0.25p_4 + 0.5p_7 + 0.25p_8$, $p_6 = -1.5p_1 + 2p_3 + 0.5p_5$. Неравенства
(c11) $y_5 < 0.25y_4 + 1.5y_7 - 0.75y_8$,
(c12) (c4),
(c13) $y_6 < -1.5y_1 + 2y_3 + 0.5y_5$.

6) Ребро q_6q_8. Грань $q_3q_4q_8q_7$. Соотношение $p_6 = 0.25p_4 + 0.5p_7 + 0.25p_8$. Неравенство
(c14) (c4).

Итак, имеем следующую систему неравенств:

$$\left.\begin{array}{rl}
\text{(c1)} & -y_1 - 2y_2 + 4y_3 - y_5 < 0,\\
\text{(c2)} & 2y_1 + y_2 - 4y_3 + y_6 < 0,\\
\text{(c3)} & 4y_2 - 5y_4 - 2y_7 + 3y_8 < 0,\\
\text{(c4)} & -y_4 + 4y_6 - 2y_7 - y_8 < 0,\\
\text{(c5)} & \text{(c1)},\\
\text{(c6)} & 3y_1 - 6y_2 + 4y_4 - y_5 < 0,\\
\text{(c7)} & -3y_2 + 2y_3 + 3y_4 - y_6 < 0,\\
\text{(c8)} & \text{(c1)},\\
\text{(c9)} & y_3 - 2y_5 - 2y_6 + 3y_7 < 0,\\
\text{(c10)} & 3y_1 - 2y_2 - 5y_5 + 4y_7 < 0,\\
\text{(c11)} & -y_4 + 4y_5 - 6y_7 + 3y_8 < 0,\\
\text{(c12)} & \text{(c4)},\\
\text{(c13)} & 3y_1 - 4y_3 - y_5 + 2y_6 < 0,\\
\text{(c14)} & \text{(c4)}.
\end{array}\right\}$$

Эта система с учетом полученных выше равенств, выражающих неизвестные y_4, y_6, y_7, y_8 через остальные, превращается в следующую (здесь $h(y) = -y_1 - 2y_2 + 4y_3 - y_5$):

$$\left.\begin{array}{rr}
\text{(c1)} & h(y) < 0,\\
\text{(c2)} & -h(y) < 0,\\
\text{(c3)} & -h(y) < 0,\\
\text{(c4)} & -h(y) < 0,\\
\text{(c6)} & h(y) < 0,\\
\text{(c7)} & h(y) < 0,\\
\text{(c9)} & h(y) < 0,\\
\text{(c10)} & h(y) < 0,\\
\text{(c11)} & -h(y) < 0,\\
\text{(c13)} & -h(y) < 0.
\end{array}\right\}$$

Последняя система имеет лишь две МСП, а именно, МСП1: (c1), (c6), (c7), (c9), (c10); МСП2: (c2), (c3), (c4), (c11), (c13). Перечислим неравенства, справедливость которых необходима для видимости соответствующих ребер: q_1q_3: (c1); q_3q_7: (c1), (c9), (c10); q_2q_6: (c2), (c3), (c4);

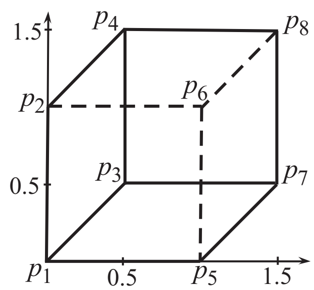


Рис. 9

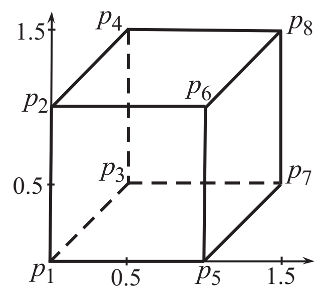


Рис. 10

q_5q_6: (c4), (c11), (c13); q_3q_4: (c1), (c6), (c7); q_6q_8: (c4). Таким образом, первой МСП соответствует интерпретация, где видимы ребра q_1q_3, q_3q_4, q_3q_7 (рис. 9), второй — где видимы ребра q_2q_6, q_5q_6, q_6q_8 (рис. 10).

Итак, первая интерпретация — видимы грани $q_1q_2q_4q_3$, $q_3q_4q_8q_7$, $q_1q_3q_7q_5$, вторая интерпретация — видимы грани $q_1q_2q_6q_5$, $q_5q_6q_8q_7$, $q_2q_4q_8q_6$.

4. Заключение

Предложенный подход к восстановлению изображений, на наш взгляд, является перспективным, хотя и требует дальнейшего теоретического изучения. К его достоинствам, прежде всего, относятся вычислительная простота (для двух интерпретаций достаточно вычисления лишь одного коэффициента неравенств) и возможность распространения на более общие задачи интерпретации изображений. Заметим, что в принципе этот подход не ограничивается выпуклыми многогранниками; этот случай взят для простоты рассмотрения.

Вместе с тем данная постановка совершенно не учитывает метрические свойства трехмерного объекта, важные для практических задач, поэтому, по-видимому, требуется дальнейшее развитие предложенного подхода в сочетании с классическим проективным подходом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Козлов В.Н.** Разпознавание изображений, представляемых конечным множеством точек // Фундам. прикл. математика. 2009. Т. 15, № 5. С. 95–110.
2. **Юрин Д.В.** Современные концепции восстановления трехмерных сцен по набору цифровых изображений: наполнение систем виртуальной реальности // Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования. Ижевск: УдГУ, 2009. Т. 1. С. 96–100.
3. **Hartley R., Zisserman A.** Multiple view geometry in computer vision. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 672 p.
4. Make3D publications: [сайт]. URL: http://make3d.cs.cornell.edu/ (дата обращения 30.06.2012).
5. **Евин И.А.** Синергетика мозга. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 108 с.
6. **Грегори П.** Разумный глаз. М.: Мир, 1972. 216 с.
7. **Кальоти Дж.** От восприятия к мысли. М.: Мир, 1998. 221 с.
8. **Шапиро Л., Стокман Дж.** Компьютерное зрение. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. 752 с.
9. **Еремин И.И.** Системы линейных неравенств и линейная оптимизация. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 338 с.
10. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
11. **Мазуров В.Д.** Математические методы распознавания образов. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1982. 83 с.
12. **Мазуров Вл. Д., Хачай М.Ю., Шарф В.С.** О равновесии и неравновесии // Математические методы распознавания образов (ММРО-14): тр. Всерос. конф. М.: МАКС, 2009. С. 70–73.

13. **Мазуров Вл. Д.** Коллективное поведение и математическая психология // Экономическое развитие в современном мире. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2009. С. 112–116.
14. **Мазуров В.Д., Смирнов А.И.** Об алгебраическом подходе к восстановлению объектов по их изображениям // Автоматизир. системы обработки изображений (АСОИз-86): тез. докл. Всесоюз. конф. (Львов). М.: Наука, 1986. С. 154.
15. **Мазуров В.Д., Смирнов А.И.** Противоречивая интерпретация неоднозначных сцен // Методы мат. программирования и их програм. обеспечение: тез. докл. науч.-техн. конф. / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 72–73.

Поступила 3.02.2012

Мазуров Владимир Данилович
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: vladimir.mazurov@usu.ru

Смирнов Александр Иванович
канд. физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: sm@urep.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.17

ГРАФЫ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ИЗОМОРФНЫ ГРАФУ МАТЬЕ[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Рассматриваются графы, в которых окрестности вершин изоморфны сильно регулярному графу со вторым собственным значением 2. В работе классифицированы вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Матье (сильно регулярному графу с параметрами (77,16,0,4)).

Ключевые слова: сильно регулярный граф, граф Матье, локально X-граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Mathieu graph.

We consider graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to a strongly regular graph with the second eigenvalue equal to 2. Amply regular graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Mathieu graph (the strongly regular graph with parameters (77,16,0,4)) are classified.

Keywords: strongly regular graph, Mathieu graph, locally X-graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a,b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Пусть для подграфа Δ $X_i(\Delta)$ — множество всех вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1=\ldots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m\geq 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой.*

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ. Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ, то граф Γ назовем *локально Δ-графом.*

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

В [1] классифицированы сильно регулярные графы с собственным значением 2 и вполне регулярные графы, в которых для любой вершины w подграф $[w]$ является сильно регулярным графом с $\lambda = 1$ и собственным значением 2. Сильно регулярный граф без треугольников с собственным значением 2 изоморфен графу Хофмана — Синглтона, графу Гевиртца, графу Хигмена — Симса или графу Матье. Первые три графа в качестве окрестностей вершин рассматривались в [2–4]. В данной работе изучены вполне регулярные локально Δ-графы, где Δ — граф Матье (сильно регулярный граф с параметрами (77,16,0,4)).

Теорема. *Пусть Γ — связный вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Матье, u — вершина графа Γ, S_i — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных точно с i вершинами из $\Gamma_3(u)$, $s_i = |S_i|$. Тогда диаметр Γ равен 3 и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $\mu = 14$, $v = 1+77+330+6 = 414$, $\Gamma_3(u)$ *является* 6-*кокликой*, $s_0 = 78-s_3$, $s_1 = 42+3s_3$ *и* $s_2 = 210 - 3s_3$;

(2) $\mu = 15$, $v = 1 + 77 + 308 + k_3$, $\Gamma_3(u)$ *является объединением изолированных клик и* $k_3 \in \{4, 10\}$;

(3) $\mu = 20$, $v = 1 + 77 + 231 + k_3$, $\Gamma_3(u)$ *является объединением изолированных клик и* $k_3 \in \{6, 12\}$;

(4) $\mu = 21$, $v = 1 + 77 + 220 + k_3$ *и* $k_3 \in \{2, 8\}$.

Приведем сначала некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s, $s < 0$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, [5, § 2]).

Лемма 2 [6, лемма 3.1]. *Пусть Γ – сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ). Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - m$, $-m$ графа Γ – целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ и кратность $n - m$ равна $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m – целое число, большее 1, то $m - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1},\ n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Лемма 3. *Пусть Γ – сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), Δ – индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1, \ldots, d_N$. Тогда*

$$(v-N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right) = x_0 + \sum_{i=3}^{N}\binom{i-1}{2}x_i,$$

где $x_i = x_i(\Delta)$.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta, b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства

$$v - N = \sum x_i,\quad kN - 2M = \sum i x_i \quad \text{и} \quad \lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right) = \sum \binom{i}{2} x_i.$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое.

Лемма 4. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(77,16,0,4)$, Δ *является регулярным подграфом из* Γ *степени 4 на* n *вершинах,* X_i *— множество вершин из* $\Gamma-\Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ, $x_i=|X_i|$. *Если* $x_0>0$, *то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $|\Delta|=12$, *и* $x_0=1,x_2=48,x_3=16$;

(2) $|\Delta|=13$, $x_0=2,x_2=34,x_3=24,x_4=4$, *и* X_0 *является кокликой*;

(3) $|\Delta|=14$, $x_0\in\{1,3\}$, *и* X_0 *является кокликой*;

(4) $|\Delta|=15$, *либо* $x_0\in\{1,2,4\}$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=2,x_2=30,x_4=30$ *и* X_0 *является ребром*;

(5) $|\Delta|=16$, *либо* $x_0\in\{1,2,3,5\}$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=3,x_2=20,x_3=8,x_4=22,x_5=8$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и ребра*;

(6) $|\Delta|=17$, *либо* $x_0\in\{1,3,4\}$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=2$ *и* X_0 *является 2-кликой, либо* $x_0=4$ *и* X_0 *— объединение двух изолированных вершин и ребра*;

(7) $|\Delta|=18$, *либо* $x_0\in\{2,3,4,5,7\}$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=2$ *и* X_0 *является ребром, либо* $x_0=3$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и ребра, либо* $x_0=5$ *и* X_0 *— объединение трех изолированных вершин и ребра*;

(8) $|\Delta|=19$, *либо* $x_0=3$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и ребра, либо* $x_0=4$ *и* X_0 *— объединение двух изолированных ребер*;

(9) $|\Delta|=20$, *либо* $x_0\in\{1,3,6\}$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=2,x_1=4,x_2=2,x_3=11,x_4=11,x_5=15,x_6=5,x_7=6,x_8=1$ *и* X_0 *является 2-кликой, либо* $x_0=4$ *и* X_0 *— объединение двух изолированных вершин и ребра, либо* $x_0=5$ *и* X_0 *— объединение двух изолированных ребер и вершины, либо* $x_0=7$ *и* X_0 *— объединение пяти изолированных вершин и ребра*;

(10) $|\Delta|=21$, *либо* $x_0=1,x_2=12,x_3=6,x_5=24,x_6=8,x_8=3,x_9=2$, *либо* $x_0=2,x_2=12,x_3=6,x_5=12,x_6=18,x_7=6$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=3,x_2=12,x_5=24,x_6=14,x_8=3$ *и* X_0 *является 2-путем, либо* $x_0=5,x_3=6,x_4=15,x_5=18,x_6=5,x_7=3,x_8=3,x_9=1$ *и* X_0 *— объединение трех изолированных вершин и ребра, либо* $x_0=6,x_3=4,x_4=14,x_5=16,x_6=10,x_7=4,x_8=2$ *и* X_0 *— объединение двух изолированных ребер и двух изолированных вершин*;

(11) $|\Delta|=22$, *либо* $x_0=1,x_2=13,x_3=6,x_6=25,x_7=10$, *либо* $x_0=2,x_2=4,x_3=12,x_5=20,x_6=8,x_7=4,x_8=1,x_9=4$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=2,x_2=5,x_3=10,x_4=1,x_5=18,x_6=12,x_7=2,x_8=2,x_9=2,x_10=1$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=2,x_2=6,x_3=8,x_4=2,x_5=16,x_6=16,x_8=3,x_{10}=2$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=3,x_2=4,x_3=12,x_5=10,x_6=14,x_7=10,x_8=2$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=3,x_2=5,x_3=10,x_4=1,x_5=9,x_6=16,x_7=9,x_8=2$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=3,x_2=6,x_3=8,x_4=2,x_5=8,x_6=18,x_7=8,x_8=2$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=4,x_2=2,x_4=25,x_6=16,x_8=8$ *и* X_0 *— объединение двух изолированных ребер, либо* $x_0=4,x_2=4,x_3=6,x_5=20,x_6=14,x_7=4,x_8=1,x_9=2$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и 2-пути, либо* $x_0=4,x_2=5,x_3=5,x_5=18,x_6=16,x_7=4,x_8=2,x_9=1$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и 2-пути, либо* $x_0=4,x_2=6,x_3=4,x_5=16,x_6=18,x_7=4,x_8=3$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и 2-пути*;

(12) $|\Delta|=23$, $x_0=2,x_2=6,x_3=10,x_4=1,x_6=18,x_7=14,x_8=8$, *и* X_0 *является кокликой*;

(13) $|\Delta|=24$, *либо* $x_0\in\{2,3,4,5\}$ *и* X_0 *является кокликой, либо* $x_0=2$ *и* X_0 *является кликой, либо* $x_0=3$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и ребра или 2-путь, либо* $x_0=4$ *и* X_0 *— объединение изолированной вершины и 2-пути; либо* $x_0=6$ *и* X_0 *— объединение трех изолированных вершин и 2-пути*;

(14) $|\Delta|=25$, *либо* $x_0=1$, *либо* $x_0=2$ *и* X_0 *является кликой*;

(15) $|\Delta|=30$, *либо* $x_0=1$, *либо* $x_0=2$ *и* X_0 *является кликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компьютерные вычисления в GAP [7].

Пусть до конца работы Γ — вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Матье с параметрами (77,16,0,4).

Лемма 5. *Диаметр* Γ *равен* 3, *и* $\mu \in \{12,14,15,20,21,22,30\}$.

Доказательство. Пусть Γ — сильно регулярный граф с собственным значением $-m$. По лемме 2 число $m-1$ делит 60, $n = m-1+60/(m-1)$ и $\mu = 18+(m-1)-60/(m-1)$. Далее, $n-m \geq 2, -m \leq -6$, поэтому $5 \leq m-1 \leq 20$. Поэтому $m-1 \in \{5,6,10,12,15,20\}$, и $\mu \in \{11,14,22,35\}$.

Если $\mu = 11$, то Γ имеет собственные значения $11,-6$ и кратность 11 равна $5\cdot 77\cdot 83/(11\cdot 17)$, противоречие.

Если $\mu = 14$, то Γ имеет собственные значения $9,-7$ и кратность 9 равна $6\cdot 77\cdot 84/(16\cdot 14)$, противоречие.

Если $\mu = 22$, то Γ имеет собственные значения $5,-11$ и кратность 5 равна $10\cdot 77\cdot 88/(16\cdot 22)$, противоречие.

Если $\mu = 35$, то Γ имеет собственные значения $2,-21$ и кратность 2 равна $20\cdot 77\cdot 98/(23\cdot 35)$, противоречие.

Итак, диаметр Γ больше 2, μ делит $77\cdot 60$, и ввиду леммы 4 имеем $\mu \in \{12,14,15,20,21,22,30\}$.

Пусть Γ имеет диаметр, больший 3, и u,w,x,y,z — геодезический 4-путь в Γ. Положим $X = [u]\cap[x]$, $Y = [x]\cap[z]$. Тогда X и Y — регулярные графы степени 4. Далее, $[x]$ — сильно регулярный граф со вторым собственным значением $+2$, и собственные значения подграфа $X\cup Y$ переплетают собственные значения графа $[x]$. Противоречие с тем, что X и Y имеют собственное значение 4. Лемма доказана.

Пусть u,w,y,z — геодезический 3-путь в Γ, $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $\Sigma = [u]\cap[y]$, X_i — множество вершин из $[y]-\Sigma$, смежных точно с i вершинами из Σ, $x_i = |X_i|$, $\Phi = [u]\cap\Gamma_2(y)$ и $\Psi = [y]\cap\Gamma_2(u)$. По лемме 5 имеем $\mu \in \{12,14,15,20,21,22,30\}$. Пусть S_i — множество вершин из $\Gamma_2(a)$, смежных точно с i вершинами из $\Gamma_3(a)$, $s_i = |S_i|$.

Так как vk четно и $vk\lambda$ делится на 3, то k_2+k_3 делится на 6. В леммах 6–12 рассматриваются указанные значения μ.

Приведем доказательство теоремы в виде цепочки доказательств соответствующих лемм.

Лемма 6. *Если* $\mu = 12$, *то* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{77,60,1;1,12,77\}$.

Доказательство. Пусть $\mu = 12$. Тогда $k_2 = 385$. Ввиду леммы 4 имеем $b_2(u,y) \leq 1$ для любых двух вершин u,y, находящихся на расстоянии 2. Отсюда $c_3(u,z) = 77$, иначе для $z' \in \Gamma_3(z)$ вершина z имеет степень 4 в графе $[y]\cap[z']$, противоречие.

Теперь расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из $\Gamma_3(u)$ равно 3, и $k_3 \leq 5$. Так как $vk\lambda$ делится на 3, то $k_3 \in \{2,5\}$. В случае $k_3 = 2$ антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами (155,77,40,36), противоречие с тем, что $(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu) = 180$ не является квадратом.

В случае $k_3 = 5$ граф Γ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{77,60,1;1,12,77\}$.

Замечание 1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{77,60,1;1,12,77\}$ имеет собственные значения $77,11,-1,-7$, причем кратность 11 равна $7\cdot 5\cdot 78/18$, противоречие.

Лемма 7. *Если* $\mu = 30$, *то* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{77,60,1;1,30,77\}$.

Доказательство. Пусть $\mu = 30$. Тогда $k_2 = 154$ и k_3 сравнимо с 2 по модулю 6. Ввиду леммы 4 подграф X_0 содержится в 2-клике. Поэтому $\Gamma_3(u)$ является объединением изолированных клик. Если Γ_3 содержит 3-клику $\{z_1,z_2,z_3\}$, то $\Gamma_2(u)$ содержит 45 вершин, смежных с парами вершин из $\{z_1, z_2, z_3\}$, и 135 вершин, смежных с точно одной вершиной из $\{z_1, z_2, z_3\}$, противоречие.

Отсюда число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $154 \cdot 2$ и не меньше $76k_3$. Поэтому $k_3 \leq 4$ и $k_3 = 2$.

Положим $\Gamma_3(u) = \{z, z'\}$. Если вершины z, z' смежны, то $\Gamma_2(u)$ содержит 16 вершин, смежных с z, z', 120 вершин, смежных точно с одной вершиной из $\{z, z'\}$, и 18 вершин, не смежных ни с z, ни с z'. Вершина из $[u] \cap \Gamma_3(z)$ смежна с 30 вершинами из Y_1 и с 30 вершинами из Y_0, противоречие.

Таким образом, $d(z, z') = 3$, и Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{77, 60, 1; 1, 30, 77\}$.

З а м е ч а н и е 2. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{77, 60, 1; 1, 30, 77\}$ имеет собственные значения с нецелыми кратностями и поэтому не существует.

Лемма 8. *Если $\mu = 14$, то $\Gamma_3(u)$ является 6-кокликой, $s_0 = 78 - s_3$, $s_1 = 42 + 3s_3$, $s_2 = 210 - 3s_3$ и Γ не является дистанционно регулярным графом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 14$. Тогда $k_2 = 330$ и k_3 делится на 6. Ввиду леммы 4 имеем $b_2(u, y) \leq 3$ для любых двух вершин u, y, находящихся на расстоянии 2, причем $[y] \cap \Gamma_3(u)$ является кокликой.

Если $\Gamma_3(a)$ содержит смежные вершины z_1, z_2, то $[z_1] \cap [z_3]$ содержит 16 вершин из $\Gamma_3(u)$, противоречие. Значит, $\Gamma_3(u)$ является m-кокликой и число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $330 \cdot 3$ и не меньше $77m$. Поэтому $m \in \{6, 12\}$. Теперь $\sum s_i = 330$, $s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 77m$ и $s_2 + 3s_3 = 7m(m-1)$. Если $m = 12$, то $s_1 = s_2 = 0, s_3 = 308$ и $s_0 = 22$. Пусть $s_i' = |[y] \cap S_i$ и $m' = |\Gamma_3(u) - \Gamma_3(y)|$. Если $y \in S_0$, то $s_0' + s_3' = 63$, $s_3' = 14m'/3$ и $s_0' = 63 - 14m'/3$, поэтому $m' \geq 9$. В случае $m' = 9$ имеем $s_0' = 21$ и $s_3' = 42$, а в случае $m' = 12$ имеем $s_0' = 7$ и $s_3' = 56$.

Если $y \in S_3$, то $s_0' + s_3' = 60$, $s_3' = 14m'/3$ и $s_0' = 60 - 14m'/3$, поэтому $m' \geq 9$. В случае $m' = 9$ имеем $s_0' = 18$ и $s_3' = 42$, а в случае $m' = 12$ имеем $s_0' = 4$ и $s_3' = 56$.

Допустим, что S_0 не содержит вершин степени 21. Тогда вершина из S_3 смежна в среднем с $22 \cdot 56/308 = 4$ вершинами из S_0, противоречие. Напомним, что число пар вершин (y, z) таких, что $y \in \Gamma_2(u)$, $z \in \Gamma_3(u)$ и $d(y, z) = 3$, равно $12 \cdot 11$. Поэтому точно для 43 вершин y из S_3 имеем $m' = 9$. Отсюда число ребер между S_0 и S_3 равно $42 + 21 \cdot 56 = 43 \cdot 18 + 265 \cdot 4$, противоречие.

Если $m = 6$, то $s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 330$, $s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 462$ и $s_2 + 3s_3 = 210$. Поэтому $s_0 = 78 - s_3$, $s_1 = 42 + 3s_3$ и $s_2 = 210 - 3s_3$.

Лемма 9. *Если $\mu = 15$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) $k_3 = 16$, *и Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{77, 60, 4; 1, 15, 77\}$;

(2) $\Gamma_3(u)$ — *объединение изолированных клик, $k_3 \in \{4, 10\}$, и если Γ — дистанционно регулярный граф, то Γ имеет массив пересечений* $\{77, 60, 1; 1, 15, 77\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 15$. Тогда $k_2 = 308$ и $k_3 - 4$ делится на 6. Ввиду леммы 4 имеем $x_0 \in \{1, 2, 4\}$, и X_0 является кокликой или ребром. Поэтому $b_2(u, y) \leq 4$ для любых двух вершин u, y, находящихся на расстоянии 2.

Если $\Gamma_3(u)$ содержит геодезический 2-путь z, z', z'', то $[z] \cap [z'']$ содержит 4 вершины из $\Gamma_3(u) \cap [z']$. Поэтому в связной компоненте Θ графа $\Gamma_3(u)$, содержащей вершину z, каждый μ-подграф регулярен степени 4. Отсюда $|\Gamma_3(u) - z^{\perp}| \geq 5$. Если w, w', w'' является 2-путем из Σ, то $[w] \cap [w'']$ содержит u, w', 4 вершины из Σ и не более 9 вершин из Ψ. Поэтому $|\Psi| \geq 21$, и число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $308 \cdot 4$ и не меньше $21k_3$. Поэтому $k_3 \leq 58$ и $|\Psi| \geq 25$. Повторив указанное рассуждение несколько раз, убедимся, что $k_3 \leq 19$. Противоречие с тем, что $|\Theta| \geq 20$.

Значит, $\Gamma_3(u)$ не содержит геодезических 2-путей, поэтому $\Gamma_3(u)$ является объединением изолированных клик. В этом случае степень вершины в $\Gamma_3(u)$ не больше 2, число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $308 \cdot 4$ и не меньше $76k_3$, поэтому $k_3 \leq 16$.

Пусть $k_3 = 16$. Если $\Gamma_3(u)$ содержит ребро, то число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $16 \cdot 2 + 292 \cdot 4$, но не меньше $76 \cdot 16 = 1216$, противоречие. Значит, $\Gamma_3(u)$ является кокликой для любой вершины u, поэтому Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{77, 60, 4; 1, 15, 77\}$.

З а м е ч а н и е 3. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{77, 60, 4; 1, 15, 77\}$ и $\{77, 60, 1; 1, 15, 77\}$ имеют собственные значения с нецелыми кратностями и поэтому не существуют.

Лемма 10. *Пусть $\mu = 20$. Тогда $k_3 \in \{6, 12\}$, и если Γ — дистанционно регулярный граф, то он имеет массив пересечений $\{77, 60, 2; 1, 20, 77\}$ или $\{77, 60, 4; 1, 20, 77\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 20$. Тогда $k_2 = 231$ и k_3 делится на 6. Ввиду леммы 4 имеем $x_0 \le 7$, и X_0 не содержит геодезических 2-путей. Поэтому $b_2(u, y) \le 7$ для любых двух вершин u, y, находящихся на расстоянии 2.

Если $\Gamma_3(u)$ содержит геодезический 2-путь z_1, z_2, z_3, то ввиду леммы 4 подграф $[z_1]\cap[z_2]\cap[z_3]$ содержит 4-коклику $\{y_1, \ldots, y_4\}$ из $\Gamma_3(u)$. Так как $[z_1] \cap [z_3]$ — связный граф, то $[z_1] \cap [z_3]$ содержится в $\Gamma_3(u)$. Пусть степень z_1 в графе $\Gamma_3(u)$ равна k', $y \in [z_1] \cap \Gamma_2(u)$. Тогда $[y] \cap [z_1]$ содержит не более одной вершины из $\Gamma_3(u)$ и для $z \in [y] \cap [z_1] \cap \Gamma_3(u)$ подграф $[y] \cap [z] \cap [z_1]$ содержит не менее 3 вершин из $\Gamma_2(u)$. Поэтому $|[y]\cap[z_1]\cap\Gamma_2(u)| \ge 3(k'-1)$, противоречие. Итак, $\Gamma_3(u)$ является объединением изолированных клик. Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит β треугольников и γ максимальных 2-клик. Так как число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $231 \cdot 7 = 1627$ и не меньше $75k_3$, то $k_3 \le 18$.

Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит треугольник $\{z_1, z_2, z_3\}$, $Z_{ij} = \Gamma_2(u)\cap[z_i]\cap[z_j]$, $Z_i = X_1(\{z_1, z_2, z_3\})\cap [z_i]$ и Z_0 — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, не смежных ни с одной вершиной из $\{z_1, z_2, z_3\}$. Тогда $|Z_{ij}| = 15$, $|Z_i| = 45$ и $|Z_0| = 51$.

Допустим, что $k_3 = 18$. Покажем, что $\Gamma_3(z_1) \cap \Gamma_3(z_2)$ не пересекает Z_0. Положим $\nu = |\Gamma_3(z_1)\cap\Gamma_3(z_2)\cap Z_0|$, $Z_0' = Z_0 - (\Gamma_3(z_1)\cup\Gamma_3(z_2))$. Тогда $|Z_0'| = 21+\nu$. Если $y \in \Gamma_3(z_1)\cap\Gamma_3(z_2)\cap Z_0$, то $[y]$ содержит δ вершин из $\Gamma_3(u)$, по 20 вершин из $[u]$, Z_3 и $37 - \delta$ вершин из Z_0. Поэтому $|[y] \cap Z_0'| \ge 26$. Если $\Gamma_3(z_1) \cap \Gamma_3(z_2) \cap Z_0$ содержит две вершины y, y', то $|[y] \cap [y'] \cap Z_0'| \ge 31 - \nu$ и $\nu \ge 11$. Теперь вершины y, y' можно выбрать так, что $[y] \cap [y']$ содержит не менее 5 вершин из Z_3 и не более 15 вершин из Z_0', противоречие. В случае $\nu = 1$ имеем $|Z_0'| = 22$, и $[y]$ содержит не менее 26 вершин из Z_0', снова противоречие. Значит, Z_0 содержит 45 вершин из $\Gamma_3(z_1) \cup \Gamma_3(z_2) \cup \Gamma_3(z_3)$ и еще 6 вершин. Положим $Z_0'' = Z_0 - (\Gamma_3(z_1) \cup \Gamma_3(z_2) \cup \Gamma_3(z_3))$. Если $\{u, w_1, w_1'\}$ является 3-кликой из $\Gamma_3(z_1)$, то $[w_1]$ содержит не более 40 вершин из $Z_2 \cup Z_3 \cup Z_{23}$, не более 6 вершин в каждом из подграфов $\Gamma_3(z_2) \cap Z_0$, $\Gamma_3(z_3) \cap Z_0$ и не менее 8 вершин из Z_0'', противоречие.

Итак, $\beta = 0$, $\sum s_i = 231$, $\sum is_i = 1386 - 2\gamma$, $\sum \binom{i}{2} s_i = 3060 - 4\gamma$, поэтому $s_0 + s_3 + 3s_4 + 6s_5 + 10s_6 + 15s_7 = 1905 - 2\gamma$. Далее, число треугольников с основанием в $\Gamma_3(u)$ и вершиной в $\Gamma_2(u)$ равно 16γ. Ввиду леммы $s_7 \le 16\gamma$. Если $\Gamma_3(u)$ является кокликой, то $s_6 = 231$, противоречие.

Пусть z_1, z_2 — две вершины из $\Gamma_3(u)$, $Y_{12} = \Gamma_2(u) \cap [z_1] \cap [z_2]$, $Y_i = X_1(\{z_1, z_2\}) \cap [z_i]$ и Y_0 — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, не смежных ни с одной вершиной из $\{z_1, z_2\}$.

Если $d(z_1, z_2) = 3$, то $|Y_{12}| = 0$, $|Y_i| \ge 76$ и $|Y_0| \le 79$. Далее, число ребер между Y_0 и $\Gamma_3(u)$ не меньше $36 \cdot 16 = 576$, противоречие с тем, что указанное число ребер не больше $79 \cdot 7 = 553$. Итак, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из $\Gamma_3(u)$ не больше 2.

Пусть z_1, z_2 — смежные вершины из $\Gamma_3(u)$, $\{u, w_i\}$ — ребро из $\Gamma_3(z_1)$, $i = 1, 2$, $Y_{12} = \Gamma_2(u)\cap [z_1] \cap [z_2]$, $Y_i = X_1(\{z_1, z_2\}) \cap [z_i]$ и Y_0 — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, не смежных ни с одной вершиной из $\{z_1, z_2\}$. Тогда $|Y_{12}| = 16$, $|Y_i| = 60$ и $|Y_0| = 95$.

Покажем, что $\Gamma_3(z_1)\cap\Gamma_3(z_2)$ не пересекает Y_0. Пусть $y \in \Gamma_3(z_1)\cap\Gamma_3(z_2)\cap Y_0$ и $[y]$ содержит δ вершин из $\Gamma_3(u)$. Тогда $[y]$ содержит $57 - \delta$ вершин из Y_0. Положим $\nu = |\Gamma_3(z_1)\cap\Gamma_3(z_2)\cap Y_0|$, $Y_0' = Y_0 - (\Gamma_3(z_1) \cup \Gamma_3(z_2))$. Тогда $|Y_0'| = 63 + \nu$ и $|[y] \cap Y_0'| \ge 48$. Если $\Gamma_3(z_1) \cap \Gamma_3(z_2) \cap Y_0$ содержит две вершины y, y', то $|[y] \cap [y'] \cap Z_0'| \ge 33 - \nu$ и $\nu \ge 13$. Пусть три вершины y, y', y'' из $\Gamma_3(z_1) \cap \Gamma_3(z_2) \cap Y_0$ выбраны так, что максимальное число общих соседей двух из этих вершин в Y_0 равно ψ. Тогда $48 - 2\psi \le \psi + \nu - 33$ и $\psi \ge 27 - \nu/3$, противоречие с тем, что $\nu \ge 21$. В случае $\nu = 1$ имеем $|Y'_0| = 64$ и $|Y'_0 - [y]| \le 16$. Если $z \in [y] \cap \Gamma_3(u)$, то $[z]$ содержит не более 56 вершин из $[y] \cup [z_1] \cup [z_2]$ и не менее 20 вершин из $Y'_0 - [y]$, противоречие. Значит, $\delta = 0$ и $|Y'_0 - [y]| = 9$. Для $z \in \Gamma_3(u) - \{z_1, z_2\}$ подграф $[z]$ содержит не более 60 вершин из $[y] \cup [z_1] \cup [z_2]$ и не менее 16 вершин из $Y'_0 - [y]$, противоречие.

Итак, $\Gamma_3(z_1) \cap \Gamma_3(z_2)$ не пересекает Y_0 для любых двух вершин $z_1, z_2 \in \Gamma_3(u)$. Теперь $|Y_0| \ge 16 \cdot 16$, противоречие.

Таким образом, $k_3 \in \{6, 12\}$. Если Γ — дистанционно регулярный граф, то либо $k_3 = 6$ и Γ имеет массив пересечений $\{77, 60, 2; 1, 20, 77\}$, либо $k_3 = 12$ и Γ имеет массив пересечений $\{77, 60, 4; 1, 20, 77\}$.

З а м е ч а н и е 4. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{77, 60, 2; 1, 20, 77\}$ и $\{77, 60, 4; 1, 20, 77\}$ не имеют целых собственных значений, не равных 77, и поэтому не существуют.

Лемма 11. *Пусть* $\mu = 21$. *Тогда* $k_3 \in \{2, 8\}$ *и* Γ *не является дистанционно регулярным графом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 21$. Тогда $k_2 = 220$ и k_3 сравнимо с 2 по модулю 6. Выберем вершину y в $\Gamma_2(u)$ и положим $X_i = X_i([u] \cap [y]) \cap [y]$, $x_i = |X_i|$. С помощью компьютерных вычислений доказано, что в графе $[u] \cap [y]$ параметр μ принимает значения 1 или 2. Допустим, что X_0 является 2-путем z_1, z_2, z_3. Тогда $x_2 = 12, x_5 = 24, x_6 = 14, x_8 = 3$ и для $i \in \{1, 3\}$ подграф $[z_i]$ содержит 12 вершин из X_5 и 3 вершины из X_8, а $[z_2]$ содержит 14 вершин из X_6.

Допустим, что $z \in X_0$ и $y_i = |X_i \cap [z]$. Если $x_0 = 5$, то с помощью компьютерных вычислений доказано, что $x_3 = 6, x_4 = 15, x_5 = 18, x_6 = 5, x_7 = 3, x_8 = 3, x_9 = 1$, X_0 — объединение трех изолированных вершин и ребра, пересечение окрестностей двух изолированных вершин из X_0 содержит 2 вершины из X_4, вершину из X_8 и вершину из X_9, пересечение окрестностей трех изолированных вершин из X_0 содержит вершину из X_9, и верно одно из утверждений:

а) $y_0 = 1, y_4 = 3, y_5 = 6, y_6 = 2, y_7 = 3, y_9 = 1$;

б) $y_0 = 1, y_4 = 3, y_5 = 6, y_6 = 3, y_8 = 3$;

в) $y_3 = 2, y_4 = 4, y_5 = 6, y_7 = 1, y_8 = 2, y_9 = 1$.

Если $x_0 = 6$, то $x_3 = 4, x_4 = 14, x_5 = 16, x_6 = 10, x_7 = 4, x_8 = 2$, X_0 — объединение двух изолированных ребер и двух изолированных вершин, и верно одно из утверждений:

г) $y_0 = 1, y_4 = 3, y_5 = 4, y_6 = 5, y_7 = 2, y_8 = 1$;

д) $y_3 = 2, y_4 = 2, y_5 = 8, y_7 = 2, y_8 = 2$.

Положим $\mathcal{X} = \{[u] \cap [y] \mid y \in \Gamma_2(u), x_0 \in \{5, 6\}\}$. С помощью компьютерных вычислений доказано, что для любых двух элементов $X, Y \in \mathcal{X}$ подграф $X \cap Y$ не является m-кокликой для $m \in \{8, 9\}$.

Покажем, что $s_5 = s_6 = 0$. Пусть $y \in S_6$, $y' \in X_8$. Тогда $[y']$ содержит 4-коклику из $[y] \cap \Gamma_3(u)$, поэтому $[u] \cap [y'] \in \mathcal{X}$, противоречие с тем, что $[u] \cap [y] \cap [y']$ является 8-кокликой. Пусть $y \in S_5$. Если $x_0 = 5$, то выберем вершину $y' \in X_9$. Тогда $[y']$ содержит 4-коклику из $[y] \cap \Gamma_3(u)$, поэтому $[u] \cap [y'] \in \mathcal{X}$, противоречие с тем, что $[u] \cap [y] \cap [y']$ является 9-кокликой. Если $x_0 = 6$, то выберем вершину $y' \in X_8$. Тогда $[y']$ содержит 3-коклику из $[y] \cap \Gamma_3(u)$, поэтому $[u] \cap [y'] \in \mathcal{X}$, противоречие с тем, что $[u] \cap [y] \cap [y']$ является 8-кокликой.

Допустим, что $y \in \Gamma_2(u)$ и $[y]$ содержит геодезический 2-путь z_1, z_2, z_3 с концевыми вершинами из $\Gamma_3(u)$. Положим $X_8 = \{y_1, y_2, y_3\}$, $X^i_j = X_j([u] \cap [y_i]) \cap [y_i]$ и $x^i_j = |X^i_j|$. Так как $X_8 \subset [z_1] \cap [z_3]$, $y \in X^i_8$ и $|[y] \cap X^i_0| = 2$, то $x^i_0 \in \{3, 5\}$.

Пусть $x^i_0 = 5$. Тогда X^i_0 содержит ребро $\{z_1, z'_1\}$ и три изолированных вершины z_3, z_4, z_5, $X^i_8 = \{y, y_4, y_5\}$. Поэтому $X^i_8 \subset [z_1]$ и $y_4, y_5 \in [z_4] \cap [z_5]$. Противоречие с утверждением из второго абзаца доказательства леммы. Итак, $x^i_0 = 3$.

Покажем, что $s_4 = 0$. Пусть $y \in S_4, y' \in X_8 \cup X_9$. Если $[y']$ содержит 3-коклику из $[y] \cap \Gamma_3(u)$, то $[u] \cap [y'] \in \mathcal{X}$, противоречие с тем, что $[u] \cap [y] \cap [y']$ является 8- или 9-кокликой. Значит, $[y']$ не содержит 3-коклик из $[y] \cap \Gamma_3(u)$, $x_0 = 6$, $y' \in X_8$ и $X_0([u] \cap [y']) \cap [y']$ содержит геодезический 2-путь с концевыми вершинами из $\Gamma_3(u)$. Противоречие с доказанным в двух предыдущих абзацах.

Итак, $b_2(u, y) \leq 3$ для любых двух вершин u, y, находящихся на расстоянии 2.

Пусть $z \in \Gamma_3(u)$ и $Z_i = [z] \cap \Gamma_i(u)$. Ввиду леммы 4 вершина из Z_2 смежна не более чем с 2 вершинами из Z_3, поэтому $|Z_2| \geq 1 + 14 + 14 \cdot 13/4$ и $|Z_2| \geq 61$. Теперь число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $220 \cdot 3$ и не меньше $61k_3$, поэтому $k_3 \leq 10$.

Лемма 12. *Параметр μ не равен 22.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 22$ и Δ — граф Матье. На множестве всех регулярных подграфов из Δ порядка 22 и степени 4 существует ровно 12 орбит под действием группы $G = \mathrm{Aut}(\Delta)$. Обозначим представителей этих орбит через $M_1, M_2, \ldots, M_{12}$ и будем говорить, что орбита имеет номер i $(1 \leq i \leq 12)$, если она содержит подграф M_i. Поскольку G — группа всех автоморфизмов графа Матье, то в любом графе Δ', изоморфном Δ, орбите с номером i $(1 \leq i \leq 12)$ отвечает одна и та же орбита под действием $\mathrm{Aut}(\Delta')$ независимо от выбранного изоморфизма между Δ и Δ'. Таким образом, номера орбит регулярных подграфов порядка 22 и степени 4 определены для всех графов, изоморфных Δ. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество орбит с представителями $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_n}$, где номера $i_1, i_2, \ldots, i_n$ выбраны таким образом, что для каждого i_j $(1 \leq j \leq n)$ существует вершина $a \in \Gamma$ такая, что i_j-я орбита в $[a]$ содержит μ-подграф.

Если u, y — вершины на расстоянии 2 в Γ, то μ-подграф $[u] \cap [y]$ изоморфен одному из графов M_i $(1 \leq i \leq 12)$, но может не принадлежать орбите с номером i в $[u]$ или в $[y]$, поскольку есть различные орбиты, которые содержат изоморфные подграфы. Пусть, например, $[u] \cap [y]$ принадлежит орбите с номером j из $[u]$ и орбите с номером l из $[y]$. Заметим, что для всякой вершины $z \in [y]$ подграф $[z] \cap ([u] \cap [y])$ является (возможно, пустой) кокликой. И если коклика $[z] \cap ([u] \cap [y])$ непуста, то подграф $[u] \cap [y]$ из j-й орбиты в $[u]$ пересекается по той же самой коклике $[z] \cap [u] \cap [y]$ с подграфом $[u] \cap [z]$, принадлежащим некоторой орбите с номером j' $(1 \leq j' \leq 12)$. И, наоборот, для вершины $w \in [u]$ такой, что $[w] \cap ([u] \cap [y]) \neq \varnothing$, существует μ-подграф $[w] \cap [y]$, принадлежащий некоторой орбите с номером l' из $[y]$ и пересекающий $[u] \cap [y]$ по той же самой коклике $[w] \cap [u] \cap [y]$. Отсюда следует, что множество орбит $\mathcal{M}$ удовлетворяет необходимому условию:

Пусть $calM$ содержит орбиту с номером i. Тогда в $calM$ также содержится орбита с номером j такая, что существует изоморфизм $\phi\colon M_i \to M_j$, и для любой вершины $z \in \Delta$ такой, что $\Delta(z) \cap M_i \neq \varnothing$, найдется подграф $M \in \bigcup \mathcal{M}$ такой, что $M \cap M_j$ — коклика, сопряженная под действием $\mathrm{Aut(M_j)}$ с $\phi(\Delta(z) \cap M_i)$. И, наоборот, для любой вершины $w \in \Delta$ такой, что $\Delta(w) \cap M_j \neq \varnothing$, найдется подграф $M' \in \bigcup \mathcal{M}$, для которого подграф $M' \cap M_i$ сопряжен под действием $\mathrm{Aut}(M_i)$ с $\phi^{-1}(\Delta(w) \cap M_j)$.

Предполагая, что $\mathcal{M}$ содержит все 12 орбит, мы можем при помощи пакета GRAPE системы GAP проверить выполнение этого условия для всех орбит из $\mathcal{M}$. Исключим из $\mathcal{M}$ все орбиты, для которых условие не выполняется, и повторим проверку. Повторяя этот процесс несколько раз, получим, что множество $\mathcal{M}$ пусто. По определению $\mathcal{M}$ отсюда следует, что граф Γ с $\mu = 22$ не существует. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кабанов В. В., Махнев А. А., Падучих Д. В.** О сильно регулярных графах с собственным значением 2 и их расширениях // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 5. С. 583–586.
2. **Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 157–160.
3. **Гаврилюк А. Л., Махнев А. А., Падучих Д. В.** О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 35–47.

4. **Карданова М. Л., Махнев А. А., Падучих Д. В.** О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хигмена — Симса // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 2. С. 163–166.
5. **Brouwer A.E., Haemers W. H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
6. **Махнев А. А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискр. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
7. **The GAP Group,** GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.12. 2008. URL: http://www.gap-system.org .

Поступила 15.09.2011

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542, 519.172

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ НА МНОЖЕСТВЕ НЕЕДИНИЧНЫХ p-ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ $L_2(p^n)$

И. Т. Мухаметьянов

Пусть $\mathbf{\Gamma}_B$ — граф с множеством вершин $B = g^G \cup (g^{-1})^G$, где g^G — класс сопряженных элементов порядка p группы $G = L_2(p^n)$, и с множеством ребер $\{\{x, y\} \mid xy^{-1} \in B\}$, p — нечетное простое число, $p^n \geqslant 5$. Этот граф автор изучал в некоторых работах.

В данной работе уточняется строение графа $\mathbf{\Gamma}_B$ и описывается граф $\mathbf{\Gamma}_J$, множество вершин которого совпадает с множеством всех элементов порядка p группы G, и с множеством ребер $\{\{x, y\} \mid xy^{-1} \in J\}$, где J — класс сопряженных инволюций группы G. В частности, показывается, что в одних случаях этот граф является объединением некоторых двух (изоморфных между собой) дистанционно регулярных графов, а в других случаях его граф 2-расстояний является сильно регулярным графом.

Ключевые слова: граф, сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф, группа.

I. T. Mukhamet'yanov. On distance-regular graphs on the set of nontrivial p-elements of the group $L_2(p^n)$.

Let $\mathbf{\Gamma}_B$ be the graph with vertex set $B = g^G \cup (g^{-1})^G$, where g^G is the class of conjugate elements of order p of the group $G = L_2(p^n)$, and edge set $\{\{x, y\}|xy^{-1} \in B\}$; here, p is an odd prime such that $p^n \geqslant 5$. This graph was studied in some of the author's papers.

In this paper we clarify the structure of the graph $\mathbf{\Gamma}_B$ and describe the graph $\mathbf{\Gamma}_J$ whose vertex set is the set of elements of order p of the group G and edge set is $\{\{x, y\}|xy^{-1} \in J\}$, where J is the class of adjoint involutions of G. In particular, we show that, in some cases, this graph is the union of two (isomorphic to each other) distance-regular graphs and, in other cases, its graph of 2-distances is strongly regular.

Keywords: graph, strongly regular graph, distance-regular graph, group.

Введение

В работе [1] был описан граф $\mathbf{\Gamma}_B$ с множеством вершин $B = g^G \cup (g^{-1})^G$, где g^G — класс сопряженных элементов порядка p группы $G = L_2(p)$, и с множеством ребер $\{\{x, y\} \mid xy^{-1} \in B\}$. В работе [2] получено описание аналогично построенного графа для общего случая — группы $G = L_2(p^n)$, p — нечетное простое число, $p^n \geqslant 5$.

В данной работе уточняется строение графа $\mathbf{\Gamma}_B$ и описывается граф $\mathbf{\Gamma}_J$, множество вершин которого совпадает с множеством всех элементов порядка p группы G, и с множеством ребер $\{\{x, y\} \mid xy^{-1} \in J\}$, где J — класс сопряженных инволюций группы G. В частности, показывается, что в одних случаях этот граф является объединением некоторых двух (изоморфных между собой) дистанционно регулярных графов, а в других случаях его граф 2-расстояний является сильно регулярным графом.

1. Предварительные сведения и формулировка основных результатов

В этом разделе мы приводим основные понятия, вспомогательные факты и формулируем основные результаты (теоремы 1, 2 и 3).

Всюду в статье $q = p^n \geqslant 5$, p — нечетное простое число, n — натуральное число.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Если вершины x и y лежат на расстоянии i друг от друга, то этот факт мы будем обозначать через $d(x, y) = i$. При этом если хотим подчеркнуть расстояние между x и y в графе $\mathbf{\Gamma}$, то пишем $d_{\mathbf{\Gamma}}(x,y)$. Для вершины x графа $\mathbf{\Gamma}$ через $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{\Gamma}_i(x)$ обозначим i-окрестность вершины x, т. е. подграф, индуцированный $\mathbf{\Gamma}$ на подмножестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от x. *Окрестность вершины* — ее 1-окрестность. Положим $[x]=\mathbf{\Gamma}_1(x)=\mathbf{\Gamma}(x)$ — окрестность вершины x, $x^{\perp}=[x]\cup\{x\}$ — *замкнутая окрестность* вершины x. Через $\mathbf{\Gamma}_i$ обозначим *граф i-расстояний* графа $\mathbf{\Gamma}$, т. е. граф со множеством вершин $\mathbf{\Gamma}$, в котором две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они находятся в $\mathbf{\Gamma}$ на расстоянии i.

Регулярный граф степени k — это граф, степени вершин которого равны одному и тому же числу k. *Сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ) — это регулярный граф, любая пара смежных вершин которого имеет постоянное число λ общих соседей и любая пара несмежных вершин имеет постоянное число μ общих соседей.

Если вершины x и y регулярного графа находятся на расстоянии i друг от друга в $\mathbf{\Gamma}$, то через $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$, $c_i(x,y)$ обозначим число вершин соответственно в пересечениях $\mathbf{\Gamma}_i(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)$, $\mathbf{\Gamma}_{i+1}(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)$, $\mathbf{\Gamma}_{i-1}(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)$. Они называются *числами пересечений графа* $\mathbf{\Gamma}$.

Если числа пересечений не зависят от выбора вершин x и y, то они обозначаются соответственно через a_i,b_i,c_i и граф называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\ldots,b_{d-1};c_1,c_2,\ldots,c_d\}$. Ясно, что дистанционно регулярный граф диаметра 2 — это связный сильно регулярный граф.

Если числа пересечений зависят только от выбора вершины x, то они обозначаются через $a_i(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$ соответственно, а сам граф называется *локально дистанционно регулярным* (см. [3, с. 323]). *Локальным массивом пересечений* относительно вершины x локально дистанционно регулярного графа $\mathbf{\Gamma}$ диаметра d называются упорядоченные наборы $\iota(x)=\{b_0(x)$, $b_1(x),\ldots,\ b_{d-1}(x);\ c_1(x),\ c_2(x),\ldots,\ c_d(x)\}$.

Очевидно, понятие локально дистанционно регулярного графа является обобщением понятия дистанционно регулярного графа. Мы введем другое обобщение дистанционно регулярного графа.

Ясно, что в регулярном графе i-окрестность $\mathbf{\Gamma}_i(x)$ вершины x "распадается" на классы $Y_{i1}(x)$, $Y_{i2}(x),\ldots,\ Y_{i,s(i)}(x)$ вершин y с одинаковыми значениями $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$, $c_i(x,y)$. При этом может оказаться, что для любой вершины x и любого i число таких классов одинаково, и для каждой x их можно проиндексировать так, чтобы для различных x_1 и x_2 из $y_1\in Y_{ij}(x_1)$ и $y_2\in Y_{ij}(x_2)$ вытекало $a_i(x_1,y_1)=a_i(x_2,y_2)$, $b_i(x_1,y_1)=b_i(x_2,y_2)$, $c_i(x_1,y_1)=c_i(x_2,y_2)$. Такой граф назовем *почти дистанционно регулярным.*

Таким образом, в почти дистанционно регулярном графе для различных x при одних и тех же i имеются одинаковые наборы чисел пересечений, которые зависят от y, взятой на расстоянии i от конкретной x. Нам будет удобно в обозначениях чисел пересечений аргумент x опускать: $a_i(y)$, $b_i(y)$, $c_i(y)$, подразумевая, что вершина x зафиксирована. Соответственно через $\iota(y)=\{b_0(y),b_1(y),\ldots,b_{d-1}(y);c_1(y),c_2(y),\ldots,c_d(y)\}$ обозначим массив пересечений почти дистанционно регулярного графа.

Вообще говоря, корректнее было бы для массива $\iota(y)$ ввести обозначение $\{b_0(y_0),\ b_1(y_1),\ldots,$ $b_{d-1}(y_{d-1});\ c_1(y_1),\ c_2(y_2),\ldots,\ c_d(y_d)\}$, так как в этом массиве вершины y различны. Но для удобства в обозначениях будем придерживаться именно этого. Так как в статье пойдет речь о почти дистанционно регулярных графах, то опасности перепутать, к какому графу относится массив пересечений (к локально дистанционно регулярному или к почти дистанционно регулярному), нет.

Лемма 1. *Вершинно-транзитивный граф является почти дистанционно регулярным. В частности, если $\mathbf{\Gamma}$ — граф с множеством вершин $B=g^G\cup(g^{-1})^G$ и множеством ребер $\{\{x,y\}\mid xy^{-1}\in h^G\cup(h^{-1})^G\}$, где g^G и h^G — некоторые классы сопряженных элементов произвольной группы G, то $\mathbf{\Gamma}$ — почти дистанционно регулярный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть леммы очевидна, так как у вершинно-транзитивного графа i-окрестности $\mathbf{\Gamma}_i(x)$ всех вершин x для фиксированного i устроены одинаково, для фиксированного x $|\mathbf{\Gamma}_i(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)|$ могут зависеть только от y, лежащих на расстоянии i от x, и в силу равенства $|\mathbf{\Gamma}_i(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)| = |\mathbf{\Gamma}_i(x^u)\cap\mathbf{\Gamma}(y^u)|$ получаем $a_i(x,y) = a_i(x^u,y^u)$, $b_i(x,y) = b_i(x^u,y^u)$, $c_i(x,y) = c_i(x^u,y^u)$ для любого $u\in G$. Осталось заметить, что если граф $\mathbf{\Gamma}$ — граф с множеством вершин $B = g^G\cup(g^{-1})^G$ и множеством ребер $R = \{\{x,y\}\mid xy^{-1}\in h^G\cup(h^{-1})^G\}$, где g^G и h^G — некоторые классы сопряженных элементов произвольной группы G, то он является вершинно-транзитивным. Действительно, во-первых, сопряжения элементами группы G и отображение $\tau\colon u\to u^{-1}$ ($u\in G$), очевидно, оставляют на месте $B = g^G\cup(g^{-1})^G$ и $H = h^G\cup(h^{-1})^G$ и, во-вторых, сохраняют смежность вершин в $\mathbf{\Gamma}$:

$$\{x,y\}\in R\Leftrightarrow xy^{-1}\in H\Leftrightarrow(xy^{-1})^g\in H^g = H\Leftrightarrow x^g(y^{-1})^g\in H\Leftrightarrow x^g(y^g)^{-1}\in H\quad\forall g\in G$$

и

$$\begin{aligned}\{x,y\}\in R\Leftrightarrow xy^{-1}\in H\Leftrightarrow x\in Hy\Leftrightarrow x^\tau\in(Hy)^\tau = (Hy)^{-1} = y^{-1}H^{-1}\\ = y^{-1}H = Hy^{-1} = Hy^\tau\Leftrightarrow x^\tau(y^\tau)^{-1}\in H\Leftrightarrow\{x^\tau,y^\tau\}\in R.\end{aligned}$$

Здесь $X^{-1} = \{x^{-1}\mid x\in X\}$.

Лемма 1 доказана. □

Таким образом, рассматриваемые нами графы $\mathbf{\Gamma}_B$ и $\mathbf{\Gamma}_J$ (см. разд. “Введение”) являются почти дистанционно регулярными.

Граф $x^\perp$ называется *m-пирамидой с вершиной x*, если $[x]$ является простым циклом. Этот цикл назовем *основанием пирамиды*. Граф $x^\perp$ называется *связкой пирамид с общей вершиной x*, если $[x]$ есть объединение изолированных простых циклов. Граф $x^\perp$ называется *m-звездой с центром x*, если $[x]$ является m-кокликой.

Кодом в графе $\mathbf{\Gamma}$ с множеством вершин V называется непустое подмножество C из V. Число $\delta(C) = \min\{d(x,y)\mid x,y\in C, x\neq y\}$ при $|C|\neq 1$ называется *минимальным расстоянием в C*. *Расстояние* от $x\in V$ до C — это число $d(x,C) = \min\{d(x,y)\mid y\in C\}$, а число $r(C) = \max\{d(x,C)\mid x\in V\}$ называется *радиусом покрытия* C. Минимальное расстояние в C и радиус покрытия связаны неравенством $\delta(C)\leqslant 2r(C)+1$ (см. [4, с. 345]), равенство имеет место в точности тогда, когда шары радиуса $r(C)$ с центром в точках из C образуют разбиение V. Код с таким свойством называется *совершенным*.

Через $\mathbf{\Gamma}(M)$ будем обозначать индуцированный подграф графа $\mathbf{\Gamma}$ с множеством вершин M (M — некоторое подмножество вершин графа $\mathbf{\Gamma}$).

Напоминаем, что $q = p^n\geqslant 5$, p — нечетное простое число, n — натуральное.

Определение 1. *Обобщенным икосаэдром с параметром q* назовем граф $I(q)$ со следующими свойствами.

1. Граф состоит из $(q^2-1)/2$ вершин.
2. Замкнутая окрестность любой вершины графа является связкой из p^{n-1} p-пирамид.
3. Для любой вершины g графа в нем существует совершенный код $C(g)$ накрывающего радиуса 1, содержащий g.
4. Для любых вершин x, y из $C(g)$ любая вершина $u\in[x]$ смежна в точности с двумя вершинами из $[y]$.

Пару вершин из $[y]$, смежных с некоторой $u\in[x]$ из свойства 4 определения 1, назовем *родственной парой* (или *парой родственных вершин*) для u относительно пары (x,y).

Ясно, что обычный икосаэдр — это обобщенный икосаэдр при $q = 5$.

Определение 2. Наряду с квазиикосаэдром будем рассматривать граф $PI(q)$ со следующими свойствами.

1. Граф состоит из q^2-1 вершин.
2. Замкнутая окрестность любой вершины графа является q-звездой.
3. Для любой вершины g графа в нем существует совершенный код $C(g)$ накрывающего радиуса 1, содержащий g.
4. Множество V вершин графа разбивается на два подмножества V_1 и V_2 таких, что для любой вершины $g\in V$ в точности половина элементов из $C(g)$ лежит в V_1, а другая половина —

в V_2, при этом для любых $x \in V_1 \cap C(g)$ и $y \in V_2 \cap C(g)$ любая вершина u из $[x]$ смежна в точности с двумя вершинами из $[y]$, любая вершина из $[y]$ смежна в точности с двумя вершинами из $[x]$, и для любых $x,\, z \in V_s \cap C(g)$ (s=1, 2) никакая вершина из $[x]$ не смежна с вершинами из $[z]$.

Пару вершин из $[y]$, смежных с $u \in [x]$ из свойства 4 определения 2, назовем *родственной парой* (или *парой родственных вершин*) для u относительно пары (x, y).

Если $x \in V_i$ $(i = 1, 2)$, то V_i будем обозначать через $V(x)$.

Граф $PI(q)$ назовем *псевдоикосаэдром с параметром* q.

Теорема 1. *Обобщенный икосаэдр с параметром q является дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{q, q-3, 1; 1, 2, q\}$.

Псевдоикосаэдр с параметром q является почти дистанционно регулярным графом диаметра 4 *с массивом пересечений* $\{q, q-1, q-2, b_3(y); 1, 2, c_3(y), q\}$, *где*

$$b_3(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in C(x), \\ 1, & \text{если } y \notin C(x), \end{cases} \qquad c_3(y) = \begin{cases} q, & \text{если } y \in C(x), \\ q-1, & \text{если } y \notin C(x). \end{cases}$$

При этом граф 2*-расстояний псевдоикосаэдра $PI(q)$ имеет в точности две компоненты связности, каждая из которых является сильно регулярным графом с параметрами* $\Big(\dfrac{q^2-1}{2}, \dfrac{q(q-1)}{2}, \dfrac{(q-1)^2}{2}, \dfrac{q(q-1)}{2}\Big)$.

Как известно, указанные сильно регулярные графы — это полные многодольные графы с $q+1$ долями по $(q-1)/2$ вершины каждая.

Пусть $\mathbf{\Gamma}_B$ — граф с множеством вершин $B = g^G \cup (g^{-1})^G$, где g^G — класс сопряженных p-элементов группы $G = L_2(q)$, и с множеством ребер $\{\{x, y\} \mid xy^{-1} \in B\}$. Напомним свойства графа $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_B$ (которые мы формулируем в редакции работ [1; 2]).

Предложение 1. (1) *Степень вершины g графа $\mathbf{\Gamma}$ равна $q + (q-5)/4$, если $q \equiv 1 \pmod 4$ и $2(q-1)$, если $q \equiv -1 \pmod 4$. При этом в точности q вершин, смежных с g, лежат в $B - C_G(g)$, а остальные — в $C_G(g)$.*

(2) *Множество вершин разбивается на $(q-1)/d$ непересекающихся подмножеств $\overline{[g_i] - C_G(g)}$, $i = 1, 2, \ldots, (q-1)/d$, где $d = 1$, если $q \equiv -1 \pmod 4$, и $d = 2$, если $q \equiv 1 \pmod 4$, и*

$$\overline{[g_i] - C_G(g)} = ([g_i] - C_G(g)) \cup \{g_i\}, \quad g_i \in C_G(g) \cap B.$$

(3) $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_i] - C_G(g)})$ *— связка p^{n-1} пирамид с общей вершиной g_i, основания которых не пересекаются, если $q \equiv 1 \pmod 4$, и из q-звезды с центром g_i, если $q \equiv -1 \pmod 4$. В частности, $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_i] - C_G(g)})$ является пирамидой, если $q = p \equiv 1 \pmod 4$, и звездой, если $q = p \equiv -1 \pmod 4$.*

(4) *Если некоторые g_i и g_j из $C_G(g) \cap B$ сопряжены, то любая вершина u подграфа $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_i] - C_G(g)})$, отличная от g_i, смежна в точности с двумя вершинами подграфа $\mathbf{\Gamma}([g_j^{-1}] - C_G(g))$, отличными от g_j^{-1} и не лежащими в $C_G(u)$. В частности, если $q \equiv 1 \pmod 4$ и $g_i,\, g_j \in C_G(g) \cap B$, то любая вершина u подграфа $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_i] - C_G(g)})$, отличная от g_i, смежна в точности с двумя вершинами подграфа $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_j] - C_G(g)})$, отличными от g_j и не лежащими в $C_G(u)$. Если $q \equiv -1 \pmod 4$ и g_i с g_j из $C_G(g) \cap B$ сопряжены, то никакая вершина подграфа $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_i] - C_G(g)})$, отличная от g_i, не смежна с вершинами подграфа $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_j] - C_G(g)})$.*

(Здесь $C_G(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ — централизатор элемента $g \in G$ в G. Кроме того напоминаем, что $\mathbf{\Gamma}(M)$ — индуцированный подграф графа $\mathbf{\Gamma}$ с множеством вершин M, M — некоторое подмножество вершин графа $\mathbf{\Gamma}$).

Доказательство для частного случая $q = p$ см. в [1]. Доказательство для общего случая приведено в [2] и принципиально не отличается от доказательства в частном случае.

Так же, как и для графов $I(q)$ и $PI(q)$, пару вершин из $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_j^{-1}] - C_G(g)})$, смежных с u из $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_i] - C_G(g)})$ (из свойства (4)), назовем *родственными для* u *относительно пары* (g_i, g_j).

Всюду под $\widehat{\mathbf{\Gamma}_B}$ будем подразумевать граф, полученный из графа $\mathbf{\Gamma}_B$ удалением ребер, соединяющих между собой попарно коммутирующие вершины из B. Таким образом, в полученном графе $\widehat{\mathbf{\Gamma}_B}$ остаются только ребра, соединяющие вершины с парами родственных вершин.

Теорема 2. *Если* $q \equiv 1 \pmod 4$, *то* $\widehat{\mathbf{\Gamma}_B}$ *— обобщенный икосаэдр с параметром* q, *а если* $q \equiv -1 \pmod 4$, *то* $\widehat{\mathbf{\Gamma}_B}$ *— псевдоикосаэдр с параметром* q. *В обоих случаях совершенный код в графах образуют неединичные элементы любой силовской* p*-подгруппы.*

Напоминаем, что $\left(\dfrac{a}{q}\right)$ — *символ Лежандра* — это 1 или -1 в зависимости от того, разрешимо или нет квадратное уравнение $x^2 = a$ в поле F_q при $a \neq 0$.

Хорошо известна следующая

Лемма 2. *Имеет место равенство* $a^{\frac{q-1}{2}} = \left(\dfrac{a}{q}\right)$. *Другими словами, квадратное уравнение* $x^2 = a$ *в поле* F_q *разрешимо тогда и только тогда, когда* $a^{\frac{q-1}{2}} = 1$.

Лемма 3. *Квадратное уравнение* $x^2 = -2$ *в поле* F_q *разрешимо тогда и только тогда, когда* $q \equiv 1, 3 \pmod 8$.

Доказательство. Согласно определению символа Лежандра, это квадратное уравнение имеет в поле F_q решение тогда и только тогда, когда $\left(\dfrac{-2}{q}\right) = 1$. По свойствам символа Лежандра имеем

$$\left(\frac{-2}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} (-1)^{\frac{q^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{q-1}{2} \frac{q+5}{4}}.$$

Поэтому это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $\dfrac{q-1}{2} \cdot \dfrac{q+5}{4}$ четное число.

Пусть $q \equiv -1 \pmod 4$. Тогда $q - 1 = -2 + 4k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, и $\dfrac{q-1}{2} = 2k - 1$ — нечетное. Далее, $q+5 = 4k+4 = 4(k+1)$, т. е. $\dfrac{q+5}{4} = k+1$, откуда $\dfrac{q-1}{2} \cdot \dfrac{q+5}{4} = (2k-1)(k+1)$ четно тогда, и только тогда, когда $k+1$ четно, т. е. когда k нечетно. А это означает, что $q \not\equiv -1 \pmod 8$, т. е. $q \equiv 3 \pmod 8$.

Пусть $q \equiv 1 \pmod 4$. Тогда $q - 1 = 4k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{q+5}{4} = \dfrac{4k+6}{4} = \dfrac{2k+3}{2}$, откуда $\dfrac{q-1}{2} \cdot \dfrac{q+5}{4} = k(2k+3)$ четно тогда и только тогда, когда k четно. А это означает, что $q \equiv 1 \pmod 8$.

Лемма 3 доказана. □

Опишем параметрами множество $\overline{P}$ неединичных p-элементов, классы сопряженных p-элементов и класс J инволюций группы $G = L_2(p^n)$.

Возьмем силовские p-подгруппы

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in F_q \right\}, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in F_q \right\}$$

группы G, F_q — поле из $q = p^n$ элементов (здесь и ниже элементы $k1_F$ поля F_q, кратные единице 1_F, будем обозначать через k, $k \in \mathbb{Z}$; сам элемент 1_F — через 1). Если x_i пробегает элементы P, то $P_1^{x_i}$ пробегает все силовские p-погруппы группы G, кроме P. Положим $x_1 = e$ — единица G, $x_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_i & 1 \end{pmatrix}$ и $P(\delta_i) = P_1^{x_i}$, i=1, 2,. . . , q. Тогда

$$P(\delta_i)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in F_q \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_i & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\gamma\delta_i & \gamma \\ -\gamma\delta_i^2 & 1-\gamma\delta_i \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in F_q \right\}, \tag{1.1}$$

где δ_i — некоторый фиксированный элемент из F_q для каждого $P(\delta_i)$, а γ пробегает все F_q. Таким образом,

$$\overline{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in F_q^* \right\} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{q} \left\{ \begin{pmatrix} 1+\gamma\delta_i & \gamma \\ -\gamma\delta_i^2 & 1-\gamma\delta_i \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in F_q^* \right\}, \delta_i \in F_q \right) \tag{1.2}$$

— множество всех неединичных p-элементов группы G с точностью до знака перед матрицами (напоминаем, что в $L_2(p^n)$ две матрицы совпадают тогда и только тогда, когда они в $SL_2(p^n)$ совпадают или противоположны по знаку), F_q^* — множество ненулевых элементов поля F_q.

Лемма 4. *Множество $\overline{P}$ неединичных p-элементов группы $L_2(p^n)$ разбивается на два класса: C_1 — класс элементов, для которых в* (1.2) $\gamma = \alpha^2$ *— квадратичный вычет поля F_q, и C_2 — класс элементов, для которых в* (1.2) γ *не является квадратичным вычетом поля F_q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что множество $\overline{P}$ неединичных p-элементов разбивается на два класса сопряженных элементов, хорошо известно (см., например, [5, с. 261, 262]). Пусть $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, где α — ненулевой элемент из поля F_q. Тогда

$$a^{-1}ga = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P(\delta_i) \cap g^G = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\alpha^2\delta_i & \alpha^2 \\ -\alpha^2\delta_i^2 & 1-\alpha^2\delta_i \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in F_q^* \right\}.$$

Далее, так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 1 \end{pmatrix},$$

то $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ сопряжен со всеми элементами из P вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$, где $\alpha \in F_q$. Поэтому

$$g^G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in F_q^* \right\} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{q} \left\{ \begin{pmatrix} 1+\alpha^2\delta_i & \alpha^2 \\ -\alpha^2\delta_i^2 & 1-\alpha^2\delta_i \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in F_q^* \right\}, \delta_i \in F_q \right),$$

и класс g^G сопряженных с $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ p-элементов группы — это подмножество тех элементов из $\overline{P}$, для которых $\gamma = \alpha^2$ являются квадратичными вычетами поля F_q. В частности, второй класс сопряженных элементов группы — это те из $\overline{P}$, для которых γ не являются квадратичными вычетами поля F_q.

Лемма 4 доказана. □

Прежде чем описать классы инволюций, напомним, что в группе $L_2(q)$ всего один такой класс J и $|J| = q(q-1)/2$, если $q \equiv -1 \pmod 4$, и $|J| = q(q+1)/2$, если $q \equiv 1 \pmod 4$.

Рассмотрим матрицы t вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(q)$. Тогда $\beta\gamma = -1$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 \\ 0 & \beta\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. t — инволюции в $L_2(q)$. Для каждого $\gamma \neq 0$ существует единственное $\beta \in F_q$ такое, что $\beta\gamma = -1$. Поэтому последнее уравнение в F_q имеет в точности $q-1$ решений, и в $SL_2(q)$ имеется в точности $q-1$ матриц типа t, которые представляют $(q-1)/2$ инволюций в $L_2(q)$. Сопрягаем их матрицами $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & \beta\\ \gamma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\gamma & \beta-\alpha^2\gamma\\ \gamma & \alpha\gamma\end{pmatrix}.$$

Такие матрицы попарно различны: если

$$\begin{pmatrix}-\alpha\gamma & \beta-\alpha^2\gamma\\ \gamma & \alpha\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha_1\gamma_1 & \beta_1-\alpha_1^2\gamma_1\\ \gamma_1 & \alpha_1\gamma_1\end{pmatrix},$$

то $\gamma = \gamma_1$, откуда $\alpha = \alpha_1$ (так как $\gamma \neq 0$) и $\beta = \delta_1$. Следовательно, таких матриц в $SL_2(q)$ имеется в точности $q(q-1)$. В $L_2(q)$ они представляют $q(q-1)/2$ инволюций. Поэтому при $q \equiv -1 \pmod 4$ множество

$$J = \left\{\pm\begin{pmatrix}-\alpha\gamma & \beta-\alpha^2\gamma\\ \gamma & \alpha\gamma\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\beta,\gamma \in F_q, \beta\gamma = -1\right\}$$

образует весь класс инволюций группы $L_2(q)$.

Если $q \equiv 1 \pmod 4$, то уравнение $x^2 = -1$ имеет в поле F_q решение (см. упомянутый в лемме 3 критерий разрешимости квадратного уравнения). Пусть δ — решение этого уравнения. Тогда

$$\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta^{-1}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\delta^2 & 0\\ 0 & \delta^{-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

и $\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta^{-1}\end{pmatrix}$ — инволюция в $L_2(q)$. Далее имеем

$$\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta & \alpha(\delta-\delta^{-1})\\ 0 & \delta^{-1}\end{pmatrix},$$

и так как $\delta^2 = -1$, то $\delta = -\delta^{-1}$ и $\delta - \delta^{-1} = 2\delta$. Поэтому

$$\begin{pmatrix}\delta & \alpha(\delta-\delta^{-1})\\ 0 & \delta^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta & 2\alpha\delta\\ 0 & -\delta\end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Покажем, что таких матриц в $SL_2(q)$ имеется в точности $2q$, которые в $L_2(q)$ дают q матриц. Ясно, что для фиксированного δ (решения уравнения $x^2 = -1$) их будет в точности q. Если δ_1 — другое решение, то $\delta_1 = -\delta$, и если

$$\begin{pmatrix}\delta & 2\alpha\delta\\ 0 & -\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\delta & -2\alpha_1\delta\\ 0 & \delta\end{pmatrix},$$

то $\delta = -\delta$, $2\delta = 0$, т. е. $\delta = 0$. Поэтому матрицы вида (1.3) в $SL_2(q)$ с $\delta^2 = -1$ попарно различны, и их будет в точности $2q$, и они дают в $L_2(q)$ q элементов.

Предположим,

$$\begin{pmatrix}-\alpha\gamma & \beta-\alpha^2\gamma\\ \gamma & \alpha\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta & 2\alpha\delta\\ 0 & -\delta\end{pmatrix}.$$

Тогда $\gamma = 0$, что противоречит условию $\gamma \neq 0$. Таким образом, при $q \equiv 1 \pmod 4$ множество

$$J = \left\{\pm\begin{pmatrix}-\alpha\gamma & \beta-\alpha^2\gamma\\ \gamma & \alpha\gamma\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\beta,\gamma \in F_q, \beta\gamma = -1\right\} \bigcup \left\{\begin{pmatrix}\delta & 2\alpha\delta\\ 0 & -\delta\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\delta \in F_q, \delta^2 = -1\right\}$$

представляет в $L_2(q)$ весь класс сопряженных инволюций (так как $|J| = q(q-1)/2 + q = q(q+1)/2$).

Лемма 5. *Пусть x, y — два неединичных p-элемента группы $L_2(q)$ и xy^{-1} — инволюция. Тогда равносильны следующие два условия*:

∘ *x и y сопряжены*;

∘ $q \equiv 1, 3 \pmod 8$.

Аналогично, равносильны следующие два условия:

∘ *x и y не сопряжены*;

∘ $q \equiv 5, 7 \pmod 8$.

Доказательство. В качестве y возьмем элемент $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_1$. Покажем, что если xy^{-1} — инволюция, то в качестве x можно взять элемент из произвольной силовской p-подгруппы, отличной от P_1. Действительно, если xy^{-1} — инволюция, то x и y лежат в разных силовских p-подгруппах. Пусть x лежит в некоторой силовской p-подгруппе Q. Тогда если y_i пробегает элементы P_1, то Q^{y_i} пробегает множество всех силовских подгрупп группы G, отличных от P_1. Отсюда следует, что в инволюциях $(xy^{-1})^{y_i} = x^{y_i}y^{-1}$ элемент x^{y_i} пробегает множество представителей всех силовских подгрупп, отличных от P_1. Отсюда вытекает, что в качестве x можно взять элемент из произвольной силовской p-подгруппы, отличной от P_1. Можно считать, что $x = \begin{pmatrix} 1+\eta & \eta \\ -\eta & 1-\eta \end{pmatrix} \in P(1)$ (обозначение $P(1)$ см. в (1.1)). Так как xy^{-1} — инволюция, то $xy^{-1} \in J$. Для этого должно выполняться условие, согласно которому элемент

$$h = xy^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\eta & \eta \\ -\eta & 1-\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\eta & -1 \\ -\eta & 1 \end{pmatrix}$$

имеет либо вид $\pm\begin{pmatrix} -\alpha\gamma & \beta-\alpha^2\gamma \\ \gamma & \alpha\gamma \end{pmatrix}$, либо вид (1.3).

Пусть $\begin{pmatrix} 1+\eta & -1 \\ -\eta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma & \beta-\alpha^2\gamma \\ \gamma & \alpha\gamma \end{pmatrix}$, где $\beta\gamma = -1$. Тогда приходим к системе

$$\begin{cases} 1+\eta &= -\alpha\gamma, \\ \beta-\alpha^2\gamma &= -1, \\ -\eta &= \gamma, \\ \alpha\gamma &= 1. \end{cases}$$

Для того чтобы доказать, что инволюция xy^{-1} имеет данный вид, необходимо и достаточно показать, что эта система совместна с учетом $\beta\gamma = -1$. Из первого и последнего уравнений имеем $\eta = -2$, из третьего — $\gamma = 2$, из последнего — $\alpha = \gamma^{-1} = 2^{-1}$ и из второго — $\beta = 2^{-1} - 1$. При этом $\beta\gamma = (2^{-1} - 1)\cdot 2 = -1$, и система совместна.

Пусть $\begin{pmatrix} 1+\eta & -1 \\ -\eta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma & -\beta+\alpha^2\gamma \\ -\gamma & -\alpha\gamma \end{pmatrix}$. Тогда приходим к системе

$$\begin{cases} 1+\eta &= \alpha\gamma, \\ \beta-\alpha^2\gamma &= 1, \\ \eta &= \gamma, \\ \alpha\gamma &= -1. \end{cases}$$

Теперь снова $\eta = -2$, но $\gamma = -2$, $\alpha = -\gamma^{-1} = 2^{-1}$, $\beta = \alpha^2\gamma + 1 = -2^{-1} + 1$ и $\beta\gamma = (-2^{-1} + 1)\cdot(-2) = -1$, и система совместна.

Легко видеть, что случай $\begin{pmatrix} 1+\eta & -1 \\ -\eta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 2\alpha\delta \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$ не имеет места, так как тогда $\eta = 0$, $\delta = -\delta = 1$, что невозможно.

Теперь, если x и y сопряжены, то по лемме 4 $\eta = \delta^2$ — квадратичный вычет поля. Поэтому должно выполняться условие $\delta^2 = \eta = -2$, т. е. δ должен быть решением уравнения $\delta^2 = -2$.

По лемме 3 это квадратное уравнение имеет в поле F_q решение тогда и только тогда, когда $q \equiv 1, 3 \pmod 8$.

Ясно, что имеет место и обратное: если $q \equiv 1, 3 \pmod 8$, то x и y сопряжены.

Вторая часть леммы является непосредственным следствием первой.

Лемма 5 доказана. $\square$

В следующей теореме описывается граф $\mathbf{\Gamma}_J$ с множеством вершин $\overline{P}$ и множеством ребер $\{\{x, y\} \mid xy^{-1} \in J\}$, где J — класс сопряженных инволюций группы G.

Теорема 3. *Если $q \equiv 1, 3 \pmod 8$, то граф $\mathbf{\Gamma}_J$ несвязен. При этом связные компоненты его — два изоморфных между собой графа $I(q)$, совершенные коды которых образуют неединичные элементы одних и тех же силовских p-подгрупп группы G.*

Если $q \equiv 5, 7 \pmod 8$, то граф $\mathbf{\Gamma}_J$ изоморфен графу $PI(q)$, совершенные коды которого образуют неединичные элементы одних и тех же силовских p-подгрупп группы G.

Следствие. *Если $q \equiv 1, 3 \pmod 8$, то $\mathbf{\Gamma}_J$ не связен и распадается на два дистанционно регулярных графа диаметра 3 с одним и тем же массивом пересечений $\{q, q-3, 1; 1, 2, q\}$.*

Если $q \equiv 5, 7 \pmod 8$, то $\mathbf{\Gamma}_J$ — почти дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{q, q-1, q-2, b_3(y); 1, 2, c_3(y), q\}$, где

$$b_3(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in C(x), \\ 1, & \text{если } y \notin C(x), \end{cases} \qquad c_3(y) = \begin{cases} q, & \text{если } y \in C(x), \\ q-1, & \text{если } y \notin C(x). \end{cases}$$

В последнем случае граф 2-расстояний графа $\mathbf{\Gamma}_J$ является несвязным и распадается на два сильно регулярных графа с параметрами $\left(\frac{q^2-1}{2}, \frac{q(q-1)}{2}, \frac{(q-1)^2}{2}, \frac{q(q-1)}{2}\right)$.

З а м е ч а н и е. 1. Свойства графа $\mathbf{\Gamma}_J$ инвариантны относительно выбора силовской подгруппы P (относительно элементов которой они разлагаются). Поэтому любое свойство графа $\mathbf{\Gamma}_J$, сформулированное относительно фиксированной силовской p-подгруппы, справедливо относительно любой силовской p-подгруппы.

З а м е ч а н и е. 2. В [4] приводятся две различные конструкции дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{q, q-\mu, 1; 1, \mu, q\}$, которые дают изоморфные графы при одних и тех же q и μ. Мы в данной статье фактически предлагаем еще одну конструкцию такого графа при $\mu = 2$. Вопрос об изоморфизме построенных дистанционно регулярных графов мы оставляем открытым.

2. Доказательство теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Докажем, что произвольный обобщенный икосаэдр с параметром q является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{q, q-3, 1; 1, 2, q\}$.

Пусть $I(q)$ — произвольный обобщенный икосаэдр с параметром q, g_1 — произвольная вершина графа, $\{g_1, g_2, \ldots, g_{\frac{q-1}{2}}\} = C(g_1)$ — совершенный код, содержащий g_1. Сначала заметим, что диаметр графа $I(q)$ равен 3. Действительно, по определению $I(q)$ (см. определение 1) для любой вершины x графа ее замкнутая окрестность $x^{\perp}$ является связкой пирамид, и если g_i, $g_j \in C(g_1)$, $g_i \neq g_j$, то для любого u из основания некоторой пирамиды связки $g_j^{\perp}$ имеем $d(g_i, u) = 2$. Поэтому $d(g_i, g_j) = 3$ и диаметр графа $I(q)$ равен 3. Попутно заметим, что $d(g_i, x) = 3$ тогда и только тогда, когда $x \in C(g_1) - \{g_i\}$. В частности, $d(x, y) = 3$ тогда и только тогда, когда $x, y \in C(z)$ для некоторого z.

Покажем, что код $C(g_1)$, содержащий g_1, единствен и для любых g_i и g_j из $C(g_1)$ имеет место равенство $C(g_i) = C(g_j)$. Достаточно показать, что произвольный код $C(g_i)$, содержащий g_i, совпадает с $C(g_1)$. Допустим, $C(g_1) \neq C(g_i)$, $g_i \in C(g_1)$, $x \in C(g_i) - C(g_1)$. Тогда

$d(g_i, x) = 3$ и x лежит в окрестности некоторой точки $g_j \in C(g_1)$. По определению 1 точка x смежна в точности с двумя точками из g_l для всех $g_l \in C(g_1)$, в том числе и в случае $g_l = g_i$, т. е. имеем $d(g_i, x) \leqslant 2$ — противоречие.

Заметим, что для произвольного графа $b_0(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_1(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)|$ — степень вершины $x = y$. При этом в силу определения 1 это число не зависит от выбора x. Поэтому $b_0 = q$. Так же в произвольном графе $c_1(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_0(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = 1$, где $d(x, y) = 1$, и это число тоже не зависит от выбора x и y. Поэтому $c_1 = 1$.

Далее, в условиях $d(x, y) = t$ зафиксируем в качестве y некоторую $g_i \in C(g_1)$, т. е. положим $y = g_i$.

Пусть $d(x, y) = 1$. Тогда x лежит в основании некоторой пирамиды связки $y^{\perp}$, и x смежна только с двумя вершинами из $[y]$, а поэтому в $\mathbf{\Gamma}_2(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)$ содержатся все вершины $y^{\perp}$, кроме вершин из $x^{\perp}$, т. е. $b_1(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_2(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = q - 3$. Ясно, что $b_1(x, y)$ не зависит от выбора x и y.

Пусть $d(x, y) = 2$. Тогда, очевидно, x лежит в основании пирамиды $g_j^{\perp}$ для некоторого $g_j \in C(y) = C(g_1)$. Из свойства 4 определения 1 вытекает, что $c_2(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_1(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = 2$. Далее, в $\mathbf{\Gamma}_3(x)$ содержатся только вершины из $C(x)$ (поскольку, как мы уже заметили, $d(x, u) = 3$ тогда и только тогда, когда $u \in C(u)$), а такая в $\mathbf{\Gamma}(y)$ только одна. Действительно, покажем, что для любого i=1, 2,…, $(q-1)/2$ имеет место равенство $|g_i^{\perp} \cap C(x)| = 1$. Прежде всего, заметим, что $g_i^{\perp} \cap C(x) \neq \varnothing$ (в противном случае существует j такой, что $|g_j^{\perp} \cap C(x)| \geqslant 2$ и если $x_1, x_2 \in g_j^{\perp} \cap C(x)$, то ясно, что $d(x_1, x_2) \leqslant 2$, в то время как в силу $x_1, x_2 \in C(x)$ имеем $d(x_1, x_2) = 3$). Таким образом, $g_i^{\perp} \cap C(x) \neq \varnothing$ для любого i=1, 2,…, $(q-1)/2$, и так как $|C(x)| = (q-1)/2$, то $|g_i^{\perp} \cap C(x)| = 1$. Следовательно, $b_2(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_3(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = 1$, и в $\mathbf{\Gamma}(y)$ два элемента лежат на расстоянии 1 от x и один — на расстоянии 3. Остальные $q-3$ вершин из $\mathbf{\Gamma}(y)$ лежат на расстоянии 2 от x: $a_2(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_2(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = q-3$. Ясно, что $a_2(x, y), b_2(x, y), c_2(x, y)$ не зависят от выбора x и y.

Наконец, пусть $d(x, y) = 3$. Тогда $x \in C(y)$ и все вершины из $[y]$ лежат в $\mathbf{\Gamma}_2(x)$, т. е. $c_3(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_2(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = q$.

Снова все параметры пересечений не зависят от выбора x и y.

Докажем, что произвольный псевдоикосаэдр с параметром q является почти дистанционно регулярным графом, граф 2-расстояний которого несвязен и распадается на два сильно регулярных графа с указанными параметрами.

Пусть $PI(q)$ — произвольный псевдоикосаэдр с параметром q, $\{g_1, g_2, \ldots, g_{q-1}\} = C(g_1)$ — совершенный код, содержащий произвольную вершину g_1. Сначала заметим, что диаметр графа $PI(q)$ равен 4. Действительно, если $g_i, g_l \in V_1 \cap C(g_1)$ и $g_j \in V_2 \cap C(g_1)$, то $g_i^{\perp} \cap g_l^{\perp} = \varnothing$ и $d(g_i, g_l) > 2$. Так как вершина $u \in [g_j]$ смежна с (в точности двумя) вершинами из $[g_i]$ и с вершинами из $[g_l]$, то $d(g_i, g_l) \leqslant 4$. Кроме того, вершины из $[g_i]$ и $[g_l]$ не смежны между собой. Поэтому $d(g_i, g_l) = 4$. Ясно, что для любого $x \in V$ имеем $d(g_i, x) \leqslant 4$. В частности, если $x, y \in C(z)$ для некоторого z, то $3 \leqslant d(x, y) \leqslant 4$. При этом $d(x, y) = 3$, если x и y лежат в различных подмножествах V_1 и V_2, и $d(x, y) = 4$, если x и y лежат в одном из них.

Так как $b_0(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_1(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)|$ — степень вершины $x = y$, то в силу определения $PI(q)$ (см. определение 2) это число не зависит от выбора x и $b_0(y) = q$. Также $c_1(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_0(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = 1$, где $d(x, y) = 1$, и это число тоже не зависит от выбора x и y. Поэтому $c_1 = 1$.

Далее, в условиях $d(x, y) = t$ зафиксируем в качестве x некоторую $g_i \in C(g_1)$, т. е. положим $x = g_i$. При этом считаем, что $x \in V_1$.

Пусть $d(x, y) = 1$. Так как $x^{\perp}$ — звезда, то y не смежна ни с какой вершиной из $x^{\perp}$, а поэтому в $\mathbf{\Gamma}_2(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)$ содержатся все вершины $y^{\perp}$, кроме, естественно, x, т. е. $b_1(y) = |\mathbf{\Gamma}_2(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = q - 1$. Ясно, что $b_1(y)$ не зависит от выбора x.

Пусть $d(x, y) = 2$. Тогда, очевидно, $y \in [g_j]$ для некоторого $g_j \in V_2$. Из свойства 4 определения 2 вытекает, что $c_2(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_1(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = 2$. Поэтому в силу структуры $g_i^{\perp}$ имеем, что $b_2(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_3(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = q-2$ и $a_2(x, y) = |\mathbf{\Gamma}_2(x) \cap \mathbf{\Gamma}(y)| = 0$. Ясно, что $a_2(x, y), b_2(x, y), c_2(x, y)$ не зависят от выбора y. Очевидно, они не зависят и от x.

Пусть $d(x,y)=3$. Тогда возможны два случая: $y\in C(x)$ и $y\notin C(x)$. Если $y\in C(x)$, то, очевидно, $c_3(y)=|\mathbf{\Gamma}_2(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)|=q$, откуда $a_3(y)=b_3(y)=0$. Если $y\notin C(x)$, то $y\in[g_l]$ для некоторого $g_l\in C(x)\cap V_1$. Ясно, что $\mathbf{\Gamma}_3(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)=\varnothing$, т. е. $a_3(y)=0$, и $\mathbf{\Gamma}_4(x)\cap\mathbf{\Gamma}(y)=\{g_l\}$, т. е. $b_3(y)=1$. Отсюда $c_3(y)=q-1$.

Далее, ясно, что в графе $\mathbf{\Gamma}$ на расстоянии 2 от произвольной вершины g лежат в точности вершины из $[g_j]$, где $g_j\in C(g)-V(g)$, а на расстоянии 4 — в точности вершины из $(C(g)\cap V(g))-\{g\}$, причем $\{g\}\cup\mathbf{\Gamma}_2(g)\cup\mathbf{\Gamma}_4(g)=V(g)$. Также ясно, что для любых g_1 и g_2 из $C(g)\cap V(g)$ множества вершин, лежащих на расстоянии 2 от g_1 и g_2 в $\mathbf{\Gamma}$, совпадают: $\mathbf{\Gamma}_2(g_1)=\mathbf{\Gamma}_2(g_2)$. Поэтому, если $\Delta=\mathbf{\Gamma}_2$ — граф 2-расстояний графа $\mathbf{\Gamma}$, то $\Delta(g_1)=\Delta(g_2)$. При этом $d_{\mathbf{\Gamma}}(g_1,g_2)=4$, т. е. $d_\Delta(g_1,g_2)=2$. Отсюда следует, что $k(\Delta)=\mu(\Delta)=q(q-1)/2$. Далее, если x — произвольная вершина, то для некоторого g имеем $x\in\Delta(g)$, и кроме вершин из $C(g)$ на расстоянии 2 от x в $\mathbf{\Gamma}$ лежат только вершины из $g_i^\perp$, для которых $g_i\in C(g)-V(g)$, и только те, которые не лежат в $C(x)$. А их будет в точности $q(q-1)/2-(q-1)/2=(q-1)/2\cdot(q-1)=(q-1)^2/2$, и все они лежат на расстоянии 2 в $\mathbf{\Gamma}$ от g. Это означает, что для x и g, смежных в Δ, $|\Delta(x)\cap\Delta(g)|=(q-1)^2/2$. Отсюда следует, что $\lambda=(q-1)^2/2$, и $\mathbf{\Gamma}_2=\Delta$ является сильно регулярным графом с параметрами $\Big(\dfrac{q^2-1}{2},\dfrac{q(q-1)}{2},\dfrac{(q-1)^2}{2},\dfrac{q(q-1)}{2}\Big)$.

Теорема 1 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Покажем, что граф $\widehat{\mathbf{\Gamma}_B}$ удовлетворяет условиям всех пунктов определений 1 и 2 соответственно в случаях $q\equiv 1\pmod 4$ и $q\equiv -1\pmod 4$.

В силу выбора B, если $q\equiv 1\pmod 4$, то $B=g^G=(g^{-1})^G$ и $|B|=(q^2-1)/2$; если $q\equiv -1\pmod 4$, то $g^G\neq(g^{-1})^G$ и $|B|=q^2-1$.

Зафиксируем некоторую силовскую p-подгруппу P группы G, $P-\{e\}=\{g_1,g_2,\ldots,g_{q-1}\}$ — множество всех неединичных элементов из P. Будем считать, что $g_1^G\cap P=\{g_1,g_2,\ldots,g_{\frac{q-1}{2}}\}$.

Из п. (3) предложения 1 вытекает, что если $q\equiv 1\pmod 4$, то окрестность $\mathbf{\Gamma}(\overline{[g_i]-C_G(g_1)})$ любой вершины $g_i\in g_1^G\cap P$ является связкой p^{n-1} p-пирамид, а если $q\equiv -1\pmod 4$, то она является q-звездой.

Из п. (2) предложения 1 вытекает, что в случае $q\equiv 1\pmod 4$ множество $g_1^G\cap P$ образует совершенный код с накрывающим радиусом 1, а в случае $q\equiv -1\pmod 4$ такой код образуют все неединичные элементы из P, причем в обоих случаях для любых вершин графа $\widehat{\mathbf{\Gamma}_B}$ существуют коды, содержащие их.

Наконец, то, что граф $\widehat{\mathbf{\Gamma}_B}$ удовлетворяет условиям п. 4 определений 1 и 2 (соответственно в случаях $q\equiv 1\pmod 4$ и $q\equiv -1\pmod 4$), очевидно. При этом при $q\equiv -1\pmod 4$ имеем $C(g_1)\cap V(g_1)=g_1^G\cap P$, $C(g_1)\cap V(g_1^{-1})=(g_1^{-1})^G\cap P$ и $V(g_1)\neq V(g_1^{-1})$.

Теорема 2 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Докажем, что граф $\mathbf{\Gamma}_J$ несвязен и распадается на два связных подграфа, изоморфных обобщенным икосаэдрам с параметром q тогда и только тогда, когда $q\equiv 1,3\pmod 8$. При этом в каждой компоненте совершенный код образуют элементы одной и той же (произвольной) силовской p-подгруппы.

По лемме 5, если для двух неединичных p-элементов x и y произведение xy^{-1} является инволюцией, то они сопряжены тогда и только тогда, когда $q\equiv 1,3\pmod 8$. Поэтому при выполнении этого условия p-элементы из одного класса сопряженных p-элементов смежны только друг с другом, и $\mathbf{\Gamma}_J$ не является связным. Пусть Δ_1 и Δ_2 — подграфы графа $\mathbf{\Gamma}_J$, индуцированные на классах p-элементов C_1 и C_2 соответственно. Ясно, что Δ_1 и Δ_2 изоморфны. Поэтому достаточно показать, что Δ_1 является обобщенным икосаэдром с параметром q, совершенные коды которого образуют неединичные элементы одних и тех же силовских p-подгрупп.

То, что граф Δ_1 состоит из $(q^2-1)/2$ вершин, вытекает из выбора множества вершин.

Пусть $g=g_1$ и g_j $(j=1,\ldots,(q-1)/2)$ — сопряженные элементы из C_1, принадлежащие одной и той же силовской p-подгруппе. Тогда существует $a\in G$ порядка, делящего $(q-1)/2$, такой, что $g^a=g_j$.

Если $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_q\} \subseteq [g]$, то $U^a = \{u_1^a, u_2^a, \ldots, u_q^a\} \subseteq [g_j]$.

Теперь действуем по следующей схеме:

а) находим все элементы $U \subseteq [g]$ и доказываем, что $U = [g]$;

б) находим $U^a = [g_j]$;

в) показываем, что $U \cap U^a = \varnothing$, откуда заключаем, что $\{g_1, g_2, \ldots, g_{\frac{q-1}{2}}\}$ образует совершенный код в $\mathbf{\Gamma}_J$.

г) находим условия, при которых для любого $u_i \in U$ и любого a такого, что $g^a = g_i$, существует t, и выясняем, сколько существует таких t, что $u_i(u_t^a)^{-1} \in J$.

По ходу реализации этой схемы доказывается выполнение свойств 2–4 определения 1 для Δ_1.

Итак:

а) В качестве g возьмем элемент $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из P_1 и какой-нибудь элемент $u_1 \in [g]$. Из доказательства леммы 5 вытекает, что в качестве u_1 можно взять $\begin{pmatrix} 1+\eta & \eta \\ -\eta & 1-\eta \end{pmatrix} \in P(1)$, сопряженный с g, причем $\eta = -2$ определен однозначно. Это означает, что в качестве u_1 можно взять $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ — единственный элемент из $P(1)$, смежный с g. Теперь u_1 сопрягаем элементами из $C_G(g) = P_1$ и находим остальные вершины U:

$$U = \left\{ u_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma_k \in F_q, k = 0, 1, \ldots, q-1 \right\}$$

$$= \left\{ u_{k+1} = \begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2(\gamma_k+1)^2 \\ 2 & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma_k \in F_q, k = 0, 1, \ldots, q-1 \right\} \subseteq [g].$$

Ясно, что при различных γ_k матрицы u_{k+1} различны. Поэтому $|U| = q$ и степень вершины графа не меньше q.

Так как в $[g]$ лежит единственный элемент u_1 из $P(1)$ и остальные элементы $u_2, \ldots, u_q$ из $[g]$ получаются сопряжением элементами из $P_1 = C_G(P_1)$, то в $[g]$ лежит в точности по одному элементу из каждой силовской подгруппы, отличной от P_1. Это означает, что $U = [g]$.

б) Если $g^a = g_j$, то a — элемент порядка, делящего $(q-1)/2$, a имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha^{\frac{q-1}{2}} = \pm 1$. Так как $u = [g]$, то

$$U^a = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2(\gamma_k+1)^2 \\ 2 & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma_k \in F_q \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2\alpha^2(\gamma_k+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma_k \in F_q \right\} = [g_j].$$

в) Если предположить, что $U \cap U^a \neq \varnothing$, то имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2(\gamma_k+1)^2 \\ 2 & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -(2\gamma_l+1) & -2\alpha^2(\gamma_l+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma_l+3 \end{pmatrix}$$

для некоторых $\gamma_k, \gamma_l, \alpha \in F_q$. Это равенство невозможно. Действительно, если

$$\begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2(\gamma_k+1)^2 \\ 2 & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2\gamma_l+1) & -2\alpha^2(\gamma_l+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma_l+3 \end{pmatrix},$$

то $2\alpha^{-2} = 2$, откуда $\alpha^2 = 1$ и $\alpha = \pm 1$, т. е. $a = e$ — единичный элемент, и $g_1 = g_j$. Если

$$\begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2(\gamma_k+1)^2 \\ 2 & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -(2\gamma_l+1) & -2\alpha^2(\gamma_l+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma_l+3 \end{pmatrix}, \quad \text{то}$$

$$\begin{cases} 2\gamma_k + 1 = -2\gamma_l - 1, \\ 2\gamma_k + 3 = -2\gamma_l - 3, \end{cases}$$

откуда $2 = -2$, т. е. $4 = 0$, что невозможно в поле нечетной характеристики p.

Таким образом, если $\{g_1, g_2, \dots, g_{\frac{q-1}{2}}\} = \Delta_1 \cap Q$, где Q — произвольная силовская p-подгруппа из G, то для любых $1 \leqslant i \neq j \leqslant (q-1)/2$ имеем $g_i^\perp \cap g_j^\perp = U \cap U^a = \varnothing$.

Так как $|g_i^\perp| = q+1$, то $|\bigcup_{i=1}^{\frac{q-1}{2}} g_i^\perp| = (q+1)(q-1)/2 = (q^2-1)/2$ и $\bigcup_{i=1}^{\frac{q-1}{2}} g_i^\perp = B$. Следовательно, множество $\{g_1, g_2, \dots, g_{\frac{q-1}{2}}\}$ образует совершенный код, содержащий g_1. Свойство 3 определения доказано.

г) Заметим, что $C_G(g)$ действует транзитивно на вершинах $[g]$. Поэтому достаточно исследовать вопрос для некоторого фиксированного $u_i \in [g]$, где снова $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Возьмем в качестве u_i элемент из P, т. е. элемент, с одной стороны, вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$, где $\delta \neq 0$, а с другой стороны, элемент вида $\begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2\alpha^2(\gamma_k+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix}$ при $\alpha = 1$, т. е. при $\gamma_k = -1$. Таким образом, возьмем элементы

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_t^a = \begin{pmatrix} -(2\gamma+1) & -2\alpha^2(\gamma+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma+3 \end{pmatrix}$$

и найдем условия, при которых

$$u_i(u_t^a)^{-1} = (u_i(u_t^a)^{-1})^{-1} = u_t^a u_i^{-1} = \begin{pmatrix} -(2\gamma+1) & -2\alpha^2(\gamma+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -(2\gamma+1) + 4\alpha^2(\gamma+1)^2 & -2\alpha^2(\gamma+1)^2 \\ -2(2\gamma+3) + 2\alpha^{-2} & 2\gamma+3 \end{pmatrix} = A \in J,$$

т. е. условия, при которых A имеет вид $\pm \begin{pmatrix} -(\sigma\delta & \beta - \sigma^2\delta \\ \delta & \sigma\delta \end{pmatrix}$ (где $\beta\delta = -1$) или (1.3).

Предположим,

$$\begin{pmatrix} -(2\gamma+1) + 4\alpha^2(\gamma+1)^2 & -2\alpha^2(\gamma+1)^2 \\ -2(2\gamma+3) + 2\alpha^{-2} & 2\gamma+3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -(\sigma\delta & \beta - \sigma^2\delta \\ \delta & \sigma\delta \end{pmatrix}.$$

Тогда приходим к системе

$$\begin{cases} -(2\gamma+1) + 4\alpha^2(\gamma+1)^2 = \mp\sigma\delta, \\ -2\alpha^2(\gamma+1)^2 = \pm(\beta - \sigma^2\delta), \\ -2(2\gamma+3) + 2\alpha^{-2} = \pm\delta, \\ 2\gamma+3 = \pm\sigma\delta. \end{cases} \tag{2.1}$$

Из первого и последнего уравнений системы (2.1) получаем уравнение $-2\gamma - 1 + 4\alpha^2(\gamma+1)^2 = -2\gamma - 3$, которое равносильно

$$4\alpha^2(\gamma+1)^2 = -2. \tag{2.2}$$

Как мы уже заметили (см. лемму 3), это квадратное уравнение относительно $2\alpha(\gamma+1)$ имеет решения тогда и только тогда, когда $q \equiv 1, 3 \pmod 8$. При этом для фиксированного α (которое определяет a) (2.2) имеет в точности два решения $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$.

Покажем, что при этих условиях система (2.1) совместна. То, что при данных α, γ_1 и γ_2 последовательно можно найти δ (из третьего уравнения), σ (из первого или четвертого уравнений), β (из второго уравнения), очевидно. Остается показать, что $\beta\gamma = -1$.

Из второго уравнения системы (2.1) и уравнения (2.2) получаем

$$1 = \pm(\beta - \sigma^2\delta). \tag{2.3}$$

Перемножая почленно (2.3) и третье уравнение из (2.1), получаем

$$2\alpha^{-2} - 4\gamma - 6 = \beta\delta - (\sigma\delta)^2. \tag{2.4}$$

Из последнего уравнения (2.1) имеем уравнение $(\sigma\delta)^2 = 4\gamma^2 + 12\gamma + 9$, подставляя которое в (2.4), получаем $2\alpha^{-2} + 4\gamma^2 + 8\gamma + 3 = \beta\delta$, которое равносильно

$$2\alpha^{-2} + 4(\gamma+1)^2 = \beta\delta + 1. \tag{2.5}$$

Но из (2.2) имеем уравнение $4(\gamma+1)^2 = -2\alpha^{-2}$, подставляя которое в (2.5), получаем $\beta\delta+1 = 0$, что и требовалось.

Таким образом, если $q \equiv 1, 3 \pmod 8$, то для фиксированного α вершина $u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ смежна в точности с двумя вершинами вида $\begin{pmatrix} -(2\gamma+1) & -2\alpha^2(\gamma+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma+3 \end{pmatrix}$. Так как u_i смежна в точности с q вершинами, 3 из которых лежат в $g^{\perp}$, а остальные распределяются по две в оставшихся $(q-1)/2-1$ окрестностях $[g_2],\ldots,[g_{\frac{q-1}{2}}]$, то полученные $2((q-1)/2-1)+3 = q$ вершин, смежных с u_i, исчерпывают окрестность u_i. Поэтому необходимости в рассмотрении оставшегося случая (когда A имеет вид (1.3)) нет.

Свойство 4 доказано. Осталось показать, что окрестность вершины представляет собой связку из p^{n-1} p-пирамид.

Произвольная вершина $u_1 \in [g]$ смежна в точности с двумя вершинами u' и u'' из $[g]$. Будем считать, что $u' = u_2$, $u'' = u_k$ $(3 \le k \le q)$. Таким образом, существует маршрут (u_k, u_1, u_2). $C_G(g)$ транзитивна на $[g]$. Поэтому существует $x \in C_G(g)$ такой, что $u_1^x = u_2$. Пусть $u_2^x = u_3$. Покажем, что u_3 смежна с u_2. Имеем $u_1u_2^{-1} \in J$. Тогда

$$(u_1u_2^{-1})^x = u_1^x(u_2^x)^{-1} = u_2u_3^{-1} \in J.$$

Ясно, что можно построить маршрут $(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, u_p)$ такой, что $u_i^x = u_{i+1}$ для $1 \le i \le p-1$. Так как каждый $u \in [g]$ смежен в точности с двумя вершинами из $[g]$, то такой маршрут с участием u_1, u_2, u_k единствен. Поскольку порядок x равен p, то $u_p^x = u_1$, т. е. в $[g]$ существует единственный простой цикл длины p с участием u_1, u_2 и u_k. Отсюда следует свойство 2.

Первая часть теоремы доказана.

Пусть для неединичных p-элементов x и y произведение xy^{-1} — инволюция, в то время как x и y лежат в разных классах p-элементов. Это равносильно тому, что $q \equiv 5, 7 \pmod 8$.

Пусть $g = g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2,\ldots,$ g_{q-1} — неединичные элементы из P_1, причем $\{g_1, g_2, \ldots, g_{\frac{q-1}{2}}\} = P_1 \cap C_1$ и $\{g_{\frac{q-1}{2}+1}, \ldots, g_{q-1}\} = P_1 \cap C_2$, где C_1 и C_2 — разные классы p-элементов. Доказывая, что в этом случае граф $\mathbf{\Gamma}_J$ является псевдоикосаэдром с параметром q, будем действовать по вышеприведенной схеме (с некоторыми особенностями), при этом покажем, что $\{g_1, g_2, \ldots, g_{q-1}\}$ образуют совершенный код и $V_1 = P_1 \cap C_1$, $V_2 = P_1 \cap C_2$. В силу того, что принципиальные выкладки по сути уже приведены при реализации этой схемы, мы на них будем ссылаться.

а) Так же, как и выше,

$$[g] = \left\{ u_{k+1} = \begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2(\gamma_k+1)^2 \\ 2 & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma_k \in F_q, k = 0, 1, \ldots, q-1 \right\}.$$

б) Аналогично, пусть $a = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ — элемент порядка, делящего $(q-1)/2$ и $g^a = g_j$,

$$[g_j] = \left\{ \begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2\alpha^2(\gamma_k+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma_k \in F_q, k = 0, 1, \ldots, q-1 \right\}.$$

Если $g_s \in P_1 \cap C_2$, то

$$[g_s] = \left\{ \begin{pmatrix} -(2\gamma_k+1) & -2\varepsilon(\gamma_k+1)^2 \\ 2\varepsilon^{-1} & 2\gamma_k+3 \end{pmatrix} \;\Big|\; \gamma_k \in F_q, k = 0, 1, \ldots, q-1 \right\};$$

ε не является квадратом в поле F_q.

в) Если $g_i, g_j \in P_1 \cap C_1$, то $[g_i] \cap [g_j] = \varnothing$. Аналогично, для $g_s, g_t \in P_1 \cap C_2$ имеем $[g_s] \cap [g_t] = \varnothing$. При этом g_s и $[g_i]$ лежат в одном классе сопряженности, а g_i и $[g_s]$ — в другом. Наконец, $[g_i] \cap [g_s] = \varnothing$.

г) Достаточно показать, что произвольный $u_i \in [g]$ смежен в точности с двумя вершинами из $[g_s]$. Так же возьмем $u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда условие

$$\begin{pmatrix} -(2\gamma+1) & -2\alpha^2(\gamma+1)^2 \\ 2\alpha^{-2} & 2\gamma+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \in J$$

аналогично приводит к системе

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -(2\gamma+1) + 4\varepsilon(\gamma+1)^2 & = & \mp\sigma\delta, \\ -2\varepsilon(\gamma+1)^2 & = & \pm(\beta - \sigma^2\delta), \\ -2(2\gamma+3) + 2\varepsilon^{-1} & = & \pm\delta, \\ 2\gamma+3 & = & \pm\sigma\delta, \end{array} \right. \tag{2.6}$$

откуда имеем

$$4\varepsilon(\gamma+1)^2 = -2. \tag{2.7}$$

Это уравнение равносильно уравнению $(2(\gamma+1)^2 = -2\varepsilon^{-1}$, которое в свою очередь имеет решение тогда и только тогда, когда $(-2\varepsilon^{-1})^{\frac{q-1}{2}} = 1$. Это равносильно тому, что $(\varepsilon^{-1})^{\frac{q-1}{2}} = -1$ (так как в нашем случае $(-2)^{\frac{q-1}{2}} = -1$). Поскольку последнее равенство справедливо (ε не является квадратом в F_q), то уравнение (2.7) имеет в точности два решения. Теперь остается аналогично заметить, что система (2.6) совместна.

Наконец, так как u_i смежна в точности с q вершинами, одна из которых лежит в $g^{\perp}$ (т. е. сама вершина g), то остальные распределяются по две в $(q-1)/2$ окрестностях $[g_{\frac{q-1}{2}+1}], \ldots, [g_{q-1}]$.

Свойства 2–4, а вместе с ним и теорема 3, доказаны. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мухаметьянов И.Т.** О графах на классах p-элементов группы $L_2(p)$ // Сб. работ преподавателей и студентов СГПИ. Соликамск, 1998. С. 209–231.
2. **Мухаметьянов И.Т.** Блок-схемы, ассоциированные с конечными группами: дис. …канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1998. 115 с.
3. **Баннаи Э., Ито Т.** Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. М: Мир, 1987. 375 с.
4. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 494 p.
5. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 380 с.

Мухаметьянов Ильдар Талгатович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Лысьвенский филиал Пермского гос. тех. ун-та
e-mail:muiltal@yandex.ru

Поступила 17.05.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.544

ГРАФЫ СКРУЧЕННЫХ ПОДМНОЖЕСТВ[1]

А. Л. Мыльников

Подмножество K из группы G называется скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и для любых элементов $x, y \in K$ элемент $xy^{-1}x \in K$. В работе вводится понятие графа скрученного подмножества и исследуется связь между строением графа скрученного подмножества и строением группы, порожденной этим скрученным подмножеством.

Ключевые слова: скрученное подмножество, скрученная подгруппа.

A. L. Myl'nikov. Graphs of twisted subsets.

A subset K of a group G is said to be twisted if $1 \in K$ and the element $xy^{-1}x$ lies in K for any $x, y \in K$. A new notion of graph of a twisted subset is introduced and the connection is investigated between the structure of the graph of a twisted subset and the structure of the group generated by this twisted subset.

Keywords: twisted subset, twisted subgroup.

Введение

Следуя [1], приведем следующее

О п р е д е л е н и е 1. Подмножество K из группы G называется скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и для любых элементов x, y из K элемент $xy^{-1}x \in K$.

В работе [2] было показано, что в некоторых случаях группа почти характеризуется порождающим ее скрученным подмножеством (слово “почти” в данном случае означает “с точностью до некоторого центрального расширения этой группы”). В указанной работе рассматривались конечные простые неабелевы группы. При данном подходе в рассмотрении фактически происходит замена групповой операции на операцию $x \circ y = xy^{-1}x$, которая, увы, не обладает теми “хорошими” алгебраическими свойствами, какими обладает групповая операция.

В настоящей работе предпринимается попытка рассмотрения понятия скрученного подмножества с помощью понятия графа скрученного подмножества, тем самым привлекается геометрическая точка зрения на рассматриваемые объекты.

Зафиксируем некоторые обозначения: G — группа; K — скрученное подмножество из группы G такое, что $G = \langle K \rangle$; $Ker(K) = \{x \in K : xK = K\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Скрученное подмножество K из группы G называется редуцированным, если $Ker(K) = 1$.

Отметим, что редуцированность скрученного подмножества K гарантирует наличие у группы G автоморфизма, инвертирующего элементы из K.

Теперь приведем определение графа Γ_K скрученного подмножества K.

О п р е д е л е н и е 3. Определим граф $\Gamma_K = (V(\Gamma_K), E(\Gamma_K))$ следующим образом: $V(\Gamma_K) = K$, и элемент $x \in K$ смежен с элементом $y \in K \setminus \{x\}$ (т. е. $(x, y) \in E(\Gamma_K)$) тогда и только тогда, когда существует такой элемент k из K, что $kx^{-1}k = y$.

Легко видеть, что введенное отношение смежности вершин симметрично.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания высшим учебным заведениям на 2012 г. (проект 1.3755.2011)

В качестве мотивации к изучению графов скрученных подмножеств рассмотрим следующий пример. Пусть T — группа, порожденная классом нечетных транспозиций u^T. Тогда скрученным подмножеством будет подмножество $L = uu^T$. Можно показать, что граф Γ_L скрученного подмножества L будет изоморфен дополнительному графу $\overline{\Gamma}$ к графу Γ перестановочности инволюций из класса u^T.

Одним из важнейших свойств графа Γ_K является то, что группа G при некоторых условиях изоморфно вкладывается в $Aut(\Gamma_K)$. Требуемое вложение строится следующим образом.

Пусть b — элемент из K. Рассмотрим отображение $\varphi_b\colon K \to K$, определенное следующим образом: для любого элемента $x \in K$ положим $(x)\varphi_b := bxb$. Легко показать, что отображение $\varphi_b\colon K \to K$ биективно и для любых элементов $x, y \in K$ выполняется равенство $(x \circ y)\varphi_b = (x)\varphi_b \circ (y)\varphi_b$, где $x \circ y = xy^{-1}x$. Таким образом, нетрудно видеть, что $\varphi_b \in Aut(\Gamma_K)$.

Далее, рассмотрим $G_K := \langle \varphi_b \colon b \in K \rangle$. Данное действие группы G на графе Γ_K будем называть *каноническим действием* группы G на графе Γ_K. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть G, K, Γ_K и G_K — определенные выше объекты. Допустим, что $Ker(K) = 1$ и $Z(G) = 1$. Тогда $G \cong G_K$.*

Из данной теоремы вытекает

Следствие 1. *Пусть G, K, Γ_K удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда группа G изоморфно вкладывается в группу $Aut(\Gamma_K)$.*

Теорема 1 доказана в разд. 2.

Таким образом, с помощью графа редуцированного скрученного подмножества можно получать представление группы в виде подгруппы группы автоморфизмов этого графа.

Далее, сформулируем основные свойства графа скрученного подмножества. Для формулировки нам понадобится понятие дивергенции автоморфизма в некоторой точке, принадлежащее В. В. Беляеву и рассмотренное в работе [3].

О п р е д е л е н и е 4. Пусть G — группа, a — элемент из G и φ — автоморфизм группы G. Дивергенцией автоморфизма φ в точке a называется множество $D_a(\varphi) = \{g^{-1}a\varphi(g) \mid g \in G\}$.

Теперь сформулируем теорему о свойствах графа скрученного подмножества.

Теорема 2. *Пусть G, K, Γ_K — определенные выше объекты. Пусть Γ_i — произвольная компонента связности графа Γ_K, а Γ_1 — компонента связности графа Γ_K, содержащая* 1. *Тогда справедливо следующее*:

(1) *Группа G действует вершинно транзитивно на Γ_i при каноническом действии G на Γ_K.*

(2) *Допустим, что существует инволютивный автоморфизм φ группы G такой, что для любого элемента $x \in K$ справедливо $\varphi(x) = x^{-1}$. Тогда выполняются утверждения*

(a) *для любой компоненты связности Γ_i графа Γ_K множество ее вершин $V(\Gamma_i)$ совпадает с дивергенцией $D_x(\varphi)$ автоморфизма φ в некоторой точке $x \in K$, в частности, для компоненты связности Γ_1, содержащей* 1, *справедливо равенство $V(\Gamma_1) = \{g^{-1}\varphi(g) | g \in G\}$;*

(b) *стабилизатор $St_G(x)$ любой точки $x \in V(\Gamma_1)$ при каноническом действии группы G на Γ_K изоморфен $C_G(\varphi)$, причем $St_G(1) = C_G(\varphi)$.*

Необходимо отметить, что условие существования автоморфизма φ в п. (2) теоремы 2 является естественным условием, поскольку, например, в любой группе T с инволюцией u подмножество $\{t^{-1}t^u \mid t \in T\}$ является скрученным подмножеством и удовлетворяет этому условию. Также стоит сказать, что для произвольной конечной простой неабелевой группы и любого порождающего эту группу скрученного подмножества, содержащего элементы порядка более, чем два, существует инволютивный автоморфизм группы, инвертирующий элементы скрученного подмножества.

Теорема 2 доказана в разд. 3.

Большой интерес представляет исследование вопроса о связи между строением графа скрученного подмножества, которое порождает группу, и строением самой группы, причем наиболее важным и интересным представляется случай, когда граф является связным. В настоящей работе рассматриваются случаи, когда порождающее группу скрученное подмножество имеет либо полный, либо вполне несвязный граф.

Теорема 3. *Пусть G, K, Γ_K — определенные выше объекты. Допустим, что G — конечная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) Γ_K *— полный граф тогда и только тогда, когда G — группа нечетного порядка;*

(2) Γ_K *— вполне несвязный граф тогда и только тогда, когда G — элементарная абелева 2-группа.*

Теорема 3 доказана в разд. 4.

Следующим естественным этапом в исследовании графов скрученных подмножеств является изучение связных графов.

В настоящей работе доказывается (см. разд. 5) следующий результат о связных графах скрученных подмножеств.

Теорема 4. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$, и Γ_K — граф скрученного подмножества K. Допустим, что существует инволютивный автоморфизм φ группы G такой, что $K = \varphi\varphi^G$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) Γ_K *имеет диаметр n;*

(2) $G = \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n} C_G(\varphi)$, *но* $G \neq \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n-1} C_G(\varphi)$;

(3) *для любой инволюции $\varphi^g \in \varphi^G$ существуют элементы $\varphi^{a_1}, \ldots, \varphi^{a_n} \in \varphi^G \cup \{1\}$ такие, что $\varphi^g = (\varphi^{a_n} \ldots \varphi^{a_1})\varphi(\varphi^{a_1} \ldots \varphi^{a_n})$, и существует инволюция $\varphi^b \in \varphi^G$ такая, что для любых инволюций $\varphi^{a_1}, \ldots, \varphi^{a_{n-1}} \in \varphi^G$ справедливо $\varphi^b \neq (\varphi^{a_{n-1}} \ldots \varphi^{a_1})\varphi(\varphi^{a_1} \ldots \varphi^{a_{n-1}})$.*

1. Вспомогательные результаты

В данном разделе для удобства читателя приводятся некоторые известные результаты, используемые при доказательстве основных результатов работы.

Лемма 1 [2, лемма 1.4]. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$. Допустим, что $Ker(K) = 1$.*

Тогда группа G обладает таким автоморфизмом ψ, что $\psi^2 = 1$, для любого элемента x из K выполняется равенство $\psi(x) = x^{-1}$ и $\{g^{-1}\psi(g) | g \in G\} \subseteq K$.

Лемма 2 [4, теорема 2]. *Пусть G — конечная группа и K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$. Допустим, что K не содержит инволюций. Тогда группа G имеет нечетный порядок.*

Лемма 3 [1, лемма 2.1]. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество из G. Тогда для любого элемента x из K подгруппа $\langle x\rangle$ содержится в K.*

Лемма 4 [3, следует из леммы 3.1 и теоремы 3.1]. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$, $K \neq G$. Допустим, что существует автоморфизм φ группы G такой, что для любого элемента $x \in K$ выполняется $\varphi(x) = x^{-1}$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть $a, b \in G$. Тогда либо $D_a(\varphi) = D_b(\varphi)$, либо $D_a(\varphi) \cap D_b(\varphi) = \varnothing$.*

(2) *Пусть $t \in K$. Тогда выполняется следующее:*

(a) $D_t(\varphi) \subseteq K$;

(b) *для любого элемента $x \in D_t(\varphi)$ справедливо $x^{-1} \in D_t(\varphi)$.*

2. Вложение группы G в группу $Aut(\Gamma_K)$

В данном разделе излагается доказательство теоремы 1.

Пусть $W(K) := \{k_1 \dots k_n : k_i \in K\}$ — множество слов в алфавите K. Рассмотрим отображение $\tau : W(K) \to G_K$, определенное следующим образом: для любого элемента $k_1 \dots k_n \in W(K)$ положим $(k_1 \dots k_n)\tau := \varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_n}$.

Далее доказательство теоремы 1 разбивается на ряд этапов.

(1) Группа G обладает таким инволютивным автоморфизмом ψ, что для любого элемента x из K выполняется $\psi(x) = x^{-1}$.

Вытекает из того, что $Ker(K) = 1$, и леммы 1.

(2) Если для элемента $g \in G$ имеются разложения $g = k_1 \dots k_n$ и $g = t_1 \dots t_s$, где $k_i, t_j \in K$, то $(k_1 \dots k_n)\tau = (t_1 \dots t_s)\tau$.

Для любого элемента $x \in K$ имеем $(x)((k_1 \dots k_n)\tau) = (x)(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_n}) = k_n \dots k_1 x k_1 \dots k_n$ и $(x)((t_1 \dots t_s)\tau) = (x)(\varphi_{t_1} \dots \varphi_{t_s}) = t_s \dots t_1 x t_1 \dots t_s$. В силу п. (1) имеем $t_s \dots t_1 = \psi((t_1 \dots t_s)^{-1}) = \psi(g^{-1})$ и $k_n \dots k_1 = \psi((k_1 \dots k_n)^{-1}) = \psi(g^{-1})$. Таким образом, получаем, что $k_n \dots k_1 = t_s \dots t_1$. Согласно условию $t_1 \dots t_s = k_1 \dots k_n$ имеем $(x)(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_n}) = (x)(\varphi_{t_1} \dots \varphi_{t_s})$. Значит, $\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_n} = \varphi_{t_1} \dots \varphi_{t_s}$, т. е. $(k_1 \dots k_n)\tau = (t_1 \dots t_s)\tau$.

(3) Существует гомоморфизм $\lambda : G \to G_K$ такой, что $(k_1 \dots k_n)\lambda = (k_1 \dots k_n)\tau$.

Так как $G = \langle K \rangle$, то для любого элемента $g \in G$ существуют элементы $k_1, \dots, k_n \in K$ такие, что $g = k_1 \dots k_n$. Тогда в силу п. (2) для элемента $g = k_1 \dots k_n \in G$ соответствие λ, которое элементу g сопоставляет элемент $\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_n} \in G_K$, является отображением из группы G на группу G_K. Легко видеть, что для любых элементов $x, y \in G$ выполняется $(xy)\lambda = (x)\lambda\,(y)\lambda$. Таким образом, λ — гомоморфизм из группы G на группу G_K, причем, очевидно, $(k_1 \dots k_n)\lambda = (k_1 \dots k_n)\tau$.

(4) $G \cong G_K$.

Покажем, что $Ker\,\lambda = 1$. Пусть g — элемент из $Ker\lambda$. Тогда $g = k_1 \dots k_n$ для некоторых элементов $k_1, \dots, k_n \in K$. Для любого элемента $x \in K$ имеем $x = (x)((g)\lambda) = (x)(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_n}) = k_n \dots k_1 x k_1 \dots k_n$. В частности, при $x = 1$ получаем, что $k_n \dots k_1 k_1 \dots k_n = 1$. Поскольку ввиду п. (1) $k_n \dots k_1 k_1 \dots k_n = \psi(g^{-1})g$, то $\varphi(g) = g$, следовательно, $g \in C_G(\varphi)$.

Далее равенство $k_n \dots k_1 x k_1 \dots k_n = x$ можно записать в виде $\varphi(g^{-1})xg = x$. Так как $g \in C_G(\varphi)$, то получаем, что для любого элемента $x \in K$ выполняется $g^{-1}xg = x$. Ввиду равенства $G = \langle K \rangle$ имеем $g \in Z(G)$. Из условия $Z(G) = 1$ получаем $Ker\lambda = 1$, значит, $G \cong G_K$. Пункт (4), а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

3. Свойства графа скрученного подмножества

В данном разделе доказана теорема 2. Введем некоторые понятия, необходимые для доказательства теоремы.

Пусть k — произвольный элемент из K. Рассмотрим отображение $t_k : K \longrightarrow K$, определенное следующим образом: для любого элемента $x \in K$ положим $(x)t_k := k \circ x$, где $a \circ b = ab^{-1}a$.

Лемма 5. *Для отображения t_k справедливо следующее:*

(1) *для любых элементов $x, y \in K$ верно $(x \circ y)t_k = (x)t_k \circ (y)t_k$;*

(2) $t_k^2 = 1$;

(3) t_k *— автоморфизм графа Γ_K;*

(4) *группа $T_K = \langle t_k : k \in K \rangle$ действует транзитивно на множестве вершин каждой компоненты связности Γ_i графа Γ_K.*

Доказательство. (1) Имеем $(x \circ y)t_k = (xy^{-1}x)t_k = k(xy^{-1}x)^{-1}k = kx^{-1}yx^{-1}k$, а $(x)t_k \circ (y)t_k = (kx^{-1}k) \circ (ky^{-1}k) = kx^{-1}k(ky^{-1}k)^{-1}kx^{-1}k = kx^{-1}yx^{-1}k$. Таким образом, $(x \circ y)t_k = (x)t_k \circ (y)t_k$, и п. (1) доказан.

(2) Для любого элемента $x \in K$ имеем $(x)t_k^2 = ((x)t_k)t_k = (k \circ x)t_k = k \circ (k \circ x) = k \circ (kx^{-1}k) = k(kx^{-1}k)^{-1}k = x$; п. (2) доказан.

(3) Необходимо показать, что для любых элементов $a, b \in K$ $(a, b) \in E(\Gamma_K)$ тогда и только тогда, когда $((a)t_k, (b)t_k) \in E(\Gamma_K)$.

Пусть a, b — элементы из K такие, что $(a, b) \in E(\Gamma_K)$. Значит, существует элемент $x \in K$ такой, что $x \circ a = b$. Тогда $((a)t_k, (b)t_k) \in E(\Gamma_K)$, поскольку согласно (1) имеем $(b)t_k = (x \circ a)t_k = (x)t_k \circ (a)t_k$.

Далее, в силу п. (2) получаем, что если $((a)t_k, (b)t_k) \in E(\Gamma_K)$, то $(a, b) \in E(\Gamma_K)$, и п. (3) доказан. Пункт (4) очевиден. Таким образом, лемма 5 доказана.

Приступим к доказательству теоремы 2. Покажем справедливость п. (1) теоремы 2.

Так как для любых элементов $x, y \in K$ верно равенство $(x)(\varphi_{x^{-1}}\varphi_y) = yx^{-1}y = (x)t_y$, то ввиду п. (4) леммы 5 получаем, что группа G действует транзитивно на множестве вершин любой компоненты связности Γ_i графа Γ_K.

Теперь докажем справедливость п. (2a) теоремы 2. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G и Γ_K — граф скрученного подмножества K. Пусть M — объединение вершин из некоторого набора компонент связности графа Γ_K, содержащее 1. Тогда M — скрученное подмножество.*

Доказательство. По условию $1 \in M$.

Далее, легко видеть, что множество вершин в любой компоненте связности графа Γ_K замкнуто относительно операции $x \circ y = xy^{-1}x$, а значит, и объединение вершин M любого набора компонент связности графа Γ_K также замкнуто относительно этой операции. Таким образом, M — скрученное подмножество, и лемма 6 доказана.

Приступим к доказательству п. (2a) теоремы 2. Пусть $a \in V(\Gamma_i)$. Покажем, что $D_a(\varphi) \subseteq V(\Gamma_i)$.

Рассмотрим $T = V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_i)$. Согласно лемме 6 подмножество T является скрученным подмножеством. Если $i = 1$, то $T = V(\Gamma_1)$, и ввиду п. (2a) леммы 4 имеем $D_a(\varphi) \subseteq V(\Gamma_1)$. Таким образом, далее можно считать, что $i \neq 1$.

Допустим, что $D_a(\varphi) \cap V(\Gamma_1) \neq \varnothing$. Так как по лемме 6 $V(\Gamma_1)$ — скрученное подмножество, то по п. (2a) леммы 4 имеем $D_a(\varphi) \subseteq V(\Gamma_1)$, значит, $D_a(\varphi) \cap V(\Gamma_i) = \varnothing$. Но нетрудно видеть, что $a \in D_a(\varphi)$, откуда $D_a(\varphi) \cap V(\Gamma_i) \neq \varnothing$. Таким образом, получаем противоречие, доказывающее то, что $D_a(\varphi) \subseteq V(\Gamma_i)$.

Далее покажем, что $V(\Gamma_i) \subseteq D_a(\varphi)$. Допустим противное, что $V(\Gamma_i) \neq D_a(\varphi)$. Тогда существует элемент $t \in V(\Gamma_i) \setminus D_a(\varphi)$. Не нарушая общности рассуждений, ввиду связности Γ_i, можно считать, что t содержится в окрестности некоторой вершины b из $D_a(\varphi)$. Таким образом, существует элемент $k \in K$ такой, что $t = kb^{-1}k$. Поскольку для любого элемента $x \in K$ справедливо $\varphi(x) = x^{-1}$, то $t = kb^{-1}k = \varphi(k^{-1})b^{-1}(k^{-1})^{-1} = (k^{-1}b\varphi(k))^{-1}$, и ввиду п. (2b) леммы 4 имеем $t \in D_b(\varphi)$. Согласно лемме п. (1) леммы 4 получаем $t \in D_a(\varphi)$. Противоречие с выбором t, доказывающее п. (2a) теоремы 2.

Теперь докажем справедливость п. (2b) теоремы 2. Покажем, что $St_G(1) = C_G(\varphi)$, для чего сначала докажем, что $C_G(\varphi) \subseteq St_G(1)$.

Пусть $g \in C_G(\varphi)$. Так как $G = \langle K \rangle$, то $g = k_1 \ldots k_n$ для некоторых элементов $k_1, \ldots, k_n \in K$. Тогда согласно определению канонического действия группы G на графе Γ_K имеем $(1)\varphi_g = (1)(\varphi_{k_1} \ldots \varphi_{k_n}) = k_n \ldots k_1 1 k_1 \ldots k_n$. Поскольку для любого элемента $x \in K$ справедливо $\varphi(x) = x^{-1}$, то имеем $k_n \ldots k_1 = \varphi(k_n^{-1}) \ldots \varphi(k_1^{-1}) = \varphi((k_1 \ldots k_n)^{-1}) = \varphi(g^{-1})$. Следовательно, $(1)\varphi_g = \varphi(g^{-1})g$, откуда ввиду того, что $g \in C_G(\varphi)$, имеем $(1)\varphi_g = 1$. Таким образом, $g \in St_G(1)$, т. е. $C_G(\varphi) \subseteq St_G(1)$.

Теперь покажем, что $St_G(1) \subseteq C_G(\varphi)$.

Пусть $g \in St_G(1)$. Так как $G = \langle K \rangle$, то $g = k_1 \ldots k_n$ для некоторых элементов $k_1, \ldots, k_n \in K$. Тогда имеем $(1)\varphi_g = (1)(\varphi_{k_1} \ldots \varphi_{k_n}) = k_n \ldots k_1 1 k_1 \ldots k_n$. Поскольку для любого элемента

$x \in K$ справедливо $\varphi(x) = x^{-1}$, то $k_n \dots k_1 = \varphi(k_n^{-1}) \dots \varphi(k_1^{-1}) = \varphi((k_1 \dots k_n)^{-1}) = \varphi(g^{-1})$. Следовательно, $(1)\varphi_g = \varphi(g^{-1})g$. Поскольку $(1)\varphi_g = 1$, то получаем, что $\varphi(g^{-1})g = 1$, откуда $\varphi(g) = g$, т. е. $g \in C_G(\varphi)$. Таким образом, $St_G(1) \subseteq C_G(\varphi)$, а значит, $St_G(1) = C_G(\varphi)$.

Далее, в силу п. (1) настоящей теоремы группа G действует транзитивно на Γ_1. Следовательно, стабилизатор $St_G(x)$ любой вершины $x \in V(\Gamma_1)$ изоморфен с $C_G(\varphi)$. Пункт (2b) теоремы 2, а вместе с ним и сама теорема 2 доказаны.

4. Полные и вполне несвязные графы скрученных подмножеств

В данном разделе излагается доказательство теоремы 3. Доказательство п. (1) опирается на следующую лемму.

Лемма 7. *Пусть G, K, Γ_K удовлетворяют условию теоремы* 1.
Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) Γ_K — *полный граф*;
(2) *для любых различных элементов $a, x \in K$ выполняется $ax^{-1}a \neq x$.*

Доказательство. Покажем, что из п. (1) следует п. (2).

Допустим противное, что существуют элементы $a, x \in K$ такие, что $a \neq x$ и $ax^{-1}a = x$. Тогда количество пар элементов из K вида $(x, yx^{-1}y)$, где $yx^{-1}y \neq x$, не превосходит числа $|K| - 2$, поскольку $(x, x^{-1}) = (x, 1x^{-1}1) = (x, ax^{-1}a)$. Так как каждая такая пара элементов определяет некоторое ребро графа Γ_K с началом в точке x, то получаем, что валентность вершины x не превосходит числа $|K| - 2$. Но, так как Γ_K — полный граф, то валентность любой вершины в нем равна $|K| - 1$. Таким образом, получаем противоречие, доказывающее, что в лемме 7 из п. (1) следует п. (2).

Покажем, что из п. (2) леммы следует п. (1).

Допустим противное, что Γ_K не является полным графом. Тогда валентность некоторой вершины x меньше, чем число $|K| - 1$, т. е. количество пар элементов из K вида $(x, yx^{-1}y)$, где $yx^{-1}y \neq x$, не превосходит числа $|K| - 2$. Так как каждая такая пара элементов определяет некоторое ребро графа Γ_K с началом в точке x, то получаем, что для некоторых различных элементов $u, v \in K \setminus \{x\}$ выполняется равенство $ux^{-1}u = vx^{-1}v$. Поскольку для любых элементов $u, v \in G$ существует такой элемент $t \in G$, что $u = vt$, то имеем $vtx^{-1}vt = vx^{-1}x$, откуда $tx^{-1}vt = x^{-1}v$ или $xtx^{-1} = vt^{-1}v^{-1}$, значит, $t^{x^{-1}v} = t^{-1}$. Таким образом, элемент $x^{-1}v$ индуцирует на подгруппе $\langle t \rangle$ автоморфизм порядка ≤ 2. Поскольку G — группа нечетного порядка, то данный автоморфизм должен быть тождественным, что возможно только тогда, когда $t = 1$. Следовательно, получаем, что $u = v$ — противоречие с исходным выбором элементов u, v. Таким образом, в лемме 7 из п. (2) следует п. (1) и лемма 7 доказана.

Далее приступим к непосредственному доказательству п. (1) теоремы 3.

Пусть Γ_K — полный граф. Покажем, что тогда $\langle K \rangle$ — группа нечетного порядка.

Допустим противное, что группа $\langle K \rangle$ имеет четный порядок. Тогда согласно лемме 2 в K существует элемент четного порядка, откуда ввиду леммы 3 вытекает, что в K содержится некоторая инволюция w.

Пусть a — произвольный элемент из K. В силу леммы 7 для любого элемента $x \in K \setminus \{a\}$ выполняется $ax^{-1}a \neq x$. Но, очевидно, $1w^{-1}1 = w$. Таким образом, получаем противоречие, доказывающее, что группа $\langle K \rangle$ имеет нечетный порядок.

Теперь пусть группа $\langle K \rangle$ имеет нечетный порядок. Покажем, что Γ_K — полный граф. В силу леммы 7 достаточно показать, что для любых различных элементов $a, x \in K$ выполняется $ax^{-1}a \neq x$.

Допустим противное, что существуют элементы $a, x \in K$ такие, что $a \neq x$ и $ax^{-1}a = x$. Тогда $ax^{-1}ax^{-1} = (ax^{-1})^2 = 1$, откуда ввиду нечетности порядка группы $\langle K \rangle$ вытекает, что $a = x$ — противоречие с выбором элементов a, x, доказывающее полноту графа Γ_K. Пункт (1) теоремы 3 доказан.

Покажем справедливость п. (2) теоремы 3.

Пусть Γ_K — вполне несвязный граф. Тогда для любых элементов $x, y \in K$ справедливо равенство $xy^{-1}x = y$, значит, $(xy^{-1})^2 = 1$, откуда вытекает, что $\langle K \rangle$ — элементарная абелева 2-группа.

Обратно, пусть $\langle K \rangle$ — элементарная абелева 2-группа. Тогда для любых элементов $x, y \in K$ справедливо равенство $xy^{-1}x = y$, откуда следует, что Γ_K — вполне несвязный граф. Пункт (2) теоремы 3 доказан.

5. Связные графы скрученных подмножеств

Докажем теорему 4. Зафиксируем некоторые обозначения, которые будут использоваться на протяжении данного раздела.

Пусть T — группа, u — инволюция из T, $K = \{u^g u \mid g \in T\}$, $H = C_T(u)$.

Для удобства изложения под обозначением u^g будем понимать элемент gug^{-1} вместо элемента $g^{-1}ug$.

Множество K является скрученным подмножеством. Пусть Γ_K — граф скрученного подмножества K.

Рассмотрим множество смежных классов $\overline{T} = T/H$. На множестве $\overline{T}$ определим структуру графа Γ_H следующим образом: для любых различных элементов $sH, mH \in \overline{T}$ полагаем $(sH, mH) \in E(\Gamma_H)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $k \in K$ такой, что $sH = (mk)H$.

Справедлива следующая

Лемма 8. *Графы Γ_K и Γ_H изоморфны, причем отображение $f\colon K \to \overline{T}$ (определенное следующим образом: для любого элемента $u^g u \in K$ полагаем $f(u^g u) := gH$) является изоморфизмом между графом Γ_K и графом Γ_H.*

Доказательство разбивается на ряд этапов.

(1) f — биекция.

Покажем, что f корректно определено, т. е. если $x = y$, то $f(x) = f(y)$.

Пусть для элементов $u^g u, u^t u \in K$ справедливо $u^g u = u^t u$, где $g, t \in T$. Имеем $f(u^g u) = gH$ и $f(u^t u) = tH$. Поскольку $u^g u = u^t u$, то $u^g = u^t$, откуда $g \in tC_T(u) = tH$, следовательно, $gH = tH$.

Далее, ясно, что f — сюрьекция.

Теперь покажем, что f — инъекция. Пусть для элементов $u^g u, u^t u \in K$ справедливо $u^g u \neq u^t u$, где $g, t \in T$. Необходимо показать, что $f(u^g u) \neq f(u^t u)$. Имеем $f(u^g u) = gH$ и $f(u^t u) = tH$.

Допустим противное, что $gH = tH$. Тогда $g = tc$, где c — некоторый элемент из $H = C_T(u)$. Значит, $u^g u = u^{tc} u = tcuc^{-1}t^{-1}u = u^t u$, что противоречит выбору элементов $u^g u, u^t u$. Таким образом, f — инъекция и п. (1) доказан.

(2) Для элементов $x, y \in K$ справедливо $(x, y) \in E(\Gamma_K)$ тогда и только тогда, когда $(f(x), f(y)) \in E(\Gamma_H)$.

Покажем сначала, что если для элементов $x, y \in K$ справедливо $(x, y) \in E(\Gamma_K)$, то $(f(x), f(y)) \in E(\Gamma_H)$.

Имеем $x = u^g u, y = u^t u$, где $g, t \in T$. Поскольку $(x, y) \in E(\Gamma_K)$, то существует элемент $a = u^s u \in K$ такой, что $x = ay^{-1}a$. Таким образом, $u^g u = u^s u u u^t u^s u = u^s u^t u^s u = u^{tu^s} u$. Тогда для $f(u^g u) = gH$ и $f(u^{tu^s} u) = tu^s H$ получаем, что $gH = tu^s H = t(u^s u)H$. Следовательно, $(f(x), f(y)) \in E(\Gamma_H)$.

Теперь покажем, что если для элементов $gH, tH \in T/H$ справедливо $(gH, tH) \in E(\Gamma_H)$, то $(u^g u, u^t u) \in E(\Gamma_K)$.

Поскольку $(gH, tH) \in E(\Gamma_H)$, то существует элемент $a = u^s u \in K$ такой, что $gH = (ta)H = (tu^s)H$. Следовательно, в силу того, что согласно (1) f — биекция, имеем $u^g u = u^{tu^s} u = u^s u^t u^s u = u^s u u u^t u^s u = u^s u (u^t u)^{-1} u^s u$. Таким образом, для элементов $x = u^g u, y = u^t u$ из K

существует элемент $a = u^s u$ из K такой, что $x = ay^{-1}a$, и, значит, $(x, y) \in E(\Gamma_K)$. Пункт (2), а вместе с ним и сама лемма 8 доказаны.

Лемма 9. *Следующие условия эквивалентны*:
(1) *диаметр графа* Γ_K *равен* n;
(2) $T = \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n} H$, *но* $T \neq \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n-1} H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о Покажем, что из п. (1) леммы следует п. (2).

Так как диаметр графа Γ_K равен n, то существует элемент $x \in K$, для которого существует n элементов $k_1, \ldots, k_n \in K$ таких, что $x = k_n \circ (k_{n-1} \circ (\ldots \circ (k_1 \circ 1) \ldots))$, где $a \circ b = ab^{-1}a$, и для любых элементов $s_1, \ldots, s_{n-1} \in K$ справедливо неравенство $x \neq s_{n-1} \circ (s_{n-2} \circ (\ldots \circ (s_1 \circ 1) \ldots))$. Пусть $x = u^g u$, $k_i = u^{g_i} u$, $i = 1, \ldots, n$, где $g, g_i \in T$. В силу леммы 6.1 получаем, что для $f(x) = gH$ и $f(1) = H$ существуют элементы $t_1, \ldots, t_n \in K$ такие, что $gH = 1 \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_n H = t_1 \cdot \ldots \cdot t_n H$, но для любых элементов $r_1, \ldots, r_{n-1} \in K$ справедливо неравенство $gH \neq 1 \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_{n-1} H = r_1 \cdot \ldots \cdot r_{n-1} H$. Следовательно, $T = \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n} H$, но $T \neq \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n-1} H$.

Теперь покажем, что из п. (2) леммы следует п. (1).

В силу того, что $T = \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n} H$, но $T \neq \underbrace{K \cdot \ldots \cdot K}_{n-1} H$, существует элемент $g \in T$, для которого существуют элементы $k_1, \ldots, k_n \in K$ такие, что $gH = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n H$, и для любых элементов $s_1, \ldots, s_{n-1} \in K$ справедливо $gH \neq s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n-1} H$. Следовательно, диаметр графа Γ_H равен n и по лемме 8 получаем, что диаметр графа Γ_K равен n. Лемма 9 доказана.

Из леммы 9 вытекает

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны*:
(1) *диаметр графа* Γ_K *равен* n;
(2) $T = \underbrace{u^T \cdot \ldots \cdot u^T}_{n} C_T(u)$, *но* $T \neq \underbrace{u^T \cdot \ldots \cdot u^T}_{n-1} C_T(u)$.

Теперь для доказательства теоремы 4 достаточно положить $T := G\langle\varphi\rangle$. Из леммы 9 и следствия 2 легко вытекает справедливость этого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мыльников А.Л.** Конечные перекрученные группы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 369–375.
2. **Мыльников А.Л.** Характеризация конечных простых неабелевых групп с помощью скрученных подмножеств // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1078–1085.
3. **Вепринцев Д.В.** Редуцированные симметричные подмножества в группах// Мат. системы. Вып. 4. Красноярск: Краснояр. гос. аграрн. ун-т, 2005. С. 3–12.
4. **Вепринцев Д.В., Мыльников А.Л.** Инволютивная декомпозиция группы и скрученные подмножества с малым количеством инволюций // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, №2. С. 275–280.

Мыльников Андрей Леонидович

Поступила 1.02.2011

канд. физ.-мат. наук, доцент
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. акад. М.Ф. Решетнева
e-mail: mylnand@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.17

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $b_1 < 24$[1]

М. С. Нирова

Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ), $b_1 = k-\lambda-1$. Хорошо известно, что если $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф с долями порядка 2. Ранее были классифицированы графы с $b_1 \le 4$. Изучение графов даже в случае $b_1 = 5$ идет с большим трудом. Однако для сильно регулярных графов ситуация гораздо проще. В данной работе классифицированы сильно регулярные графы с $b_1 < 24$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, частичная геометрия, псевдогеометрический граф.

M. S. Nirova. On strongly regular graphs with $b_1 < 24$.

Let Γ be a connected edge-regular graph with parameters (v,k,λ), and let $b_1 = k-\lambda-1$. It is well-known that, if $b_1 = 1$, then Γ is either a polygon or a complete multipartite graph with parts of order 2. Graphs with $b_1 \le 4$ were classified earlier. The investigation of graphs even in the case $b_1 = 5$ involves great difficulties. However, for strongly regular graphs, the situation is much simpler. In this paper, we classify strongly regular graphs with $b_1 < 24$.

Keywords: strongly regular graph, partial geometry, pseudo geometric graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначается окрестность a, т. е. подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, смежных с a. Для вершин a,b графа Γ через $d(a,b)$ обозначим расстояние между a,b в графе Γ. Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется локально $\mathcal{F}$ графом, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a]\cap[b]$ содержит точно μ вершин для любых двух несмежных вершин a,b. Подграф $[a]\cap[b]$ назовем λ-подграфом (μ-подграфом), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$).

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1 = \ldots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a,b\},\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$ решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1,y_1), (x_2,y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. *Графом Джонсона* $J(n,m)$ называется граф, вершинами которого являются m-элементные подмножества данного n-элементного множества, причем две вершины a,b смежны, только если $|a\cap b| = m-1$. *Граф Пэли* $P(q)$ в качестве вершин имеет элементы поля F_q, $q \equiv 1 \pmod 4$, и две вершины a,b смежны, только если $b-a$ является ненулевым квадратом в F_q. *Граф Петерсена* — это дополнительный граф для треугольного графа $T(5)$ (он имеет параметры (10,3,0,1)). *Граф Клебша* (*Шлефли*) — это единственный

[1]Работа выполнена при поддержке российско-словенского проекта 2012-2013 гг., программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

сильно регулярный граф с параметрами (16,10,6,6) (с параметрами (27,16,10,8)). *Граф Шрикханде* — это единственный сильно регулярный локально шестиугольный граф с параметрами (16,6,2,2). Существует точно 3 сильно регулярных графа, имеющих параметры графа $T(8)$, но не изоморфных $T(8)$. Эти графы называются графами *Чанга. Графом Хофмана — Синглтона* называется единственный сильно регулярный граф с параметрами (50,7,0,1). *Графом Хигмена — Симса* называется единственный сильно регулярный граф с параметрами (100,22,0,6).

Частичной геометрией $pG_\alpha(s,t)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. Если $\alpha=1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Если $\alpha=t$, то геометрия называется *сетью. Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α,s,t называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$. Заметим, что если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s,t)$, α делит s,t и $\alpha<s$, то граф $\bar{\Gamma}$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha,s-\alpha)$.

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем [1, теорема 3.12.4]. Любой зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r\times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v,k,λ) значение $b_1=b_1(u,w)$ не зависит от выбора ребра $\{u,w\}$ и равно $k-\lambda-1$.

В [1, следствие 1.1.6] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1=1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{n\times 2}$. Реберно регулярные графы с $2\le b_1\le 5$ изучались в работах [2; 3]. Изучение реберно регулярных графов даже в случае $b_1=5$ идет с большим трудом. Однако для сильно регулярных графов ситуация гораздо проще. В данной работе классифицированы сильно регулярные графы с $b_1<24$.

Доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с $0<b_1<24$. Тогда Γ — граф из следующего списка*:

(1) *граф с параметрами* $(4b_1+1,2b_1,b_1-1,b_1)$, $b_1\notin\{5,8,14,17,19,23\}$ *или полный многодольный граф* $K_{r\times(b_1+1)}$;

(2) *зейделев граф или его дополнение*;

(3) *псевдогеометрический граф для* $GQ(s,t)$, $\{s,t\}\in\{\{2,2\},\{2,4\},\{3,3\},\{3,5\},\{4,4\},\{6,3\}\}$ *или его дополнение*;

(4) *псевдогеометрический граф для сети* $pG_t(s,t)$, *где либо* $t=2$, $s=3,4,5,\dots,12$, *либо* $t=3$, $s=4,5,\dots,9$, *либо* $t=4$, $s=6,7,8$, *либо* $t=5$, $s=8$, *либо* $t=s-2$, $s=7,8,9$;

(5) *псевдогеометрический граф для* $pG_2(4,t)$ $(t=3,7)$, $pG_2(5,5)$, $pG_3(s,2)$ $(s=5,6,8,9,12)$, $pG_3(5,7)$, $pG_4(7,2)$, $pG_4(7,3)$, $pG_4(8,3)$, $pG_5(9,3)$, $pG_5(14,2)$, $pG_6(8,5)$, $pG_6(15,2)$, $pG_8(15,2)$, $pG_9(18,2)$, $pG_9(15,3)$, $pG_{10}(15,3)$, $pG_{14}(20,3)$, $pG_{15}(24,2)$, $pG_{15}(19,3)$ *или* $pG_{20}(24,3)$;

(6) *дополнительный граф либо к графу из п.* (5), *либо к псевдогеометрическому графу для* $GQ(4,6)$;

(7) *граф с параметрами* $(50,7,0,1)$, $(56,10,0,2)$, $(77,16,0,4)$, $(81,20,1,6)$, $(82,36,15,16)$, $(85,30,11,10)$, $(85,14,3,2)$, $(99,14,1,2)$, $(100,33,14,9)$, $(100,22,0,6)$, $(126,25,8,4)$, $(136,30,8,6)$, $(162,23,4,3)$, $(243,22,1,2)$, $(300,26,4,2)$, *или* $(400,21,2,1)$;

(8) *дополнительный граф для графа из п.* (7).

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1 [4, лемма 3.1]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф, имеющий параметры* (v, k, λ, μ). *Тогда либо* $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (*так называемый половинный случай*) *и* v *является суммой квадратов двух целых чисел, либо неглавные собственные значения* $n - m$, $-m$ *графа* Γ — *целые числа, где* $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ *и кратность собственного значения* $n - m$ *равна* $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. *Далее, если* m — *целое число, большее* 1, *то* $m - 1$ *делит* $k - \lambda - 1$ *и* $\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \dfrac{k-\lambda-1}{m-1}$, $n = m - 1 + \dfrac{k-\lambda-1}{m-1}$.

Лемма 2. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения* $k, n-m, -m$, *и* $b_1 = k - \lambda - 1$. *Тогда*

(1) $b_1 = (n-m+1)(m-1)$;

(2) *если* $m - 1 = b_1$, *то* Γ *является полным многодольным графом* $K_{r\times(b_1+1)}$;

(3) *если* b_1 — *простое число, то* Γ *является полным многодольным графом* $K_{r\times(b_1+1)}$ *или зейделевым графом*;

(4) *если* $b_1 = 2(m-1)$, *то* Γ *является дополнительным к зейделеву графу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $\lambda - \mu = (n-m) - m$ и $k - \mu = m(n-m)$. Поэтому $b_1 = m(n-m) - (n-m) + m - 1 = (m-1)(n-m+1)$. Утверждение (1) доказано.

Если $m - 1 = b_1$, то по утверждению (1) получим $n - m = 0$ и Γ является полным многодольным графом $K_{r\times(b_1+1)}$. Утверждение (2) доказано.

Если b_1 — простое число, то $m - 1 = b_1$ или 1. В первом случае Γ является полным многодольным графом $K_{r\times(b_1+1)}$, а во втором случае — зейделевым графом. Утверждение (3) доказано.

Если $b_1 = 2(m-1)$, то $n - m = 1$ и Γ является дополнительным к зейделеву графу. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф. Если* $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ *и* $b_1 < 24$, *то* $b_1 \neq 5, 8, 14, 17, 19, 23$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $v = 4\mu + 1$ является степенью простого числа, то граф Пэли на v вершинах имеет параметры $(v, 2\mu, \mu - 1, \mu)$. Если $b_1 \leq 23$, то $v = 4b_1 + 1$ не является степенью простого числа для $b_1 = 5, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 21$ или 23. Но в случае $b_1 = 11$ число $v = 45$ равно 36+9, в случае $b_1 = 16$ число $v = 65$ равно 49+16, а в случае $b_1 = 21$ число $v = 85$ равно 81+4. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с* $0 < b_1 < 24$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Γ — *граф Зейделя, то* Γ *является полным многодольным графом* $K_{r\times 2}$, $n \times n$ *решеткой*, $n \leq 24$, *треугольным графом* $T(n)$, $n \leq 26$, *графом Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или одним из трех графов Чанга*;

(2) *если* Γ — *дополнительный граф к графу Зейделя, то* Γ *является дополнительным графом к* $n \times n$ *решетке*, $n \leq 13$, *к треугольному графу* $T(n)$, $n \leq 15$, *к графу Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или к одному из трех графов Чанга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если Γ является $n \times n$ решеткой, то $k = 2(n-1)$, $\lambda = n - 2$ и $b_1 = n - 1$, поэтому $n \leq 24$. Если Γ является треугольным графом $T(n)$, то $k = 2(n-2)$, $\lambda = n - 2$ и $b_1 = n - 3$, поэтому $n \leq 26$. Если Γ является графом Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или одним из трех графов Чанга, то $b_1 = 2, 3, 5, 3$ или 5 соответственно. Утверждение (1) доказано.

Если Γ — дополнительный граф к сильно регулярному графу $\bar{\Gamma}$ с параметрами $(\bar{v}, \bar{k}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, то $b_1 = \bar{k} - \bar{\mu}$. Если $\bar{\Gamma}$ является $n \times n$ решеткой, то $b_1 = 2n - 4$, поэтому $n \leq 13$. Если $\bar{\Gamma}$

является треугольным графом $T(n)$, то $b_1 = 2n-8$, поэтому $n \le 15$. Если $\bar{\Gamma}$ является графом Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде или одним из трех графов Чанга, то $b_1 = 2, 4, 8, 4$ или 8 соответственно. Лемма доказана.

Пусть до конца работы Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), не являющимся графом в половинном случае, имеющим собственное значение $-m$, $1 < m-1 < b_1/2$ и $b_1 \le 23$. Заметим, что если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s,t)$, то $b_1 = t(s-\alpha+1)$.

Лемма 5. *Если $b_1 = 6$, то либо Γ является графом Хофмана — Синглтона или его дополнением, либо Γ является графом с параметрами $(26, 10, 3, 4)$ или его дополнением.*

Доказательство. По предположению $m-1 = 2$ и по лемме 2 получим $n-m+1 = 3$. Но в этом случае граф $\bar{\Gamma}$ также имеет собственные значения 2 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 6$.

Теперь $k = 6+\mu$, $n = 5$, по прямоугольному соотношению μ делит 36, а по условию целочисленности 5μ делит $2(6+\mu)(9+\mu)$. Поэтому μ сравнимо с ± 1 по модулю 5. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры (50,7,0,1) и является графом Хофмана — Синглтона.

Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры $(26, 10, 3, 4)$. Если $\mu = 6$, то Γ является графом в половинном случае. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(26, 15, 8, 9)$ и является дополнительным графом к графу с параметрами $(26, 10, 3, 4)$. Если же $\mu = 36$, то Γ является дополнительным графом к графу Хофмана — Синглтона. Лемма доказана.

Заметим, что граф с параметрами $(26, 15, 8, 9)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(5, 2)$.

Лемма 6. *Если $b_1 = 8$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *является псевдогеометрическим графом для $GQ(4, 2)$, $pG_2(5, 2)$, $pG_3(6, 2)$ или $pG_4(7, 2)$;*

(2) Γ *является дополнительным графом для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника $GQ(3, 3)$ или для графа Гевиртца.*

Доказательство. По предположению $m-1 = 2$ и по лемме 2 получим $n-m+1 = 4$. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -4, поэтому $\bar{b}_1 = 9$.

Теперь $k = 9+\mu$, $\lambda = \mu$, $n = 6$, по прямоугольному соотношению μ делит 72, а по условию целочисленности 6μ делит $2(9+\mu)(12+\mu)$. Поэтому μ делится на 3 и делит 36. Если $\mu = 3$, то Γ имеет параметры (45,12,3,3) и является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(4, 2)$.

Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(36, 15, 6, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(5, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(35, 18, 9, 9)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(6, 2)$. Заметим, что в этом случае дополнительный граф для Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(4, 3)$.

Если $\mu = 12$, то Γ имеет параметры $(36, 21, 12, 12)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_4(7, 2)$. Если $\mu = 18$, то Γ имеет параметры $(40, 27, 18, 18)$ и является дополнительным графом для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника $GQ(3, 3)$. Если же $\mu = 36$, то Γ имеет параметры $(56, 45, 36, 36)$ и является дополнительным графом для графа Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $b_1 = 9$, то Γ является дополнительным графом для одного из графов в заключении леммы 6.*

Доказательство. По предположению $m-1 = 3$, и по лемме 2 получим $n-m+1 = 3$. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 8$ и $\bar{m} = 3$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если $b_1 = 10$, то Γ имеет параметры $(85, 14, 3, 2)$ или $(49, 18, 7, 6)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению $m-1=2$, и по лемме 2 получим $n-m+1=5$. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -5, поэтому $\bar{b}_1 = 12$.

Теперь $k = 12+\mu$, $\lambda = \mu+1$, $n = 7$, по прямоугольному соотношению μ делит 120, а по условию целочисленности 7μ делит $2(12+\mu)(15+\mu)$. Поэтому μ сравнимо с 2 или -1 по модулю 7. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры (85,14,3,2).

Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(49, 18, 7, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(6, 2)$. Если $\mu = 20$, то Γ имеет параметры $(49, 32, 21, 20)$ и не существует по [5]. Если $\mu = 30$, то Γ имеет параметры $(57, 42, 31, 30)$. Но дополнительный граф для этого графа имеет параметры (57,14,1,4) и не существует по [6]. Если же $\mu = 120$, то Γ имеет параметры $(144, 132, 121, 120)$. Противоречие с тем, что $\bar{\lambda} = v-2k-2+\mu = -2$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если* $b_1 = 12$*, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *является дополнительным графом для одного из графов в заключении леммы* 8;

(2) *либо* Γ *имеет параметры* $(99, 14, 1, 2)$ *или* $(50, 21, 8, 9)$*, либо* Γ *является дополнительным графом для одного из графов с указанными параметрами*;

(3) Γ *либо имеет параметры* $(69, 20, 7, 5)$*, либо является псевдогеометрическим графом для* $pG_2(7, 2)$ *или* $pG_3(8, 2)$;

(4) Γ *является дополнительным графом либо для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника* $GQ(3, 5)$*, либо для графа с параметрами* $(77, 16, 0, 4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению $m-1 = 2, 3$ или 4. Если $m-1 = 4$, то граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 4 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 10$ и Γ является дополнительным графом для одного из графов в заключении леммы 8.

Если $m-1 = 3$, то граф Γ имеет собственные значения 3 и -4. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ также имеет собственные значения 3 и -4, поэтому $\bar{b}_1 = 12$.

Теперь $k = 12+\mu$, $\lambda = \mu-1$, $n = 7$, по прямоугольному соотношению μ делит 144, а по условию целочисленности 7μ делит $3(12+\mu)(16+\mu)$. Поэтому μ сравнимо с ± 2 по модулю 7. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры (99,14,1,2). Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры (50,21,8,9).

Если $\mu = 12$, то Γ является графом в половинном случае. Если $\mu = 16$, то Γ имеет параметры $(50, 28, 15, 16)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_4(7, 3)$. Если же $\mu = 72$, то Γ имеет параметры (99,84,71,72).

Если $m-1 = 2$, то граф Γ имеет собственные значения 5 и -3. В этом случае граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -6, поэтому $\bar{b}_1 = 15$.

Теперь $k = 15+\mu$, $\lambda = \mu+2$, $n = 8$, по прямоугольному соотношению μ делит 180, а по условию целочисленности 8μ делит $2(15+\mu)(18+\mu)$. Поэтому μ сравнимо с 1 по модулю 4 или с -2 по модулю 8. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры $(209, 16, 3, 1)$. Противоречие с тем, что число 5-клик в Γ равно $209 \cdot 4/5$. Если $\mu = 5$, то Γ имеет параметры $(69, 20, 7, 5)$. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры $(64, 21, 8, 6)$ и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(7, 2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры $(57, 24, 11, 9)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(8, 2)$.

Если $\mu = 30$, то Γ имеет параметры $(64, 45, 32, 30)$ и является дополнительным графом для псевдогеометрического графа обобщенного четырехугольника $GQ(3, 5)$. Если $\mu = 45$, то Γ имеет параметры $(77, 60, 47, 45)$ и является дополнительным графом для графа с параметрами (77,16,0,4). Лемма доказана.

Лемма 10. *Если* $b_1 = 14$*, то либо* Γ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_2(8, 2)$ *или* $pG_3(9, 2)$*, либо* Γ *— дополнительный граф для графа с параметрами* $(81, 20, 1, 6)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению $m-1 = 2$ и $n-m+1 = 7$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -7, поэтому $\bar{b}_1 = 18$.

Теперь $k = 18+\mu$, $\lambda = \mu+3$, $n = 9$, по прямоугольному соотношению μ делит $18 \cdot 14$, а по условию целочисленности 9μ делит $2(18+\mu)(21+\mu)$. Поэтому μ сравнимо с 0 или -3

по модулю 9. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры (81,24,9,6) и является псевдогеометрическим графом для сети $pG_2(8,2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры (70,27,12,9) и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(9,2)$.

Если $\mu = 36$, то Γ имеет параметры $(76,54,39,36)$. В этом случае дополнительный граф для Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(3,6)$ и по [7] не существует. Если $\mu = 42$, то Γ имеет параметры (81,60,45,42) и является дополнительным графом для графа с параметрами (81,20,1,6). Если же $\mu = 63$, то Γ имеет параметры (100,81,66,63) и $\bar\lambda = -1$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если $b_1 = 15$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *либо* Γ *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(3,5)$ *или единственным сильно регулярным графом с параметрами* $(77,16,0,4)$*, либо* Γ *является дополнительным графом для графа с параметрами* $(69,20,7,5)$*,* $(64,21,8,6)$ *или* $(57,24,11,9)$;

(2) Γ *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(5,3)$*,* $pG_3(7,3)$*,* $pG_4(8,3)$*,* $pG_5(9,3)$*,* $pG_{12}(16,3)$*,* $pG_{15}(19,3)$ *или* $pG_{20}(24,3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению $m-1 = 3$ или 5. Если $m-1 = 5$, то $n-m+1 = 3$, поэтому граф $\bar\Gamma$ имеет собственные значения 5 и -3, следовательно $\bar b_1 = 12$ и $\bar m - 1 = 2$. В этом случае по лемме 9 выполняется утверждение (1).

Если $m-1 = 3$, то $n-m+1 = 5$, поэтому граф $\bar\Gamma$ имеет собственные значения 3 и -5. Теперь $k = 16+\mu$, $\lambda = \mu$, $n = 8$, по прямоугольному соотношению μ делит $16 \cdot 15$, а по условию целочисленности 8μ делит $3(16+\mu)(20+\mu)$. Поэтому μ сравнимо с 4 по модулю 8 или делится на 16. Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры (96,20,4,4) и является псевдогеометрическим графом для $GQ(5,3)$. Если $\mu = 12$, то Γ имеет параметры (64,28,12,12) и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(7,3)$.

Если $\mu = 16$, то Γ имеет параметры $(63,32,16,16)$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_4(8,3)$. Если $\mu = 20$, то Γ имеет параметры (64,36,20,20) и является псевдогеометрическим графом для $pG_5(9,3)$. Если $\mu = 48$, то Γ имеет параметры (85,64,48,48) и является псевдогеометрическим графом для $pG_{12}(16,3)$. Если $\mu = 60$, то Γ имеет параметры (96,76,60,60) и является псевдогеометрическим графом для $pG_{15}(19,3)$. Если $\mu = 80$, то Γ имеет параметры (115,96,80,80) и является псевдогеометрическим графом для $pG_{20}(24,3)$. Если же $\mu = 240$, то Γ имеет параметры (273,256,240,240) и $\bar\lambda = -1$. Лемма доказана.

Заметим, что граф с параметрами $(69,48,32,36)$ является псевдогеометрическим для $pG_6(8,5)$, а псевдогеометрический граф для $pG_{20}(24,3)$ является дополнительным графом для графа с параметрами $(115,18,1,3)$.

Лемма 12. *Если $b_1 = 16$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *имеет параметры* $(126,25,8,4)$ *частного графа Джонсона* $J(10,5)$;

(2) Γ *является либо псевдогеометрическим графом для* $pG_2(9,2)$ *или* $pG_8(15,2)$*, либо дополнительным графом к псевдогеометрическому графу для* $pG_2(4,7)$ *или* $pG_3(5,7)$*, либо дополнительным графом к графу Хигмена — Симса*;

(3) Γ *является дополнительным графом для графа из п.* (2) *леммы* 11.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению $m-1 = 2$ или 4. Если $m-1 = 2$, то $n-m+1 = 8$, поэтому граф $\bar\Gamma$ имеет собственные значения 2 и -8, следовательно $\bar b_1 = 21$. Теперь $k = 21+\mu$, $\lambda = 4+\mu$, $n = 10$, по прямоугольному соотношению μ делит $21 \cdot 16$, а по условию целочисленности 10μ делит $2(21+\mu)(24+\mu)$. Поэтому μ делит 168 и μ сравнимо с ± 1 по модулю 5. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры (375,22,6,1) и окрестность вершины в Γ не может быть объединением 7-клик. Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры (126,25,8,4). Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры (81,27,10,6) и является псевдогеометрическим графом для $pG_2(9,2)$. Если $\mu = 14$, то Γ имеет параметры (76,35,18,14) и является дополнительным графом к псевдогеометрическому графу для $pG_3(5,7)$. Если $\mu = 21$, то Γ имеет параметры (75,42,25,21) и является дополнительным графом к псевдогеометрическому графу для $pG_2(4,7)$. Если $\mu = 24$, то Γ имеет параметры (76,45,28,24) и является псевдогеометрическим графом для $pG_8(15,2)$. Если $\mu = 56$, то Γ имеет параметры (100,77,60,56) и является дополнительным графом к графу Хигмена — Симса. Наконец, если $\mu = 84$, то Γ имеет параметры (126,105,88,84) и в дополнительном графе получим $\bar{\lambda} = -2$.

Если $m-1 = 4$, то $n-m+1 = 4$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 4 и -4. В этом случае $\bar{b}_1 = 15$ и Γ является дополнительным графом для графа из п. (2) леммы 11.

Лемма 13. *Если* $b_1 = 18$*, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *имеет параметры* $(100, 33, 14, 9)$;

(2) Γ *имеет параметры* $(400, 21, 2, 1)$, $(162, 23, 4, 3)$, $(81, 32, 13, 12)$, $(81, 50, 31, 30)$ *или* $(85, 30, 11, 10)$;

(3) Γ *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(6, 3)$ *или для* $pG_{10}(15, 3)$;

(4) Γ *либо имеет параметры* $(81, 20, 1, 6)$*, либо является псевдогеометрическим графом для* $pG_6(8, 6)$ *или* $pG_4(6, 6)$.

Доказательство. По предположению $m-1 = 2, 3$ или 6. Если $m-1 = 2$, то $n-m+1 = 9$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -9, и $\bar{b}_1 = 24$. Теперь $k = 24+\mu$, $\lambda = 5+\mu$, $n = 11$, по прямоугольному соотношению μ делит $24\cdot 18$, а по условию целочисленности 11μ делит $2(24+\mu)(27+\mu)$. Поэтому μ делит $24\cdot 54$ и 11 делит $(\mu+2)(\mu+5)$. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры (121,30,11,6) и Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(10,2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры (100,33,14,9). Если $\mu = 72$, то Γ имеет параметры (121,96,77,72) и $\bar{\lambda} = -1$. Если $\mu = 108$, то Γ имеет параметры (155,132,113,108) и $\bar{\lambda} = -3$.

Если $m-1 = 3$, то $n-m+1 = 6$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -6. В этом случае $\bar{b}_1 = 20$. Теперь $k = 20+\mu$, $\lambda = 1+\mu$, $n = 9$, по прямоугольному соотношению μ делит $20\cdot 18$, а по условию целочисленности 9μ делит $3(20+\mu)(24+\mu)$. Поэтому μ делит $24\cdot 60$ и 3 делит $\mu(\mu+2)$. Если $\mu = 1$, то Γ имеет параметры (400,21,2,1). Если μ делится на 3, то 9 делит $24+\mu$, поэтому либо $\mu = 3$ и Γ имеет параметры (162,23,4,3), либо $\mu = 12$ и Γ имеет параметры (81,32,13,12), либо $\mu = 30$ и Γ имеет параметры (81,50,31,30). Если $\mu = 4$, то Γ имеет параметры (133,24,5,4) и является псевдогеометрическим графом для $GQ(6,3)$. Если $\mu = 10$, то Γ имеет параметры (85,30,11,10). Если $\mu = 40$, то Γ имеет параметры (88,60,41,40) и является псевдогеометрическим графом для $pG_{10}(15,3)$. Если же $\mu \geq 90$, то $\bar{\lambda} < 0$.

Если $m-1 = 6$, то $n-m+1 = 3$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 6 и -3, поэтому $\bar{b}_1 = 14$. По лемме 10 граф Γ либо имеет параметры $(81, 20, 1, 6)$, либо является псевдогеометрическим графом для $pG_6(8,6)$ или $pG_4(6,6)$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Если* $b_1 = 20$*, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_3(12, 2)$, $pG_5(14, 2)$, $pG_6(15, 2)$, $pG_9(18, 2)$ *или для* $pG_{15}(24, 2)$;

(2) Γ *имеет параметры* $(243, 22, 1, 2)$, $(82, 36, 15, 16)$ *или* $(82, 45, 24, 25)$;

(3) Γ *является дополнительным графом для графа из пп.* (2), (3) *заключения леммы* 13.

Доказательство. По предположению $m-1 = 2, 4$ или 5. Если $m-1 = 2$, то $n-m+1 = 10$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 2 и -10, и $\bar{b}_1 = 27$. Теперь $k = 27+\mu$, $\lambda = 6+\mu$, $n = 12$, по прямоугольному соотношению μ делит $27\cdot 20$, а по условию целочисленности 12μ делит $2(27+\mu)(30+\mu)$. Поэтому μ делит $27\cdot 10$ и 6 делит $(\mu+3)\mu$. Если $\mu = 3$, то Γ имеет параметры (231,30,9,3) и является псевдогеометрическим графом для $GQ(10,2)$, противоречие. Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры (144,33,12,6) и является псевдогеометрическим графом для $pG_2(11,2)$. Если $\mu = 9$, то Γ имеет параметры (117,36,15,9) и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(12,2)$. Если $\mu = 15$, то Γ имеет параметры (99,42,21,15) и является псевдогеометрическим графом для $pG_5(14,2)$. Если $\mu = 18$, то Γ имеет параметры (96,45,24,18) и является псевдогеометрическим графом для $pG_6(15,2)$. Если $\mu = 27$, то Γ имеет параметры (95,54,33,27) и является псевдогеометрическим графом для $pG_9(18,2)$.

Если $\mu = 30$, то Γ имеет параметры (96,57,36,30) и не существует (см. [8]). Если $\mu = 45$, то Γ имеет параметры (105,72,51,45) и является псевдогеометрическим графом для $pG_15(24,2)$.

Если $m-1=4$, то $n-m+1=5$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 4 и -5. В этом случае $\bar{b}_1 = 20$. Теперь $k = 20+\mu$, $\lambda = \mu - 1$, $n = 9$, по прямоугольному соотношению μ делит $20 \cdot 20$, а по условию целочисленности 9μ делит $4(20+\mu)(25+\mu)$. Поэтому 9 делит $(\mu-2)(\mu+2)$. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры (243,22,1,2). Если $\mu = 16$, то Γ имеет параметры (82,36,15,16). Если $\mu = 20$, то Γ — граф в половинном случае. Если $\mu = 25$, то Γ имеет параметры (82,45,24,25).

Если $m-1=5$, то $n-m+1=4$, граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 5 и -4. В этом случае $\bar{b}_1 = 18$ и Γ является дополнительным графом для графа из пп. (2), (3) заключения леммы 13. Лемма доказана.

Лемма 15. *Если* $b_1 = 21$*, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *либо имеет параметры* $(100,66,44,42)$, $(136,30,8,6)$ *или* $(300,26,4,2)$*, либо* Γ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_3(9,3)$, $pG_9(15,3)$, $pG_{14}(20,3)$;

(2) Γ *является дополнительным графом для графа из пп.* (1), (2) *заключения леммы* 12.

Доказательство. По предположению $m-1=3$ или 7. Если $m-1=3$, то $n-m+1=7$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 3 и -7, поэтому $\bar{b}_1 = 24$. Теперь $k = 24+\mu$, $\lambda = 2+\mu$, $n = 10$, по прямоугольному соотношению μ делит $24 \cdot 21$, а по условию целочисленности 10μ делит $3(24+\mu)(28+\mu)$. Поэтому 5 делит $(\mu-1)(\mu-2)$. Если $\mu = 2$, то Γ имеет параметры (300,26,4,2). Если $\mu = 6$, то Γ имеет параметры (136,30,8,6). Если $\mu = 12$, то Γ имеет параметры (100,36,14,12) и является псевдогеометрическим графом для $pG_3(9,3)$. Если $\mu = 36$, то Γ имеет параметры (96,60,38,36) и является псевдогеометрическим графом для $pG_9(15,3)$. Если $\mu = 42$, то Γ имеет параметры (100,66,44,42). Если $\mu = 56$, то Γ имеет параметры (111,80,58,56) и является псевдогеометрическим графом для $pG_{14}(20,3)$.

Если $m-1=7$, то $n-m+1=3$, поэтому граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения 7 и -3. В этом случае $\bar{b}_1 = 16$ и Γ является дополнительным графом для графа из пп. (1), (2) заключения леммы 12. Лемма доказана. Из лемм 3–15 следует теорема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Махнев А.А.** О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68. С. 159–172.
3. **Казарина В.И., Махнев А.А.** О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$ // Владикавказ. мат. журн. 2009. Т. 11, № 1. С. 29–42.
4. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
5. (49,16,3,6) strongly regular graph does not exist / F. Bussemaker [et al.] // Europ. J. Comb. 1989. Vol. 10. P. 413–418.
6. **Wilbrink H.A., Brouwer A.E.** (57,14,1) strongly regular graph does not exist // Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A. 1983. Vol. 45. P. 117–121.
7. **Махнев А.А.** О псевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий // Вопросы алгебры. Вып. 11. Гомель: Изд-во Гомел. ун-та, 1997. С. 60–67.
8. **Brouwer A.E.** Homepage: table of parameters of strongly regular graphs. URL: http://homepages.cwi.nl/ aeb/math/dsrg/dsrg.html (дата обращения: 30.11.2011).

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nirova_m@mail.ru

Поступила 10.12.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.5

КОЛЬЦА ЛИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ КОРНЕЙ И НАБОРОМ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП ОСНОВНОГО КОЛЬЦА[1]

Я. Н. Нужин

По данному ковру аддитивных подгрупп определяется ковровое подкольцо алгебры Шевалле. Для этого подкольца дается ответ на аналог известного вопроса об отсутствии в ковровой подгруппе новых корневых элементов и находятся необходимые и достаточные условия его инвариантности относительно соответствующей ковровой подгруппы.

Ключевые слова: группа и алгебра Шевалле, ковер аддитивных подгрупп, кольцо Ли.

Ya. N. Nuzhin. Lie rings defined by the root system and family of additive subgroups of the main ring.

For a given carpet of additive subgroups, a carpet subring of the Chevalley algebra is defined. For this subring, an analog of the known question on the absence of new root elements in a carpet subgroup is answered and necessary and sufficient conditions of its invariance with respect to the corresponding carpet subgroup are found.

Keywords: Chevalley group and algebra, carpet of additive subgroups, Lie ring.

1. Ковры и ковровые подгруппы

Далее Φ — система корней, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы, и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения $x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u)$.

Назовем *ковром типа* Φ *над* K всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js} \quad \text{при } r, s, ir+js \in \Phi, \quad i>0, \quad j>0,$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm1, \pm2, \pm3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \ r, s, ir+js \in \Phi.$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ элементарной группы Шевалле $E(\Phi, K)$.

Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *допустимым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. если $E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$.

Историю развития понятий ковра и ковровой подгруппы можно найти в [1–4] (в [2] ковер называется сетью). Данные выше определения ввел В. М. Левчук, он же в 1980 г. поставил следующий

В о п р о с 1.1 [5, вопрос 7.28]. *Какие условия на ковер $\mathfrak{A}$ (в терминах $\mathfrak{A}_r$) над коммутативным кольцом K необходимы и достаточны для того, чтобы ковер $\mathfrak{A}$ был допустимым?*

К настоящему времени ответ на вопрос 1.1 получен только в случае, когда K — локально конечное поле [6]. В [7] понятие допустимости ковра рассматривается с топологической точки зрения, а также строятся интересные примеры допустимых и недопустимых ковров.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12–01–00968–a).

2. Кольцо Ли, ассоциированное с ковром

Пусть $L(\Phi,\mathbb{C})$ — простая алгебра Ли типа Φ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Она обладает базисом Шевалле

$$\{e_r,\ r\in\Phi;\quad h_s,\ s\in\Pi\},\tag{2.1}$$

где Π — множество фундаментальных корней системы Φ, причем умножение базисных элементов осуществляется по следующим правилам:

$$\begin{array}{rcll}[h_rh_s] & = & 0, & r,s\in\Pi,\\ [h_re_s] & = & A_{rs}e_s, & r\in\Pi;\quad s\in\Phi,\\ [e_re_{-r}] & = & h_r, & r\in\Phi,\\ [e_re_s] & = & 0, & r,s\in\Phi;\quad r+s\notin\Phi,\\ [e_re_s] & = & N_{r,s}e_{r+s}, & r,s,r+s\in\Phi.\end{array}$$

Здесь, как обычно,

$$A_{rs}=\frac{2(r,s)}{(r,r)},\quad N_{r,s}=\pm(p+1),$$

где $p=p(r,s)$ — наибольшее целое неотрицательное число такое, что $s-pr\in\Phi$.

Числа A_{rs} и $N_{r,s}$ целые, поэтому можно определить кольцо (алгебру) Ли $L(\Phi,K)$ с базисом Шевалле над произвольным коммутативным кольцом K с единицей (см., например, [8]).

По ковру $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K определим подкольцо $L(\Phi,\mathfrak{A})$ кольца $L(\Phi,K)$ с операциями сложения и умножения такими же, как в $L(\Phi,K)$. По определению считаем, что подкольцо $L(\Phi,\mathfrak{A})$ порождается (относительно обеих операций) всеми множествами $\mathfrak{A}_re_r,\ \ r\in\Phi$, т. е. $L(\Phi,\mathfrak{A})=\langle\mathfrak{A}_re_r\mid r\in\Phi\rangle$. Будем называть $L(\Phi,\mathfrak{A})$ *ковровым* подкольцом Ли. Заметим, что базисные элементы $e_r,\ h_s$ не обязаны лежать в $L(\Phi,\mathfrak{A})$.

Ковер $\mathfrak{A}$ назовем *L-допустимым*, если $L(\Phi,\mathfrak{A})\cap Ke_r=\mathfrak{A}_re_r,\ r\in\Phi$.

Далее дается ответ на следующий вопрос, который является аналогом для ковровых подколец Ли $L(\Phi,\mathfrak{A})$ вопроса 1.1 для ковровых подгрупп $E(\Phi,\mathfrak{A})$ из предыдущего раздела.

Вопрос 2.1. *Какие условия на ковер $\mathfrak{A}$ (в терминах $\mathfrak{A}_r$) над коммутативным кольцом K необходимы и достаточны для того, чтобы ковер $\mathfrak{A}$ был L-допустимым?*

Для любого корня $r\in\Phi$ аддитивные подгруппы $\mathfrak{H}_r$ кольца K определим равенствами $L(\Phi,\mathfrak{A})\cap Kh_r=\mathfrak{H}_rh_r,\ r\in\Phi$. В силу равенств $[e_re_{-r}]=h_r,\ r\in\Phi$, справедливы включения $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\subseteq\mathfrak{H}_r,\ r\in\Phi$. Поэтому из равенств $[h_re_s]=A_{rs}e_s,\ \ r,s\in\Phi$, для L-допустимого ковра $\mathfrak{A}$ получаем

$$A_{rs}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_s\subseteq\mathfrak{A}_s,\quad r,s\in\Phi.\tag{2.2}$$

Соотношения $[e_re_s]=N_{r,s}e_{r+s},\ \ r,s,r+s\in\Phi$, для L-допустимого ковра $\mathfrak{A}$ дают

$$N_{r,s}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s\subseteq\mathfrak{A}_{r+s},\quad r,s,r+s\in\Phi.\tag{2.3}$$

Очевидно, включения (2.2) и (2.3) являются также и достаточными условиями L-допустимости ковра $\mathfrak{A}$.

При $r,s,r+s\in\Phi$ и $i=j=1$ для структурных констант $C_{ij,rs}$, участвующих в определении ковра, справедливы равенства $C_{11,rs}=N_{r,s}$. Поэтому включения (2.3) входят в определение ковра $\mathfrak{A}$. Таким образом, справедлива

Лемма 2.1. *Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K является L-допустимым тогда и только тогда, когда выполняются включения* (2.2).

Лемма 2.2. *При $s\neq\pm r$ соотношения* (2.2) *следуют из соотношений* (2.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A_{rs} = 0$, то, очевидно, нечего доказывать.

Пусть $A_{rs} \neq 0$. Тогда либо $\{r, s\}$, либо $\{r, -s\}$ является базой системы корней типа A_2, B_2 или G_2, либо $\{r, s\} = \{a, a+b\}$, либо $\{r, -s\} = \{a, a+b\}$, где $\{a, b\}$ — база системы корней типа G_2 и корень a короткий. Таким образом, достаточно рассмотреть следующие шесть случаев:

1) $\{r, s\}$ — база системы корней типа A_2;
2) $\{r, s\}$ — база системы корней типа B_2 и r — длинный корень;
3) $\{r, s\}$ — база системы корней типа B_2 и r — короткий корень;
4) $\{r, s\}$ — база системы корней типа G_2 и r — длинный корень;
5) $\{r, s\}$ — база системы корней типа G_2 и r — короткий корень;
6) $\{r, s\} = \{a, a+b\}$, где $\{a, b\}$ — база системы корней типа G_2 и корень a короткий.

В первых двух и в четвертом случаях $A_{rs} = \pm 1$, и, следовательно, в силу включений (2.3), учитывая, что $N_{r,s} = \pm 1$ и $N_{-r,r+s} = \pm 1$, получаем

$$A_{rs}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_{r+s} \subseteq \mathfrak{A}_s.$$

В третьем случае $A_{rs} = \pm 2$, и в силу включений (2.3), учитывая, что $N_{r,s} = \pm 1$ и $N_{-r,r+s} = \pm 2$, получаем

$$A_{rs}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_s = 2\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s \subseteq 2\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_{r+s} \subseteq \mathfrak{A}_s.$$

В пятом случае $A_{rs} = \pm 3$, и в силу включений (2.3), учитывая, что $N_{r,s} = \pm 1$ и $N_{-r,r+s} = \pm 3$, получаем

$$A_{rs}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_s = 3\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s \subseteq 3\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_{r+s} \subseteq \mathfrak{A}_s.$$

Наконец, рассмотрим последний случай, в котором нужно установить включение $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. В силу включений (2.3), учитывая, что $N_{-a,a+b} = \pm 3$ и $N_{a,b} = \pm 1$, получаем

$$3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} = \mathfrak{A}_a(3\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b}) \subseteq \mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b},$$

а учитывая, что $N_{a,a+b} = N_{-a,2a+b} = \pm 2$, получаем

$$4\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} = 2\mathfrak{A}_{-a}(2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}) \subseteq 2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}.$$

Так как $\mathfrak{A}_{a+b}$ — аддитивная подгруппа, то, очевидно, из двух последних включений следует необходимое включение. □

На самом деле, лемма 2.2 эквивалентна тому, что в алгебре Ли $L(\Phi, \mathbb{C})$ с базисом Шевалле (2.1) из соотношений $[h_r e_s] = A_{rs}e_s,\ r \in \Pi,\ s \in \Phi$, можно оставить только соотношения

$$[h_r e_r] = 2e_r,\ r \in \Pi, \quad [h_r e_{-r}] = -2e_{-r}, \quad r \in \Pi.$$

В силу лемм 2.1 и 2.2 справедлива

Теорема 2.1. *Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K является L-допустимым тогда и только тогда, когда*

$$2\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi. \tag{2.4}$$

В частности, над кольцом K характеристики 2 любой ковер L-допустим.

3. Инвариантность коврового подкольца Ли относительно ковровой подгруппы

Элементарная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ действует на кольце Ли $L(\Phi, K)$ как группа автоморфизмов. Будем говорить, что подкольцо (подмножество) $M \subseteq L(\Phi, K)$ *инвариантно* относительно подгруппы $G \subseteq E(\Phi, K)$, если $gm \in M$ для любых $g \in G$ и $m \in M$.

Так как по определению $E(\Phi,K)$ порождается корневыми элементами $x_r(t)$, $r\in\Phi$, $t\in K$, то действие $E(\Phi,K)$ на $L(\Phi,K)$ однозначно определяется действием корневых элементов.

Для любого $r\in\Phi$ автоморфизм $x_r(t)$ кольца Ли $L(\Phi,K)$ действует на базисе Шевалле следующим образом:

$$\begin{array}{rcll} e_r & \to & e_r, & \\ e_{-r} & \to & e_{-r}+th_r-t^2e_r, & \\ h_s & \to & h_s-tA_{sr}e_r, & s\in\Pi, \\ e_s & \to & \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i}t^ie_{ir+s}, & s\in\Phi\setminus\{\pm r\}, \end{array}$$

где $q=q(r,s)$ — наибольшее целое неотрицательное число такое, что $s+qr\in\Phi$, и по определению $M_{r,s,0}=1$, а при $i>0$

$$M_{r,s,i}=\frac{1}{i!}N_{r,s}N_{r,r+s}\cdots N_{r,(i-1)r+s}=\pm\begin{pmatrix} p(r,s)+i \\ i\end{pmatrix}.$$

Пусть $t\in\mathfrak{A}_r$. Рассмотрим подробно действие автоморфизма $x_r(t)$ на элементах коврового подкольца $L(\Phi,\mathfrak{A})$.

Все элементы вида ue_r, $u\in\mathfrak{A}_r$, при действии элементом $x_r(t)$ остаются на месте.

При действии автоморфизма $x_r(t)$ вектор ue_{-r}, $u\in\mathfrak{A}_{-r}$, переходит в линейную комбинацию $ue_{-r}+tuh_r-t^2ue_r$. Очевидно, первое слагаемое этой линейной комбинации лежит в кольце $L(\Phi,\mathfrak{A})$. Второе слагаемое также лежит в кольце $L(\Phi,\mathfrak{A})$ в силу указанных выше включений $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\subseteq\mathfrak{H}_r$, $r\in\Phi$. Отсюда $t^2ue_r\in\mathfrak{A}_r$ для любого $t\in\mathfrak{A}_r$ и любого $u\in\mathfrak{A}_{-r}$, т. е. выполняются включения $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r}\subseteq\mathfrak{A}_r$, $r\in\Phi$.

Действие автоморфизма $x_r(t)$ на векторах uh_s, $u\in\mathfrak{A}_s$, дает включения типа (2.2), нужно лишь поменять местами индексы r и s.

При $r,s,r+s\in\Phi$ и $j=1$ для структурных констант $C_{ij,rs}$, участвующих в определении ковра, справедливы равенства $C_{i1,rs}=M_{r,s,i}$. Поэтому при действии автоморфизма $x_r(t)$ вектор ue_s, где $u\in\mathfrak{A}_s$ и $s\in\Phi\setminus\{\pm r\}$, переходит в линейную комбинацию

$$\sum_{i=0}^{q}C_{i1,rs}t^iue_{ir+s},$$

каждое слагаемое которой в силу условия ковровости лежит в подкольце $L(\Phi,\mathfrak{A})$.

Поэтому в силу указанного выше действия корневых элементов на базисе Шевалле справедлива

Лемма 3.1. *Подкольцо $L(\Phi,\mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\Phi,\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два типа включений*:

$$A_{rs}\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_s\subseteq\mathfrak{A}_s,\quad r,s\in\Phi,$$

$$\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r}\subseteq\mathfrak{A}_r,\quad r\in\Phi.$$

Лемма 3.2. *Для любых подгрупп A и B аддитивной группы кольца K из включения $A^2B\subseteq A$ следует включение $2ABA\subseteq A$.*

Доказательство. Пусть $A^2B\subseteq A$. Тогда для любых $a_1,a_2\in A$ и любого $b\in B$ имеем

$$2a_1ba_2=[(a_1+a_2)^2-a_1^2-a_2^2]b\in A^2B\subseteq A.$$

Отсюда $2ABA\subseteq A$. □

В силу лемм 2.2, 3.1 и 3.2 справедлива

Теорема 3.1. *Подкольцо $L(\Phi,\mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\Phi,\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r}\subseteq\mathfrak{A}_r,\quad r\in\Phi.$$

4. Связи между инвариантностью, допустимостью и L-допустимостью

Теоремы 2.1, 3.1 и лемма 2.2 дают следующее

Утверждение. *Если подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\Phi, \mathfrak{A})$, то ковер $\mathfrak{A}$ является L-допустимым.*

Отсутствие других импликаций (кроме одной), связывающих понятия инвариантности, допустимости и L-допустимости, дают примеры 4.1–4.3. Результаты представлены в следующей таблице.

Т а б л и ц а

№	свойство	вопрос	свойство	ответ
1)	допустимость	$\Rightarrow$	L – допустимость	нет
2)	L – допустимость	$\Rightarrow$	допустимость	нет
3)	допустимость	$\Rightarrow$	инвариантность	нет
4)	инвариантность	$\Rightarrow$	допустимость	неизвестен
5)	инвариантность	$\Rightarrow$	L – допустимость	да
6)	L – допустимость	$\Rightarrow$	инвариантность	нет

П р и м е р 4.1. Пусть $K = GF(9)$, $\Phi = A_1$, $\mathfrak{A}_r = \{0, 1, -1\}$, $\mathfrak{A}_{-r} = \{0, i, -i\}$, где $i \in K$ и $i^2 = -1$. Тогда ковер $\mathfrak{A}$ является допустимым, но не L-допустимым. Действительно, ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ в матричном представлении порождается двумя трансвекциями

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и по известной теореме Л. Диксона [9] (см. также [10, теорема 2.8.4]) изоморфна группе $SL_2(5)$ и, в частности, не содержит новых трансвекций, т. е. ковер $\mathfrak{A}$ является допустимым. С другой стороны, $i \in 2\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r$, но $i \notin \mathfrak{A}_r$. Таким образом, включения (2.4) не выполняются, и, следовательно, по теореме 2.1 ковер $\mathfrak{A}$ не является L-допустимым, т. е. импликация 1) неверна.

П р и м е р 4.2. Пусть $K = GF(4)$, $\Phi = A_1$, $\mathfrak{A}_r = GF(2)$, $\mathfrak{A}_{-r} = GF(4)$. Тогда ковер $\mathfrak{A}$ не является допустимым, так как ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ совпадает со всей группой $SL_2(4)$. С другой стороны, по теореме 2.1 любой ковер над кольцом характеристики 2 является L-допустимым. Таким образом, импликация 2) не выполняется.

П р и м е р 4.3. Пусть K — кольцо многочленов от переменной x над полем $GF(2)$, $\Phi = A_1$, $\mathfrak{A}_r = \{0, x\}$, $\mathfrak{A}_{-r} = GF(2)$. Тогда ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ в матричном представлении порождается двумя трансвекциями

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и не содержит новых трансвекций, так как является свободным произведением двух подгрупп порядка два. Следовательно, ковер $\mathfrak{A}$ допустим. По теореме 2.1 ковер $\mathfrak{A}$ является и L-допустимым. Но по теореме 3.1 ковер $\mathfrak{A}$ не является инвариантным относительно соответствующей ковровой подгруппы. Таким образом, импликации 3) и 6) не выполняются.

Итак, остается проверить, выполняется ли импликация 4) из приведенной выше таблицы, т. е. следует ли допустимость ковра из инвариантности коврового подкольца относительно ковровой подгруппы? В силу теоремы 3.1 последний вопрос можно переформулировать в следующем виде.

В о п р о с 4.1. *Являются ли включения $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, достаточными для допустимости ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ?*

В заключение отметим, что для ковра типа A_l включения

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi, \tag{4.1}$$

достаточны для его допустимости, так как в этом случае (элементарный) ковер $\mathfrak{A}$ продолжается до полного матричного ковра (см., например, [11]) и, в частности, является допустимым. Поэтому в силу леммы 3.2 для ковра типа A_l над кольцом нечетной характеристики ответ на вопрос 4.1 положителен. Более того, по лемме 14 из [3] (к сожалению, ее доказательство не приводится) включения (4.1) достаточны для допустимости ковра любого типа. Таким образом, применяя лемму 14 из [3] и лемму 3.2, получим положительный ответ на вопрос 4.1 для ковра любого типа Φ над кольцом нечетной характеристики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. **Боревич З.И.** Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1976. Т. 64. С. 12–29.
3. **Левчук В.М.** Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
4. **Нужин Я.Н.** Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сиб. федерал. ун-та. 2011. Т. 4, № 4. С. 527–535.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/17kt.pdf.
6. **Левчук В.М.** Порождающие множества корневых элементов групп Шевалле над локально конечным полем // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 48–58.
7. **Койбаев В.А.** Элементарные сети в линейных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
8. **Carter R.** Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972. 332 p.
9. **Dickson L.E.** Linear groups with an exposition of the Galois field theory. Leipzig: Teubner, 1901. 326 p.
10. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 520 p.
11. **Боревич З.И.** О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1978. Т. 75. С. 22–31.

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Поступила 27.12.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.658.4

ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЧАСТНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА ЭРРОУ — ДЕБРЕ — СТОУНА[1]

Л. Д. Попов

Предложены итеративные методы нахождения равновесных цен в модели К. Эрроу — Ж. Дебре с мультипликативными функциями полезности Р. Стоуна, сходящиеся при слабых начальных предположениях. Методы имеют содержательную экономическую интерпретацию. Представлены строгие теоремы сходимости, подтвержденные результатами численных экспериментов. Работа продолжает исследования автора, проведенные ранее для мультипликативных функций Кобба — Дугласа.

Ключевые слова: экономическое равновесие, модель обмена, мультипликативная функция полезности, методы разложения.

L. D. Popov. Iterative methods for equilibrium search in the partial Arrow–Debreu–Stone exchange model.

Iterative methods are proposed for equilibrium price search in the Arrow–Debre model with Stone's multiplicative utility functions. The methods converge under weak initial assumptions and allow for a conceptual interpretation in economic terms. Strict convergence theorems supported by numerical experiments are presented. The paper continues the author's investigations conducted earlier for Cobb–Douglas multiplicative functions.

Keywords: economic equilibrium, exchange model, multiplicative utility function, split methods.

1. Модель обмена Эрроу — Дебре

Рассмотрим простейшую формулировку модели рыночного обмена по Эрроу — Дебре [1]. Введем следующие обозначения:

$i \in \overline{1,m}$ — номера участников экономики обмена;
$j \in \overline{1,n}$ — номера различных типов товаров и услуг, предназначенных для обмена;
$B = (b_{ij})_{m\times n} \geq 0$ — матрица начальных запасов товаров у участников экономики обмена;
$u_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ — функции полезности каждого из участников экономики обмена;
$p = (p_1, \dots, p_n) > 0$ — вектор цен на товары и услуги.

Функции полезности являются удобным инструментом, позволяющим описывать предпочтения участников обмена в пространстве товаров и услуг и предсказывать совокупный спрос на товары и услуги при фиксированном векторе цен на них. Этот спрос представляет собой набор вектор-функций $D_i(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, каждая из которых есть решение (оптимальный вектор) оптимизационной задачи вида

$$D_i(p) = (d_{i1}(p), \dots, d_{in}(p)) := \arg\max \Big\{ u_i(x_1, \dots, x_n)\colon \sum_{j=1}^n p_j\, x_j \leq \sum_{j=1}^n p_j\, b_{ij},\ \text{все } x_j \geq 0 \Big\}.$$

Содержательно это означает, что каждый участник обмена продает на рынке свои товары в соответствии с установившимися ценами на них и на вырученные деньги приобретает новые товары, стремясь максимизировать значение своей функции полезности.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00273) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1, 12-П-1-1023 и 12-П-1-1034).

О п р е д е л е н и е. Вектор цен $\bar{p} > 0$ называется *точкой равновесия* в модели Эрроу — Дебре, если

$$\sum_{i=1}^{m} D_i(\bar{p}) = h, \tag{1.1}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — вектор суммарных товарных запасов участников рынка. Обычно предполагается, что все $h_j = b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{mj} > 0$.

Различные предположения относительно начального распределения товаров и услуг и свойств функций полезности, при которых равновесные цены существуют, можно найти в [2–11] и др.

2. Мультипликативные функции полезности Р. Стоуна

В работе автора [12] был исследован случай, когда в модели Эрроу — Дебре предпочтения участников обмена описывались мультипликативными функциями Кобба — Дугласа. Это позволяло переписать соотношения модели в виде системы линейных алгебраических уравнений и применить для их решения классический метод расщепления. В данной работе эти идеи будут распространены на более общий случай функций полезности Р. Стоуна. А именно, пусть

$$u_i(x) = \prod_{j=1}^{n} (x_j - a_{ij})^{\sigma_{ij}},$$

где все $\sigma_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} = 1$, $a_{ij} \geq 0$ — минимальное количество j-го товара, необходимое i-му участнику обмена. Нетрудно видеть, что при этом предположении функции спроса примут вид

$$d_{ij}(p) = a_{ij} + \sigma_{ij} \sum_{s=1}^{n} p_s \frac{(b_{is} - a_{is})}{p_j}, \qquad i \in \overline{1, m}, \qquad j \in \overline{1, n}.$$

Их конкретная форма позволяет переписать условие равновесия цен (1.1) как задачу отыскания положительного решения системы однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \sigma_{ij}\, p_s (b_{is} - a_{is}) = \Big(h_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \Big) p_j, \qquad j \in \overline{1, n}.$$

Те же уравнения в векторно-матричной записи принимают вид

$$(H - S^T(B - A) - C)\, p = 0, \qquad p > 0, \tag{2.1}$$

где $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $C = \mathrm{diag}(A^T e)_{n\times n}$, $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$, $S = (\sigma_{ij})_{m\times n}$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $e = (1, \ldots, 1)$.

Предположение 1. *Суммарные запасы товаров с избытком покрывают минимальные требования участников обмена, т. е.* $g = h - A^T e > 0$.

В дальнейшем мы усилим это предположение.

Будем предполагать систему (2.1) совместной. Заметим, что если система (2.1) имеет хотя бы одно положительное решение, то таких решений бесконечно много и их совокупность образует выпуклый конус (с “выколотой” вершиной).

Введенные матрицы удовлетворяют специфическим условиям

$$Se = e, \qquad e^T C = e^T A, \qquad B^T e = h.$$

Поэтому

$$e^T(H - S^T(B - A) - C) = h^T - e^T B = 0,$$

так что $\operatorname{rank}(H - S^T(B - A) - C) < n$ и однородная квадратная система уравнений (2.1) является вырожденной.

Поскольку, как только что было показано, сумма строк матрицы коэффициентов системы (2.1) равна нулю, любое из уравнений системы можно удалить из нее без ущерба для ее решения. Удаляя лишнее (например, последнее) уравнение из системы (2.1), естественно попытаться заменить его тем или иным условием, которое, с одной стороны, было бы экономически содержательным, а с другой — сделало бы исследуемую математическую модель более регулярной.

Как и в своей предыдущей работе, мы рассмотрим два возможных варианта.

В первом варианте заменим последнее соотношение системы (2.1) уравнением

$$h^T p = \gamma, \tag{2.2}$$

где $\gamma > 0$ — фиксированная совокупная стоимость всех товаров и услуг на рынке, определяемая, например, обращающейся на нем денежной массой. В этом случае система (2.1) примет вид

$$(\hat{Q} - \hat{S}^T(B - A))\, p = \hat{f}, \qquad p > 0, \tag{2.3}$$

где

$$\hat{Q} = \left(\begin{array}{ccc|c} g_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & g_{n-1} & 0 \\ \hline h_1 & \dots & h_{n-1} & h_n \end{array}\right), \qquad \hat{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_{1,1} & \dots & \sigma_{1,n-1} & 0 \\ \sigma_{2,1} & \dots & \sigma_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m,1} & \dots & \sigma_{m,n-1} & 0 \end{array}\right), \qquad \hat{f} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \gamma \end{array}\right).$$

Во втором варианте будем предполагать, что последний товар является своего рода стоимостным эталоном (играет роль денег) и потому имеет постоянную номинальную цену $\omega > 0$, т. е. заменим последнее уравнение соотношением $p_n = \omega$. Соответственно, модифицированная система примет вид

$$(\check{Q} - \check{S}^T(B - A))\, p = \check{f}, \qquad p > 0, \tag{2.4}$$

где

$$\check{Q} = \left(\begin{array}{ccc|c} g_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & g_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \check{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_{1,1} & \dots & \sigma_{1,n-1} & 0 \\ \sigma_{2,1} & \dots & \sigma_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m,1} & \dots & \sigma_{m,n-1} & 0 \end{array}\right), \qquad \check{f} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \omega \end{array}\right).$$

Обе выписанные системы разрешимы одновременно с системой (2.1). Для их численного решения попробуем адаптировать классический метод расщепления (см., например, [13, §7.4]), который в этой ситуации имеет примечательную экономическую интерпретацию.

3. Алгоритм с фиксированной суммарной стоимостью благ

Обратимся к системе (2.3). Обозначим $M = S^T(B - A) + C$ и рассмотрим итерационный процесс вида

$$H\, p^{k+1} = M\, p^k, \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{3.1}$$

где начальное приближение $p^0 > 0$ произвольно, $\gamma = \langle h, p^0 \rangle$.

Прежде чем перейти к обоснованию сходимости выписанного процесса, заметим, что уравнение (2.2) не учтено в нем явно. Однако оно учтено неявно, так как, умножая обе части соотношений (3.1) слева на вектор e^T и замечая, что $e^T S^T = e^T$, $e^T C = e^T A$, получаем

$$h^T p^{k+1} = [\, e^T S^T(B - A) + e^T A \,]\, p^k = e^T B\, p^k = h^T p^k,$$

т. е.

$$h^T p^{k+1} = h^T p^k = h^T p^{k-1} = \dots = h^T p^0 = \gamma.$$

Поэтому для любой предельной точки $\bar{p}$ процесса (3.1) также имеем равенство $h^T\bar{p} = \gamma$.

Пусть теперь $\bar{p}_\gamma > 0$ — искомое решение системы (2.3). Тогда последовательность отклонений $\zeta^k = p^k - \bar{p}_\gamma$ лежит в подпространстве $\mathcal{L}_0 = \{x : h^T x = 0\}$, удовлетворяет аналогичным соотношениям

$$H\,\zeta^{k+1} = M\,\zeta^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.2}$$

и сходится к нулю тогда и только тогда, когда спектральный радиус $\hat{\varrho}$ матрицы $K = H^{-1}M$ относительно подпространства $\mathcal{L}_0$ меньше 1 (см., например, [13], теорема 7F). Нам, однако, удобнее, сделав замену переменных $\xi = H\zeta$, свести вопрос о сходимости процесса (3.2) к вопросу о сходимости промасштабированного процесса

$$\xi^{k+1} = MH^{-1}\,\xi^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

и тем самым заменить исследование спектрального радиуса $\hat{\varrho}$ матрицы K относительно подпространства $\mathcal{L}_0$ исследованием спектрального радиуса ϱ матрицы $N = MH^{-1}$ относительно подпространства $\mathcal{L} = \{x : e^T x = 0\}$.

Предположение 2. *Матрица $M = S^T(B - A) + C$ поэлементно неотрицательна.*

Предположение 2 поглощает предположение 1 и в экономическом плане означает, что при любых сложившихся на рынке ценах у его участников имеется возможность приобрести минимально необходимое количество товаров и услуг.

Чтобы оценить спектральный радиус ϱ, применим технику из нашей предыдущей работы и изучим структуру расположения ненулевых элементов матрицы N или, что то же, матрицы $M = (\mu_{ij})$. Очевидно, что $\mu_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы один участник рынка владеет товаром j и нуждается в товаре i, т. е. $\exists s : (b_{sj} > 0)\,\&\,(\sigma_{si} > 0)$. Назовем такую пару товаров непосредственно обмениваемыми и будем говорить, что товары i и j обмениваемы опосредованно, если существует цепочка номеров $j_1, j_2, \ldots, j_r$ такая, что $i = j_1$, $j_r = j$ и товары в промежуточных парах (j_{q-1}, j_q) обмениваемы непосредственно.

Предположение 3. *В рассматриваемой экономике любая пара товаров обмениваема (опосредованно или непосредственно).*

В математической интерпретации предположение 3 означает условие связности ориентированного графа $\Gamma = (U, V)$, вершины $u \in U$ которого отвечают номерам товаров и услуг, обращающихся внутри экономики, причем пара вершин i, j связана дугой, т. е. $(i, j) \in V$ тогда и только тогда, когда $\mu_{ij} > 0$.

Теорема 1. *В предположениях 2–3 спектральный радиус матрицы N относительно подпространства $\mathcal{L}$ меньше 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, как уже отмечалось ранее, подпространство $\mathcal{L}$ переводится линейным оператором $y = Nx$ в себя. Поэтому спектральный радиус этого оператора относительно подпространства $\mathcal{L}$ не превосходит его глобального спектрального радиуса. Последний же оценивается произвольной матричной нормой матрицы $N = (\nu_{ij})$, например, столбцовой, которая имеет вид

$$||N|| = \max_j \sum_{i=1}^n |\nu_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^n \nu_{ij} = 1$$

(так как выполняются соотношения $e^T N = e^T[S^T(B - A) + C]H^{-1} = [e^T B - e^T A + e^T C]H^{-1} = e^T BH^{-1} = h^T H^{-1} = e^T$). Во-вторых, если $|\lambda| = 1$ и x — ненулевой собственный вектор оператора $y = Nx$ относительно подпространства $\mathcal{L}$, отвечающий собственному значению λ, т. е. если

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n \nu_{ij} x_j \quad \forall i,$$

то все неравенства-следствия

$$|\lambda|\,|x_i| = |x_i| \le \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij}\,|x_j| \quad \forall i, \tag{3.3}$$

должны на самом деле выполняться как равенства. В противном случае, складывая их вместе, получаем противоречие

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \nu_{ij}\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \nu_{ij}\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Но выполнимость (3.3) в виде равенств возможна только при очень специфических условиях. Так, если хотя бы один $|x_i| = 0$, то в первую очередь равны нулю все $|x_j|$, отвечающие ненулевым коэффициентам i-й строки матрицы N. Каждый такой $|x_j|$ в свою очередь обусловливает равенство нулю следующей серии компонент вектора x, отвечающих ненулевым коэффициентам ν_{js} той же самой матрицы, так что все новые и новые $|x_s| = 0$. Ввиду связности графа Γ это приводит нас к заключению, что абсолютно все компоненты вектора x нулевые, что, однако, противоречит понятию собственного вектора линейного оператора. Следовательно, вектор x вовсе не имеет нулевых компонент, и все $|x_i| > 0$. Но тогда выполнимость (3.3) в виде равенств и связность графа Γ влекут "сонаправленность" всех (вообще говоря, комплексных) компонент x_j, т. е. существуют такие положительные вещественные множители θ_{ij}, что

$$x_j = \theta_{ij}\,x_i, \qquad \theta_{ij} > 0 \qquad (\forall i, j).$$

Это делает равенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ невозможным, и, следовательно, $x \notin \mathcal{L}$. Таким образом, собственные числа λ сужения оператора $y = Nx$ на подпространство $\mathcal{L}$ не могут иметь модуль, равный 1. Остается единственная возможность $|\lambda| < 1$, что и требовалось.

Следствие 1. *В предположениях* 2–3 *и при условии разрешимости системы* (2.1) *итерационный процесс* (3.1) *при любом начальном* $p^0 > 0$ *сходится к единственному решению* $\bar{p}_\gamma > 0$ *системы* (2.3), *отвечающему условию* $\gamma = \langle c, p^0\rangle$.

Остановимся на возможной экономической интерпретации процесса (3.1). Последний весьма достоверно имитирует работу торговых посредников, скупающих товары у производителей и перепродающих их потребителям в рамках экономики обмена. Посредники имеют возможность отслеживать интенсивность финансовых потоков, направляемых потребителями на приобретение товаров каждой категории, и интенсивность поступления этих товаров от их производителей в натуральном выражении. Стремясь к равномерной заполненности своих складских помещений товарами, предназначенными для обмена, посредники так устанавливают розничные цены на них, чтобы уравнять интенсивность входящих и исходящих товарных потоков.

4. Алгоритм с фиксированной ценой одного из товаров

Обратимся теперь к системе (2.4). Еще раз сосредоточим внимание на блочном строении входящих в нее матриц и векторов. Введем множество индексов $\Xi = \{1, \ldots, n-1\}$ и обозначим:

A_Ξ — матрица, составленная из первых $n-1$ столбцов матрицы A;
B_Ξ — матрица, составленная из первых $n-1$ столбцов матрицы B;
C_Ξ — матрица, составленная из первых $n-1$ строк и $n-1$ столбцов матрицы C;
H_Ξ — матрица, составленная из первых $n-1$ строк и $n-1$ столбцов матрицы H;
c_Ξ — вектор из диагональных элементов матрицы C_Ξ;
h_Ξ — вектор из диагональных элементов матрицы H_Ξ;

S_Ξ — матрица, составленная из первых $n-1$ столбцов матрицы S;
p_Ξ — вектор, составленный из первых $n-1$ компонент вектора p.

Ниже приведена наглядная иллюстрация структуры исходных данных задачи:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_\Xi & 0 \\ \hline 0 & c_n \end{array}\right), \quad H = \left(\begin{array}{c|c} H_\Xi & 0 \\ \hline 0 & h_n \end{array}\right), \quad A = \left(\begin{array}{c|c} A_\Xi & A_n \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_\Xi & B_n \end{array}\right),$$

$$S = \left(\begin{array}{c|c} S_\Xi & S_n \end{array}\right), \quad p = \left(\begin{array}{c} p_\Xi \\ \hline p_n \end{array}\right).$$

Используя новые обозначения, можно переписать систему (2.4) в виде

$$\begin{cases} H_\Xi\, p_\Xi = S_\Xi^T\,(B_\Xi - A_\Xi)\, p_\Xi + C_\Xi\, p_\Xi + f, \\ \qquad p_n \equiv \omega > 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $f = S_\Xi^T\,(B_n - A_n)\,\omega$.

Нам понадобится

Предположение 4. *Элементы S_n последнего столбца матрицы S (столбца, отвечающего товару с фиксированной стоимостью) положительны.*

Предположение 4 в экономическом плане означает заинтересованность каждого участника экономики в данном товаре, а в математическом — обеспечивает выполнение следующих соотношений:

$$0 \le S_\Xi e < Se = e, \qquad e^T A_\Xi = c_\Xi^T, \qquad e^T B_\Xi = h_\Xi^T, \qquad e^T B_\Xi H_\Xi^{-1} = e^T. \tag{4.2}$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{cases} H_\Xi\, p_\Xi^{k+1} = [\, S_\Xi^T\,(B_\Xi - A_\Xi) + C_\Xi\,]\, p_\Xi^k + f, \qquad k = 0, 1, \ldots, \\ \qquad p_n^{\,t} \equiv \omega > 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Этот процесс является полным аналогом итерационного процесса (3.1) и имеет ту же самую экономическую интерпретацию с той лишь разницей, что теперь один из товаров (последний) выступает в роли стоимостного эталона (денег).

Теорема 2. *Пусть система* (2.1) *совместна и выполнены предположения* 2 *и* 4. *Тогда процесс* (4.3) *при любом начальном $p_\Xi^0 > 0$ сходится к единственному решению $\bar p_\omega > 0$ системы* (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и ранее, используя переход к вспомогательным переменным $y = H_\Xi\, p_\Xi$, получим эквивалентный по сходимости итерационный процесс

$$y^{k+1} = [\, S_\Xi^T (B_\Xi - A_\Xi) + C_\Xi\,] H_\Xi^{-1}\; y^k + f, \qquad k = 0, 1, \ldots\,.$$

Покажем, что последние соотношения генерируют сходящуюся последовательность. В самом деле, пусть $\bar p_\Xi$ — вектор из первых $n-1$ компонент искомого решения. Для того чтобы отклонение $\zeta^k = y^k - H_\Xi \bar p_\Xi$ стремилось к нулю при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы спектральный радиус $\bar\varrho$ матрицы $W = [\, S_\Xi^T (B_\Xi - A_\Xi) + C_\Xi\,] H_\Xi^{-1} = (w_{ij})$ был меньше 1. Как известно, последний оценивается произвольной матричной нормой, например, столбцовой $||W|| = \max\limits_i \sum_{j=1}^n w_{ij}$. Поскольку все матрицы неотрицательны, то в силу (4.2)

$$0 \,\le\, e^T W = e^T S_\Xi^T B_\Xi H_\Xi^{-1} < e^T B_\Xi H_\Xi^{-1} = e^T,$$

и потому $||W|| < 1$. Обоснование сходимости рассматриваемого процесса завершено.

5. Заключение

В настоящей работе исследован вариант известной модели обмена Эрроу — Дебре, в котором поведение ее участников описывается функцией полезности Р. Стоуна. Последнее обстоятельство позволило переформулировать соотношения модели в виде системы однородных линейных алгебраических уравнений неполного ранга. Для отыскания положительного решения этой системы предложены два варианта классического алгоритма расщепления. Приведены достаточные условия сходимости к равновесным ценам, дана содержательная экономическая интерпретация итерационного процесса. Работа продолжает исследования [12], где сходные вопросы решались для случая функций Кобба — Дугласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arrow K.J., Debreu G.** Existence of equilibrium for a competitive economy // Econometrica. 1954. Vol. 25. P. 265–290.
2. **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 835 с.
3. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 519 с.
4. **Ланкастер К.** Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1972. 464 с.
5. **Макаров В.Л., Рубинов А.М.** Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973. 338 с.
6. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и математическая экономика. М.: Прогресс, 1975. 597 с.
7. **Shafer W.J., Sonnenschein H.F.** Some theorems on the existence of competitive equilibrium // J. Economic Theory. 1975. Vol. 11. P. 83–93.
8. **Экланд И.** Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983. 248 с.
9. **Eaves B.C.** Finite solution of pure trade markets with Cobb — Douglas utilities // Math. Program. Study. 1985. Vol. 23. P. 226–239.
10. **Aliprantis C.D., Brown D.J., Burkinshaw O.** Existence and optimality of competitive equilibria. Berlin: Springer, 1990. 296 p.
11. **Полтерович В.М.** Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990. 254 с.
12. **Попов Л.Д.** К методам отыскания равновесия в моделях Эрроу — Дебре // Динамика неоднородных систем: Тр. Ин-та системного анализа РАН. 2008. Т. 30, вып. 12. С. 116–124.
13. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1989. 446 с.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 12.03.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕТОК РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛУГРУПП БЕЗ ИДЕМПОТЕНТОВ[1]

А. Л. Попович

В работе доказывается, что всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, компактные элементы которой образуют решетку с единицей, представима как решетка конгруэнций подходящей полугруппы без идемпотентов. Следствием этого является утверждение о том, что всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, множество компактных элементов которой не более чем счетно, также представима решеткой конгруэнций полугруппы без идемпотентов.

Ключевые слова: решетка конгруэнций, полугруппа, представление решеток.

A. L. Popovich. Representation of lattices by congruence lattices of semigroups without idempotents.

It is proved that every distributive algebraic lattice such that its compact elements form a lattice with unit can be represented as the congruence lattice of some semigroup without idempotents. This implies that every distributive algebraic lattice with at most countably many compact elements is also representable as the congruence lattice of a semigroup without idempotents.

Keywords: congruence lattice, semigroup, representation of lattices.

1^0. **Введение.** В 1963 г. Г. Гретцером и Т. Шмидтом была доказана знаменитая теорема о том, что всякая алгебраическая решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой алгебры [6]. Однако ограничения, накладываемые на сигнатуру рассматриваемых алгебр, значительно усложняют ситуацию. Из работы Фриза, Лэмпа и Тейлора [4] следует, что существует модулярная решетка, не представимая решеткой конгруэнций никакой алгебры счетной или конечной сигнатуры. Тейлор в [13] привел пример счетной алгебраической решетки, которая не изоморфна решетке конгруэнций никакой полугруппы. Основные результаты и проблемы в этом направлении собраны в обзоре [8].

Отметим, что вопрос о возможности представления произвольной дистрибутивной алгебраической решетки решеткой конгруэнций группоида или, в частности, полугруппы остается открытым [8].

Наложение ограничений на класс рассматриваемых решеток дает хорошие результаты. Лэмп в [7] показал, что всякая алгебраическая решетка, в которой единица является компактным элементом, изоморфна решетке конгруэнций некоторого группоида. Известно, что дистрибутивная алгебраическая решетка, компактные элементы которой образуют подрешетку, изоморфна решетке конгруэнций некоторой решетки с нулем (см. [12]), откуда, как заметил Р. Маккензи (см. [8]), следует представимость этой решетки решеткой конгруэнций группоида.

Данная работа является продолжением работы [3], в которой было показано, что всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, множество компактных элементов которой образует подрешетку с единицей, изоморфна решетке конгруэнций подходящей полугруппы. Здесь, развивая технику работы [3], мы усилим этот результат и докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой компактные элементы образуют подрешетку с единицей, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

[1]Работа выполнена при поддержке гранта “Исследования по теории алгебраических систем и ее приложения в компьютерных науках и биоинформатике” (проект 2.1.1/13995), а также РФФИ “Решеточные свойства полугрупп и полугрупповых многообразий” (проект 10-01-00524).

Теорема 2. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой мощность множества компактных элементов не более чем счетна, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

В п. 2^0 мы обговариваем обозначения и напоминаем читателю о конструкциях работы [3]. Пункт 3^0 содержит вспомогательные технические утверждения. Доказательство теоремы 1 приводится в п. 4^0. В п. 5^0 мы показываем, как из теоремы 1 вытекает теорема 2.

2^0. Мы придерживаемся стандартных понятий теорий полугрупп и решеток, которые можно найти в книгах [2; 5]. Многие конструкции, появляющиеся в доказательстве, приведены в работе [3].

Если $\mathcal{P}$ есть $\vee$-полурешетка с нулем, то ее идеалом называется непустое подмножество элементов, замкнутое относительно объединения элементов и взятия меньших элементов. Через $J(\mathcal{P})$ обозначается решетка всех идеалов полурешетки $\mathcal{P}$.

Для произвольной алгебраической решетки L множество L_c всех ее компактных элементов образует $\vee$-полурешетку с нулем относительно частичного порядка в L. Хорошо известно (см. [5]), что L изоморфна решетке идеалов $J(L_c)$.

Интервал в решетке между любыми двумя ее элементами $a \leqslant b$ обозначается через $[a, b]$.

Через $Con\ S$ мы обозначаем решетку конгруэнций полугруппы S, а через $\Theta_S(x, y)$ (или проще $\Theta(x, y)$) — наименьшую конгруэнцию, склеивающую элементы $x, y \in S$.

Через $F(X)$ обозначается свободная полугруппа с множеством X свободных порождающих, а через $S * T$ — свободное произведение полугрупп S и T. Канонические представления элементов в $F(X)$ и $S * T$ мы называем *словами.*

Существенную роль в статье играет понятие полугрупповой функции расстояния, определяемое ниже.

Пусть $\mathcal{P}$ — произвольная $\vee$-полурешетка с нулем и S — полугруппа. Отображение $\delta\colon S \times S \longrightarrow \mathcal{P}$ мы называем *полугрупповой функцией расстояния на* S, если выполняются следующие условия:

1) $\delta(x, x) = 0$ для любого $x \in S$;
2) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ для любых $x, y \in S$;
3) $\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) \vee \delta(z, y)$ для любых $x, y, z \in S$;
4) $\delta(xs, yt) \leqslant \delta(x, y) \vee \delta(s, t)$ для любых $x, y, s, t \in S$.

Легко видеть, что условие 4 может быть заменено на более простое условие

4′) $\delta(xs, ys) \leqslant \delta(x, y)$ и $\delta(sx, sy) \leq \delta(x, y)$ для любых $x, y, s \in S$.

Положим $O_\delta(a) = \{(x, y) \in S \times S \mid \delta(x, y) \leq a\}$ для любого элемента $a \in \mathcal{P}$. Очевидно, что $O_\delta(a)$ есть конгруэнция на полугруппе S. В более общем случае, для произвольного идеала $I \in J(\mathcal{P})$ определим $O_\delta(I) = \{(x, y) \in S \times S \mid \delta(x, y) \in I\}$. Легко видеть, что $O_\delta(I)$ — также конгруэнция на S и $O_\delta(I) = \bigvee(O_\delta(a) \mid a \in I)$ в $Con\ S$.

Нам понадобится следующее фундаментальное предложение.

Предложение 1 [3, предложение 1]. *Пусть $\delta\colon S \times S \to \mathcal{P}$ — полугрупповая функция расстояния, для которой выполнены следующие условия.*

1) *Для любых $a, b \in \mathcal{P}$ и $x, y \in S$, если $\delta(x, y) \leqslant a \vee b$, то $(x, y) \in O_\delta(a) \vee O_\delta(b)$.*
2) *δ сюръективно.*
3) *Для любых $(x, y), (z, t) \in S \times S$, если $\delta(x, y) \leqslant \delta(z, t)$, то $(x, y) \in O_\delta(0) \vee \Theta(z, t)$.*

Тогда отображение $O_\delta\colon J(\mathcal{P}) \longrightarrow ConS$ есть изоморфизм решетки $J(\mathcal{P})$ на интервал $[O_\delta(0), S \times S]$ в $Con\ S$.

Следующее утверждение является ключевым в доказательстве теоремы. Оно является усиленным вариантом [3, предложение 2].

Предложение 2. *Пусть S — полугруппа без идемпотентов, $\mathcal{P}$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей и $\delta\colon S \times S \longrightarrow \mathcal{P}$ — полугрупповая функция расстояния такая, что $\delta(xyx, x) > 0$ для любых $x \in S, y \in S^1$.*

Тогда для любых пар $(a, b), (c, d) \in S \times S$ с условием $\delta(a, b) \leqslant \delta(c, d)$ существуют полугруппа без идемпотентов $\tilde{S}$ и полугрупповая функция расстояния $\tilde{\delta}\colon \tilde{S} \times \tilde{S} \longrightarrow \mathcal{P}$ такие, что S является подполугруппой в $\tilde{S}$, $\delta = \tilde{\delta}|_{S\times S}$, $\tilde{\delta}(xyx, x) > 0$ для любых $x \in \tilde{S}$, $y \in \tilde{S}^1$ и $(a, b) \in O_{\tilde{\delta}}(0) \vee \Theta(c, d)$ в $\tilde{S}$.

Доказательство. Рассмотрим свободную полугруппу $F(u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w})$ со свободными порождающими $u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w}$ и свободное произведение $\tilde{S} = S * F(u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w})$.

По заданным парам $(a, b), (c, d) \in S \times S$, где $\delta(a, b) \leqslant \delta(c, d)$, построим граф $G = (\tilde{S}, E)$ с помеченными ребрами следующим образом. Полугруппа $\tilde{S}$ будет множеством вершин графа. Ребра из E удобно представлять в виде троек вида (p, e, q), где $e \in \mathcal{P}$ — метка ребра, соединяющего вершины p и q из $\tilde{S}$. При этом две вершины могут соединяться несколькими ребрами с различными метками. Положим $(p, e, q) \in E$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

0) $p = q$ и $e = 0$;

1) $p = sxt$, $q = syt$ и $e = \delta(x, y)$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$;

2) $p = suc\bar{u}t$, $q = sat$ и $e = 0$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ (или симметрично);

3) $p = swd\bar{w}t$, $q = sbt$ и $e = 0$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ (или симметрично);

4) либо $p = sud\bar{u}t$, $q = svc\bar{v}t$, либо $p = svd\bar{v}t$, $q = swc\bar{w}t$, и $e = 0$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ (или симметрично).

Если для тройки $(p, e, q) \in E$ выполнено условие j $(0 \leqslant j \leqslant 4)$, то мы будем говорить о *типе* j соответствующего ребра. Нам будет удобнее считать ребра типа 0 ребрами типа 1.

Мы также будем записывать ребро $(p, e, q) \in E$ типа j в виде $p \xleftrightarrow[j]{e} q$. Впрочем, мы будем опускать символы над или под стрелкой в тех случаях, когда они для нас неважны. Число всех вхождений букв $u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w}$ в записи слова $p \in \tilde{S}$ будем называть *весом* p и обозначать $w(p)$; в частности, $w(p) = 0$ тогда и только тогда, когда $p \in S$. Число всех вхождений букв $v, \bar{v}$ в записи слова $p \in \tilde{S}$ будем обозначать $w_v(p)$.

Для удобства будем рассматривать множество $R = \{(x, y) \mid x, y \in S\} \cup \{(uc\bar{u}, a), (a, uc\bar{u}), (wd\bar{w}, b), (b, wd\bar{w}), (ud\bar{u}, vc\bar{v}), (vc\bar{v}, ud\bar{u}), (vd\bar{v}, wc\bar{w}), (wc\bar{w}, vd\bar{v})\}$.

Будем рассматривать пустое слово — присоединенную к полугруппе $\tilde{S}$ единицу 1. Полугруппы $\tilde{S}$ и S вместе с 1 будем обозначать $\tilde{S}^1$ и S^1 соответственно.

Лемма 1 [3, лемма 1]. *Пусть $p \xleftrightarrow[j_1]{e_1} q \xleftrightarrow[j_1]{e_2} r$ и $p = sg't$, $q = sh't = s'g''t'$, $r = s'h''t'$, где $(g', h'), (g'', h'') \in R$ для некоторых $s, t, s', t' \in \tilde{S}^1$. Пусть подслова h' и g'' в записи слова q не пересекаются. Тогда существует слово $q' \in \tilde{S}$ такое, что $p \xleftrightarrow[j_2]{e_2} q' \xleftrightarrow[j_1]{e_1} r$.*

Через $H(p, q)$ обозначим множество всех путей от вершины p до вершины q в графе $G = (\tilde{S}, E)$. Если Q — путь из p в q вида

$$p = p_0 \xleftrightarrow{e_1} p_1 \xleftrightarrow{e_2} p_2 \xleftrightarrow{e_3} \cdots \xleftrightarrow{e_n} p_n = q\,, \tag{0.1}$$

то положим $e(Q) = e_1 \vee \cdots \vee e_n$.

Два пути из $H(p, q)$ назовем *смежными* (*k-смежными*), если один получен из другого заменой участка $p_{i-1} \xleftrightarrow[j_1]{e_1} p_i \xleftrightarrow[j_2]{e_2} p_{i+1}$ на участок $p_{i-1} \xleftrightarrow[j_2]{e_2} p'_i \xleftrightarrow[j_1]{e_1} p_{i+1}$, где $p_{i-1} = sg't$, $p_i = sh't = s'g''t'$, $p_{i+1} = s'h''t'$, причем $(g', h'), (g'', h'') \in R$ и $s, t, s', t' \in \tilde{S}^1$, подслова h' и g'' в записи слова q не пересекаются и $i \neq k$. Два пути P и P' назовем *эквивалентными* (*k-эквивалентными*), если существует последовательность путей $P = Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n = P'$

такая, что пути Q_i и Q_{i+1} смежны (k-смежны) для всякого $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Из леммы 1 следует, что если пути P и Q эквивалентны или $k(P)$ эквивалентны, то $e(P) = e(Q)$.

Рассмотрим множество $N(p,q)$ всех путей P из $H(p,q)$, удовлетворяющих следующим условиям.

M1. Существует индекс $k(P) \in \{0,...,n\}$ такой, что $w(p_i) \geqslant w(p_{i+1})$, $w_v(p_i) \geqslant w_v(p_{i+1})$ при $i < k(P)$ и $w(p_i) \leqslant w(p_{i+1})$, $w_v(p_i) \leqslant w_v(p_{i+1})$ при $i \geqslant k(P)$.

M2. Нет подпутей вида $sxt \longleftrightarrow syt \longleftrightarrow szt$, $svc\bar{v}t \longleftrightarrow sud\bar{u}t \longleftrightarrow svc\bar{v}t$, $svd\bar{v}t \longleftrightarrow swc\bar{w}t \longleftrightarrow svd\bar{v}t$ для любых $s,t \in \tilde{S}^1, x,y,z \in S$.

Теперь определим $M(p,q)$ как множество путей P из $N(p,q)$ таких, что всякий путь, $k(P)$-эквивалентный P, лежит в $N(p,q)$.

Лемма 2 [3, лемма 2]. *Множество $M(p,q)$ конечно. Для любого $Q \in H(p,q)$ существует $P \in M(p,q)$ с условием $e(P) \leqslant e(Q)$.*

Положим $\tilde{\delta}(p,q) = \bigwedge\{e(Q) \mid Q \in H(p,q)\}$. В частности, имеем $\tilde{\delta}(p,q) = 1$, если $H(p,q) = \varnothing$. С учетом леммы 2 отображение $\tilde{\delta}$ определено корректно. Убедимся в том, что $\tilde{\delta}$ является полугрупповой функцией расстояния.

По определению для любого $p \in \tilde{S}$ имеем тривиальный путь $p \xleftrightarrow{0} p$, и, значит, $\tilde{\delta}(p,p) = 0$. Симметричность $\tilde{\delta}$ очевидна. Проверим неравенство треугольника $\tilde{\delta}(p,q) \leqslant \tilde{\delta}(p,r) \vee \tilde{\delta}(r,q)$ для любых $p,q,r \in \tilde{S}$. Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда $\tilde{\delta}(p,r) \neq 1$ и $\tilde{\delta}(r,q) \neq 1$, т.е. множества $H(p,r)$ и $H(r,q)$ непусты. Из двух путей $Q_1 \in H(p,r)$ и $Q_2 \in H(r,q)$ легко составить путь $Q \in H(p,q)$, причем $e(Q) = e(Q_1) \vee e(Q_2)$. Поэтому, используя дистрибутивность P, мы получаем $\tilde{\delta}(p,r) \vee \tilde{\delta}(r,q) = \bigwedge\{e(Q') \mid Q' \in H(p,r)\} \vee \bigwedge\{e(Q'') \mid Q'' \in H(r,q)\} = \bigwedge\{e(Q') \vee e(Q'') \mid Q' \in H(p,r), Q'' \in H(r,q)\} \geqslant \bigwedge\{e(Q) \mid Q \in H(p,q)\} = \tilde{\delta}(p,q)$. Таким образом, мы проверили, что $\tilde{\delta}$ есть функция расстояния на $\tilde{S}$.

Осталось проверить, что для любых $p,q,r \in \tilde{S}$ выполнено $\tilde{\delta}(pr,qr) \leqslant \tilde{\delta}(p,q)$ и $\tilde{\delta}(rp,rq) \leqslant \tilde{\delta}(p,q)$. Действительно, из определения графа $G = (\tilde{S}, E)$ следует, что для произвольного ребра (p,e,q) и $r \in \tilde{S}$ тройка (pr,e,qr) снова является ребром, поэтому для любого $Q \in H(p,q)$ существует $P \in H(pr,qr)$, причем $e(Q) = e(P)$. Следовательно, либо $\tilde{\delta}(p,q) = 1 \geqslant \tilde{\delta}(pr,qr)$, либо $\tilde{\delta}(p,q) = \bigwedge\{e(Q) \mid Q \in H(p,q)\} \geqslant \bigwedge\{e(Q) \mid Q \in H(pr,qr)\} = \tilde{\delta}(pr,qr)$. Неравенство $\tilde{\delta}(rp,rq) \leq \tilde{\delta}(p,q)$ проверяется аналогично.

Если $x,y \in S$, то множество $M(x,y)$ содержит лишь один путь с весом $\delta(x,y)$, следовательно, $\tilde{\delta}(x,y) = \delta(x,y)$ для всех $x,y \in S$. Это означает, что $\tilde{\delta}|_{S \times S} = \delta$.

Из определения графа G следует, что $\tilde{\delta}(a, uc\bar{u}) = \tilde{\delta}(ud\bar{u}, vc\bar{v}) = \tilde{\delta}(vd\bar{v}, wc\bar{w}) = \tilde{\delta}(wd\bar{w}, b) = 0$. С другой стороны, $(uc\bar{u}, ud\bar{u}), (vc\bar{v}, vd\bar{v}), (wc\bar{w}, wd\bar{w}) \in \Theta(c,d)$. Поэтому $(a,b) \in O_{\tilde{\delta}}(0) \vee \Theta(c,d)$.

Для завершения доказательства предложения 2 нам осталось показать, что для любых $p \in \tilde{S}$ и $q \in \tilde{S}^1$ выполняется $\tilde{\delta}(p,pqp) > 0$. Этому полностью посвящен п. 3^0.

3^0. Все элементы полугруппы S лежат, очевидно, в одной компоненте связности графа G, которую мы обозначим через G_0. Нетрудно заметить, что если слова q,r принадлежат компоненте G_0, то их произведение qr лежит в этой же компоненте. Более того, если произведение qr принадлежит G_0 и один из сомножителей принадлежит G_0, то и другой сомножитель также принадлежит G_0. Слово $p \in \tilde{S} \backslash S$ назовем *простым*, если $p \in G_0$ и p не раскладывается в произведение слов, каждое из которых принадлежит G_0.

Лемма 3. *Пусть $p \in \tilde{S}^1$.*

1. *Если p — простое слово, то $p \in z\tilde{p}\bar{z}$, где $z \in \{u,w,v\}$ и $\tilde{p} \in G_0$.*

2. *Всякое слово $p \in G_0$ представимо в виде $p = x_1p_1x_2p_2 \dots x_np_nx_{n+1}$, где $p_1,p_2,\dots,p_n$ — простые слова, а $x_1,\dots,x_{n+1} \in S^1$. Это разложение определяется единственным образом.*

3. *Пусть слова $p,q \in G_0$ имеют разложения на простые слова $p = x_1p_1x_2p_2 \dots x_np_nx_{n+1}$ и $q = y_1q_1y_2q_2 \dots y_nq_ny_{n+1}$ и существует ребро $p = sft \longleftrightarrow sgt = q$ типа $2,3$ или 4, где $(f,g) \in R$, $s,t \in \tilde{S}^1$. Тогда для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$ слово f является подсловом p_i, а g является подсловом q_i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Ясно, что если $p = xr$, где $x \in S$, $r \in \tilde{S}$, то $r \in G_0$ и p не является простым. Значит, $p = zr$, где $z \in \{u, w, v\}$, а $r \in \tilde{S}$. Поскольку $p \in G_0$, существует путь от p до a. В этом пути существует ребро $ft \longleftrightarrow gt$, где (f, g) из R, $t \in \tilde{S}^1$. Рассмотрим самое первое такое ребро на нашем пути, тогда $z \in f$. Но из определения R следует, что $f = zx\bar{z}$ для некоторого $x \in S$. Следовательно, $p = z\tilde{p}\bar{z}r'$, где $\tilde{p} \in G_0$, а $r' \in \tilde{S}^1$. Ясно, что r' тоже должно принадлежать G_0, тогда из простоты p следует, что $r' = 1$.

2. С помощью тех же рассуждений, что и в п. 1, устанавливаем, что либо $p = xr$, либо $p = z\tilde{p}\bar{z}r$, где $x \in S$, $\tilde{p}$ — простое слово, а $r \in G_0$. Применив эти же рассуждения к подслову r, получим требуемое.

3. Из п. 1 следует, что для любого i выполняется $p_i = z_i\tilde{p}_i\bar{z}_i$, где $z_i \in \{u, v, w\}$ и $\tilde{p}_i \in G_0$. Без ограничения общности считаем, что f имеет ненулевой вес. Если f не является подсловом слова p_i ни для какого i, то, поскольку f имеет ненулевой вес, f пересекается с подсловами p_j и p_{j+1} для некоторого j. Но тогда f должно содержать подслово $\bar{z}x_{i+1}z_{i+1}$, что противоречит определению множества R. Следовательно, f является подсловом некоторого слова p_i, но тогда и g тоже, очевидно, является подсловом слова q_i.

Лемма 4. *Пусть путь $P \in H(p, q)$ имеет вид $p = p_0 \longleftrightarrow p_1 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow p_n = q$. Тогда выполнены следующие условия.*

1. *Для любого $0 \leqslant i \leqslant n$ имеют место разложения $p_i = s_1p_1^i s_2 p_2^i \ldots p_m^i s_{m+1}$, где $p_j^i \in G_0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, а $s_j \in \tilde{S}^1$ при $1 \leqslant j \leqslant m+1$.*

2. *Для любого ребра $p_i = sft \longleftrightarrow sgt = p_{i+1}$, где $(f, g) \in R$ и $s, t \in \tilde{S}^1$, существует индекс j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ такой, что $f \subseteq p_j^i$ и $g \subseteq p_j^{i+1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем это утверждение индукцией по числу n ребер в указанном пути. Пусть $n = 1$. Тогда $p_0 = sft$ и $p_1 = sgt$, где $s, t \in \tilde{S}^1$ и $(f, g) \in R$. В этом случае $f, g \in G_0$, и эти разложения являются искомыми.

Пусть теперь утверждение доказано для путей с числом ребер менее k, и пусть дан путь $p_0 \longleftrightarrow p_1 \longleftrightarrow p_2 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow p_k$ с k ребрами. Тогда согласно гипотезе индукции имеем следующие разложения: $p_i = s_1p_1^i s_2p_2^i \ldots p_n^i s_{m+1}$, где $p_j^i \in G_0$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$, а $s_j \in \tilde{S}^1$. Кроме того, $p_{k-1} = sft$, а $p_k = sgt$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $(f, t) \in R$. Рассмотрим случаи:

С л у ч а й 1. $f \subseteq p_j^{k-1}$. Следовательно, $p_j^{k-1} = r_1fr_2$ для подходящих $r_1, r_2 \in \tilde{S}^1$. Положим $p_j^k = r_1gr_2$. Ясно, что если $p_j^{k-1} \in G_0$, то $p_j^k \in G_0$. Тогда $p_k = s_1p_1^k s_2p_2^k \ldots p_m^k s_{m+1}$, где $p_i^k = p_i^{k-1}$ для всех $i \neq j$. В итоге мы получили требуемые разложения для всех $k+1$ вершин.

С л у ч а й 2. $f \subseteq s_j$ для некоторого j. Тогда $s_j = s_j'fs_j''$, где $s_t' \subseteq s$, а $s_j'' \subseteq t$. Записав $p_i = s_1p_1^i s_2 \ldots p_j^i s_j' f s_j'' p_{j+1}^i \ldots p_n^i s_{n+1}$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$ и $p_k = s_1p_1^{k-1}s_2 \ldots p_j^{k-1}s_j'gs_j''p_{j+1}^{k-1} \ldots p_m^{k-1}s_{m+1}$, получим требуемые разложения.

С л у ч а й 3. $p_j^{k-1} \cap f = f_1 \neq \varnothing$, $s_{j+1} \cap f = f_2 \neq \varnothing$ для некоторого j. Пусть $s_{j+1} = f_2\tilde{s}_{j+1}$ и $f = f'f_2$ для некоторого $f' \in \tilde{S}$. Если $f_2 \in S$, то $f' \in S$, и, положив во всех разложениях $p_j^i = \tilde{p}^{k-1}f$, вернемся к случаю 1. Пусть $f' \notin S$, следовательно, $f = zx\bar{z}$ для некоторого $z \in \{u, w, v\}$ и $x \in S$. Следовательно, $f' = zx_1$ и $f_2 = x_2z$, где $x_1, x_2 \in S^1$ и $x_1x_2 = x$. Если $p_j^{k-1} = \tilde{p}zx_1$, то по лемме 3 слово p^{k-1} не может принадлежать G_0, что противоречит предположению индукции. Значит, $p_j^{k-1} = f_1 = y_2$ и $s_j = \tilde{s}_jzy_1$, где $\tilde{s}_j \in \tilde{S}^1$, $y_1, y_2 \in S^1$ и $y_1y_2 = x_1$. Тогда имеем $p_i = s_1p_1^i s_2 \ldots \tilde{s}_jzp_j^i\bar{z}\tilde{s}_{j+1} \ldots p_m^i s_{m+1}$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$ и $p_k = s_1p_1^{k-1}s_2 \ldots \tilde{s}_jg\tilde{s}_{j+1} \ldots p_m^{k-1}s_{m+1}$, что дает требуемое разложение.

Случай $p_j^{k-1} \cap f \neq \varnothing$ и $s_j \cap f \neq \varnothing$ аналогичен случаю 3.

Лемма 5. *Пусть существует путь от p до pqp для некоторого q.*

1. *Слово pqp не содержит подслов вида $z_1x\bar{z}_2$ ни для каких $z_1, z_2 \in \{u, v, w\}$, $z_1 \neq z_2$, и $x \in S^1$.*

2. *Имеют место разложения* $p = sx_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}t$ *и* $q = t'y_1q_1y_2q_2\dots y_mq_my_{m+1}s'$, *где* $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots q_m$ *— простые слова,* $x_1,\dots,x_{n+1},y_1,\dots,y_{m+1}\in S^1$ *и* $s,s',t,t'\in\tilde{S}^1$ *такие, что* tt' *и* $s's$ *— простые слова.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что слово $r\in G_0$ не содержит подслов вида $z_1x\bar{z}_2$ ни для каких $z_1,z_2\in\{u,v,w\}$, $z_1\neq z_2$ и $x\in S^1$. Действительно, существует путь от r до элемента a. Заметим, что буква z_1 ни в одно ребро этого пути войти не может. По этой же причине z_1x не может быть окончанием слова r, а $x\bar{z}_2$ не может быть началом слова r.

Поскольку между словами p и pqp существует путь, по лемме 4 существуют разложения $pqp = s_0r_1s_1\dots r_ns_n$ и $p = s_0p_1s_1\dots p_ns_n$, где $r_i,p_i\in G_0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, а $s_i\in\tilde{S}^1$ $(0\leqslant i\leqslant n)$. Так как слова вида $z_1x\bar{z}_2$ не могут пересекаться со словами r_i и p_i, все они являются подсловами слов s_i. Пусть число таких подслов в разложении p равно n штук. Но тогда в аналогичном разложении слова pqp их должно быть не менее $2n$, причем все эти подслова являются подсловами слов $s_0,s_1,\dots,s_n$, а, значит, и подсловами слова p. Отсюда заключаем, что $n=0$.

С помощью аналогичных рассуждений выводим, что $s_1,s_2,\dots,s_{n-1}$ должны принадлежать G_0, что дает нам утверждение 2.

Лемма 6. *Для любых* $p\in\tilde{S}$ *и* $q\in\tilde{S}^1$ *выполняется* $\tilde{\delta}(pqp,p)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует путь от p до pqp. В силу леммы 2 можно считать, что этот путь взят из множества $M(p,pqp)$. По лемме 5 существуют разложения

$$p = sx_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}t \text{ и } q = t'y_1q_1y_2q_2\dots y_mq_my_{m+1}s',$$

где $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots q_m$ — простые слова, $x_1,\dots,x_{n+1},y_1,\dots,y_{m+1}\in S^1$ и $s,s',t,t'\in\tilde{S}^1$ такие, что tt' и $s's$ — простые слова. Получаем, что

$$\begin{aligned} pqp &= sx_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}tt'y_1q_1y_2q_2\dots y_mq_my_{m+1}s'sx_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}t \\ &= sx_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}r_1y_1r_2y_2\dots r_{m+1}y_{m+1}r_{m+2}x_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}t. \end{aligned}$$

Выделим некоторые подмножества ребер в нашем пути. Мы будем считать, что в $L_1(P)$ содержатся все ребра типов 2, 3 вида $p_i=\tilde{s}f\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}g\tilde{t}=p_{i+1}$, где $\tilde{s},\tilde{t}\in\tilde{S}^1$ и число простых подслов в разложении p_{i+1} меньше, чем в разложении p_i, а также все отрезки путей вида $p_i=\tilde{s}vx_1\bar{v}\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}zx_2\bar{z}\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}zx_3\bar{z}\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}x_4\tilde{t}=p_{i+3}$, где $\tilde{s},\tilde{t}\in\tilde{S}^1$ и число простых подслов в разложении p_{i+3} меньше, чем в разложении p_i. В подмножество $L_2(P)$ включим все ребра типа 1 вида $p_i=\tilde{s}f\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}g\tilde{t}=p_{i+1}$, где $\tilde{s},\tilde{t}\in\tilde{S}^1$ и $f,g\in S$ такие, что f и g не входят ни в какое простое подслово соответствующих разложений p_i и p_{i+1}. В подмножество L_3 включим все ребра типов 2 и 3 вида $p_i\longleftrightarrow p_{i+1}$, где число простых подслов в разложении p_{i+1} больше, чем в разложении p_i, а также все отрезки путей вида $p_i=\tilde{s}x_1\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}zx_2\bar{z}\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}zx_3\bar{z}\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}vx_4\bar{v}\tilde{t}=p_{i+3}$, где $\tilde{s},\tilde{t}\in\tilde{S}^1$ и число простых подслов в разложении p_{i+3} меньше, чем в разложении p_i. В силу леммы 1 и того факта, что наш путь принадлежит множеству $M(p,pqp)$, можно считать, что все ребра из L_1 предшествуют всем ребрам из L_2, а те в свою очередь предшествуют всем ребрам из L_3. Также благодаря лемме 1 мы можем подобрать путь P среди всех своих эквивалентных путей так, чтобы множества $L_1(P)$ и $L_3(P)$ содержали максимальное число элементов.

Множество ребер L_2 разобьем на два подмножества: в L_2' соберем все ребра вида $p_i=\tilde{s}x\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}y\tilde{t}=p_{i+1}$, где $\tilde{s},\tilde{t}\in\tilde{S}^1$ и $x,y\in S$, такие, что в некотором эквивалентном пути существует ребро $p_{i+1}=\tilde{s}y\tilde{t}\longleftrightarrow\tilde{s}\tilde{p}\tilde{t}=p_{i+2}$, где $\tilde{p}\in R$, из множества L_3. В L_2'' соберем остальные ребра.

Мы будем рассматривать лишь тот участок Q, который проходит по ребрам из множеств L_1, L_2 и L_3. В силу леммы 1 можно считать, что это связный участок.

Рассмотрим вершину пути, идущую после последнего ребра из множества L_1. Она имеет вид
$$sx_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde p_nx_{n+1}\tilde r_1y_1\tilde r_2\dots y_m\tilde r_{m+1}x_1\tilde p_1'x_2\tilde p_2'\dots x_n\tilde p_n'x_{n+1}t.$$

Пусть некоторое p_i не принадлежит S. Тогда p_i не пересекается ни с одним подсловом f или g, где $p_i = sft \longleftrightarrow sgt = p_{i+1}$ — ребро в Q. Рассмотрим путь, который состоит из тех же вершин, что и Q, но p_i всюду заменено на элемент $\beta_i \in S$. Очевидно, этот путь имеет ту же метку, что и Q. С помощью подобных рассуждений заменим все $\tilde p_i \notin S$ на $\beta_i \in S$, $r_i \notin S$ на $\gamma_i \in S$ и $\tilde p_i' \notin S$ на $\beta_i' \in S$. При этом мы оставляем пока свободной возможность подобрать β_i, γ_i и β_i'. Полученный путь обозначим через Q'.

Далее рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. $e(Q') \geqslant \delta(a,b)$. В этом случае сразу положим $\beta_i = \gamma_i = \beta_i' = a$. Вершина, идущая после последнего ребра из множества L_1, имеет следующий вид: $sx_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde p_nx_{n+1}\tilde r_1y_1\tilde r_2\dots y_m\tilde r_{m+1}x_1\tilde p_1'x_2\tilde p_2'\dots x_n\tilde p_n'x_{n+1}t$, где все p_i являются элементами из S. Перепишем эту вершину в виде $s\omega_1k_1\omega_2k_2\dots\omega_nk_n\omega_{n+1}t$ так, что всякое ребро из множества L_2' имеет вид $s_jk_jt \longleftrightarrow s_j\bar p_jt_j$, где $p_j = a$ или $p_j = b$, а всякое ребро из множества L_2'' имеет вид $s_i\omega_it_i \longleftrightarrow s_i\bar x_it_i$. Следовательно, после преобразований из множества L_2' получим вершину вида $s\omega_1\bar p_1\omega_2\bar p_2\dots\omega_n\bar p_n\omega_{n+1}t$.

Пройдя все ребра из множества L_2'', получим вершину $sx_1\bar p_1x_2\bar p_2\dots x_n\bar p_nx_{n+1}t$.

В итоге имеем
$$\delta(pqp,p) = e(P) \geqslant e(Q) = e(Q') = \bigvee_{i=1}^{n}\delta(t_i,\bar p_i)$$
$$\vee\bigvee_{i=1}^{n+1}\delta(\omega_i,x_i) \geqslant \delta(\omega_1k_1\omega_2k_2\dots\omega_nk_n\omega_{n+1},x_1\bar p_1x_2\bar p_2\dots x_n\bar p_nx_{n+1})$$
$$= \delta(x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde x_{n+1}\tilde r_1y_1\tilde r_2\dots y_m\tilde r_{m+1}x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde p_nx_{n+1},x_1\bar p_1x_2\bar p_2\dots x_n\bar p_nx_{n+1}).$$

Так как $e(Q') \leqslant \delta(a,b)$ и $\tilde p_i,\bar p_i,\tilde r_i \in \{a,b\}$, имеем
$$\delta(x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde x_{n+1}\tilde r_1y_1\tilde r_2\dots y_m\tilde r_{m+1}x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde p_nx_{n+1},x_1\bar p_1x_2\bar p_2\dots x_n\bar p_nx_{n+1})$$
$$\vee\delta(a,b) \geqslant \delta(x_1ax_2a\dots x_naay_1a\dots y_max_1ax_2a\dots x_nax_{n+1},x_1ax_2a\dots x_nax_{n+1}).$$

Последний член больше нуля по условию предложения 2, так как $x_1ax_2a\dots x_na, ay_1a\dots y_ma \in S$. Заметим, что он не зависит от того, какой путь мы выбрали в начале доказательства.

С л у ч а й 2. $e(P) \not\geqslant \delta(a,b)$. В этом случае мы можем утверждать, что $w_v(x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde p_nx_{n+1}\tilde r_1y_1\tilde r_2\dots y_m\tilde r_{m+1}x_1\tilde p_1'x_2\tilde p_2'\dots x_n\tilde p_n'x_{n+1}) = 0$. Действительно, в противном случае среди меток ребер из множества L_1 встретилась бы $\delta(c,d)$. Следовательно, среди ребер из множества L_1 и L_3 есть лишь ребра типов 2 и 3, значит, $\tilde p_i = \tilde p_i' = \bar p_i$ (если некоторые из этих элементов заменены на β_i, γ_i, β_i', то подберем значения переменных так, чтобы равенство выполнялось).

Мы проделаем то же, что и в случае 1, и получим
$$\delta(pqp,p) \geqslant \delta(x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde x_{n+1}\tilde r_1y_1\tilde r_2\dots y_m\tilde r_{m+1}x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde p_nx_{n+1},x_1\tilde p_1x_2\tilde p_2\dots x_n\tilde p_nx_{n+1}).$$

Этот член больше нуля по условию предложения 2, причем он не зависит от того, какой путь мы выбрали в самом начале.

Доказательство предложения 2 завершено.

4^0. В этом пункте мы покажем, как построенная в п. 3^0 конструкция расширения полугруппы и заданной на ней функции расстояния применяется в доказательстве теоремы 1. Леммы 7 и 8 являются аналогами лемм 7 и 8 из [3].

Лемма 7. *Пусть элементы $a, b, c \in \mathcal{P}$ таковы, что $c \leqslant a \vee b$. Тогда существуют полугруппа без идемпотентов U, полугрупповая функция расстояния $\delta\colon U \times U \to \mathcal{P}$ такая, что $\delta(xyx, x) > 0$ для любых $x \in U$, $y \in U^1$, и элементы $x, y, u, v, w \in U$ такие, что $\delta(x, u) = \delta(v, w) = a, \delta(u, v) = \delta(w, y) = b$ и $\delta(x, y) = c$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим свободную полугруппу $U = F(X)$, порожденную алфавитом $X = \{x, y, u, v, w\}$.

Определим функцию δ вначале на множестве X^2 следующим образом:

$$\delta^{-1}(a) = \{(x, u), (v, w), (u, x), (w, v)\}, \quad \delta^{-1}(b) = \{(u, v), (w, y), (v, u), (y, w)\}, \quad \delta^{-1}(0) = \Delta,$$

$$\delta^{-1}(a \vee c) = \{(u, y), (y, u)\}, \quad \delta^{-1}(b \vee c) = \{(x, w), (w, x)\},$$

где $\delta^{-1}(a \vee b)$ — множество всех остальных пар.

Пусть теперь $p, q \in U$ и $p = s_1 s_2 \ldots s_n$, $q = t_1 t_2 \ldots t_m$, где $s_i, t_j \in X$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$. Положим $\delta(p, q) = 1$, если $n \neq m$, и $\delta(p, q) = \bigvee_{i=1}^{n} \delta(s_i, t_i)$, если $n = m$.

Легко проверить, что δ есть полугрупповая функция расстояния с требуемым свойством, а для элементов x, y, u, v, w выполняются все требуемые равенства.

Лемма 8. *Существуют полугруппа без идемпотентов T и полугрупповая функция расстояния $\delta\colon T \times T \to \mathcal{P}$ такие, что*

1) δ сюръективно; 2) $\delta(xyx, x) > 0$ для любых $x, y \in T$; 3) для любой тройки $(a, b, c) \in \mathcal{P}$ с условием $c \leqslant a \vee b$ существуют $x, y, u, v, w \in T$ такие, что $\delta(x, u) = \delta(v, w) = a$, $\delta(u, v) = \delta(w, y) = b$ и $\delta(x, y) = c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество X всех троек $(a, b, c) \in \mathcal{P}^3$ со свойством $c \leqslant a \vee b$. По каждой тройке $(a, b, c) \in X$ построим полугруппу и полугрупповую функцию расстояния, удовлетворяющие условию леммы 7; мы обозначим их $U_{(a,b,c)}$ и $\delta_{(a,b,c)}$ соответственно. Рассмотрим прямое произведение $\prod_{(a,b,c) \in X} U_{(a,b,c)}$. Выберем в нем подполугруппу T, состоящую из элементов, координаты которых стабилизируются начиная с некоторого момента. Определим отображение $\delta\colon T \times T \to \mathcal{P}$, полагая $\delta(x, y) = \bigvee_{(a,b,c) \in X} \delta_{(a,b,c)}(x_{(a,b,c)}, y_{(a,b,c)})$. Очевидно, δ сюръективно и является полугрупповой требуемой функцией расстояния.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть L — алгебраическая решетка и $\mathcal{P}$ есть множество компактных элементов, которое образует подполурешетку с единицей. Тогда L изоморфна ее решетке идеалов $J(\mathcal{P})$. Требуется построить полугруппу S' и функцию δ', для которых выполняются условия предложения 1.

Сначала возьмем полугруппу T и функцию δ из леммы 8 и рассмотрим вполне упорядоченное множество четверок $\{(x, y, z, t) \in T^4 \mid \delta(x, y) \leqslant \delta(z, t)\} = \{(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, t_\gamma) \mid 0 \leqslant \gamma < \chi\}$. Для каждого ординала γ построим полугруппу S_γ и функцию δ_γ следующим образом. Положим $S_0 = T$ и $\delta_0 = \delta$. Для непредельного ординала γ и соответствующей четверки $(x_{\gamma-1}, y_{\gamma-1}, z_{\gamma-1}, t_{\gamma-1}) \in S_{\gamma-1}^4$ с условием $\delta_{\gamma-1}(x_{\gamma-1}, y_{\gamma-1}) \leqslant \delta_{\gamma-1}(z_{\gamma-1}, t_{\gamma-1})$, используя предложение 2, определяем S_γ и δ_γ как расширение соответствующих $S_{\gamma-1}$ и $\delta_{\gamma-1}$. Если же γ — предельный ординал, то полагаем

$$S_\gamma = \bigcup_{0 \leqslant \zeta < \gamma} S_\zeta \quad \text{и} \quad \delta_\gamma = \bigcup_{0 \leqslant \zeta < \gamma} \delta_\zeta.$$

В итоге получим возрастающие по включению цепи полугрупп S_γ и функций расстояния δ_γ на этих полугруппах. Положим

$$S^{(1)} = \bigcup_{0 \leqslant \gamma < \chi} S_\gamma \quad \text{и} \quad \delta^{(1)} = \bigcup_{0 \leqslant \gamma < \chi} \delta_\gamma.$$

Отметим, что для любого γ в полугруппе S_γ выполнено $\delta_\gamma(xyx, x) > 0$ для любых $x \in S_\gamma$ и $y \in (S_\gamma)^1$, следовательно, и в $S^{(1)}$ также выполнено $\delta(xyx, x) > 0$ для всех $x \in S^{(1)}$ и $y \in (S^{(1)})^1$.

Ясно, что $T \subseteq S^{(1)}$ и $\delta \subseteq \delta^{(1)}$. К тому же пара $(S^{(1)}, \delta^{(1)})$ обладает тем свойством, что для любых пар $(x, y), (z, t) \in T \times T$ с условием $\delta(x, y) \leqslant \delta(z, t)$ выполняется $(x, y) \in O_{\delta^{(1)}}(0) \vee \Theta_{S^{(1)}}(z, t)$.

Далее, построим цепочку расширений

$$(T, \delta) \subseteq (S^{(1)}, \delta^{(1)}) \subseteq (S^{(2)}, \delta^{(2)}) \subseteq \ldots$$

и положим

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \quad \text{и} \quad \delta' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}.$$

Заметим, что в полугруппе S' нет идемпотентов и выполнено $\delta(xyx, x) > 0$ для любых $x \in S'$ и $y \in (S')^1$, в частности $\delta(x^2, x) > 0$. Поэтому для любого элемента $\bar{x} \in S'/O_{\delta'}0$ в S' выполнено $x^2 \neq x$, т. е. $S'/O_{\delta'}0$ — полугруппа без идемпотентов.

По построению для любых пар $(x, y), (z, t) \in S' \times S'$ с неравенством $\delta'(x, y) \leqslant \delta'(z, t)$ имеем $(x, y) \in O_{\delta'}(0) \vee \Theta_{S'}(z, t)$, т. е. выполнено условие 3 предложения 1. Убедимся, что для S' и δ' выполнены остальные условия. Сюръективность δ' следует из леммы 8. Пусть $a, b \in \mathcal{P}, x, y \in S'$ такие, что $\delta'(x, y) \leqslant a \vee b$. Тогда по лемме 8 существуют элементы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in S \subset S'$, для которых $\delta'(\bar{x}, \bar{u}) = \delta'(\bar{v}, \bar{w}) = a$, $\delta'(\bar{u}, \bar{v}) = \delta'(\bar{w}, \bar{y}) = b$ и $\delta'(\bar{x}, \bar{y}) = \delta'(x, y)$. Из первой группы равенств следует, что $\Theta_{S'}(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq O_{\delta'}(a) \vee O_{\delta'}(b)$. Это вместе с неравенством $\delta'(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \delta'(x, y)$ влечет $(x, y) \in O_{\delta'}(0) \vee \Theta_{S'}(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq O_{\delta'}(a) \vee O_{\delta'}(b)$. Таким образом для (S', δ') выполнены все условия предложения 1. Отсюда заключаем, что $L \cong J(\mathcal{P}) \cong [O_{\delta'}(0), S' \times S'] \cong Con\ S'/O_{\delta'}(0)$, т. е. $S'/O_{\delta'}(0)$ — искомая полугруппа. Теорема 1 доказана.

$\mathbf{5}^0$. В этом пункте мы покажем, как из теоремы 1 вытекает теорема 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть L — дистрибутивная алгебраическая решетка и $\mathcal{P}$ — счетная подполурешетка ее компактных элементов. Воспользуемся результатом, полученным независимо Ю.Л. Ершовым [1] и П. Пудлаком [9], согласно которому $\mathcal{P}$ представима как объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i$ счетной возрастающей по включению цепи дистрибутивных конечных решеток. Используя предыдущую теорему, мы можем для каждой решетки P_i построить полугруппу без идемпотентов $\tilde{S}_i$ и полугрупповую функцию расстояния $\delta_i \colon \tilde{S}_i \times \tilde{S}_i \to P_i$, для которых выполнены условия предложения 1.

Полугруппы $\tilde{S}_i$, вообще говоря, никак между собой не связаны. Построим теперь новую серию полугрупп S_i и соответствующих полугрупповых функций расстояния μ_i так, чтобы для S_i и μ_i выполнялись бы условия предложения 1 и чтобы полугруппы S_i образовывали возрастающую по включению цепь. Положим $S_0 = \tilde{S}_0$ и $\mu_0 = \delta_0$. Допустим, что мы уже построили полугруппу S_i и полугруппую функцию расстояния $\mu_i \colon S_i \times S_i \to \mathcal{P}_i$. Положим $T_{i+1} = S_i * \tilde{S}_{i+1}$ и определим функцию $\nu_{i+1} \colon S_{i+1} \times S_{i+1} \to \mathcal{P}_i$ по правилу:

Если слова p и q имеют канонические разложения $p = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n$ и $q = u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_m v_m$ (либо $p = y_1 x_1 y_2 x_2 \ldots y_n x_n$ и $q = v_1 u_1 v_2 u_2 \ldots v_m u_m$), где $x_i, u_j \in S_i$ и $y_i, v_j \in \tilde{S}_{i+1}$, то при $n = m$ положим $\nu_{i+1}(p, q) = \bigvee_{k=1}^{n} \mu_i(x_k, u_k) \vee \bigvee_{k=1}^{n} \delta_{i+1}(y_k, v_k)$. Во всех остальных случаях положим $\nu_i(p, q) = 1$.

То, что ν_{i+1} является полугрупповой функцией расстояния, напрямую следует из того, что μ_i и δ_{i+1} сами являются полугрупповыми функциями расстояния. Теперь к полугруппе T_{i+1} и функции ν_{i+1} применим конструкцию расширения из доказательства теоремы 1 и получим полугруппу без идемпотентов S_{i+1} и полугрупповую функцию расстояния μ_{i+1} такие, что для S_{i+1} и μ_{i+1} выполнено условие 3 предложения 1.

Рассмотрим $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$ и $\mu = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mu_i$. Очевидно, что μ является полугрупповой функцией расстояния в $\mathcal{P}$ на S. Покажем, что для этой функции выполняются условия предложения 1. Пусть $a, b \in \mathcal{P}$ и $x, y \in S$ такие, что $\mu(x, y) \leqslant a \vee b$. Пусть n такое, что $x, y \in S_n$ и $a, b \in P_n$, тогда $(x, y) \in O_{\mu_n}(a) \vee O_{\mu_n}(b)$. Нетрудно видеть, что $O_{\mu_n}(c) \subseteq O_{\mu}(c)$ для любого $c \in \mathcal{P}_n$. Поэтому $(x, y) \in O_{\mu}(a) \vee O_{\mu}(b)$, т. е. выполнено условие 1 предложения 1.

Сюръективность μ очевидна, и, значит, выполнено условие 2. Покажем теперь, что выполнется условие 3. Действительно, если $\mu(x,y) \subseteq \mu(z,t)$, то $\mu_n(x,y) \subseteq \mu_n(z,t)$, где n такое, что $x,y,z,t \in S_n$. Для S_n и μ_n выполнено условие 3, поэтому $(x,y) \in O_{\mu_n} \vee \Theta_{S_n}(z,t)$, к тому же $O_{\mu_n} \subseteq O_\mu$, $\Theta_{S_n}(z,t) \subseteq \Theta_S(z,t)$. Поэтому условие 3 выполнено.

Отсюда и из предложения 1 следует, что $L \cong J(\mathcal{P}) \cong (ConS/O_\mu)$. По построению S есть полугруппа без идемпотентов. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ершов Ю.Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. **Клиффорд А., Престон Г.** Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 285 с.; Т. 2. 422 с.
3. **Попович А.Л., Репницкий В.Б.** О представлении решеток решетками конгруэнций полугрупп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 199–208.
4. **Freese R., Lampe W. A., Taylor W.** Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, I // Pacific J. Math. 1979. Vol. 82. P. 59–68.
5. **Grätzer G.** General lattice theory / Eds. B.A. Davey [et. al.]. Basel: Birkhäuser Verlag, 1998. 663 p.
6. **Grätzer G., Schmidt E. T.** Characterizations of congruence lattices of abstract algebras // Acta Sci. Math. (Szeged). 1963. Vol. 24. P. 34–59.
7. **Lampe W. A.** Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, II // Pacific J. Math. 1982. Vol. 103. P. 475–508.
8. **Lampe W. A.** Results and problems on congruence lattice representations // Algebra Univers. 2006. Vol. 55. P. 127–135.
9. **Pudlak P.** On congruence lattices of lattices // Algebra Univers. 1985. Vol. 20. P. 96–114.
10. **Repnitskiĭ V., Tůma J.** Intervals in subgroup lattices of countable locally finite groups // Algebra Univers. 2008. Vol. 59. P. 49–71.
11. **Ružička P., Tůma J., Wehrung F.** Distributive congruence lattices of congruence-permutable algebras // J. Algebra. 2007. Vol. 311, no. 1. P. 96–116.
12. **Schmidt E. T.** The ideal lattice of a distributive lattice with 0 is the congruence lattice of a lattice // Acta Sci. Math. (Szeged). 1983. Vol. 43. P. 153–168.
13. **Taylor W.** Some applications of the term condition // Algebra Univers. 1982. Vol. 14. P. 11–24.
14. **Tůma J.** Semilattice-valued measures // Contributions to General Algebra 18. Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 2008. C. 199–210.
15. **Wehrung F.** A solution to Dilworth's congruence lattice problem // Adv. Math. 2007. Vol. 216, no. 2. P. 610–625.

Поступила 16.11.2011

Попович Александр Леонидович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: tei_la@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 514.75

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ ПО ЗАДАННОЙ ГРУППЕ ГОМЕОМОРФИЗМОВ

Е. А. Рогозинников

В настоящей работе рассматривается следующая задача: по заданной группе гомеоморфизмов топологического пространства выяснить, существует ли в этом пространстве кривая, для которой указанная группа будет являться группой ориентированных гомеоморфизмов. Приводится конструктивное решение задачи для достаточно широкого класса групп гомеоморфизмов линейно связных топологических пространств. В ряде случаев исследуется вопрос о единственности построенной кривой и о ядре действия группы на построенной кривой.

Ключевые слова: кривая, образ кривой, топологическое пространство, группа гомеоморфизмов, линейная связность.

E. A. Rogozinnikov. On the possibility of constructing a curve for a given group of homeomorphisms.

The following problem is considered: for a given group of homeomorphisms of a topological space, it is required to determine if there exists in this space a curve for which the given group is a group of oriented homeomorphisms. A constructive solution of the problem is given for a wide class of groups of homeomorphisms of linearly connected topological spaces. In a number of cases, the questions on the uniqueness of the constructed curve and on the kernel of action of the group on the curve are investigated.

Keywords: curve, image of a curve, topological space, group of homeomorphisms, linear connectivity.

Введение

Кривые на различного рода геометрических объектах (аффинных пространствах, топологических пространствах, гладких многообразиях, обобщенных многообразиях [6]) являются классическим объектом исследований [1; 6–10; 12; 13]. Группы преобразований (гомеоморфизмов, движений, подобий и т. п.) геометрических объектов являются важнейшими и классическими производными структурами, в терминах которых осуществляется классификация геометрических объектов и проводится исследование их различных свойств [11].

Группы ориентированных движений кривых в римановых и в метрических пространствах являются частным случаем групп движений указанных пространств, которые оставляют инвариантным образ некоторой кривой. В [6; 8; 10] показано, что в римановых пространствах с положительно определенным метрическим тензором и в метрических пространствах справедлив следующий факт: для кривых, обладающих постоянной метрической скоростью и гомеоморфных прямой или окружности, любое движение указанного пространства, оставляющее инвариантным образ данной кривой, является ее ориентированным движением. Обобщением понятия ориентированного движения кривой в римановых и в метрических пространствах для кривых в топологических пространствах является понятие ориентированного гомеоморфизма. Описание строения групп ориентированных гомеоморфизмов кривых в топологических пространствах получено в [8; 9]. А именно, показано, что любая группа G ориентированных гомеоморфизмов некоторой кривой изоморфна расширению $A.B$ [3] некоторой группы A при помощи некоторой группы B. При этом образ группы A при естественном вложении ее в группу G действует тривиально на точках кривой, а группа B изоморфна некоторой подгруппе одной из следующих групп: $\langle \mathbb{R}, + \rangle \leftthreetimes \mathbb{C}_2$, $(\langle \mathbb{R}, + \rangle \, / \, \langle \mathbb{Z}, + \rangle) \leftthreetimes \mathbb{C}_2$. Указанные полупрямые произведения устроены таким образом, что для порождающего элемента a группы $\mathbb{C}_2$ и произвольного элемента g группы $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ либо $\langle \mathbb{R}, + \rangle \, / \, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ соответственно имеет место равенство $aga = g^{-1}$.

Естественно возникает обратная проблема: по заданной группе гомеоморфизмов топологического пространства выяснить, может ли эта группа являться группой ориентированных гомеоморфизмов некоторой кривой в этом пространстве, и, если это возможно, построить такую кривую. В случае, если вместо топологических пространств рассматривать римановы многообразия, эта проблема правомерна в следующей формулировке: по заданной группе движений гладкого риманового многообразия выяснить, может ли эта группа являться группой ориентированных движений некоторой кривой на этом многообразии.

Рассмотрение данной проблемы мотивируется следующими соображениями. В теоретической механике, в символической динамике, в математической физике и, в частности, в механике сплошных сред исключительно важными являются вопросы о существовании траекторий на конфигурационном многообразии с заданными свойствами: вопрос о существовании на конфигурационном многообразии пути, инвариантного относительно действия некоторой группы, либо пути, обладающего постоянными, периодическими или симметричными кривизнами и соединяющего две заданные точки на конфигурационном многообразии, либо замкнутого пути, проходящего через заданные точки конфигурационного многообразия [2; 14]. Решение поставленной выше обратной проблемы в совокупности с результатами, полученными в [8; 10], которые характеризуют связь кривизн кривой, замкнутости кривой с полной группой ориентированных движений данной кривой, позволяет надеяться на получение достаточных условий для решения указанных задач механики.

Актуальность описанной выше обратной проблемы усиливается также следующим обстоятельством. В теории моделирования и управления системами с нелинейной динамикой изучаемая система моделируется точкой в некотором пространстве состояний. Динамика указанной системы происходит в направлении заданного векторного поля, которое определяет однопараметрическую группу преобразований (гомеоморфизмов) пространства состояний. При заданных начальных условиях динамика исследуемой системы представляет собой кривую вдоль данного векторного поля, т. е. кривую, группой положительных преобразований которой является данная группа преобразований пространства состояний [4]. При этом как раз возникают изучаемые в данной статье вопросы существования кривых с заданной группой положительных преобразований, проходящих через некоторую точку пространства состояний.

Кроме того, решение поставленной выше обратной проблемы в совокупности с решением прямой задачи, полученным в [8; 9], хотя и не дает полной классификации кривых на гладком римановом многообразии в зависимости от группы движений данного многообразия, относительно которой образ данной кривой остается инвариантным, но предоставляет полное решение этой задачи для частного случая, когда рассматриваемые группы являются группами ориентированных движений.

В настоящей работе рассматриваются кривые в топологических пространствах, поскольку доказательства для решения частной задачи на гладких многообразиях существенно не отличаются от доказательств в более общем случае для топологических пространств. Однако при этом на класс рассматриваемых групп гомеоморфизмов накладываются ограничения, свойственные полным группам ориентированных движений кривых на римановых многообразиях.

1. Основные понятия и определения

Сформулируем основные определения, которые нам понадобятся.

Пусть X — топологическое пространство. *Кривой на* X назовем непрерывное отображение $\alpha\colon I \to X$, где I — интервал в $\mathbb{R}$. В случае, если X — гладкое многообразие, назовем кривую α регулярной, если она непрерывно дифференцируема на I, и $\dot{\alpha}(t) \neq \vec{0}$ для всех $t \in I$.

Пространство X будем называть *линейно связным*, если для любых $p, q \in X$ существует кривая $\alpha\colon [0,1] \to X$ такая, что $\alpha(0) = p$ и $\alpha(1) = q$.

Пусть $\alpha\colon I \to X$ — кривая. Гомеоморфизм g топологического пространства X назовем *гомеоморфизмом образа кривой* α, если $g(\alpha(I)) = \alpha(I)$.

Гомеоморфизм g топологического пространства X назовем *положительным гомеоморфизмом кривой* $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$ со сдвигом $t_0 \in \mathbb{R}$, если $g(\alpha(t)) = \alpha(t + t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Группу всех положительных гомеоморфизмов кривой назовем *полной группой положительных гомеоморфизмов этой кривой*, а любую ее подгруппу — *группой положительных гомеоморфизмов*.

Отрицательным гомеоморфизмом кривой $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$ с центром $t_0 \in \mathbb{R}$ будем называть такой гомеоморфизм g пространства X, что $g(\alpha(t + t_0)) = \alpha(-t + t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ или, что эквивалентно, $g(\alpha(t)) = \alpha(-t + 2t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Ориентированным гомеоморфизмом кривой α назовем положительный или отрицательный гомеоморфизм кривой α. Группу всех ориентированных гомеоморфизмов кривой будем называть *полной группой ориентированных гомеоморфизмов* этой кривой, а любую ее подгруппу — *группой ориентированных гомеоморфизмов*.

В частности, если X — риманово (либо метрическое) пространство, назовем *ориентированным движением кривой* α ориентированный гомеоморфизм данной кривой, который является движением пространства X.

Группу положительных гомеоморфизмов G кривой α назовем *транзитивной*, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ существует $g \in G$ такой, что $g(\alpha(t)) = \alpha(t + t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Группу положительных гомеоморфизмов G кривой α назовем *блочно транзитивной с параметром* $T \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, если для всех точек вида $t_0 = kT$ $(k \in \mathbb{Z})$ и только для точек такого вида существует $g \in G$ такой, что $g(\alpha(t)) = \alpha(t + t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, такая группа действует транзитивно на элементах разбиения $\bigl\{\alpha(I_k) \mid I_k = [t_0 + kT, t_0 + (k+1)T), k \in \mathbb{Z}\bigr\}$ кривой α для любого $t_0 \in \mathbb{R}$. Будем называть элементы такого разбиения *блоками* кривой α *размера* T. Удобно также считать, что тривиальная группа является блочно транзитивной, при этом для параметра такой группы условно будем полагать $T = \infty$. В этом случае разбиение будет одноэлементным, состоящим из образа всей кривой.

О группе ориентированных гомеоморфизмов некоторой кривой будем говорить, что она является *транзитивной* (либо *блочно транзитивной*), если ее максимальная подгруппа положительных гомеоморфизмов является транзитивной (соответственно, блочно транзитивной).

Пусть $Y \subseteq X$ — подпространство топологического пространства X, группы G и H действуют на подпространстве Y. При этом не требуется, чтобы действие элементов групп G и H было определено на X. Будем говорить, что группы G и H *действуют эквивалентно на подпространстве* Y, если для любого $g \in G$ существует $h \in H$ такой, что $g(y) = h(y)$ для всех $y \in Y$, и для любого $h \in H$ существует $g \in G$ такой, что $h(y) = g(y)$ для всех $y \in Y$.

Очевидно, что две группы, действующие эквивалентно на подпространстве Y, либо одновременно являются либо одновременно не являются группами гомеоморфизмов этого подпространства. Также две группы гомеоморфизмов, действующие эквивалентно на подпространстве Y, либо одновременно являются либо одновременно не являются группами ориентированных гомеоморфизмов некоторой фиксированной кривой в этом подпространстве. В случае, если обе группы являются группами ориентированных гомеоморфизмов некоторой кривой α в Y, то они либо одновременно являются либо одновременно не являются транзитивными (либо блочно транзитивными с одинаковыми параметрами) группами ориентированных гомеоморфизмов кривой α.

Пусть G — некоторая группа ориентированных (либо положительных) гомеоморфизмов и G_0 — ее максимальная подгруппа тривиальных гомеоморфизмов, т. е. $g(\alpha(t)) = \alpha(t)$ для любого $g \in G_0$. Фактор-группу G/G_0 будем называть *группой внутренних ориентированных (соответственно, положительных) гомеоморфизмов*.

Покажем, что для любой группы гомеоморфизмов G топологического пространства X и любой ее нормальной подгруппы G_0 существует подпространство Y пространства X, на котором можно естественным образом определить действие фактор-группы G/G_0.

Пусть G — группа гомеоморфизмов топологического пространства X, G_0 — нормальная подгруппа в G. Рассмотрим множество $Y = \{y \in X \mid \forall g \in G_0 (g(y) = y)\}$. Лемма 1 устанавливает, что группу G/G_0 можно рассматривать как группу гомеоморфизмов пространства Y.

Лемма 1. *Пусть X — топологическое пространство, G — его группа гомеоморфизмов, G_0 — нормальная подгруппа в G. Тогда множество $Y = \{p \in X \mid \forall g_0 \in G_0 (g_0(p) = p)\}$ является инвариантным подпространством пространства X относительно действия группы G. Кроме того, фактор-группа G/G_0 является группой гомеоморфизмов подпространства Y, действуя на нем по правилу $gG_0(y) = g(y)$ для всех $g \in G$ и для всех $y \in Y$. Причем группы G и G/G_0 действуют эквивалентно на подпространстве Y.*

Будем в дальнейшем подпространство, построенное в лемме 1 по пространству X и группе G_0, обозначать $X_{G_0} = \{y \in X \mid \forall g \in G_0 (g(y) = y)\}$.

Таким образом, в частности, группу внутренних ориентированных гомеоморфизмов G/G_0 некоторой кривой в пространстве X будем рассматривать как группу ориентированных гомеоморфизмов этой же кривой, но в пространстве X_{G_0}, действующую на X_{G_0} эквивалентно G. Поэтому перенесем на группы внутренних ориентированных гомеоморфизмов такие ранее введенные понятия, как транзитивность и блочная транзитивность, а на внутренние ориентированные гомеоморфизмы — понятия положительности и отрицательности и сопоставим сдвиг либо центр соответственно.

В данной статье построение кривой будет производиться только для групп, которые могут являться транзитивными либо блочно транзитивными группами ориентированных движений кривых на гладких римановых многообразиях. Такое ограничение для класса рассматриваемых групп мотивируется следующим: в [8; 13] показано, что любая полная группа ориентированных движений регулярной кривой на гладком римановом многообразии с положительно определенным метрическим тензором является либо транзитивной, либо блочно транзитивной.

Если топологическое пространство X не является линейно связным, то любой гомеоморфизм этого пространства порождает перестановку на множестве компонент линейной связности. Для построения кривой по данной группе гомеоморфизмов G необходимо, чтобы эта группа оставляла на месте хотя бы одну компоненту линейной связности, поскольку любая кривая пространства X полностью лежит в одной компоненте. Ограничение действия группы G на компоненту линейной связности, которую она оставляет на месте, также является группой гомеоморфизмов этой компоненты. Поэтому для построения кривой по данной группе G достаточно рассматривать пространства с одной компонентой линейной связности, т. е. линейно связные топологические пространства.

В [8; 9] показано, что если группа внутренних ориентированных гомеоморфизмов кривой является транзитивной либо блочно транзитивной, то она имеет следующее строение.

Утверждение 1. *Пусть G — группа внутренних ориентированных гомеоморфизмов некоторой кривой в топологическом пространстве. Тогда*

1. *Если G — блочно транзитивная группа внутренних положительных гомеоморфизмов, то G изоморфна циклической группе.*

2. *Если G — транзитивная группа внутренних положительных гомеоморфизмов, то G изоморфна $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ или $\langle \mathbb{R}, + \rangle \, / \, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.*

3. *Если G — блочно транзитивная группа внутренних ориентированных гомеоморфизмов, содержащая отрицательный гомеоморфизм, то G изоморфна полупрямому произведению некоторой циклической группы G^+ на $\mathbb{C}_2$, где $\mathbb{C}_2 = \{1, a\}$, причем $a(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G^+$.*

4. *Если G — транзитивная группа внутренних ориентированных гомеоморфизмов, содержащая отрицательный гомеоморфизм, то G изоморфна полупрямому произведению $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ или $\langle \mathbb{R}, + \rangle \, / \, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ на $\mathbb{C}_2$, где $\mathbb{C}_2 = \{1, a\}$, причем $a(g) = g^{-1}$ для всех g из $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ или $\langle \mathbb{R}, + \rangle \, / \, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ соответственно.*

В данной работе при исследовании вопроса о возможности построения кривой по заданной группе гомеоморфизмов будут рассматриваться только группы, которые описаны в утверждении 1, а именно следующие восемь типов групп: 1. $\mathbb{C}_n$; 2. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$; 3. $\langle \mathbb{R}, + \rangle$; 4. $\langle \mathbb{R}, + \rangle \, / \, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$; 5. $\mathbb{C}_n \leftthreetimes \mathbb{C}_2$; 6. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \leftthreetimes \mathbb{C}_2$; 7. $\langle \mathbb{R}, + \rangle \leftthreetimes \mathbb{C}_2$; 8. $(\langle \mathbb{R}, + \rangle \, / \, \langle \mathbb{Z}, + \rangle) \leftthreetimes \mathbb{C}_2$.

Хотя утверждение 1 описывает лишь строение транзитивных и блочно транзитивных групп внутренних ориентированных гомеоморфизмов кривых, но не групп ориентированных гомеоморфизмов кривых, рассмотрение лишь этих 8 типов групп достаточно для решения поставленной в данной работе задачи. Действительно, если сама группа G не изоморфна ни одному из указанных выше 8 типов групп, но существует подгруппа G_0 (возможно, неединственная) такая, что фактор-группа G/G_0 изоморфна какому-либо из указанных выше 8 типов групп, то достаточно перейти в подпространство X_{G_0}, построенное в лемме 1, и решать задачу на X_{G_0}. Если хотя бы для одной подгруппы G_0 в пространстве X_{G_0} существует кривая, для которой G/G_0 будет группой ориентированных гомеоморфизмов, то эта же кривая, рассмотренная как кривая в пространстве X, будет обладать группой ориентированных гомеоморфизмов G, действующей на точках кривой эквивалентно G/G_0. Если же ни для одной из подгрупп G_0 в подпространстве X_{G_0} такой кривой не существует, то и в пространстве X не существует кривой, для которой группа G была бы транзитивной либо блочно транзитивной группой ориентированных гомеоморфизмов. Действительно, если бы такая кривая α существовала, то ее группой внутренних ориентированных гомеоморфизмов была бы G/G_0 для некоторой подгруппы G_0 из G. Тогда образ α содержался бы в подпространстве X_{G_0} и группа G/G_0 была бы в этом подпространстве транзитивной либо блочно транзитивной группой ориентированных гомеоморфизмов кривой α, что невозможно.

Следовательно, для решения нашей задачи достаточно рассматривать в качестве групп гомеоморфизмов лишь указанные выше 8 типов групп. Потому что в случае, если сама группа G не изоморфна ни одному из указанных выше 8 типов групп, то необходимо рассмотреть все возможные ее подгруппы G_0 такие, что G/G_0 изоморфны какому-либо из указанных выше 8 типов групп. Для каждой такой G_0 надо перейти в подпространство X_{G_0} и решать задачу на этом подпространстве. Если решение будет найдено в одном из подпространств X_{G_0}, то, как было показано выше, будет найдено решение в пространстве X. Если же ни в одном из пространств X_{G_0} решений нет, то решений нет и в X.

2. Основные результаты работы

Сформулируем сначала основные результаты работы, а затем приведем их доказательства. Первая теорема устанавливает возможность построения кривой по заданной циклической группе гомеоморфизмов, т. е. решает задачу для типов групп 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть X — линейно связное топологическое пространство, G — его группа гомеоморфизмов. Тогда выполняются следующие условия*:

1. *Если G изоморфна циклической группе, то существует кривая $\alpha\colon \mathbb{R}\to X$, для которой G является блочно транзитивной группой положительных гомеоморфизмов.*

2. *Если G изоморфна $\mathbb{C}_2$ и a — ее порождающий элемент, то a имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда существует кривая $\alpha\colon \mathbb{R}\to X$, для которой a является отрицательным гомеоморфизмом.*

В следующей теореме определены условия, при которых возможно построение кривой по группе гомеоморфизмов, изоморфной полупрямому произведению циклической группы на $\mathbb{C}_2$, т. е. решается задача для типов групп 5 и 6.

Теорема 2. *Пусть X — линейно связное топологическое пространство, G — его группа гомеоморфизмов, которая изоморфна полупрямому произведению циклической группы G^+ и $\mathbb{C}_2$, g — порождающий элемент в G^+, a — порождающий элемент в $\mathbb{C}_2$. При этом $aga = g^{-1}$ и a имеет неподвижную точку. Тогда выполняются следующие условия*:

1. *Если G^+ изоморфна $\mathbb{C}_{2n-1}$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$, то существует кривая $\alpha\colon \mathbb{R}\to X$, для которой a является отрицательным гомеоморфизмом, а G — блочно транзитивной группой ориентированных гомеоморфизмов.*

2. *Если G^+ изоморфна $\mathbb{C}_{2n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ или G^+ изоморфна $\mathbb{Z}$ и элемент ga имеет неподвижную точку, то существует кривая $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$, для которой a является отрицательным гомеоморфизмом, а G — блочно транзитивной группой ориентированных гомеоморфизмов.*

3. *Если G^+ изоморфна $\mathbb{C}_{2n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ или G^+ изоморфна $\mathbb{Z}$ и элемент ga не имеет неподвижных точек, то существует кривая $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$, для которой a является отрицательным гомеоморфизмом, а $\langle g^2 \rangle \leftthreetimes \mathbb{C}_2$ — блочно транзитивной группой ориентированных гомеоморфизмов, но не существует кривой, для которой a являлся бы отрицательным гомеоморфизмом и G являлась бы группой ориентированных гомеоморфизмов.*

З а м е ч а н и е 1. В случаях, если группы конечны, в теоремах 1 и 2 можно считать, что на кривой α группа действует без тривиальных гомеоморфизмов.

З а м е ч а н и е 2. В случае, если X — гладкое многообразие, а группа гомеоморфизмов при этом является группой диффеоморфизмов, в теоремах 1 и 2 можно считать, что все построенные кривые являются регулярными.

Для формулировки теорем 3 и 4 нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $P = \{p\}$ — произвольное одноточечное множество. Обозначим $\pi(P) = p$.

Пусть X — топологическое пространство, A — некоторое множество гомеоморфизмов X. Тогда обозначим $A(y) = \{x \in X \mid \exists a \in A(a(y) = x)\}$ для $y \in X$. Также обозначим $A(Y) = \bigcup_{y\in Y} A(y)$ для $Y \subseteq X$.

Пусть X — топологическое пространство, g — гомеоморфизм X. Естественное продолжение g на множество 2^X по правилу $g(Y) = \{g(y) \mid y \in Y\}$ для $Y \subseteq X$ будем также обозначать g.

В следующей теореме даются условия, при которых возможно построение кривой по группе гомеоморфизмов, изоморфной $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ или $\langle \mathbb{R}, + \rangle / \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, т. е. решается задача для групп типов 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть X — топологическое пространство, G — его группа гомеоморфизмов, которая изоморфна $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ либо $\langle \mathbb{R}, + \rangle / \langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Существует отображение $\phi\colon \mathbb{R} \to 2^G$ со свойствами*

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \phi(t) = G, \ \phi(t) \neq \varnothing \text{ для всех } t \in \mathbb{R},$$

и существует хотя бы одна точка $p \in X$ такая, что $\phi(t)(p)$ — одноточечное множество для всех $t \in \mathbb{R}$ и отображение $\pi(\phi(t)(p))$ непрерывно по переменной t хотя бы в одной точке, $\phi(t_1 + t_2)(p) = \phi(t_1)(\phi(t_2)(p))$ для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, и существует такое $t' \in \mathbb{R}$, что $\pi(\phi(t')(p)) \neq p$.

2. *Существует кривая $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$, для которой G является транзитивной группой положительных гомеоморфизмов.*

В качестве следствия из теоремы 3 получается следующее достаточное условие существования кривой с заданной группой положительных гомеоморфизмов, изоморфной $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ или $\langle \mathbb{R}, + \rangle / \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Следствие 1. *Пусть X — топологическое пространство, G — его группа гомеоморфизмов, которая изоморфна $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ либо $\langle \mathbb{R}, + \rangle / \langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Пусть $G = \{g_t | t \in \mathbb{R}\}$, причем $g_u g_v = g_{u+v}$ для любых $u, v \in \mathbb{R}$, и существует хотя бы одна точка $p \in X$ такая, что отображение $g_t(p)$ непрерывно по переменной t хотя бы в одной точке, и существует такое $t' \in \mathbb{R}$, что $g_{t'}(p) \neq p$. Тогда существует кривая $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$, для которой G является транзитивной группой положительных гомеоморфизмов.*

В следующей теореме даются условия, при которых возможно построение кривой по группе гомеоморфизмов, изоморфной полупрямому произведению $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ или $\langle \mathbb{R}, + \rangle / \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ на $\mathbb{C}_2$, т. е. решается задача для групп типов 7 и 8.

Теорема 4. *Пусть X — топологическое пространство, G — его группа гомеоморфизмов, которая изоморфна полупрямому произведению группы G^+ и $\mathbb{C}_2$, где G^+ изоморфна $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ либо $\langle \mathbb{R}, + \rangle \,/\, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, a — порождающий элемент в $\mathbb{C}_2$, при этом $aga = g^{-1}$ для всех $g \in G^+$. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Существуют неподвижная точка $p \in X$ отображения a и отображение $\phi \colon \mathbb{R} \to 2^{G^+}$ со свойствами*

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi(t) = G^+, \ \ \phi(t) \neq \varnothing \text{ для всех } t \in \mathbb{R}$$

такие, что $\phi(t)(p)$ — одноточечное множество для всех $t \in \mathbb{R}$ и отображение $\pi(\phi(t)(p))$ непрерывно по переменной t хотя бы в одной точке, $\phi(t_1 + t_2)(p) = \phi(t_1)(\phi(t_2)(p))$ для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, и существует такое $t' \in \mathbb{R}$, что $\pi(\phi(t')(p)) \neq p$.

2. *Существует кривая $\alpha \colon \mathbb{R} \to X$, для которой G является транзитивной группой ориентированных гомеоморфизмов, при этом гомеоморфизм a будет являться отрицательным гомеоморфизмом данной кривой.*

В качестве следствия из теоремы 4 получается следующее достаточное условие существования кривой с заданной группой ориентированных гомеоморфизмов, изоморфной полупрямому произведению $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ или $\langle \mathbb{R}, + \rangle \,/\, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ на $\mathbb{C}_2$.

Следствие 2. *Пусть X — топологическое пространство, G — его группа гомеоморфизмов, которая изоморфна полупрямому произведению группы G^+ и $\mathbb{C}_2$, где $G^+ = \{g_t | t \in \mathbb{R}\}$ изоморфна $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ либо $\langle \mathbb{R}, + \rangle \,/\, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, a — порождающий элемент в $\mathbb{C}_2$. При этом $ag_ta = g_t^{-1}$, $g_u g_v = g_{u+v}$ для любых $u, v \in \mathbb{R}$, отображение a имеет неподвижную точку $p \in X$ такую, что $g_{t'}(p) \neq p$ при некотором $t' \in \mathbb{R}$, и отображение $g_t(p)$ непрерывно по переменной t хотя бы в одной точке. Тогда существует кривая $\alpha \colon \mathbb{R} \to X$, для которой G является транзитивной группой ориентированных гомеоморфизмов, при этом гомеоморфизм a будет являться отрицательным гомеоморфизмом данной кривой.*

Замечание 3. Образ кривой, обладающей транзитивной группой положительных гомеоморфизмов, полностью определяется этой группой и произвольной точкой кривой.

Замечание 4. Образ кривой, обладающей блочно транзитивной группой положительных гомеоморфизмов с параметром T, полностью определяется этой группой и произвольным блоком размера T этой кривой (в случае тривиальной группы этот блок единственный и совпадает с образом всей кривой).

Как видно из замечания 1, в случае конечности группы кривые можно было построить таким образом, чтобы группа G действовала на них без тривиальных гомеоморфизмов. В случае бесконечной группы такое сделать, вообще говоря, невозможно.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ со стандартной топологией, точки в этой плоскости будем записывать в полярных координатах (ρ, ϕ). Рассмотрим группу преобразований $G = \{g_t | t \in \mathbb{R}\}$, элементы которой действуют по правилу: $g_t(\rho, \phi) = (\rho, \phi + t\rho)$. Такие преобразования обратимы, так как $g_t^{-1} = g_{-t}$, и непрерывны по совокупности переменных (t, ρ, ϕ). Таким образом, имеем группу гомеоморфизмов. Кроме того, для любого $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ отображение $g_t \neq id$, так как не оставляет на месте все точки (ρ, ϕ) такие, что $\rho < 2\pi/t$. Отсюда G изоморфна $\langle \mathbb{R}, + \rangle$. Однако для любой точки $p = (\rho, \phi)$, отличной от начала координат, кривая α, построенная в теореме 3, будет являться окружностью, имеющей следующую параметризацию в полярных координатах $\alpha(t) = (\rho, \phi + t\rho)$. На такой кривой у группы G есть тривиальная подгруппа $G_0 = \{g_t \in G | t = (2\pi k)/\rho, k \in \mathbb{Z}\}$. В случае, если p является началом координат, то отображение $g_t(p)$ также задает только начало координат, на котором вся группа G действует тривиально.

Таким образом, если G — бесконечная группа, то в общем случае может не существовать кривой, для которой указанная группа будет являться группой внутренних ориентированных гомеоморфизмов. Такой группой будет являться лишь некоторая фактор-группа группы G.

3. Доказательство основных результатов

Приведем доказательства сформулированных выше результатов.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1. Покажем, что Y является инвариантным подпространством относительно гомеоморфизмов группы G. Предположим противное, пусть существуют точка $y \in Y$ и гомеоморфизм $g \in G$ такие, что $g(y) = x \notin Y$. Тогда по определению множества Y существует $g_0 \in G_0$ такой, что $g_0(x) \neq x$. Но G_0 нормальна в G, следовательно, $g^{-1}g_0g \in G_0$. Отсюда $y = g^{-1}g_0g(y) = g^{-1}g_0(x) \neq g^{-1}(x) = y$. Получено противоречие.

Покажем корректность определения действия группы G/G_0 на Y. Пусть $g_1, g_2 \in G$ такие, что $g_1G_0 = g_2G_0$. Тогда $g_1^{-1}g_2 \in G_0$, следовательно, $g_2 = g_1g_0$ для некоторого $g_0 \in G_0$. Отсюда $g_2(y) = g_1g_0(y) = g_1(y)$ для всех $y \in Y$. Эквивалентность действий G и G/G_0 на Y очевидна из корректности определения действия G/G_0 на Y.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. 1. Пусть $g \in G$ — порождающий элемент циклической группы G, $g \neq id$. Рассмотрим точку $p \in X$, которую не фиксирует гомеоморфизм g. Соединим точки p и $q = g(p)$ кривой $\beta\colon [0,1] \to X$. Тогда в качестве кривой $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$ можно взять кривую, заданную условием $\alpha(t) = g^k(\beta(t-k))$ при $t \in [k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$. То, что это отображение является кривой, очевидно, так как на $(k, k+1)$ отображение α непрерывно в силу непрерывности отображений β и g. В точках $t = k$ непрерывность имеет место в силу равенства $\alpha(k) = g^k(\beta(0)) = g^k(p) = g^{k-1}(g(p)) = g^{k-1}(\beta(1))$ и односторонней непрерывности β в точках $t = 0$ и $t = 1$.

Из построения видно, что g является положительным гомеоморфизмом кривой α со сдвигом 1.

2. Если a не обладает неподвижной точкой, то он не может быть отрицательным гомеоморфизмом никакой кривой, так как точка $\alpha(t_0)$, где t_0 — центр отрицательного гомеоморфизма, является неподвижной точкой этого отрицательного гомеоморфизма.

Если a обладает неподвижной точкой $p \in X$, рассмотрим точку $q \in X$, которая не является неподвижной для a (такая существует, так как $a \neq id$). Соединим эти точки кривой $\beta\colon [0,1] \to X$ и рассмотрим кривую α_1, заданную условием

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} \beta(t), & \text{если } t \in [0,1], \\ a(\beta(-t)), & \text{если } t \in [-1,0). \end{cases}$$

Тогда в качестве кривой α можно взять кривую $\alpha = \alpha_1\Big(\dfrac{2\operatorname{arctg}(t)}{\pi}\Big)$.

Это отображение непрерывно в силу того, что a непрерывно и $\beta(0) = p$ — неподвижная точка отображения a. Кроме того, a является отрицательным гомеоморфизмом кривой α с центром 0.

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть p — неподвижная точка отображения a. В п. 1 отображение ga имеет неподвижную точку $g^n(p)$. Действительно, $ga(g^n(p)) = ag^{-1}g^n(p) = ag^{n-1}(p) = g^{2n-1-(n-1)}a(p) = g^n(p)$.

В п. 3 отображение g^2a имеет неподвижную точку $g(p)$, так как $g^2a(g(p)) = ag^{-2}g(p) = ag^{-1}(p) = ga(p) = g(p)$.

Обозначим далее для единообразия $h = g$ в п. 1 и 2, и $h = g^2$ в п. 3, тогда отображение ha имеет неподвижную точку, обозначим ее q. Рассмотрим нетривиальную кривую $\beta\colon [0,1] \to X$ такую, что $\beta(0) = p$ и $\beta(1) = q$ (она существует, так как пространство не одноточечное). Определим непрерывную кривую γ правилом из теоремы 1

$$\gamma(t) = \begin{cases} \beta(t), & \text{если } t \in [0,1], \\ a(\beta(-t)), & \text{если } t \in [-1,0). \end{cases}$$

Заметим, что $h(\gamma(-1)) = ha(\gamma(1)) = ha(q) = q = \gamma(1)$ и, кроме того, a — отрицательный гомеоморфизм кривой γ с центром 0.

А теперь по аналогии с доказательством теоремы 1 определим кривую $\alpha\colon \mathbb{R} \to X$ правилом $\alpha(t) = h^k(\gamma(t-2k))$ при $t \in [2k-1, 2k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$. Это отображение непрерывно на интервалах $(2k-1, 2k+1)$ в силу непрерывности γ и h. Непрерывность в точках $t = 2k-1$ следует из равенства $\alpha(2k-1) = h^k(\gamma(-1)) = h^{k-1}(\gamma(1))$ и односторонней непрерывности γ в точках $t = -1$ и $t = 1$.

Покажем, что группа $\langle h\rangle \leftthreetimes \mathbb{C}_2$ является группой ориентированных гомеоморфизмов кривой α. Достаточно показать, что h — положительный гомеоморфизм этой кривой, а a — отрицательный.

Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$; существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $t \in [2k-1, 2k+1]$, тогда $h(\alpha(t)) = h^{k+1}(\gamma(t-2k)) = \alpha(t-2k+2(k+1)) = \alpha(t+2)$, т. е. h — положительный гомеоморфизм со сдвигом 2. Далее, $a(\alpha(t)) = ah^k(\gamma(t-2k)) = h^{-k}a(\gamma(t-2k)) = h^{-k}(\gamma(-t+2k)) = \alpha(-t+2k-2k) = \alpha(-t)$, т. е. a — отрицательный гомеоморфизм с центром 0.

Таким образом, доказаны п. 1 и 2 теоремы и условие существования в п. 3. Кроме того, в п. 3 очевидно, что если бы существовала кривая, для которой G была бы группой ориентированных гомеоморфизмов, то ga был бы ее отрицательным гомеоморфизмом, а следовательно, обладал бы центром, образ которого является неподвижной точкой этого отображения.

Теорема 2 доказана.

Доказательство замечания 1. Рассмотрим для каждого нетривиального гомеоморфизма $g_i \in G$ точку $p_i \in X$ такую, что $g_i(p_i) \neq p_i$, и кривую β в доказательствах теорем 1 и 2 между точками p и q будем проводить через точки $\{p_i\}$. Тогда ни один гомеоморфизм из G не будет действовать тривиально на β, а следовательно, и на α.

Замечание доказано.

Для доказательства замечания 2 нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 2 [8]. *Пусть X — линейно связное гладкое многообразие. Тогда для любых двух точек $p, q \in X$ и любых двух векторов $\vec{x} \in T_pX$ и $\vec{y} \in T_qX$ существует регулярная кривая γ такая, что $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\dot\gamma(0) = \vec{x}$, $\dot\gamma(1) = \vec{y}$.*

Доказательство замечания 2. Поскольку данное замечание является усилением теорем 1 и 2 для случая кривых на гладких многообразиях, будем доказывать теоремы 1 и 2 в предположениях замечания. Для доказательства п. 1 теоремы 1 в данном случае соединим точки p и q регулярной кривой β такой, что $Dg_{\beta(0)}\dot\beta(0) = \dot\beta(1)$, причем вектор $\dot\beta(0)$ можно выбрать произвольным отличным от $\vec{0}$. Существование такой кривой гарантирует утверждение 2. Далее построим кривую α по той же схеме, как и в п. 1 теоремы 1:

$$\alpha(t) = g^l(\beta(t-l)) \text{ при } t \in [l, l+1],\ l \in \mathbb{Z}.$$

Она регулярна на интервалах вида $(l, l+1)$, $l \in \mathbb{Z}$, в силу того, что дифференциал диффеоморфного отображения отображает ненулевые векторы в ненулевые векторы, и непрерывна на $\mathbb{R}$ по п. 1 теоремы 1. В точках вида $t = l$, $l \in \mathbb{Z}$, кривой α также будет иметь место регулярность в силу равенства $Dg_{\beta(0)}\dot\beta(0) = \dot\beta(1)$.

Для доказательства п. 2 теоремы 1 в условиях замечания 2 заметим сначала, что множество M неподвижных точек некоторого гомеоморфизма a гладкого многообразия X замкнуто. Действительно, пусть $\{p_i\} \subseteq M$ — сходящаяся к $p_0 \in X$ последовательность, тогда $a(p_i) = p_i$. Переходим к пределу в этом равенстве при $i \to \infty$ и пользуемся непрерывностью отображения a. Получаем $a(p_0) = p_0$, что и доказывает замкнутость M. В случае $a \neq id$ в силу линейной связности многообразия X имеем $\partial M \neq \varnothing$.

Пусть теперь $a \neq id$ — диффеоморфизм гладкости k такой, что $a^2 = id$, и пусть точка $p \in \partial M$. Покажем, что существует $\vec{x} \in T_pX\backslash\{\vec{0}\}$ такой, что $Da_p(\vec{x}) = -\vec{x}$. Рассмотрим некоторую карту $V \subseteq \mathbb{R}^n$, где n — размерность многообразия X, содержащую точку p. Далее рассмотрение будем проводить в этой карте, при этом отождествляя соответствующие точки многообразия и точки этой карты. Для удобства будем считать, что в этой карте введена стандартная евклидова метрика. Рассмотрим последовательность точек $\{p_i\} \subseteq V$, которые не являются неподвижными точками a и которые сходятся к p. Рассмотрим вторую последовательность $q_i = a(p_i) \neq p_i$, она также сходится к p в силу непрерывности a. Обозначим $q_i = p_i + \vec{b_i}$. Имеем

$$a(q_i) = p_i = q_i - \vec{b}_i,$$
$$a(q_i) = a(p_i + \vec{b}_i) = a(p_i) + Da_{p_i}\vec{b}_i + o(|\vec{b}_i|) = q_i + Da_{p_i}\vec{b}_i + o(|\vec{b}_i|),$$
$$-\vec{b}_i = Da_{p_i}\vec{b}_i + o(|\vec{b}_i|).$$

Поделим обе части равенства на $|\vec{b}_i| \neq 0$. Обозначив $\vec{b}_i/|\vec{b}_i| = \vec{x}_i$, получаем

$$-\vec{x}_i = Da_{p_i}\vec{x}_i + o(|\vec{b}_i|^0).$$

Последовательность $\vec{x}_i$ ограничена и, следовательно, имеет сходящуюся к некоторому вектору $\vec{x}$ подпоследовательность. Переходим по этой подпоследовательности к пределу при $i \to \infty$ $-\vec{x} = Da_p\vec{x}$, причем $\vec{x} \neq \vec{0}$, так как $|\vec{x}_i| = 1$.

Соединяем теперь точку p и некоторую точку q, которая не является неподвижной для отображения a, регулярной кривой β и существование которой гарантируется утверждением 2. Принимаем $\dot{\beta}(0) = \vec{x}$, а $\dot{\beta}(1)$ произвольным отличным от $\vec{0}$. Тогда кривая

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} \beta(t), & \text{если } t \in [0,1], \\ a(\beta(-t)), & \text{если } t \in [-1,0), \end{cases}$$

которая построена в п. 2 теоремы 1, будет также регулярной. На $(-1,0)$ это обеспечивается диффеоморфностью отображения a, а в точке $t = 0$ равенством $\dot{\alpha}_1(+0) = \dot{\beta}(+0) = -Da_p\dot{\beta}(+0) = \dot{\alpha}_1(-0)$.

Для доказательства теоремы 2 в условиях замечания кривую γ из доказательства теоремы 2 будем строить так же, как и построенную выше кривую α_1, с той лишь разницей, что точку q надо выбирать граничной точкой множества неподвижных точек отображения ha, а вектор $\dot{\beta}(1)$ таким образом, что $\dot{\beta}(1) \neq \vec{0}$ и $D(ha)_q\dot{\beta}(1) = -\dot{\beta}(1)$ (такой существует, так как $ha \neq id$ и $(ha)^2 = id$).

Далее строим кривую α так же, как в теореме 2: $\alpha(t) = h^k(\gamma(t-2k))$ при $t \in [2k-1, 2k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как $\beta(t) = \alpha(t)$ при $t \in [0,1]$ и $\alpha(t) = h(\gamma(t-2)) = ha(\beta(2-t))$ при $t \in [1,2]$, при $t \to 1$ имеют место равенства $\dot{\beta}(1-0) = \dot{\alpha}(1-0)$ и $\dot{\alpha}(1+0) = -D(ha)_q\dot{\beta}(1-0)$, и, следовательно, $\dot{\alpha}(1-0) = \dot{\alpha}(1+0)$.

Таким образом, получаем, что кривая α регулярна на интервале $(0,2)$, также она регулярна на $(-1,1)$, так как на этом интервале она совпадает с γ. Следовательно, α регулярна на $(0,3)$. Но для любой точки $t \in \mathbb{R}$ существует точка $t' \in (0,3)$ такая, что $t = t' + 2k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда, в силу равенства $\alpha(t) = h^k(\alpha(t-2k))$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ и диффеоморфности отображения h получаем, что α регулярна на $\mathbb{R}$.

Замечание доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Покажем, что из п. 1 следует п. 2. Рассмотрим отображение $\alpha(t) = \pi(\phi(t)(p))$, оно непрерывно в некоторой точке, обозначим ее t_0. Покажем, что это отображение непрерывно в любой точке $t \in \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольную точку $t_1 \in \mathbb{R}$. Поскольку $\phi(t+t_1)(p) = \phi(t_1-t_0)(\phi(t+t_0)(p))$, то в обеих частях равенства стоят одноточечные множества, поэтому имеем $\alpha(t+t_1) = \pi(\phi(t_1-t_0)(\alpha(t+t_0)))$. Следовательно, $\pi(\phi(t_1-t_0)(\alpha(t+t_0))) = g(\alpha(t+t_0))$ для любого $g \in \phi(t_1-t_0)$. Отсюда в силу непрерывности $\alpha(t)$ при $t = t_0$ и гомеоморфности отображения из g на X получаем, что $\alpha(t)$ непрерывна при $t = t_1$.

Таким образом, отображение α является непрерывным, и его образ не является одноточечным, т. е. α — кривая, причем каждое множество $\phi(t)$ состоит только из положительных гомеоморфизмов этой кривой со сдвигом t. Поскольку любой элемент $g \in G$ попадает хотя бы в одно множество $\phi(t)$, группа G является группой положительных гомеоморфизмов кривой α. А так как все $\phi(t) \neq \varnothing$, G является транзитивной группой положительных гомеоморфизмов этой кривой.

Покажем, что из п. 2 следует п. 1. Пусть $\alpha(t)$ — кривая, для которой G является транзитивной группой положительных гомеоморфизмов. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим множество G_t всех положительных гомеоморфизмов кривой α, обладающих сдвигом t. Рассмотрим отображение $\phi\colon \mathbb{R} \to 2^G$, действующее по правилу $\phi(t) = G_t$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \phi(t) = G.$$

В силу транзитивности группы G все $\phi(t) \neq \varnothing$. В качестве точки $p \in X$ возьмем произвольную точку $\alpha(t_0)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$. Докажем, что условие $\phi(t_1+t_2)(p) = \phi(t_1)(\phi(t_2)(p))$ выполнено. Очевидно, что в обеих частях этого равенства стоят одноточечные множества. Рассмотрим произвольные $g_1 \in \phi(t_1)$, $g_2 \in \phi(t_2)$, $g \in \phi(t_1+t_2)$. Имеем

$$\pi(\phi(t_1+t_2)(p)) = g(\alpha(t_0)) = \alpha(t_0+t_1+t_2);$$

$$\pi(\phi(t_2)(p)) = g_2(\alpha(t_0)) = \alpha(t_0+t_2);$$

$$\pi(\phi(t_1)(\phi(t_2)(p))) = \pi(\phi(t_1)(\pi(\phi(t_2)(p)))) = g_1(\alpha(t_0+t_2)) = \alpha(t_0+t_2+t_1).$$

Следовательно,

$$\phi(t_1+t_2)(p) = \{\pi(\phi(t_1+t_2)(p))\} = \{\pi(\phi(t_1)(\phi(t_2)(p)))\} = \phi(t_1)(\phi(t_2)(p)).$$

В силу непрерывности кривой α отображение $\pi(\phi(t)(p)) = \alpha(t+t_0)$ будет непрерывно во всех точках $t \in \mathbb{R}$, а в силу неодноточечности кривой α существует $t' \in \mathbb{R}$ такое, что $p = \alpha(t_0) \neq \alpha(t') = \pi(\phi(t')(p))$.

Теорема 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Покажем, что из п. 1 следует п. 2. Группа G^+ и неподвижная точка p отображения a удовлетворяют условиям теоремы 3, поэтому рассмотрим кривую α, построенную в теореме 3. Группа G^+ является для нее транзитивной группой положительных гомеоморфизмов.

Рассмотрим действие отображения a на эту кривую. Зафиксируем для каждого $t \in \mathbb{R}$ гомеоморфизм $g_t \in G^+$, обладающий сдвигом t. Тогда, так как $\alpha(t) = g_t(\alpha(0)) = g_t(p)$, имеем $a(\alpha(t)) = ag_t(p) = g_t^{-1}a(p) = g_t^{-1}(p)$. Поскольку $g_t(\alpha(t_0)) = \alpha(t+t_0)$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$, имеем при $t_0 = -t$

$$g_t(\alpha(-t)) = \alpha(0),$$

$$\alpha(-t) = g_t^{-1}(\alpha(0)).$$

Отсюда, так как $\alpha(0) = p$, получаем $g_t^{-1}(p) = \alpha(-t)$, т. е. $a(\alpha(t)) = \alpha(-t)$. Таким образом, a — отрицательный гомеоморфизм с центром 0 для кривой α.

Покажем, что из п. 2 следует п. 1. Пусть α — кривая, G — ее транзитивная группа ориентированных гомеоморфизмов, $a \in G$ — отрицательный гомеоморфизм кривой. Отображение a имеет неподвижную точку, ею является $\alpha(t_0)$, где t_0 — центр a. Пусть G^+ — максимальная подгруппа положительных гомеоморфизмов в G. Она транзитивна по определению транзитивной группы ориентированных гомеоморфизмов и, следовательно, удовлетворяет условию теоремы 3. При этом, поскольку в доказательстве теоремы 3 в качестве точки p можно было взять любую точку кривой α, возьмем в данном случае $\alpha(t_0)$ в качестве точки p.

Теорема 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о замечания 3. Пусть кривая β обладает транзитивной группой положительных гомеоморфизмов и $p \in \beta(\mathbb{R})$. В силу того, что G действует транзитивно на точках кривой β, имеем $\{g(p) \mid g \in G\} = \beta(\mathbb{R})$.

Замечание доказано.

Доказательство замечания 4. Пусть кривая β обладает блочно транзитивной группой положительных гомеоморфизмов с параметром T. Рассмотрим произвольный ее блок $\beta(I_0)$ размера T, где $I_0 = [t_0, t_0 + T)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$. В силу того, что G действует транзитивно на блоках разбиения $\{\beta(I_k) \mid I_k = [t_0 + kT, t_0 + (k+1)T), k \in \mathbb{Z}\}$ кривой β, имеем

$$\bigcup_{g \in G} g(\beta(I_0)) = \beta(\mathbb{R}).$$

Замечание доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аминов Ю.А.** Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 160 с.
2. **Ибрагимов Н.Х.** Группы преобразований в математической физике М.: Наука, 1983. 281 с.
3. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 310 с.
4. **Никульчев Е. В.** Групповой анализ и моделирование динамически сложных систем // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тр. 8-го Междунар. семинара, посвящ. памяти Е.С. Пятницкого. М.: ИПУ РАН, 2004. С. 134–136.
5. **Рашевский П.К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Единориал УРСС, 2003. 664 с.
6. **Рогозинников Е.А.** Геометрия обобщенных многообразий. Кривые на обобщенных многообразиях, их группы движений и подобий / Урал. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 05.10.2010, № 570-В2010. 39 с.
7. **Рогозинников Е.А.** Группы движений кривых с постоянными и периодическими кривизнами // Вестн. УрГУПС. 2011. № 2 (10). С. 65–72.
8. **Рогозинников Е.А.** Группы преобразований кривых. Кривые вдоль многообразий и их обобщения. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 104 с.
9. **Рогозинников Е.А.** Группы преобразований отображений и определяемость кривых группами преобразований / Урал. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 18.02.2011, № 74-В2011. 26 с.
10. **Рогозинников Е.А.** О связи геометрических свойств кривых со свойствами их групп движений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 227–233.
11. **Розов Н.Х.** Феликс Клейн и его эрлангенская программа // Мат. просв. Сер. 3. М.: МЦНМО, 1999. Вып. 3. С. 49–55.
12. **Сизый С.В.** Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Физматлит, 2007. 376 с.
13. **Сизый С.В., Рогозинников Е.А.** О группах движений кривых на многообразиях // Вестн. УрГУПС. 2010. №2(6). С. 47–56.
14. **Шнирельман А.И.** О геометрии группы диффеоморфизмов и динамике идеальной несжимаемой жидкости // Мат. сб. 1985. Т. 128 (170), № 1(9). С. 82–109.

Рогозинников Евгений Алексеевич
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: locbox@bk.ru

Поступила 10.12.2010

Том 18 № 3 2012

УДК 519.853

О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОГО МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

Для задачи выпуклого программирования применяется метод невязки — одна из стандартных процедур регуляризации некорректных оптимизационных задач. Исследуется связь этого метода с методом регуляризованной функции Лагранжа при оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования. Данный подход позволяет уменьшить число анализируемых классов несобственности. Формулируются условия и устанавливаются оценки сходимости метода.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод невязки, регуляризованная функция Лагранжа.

V. D. Skarin. On the application of a regularization method for the correction of improper problems of convex programming.

The residual method, which is one of the standard regularization procedures for ill-posed optimization problems, is applied to a convex programming problem. The connection between this method and the regularized Lagrange function method is investigated in the case of optimal correction of improper problems of convex programming. This approach allows one to decrease the number of impropriety classes to be analyzed. Conditions are formulated and convergence estimates of the method are established.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, residual method, regularized Lagrange function.

Введение

В работах [1; 2] рассматривались способы коррекции несобственных задач [3] выпуклого программирования (НЗ ВП), основанные на применении регуляризованной по обеим переменным функции Лагранжа. Подход из [1] предполагал предварительное сведение исходной постановки к близкой промежуточной задаче с помощью метода регуляризации Тихонова [4]. В работе [2] с аналогичной целью применялась идея другого распространенного метода регуляризации некорректных задач — метода квазирешений [4]. Использование дополнительных регуляризующих процедур позволило уменьшить в ряде случаев число возможных анализируемых типов несобственности задач ВП.

Рассмотрим задачу ВП
$$\min\{f_0(x)\colon x \in X\}, \tag{1}$$
где $X = \{x\colon f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ функции ($i = 0, 1, \ldots, m$). Двойственная (по Лагранжу) к (1) задача имеет вид
$$\sup_{\lambda \ge 0} \inf_x L(x, \lambda), \tag{2}$$
где $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ — функция Лагранжа для задачи (1), $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$.

Задача (1) называется *несобственной* [3], если для нее не выполняется соотношение двойственности $f^* = L^*$, где f^* и L^* — оптимальные значения задач (1) и (2) соответственно. Во многом наличие свойства несобственности определяется пустотой или непустотой допустимых множеств X в задаче (1) и $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+\colon \inf_x L(x, \lambda) > -\infty\}$ в задаче (2). Если $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00273) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

то говорят [3], что (1) — НЗ ВП 1-го рода; если $X \neq \varnothing,\ \Lambda = \varnothing$, то — НЗ ВП 2-го рода, и, наконец, если $X = \varnothing,\ \Lambda = \varnothing$, то (1) — НЗ ВП 3-го рода.

Наиболее часто встречаются и достаточно подробно исследованы НЗ ВП 1-го рода — задачи с противоречивыми ограничениями. Интерес к противоречивым моделям обусловлен как потребностями математической теории, так и необходимостью численного анализа прикладных задач с противоречивыми условиями, прежде всего производственно-экономических. Для последних характерны, с одной стороны, погрешности в моделировании сложной экономической системы, а с другой — противоречия, присущие реальному объекту (дефицит ресурсов, многокритериальность и тому подобное).

Частота возникновения несобственных задач делает актуальной необходимость разработки теории и методов их численной аппроксимации (коррекции), т. е. объективных процедур "развязки" противоречивых ограничений, превращения несобственной модели в совокупность разрешимых задач и выбора среди них оптимальной коррекции.

В настоящей работе предлагается метод оптимальной коррекции НЗ ВП, основанный на применении регуляризованной функции Лагранжа

$$L_\sigma(x,\lambda) = L(x,\lambda) + \alpha\,\|x\|^2 - \beta\,\|\lambda\|^2,$$

$\sigma = [\alpha,\beta] > 0,\ \|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы, при этом для построения промежуточной аппроксимирующей задачи используется известный метод регуляризации некорректных задач ВП — метод невязки [4].

Применение метода невязки к несобственным задачам позволяет уменьшить число анализируемых типов несобственности. Сначала выводятся оценки, характеризующие сходимость метода невязки для случаев точного и приближенного задания функций исходной задачи. Затем исследуется связь между нахождением седловых точек функции $L_\sigma(x,\lambda)$ и решением аппроксимирующей задачи. Отдельно обсуждается работа предлагаемого метода коррекции для задачи ВП с противоречивыми ограничениями и для задач с совместной системой ограничений.

1. Метод невязки и задача ВП

Метод невязки регуляризации некорректной задачи ВП (1) состоит [4] в решении последовательности задач

$$\min\{\|x\|^2\colon\ x \in X \cap M_\delta\}, \tag{3}$$

где $M_\delta = \{x\colon f_0(x) \le \delta\}$, δ — некоторый числовой параметр. Если (1) — разрешимая задача ВП с оптимальным значением f^*, то для каждого $\delta \ge f^*$ задача (3) имеет единственное решение x^*_δ. Так как $M_{\delta_1} \supset M_{\delta_2}$ при $\delta_1 \ge \delta_2$, то $\|x^*_{\delta_1}\| \le \|x^*_{\delta_2}\| \le \ldots \le \|x^*_0\|$, где x^*_0 — решение (1) с минимальной нормой (нормальное решение). Таким образом, все точки x^*_δ лежат в компактном множестве $\{x\colon \|x\| \le \|x^*_0\|\}$, при этом существует предельная точка $\widetilde{x}$ последовательности $\{x^*_\delta\}$ при $\delta \to f^*$, $\widetilde{x} \in X$, $f_0(\widetilde{x}) = f^*$ и $\|\widetilde{x}\| \le \|x^*_0\|$. Из единственности x^*_0 следует $\widetilde{x} = x^*_0$ и $\lim\limits_{\delta\to f^*} x^*_\delta = x^*_0$.

Для установления оценок сходимости метода сведем задачу (3) к близкой задаче минимизации квадратичной штрафной функции

$$\min F_\delta(x,r), \tag{4}$$

где $F_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^m r_i f_i^{+2}(x) + r_0\big(f_0(x)-\delta\big)^{+2},\ \ r = [r_0, r_1, \ldots, r_m] > 0.$

Из теории метода штрафных функций известно ([5, теорема 25.3]), что при достаточно слабых условиях на задачу (3) решения x^*_δ и $\widetilde{x}_{r,\delta}$ задач (3) и (4) соответственно связывает оценка $\|\widetilde{x}_{r,\delta} - x^*_\delta\| \le C(1/\sqrt{\overline{r}})$, где C — константа, $\overline{r} = \min\limits_{0\le i\le m} r_i$. Установим далее ряд соотношений между решениями задач (1) и (4).

Теорема 1. *Пусть задача* (1) *разрешима и для нее выполнено условие Слейтера: существует точка $x^0 \in X$, для которой $f(x^0) < 0$. Тогда решение $\widetilde{x}_{r,\delta}$ задачи* (4) *для любых $r > 0$ и $\delta \geq f^*$ удовлетворяет неравенствам*

$$f_i^+(\widetilde{x}_{r,\delta}) \leq \frac{\|x_0^*\|}{2\sqrt{r_i}}, \qquad i = \overline{1,m}; \tag{5}$$

$$(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ \leq \frac{\|x_0^*\|}{2\sqrt{r_0}}; \tag{6}$$

$$|f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - f^*| \leq \max\left\{\frac{\|x_0^*\|}{2}\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i^*}{\sqrt{r_i}}, \frac{\|x_0^*\|}{2\sqrt{r_0}} + \triangle\right\}, \tag{7}$$

где x_0^* — нормальное решение (1), *$f^* = f_0(x_0^*)$, $\lambda^* = [\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*]$ — соответствующий x_0^* вектор множителей Лагранжа, $\triangle = \delta - f^*$.*

Доказательство. Из условия $(\bigtriangledown_x F_\delta(\widetilde{x}_{r,\delta},\ r),\ x - \widetilde{x}_{r,\delta}) = 0$ и выпуклости функций $f_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ получим для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - \widetilde{x}_{r,\delta}\|^2 - (x,\ x - \widetilde{x}_{r,\delta}) = -(\widetilde{x}_{r,\delta},\ x - \widetilde{x}_{r,\delta})$$

$$= \sum_{i=1}^m r_i f_i^+(\widetilde{x}_{r,\delta})(\nabla f_i(\widetilde{x}_{r,\delta}), x - \widetilde{x}_{r,\delta}) + r_0(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - \delta)^+(\nabla f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}),\ x - \widetilde{x}_{r,\delta})$$

$$\leq \sum_{i=1}^m r_i f_i^+(\widetilde{x}_{r,\delta})[f_i(x) - f_i(\widetilde{x}_{r,\delta})] + r_0(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - \delta)^+[f_0(x) - f_0(\widetilde{x}_{r,\delta})].$$

Отсюда при $x = x_0^*$ следует

$$\sum_{i=1}^m r_i {f_i^+}^2(\widetilde{x}_{r,\delta}) + r_0(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - \delta)^{+2} \leq -\|x_0^* - \widetilde{x}_{r,\delta}\|^2 + (x_0^*,\ x_0^* - \widetilde{x}_{r,\delta})$$

$$= -\big(\|x_0^* - \widetilde{x}_{r,\delta}\| - \frac{1}{2}\|x_0^*\|\big)^2 + \frac{\|x_0^*\|^2}{4} \leq \frac{\|x_0^*\|^2}{4}. \tag{8}$$

Из последнего неравенства непосредственно вытекают оценки (5), (6).

В силу определения точек x_0^* и λ^* имеем

$$f^* - f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) = f_0(x_0^*) - f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i^+(\widetilde{x}_{r,\delta}). \tag{9}$$

С другой стороны,

$$f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - f^* = f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - \delta + \delta - f^* \leq (f_0(\widetilde{x}_{r,\delta}) - \delta)^+ + \triangle. \tag{10}$$

Оценивая (9) и (10) с помощью соотношений (5) и (6) соответственно, получим (7).

Теорема доказана.

Точка x_0^* является единственным решением неравенства $g(x) \leq 0$, где $g(x) = \max\{\|x\|^2 - \|x_0^*\|^2,\ f_i(x)\ (i = \overline{1,m}),\ f_0(x) - f^*\}$. Из неравенства $F_\delta(\widetilde{x}_{r,\delta}, r) \leq F_\delta(x_0^*, r)$ следует, что $\|\widetilde{x}_{r,\delta}\| \leq \|x_0^*\|$ для любых r и δ. Учитывая далее оценки (5)–(7), получаем, что $g(\widetilde{x}_{r,\delta}) \to 0$ при $\bar{r} = \min\limits_{0 \leq i \leq m} r_i \to 0$, $\triangle \to 0$. Так как ограничение $g(x) \leq 0$ является корректным [5], то $\lim\limits_{\substack{\bar{r}\to 0\\ \delta\to f^*}} \widetilde{x}_{r,\delta} = x_0^*$.

Установим количественную характеристику сходимости $\widetilde{x}_{r,\delta}$ к x_0^*. Запишем задачу определения нормального решения x_0^* как

$$\min\{\|x\|^2 \colon x \in X,\ f_0(x) \leq f^*\}. \tag{11}$$

Функция Лагранжа для (11) имеет вид $H(x,u,u_0)=\|x\|^2+(u,\ f(x))+u_0(f_0(x)-f^*)$, $u\in\mathbb{R}^m_+$, $u_0\in\mathbb{R}^1_+$. Обозначим через $[x^*_0,u^*,u^*_0]$ седловую точку функции $H(x,u,u_0)$ в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+\times\mathbb{R}^1_+$. Заметим, что при условиях теоремы 1 данная седловая точка существует, при этом можно считать $u^*_0>0$ (подробнее об этом см. разд. 4).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любых* $r>0$, $\delta>f^*$ *справедлива оценка*

$$\|\widetilde{x}_{r,\delta}-x^*_0\|^2\le\frac{1}{16}\sum_{i=0}^{m}\frac{u^{*2}_i}{r_i}+\frac{1}{2}u^*_0\,\triangle,$$

где u^*_i — компоненты вектора u^*, $i=\overline{1,m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование седловой точки $[x^*_0,u^*,u^*_0]$ для функции $H(x,u,u_0)$ эквивалентно выполнению для (11) условий Куна — Таккера:

$$\triangledown_x H(x^*_0,u^*,u^*_0)=0,\qquad u^*_i f_i(x^*_0)=0,\qquad i=\overline{1,m},\qquad u^*_0(f_0(x^*_0)-f^*)=0.$$

Из этих условий следуют соотношения

$$2(x^*_0,\ x^*_0-\widetilde{x}_{r,\delta})=\sum_{i=1}^{m}u^*_i(\triangledown f_i(x^*_0),\,\widetilde{x}_{r,\delta}-x^*_0)+u^*_0(\triangledown f_0(x^*_0),\,\widetilde{x}_{r,\delta}-x^*_0)$$

$$\le\sum_{i=1}^{m}u^*_i[f_i(\widetilde{x}_{r,\delta})-f_i(x^*_0)]+u^*_0[f_0(\widetilde{x}_{r,\delta})-f_0(x^*_0)]=\sum_{i=1}^{m}u^*_i f_i(\widetilde{x}_{r,\delta})+u^*_0(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta})-f^*).$$

Отсюда

$$2(x^*_0,\ x^*_0-\widetilde{x}_{r,\delta})\le\sum_{i=1}^{m}u^*_i f^+_i(\widetilde{x}_{r,\delta})+u^*_0(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta})-\delta)^+ +u^*_0\ \triangle\,.$$

Подставим это неравенство в (8). Получим

$$\|\widetilde{x}_{r,\delta}-x^*_0\|^2\le-\sum_{i=1}^{m}\left[r_i f^{+2}_i(\widetilde{x}_{r,\delta})-\frac{1}{2}u^*_i f^+_i(\widetilde{x}_{r,\delta})\right]$$

$$-\left[r_0(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta})-\delta)^{+2}-\frac{1}{2}u^*_0(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta})-\delta)^+\right]+\frac{1}{2}u^*_0\,\triangle=-\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sqrt{r_i}f^+_i(\widetilde{x}_{r,\delta})-\frac{u^*_i}{4\sqrt{r_i}}\right)^2-\frac{u^{*2}_i}{16\,r_i}\right]$$

$$-\left[\left(\sqrt{r_0}(f_0(\widetilde{x}_{r,\delta})-\delta)^+-\frac{u^*_0}{4\sqrt{r_0}}\right)^2-\frac{u^{*2}_0}{16\,r_0}\right]+\frac{1}{2}\,u^*_0\triangle\le\frac{1}{16}\sum_{i=0}^{m}\frac{u^{*2}_i}{r_i}+\frac{1}{2}u^*_0\,\triangle\,.$$

Теорема доказана.

2. Задача ВП с неточно заданной информацией

Пусть в задаче (1) вместо $f_i(x)$ известны непрерывные функции $f^\varepsilon_i(x)$, определенные на $\mathbb{R}^n$, такие что

$$|f^\varepsilon_i(x)-f_i(x)|<\varepsilon\qquad(\forall x\in\mathbb{R}^n,\ i=0,1,\dots,m),\qquad\varepsilon>0.\tag{12}$$

Тогда вместо (4) возникает задача

$$\min_x F^\varepsilon_\delta(x,r),\tag{13}$$

где $F^\varepsilon_\delta(x,r)$ получается при замене в (4) функций $f_i(x)$ на $f^\varepsilon_i(x)$:

$$F^\varepsilon_\delta(x,r)=\|x\|^2+\sum_{i=1}^{m}r_i[f^{\varepsilon+}_i(x)]^2+r_0(f^\varepsilon_0(x)-\delta)^{+2},\qquad r=[r_0,r_1,\dots,r_m]>0.$$

.

Лемма 1. *Задача* (13) *разрешима для любых* r, δ *и* ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенств (12) следует

$$F_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^m r_i f_i^{+2}(x) + r_0(f_0(x)-\delta)^{+2}$$

$$= F_\delta^\varepsilon(x,r) + \sum_{i=1}^m r_i\Big[f_i^{+2}(x) - f_i^{\varepsilon+2}(x)\Big] + r_0\Big[(f_0(x)-\delta)^{+2} - (f_0^\varepsilon(x)-\delta)^{+2}\Big]$$

$$\le F_\delta^\varepsilon(x,r) + \varepsilon\sum_{i=1}^m r_i\big(2f_i^{\varepsilon+}(x)+\varepsilon\big) + \varepsilon\, r_0\big[2(f_0^\varepsilon(x)-\delta)^+ + \varepsilon\big]$$

$$\le F_\delta^\varepsilon(x,r) + \sum_{i=1}^m r_i\Big(f_i^{\varepsilon+2}(x)+\varepsilon^2\Big) + r_0\Big[\big(f_0^\varepsilon(x)-\delta\big)^{+2} + \varepsilon^2\Big] + \varepsilon^2\sum_{i=0}^m r_i$$

$$= 2F_\delta^\varepsilon(x,r) - \|x\|^2 + 2\,\varepsilon^2\sum_{i=0}^m r_i \le 2F_\delta^\varepsilon(x,r) + 2\,\varepsilon^2\sum_{i=0}^m r_i.$$

Поэтому, если $x' \in M_1^\varepsilon = \{x\colon F_\delta^\varepsilon(x,r) \le C_1\}$, где $C_1 = C_1(\varepsilon, r, \delta)$, то

$$F_\delta(x',r) \le 2\,C_1 + 2\,\varepsilon^2\sum_{i=0}^m r_i = C_2(\varepsilon, r, \delta).$$

Так как $F_\delta(x,r)$ — сильно выпуклая по x функция, то множество $M_2 = \{x\colon F_\delta(x,r) \le C_2(\varepsilon,r,\delta)\}$ ограничено для любых фиксированных ε, r, δ. Следовательно, ограничено и множество M_1^ε, а непрерывная функция $F_\delta^\varepsilon(x,r)$ достигает минимума по x на $\mathbb{R}^n$ для любых ε, r, δ.

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует существование точки $x_{r,\delta}^\varepsilon$ — решения задачи (13):

$$F_\delta^\varepsilon(x_{r,\delta}^\varepsilon, r) = \min_x F_\delta^\varepsilon(x,r).$$

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то для любых* $r = [r_0, r_1, \ldots, r_m] > 0$, $\delta > f^*$, $\varepsilon \ge 0$ *справедливы оценки*:

1) $f_i^+(x_{r,\delta}^\varepsilon) \le \dfrac{\sqrt{B_0}}{\sqrt{r_i}} + \varepsilon, \qquad i = \overline{1,m}$;

2) $(f_0(x_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ \le \dfrac{\sqrt{B_0}}{\sqrt{r_0}} + \varepsilon$;

3) $|f_0^+(x_{r,\delta}^\varepsilon) - f^*| \le \max\left\{\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i^*\big(\dfrac{\sqrt{B_0}}{\sqrt{r_i}} + \varepsilon\big),\ \dfrac{\sqrt{B_0}}{\sqrt{r_0}} + \varepsilon + \triangle\right\}$;

4) $\|x_{r,\delta}^\varepsilon\| \le \sqrt{B_0}$, *где* $B_0 = \|x_0^*\|^2 + \varepsilon^2\sum\limits_{i=0}^m r_i$, $\triangle = \delta - f^*$, λ_i^* — *из теоремы* 1, $i = \overline{1,m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки $x_{r,\delta}^\varepsilon$ следует неравенство $F_\delta^\varepsilon(x_{r,\delta}^\varepsilon, r) \le F_\delta^\varepsilon(x_0^*, r)$. Отсюда, учитывая, что $f_i^\varepsilon(x_0^*) \le f_i(x_0^*) + \varepsilon \le \varepsilon$, $f_0^\varepsilon(x_0^*) - \delta \le f_0(x_0^*) - \delta + \varepsilon < \varepsilon$, получаем $\|x_{r,\delta}^\varepsilon\|^2 + \sum_{i=1}^m r_i\big[f_i^{\varepsilon+}(x_{r,\delta}^\varepsilon)\big]^2 + r_0\big(f_0^\varepsilon(x_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta\big)^{+2} \le \|x_0^*\|^2 + \varepsilon^2\sum_{i=0}^m r_i = B_0$. Из этого соотношения непосредственно вытекают оценки 1), 2), 4).

Для вывода оценки 3) воспользуемся последовательно неравенствами (9), (10) (с заменой $\widetilde{x}_{r,\delta}$ на $x_{r,\delta}^\varepsilon$) и оценками 1), 2).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\varepsilon \to 0$, $\triangle \to 0$, $r_i \to +\infty$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *при этом существует константа* K *такая, что* $0 < r_i \le K \min\limits_{0\le i\le m} r_i$. *Тогда* $x_{r,\delta}^\varepsilon \to x_0^*$.

Если в теореме 3 вместо точки $x^\varepsilon_{r,\delta}$ взять $\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}$ — приближенное решение задачи (13) с заданной точностью $\xi \geq 0$

$$F^\varepsilon_\delta(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}, r) \leq \min_x F^\varepsilon_\delta(x, r) + \xi,$$

то оценки 1)–4) изменяются незначительно. Отличие будет состоять в том, что величину B_0 надо будет заменить на $B_1 = \|x^*_0\|^2 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^m r_i + \xi$.

3. Регуляризованная функция Лагранжа и НЗ ВП 1-го рода

Используя регуляризованную функцию Лагранжа $L_\sigma(x, \lambda)$, построим для задачи (1) прямую и двойственную функции

$$\varphi_\sigma(x) = \max_{\lambda \geq 0} L_\sigma(x, \lambda), \qquad \psi_\sigma(\lambda) = \min_x L_\sigma(x, \lambda),$$

которые определены всюду на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m_+$ соответственно.

Нетрудно видеть, что $\varphi_\sigma(x) = L_\sigma(x, \lambda(x))$, где $\lambda(x) = \dfrac{1}{2\beta} f^+(x)$. Для этого достаточно убедиться в справедливости неравенства $(\bigtriangledown_\lambda L_\sigma(x, \lambda(x)),\ \lambda - \lambda(x)) \leq 0$ для всех $\lambda \geq 0$. Таким образом,

$$\varphi_\sigma(x) = f_0(x) + \frac{1}{4\beta} \|f^+(x)\|^2 + \alpha \|x\|^2.$$

Очевидно, что $\varphi_\sigma(x)$ — сильно выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция. Также легко проверяется свойство сильной вогнутости функции $\psi_\sigma(\lambda)$ на $\mathbb{R}^m_+$. Следовательно, существуют единственные точки $x^\sigma = \arg\min_x \varphi_\sigma(x)$, $\lambda^\sigma = \arg\max_{\lambda \geq 0} \psi_\sigma(\lambda)$, при этом согласно теореме о минимаксе (см., например, [7])

$$\varphi_\sigma(x^\sigma) = \psi_\sigma(\lambda^\sigma) = L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma).$$

Таким образом, функция $L_\sigma(x, \lambda)$ для любого $\sigma > 0$ имеет единственную седловую точку в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. В этом она существенно отличается от стандартной функции Лагранжа $L(x, \lambda)$, которая заведомо не имеет седловых точек, если $X = \varnothing$. Отмеченное свойство функции $L_\sigma(x, \lambda)$ способствует ее применению в анализе и коррекции несобственных задач.

Пусть в задаче (1) $X = \varnothing$, т. е. (1) — НЗ ВП 1-го или 3-го рода. Откорректируем ограничения задачи (1) по правым частям. Обозначим $X_\xi = \{x\colon f(x) \leq \xi\}$, $E = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+\colon X_\xi \neq \varnothing\}$. Если множество X_ξ непусто и ограничено для некоторого ξ или функции $f_i(x)$ $(i = \overline{1, m})$ аффинные, то множество E будет выпуклым и замкнутым. Тогда существует единственный элемент $\bar{\xi} = \arg\min\{\|\xi\|\colon \xi \in E\}$. Нетрудно также показать, что $X_{\bar{\xi}} = \widetilde{X}$, где $\widetilde{X} = \operatorname{Arg}\min_x \|f^+(x)\|$, при этом $\bar{\xi} = f^+(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$.

Сформулируем задачу

$$\min\{f_0(x)\colon\ x \in X_{\bar{\xi}}\}. \tag{14}$$

При $\bar{\xi} = 0$ задачи (1) и (14) совпадают, при $\bar{\xi} \neq 0$ задача (14) служит аппроксимацией (оптимальной коррекцией) для (1).

Сформулируем утверждение о применимости метода регуляризованной функции Лагранжа для коррекции НЗ ВП 1-го рода.

Предположим, что в точке $\bar{x} \in X_{\bar{\xi}}$ выполнены условия Куна — Таккера для задачи (14), т. е. существует такой вектор $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, что

$$\bigtriangledown_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0, \qquad (\bar{\lambda}, f(\bar{x}) - \bar{\xi}) = 0. \tag{15}$$

Данные условия выполняются, например, для задач линейного и квадратичного программирования. В силу (15) задача (14) разрешима, и $\bar{x}$ — одно из ее решений. Заметим также, что при $\bar{\xi} \neq 0$ и выполнении (15) задача (1) является НЗ ВП 1-го рода.

Теорема 4 [8]. *Пусть для задачи* (14) *выполнены условия* (15). *Справедливы оценки*:

$$\|(f(x^\sigma) - \bar\xi)^+\| \le \sqrt{\beta}\, C_1(\sigma), \tag{16}$$

$$|f_0(x^\sigma) - \bar f\,| \le C_2(\sigma), \tag{17}$$

$$\|\bigtriangledown_x L(x^\sigma, \lambda^\sigma)\| \le \sqrt{\alpha}\, C_3(\sigma), \quad 0 \le (\lambda^\sigma,\, f(x^\sigma) - \bar\xi) \le C_4(\sigma), \tag{18}$$

где $\bar f = f_0(\bar x)$, $C_1(\sigma) = 2\left[\sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda\| + (\alpha\,\|\bar x\|^2 + \beta\,\|\bar\lambda\|^2)^{1/2}\right]$, $C_2(\sigma) = \max\{\alpha\,\|\bar x\|^2, \sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda\|\, C_1(\sigma)\}$, $C_3(\sigma) = 2\left[\sqrt{\alpha}\,\|\bar x\|^2 + \sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda\| C_1(\sigma)\right]^{1/2}$; $C_4(\sigma) = \frac{1}{2} C_3^2(\sigma)$.

Из оценок (16) и (17) следует, что если $\sigma \to 0$, $\beta = o(\alpha)$, то $x^\sigma \to \bar x_0$, где $\bar x_0$ — нормальное решение задачи (14). В самом деле, из неравенства $\varphi_\sigma(x^\sigma) \le \varphi_\sigma(\bar x_0)$ имеем

$$\alpha\,\|x^\sigma\|^2 \le \bar f - f_0(x^\sigma) + \frac{1}{4\beta}\left[\|\bar\xi\|^2 - \|f^+(x^\sigma)\|^2\right] + \alpha\,\|\bar x_0\|^2.$$

Отсюда

$$\|x^\sigma\|^2 \le \|\bar x_0\|^2 + \frac{1}{\alpha}\left|f_0(x^\sigma) - \bar f\right|, \tag{19}$$

что при $\sigma \to 0$, $\beta/\alpha \to 0$ в силу (17) влечет ограниченность последовательности $\{x^\sigma\}$. Согласно (16), (17) предельные точки $\{x^\sigma\}$ оптимальны в задаче (14), и тогда из (19) и единственности нормального решения следует требуемая сходимость.

Оценки (18) показывают, что точка $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ в пределе при $\sigma \to 0$ удовлетворяет условиям (15).

Если исходная задача (1) разрешима и регулярна, то из определения седловых точек $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ и $[x^*, \lambda^*]$ функций $L_\sigma(x, \lambda)$ и $L(x, \lambda)$ соответственно следует [1] соотношение

$$f_0(x^*) - \beta\,\|\lambda^*\|^2 \le L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma) \le f_0(x^*) + \alpha\,\|x^*\|^2,$$

так что $\lim\limits_{\sigma\to 0} L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma) = f_0(x^*) = f^*$. Если же (1) — НЗ ВП 1-го рода, то с учетом (17) получим

$$L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma) = \varphi_\sigma(x^\sigma) = f_0(x^\sigma) + \frac{1}{4\beta}\left\|f^+(x^\sigma)\right\|^2 + \alpha\,\|x^\sigma\|^2 \ge \bar f - C_2(\sigma) + \frac{\|\bar\xi\|^2}{4\beta}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\sigma\to 0} L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma) = +\infty$.

Таким образом, по поведению $\{L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma)\}$ при $\sigma \to 0$ можно судить, является ли исходная задача собственной.

4. Задача ВП с противоречивыми ограничениями

Пусть в задаче (1) $X = \varnothing$, т. е. (1) — НЗ ВП 1-го или 3-го рода. Очевидно, что несобственной будет в этом случае и задача (3). Если для задачи (3) выписать функцию Лагранжа

$$H_\delta(x, u, u_0) = \|x\|^2 + (u, f(x)) + u_0(f_0(x) - \delta),$$

то $\inf\limits_x H_\delta(x, u, u_0) > -\infty$ для любых $u \in \mathbb{R}^m_+$, $u_0 \in \mathbb{R}^1_+$, $\delta \in \mathbb{R}^1$, т. е. в отличие от (1) задача (3) может быть НЗ ВП только 1-го рода.

Считая $\delta > \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x)$, рассмотрим множество $E_\delta = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+ \colon X_\xi \cap M_\delta\} \ne \varnothing$. Предположим, что существуют набор индексов $I \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ и число C такие, что множество $\bigcap_{i\in I}\{x\colon f_i(x) \le C\}$ непусто и ограничено. Тогда можно указать единственный вектор $\bar\xi_\delta = \arg\min\{\|\xi\|\colon \xi \in E_\delta\}$. При определении вектора $\bar\xi_\delta$ возможны следующие ситуации.

1. Найдется значение δ_0 параметра δ такое, что $\bar{\xi}_\delta = 0$ при $\delta \geq \delta_0$. Тогда $X \neq \varnothing$, и выполняется один из двух случаев.

1a. Задача (1) разрешима (здесь $\delta_0 = f^*$).

1b. Нижняя грань $\widetilde{f}$ функции $f_0(x)$ на X не достигается (при этом возможно $\widetilde{f} > -\infty$ и $\widetilde{f} = -\infty$).

2. Для любого $\delta > \inf\limits_x f_0(x)$ справедливо $\bar{\xi}_\delta \neq 0$ (здесь $X = \varnothing$).

Рассмотрим сначала случай, когда (3) — НЗ ВП 1-го рода. В перечисленных выше возможностях для определения вектора $\bar{\xi}_\delta$ это соответствует ситуациям 1a (когда $\delta < f^*$) и 2.

Сформулируем следующую задачу

$$\min\{\|x\|^2 \colon x \in X_{\bar{\xi}_\delta} \cap M_\delta\}. \tag{20}$$

Эта задача всегда разрешима в единственной точке $\widetilde{x}_\delta$ и при $\bar{\xi}_\delta = 0$ совпадает с (3). В нашем случае $\bar{\xi}_\delta \neq 0$, и задачу (20) можно считать одной из возможных аппроксимаций для (3).

Нетрудно видеть, что в качестве $\bar{\xi}_\delta$ может служить вектор $f^+(x_\delta)$, где $x_\delta = \arg\min\limits_{x\in M_\delta} \|f^+(x)\|^2$. Из определения векторов $\bar{\xi}_\delta = (\bar{\xi}_1^\delta, \ldots, \bar{\xi}_m^\delta)$ и x_δ следует, что

$$2\sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i^\delta (\triangledown f_i(x_\delta), x - x_\delta) \geq 0 \qquad (\forall x \in M_\delta).$$

Поэтому из выпуклости функций $f_i(x)$ получаем

$$\|\bar{\xi}_\delta\|^2 = (\bar{\xi}_\delta, f(x_\delta)) \leq (\bar{\xi}_\delta, f(x)) - \sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i^\delta (\triangledown f_i(x_\delta),\ x - x_\delta) \leq (\bar{\xi}_\delta, f(x)).$$

Таким образом,

$$\|\bar{\xi}_\delta\|^2 \leq (\bar{\xi}_\delta, f(x)) \qquad (\forall x \in M_\delta). \tag{21}$$

Регуляризованную функцию Лагранжа $L_\sigma(x,\lambda)$ будем в дальнейшем рассматривать на множестве $M_\delta \times \mathbb{R}^m_+$. Аналогично существованию седловой точки $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ функции $L_\sigma(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ можно определить единственную седловую точку $[x^\sigma_\delta, \lambda^\sigma_\delta]$ функции $L_\sigma(x,\lambda)$ на множестве $M_\delta \times \mathbb{R}^m_+$. Задачу нахождения точки $[x^\sigma_\delta, \lambda^\sigma_\delta]$ будем обозначать через (P^σ_δ).

Покажем, что существует тесная связь между задачами (20) и (P^σ_δ). Таким образом, цепочка задач

$$(1) \longrightarrow (3) \longrightarrow (20) \longrightarrow (P^\sigma_\delta)$$

определит один из возможных способов коррекции НЗ ВП.

Предположим, что функция Лагранжа для задачи (20)

$$H_{\xi,\delta}(x,u,u_0) = \|x\|^2 + (u, f(x) - \bar{\xi}_\delta) + u_0(f_0(x) - \delta)$$

имеет седловую точку $[\widetilde{x}_\delta, \widetilde{u}_\delta, \widetilde{u}_{0\delta}]$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1_+$, т. е. выполняются равенства

$$\triangledown_x H_{\xi,\delta}(\widetilde{x}_\delta, \widetilde{u}_\delta, \widetilde{u}_{0\delta}) = 0, \qquad (\widetilde{u}_\delta, f(\widetilde{x}_\delta) - \bar{\xi}_\delta) = 0, \qquad \widetilde{u}_{0\delta}(f_0(\widetilde{x}_\delta) - \delta) = 0. \tag{22}$$

Исследуем связь между задачами (20) и (P^σ_δ).

Теорема 5. *Пусть для задачи* (20) *в точке* $[\widetilde{x}_\delta, \widetilde{u}_\delta, \widetilde{u}_{0\delta}]$ *выполнены условия* (22), *при этом* $\widetilde{u}_{0\delta} > 0$, *параметр* α *функции* $L_\sigma(x,\lambda)$ *равен* α_0, *где* $\alpha_0 \widetilde{u}_{0\delta} > 1$. *Тогда справедливы оценки*:

$$\|(f(x^\sigma_\delta) - \bar{\xi}_\delta)^+\| \leq \beta\, B_0(\delta), \tag{23}$$

$$|f_0(x^\sigma_\delta) - \delta| \leq \beta\, B_1(\delta), \tag{24}$$

$$\|x^\sigma_\delta - \widetilde{x}_\delta\| \leq \sqrt{\beta}\, B_2(\delta), \tag{25}$$

где $B_0(\delta) = 2\alpha_0\|\widetilde{u}_\delta\|$, $B_1(\delta) = \dfrac{2{\alpha_0}^2\|\widetilde{u}_\delta\|^2}{\alpha_0\widetilde{u}_{0\delta} - 1}$, $B_2(\delta) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\alpha_0}\,\|\widetilde{u}_\delta\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения седловой точки $[x_\delta^\sigma, \lambda_\delta^\sigma]$ следует

$$(\nabla_x L_\sigma(x_\delta^\sigma, \lambda_\delta^\sigma),\ x - x_\delta^\sigma) \geq 0 \qquad (\forall x \in M_\delta).$$

Поэтому

$$-2\alpha\,(x_\delta^\sigma,\, \widetilde{x}_\delta - x_\delta^\sigma) \leq (\nabla_x L(x_\delta^\sigma, \lambda_\delta^\sigma),\ \widetilde{x}_\delta - x_\delta^\sigma).$$

Отсюда и из условий (22) получим

$$2\alpha\,\|\widetilde{x}_\delta - x_\delta^\sigma\|^2 \leq \alpha \sum_{i=1}^m \widetilde{u}_i^\delta(\nabla f_i(\widetilde{x}_\delta),\, x_\delta^\sigma - \widetilde{x}_\delta) + \alpha\widetilde{u}_{0\delta}(\nabla f_0(\widetilde{x}_\delta),\, x_\delta^\sigma - \widetilde{x}_\delta)$$

$$+\,(\nabla_x L(x_\delta^\sigma, \lambda_\delta^\sigma),\ \widetilde{x}_\delta - x_\delta^\sigma) \leq \alpha \sum_{i=1}^m \widetilde{u}_i^\delta(f_i(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta - f_i(\widetilde{x}_\delta) + \bar{\xi}_\delta)$$

$$+\,\alpha\widetilde{u}_{0\delta}(f_0(x_\delta^\sigma) - \delta - f_0(\widetilde{x}_\delta) + \delta) + L(\widetilde{x}_\delta, \lambda_\delta^\sigma) - L(x_\delta^\sigma, \lambda_\delta^\sigma)$$

$$\leq (\alpha\widetilde{u}_{0\delta} - 1)(f_0(x_\delta^\sigma) - \delta) + \alpha(\widetilde{u}_\delta, f(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta) + (\lambda_\delta^\sigma, f(\widetilde{x}_\delta) - f(x_\delta^\sigma)) \tag{26}$$

(здесь $\widetilde{u}_i^\delta$ — компоненты вектора $\widetilde{u}_\delta$, $i = 1, \ldots, m$).

Далее с учетом неравенства (21) и того факта, что $\lambda_\delta^\sigma = \lambda(x_\delta^\sigma) = \dfrac{1}{2\beta} f^+(x_\delta^\sigma)$, оценим

$$(\lambda_\delta^\sigma,\, f(\widetilde{x}_\delta) - f(x_\delta^\sigma)) \leq (\lambda_\delta^\sigma,\, \bar{\xi}_\delta - f(x_\delta^\sigma)) = \frac{1}{2\beta}\big(f^+(x_\delta^\sigma),\, \bar{\xi}_\delta - f(x_\delta^\sigma)\big)$$

$$= \frac{1}{2\beta}\big(\bar{\xi}_\delta, f^+(x_\delta^\sigma)\big) - \frac{1}{2\beta}\big\|f^+(x_\delta^\sigma)\big\|^2 = -\frac{1}{2\beta}\big\|f^+(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta\big\|^2 + \frac{1}{2\beta}\big[\|\bar{\xi}_\delta\|^2 - \big(\bar{\xi}_\delta, f^+(x_\delta^\sigma)\big)\big]$$

$$\leq -\frac{1}{2\beta}\big\|f^+(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta\big\|^2 \leq -\frac{1}{2\beta}\big\|(f(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta)^+\big\|^2.$$

Принимая во внимание последнее неравенство и условия теоремы, из (26) получим при $\alpha = \alpha_0$

$$2\|x_\delta^\sigma - \widetilde{x}_\delta\|^2 \leq \|\widetilde{u}_\delta\|\,\|(f(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta)^+\| - \frac{1}{2\alpha_0\beta}\big\|(f(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta)^+\big\|^2$$

$$= -\Big[\frac{1}{\sqrt{2\alpha_0\beta}}\big\|(f(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta)^+\big\| - \frac{\sqrt{2\alpha_0\beta}}{2}\big\|\widetilde{u}_\delta\big\|\Big]^2 + \frac{\alpha_0\beta}{2}\big\|\widetilde{u}_\delta\big\|^2.$$

Отсюда непосредственно вытекают оценки (23) и (25).

Также из (26) следует $(\alpha\widetilde{u}_{0\delta} - 1)(\delta - f_0(x_\delta^\sigma)) \leq \alpha\|\widetilde{u}_\delta\|\,\|(f(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta)^+\|$, что с учетом (23) и $x_\delta^\sigma \in M_\delta$ приводит к оценке (24).

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\beta \to 0$. *Тогда* $f^+(x_\delta^\sigma) \to \bar{\xi}_\delta$, $f_0(x_\delta^\sigma) \to \delta$, $x_\delta^\sigma \to \widetilde{x}_\delta$.

Следствие 3. *Если* (1) *— разрешимая задача ВП, то* $\lim\limits_{\delta \to f^*} \lim\limits_{\beta \to 0} f_0(x_\delta^\sigma) = f^*$.

Следствие 4. *Если* (1) *— НЗ ВП 1-го рода, то* $\lim\limits_{\delta \to \bar{f}} \lim\limits_{\beta \to 0} f_0(x_\delta^\sigma) = \bar{f}$, *где* $\bar{f}$ *— оптимальное значение задачи* (14).

Рассмотрим подробнее случай, когда (1) — разрешимая задача, но в (3) $\delta < f^*$. Пусть $f^* > \delta_2 > \delta_1$. Очевидно, $M_{\delta_2} \supset M_{\delta_1}$, а для множеств $X_{\bar{\xi}_\delta}$ справедливо $X_{\|\bar{\xi}_{\delta_1}\|} \supset X_{\|\bar{\xi}_{\delta_2}\|}$. В самом деле, так как $\bar{\xi}_\delta = f^+(x_\delta)$, где $x_\delta = \arg\min\limits_{x \in M_\delta} \|f^+(x)\|$, то $\|f^+(x_{\delta_2})\| \leq \|f^+(x_{\delta_1})\|$, т. е. $\|\bar{\xi}_{\delta_2}\| \leq \|\bar{\xi}_{\delta_1}\|$. Отсюда следует $\lim\limits_{\delta \to f^*} \|\bar{\xi}_\delta\| \ = \ 0$.

Предположим, что множество $S = \bigcap_{i=0}^{m} \{x\colon f_i(x) \le D\}$ ограничено для некоторого $D \in \mathbb{R}^1$. Тогда будет ограничено и множество $S_1 = X_{\|\bar{\xi}_{\delta_1}\|} \cap M_{f^*}$, а все точки $\widetilde{x}_\delta \in S_1$ при $\delta > \delta_1$. Пусть $\widetilde{x}$ — предельная точка последовательности $\{\widetilde{x}_\delta\}$ при $\delta \to f^*$. Из рассуждений выше следует $\widetilde{x} \in X^* = X \cap M_{f^*}$. Согласно определению точки $\widetilde{x}_\delta$ имеем $\|\widetilde{x}_{\delta_k}\| \le \|x\|$ для всех $x \in X_{\bar{\xi}_{\delta_k}} \cap M_{\delta_k}$. Поэтому $\|\widetilde{x}\| \le \|x\|$, если $x \in X \cap M_{f^*}$. Следовательно, в силу единственности нормального решения задачи (1) получаем $\widetilde{x} = x_0^*$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть в задаче* (3) $\delta < f^*$ *и множество* S *ограничено. Тогда*

$$\lim_{\delta \to f^*} \lim_{\beta \to 0} x_\delta^\sigma = x_0^*.$$

З а м е ч а н и е. Условие $\widetilde{u}_{0\delta} > 0$ в теореме 5 является естественным. Если $\delta < f^*$, то точка $\widetilde{x}_\delta$ лежит на поверхности $f_0(x) = \delta$, и в силу условий (22) $\widetilde{u}_{0\delta}$ можно считать положительным. Если $\delta \ge f^*$, то из определения точки $[\widetilde{x}_\delta, \widetilde{u}_\delta, \widetilde{u}_{0\delta}]$ при $\widetilde{u}_{0\delta} = 0$ следует неравенство $\|\widetilde{x}_\delta\| \le \|x\|$ $(\forall x \in X)$. Однако, если $\bar{x} = \mathrm{Pr}_X\, 0$ и $\bar{x} \notin X^*$, то при $f_0(\bar{x}) > \delta > f^*$ будет $\|\bar{x}\| < \|\widetilde{x}_\delta\|$.

5. Задача ВП с совместной системой ограничений

Рассмотрим далее ситуацию 1b для задачи (1), сформулированную в разд. 4. Пусть в задаче (1) $X \neq \varnothing$, но $\widetilde{f} = \inf\limits_{x \in X} f_0(x)$ не достигается, в частности, $\widetilde{f} = -\infty$ (задача (1) — НЗ ВП 2-го рода). Обозначим через $\{x_k\}$ последовательность точек из X, для которых $\lim\limits_{k \to \infty} f_0(x_k) = \widetilde{f}$. Очевидно, $\|x_k\| \to \infty$ $(k \to \infty)$, а задачи (3) и (20) совпадают. Положим в (3) $\delta = f_k$, где $f_k = f_0(x_k)$. Задача (3) для любого k будет разрешима в единственной точке $\bar{x}_k$, и, начиная с некоторого k, будет выполняться $f_0(\bar{x}_k) = f_k$.

Пусть для задачи (1) в точке x^0 выполнено условие Слейтера. Тогда существует $[x_\alpha^*, \lambda_\alpha^*]$ — седловая точка функции $L^\alpha(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \alpha \|x\|^2$ в области $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$, $\alpha > 0$. Другими словами, x_α^* и λ_α^* — решения задач

$$\min\{F_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha \|x\|^2\colon x \in X\} \tag{27}$$

и двойственной к (27) соответственно. Заметим, что задача (27) аппроксимирует исходную постановку (1) в методе регуляризации Тихонова. Известно (см., например, [1]), что

$$\min_{\alpha \to 0} f_0(x_\alpha^*) = \min_{\alpha \to 0} F_\alpha(x_\alpha^*) = \widetilde{f}. \tag{28}$$

Обозначая $x_{f_k}^\sigma = x_k^\sigma$, $\lambda_{f_k}^\sigma = \lambda_k^\sigma$, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_k + \alpha \|\bar{x}_k\|^2 = f_0(\bar{x}_k) + \alpha \|\bar{x}_k\|^2 \ge f_0(\bar{x}_k) + (\lambda_k^\sigma, f(\bar{x}_k)) + \alpha \|\bar{x}_k\|^2 - \beta \|\bar{\lambda}_k^\sigma\|^2 \\ = L_\sigma(\bar{x}_k, \lambda_k^\sigma) \ge L_\sigma(x_k^\sigma, \lambda_k^\sigma) \ge L_\sigma(x_k^\sigma, \lambda_\alpha^*) = f_0(x_k^\sigma) + (\lambda_\alpha^*, f(x_k^\sigma)) + \alpha \|x_k^\sigma\|^2 - \beta \|\lambda_\alpha^*\|^2 \\ = L^\alpha(x_k^\sigma, \lambda_\alpha^*) - \beta \|\lambda_\alpha^*\|^2 \ge L^\alpha(x_\alpha^*, \lambda_\alpha^*) - \beta \|\lambda_\alpha^*\|^2 \ge f_0(x_\alpha^*) - \beta \|\lambda_\alpha^*\|^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Так как $[x_\alpha^*, \lambda_\alpha^*]$ — седловая точка функции $L^\alpha(x, \lambda)$, то

$$L^\alpha(x_\alpha^*, \lambda_\alpha^*) \le L^\alpha(x^0, \lambda_\alpha^*).$$

Отсюда

$$0 \le (\lambda_\alpha^*)_i \le \frac{f_0(x^0) - f_0(x_\alpha^*) + \alpha \|x^0\|^2}{\min\limits_{1 \le i \le m} |f_i(x^0)|}.$$

Поэтому при $\widetilde{f} > -\infty$ величина $\|\lambda^*_\alpha\|$ в (29) ограничена сверху константой

$$K_1 = m\biggl(\frac{f_0(x^0) - \widetilde{f} + \alpha_0\|x^0\|^2}{\min\limits_{1\le i\le m} |f_i(x^0)|}\biggr)^2$$

для всех $0 < \alpha < \alpha_0$. Таким образом, с учетом (28) из (29) следует

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{\sigma\to 0} L_\sigma(x^\sigma_k, \lambda^\sigma_k) = \widetilde{f}. \tag{30}$$

Если $\widetilde{f} = -\infty$, то предел (30) будет иметь место в силу неравенства $f_k + \alpha\,\|\bar{x_k}\|^2 \ge L_\sigma(x^\sigma_k, \lambda^\sigma_k)$.

При доказательстве соотношения (30) мы фактически пользовались тесной связью между подходом к оптимальной коррекции НЗ ВП на основе регуляризованной функции Лагранжа и методом регуляризации Тихонова. Сформулируем утверждение, которое показывает близость методов Тихонова и невязки.

Теорема 6. *Если $[x^*_\alpha, \lambda^*_\alpha]$ — седловая точка функции $L^\alpha(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$, то $\bigl[x^*_\alpha, \frac{1}{\alpha}\lambda^*_\alpha, \frac{1}{\alpha}\bigr]$ будет седловой точкой функции $H(x,u,u_0)$ в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+\times\mathbb{R}^1_+$.*
Если $[\bar{x},\bar{u},\bar{u}_0]$ — седловая точка $H(x,u,u_0)$ в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+\times\mathbb{R}^1_+$ и $\bar{u}_0 > 0$, то $\bigl[\bar{x}, \frac{1}{\bar{u}_0}\bar{u}\bigr]$ будет седловой точкой функции $L^\alpha(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$ при $\alpha = \frac{1}{\bar{u}_0}$.

Доказательство. Если $[x^*_\alpha, \lambda^*_\alpha]$ — седловая точка функции $L^\alpha(x,\lambda)$, то соотношения

$$f_0(x^*_\alpha) + (\lambda, f(x^*_\alpha)) + \alpha\,\|x^*_\alpha\|^2 \le f_0(x^*_\alpha) + (\lambda^*_\alpha, f(x^*_\alpha)) + \alpha\,\|x^*_\alpha\|^2 \le f_0(x) + (\lambda^*_\alpha, f(x)) + \alpha\,\|x\|^2$$

выполняются для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и $\lambda\in\mathbb{R}^n_+$. Но тогда справедливы и неравенства

$$\frac{1}{\alpha}\bigl(f_0(x^*_\alpha) - \delta\bigr) + \Bigl(\frac{1}{\alpha}\lambda, f(x^*_\alpha)\Bigr) + \|x^*_\alpha\|^2 \le \frac{1}{\alpha}(f_0(x^*_\alpha) - \delta) + \Bigl(\frac{1}{\alpha}\lambda^*, f(x^*_\alpha)\Bigr) + \|x^*_\alpha\|^2$$
$$\le \frac{1}{\alpha}\bigl(f_0(x) - \delta\bigr) + \Bigl(\frac{1}{\alpha}\lambda^*_\alpha, f(x)\Bigr) + \|x\|^2$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}^m_+$, $\alpha > 0$.

Пусть теперь $[\bar{x},\bar{u},\bar{u}_0]$ — седловая точка функции $H(x,u,u_0)$. Из неравенства $H(\bar{x},\bar{u},\bar{u}_0) \le H(x,\bar{u},\bar{u}_0)$ сразу следует, что

$$\frac{1}{\bar{u}_0}\|\bar{x}\|^2 + \Bigl(\frac{1}{\bar{u}_0}\bar{u}, f(\bar{x})\Bigr) + f_0(\bar{x}) \le \frac{1}{\bar{u}_0}\|x\|^2 + \Bigl(\frac{1}{\bar{u}_0}\bar{u}, f(x)\Bigr) + f_0(x)$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$, т. е.

$$L^{\frac{1}{\bar{u}_0}}\Bigl(\bar{x},\,\frac{1}{\bar{u}_0}\bar{u}\Bigr) \le L^{\frac{1}{\bar{u}_0}}\Bigl(x,\,\frac{1}{\bar{u}_0}\bar{u}\Bigr) \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^n).$$

Неравенство $H(\bar{x},u,u_0) \le H(\bar{x},\bar{u},\bar{u}_0)$ приводит к условиям дополняющей нежесткости вида

$$(\bar{u}, f(\bar{x})) = 0, \qquad \bar{u}_0(f_0(\bar{x}) - \delta) = 0,$$

а с их учетом превращается в соотношение $(u, f(\bar{x})) \le (\bar{u}, (f(\bar{x})) = 0$. Отсюда следует

$$f_0(\bar{x}) + (u, f(\bar{x})) + \frac{1}{\bar{u}_0}\bigl\|\bar{x}\bigr\|^2 \le f_0(\bar{x}) + \Bigl(\frac{1}{\bar{u}_0}\bar{u}, f(\bar{x})\Bigr) + \frac{1}{\bar{u}_0}\bigl\|\bar{x}\bigr\|^2,$$

т. е.

$$L^{\frac{1}{\bar{u}_0}}(\bar{x},u) \le L^{\frac{1}{\bar{u}_0}}\Bigl(\bar{x},\frac{1}{\bar{u}_0}\bar{u}\Bigr) \qquad (\forall u\in\mathbb{R}^m_+).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Skarin V.D.** Regularized Lagrange function and correction methods for improrer convex programming problems // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S116–S144.
2. **Скарин В.Д.** Об одном общем подходе к оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 265–275.
3. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
6. **Левитин Е.С.** О корректности ограничений и устойчивости в экстремальных задачах // Вест. Моск. ун-та. 1968. № 1. С. 24–34. (Математика. Механика.)
7. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
8. **Скарин В.Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 10.03.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

О ФИТТИНГОВЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

А. А. Трофимук

Установлена зависимость ранга и производной длины конечной разрешимой группы от максимума индексов фиттинговых подгрупп в своих нормальных замыканиях. Построены примеры, показывающие точность полученных оценок.

Ключевые слова: разрешимая группа, фиттингова подгруппа, A_4-свободная группа, производная длина, нильпотентная длина, p-длина.

A. A. Trofimuk. On fitting subgroups of a finite solvable group.

The dependence of the rank and derived length of a finite solvable group on the maximum of the indices of Fitting subgroups in their normal closures is established. Examples showing the accuracy of the obtained estimates are constructed.

Keywords: solvable group, Fitting subgroup, A_4-free group, derived length, nilpotent length, p-length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1]. В частности, $\Phi(G)$ и $F(G)$ — подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G. Через $r(G)$ обозначается ранг разрешимой группы G, см. [1, VI.5.2].

Если H и K — нормальные подгруппы группы G такие, что H/K — минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G/K, то H/K называется *главным фактором* группы G. Главный фактор H/K называется *фиттинговым*, если $H \subseteq F(G)$.

В 1978 году Гашюц [2, следствие 6] установил справедливость следующего утверждения:

если H/K — главный фактор наибольшего порядка разрешимой группы G, то подгруппа H содержится в $F(G)$.

Однако отсюда не следует, что каждый главный фактор порядка $p^{r(G)}$, p — простое число, является фиттинговым. Примером служит любая сверхразрешимая ненильпотентная группа. Поэтому вполне естественно возник вопрос о существовании в разрешимых группах фиттинговых главных факторов порядка $p^{r(G)}$, p — простое число. Ответ на этот вопрос получил В. С. Монахов [3, теорема 2]:

в каждой разрешимой группе G существует нормальная подгруппа K такая, что $\Phi(G) \subset K \subseteq F(G)$, $K/\Phi(G)$ — главный фактор группы G и $|K/\Phi(G)| = p^{r(G/\Phi(G))}$ для некоторого простого числа p.

В частности, отсюда вытекает хорошо известный результат Хупперта [4, теорема 13; 1, теорема VI.9.9]:

если в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп $\Phi(G) = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{m-1} \subset N_m = F(G)$ такая, что N_i нормальна в G и $|N_{i+1}/N_i|$ является простым числом для всех i, то G сверхразрешима.

В работе [5] установлена зависимость производной длины разрешимой группы G от порядков некоторых силовских подгрупп из $F(G)$.

В данной статье продолжено изучение строения группы в зависимости от свойств фиттинговых подгрупп. Введем следующие функции:

$$t_p^F(G) = \max\{n \mid p^n \mid\mid |H^G : H|,\ H \subseteq F(G)\},\ p \in \pi(G); \quad t^F(G) = \max_{p\in\pi(G)} t_p^F(G).$$

Здесь запись $p^k \,||\, n$ означает, что p^k делит n, но p^{k+1} не делит n; H^G — наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая H.

Основными результатами являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*
1. $r(G/\Phi(G)) \leq 1 + t^F(G)$.
2. $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(1 + t^F(G)) \leq 4 + t^F(G)$.

Здесь $d(G)$ — производная длина разрешимой группы G, $\rho(n)$ — максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп группы $GL(n, p)$.

Теорема 2. *Пусть G — разрешимая группа и $t^F(G) \leq 2$. Тогда $d(G/\Phi(G)) \leq 6$, $n(G) \leq 4$ и $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p. В частности, если группа A_4-свободна, то $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.*

Здесь $n(G)$ — нильпотентная длина разрешимой группы G, а $l_p(G)$ — p-длина группы G. Группа называется A_4-*свободной*, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4.

П р и м е р 1. Пусть E_{7^3} — элементарная абелева группа порядка 7^3, а K — экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP [6] построена группа $G = [E_{7^3}]([K]SL(2,3))$ порядка 222 264. Подгруппа Фиттинга данной группы совпадает с подгруппой E_{7^3} и $t^F(G) = 2$. Подгруппа Фраттини группы G единична, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4. Таким образом, полученные оценки производной и нильпотентной длин в теореме 2 являются точными.

П р и м е р 2. Пусть E_{7^3} — элементарная абелева группа порядка 7^3, S — экстраспециальная группа порядка 27, Q_8 — группа кватернионов порядка 8. С помощью системы компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [E_{7^3}]([S]Q_8)$ порядка $74088 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, которая является A_4-свободной группой. Ее подгруппа Фраттини единична, а производная длина равна 5. Кроме того, $F(G) = E_{7^3}$ и $t^F(G) = 2$. Таким образом, оценка производной длины в случае A_4-свободной группы является точной.

1. Вспомогательные результаты

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 7]. Пусть $\mathfrak{E}$ — формация всех конечных групп, $\mathfrak{F}$ — некоторая формация и G — группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Лемма 1. *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G порядка p^n, то $n \leq 1 + t_p^F(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H — подгруппа простого порядка в N. Так как N — нормальная примарная подгруппа, то $H \subseteq F(G)$ и $p^{1+t_p^F(G)}$ не делит $|H^G : H|$. Поскольку N — минимальная нормальная подгруппа, то $N = H^G$ и $|H^G : H| = p^{n-1}$. Поэтому $1 + t_p^F(G) > n - 1$ и $n \leq 1 + t_p^F(G)$.

Лемма 2 [8, лемма 7]. *Пусть G — разрешимая группа и k — натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.*

Лемма 3 [8, лемма 12]. *Пусть H — неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда*

1) *если $n=2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$;*
2) *если $n=3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$.*

Пример 3. В группе $GL(2,5)$ существует неприводимая подгруппа H, изоморфная группе $[SL(2,3)]Z_4$ порядка 96. Здесь Z_4 — циклическая группа порядка 4. Кроме того производная длина подгруппы H равна 4, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 1 леммы 3 оценка производной длины для $p=5$ является точной.

Пример 4. В группе $GL(3,7)$ существует неприводимая подгруппа H, изоморфная группе $[S]SL(2,3)$ порядка 648. Здесь S — экстраспециальная группа порядка 27. Кроме того производная длина подгруппы H равна 5, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 2 леммы 3 оценка производной длины для $p=7$ является точной.

Лемма 4 [8, лемма 13]. 1. *Если H — разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.*

2. *Если H — разрешимая A_4-свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4$.*

Пример 5. В $GL(2,5)$ существует неприводимая метабелева подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Поэтому в п. 1 леммы 4 оценка производной длины для $p=5$ является точной.

Пример 6. В $GL(3,7)$ существует неприводимая подгруппа, изоморфная A_4-свободной группе $[S]Q_8$, производной длины 4 и порядка 216. Здесь S — экстраспециальная группа порядка 27. Поэтому в п. 2 леммы 4 оценка производной длины для $p=7$ является точной.

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Пусть $H/\Phi(G)$ — произвольная подгруппа из подгруппы $F(G/\Phi(G))$. Хорошо известно, что $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. Поэтому $H \subseteq F(G)$. Очевидно, что

$$|(H/\Phi(G))^{G/\Phi(G)} : H/\Phi(G)| = |H^G : H|.$$

Следовательно, $p^{1+t_p^F(G)}$ не делит $|(H/\Phi(G))^{G/\Phi(G)} : (H/\Phi(G))|$. Поэтому, $t_p^F(G/\Phi(G)) \leq t_p^F(G)$, $t^F(G/\Phi(G)) \leq t^F(G)$. Таким образом, условие теоремы наследуется фактор-группой $G/\Phi(G)$.

1. Согласно теореме В. С. Монахова [3, теорема 2] в группе $G/\Phi(G)$ существует нильпотентная подгруппа $N/\Phi(G)$ такая, что $|N/\Phi(G)| = p^{r(G/\Phi(G))}$. По лемме 1 $r(G/\Phi(G)) \leq 1 + t_p^F(G/\Phi(G)) \leq 1 + t^F(G/\Phi(G))$. Так как $t^F(G/\Phi(G)) \leq t^F(G)$, то $r(G/\Phi(G)) \leq 1 + t^F(G)$.

2. Сначала докажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$. По индукции верно, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$. Ввиду насыщенности формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$ получаем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$.

В дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$. По [9, теорема 4.24.] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \leq i \leq k$. Поэтому для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_i)$. По [9, лемма 2.33] фактор-группа $G/\bigcap_k^{i=1} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F \quad \text{и} \quad G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F.$$

Пусть F_i — элементарная абелева подгруппа порядка $p_i^{m_i}$. Тогда $m_i \leq 1 + t^F_{p_i}(G) \leq 1 + t^F(G)$ по лемме 1 и $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(m_i, p_i)$. Поскольку неприводимая группа вполне приводима, то из определения функции $\rho(n)$ получаем, что $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^{\rho(m_i)} \subseteq \mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$. Таким образом, для каждого i фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$. Так как $\mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$ — формация, то $G/F \in \mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$. Значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(1+t^F(G))}$ и по лемме 2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^{1+\rho(1+t^F(G))}$. Следовательно, $d(G/\Phi(G)) \leq 1+\rho(1+t^F(G))$. Так как $\rho(n) \leq n+2$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 4 + t^F(G)$. Теорема 1 доказана.

Для группы нечетного порядка можно повторить рассуждения п. 2 теоремы 1 с заменой функции $\rho(n)$ на функцию $\delta(n)$, которая обозначает максимум производных длин вполне приводимых подгрупп нечетного порядка группы $GL(n,p)$. В результате получится, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает $1 + \delta(1 + t^F(G))$. Значения функций $\rho(n)$ и $\delta(n)$ известны для каждого n, см., например, [10, теорема A_s; 11, теорема 4B]. Подставляя эти значения для конкретных n, получим два следствия.

Следствие 1. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда*
1) *если $t^F(G) \in \{1,2,3,4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 4 + t^F(G)$;*
2) *если $t^F(G) \in \{5,6\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 8$;*
3) *если $t^F(G) \in \{7,8\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2 + t^F(G)$;*
4) *если $t^F(G) \in \{9,\dots,16\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 11$;*
5) *если $t^F(G) \in \{17,\dots,24\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 12$;*
6) *если $t^F(G) \in \{25,\dots,32\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 13$;*
7) *если $t^F(G) \in \{33,\dots,64\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 14$;*
8) *если $t^F(G) \geq 65$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + 5\log_9(t^F(G) - 1) + 53/10$.*

Следствие 2. *Пусть G — группа нечетного порядка. Тогда*
1) *если $t^F(G) = 1$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;*
2) *если $t^F(G) = 2, 3$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3$;*
3) *если $4 \leq t^F(G) \leq 13$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 4$;*
4) *если $14 \leq t^F(G) \leq 33$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 5$;*
5) *если $34 \leq t^F(G) \leq 63$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 6$.*
В общем случае, $d(G/\Phi(G)) \leq 2\log_7((t^F(G) + 1)/5) + 4$.

Пример 6. Не все фактор-группы наследуют условие теоремы 1. Рассмотрим диэдральную группу $G = D_{24}$ порядка 24. Она имеет подгруппу Фиттинга, изоморфную циклической группе порядка 12. Очевидно, что $t^F(G) = 0$. Среди нормальных подгрупп группы G есть такая подгруппа N порядка 3, что фактор-группа $\overline{G} = G/N$ изоморфна диэдральной группе порядка 8. Ясно, что $F(\overline{G}) = \overline{G}$ и $t^F(\overline{G}) = 1$.

Доказательство теоремы 2. Из следствия 1 при $t^F(G) \leq 2$ вытекает, что $d(G/\Phi(G)) \leq 6$.

Покажем, что $n(G) \leq 4$. Сначала докажем, что $G \in \mathfrak{N}^4$. Можно считать, что $\Phi(G) = 1$. Подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \leq i \leq k$, $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы $\mathrm{Aut}(F_i)$, фактор-группа $G/F = G/\bigcap_k^{i=1} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$.

Пусть F_i — элементарная абелева подгруппа порядка $p_i^{m_i}$. Тогда по лемме 1

$$m_i \leq t^F_{p_i}(G) + 1 \leq t^F(G) + 1 \leq 3.$$

Поэтому возможны следующие варианты: $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$; $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$; $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, p_i)$. В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая и $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^3$. Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$, и по п. 1 леммы 3 $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3$. В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p_i)$ и по п. 2 леммы 3 $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3$.

Таким образом, $G/F \in \mathfrak{N}^3$, так как $\mathfrak{N}^3$ — формация. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^4$ и $n(G) \leq 4$.

Учитывая тот факт, что p-длина метанильпотентной группы не превышает 1, из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p.

Если группа G является A_4-свободной, то, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 4, получим, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. По лемме 2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и $d(G/\Phi(G)) \leq 5$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967. 793 p.
2. **Gaschutz W.** Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflosbaren Gruppen durch gewisse Indexschranken definiert sind // J. Algebra. 1978. Vol. 53, no. 2. P. 389–394.
3. **Монахов В.С.** К теореме Хупперта — Шеметкова // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16, № 1. С. 64–66.
4. **Huppert B.** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd. 60. S. 409–434.
5. **Трофимук А.А.** Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 287–293.
6. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4.12. 2009 // URL: http://www.gap-system.org.
7. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
8. **Монахов В.С., Трофимук А.А.** О конечных разрешимых группах фиксированного ранга // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1123–1137.
9. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
10. **Berkovich Y.** Solvable permutation groups of maximal derived length // Algebra Colloquium. 1997. Vol. 4, no. 2. P. 175–186.
11. **Palfy P.P.** Bounds for linear groups of odd order // Rend. Circ. mat. Palermo. 1990. Ser. 2. Vol. 39, no. 23. P. 253–263.

Трофимук Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук
Брестский гос. ун-т им. А.С. Пушкина
e-mail: trofim08@yandex.ru

Поступила 28.01.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 519.6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ И АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ СЕРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ О ПОКРЫТИИ[1]

М. Ю. Хачай, М. И. Поберий

Рассматривается серия геометрических задач о покрытии конечных подмножеств конечномерных числовых пространств семействами гиперплоскостей минимальной мощности. Обосновывается труднорешаемость и Max-SNP-трудность исследуемых задач.

Ключевые слова: NP-полная задача, полиномиальная сводимость, Max-SNP-трудная задача, L-редукция, полиномиальная приближенная схема.

M. Yu. Khachai, M. I. Poberii. The computational complexity and approximability of a series of geometric covering problems.

We consider a series of geometric problems on the covering of finite subsets of finite-dimensional numerical spaces by minimal families of hyperplanes. We prove that the problems are hard and Max-SNP-hard.

Keywords: NP-complete problem, polynomial-time reduction, Max-SNP-hard problem, L-reduction, polynomial-time approximation scheme (PTAS).

Введение

Постановки геометрических задач о минимальном покрытии и близких к ним задач комбинаторной оптимизации возникают в различных областях исследования операций: в теории оптимального размещения производства, в кластерном анализе, в обучении распознаванию образов [1–3]. Математически семейство таких задач допускает разбиение на два класса.

Первый класс составляют задачи, являющиеся конкретизациями известной абстрактной задачи о покрытии множества (Set Cover). Основной особенностью, характеризующей эти постановки, является конечность исходного семейства подмножеств, в котором требуется отыскать оптимальное (минимальной мощности, минимального суммарного веса и тому подобное) подсемейство, покрывающее заданное целевое множество. Исследованию этого класса задач посвящено большое количество работ (см. обзор в [4]), среди которых, по-видимому, наиболее значимыми являются классические статьи [5; 6], содержащие доказательство труднорешаемости задачи Set Cover и описание двух основных подходов к построению полиномиальных приближенных алгоритмов ее решения, а также статья [7], посвященная обоснованию оптимальности алгоритмов Д. Джонсона и Л. Ловаса по порядку величины (в предположении $P \neq NP$).

Второй класс объединяет задачи о покрытии, в которых дополнительное ограничение конечности семейства покрывающих подмножеств отсутствует. Как правило, в таких задачах это семейство задается неявно, указанием общего геометрического свойства, присущего его элементам. Например, требуется найти покрытие минимальной мощности заданного множества отрезками прямых, кругами заданного радиуса и тому подобное.

В данной работе исследуется серия задач о покрытии гиперплоскостями конечного подмножества конечномерного векторного пространства фиксированной размерности. Аналогичная задача на плоскости, по-видимому, впервые была рассмотрена в статье Н. Мегиддо и

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00273, 10-07-00134) и программ президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

А. Тамира [8], где обоснована ее трудноразрешаемость в сильном смысле. Ниже этот результат распространяется на случай произвольной фиксированной размерности $k > 1$. Отдельно рассматривается вопрос эффективной аппроксимируемости исследуемой серии задач. В частности, показано, что все они Max-SNP-трудны, и, следовательно, для них не может быть построена полиномиальная приближенная схема при условии $P \neq NP$.

1. Определения и постановки задач

Данный раздел содержит постановки исследуемых в работе задач комбинаторной оптимизации, основные определения и обзор некоторых известных результатов, необходимых для дальнейших рассуждений.

Пусть заданы множество X и непустое семейство его подмножеств

$$\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}.$$

Как обычно, будем называть семейство $\mathcal{C}$ *покрытием* подмножества $A \subset X$, если для каждого $a \in A$ найдется такой элемент $C_\alpha \in \mathcal{C}$, что $a \in C_\alpha$.

Всюду ниже будем считать X конечномерным числовым пространством, а элементы C_α — его *гиперплоскостями*, т. е. собственными аффинными подпространствами максимальной размерности. Нас будут интересовать покрытия (гиперплоскостями) минимальной мощности конечных подмножеств пространства X.

З а д а ч а 1: "Покрытие прямыми конечного подмножества плоскости" (2PC). Заданы конечное подмножество плоскости $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ с целочисленными координатами и число $B \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие множества P прямыми, мощность которого не превосходит B?

Очевидно, что если множество P находится в общем положении, т. е. никакие три входящие в него точки не лежат на одной прямой, то задача 2PC имеет тривиальное решение (положительное, если $B \geq \lceil |P|/2 \rceil$, и отрицательное — в противном случае), причем данное решение может быть найдено за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи задачи. Тем не менее для общего случая известен следующий результат.

Теорема 1 [8]. *Задача* 2PC *является NP-полной в сильном смысле.*

В нашей работе постановка задачи о покрытии естественным образом распространяется на случай пространств большей размерности.

З а д а ч а 2: "Покрытие гиперплоскостями конечного подмножества k-мерного пространства" (kPC). Для фиксированного $k > 1$ заданы конечное подмножество $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{Z}^k$ и число $B \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие множества P гиперплоскостями, не превосходящее по мощности B?

В разд. 2 результат теоремы 1 обобщается на случай задачи о покрытии гиперплоскостями (kPC) в пространстве произвольной фиксированной размерности $k > 1$.

Наряду с задачей верификации свойства в работе рассматривается оптимизационная версия задачи о покрытии гиперплоскостями.

З а д а ч а 3: "Задача о минимальном покрытии гиперплоскостями конечного подмножества k-мерного пространства" (Min-kPC). Пусть задано конечное подмножество

$$P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{Z}^k.$$

Требуется найти разбиение $J_1, \dots J_L$ минимальной мощности множества $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ такое, что каждому $i \in \mathbb{N}_L$ может быть сопоставлена гиперплоскость H_i, обладающая свойством

$$\{p_j \in P \colon j \in J_i\} \subset H_i.$$

Важное направление исследований NP-трудных задач комбинаторной оптимизации связано с изучением возможности построения для конкретной задачи полиномиальной приближенной схемы (PTAS). Понятие *L-редукции*, впервые введенное К. Пападимитриу и М. Яннакакисом [9], аналогично понятию полиномиальной сводимости в теории NP-полных задач и позволяет распространять результаты о возможности (или невозможности) построения таких схем на новые типы задач.

Дадим определение L-редукции, следуя монографии [10].

Определение 1. Пусть заданы множества $\mathfrak{I}$ и S, $F\colon \mathfrak{I} \to 2^S$ — точечно-множественное отображение и целевая функция $c\colon \bigcup_{I\in\mathfrak{I}} F(I) \to \mathbb{R}_+$. Упорядоченную четверку $A = (\mathfrak{I}, S, F, c)$ назовем (*общей*) *задачей комбинаторной минимизации*, если каждому значению $I \in \mathfrak{I}$ сопоставляется оптимизационная задача

$$\min\{c(s)\colon s \in F(I)\}, \tag{1.1}$$

называемая *частной постановкой* задачи A.

При отсутствии двусмысленности толкования частной постановкой задачи A называют непосредственно элемент $I \in \mathfrak{I}$. Оптимальное значение задачи (1.1) обозначим $OPT(I)$.

Определение 2. Пусть A и B — две задачи комбинаторной минимизации. Говорят, что существует *L-редукция* задачи A к задаче B, если найдутся пара функций R и S, вычислимых алгоритмом с логарифмическим объемом памяти, и положительные константы α и β такие, что

1) если I — частная постановка задачи A с оптимальным значением $OPT(I)$, то $R(I)$ — частная постановка задачи B, оптимальное значение которой удовлетворяет неравенству

$$OPT(R(I)) \le \alpha\, OPT(I);$$

2) если z — допустимое решение задачи $R(I)$, то $S(z)$ является допустимым решением задачи I таким, что

$$c_A(S(z)) - OPT(I) \le \beta\,(c_B(z) - OPT(R(I))),$$

где c_A, c_B — целевые функции задач A и B, соответственно.

Договоримся алгоритмы с логарифмическим объемом используемой памяти сокращенно называть LSPACE-алгоритмами. Ключевое свойство L-редукции состоит в том, что она сохраняет свойство аппроксимируемости.

Утверждение 1. *Если существует L-редукция от A к B и для B существует полиномиальная аппроксимационная схема, то и задача A обладает полиномиальной аппроксимационной схемой.*

В работе [9] впервые введено понятие сложностного класса Max-SNP задач комбинаторной оптимизации, построение которого основано на L-редукции. Отметим важное свойство полных относительно этого класса задач.

Утверждение 2. *Если $P \ne NP$, то ни одна* Max-SNP*-полная задача не может иметь полиномиальной аппроксимационной схемы.*

Как показано в [10], задача Max-3SAT, как и ее модификация[2] Max-3SAT(t) при произвольном $t > 2$, являются Max-SNP-полными. В работе [11] предложена схема полиномиальной редукции задачи Max-3SAT(t) к задаче Min-2PC, сохраняющей точность аппроксимации, и тем самым показано, что последняя задача Max-SNP-трудна, а следовательно, не имеет полиномиальной аппроксимационной схемы (в предположении $P \ne NP$).

[2]Задача “3-выполнимость” при дополнительном условии, что каждая переменная может входить в булеву формулу не более t раз.

Пусть φ — 3-КНФ, определяющая условие частной задачи Max-3SAT(t). Обозначим через m количество дизъюнктов φ, а через $OPT(\varphi)$ — оптимальное значение задачи (максимальное количество одновременно разрешимых дизъюнктов). По аналогии введем обозначение $OPT(PC)$ для оптимального значения задачи Min-2PC (мощности наименьшего покрытия). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 [11]. *Существует схема полиномиального сведения задачи* Max-3SAT(t) *к задаче* Min-2PC*, преобразующая булеву формулу φ к частной постановке задачи* Min-2PC *так, что*

- *если* $OPT(\varphi) = m$, *то* $OPT(PC) = nt$,
- *если* $OPT(\varphi) = m' < (1-\varepsilon)m$, *то* $OPT(PC) > nt + \lceil \varepsilon n/6 \rceil$,

где $\varphi = E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ *— булева формула от n переменных,* $\varepsilon > 0$.

В разд. 3 обосновывается L-редукция задачи Min-$(k-1)$PC к задаче Min-kPC при произвольном натуральном $k > 2$ и, следовательно, Max-SNP-трудность всего семейства задач.

2. Труднорешаемость

Раздел посвящен доказательству труднорешаемости задачи kPC. Как упоминалось выше, задача 2PC NP-полна в сильном смысле. Обоснованная в данном разделе полиномиальная сводимость задачи $(k-1)$PC к задаче kPC (при произвольном $k > 2$) позволяет распространить данное свойство рекуррентно на случай произвольного натурального $k > 1$. Раздел состоит из двух пунктов. В первом обсуждаются сводимость задачи 2PC к задаче 3PC и некоторые сопутствующие результаты. Второй пункт посвящен переносу части результатов, в частности, полиномиальной сводимости на случай произвольного $k > 2$. Двумерный случай рассматривается отдельно, поскольку не все полученные в нем результаты непосредственно следуют из результатов, справедливых для произвольной размерности, и поэтому, по мнению авторов, представляют отдельный интерес.

2.1. Двумерный случай

Покажем, что задача 2PC сводится к задаче 3PC за полиномиальное время. Пусть частная постановка задачи 2PC задается конечным подмножеством $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ плоскости xOy и натуральным числом B. Без ограничения общности можно считать, что $P \subseteq \mathbb{N}_M^2$, где $\mathbb{N}_M = \{1, \ldots, M\}$ и $M > 1$. Введем обозначение $K = 2(M-1)^2$ и сопоставим каждой точке $p_i \in P$ пару точек в трехмерном пространстве с координатами

$$\bar{p}_{2i-1} = [p_i, -(K+2)^{i-1}] \qquad \text{и} \qquad \bar{p}_{2i} = [p_i, (K+2)^{i-1}]. \tag{2.2}$$

Будем говорить, что точки $\bar{p}_{2i-1}$ и $\bar{p}_{2i}$ *порождены* общей точкой p_i. Здесь и ниже используем запись $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ для обозначения точки (вектора) с заданными координатами, а для вектора $p = [x, y]$ и числа z — запись $[p, z]$ для сокращенного обозначения вектора $[x, y, z]$. Таким образом построим подмножество $\bar{P} \subseteq \mathbb{Z}^3$, определяющее совместно с числом B частную постановку задачи 3PC.

Произвольному покрытию прямыми L множества P можно естественным образом сопоставить покрытие плоскостями множества $\bar{P}$, для чего достаточно рассмотреть плоскости, проходящие через прямые множества L перпендикулярно исходной плоскости xOy.

С другой стороны, покажем, что существование покрытия множества $\bar{P}$ плоскостями влечет существование не превосходящего его по мощности покрытия множества P прямыми. Для этого докажем несколько предварительных утверждений.

Лемма 1. *Никакие три точки, принадлежащие множеству $\bar{P}$, не лежат на одной прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное подмножество

$$\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\} \subset \bar{P},$$

в котором $\bar{p}_i = [x_i, y_i, z_i]$. Как и выше, обозначаем через $p_i = [x_i, y_i]$ проекцию точки $\bar{p}_i$ на плоскость xOy. Требуется показать, что $\dim \operatorname{aff}(\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\}) > 1$. Справедливость утверждения леммы в случае $|\{p_1, p_2, p_3\}| < 3$, очевидно, следует из выбора координат z_i, поэтому всюду ниже полагаем $|\{p_1, p_2, p_3\}| = 3$. Кроме того, без ограничения общности полагаем выполненными неравенства $|z_2| \geq (K+2)|z_1|$ и $|z_3| \geq (K+2)|z_2|$.

Пусть, от противного, точки $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ и $\bar{p}_3$ лежат на одной прямой. Тогда в наших предположениях найдется число $t \neq 0$ такое, что

$$x_3 - x_1 = t(x_2 - x_1), \qquad y_3 - y_1 = t(y_2 - y_1), \qquad z_3 - z_1 = t(z_2 - z_1).$$

Допустив, что $x_2 \neq x_1$ (в противном случае используем аналогичную оценку для y_1, y_2 и y_3), в силу целочисленности координат имеем, с одной стороны,

$$M - 1 \geq |x_3 - x_1| = |t|\,|x_2 - x_1| \geq |t|. \tag{2.3}$$

С другой стороны,

$$(K+2)|z_2| - \frac{|z_2|}{K+2} \leq |z_3| - |z_1| \leq |z_3 - z_1| = |t|\,|z_2 - z_1| \leq |t|\,(|z_2| + |z_1|) \leq |t|\,|z_2|\Big(1 + \frac{1}{K+2}\Big),$$

т. е.

$$\frac{1}{K+2}|z_2|\,((K+2)^2 - 1) \leq \frac{1}{K+2}|z_2|\,|t|\,((K+2) + 1),$$

откуда

$$K + 1 \leq |t|. \tag{2.4}$$

Объединяя соотношения (2.3) и (2.4), получим неравенство

$$M - 1 \geq K + 1 = 2(M-1)^2 + 1,$$

противоречивое при произвольном M. Следовательно, допущение о том, что точки $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ и $\bar{p}_3$ лежат на одной прямой, неверно.

Лемма доказана.

Заметим, что способ (2.2) построения множества $\bar{P}$ вовсе не является единственным, обеспечивающим справедливость утверждения леммы 1. Аналогичный результат, например, может быть получен при задании множества $\bar{P}$ правилом

$$\bar{p}_{2i-1} = [p_i, -K^{i-1}] \qquad \text{и} \qquad \bar{p}_{2i} = [p_i, K^{i-1}] \qquad (p_i \in P).$$

Лемма 2. *Если произвольные четыре точки из множества $\bar{P}$ принадлежат одной плоскости, то порождающие их точки, элементы множества P, лежат на одной прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть точки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d} \in \bar{P}$ с координатами $[x_a, y_a, z_a]$, $[x_b, y_b, z_b]$, $[x_c, y_c, z_c]$, $[x_d, y_d, z_d]$, соответственно, лежат в плоскости π. Рассмотрим два случая.

1. Среди точек $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ найдется пара, порожденная одной точкой $p_i \in P$. Пусть это $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{a} = [p_i, (K+2)^{i-1}]$, $\bar{b} = [p_i, -(K+2)^{i-1}]$. В этом случае плоскость π перпендикулярна плоскости xOy, и, следовательно, прообразы точек $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ лежат на одной прямой, являющейся пересечением плоскостей π и xOy.

2. Никакие две точки из $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ не порождены общей точкой $p_i \in P$. Тогда можно считать, что порождающие их точки $p_i, p_j, p_k, p_l \in P$ (соответственно) таковы, что $1 \leq i < j < k < l \leq n$. Тогда, по построению,

$$|z_d| \geq (K+2)\,|z_c| \geq (K+2)^2 |z_b| \geq (K+2)^3 |z_a|.$$

Поскольку точки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ лежат в одной плоскости, то векторы $\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{c}-\bar{a}$, $\bar{d}-\bar{a}$ компланарны, следовательно, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим Δ по последнему столбцу:

$$\Delta = (z_d - z_a)\Delta_d - (z_c - z_a)\Delta_c + (z_b - z_a)\Delta_b = z_d\Delta_d - z_c\Delta_c + z_b\Delta_b - z_a(\Delta_d - \Delta_c + \Delta_b),$$

где

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_c = \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_b = \begin{vmatrix} x_c - x_a & y_c - y_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a \end{vmatrix}.$$

Поскольку координаты x, y точек $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ принадлежат $\mathbb{N}_M$, то каждый из указанных определителей либо равен нулю, либо его абсолютная величина допускает оценку снизу единицей. С другой стороны, справедлива очевидная верхняя оценка

$$\max\{|\Delta_b|, |\Delta_c|, |\Delta_d|\} \leq 2(M-1)^2 = K.$$

Таким образом, для произвольного $t \in \{b, c, d\}$ выполнено соотношение

$$(\Delta_t = 0) \vee (1 \leq |\Delta_t| \leq K).$$

Покажем, что равенство $\Delta = 0$ влечет $\Delta_b = \Delta_c = \Delta_d = 0$. Допустим, от противного, что $\Delta = 0$ и $\Delta_t \neq 0$ для какого-либо $t \in \{b, c, d\}$. Возможны три альтернативы:

$$\Delta_d = \Delta_c = 0, \qquad \Delta_b \neq 0, \tag{2.5}$$

$$\Delta_d = 0, \qquad \Delta_c \neq 0, \tag{2.6}$$

$$\Delta_d \neq 0. \tag{2.7}$$

Однако допустимость случая (2.5) опровергается оценкой

$$|\Delta| = |z_b\Delta_b - z_a\Delta_b| \geq |z_b|\,|\Delta_b| - |z_a|\,|\Delta_b| \geq |z_b| - K\,|z_a| \geq (K+2)\,|z_a| - K\,|z_a| > 0,$$

случая (2.6) — оценкой

$$|\Delta| = |-z_c\Delta_c + z_b\Delta_b - z_a(\Delta_b - \Delta_c)| \geq |z_c|\,|\Delta_c| - |z_b|\,|\Delta_b| - |z_a|\,(|\Delta_b| + |\Delta_c|)$$

$$\geq |z_c| - K\,|z_b| - 2K\,|z_a| \geq (K+2)\,|z_b| - K\,|z_b| - 2K\,|z_a| = 2\,(|z_b| - K\,|z_a|) > 0,$$

а случая (2.7) — оценкой

$$|\Delta| = |z_d\Delta_d - z_c\Delta_c + z_b\Delta_b - z_a(\Delta_b - \Delta_c + \Delta_d)| \geq |z_d| - K\,|z_c| - K\,|z_b| - 3K\,|z_a|$$

$$\geq (K+2)\,|z_c| - K\,|z_c| - K\,|z_b| - 3K\,|z_a| \geq 2\,|z_c| - K\,|z_b| - 3K\,|z_a| \geq 2\,(|z_c| - K\,|z_b| - 2K\,|z_a|) > 0.$$

Таким образом, равенство нулю определителя Δ (компланарность векторов $\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{c}-\bar{a}$, $\bar{d}-\bar{a}$) влечет равенства $\Delta_b = \Delta_c = \Delta_d = 0$, обеспечивающие в свою очередь принадлежность точек $p_i = [x_a, y_a]$, $p_j = [x_b, y_b]$, $p_k = [x_c, y_c]$, $p_l = [x_d, y_d]$ одной прямой.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Плоскость π, содержащая произвольные точки $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_4 \in \bar{P}$, $\bar{p}_i = [p_i, z_i]$, $p_i \in P$, содержит также точки p_i, $[p_i, -z_i]$, $i \in \mathbb{N}_4$, и перпендикулярна плоскости xOy.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, по лемме 2 точки $p_1, \dots, p_4$ лежат на одной прямой l (в плоскости xOy). Плоскость π', перпендикулярная плоскости xOy и пересекающая ее по прямой l, очевидно, содержит все указанные выше точки:

$$p_1, \dots, p_4, \qquad \bar{p}_1 = [p_1, z_1], \dots, \bar{p}_4 = [p_4, z_4], \qquad [p_1, -z_1], \dots, [p_4, -z_4].$$

С другой стороны, по лемме 1 точки $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ не лежат на одной прямой, следовательно, плоскость, их содержащая, определяется однозначно, откуда $\pi = \pi'$.

Лемма 3. *Пусть C — произвольное покрытие множества $\bar{P}$ плоскостями. Тогда существует покрытие множества P прямыми, мощность которого не превосходит мощности C.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное покрытие C множества $\bar{P}$ плоскостями и разобьем его на два класса C_1, C_2. К первому классу отнесем плоскости, перпендикулярные xOy, а ко второму — все остальные. Через $\bar{P}_1$ обозначим подмножество множества $\bar{P}$, покрываемое плоскостями из класса C_1, а через $\bar{P}_2 = \bar{P} \setminus \bar{P}_1$ обозначим его дополнение. Соответственно введем обозначения P_1 и P_2 для проекций подмножеств $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ на плоскость xOy. Заметим, что в силу следствия 1 точки $\bar{p}_i = [p_i, z_i]$ и $[p_i, -z_i]$ принадлежат (или не принадлежат) подмножеству $\bar{P}_1$ одновременно, следовательно, $|\bar{P}_i| = 2|P_i|$. По лемме 2 классу C_1 соответствует равномощное покрытие L_1 множества P_1 прямыми.

Пусть $\bar{P}_2 \neq \varnothing$. По лемме 2 каждая плоскость, элемент класса C_2, содержит не более трех элементов множества $\bar{P}_2$, т. е. $|C_2| \geq \lceil |\bar{P}_2|/3 \rceil$. С другой стороны, подмножество P_2 обладает покрытием L_2, содержащим не более

$$\left\lceil \frac{|P_2|}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{|\bar{P}_2|}{4} \right\rceil$$

прямых, следовательно, мощность покрытия $L_1 \cup L_2$ множества P прямыми не превосходит $|C_1| + |C_2| = |C|$.

Лемма доказана.

Следующая лемма завершает обоснование полиномиального сведения задачи 2PC к задаче 3PC.

Лемма 4. *Описанное сведение задачи* 2PC *к задаче* 3PC *можно осуществить за полиномиальное от длины записи условий задачи* 2PC *время.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Частная постановка задачи 2PC задается набором точек

$$P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{N}_M^2$$

и числом $B \in \mathbb{N}$. Следовательно, длина записи условия задачи[3]

$$\mathrm{Len}_1 = 2n \log M + \log B \geq 2n \log M.$$

Как определено выше, элементы множества $\bar{P}$ задаются соотношениями

$$\bar{p}_{2i} = [p_i, (K+2)^{i-1}], \qquad \bar{p}_{2i-1} = [p_i, -(K+2)^{i-1}] \qquad (i \in \mathbb{N}_n),$$

где $K = 2(M-1)^2$. Поэтому временная сложность алгоритма, сопоставляющего условию задачи 2PC подходящую постановку задачи 3PC, определяется сложностью вычисления степеней

[3]Здесь и ниже запись $\log x$ используется для обозначения двоичного логарифма числа x.

$(K+2)^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}_n$. Как известно [12], временная сложность операции умножения двух натуральных чисел не превосходит $O(N \log N \log\log N)$, где N — длина наибольшего из сомножителей, в нашем случае

$$N \le n \log(K+2) \le n\,(\log K + 1) = n\,(\log 2(M-1)^2 + 1) = n\,(2\log(M-1) + 2).$$

Следовательно, общая временная сложность ограничена сверху полиномом от n и $\log M$, т. е. от Len_1.

Лемма доказана.

Следующая теорема подводит итог приведенным выше рассуждениям.

Теорема 3. *Задача* 3PC *NP-полна в сильном смысле.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, произвольное покрытие прямыми множества P порождает равномощное ему покрытие плоскостями множества $\bar{P}$. Обратно: в силу леммы 3 по произвольному покрытию множества точек $\bar{P}$ можно построить не превосходящее его по мощности покрытие для P. При этом из леммы 4 следует полиномиальность предложенного сведения. В итоге, поскольку задача 2PC NP-полна в сильном смысле, аналогичный результат справедлив и для задачи 3PC.

2.2. Случай произвольной размерности

Перейдем к рассмотрению задачи о покрытии гиперплоскостями в пространствах размерности больше трех и покажем, что задача $(k-1)$PC может быть за полиномиальное время сведена к задаче kPC. Пусть частная постановка задачи $(k-1)$PC задается множеством $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{N}_M^{k-1}$ и натуральным числом B. Ниже мы воспользуемся естественным изоморфным вложением $(k-1)$-мерного пространства в k-мерное: $x \in \mathbb{R}^{k-1} \mapsto [x, 0] \in \mathbb{R}^k$ и будем отождествлять подмножества $P \subset \mathbb{R}^{k-1}$ и $\{[p_1, 0], \ldots, [p_n, 0]\} \subset \mathbb{R}^k$. Сопоставим каждой точке $p_i \in P$ пару точек в пространстве $\mathbb{Z}^k$ по следующему правилу:

$$\bar{p}_{2i-1} = [p_i, -w_i], \qquad \bar{p}_{2i} = [p_i, w_i], \tag{2.8}$$

где

$$w_i = (K+2)^{i-1} \qquad \text{и} \qquad K = \left\lceil (k-1)^{\frac{k-1}{2}} (M-1)^{k-1} \right\rceil. \tag{2.9}$$

Тем самым построим множество $\bar{P} \subseteq \mathbb{Z}^k$, задающее совместно с числом B частную постановку задачи kPC. Как обычно, для обоснования полиномиальной сводимости покажем, что данное построение может быть произведено за полиномиальное время, а описанные выше частные задачи обладают идентичными ответами.

Очевидно, всякое покрытие гиперплоскостями подмножества P в пространстве $\mathbb{R}^{k-1}$ порождает равномощное покрытие подмножества $\bar{P} \subset \mathbb{R}^k$. Обратное соответствие требует обоснования. Введем следующие дополнительные обозначения. Через π_0 обозначим гиперплоскость

$$\{[x, 0] \colon x \in \mathbb{R}^{k-1}\},$$

роль которой в приведенных ниже рассуждениях аналогична роли плоскости xOy в п. 2.1. Для произвольного подмножества $Q \subset \mathbb{R}^k$ символом $\mathrm{Pr}_{\pi_0} Q$ обозначим ортогональную проекцию подмножества Q на гиперплоскость π_0.

Лемма 5. *Пусть подмножества $Q \subset P$ и $\bar{Q} \subset \bar{P}$ связаны соотношением $Q = \mathrm{Pr}_{\pi_0} \bar{Q}$ и выполнены условия*

$$|\bar{Q}| \ge k+1, \tag{2.10}$$
$$\dim \mathrm{aff}(\bar{Q}) \le k-1.$$

Тогда $\dim \mathrm{aff}(Q) \le k-2$.

Доказательство. Очевидно, рассуждения достаточно провести в случае, когда неравенство (2.10) обращается в равенство. Пусть π — гиперплоскость пространства $\mathbb{R}^k$, содержащая аффинную оболочку множества $\bar{Q}$. По аналогии с доказательством леммы 2 исключим из рассмотрения тривиальный случай $|Q| < |\bar{Q}|$, в котором множество $\bar{Q}$ содержит точки, порожденные одним элементом множества P. В самом деле, пусть $\bar{Q}' = \{\bar{p}_{2i-1}, \bar{p}_{2i}, \bar{p}_{2j}\} \subset \bar{Q}$ для некоторого $\{i, j\} \subset \mathbb{N}$. По формуле (2.8) элементы подмножества $\bar{Q}'$ порождаются точками $p_i, p_j \in P$. Выбор в качестве третьего элемента $\bar{Q}'$ точки p_{2j} именно с четным номером не принципиален, случай p_{2j-1} может быть рассмотрен по аналогии. Но тогда

$$\{[p_i, 0], [p_j, 0]\} \subset \mathrm{aff}(\bar{Q}') \subset \pi.$$

Учитывая произвольность выбора точки $p_{2j} \in \bar{Q}$, приходим к выводу, что $Q = \mathrm{Pr}_{\pi_0} \bar{Q} \subset \pi$ и, следовательно, с учетом условия $\pi_0 \neq \pi$

$$\dim \mathrm{aff}(Q) \leq \dim(\pi_0 \cap \pi) = k - 2.$$

Итак, полагаем далее, что $|Q| = |\bar{Q}|$. Кроме того, без ограничения общности полагаем, что

$$\bar{Q} = \{\bar{p}_{j_1}, \ldots, \bar{p}_{j_{k+1}}\},$$

причем

$$\bar{p}_{j_t} = [p_{i_t}, z_{i_t}], \qquad |z_{i_t}| = w_{i_t} \qquad (t \in \mathbb{N}_{k+1})$$

для некоторых

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{k+1} \leq n,$$

и, следовательно, верны неравенства

$$|z_{i_t}| \leq (K + 2)\,|z_{i_{t+1}}| \qquad (t \in \mathbb{N}_k). \tag{2.11}$$

По условию $\dim \mathrm{aff}(\bar{Q}) \leq k - 1$. Значит, векторы

$$\bar{p}_{j_2} - \bar{p}_{j_1} = [p_{i_2} - p_{i_1}, z_{i_2} - z_{i_1}], \ldots, \bar{p}_{j_{k+1}} - \bar{p}_{j_1} = [p_{i_{k+1}} - p_{i_1}, z_{i_{k+1}} - z_{i_1}]$$

линейно зависимы, и определитель, составленный из их координат, равен нулю. Представим этот определитель в удобном для нас виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_{i_2} - z_{i_1} & z_{i_3} - z_{i_1} & \ldots & z_{i_{k+1}} - z_{i_1} \\ p_{i_2} - p_{i_1} & p_{i_3} - p_{i_1} & \ldots & p_{i_{k+1}} - p_{i_1} \end{vmatrix},$$

после чего разложим его по первой строке:

$$\Delta = (z_{i_2} - z_{i_1})\Delta_{i_2} + (-1)^1 (z_{i_3} - z_{i_1})\Delta_{i_3} + \ldots + (-1)^{k-1}(z_{i_{k+1}} - z_{i_1})\Delta_{i_{k+1}}$$
$$= (-1)^{k-1} z_{i_{k+1}} \Delta_{i_{k+1}} + \ldots + (-1)^0 z_{i_2}\Delta_{i_2} - z_{i_1}\big(\Delta_{i_2} + (-1)^1\Delta_{i_3} + \ldots + (-1)^{k-1}\Delta_{i_{k+1}}\big).$$

Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что $\Delta_{i_t} = 0$ для всех значений $t = 2, \ldots, k + 1$. Пусть, от противного, это не так и i_t — старший номер определителя, не равного нулю. Убедимся в том, что в этом случае $\Delta \neq 0$. Как и ранее, рассуждения существенным образом опираются на целочисленность координат точек p_{i_t} и, следовательно, всех рассматриваемых определителей. В частности, справедливо условие

$$(\Delta_{i_t} = 0) \vee \big(1 \leq |\Delta_{i_t}| \leq K = \big\lceil (k-1)^{\frac{k-1}{2}} (M-1)^{k-1} \big\rceil\big),$$

где верхняя оценка следует из неравенства Адамара. Оценим абсолютную величину определителя Δ снизу:

$$|\Delta| = |(-1)^{t-2} z_{i_t} \Delta_{i_t} + \ldots + z_{i_2}\Delta_{i_2} - z_{i_1}(\Delta_{i_2} + \ldots + (-1)^{t-2}\Delta_{i_t})|$$

$$\geq |z_{i_t}|\,|\Delta_{i_t}| - |z_{i_{t-1}}|\,|\Delta_{i_{t-1}}| - \ldots - |z_{i_2}|\,|\Delta_{i_2}| - |z_{i_1}|\,(|\Delta_{i_2}| + \ldots + |\Delta_{i_t}|)$$
$$\geq |z_{i_t}| - K\,|z_{i_{t-1}}| - \ldots - K\,|z_{i_2}| - (t-1)\,K\,|z_{i_1}| = E(t).$$

Покажем, что $E(t) > 0$. Доказательство ведем индукцией по t. База: $t = 2$.

$$E(2) = |z_{i_2}| - K\,|z_{i_1}| \geq (K+2)\,|z_{i_1}| - K\,|z_{i_1}| = 2\,|z_{i_1}| > 0$$

в силу (2.11). Пусть утверждение верно для всех $s \leq t$. Проведем доказательство для $s = t+1$.

$$E(t+1) = |z_{i_{t+1}}| - K\,|z_{i_t}| - \ldots - K\,|z_{i_2}| - tK\,|z_{i_1}|$$

$$\geq (K+2)\,|z_{i_t}| - K\,|z_{i_t}| - \ldots - K\,|z_{i_2}| - tK\,|z_{i_1}| = 2\,|z_{i_t}| - K\,|z_{i_{t-1}}| - \ldots - K\,|z_{i_2}| - tK\,|z_{i_1}|$$
$$\geq 2\,(|z_{i_t}| - K\,|z_{i_{t-1}}| - \ldots - K\,|z_{i_2}| - (t-1)K\,|z_{i_1}|) = 2E(t) > 0$$

по предположению индукции. Таким образом показано, что неравенство $\Delta_{i_t} \neq 0$ при произвольном $t = 2, \ldots, k+1$ влечет $\Delta \neq 0$, что противоречит условию.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\bar{\Pi} = \{\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_t\}$ *— покрытие гиперплоскостями множества* $\bar{P}$. *Тогда множество* P *также обладает покрытием гиперплоскостями, мощность которого не превосходит* t.

Доказательство. Разобьем покрытие $\bar{\Pi}$ на два класса:

$$\bar{\Pi}_1 = \{\bar{\pi} \in \bar{\Pi} \colon |\bar{\pi} \cap \bar{P}| \geq k+1\}, \qquad \bar{\Pi}_2 = \bar{\Pi} \setminus \bar{\Pi}_1.$$

По построению произвольной гиперплоскости $\bar{\pi}_j \in \bar{\Pi}_1$ соответствует подмножество $\bar{P}_j = \bar{\pi}_j \cap \bar{P}$, $|\bar{P}_j| \geq k+1$. По лемме 5 в пространстве $\mathbb{R}^{k-1}$ существует гиперплоскость π_j, содержащая множество $P_j = \{p \in P \colon \bar{p} \in \bar{P}_j\}$. Очевидным образом многообразие π_j может быть продолжено до гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^k$, содержащей $\bar{P}_j \cup P_j \cup \bar{P}'_j$, где $\bar{P}'_j$ состоит из точек, симметричных элементам подмножества $\bar{P}_j$ относительно гиперплоскости π_0.

Введем обозначения:

$$P_I = \bigcup_{\bar{\pi}_j \in \bar{\Pi}_1} P_j, \qquad P_{II} = P \setminus P_I.$$

По доказанному множество P_I обладает покрытием гиперплоскостями, равномощным покрытию $\bar{\Pi}_1$, в то время как ни одна точка $\bar{p} \in \bar{P}$ такая, что ее прообраз $p \in P_{II}$, не принадлежит ни одному элементу $\bar{\Pi}_1$. Обозначим подмножество, состоящее из таких точек, через $\bar{P}_{II}$. Это подмножество покрывается элементами $\bar{\Pi}_2$, следовательно,

$$|\bar{\Pi}_2| \geq \left\lceil \frac{|\bar{P}_{II}|}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{2|P_{II}|}{k} \right\rceil.$$

С другой стороны, множество P_{II}, очевидно, обладает в пространстве $\mathbb{R}^{k-1}$ покрытием гиперплоскостями, мощность которого не превосходит

$$\left\lceil \frac{|P_{II}|}{k-1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{2|P_{II}|}{k} \right\rceil,$$

поскольку

$$\frac{|P_{II}|}{k-1} \leq \frac{2|P_{II}|}{k}$$

для произвольного $k \geq 2$, а функция $\lceil\cdot\rceil$ монотонно возрастает. Таким образом, показано, что множество P обладает покрытием гиперплоскостями, не превосходящим по мощности t.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Описанное выше сведение задачи* $(k-1)$PC *к задаче* kPC *можно осуществить за полиномиальное от длины записи условий задачи* $(k-1)$PC *время.*

Доказательство. Частная постановка задачи $(k-1)$PC задается набором точек

$$P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{N}_M^{k-1}$$

и числом $B \in \mathbb{N}$. Следовательно, длина записи условия задачи $(k-1)$PC определяется как

$$\mathrm{Len}_1 = (k-1)\, n \log(M-1) + \log B \geq (k-1)\, n \log(M-1).$$

Элементы множества $\bar{P}$ задаются соотношениями (2.8)–(2.9). Временная сложность алгоритма, сопоставляющего условию задачи $(k-1)$PC соответствующую постановку задачи kPC, определяется сложностью вычисления степеней $(K+2)^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}_n$. Как отмечалось в лемме 4, временная сложность операции умножения двух натуральных чисел не превосходит $O(N \log N \log\log N)$, где N — длина наибольшего из сомножителей. В предложенном алгоритме

$$N \leq n \log(K+2) \leq n\,(\log K + 1),$$

где

$$\log K \leq \log\bigl(2(k-1)^{\frac{k-1}{2}}(M-1)^{k-1}\bigr) = \frac{k-1}{2}\log(k-1) + (k-1)\log(M-1) + 1.$$

Следовательно, временная сложность всего алгоритма ограничена сверху полиномом от n и $\log M$, т. е. от Len_1.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Задача* kPC *при произвольном фиксированном* $k > 2$ *NP-полна в сильном смысле.*

При $k = 3$ утверждение теоремы совпадает с утверждением теоремы 3, доказанной в п. 2.1. При $k > 3$ доказательство может быть получено путем последовательного применения лемм 6 и 7.

3. Аппроксимируемость

В данном разделе обсуждается оптимизационная версия задачи kPC при произвольном $k > 2$ — будем называть ее Min-kPC — и доказывается, что она является Max-SNP-трудной. Для этого будет показано, что предложенный в предыдущем разделе алгоритм сведения задачи $(k-1)$PC к задаче kPC (при произвольном $k > 2$) является L-редукцией, и поскольку, как отмечалось во введении, задача Min-2PC является Max-SNP-трудной, то из этого будет следовать, что и при произвольном $k > 2$ задача Min-kPC остается таковой. Согласно [10] принадлежность классу Max-SNP-трудных задач влечет невозможность построения для задачи Min-kPC ($k > 2$) полиномиальной аппроксимационной схемы в предположении $P \neq NP$.

Теорема 5. *Предложенное выше сведение задачи* Min-$(k-1)$PC *к задаче* Min-kPC *при произвольном* $k > 2$ *является* L*-редукцией.*

Доказательство. Согласно определению 2 необходимо построить две функции R и S, вычислимые LSPACE-алгоритмами, и указать положительные константы α и β такие, что выполняются оба свойства из определения L-редукции.

Функция R сопоставляет частной постановке задачи Min-$(k-1)$PC подходящую постановку задачи Min-kPC по правилу, описанному в предыдущем разделе. При этом пространственная сложность вычисления определяется объемом памяти, необходимым для вычисления последних координат точек множества $\bar{P}$, которые получаются путем возведения натурального числа

$\delta = K + 2$ в степень $i-1$ для $i \in \mathbb{N}_n$. Как известно, операция умножения двух натуральных чисел выполнима LSPACE-алгоритмом, а именно, если N — сумма длин сомножителей, то для их умножения достаточно объема памяти $O(\log N)$. В нашем случае

$$N \leq \log \delta + \log \delta^{n-2} < (n-1)(\log K + 1) < (n-1)\Big(\frac{k-1}{2}\log(k-1) + (k-1)\log(M-1) + 2\Big).$$

Поскольку согласно лемме 7 длина записи условия задачи Min-$(k-1)$PC

$$\mathrm{Len}_1 < (k-1)\, n \log(M-1),$$

то функция R вычислима с использованием памяти объемом $O(\log \mathrm{Len}_1)$, т. е. она вычислима LSPACE-алгоритмом. При этом, очевидно, в качестве α достаточно взять единицу.

Функция S сопоставляет произвольному допустимому решению задачи Min-kPC допустимое решение задачи Min-$(k-1)$PC. Вход для S — это допустимое решение в задаче Min-kPC, заданное в виде строки, в которой выписано разбиение $\bar{J} = \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_L$ индексов точек множества $\bar{P}$. Каждый элемент разбиения задается перечислением входящих в него индексов, при этом индексы отделены друг от друга одним пустым символом, а элементы разбиения отделены друг от друга двумя пустыми символами. Вычисление функции S будет основано на лемме 6, разобьем его на этапы.

I. Движемся по входной ленте (с ее начала) первый раз:

1. Рассматриваем некоторый элемент разбиения $\bar{J}_t$ и считаем количество индексов в нем. Так как общее число точек во множестве $\bar{P}$ равно $2n$, то для вычисления $|\bar{J}_t|$ потребуется $O(\log n)$ памяти.

1.1. Если $|\bar{J}_t| \geq k+1$, последовательно перебираем индексы из $\bar{J}_t$:

a) Если индекс четный $(2i)$, выписываем на вспомогательную ленту -1.

b) Если индекс нечетный $(2i-1)$, выписываем на вспомогательную ленту 1.

Затем движемся по входной ленте с начала до текущего индекса и сверяем записанные на входной ленте индексы с текущим. Если мы встретим индекс, отличающийся от текущего индекса на выписанное на вспомогательной ленте значение (-1 или 1 в зависимости от четности или нечетности текущего индекса), то на выходную ленту ничего не записываем и переходим к следующему индексу на входной ленте из множества $\bar{J}_t$. Иначе выписываем на выходную ленту в J_t индекс i путем деления текущего индекса пополам и прибавления последнего бита его двоичной записи к результату.

Заметим, что один элемент разбиения $\bar{J}_t$ индексов точек множества $\bar{P}$ порождает один элемент разбиения J_t индексов точек множества P.

1.2. Если $|\bar{J}_t| < k+1$, пропускаем его.

В итоге, когда входная лента будет просмотрена до конца, на выходной ленте будут записаны элементы $J_1, \ldots, J_{L_1}$ строящегося разбиения для индексов точек P, построенные по элементам исходного разбиения $\bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_L$ индексов точек $\bar{P}$ таких, что $|\bar{J}_t| \geq k+1$.

II. Движемся по входной ленте второй раз с ее начала:

1. Заводим на вспомогательной ленте счетчик c, который будет подсчитывать количество индексов, выписанных на выходную ленту при повторном просмотре, обнуляем его (необходимая память для такого счетчика $O(\log n)$).

2. Рассматриваем некоторый элемент разбиения $\bar{J}_t$ и считаем $|\bar{J}_t|$.

2.1. Если $|\bar{J}_t| \geq k+1$, пропускаем его.

2.2. Если $|\bar{J}_t| < k+1$, то последовательно перебираем индексы из $\bar{J}_t$:

a) Если индекс четный $(2i)$, выписываем на вспомогательную ленту -1.

b) Если индекс нечетный $(2i-1)$, выписываем на вспомогательную ленту 1.

Проверяем, встречался ли ранее на входной ленте индекс, отличающийся от текущего на выписанное на входной ленте значение, и, если нет, выписываем на выходную ленту i. При этом,

если $c < k - 1$, то индекс i мы относим к текущему строящемуся элементу разбиения множества P и увеличиваем c на единицу. Если $c = k - 1$, то индекс i выписывается в новый элемент разбиения, c полагается равным единице.
Как и ранее, для выполнения описанных действий на вспомогательной ленте потребуется объем памяти $O(\log n)$.

В результате на выходной ленте будет записано разбиение индексов точек P, причем, как показано, функция S оказывается вычислимой LSPACE-алгоритмом. В качестве β достаточно взять $\beta = 1$.

Теорема доказана.

Поскольку задача Min-2PC Max-SNP-трудна, то в силу доказанной теоремы 5 задача Min-kPC при произвольном $k > 2$ также является Max-SNP-трудной. Приведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 6. *Задача* Min-kPC *при произвольном* $k > 2$ Max-SNP-*трудна.*

Заключение

Статья содержит следующие основные результаты.

1. Показано, что задача покрытия гиперплоскостями конечного подмножества k-мерного числового пространства (kPC) NP-полна в сильном смысле при произвольном $k > 1$, следовательно, ее оптимизационная версия Min-kPC NP-трудна.

2. Задача Min-kPC Max-SNP-трудна при произвольном фиксированном $k > 1$, и, следовательно, для нее не может быть разработана полиномиальная аппроксимационная схема, если $P \neq NP$.

Следующие вопросы остаются открытыми:

1. Доказательство теоремы 6 получено путем обоснования L-редукции задачи Min-$(k-1)$PC к задаче Min-kPC. Следовательно, принадлежность задачи Min-k_0PC (при каком-то фиксированном k_0) классу Max-SNP влечет принадлежность этому классу задачи Min-kPC при произвольном $k > k_0$. В этом случае все перечисленные задачи приобретут статус Max-SNP-полных задач. В связи с этим вызывает интерес обоснование L-редукции какой-либо известной Max-SNP-полной задачи к задаче Min-2PC.

2. Полученное в работе обоснование невозможности построения для задачи Min-kPC полиномиальной аппроксимационной схемы подтверждает актуальность разработки для этой задачи полиномиальных (псевдополиномиальных) приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Agarwal P.K., Procopiuc C.M.** Exact and approximation algorithms for clustering // Algorithmica. 2002. Vol. 33. P. 201–206.
2. **Langerman S., Morin P.** Covering things with things // Discrete Comput. Geom. 2005. P. 717–729.
3. **Хачай М.Ю.** Вопросы вычислительной сложности процедур обучения распознаванию в классе комитетных кусочно-линейных решающих правил // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 178–189.
4. **Vazirany V.** Approximation algorithms. Berlin: Springer, 2001. 378 p.
5. **Johnson D.S.** Approximation algorithms for combinatorial problems // J. Comput. System Sci. 1974. Vol. 9, no. 3. P. 256–278.
6. **Lovász L.** On the ratio of integer and fractional covers // Discrete Math. 1975. Vol. 13. P. 383–390.
7. **Feige U.** A threshold of $\ln n$ for approximating set cover // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 4. P. 634–652.
8. **Megiddo N., Tamir A.** On the complexity of locating linear facilities in the plane // Oper. Res. Let. 1982. Vol. 1, no. 5. P. 194–197.
9. **Papadimitriou Ch., Yannakakis M.** Optimization, approximation, and complexity classes // J. Comput. System Sci. 1991. Vol. 43, no. 3. P. 425–440.

10. **Papadimitriou Ch.** Computational complexity. New York: Addison-Wesley, 1995. 523 p.
11. **Поберий М.И.** О принадлежности классу MAX-SNP-трудных задач MIN-PC и MASC-GP(n) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 210–215.
12. **Schönhage A. and Strassen V.** Schnelle Multiplikation großer Zahlen // Computing. 1971. Vol. 7, no. 3–4. P. 281–292.

Поступила 26.03.2012

Хачай Михаил Юрьевич
д-р. физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Поберий Мария Ивановна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: maschas_briefen@mail.ru

Том 18 № 3 2012

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов

Рассматривается решение обобщенной задачи курьера в условиях, когда стоимости перемещений явным образом зависят от списка не выполненных (на момент перемещения) заданий. Построено представление исходной задачи маршрутизации с зависимыми переменными в терминах эквивалентной экстремальной задачи с независимыми переменными. На этой основе для решения исходной задачи предложен метод итераций. Построенный на его основе алгоритм реализован на ПЭВМ.

Ключевые слова: маршрут, условия предшествования, экстремальная задача.

A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. On an iterative procedure for solving a routing problem with constraints.

The generalized courier problem in the case when travel costs depend explicitly on the list of tasks that have not been performed (by the time of the travel) is considered. The original routing problem with dependent variables is represented in terms of an equivalent extremal problem with independent variables. An iterative method based on this representation is proposed for solving the original problem. The algorithm based on this method is implemented as a computer program.

Keywords: route, precedence conditions, extremal problem.

Введение

В статье используются следующие сокращения: ЗК — задача коммивояжера, МДП — метод динамического программирования, п/м — подмножество, УП — упорядоченная пара.

Статья продолжает цикл работ авторов, связанный с построением итерационных методов для решения задач маршрутизации с ограничениями; имеются в виду задачи обхода мегаполисов при соблюдении условий предшествования. В связи с исследуемыми задачами отметим, что все они имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера, но включают особенности, связанные с решением прикладных задач. Среди последних можно отметить некоторые постановки, возникающие при анализе проблемы снижения облучаемости персонала атомных электростанций (АЭС); эта проблема появляется, в частности, при планировании процедур демонтажа оборудования энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. Настоящая работа посвящена решению задачи, моделирующей некоторые принципиальные моменты прикладного характера, возникающие в задаче о демонтаже.

Возвращаясь к ЗК, отметим обстоятельный обзор [1–3]. Отметим также работы [4; 5], касающиеся построения метода динамического программирования для решения ЗК; см. также варианты МДП для решения обобщенной ЗК в [6–8]. Более поздние исследования авторов в направлении, связанном с МДП, касаются задач последовательного обхода множеств (мегаполисов); они отражены в [9] и в работах, указанных в библиографии [9]. Сейчас остановимся на другом направлении; речь идет о методе итераций, который в свою очередь опирается на специальное преобразование экстремальной задачи маршрутизации с зависимыми переменными (маршрут и трасса) к аналогичной задаче с независимыми переменными ("система городов", маршрут). В [10–12] упомянутая конструкция была использована для исследования задачи о

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН "Математическая теория управления" (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014) и при поддержке РФФИ (проекты 10-01-96020, 10-08-00484, 11-01-90432 укр_ф_а).

посещении мегаполисов без условий предшествования и каких-либо работ в пределах мегаполисов для традиционного аддитивного способа агрегирования затрат; в [13; 14] данная схема была распространена на случай задачи “на узкие места”. В [9, часть 4] был построен вариант метода итераций для решения обобщенной задачи курьера (задача о посещении мегаполисов при наличии ограничений в виде условий предшествования). Наконец, в [15–17] упомянутый метод был распространен на весьма общий случай обобщенной задачи курьера с внутренними работами, одно из возможных применений которой связано с известной инженерной задачей минимизации дозовой нагрузки персонала АЭС при выполнении комплекса работ в помещениях с повышенным уровнем радиации [18; 19].

Представляет интерес распространение метода итераций и сопутствующих конструкций на несколько иную постановку, которая мотивируется интересами решения другой серьезной прикладной задачи из области атомной энергетики, а именно: вышеупомянутой задачи о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации (соответствующая версия МДП также была построена, см. [20]; в связи с применением МДП для решения задачи о демонтаже см. [21]). Дело в том, что последняя постановка включает существенную особенность: стоимость перемещения между мегаполисами явным образом зависит от списка невыполненных заданий, что в содержательной инженерной задаче отвечает радиационному воздействию не демонтированных на момент перемещения фрагментов оборудования энергоблока станции. Настоящая работа посвящена построению метода итераций с учетом упомянутой особенности. Наряду с этим будут исследоваться и некоторые другие вопросы; в частности, будет построено эквивалентное преобразование исходной маршрутной задачи к виду, соответствующему идейно некоторой задаче реконструкции, связанной с размещением городов (в пределах мегаполисов) наилучшим образом в смысле последующего решения задачи курьера. На основе теоретической конструкции был построен алгоритм, реализованный на ПЭВМ, и проведен вычислительный эксперимент, результаты которого отражены в статье.

1. Постановка задачи. Общие понятия и обозначения

Сначала приведем сводку необходимых понятий и обозначений. Используем кванторы, пропозициональные связки; в дальнейшем def заменяет фразу “по определению”; $\triangleq$ — равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то $\{x; y\}$ — множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов (неупорядоченная пара упомянутых объектов). Для всякого объекта h в виде $\{h\} \triangleq \{h; h\}$ имеем одноэлементное множество, содержащее h. Множества — суть объекты. Используя общее определение [22, с. 67], полагаем для произвольных объектов p и q, что $(p, q) \triangleq \big\{\{p\}; \{p; q\}\big\}$, получая УП с первым элементом p и вторым элементом q. Если z есть УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$; если при этом $z \in A \times B$, где A и B — множества, то $\mathrm{pr}_1(z) \in A$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in B$.

Если S — множество, то через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м S; $\mathcal{P}'(S) = \mathcal{P}(S) \setminus \{\varnothing\}$, где $\varnothing$ — пустое множество. Если Y и Z — множества, то (см. [22]) Z^Y есть def множество всех отображений, действующих из Y в Z; в качестве Y может, в частности, использоваться п/м декартова произведения. В этой связи условимся о следующем соглашении: если A, B и C — множества, $D \in \mathcal{P}(A \times B)$, $f \in C^D$, $a \in A$, $b \in B$ и при этом $z = (a, b) \in D$, то полагаем $f(a, b) \triangleq f(z)$ (значение f в точке z), получая $f(a, b) \in C$. Это соглашение рассматриваем как обычное правило экономии скобок. Условимся также об аналогичном по смыслу соглашении: если A, B и C — множества, D — множество, $f \in D^{A \times B \times C}$, $z \in A \times B \times C$ и при этом $z = (a, b, c)$, где $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$, то $f(a, b, c) \triangleq f(z)$. В дальнейшем знак $\circ$ используем для обозначения суперпозиции.

Пусть $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$ и $\overline{p,q} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq j) \,\&\, (j \leq q)\}$ $\forall p \in \mathbb{N}_0\ \forall q \in \mathbb{N}_0$. В частности, $\overline{1,m} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq m\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})\ \forall m \in \mathbb{N}$. В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$. Если S — непустое множество, то через $\mathcal{R}_+(S)$ обозначаем далее множество всех функций из S в $[0,\infty[$.

Через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м множества X; разумеется, в случае конечного множества X $\mathcal{P}(X)$ совпадает с семейством всех конечных п/м X. Если K — непустое конечное множество, то $|K| \in \mathbb{N}$ есть def мощность (количество элементов) K; полагаем также $|\varnothing| \triangleq 0$. Тем самым всякому конечному множеству сопоставлена его мощность. Каждому непустому конечному множеству K сопоставляется также непустое конечное множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [23, с. 86] "отрезка" $\overline{1,|K|}$ на K. Перестановкой непустого множества A называется [23, с. 87] биекция этого множества на себя.

2. Специальные понятия и обозначения

Фиксируем непустое множество X, натуральное число $N \in \mathbb{N}$, $2 \leq N$, а также кортеж (мегаполисов) $(M_i)_{i\in\overline{1,N}} \colon \overline{1,N} \to \mathrm{Fin}(X)$ и точку $x^0 \in X$, называемую *базой*. Предполагается, что

$$\big(M_{i_1} \cap M_{i_2} = \varnothing\ \forall i_1 \in \overline{1,N}\ \forall i_2 \in \overline{1,N} \setminus \{i_1\}\big) \,\&\, \big(x^0 \notin M_j\ \forall j \in \overline{1,N}\big).$$

В дальнейшем рассматриваются процедуры построения перемещений вида

$$(x_0 = x^0) \to (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (x_N \in M_{\alpha(N)}), \tag{2.1}$$

где α — перестановка множества $\overline{1,N}$, удовлетворяющая некоторым ограничениям и называемая далее *маршрутом*; кортеж $(x_i)_{i\in\overline{0,N}}$ в (2.1) именуем *трассой*, согласованной с маршрутом α. Пусть $\mathbf{X} \triangleq \big(\bigcup_{i=1}^N M_i\big) \cup \{x^0\}$, заданы функции

$$\Pi \in \mathcal{R}_+(\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}), \tag{2.2}$$

где (здесь и ниже) $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$, и $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+\big(\bigcup_{i=1}^N M_i\big)$. Функция (2.2) используется при оценивании элементарных перемещений в (2.1), а $\mathbf{f}$ — для оценивания терминального состояния x_N. Именно, мы определяем значения

$$\Pi(x_0, x_1, \overline{1,N})$$
$$= \Pi(x_0, x_1, \{\alpha(i) \colon i \in \overline{1,N}\}), \Pi(x_1, x_2, \{\alpha(i) \colon i \in \overline{2,N}\}), \ldots, \Pi(x_{N-1}, x_N, \{\alpha(N)\}), \mathbf{f}(x_N) \tag{2.3}$$

(в (2.3) подразумевается, что $N \geq 3$), суммируем их и получившуюся величину рассматриваем как оценку качества пары $(\alpha, (x_i)_{i\in\overline{0,N}})$. Данная пара выбирается с целью минимизации упомянутого аддитивного критерия. В связи с (2.2) отметим одну важную особенность: в нашей задаче стоимость перемещения $x_k \to x_{k+1}$, где $k \in \overline{0,N-1}$, зависит не только от самих точек x_k и x_{k+1}, но и от списка не выполненных на текущий момент заданий (см. (2.3)). В этом состоит существенная особенность излагаемой далее конструкции в сравнении с [9].

Ограничения на выбор перестановки α сводятся к условиям предшествования. Пусть $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ и $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$, УП из множества $\mathbf{K}$ называем *адресными*; если $z \in \mathbf{K}$, то $\mathrm{pr}_1(z)$ называем *отправителем*, а $\mathrm{pr}_2(z)$ — *получателем* z. Мы требуем, чтобы отправитель каждой адресной пары "посещался" раньше ее получателя. Для более строгой формулировки условимся о том, что для всякой перестановки $\alpha \in \mathbb{P}$ через α^{-1} обозначается перестановка, обратная к α: $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$, и

$$\alpha^{-1}(\alpha(k)) = \alpha(\alpha^{-1}(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1,N}. \tag{2.4}$$

Тогда $\mathbb{A} \triangleq \big\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}\big\}$ есть [9, часть 2] множество всех допустимых (по предшествованию) маршрутов. Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее

У с л о в и е 2.1. $\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \quad \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 \colon \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0$.

Как следствие получаем [9, §2.2], что $\mathbb{A} \neq \varnothing$, т. е. $\mathbb{A} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$.

Возвращаясь к (2.1), полагаем, что для всякого маршрута $\alpha \in \mathbb{P}$ def $\mathfrak{X}_\alpha$ есть множество всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \colon \overline{0,N} \to \mathbf{X}, \tag{2.5}$$

для каждого из которых $x_0 = x^0$ и $x_j \in M_{\alpha(j)}$ $\forall j \in \overline{1,N}$; разумеется, $\mathfrak{X}_\alpha$ есть непустое конечное множество. Множество всех кортежей (2.5) обозначим через $\mathcal{X}$, а тогда

$$\mathfrak{X}_\alpha = \big\{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X} \mid (x_0 = x^0) \,\&\, (x_j \in M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1,N})\big\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{X}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{2.6}$$

В некоторых случаях элементы $\mathcal{X}$ (а это отображения из $\overline{0,N}$ в $\mathbf{X}$) обозначаем одной буквой; при $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и $k \in \overline{0,N}$ определено значение $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{X}$ отображения $\mathbf{x}$ в точке k. Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, то полагаем, что

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} \Pi(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \{\alpha(j) \colon j \in \overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(N)). \tag{2.7}$$

В качестве основной далее рассматривается задача

$$\mathfrak{C}_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}] \to \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \quad (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha. \tag{2.8}$$

Через V условимся обозначать значение (экстремум) задачи (2.8): $V = \min\limits_{\alpha \in \mathbb{A}} \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathfrak{X}_\alpha} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \in [0, \infty[$. Возвращаясь к (2.7), отметим с учетом (2.6), что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}] = \Pi(x^0, x_1, \overline{1,N}) + \sum_{k=1}^{N-1} \Pi(x_k, x_{k+1}, \{\alpha(j) \colon j \in \overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}(x_N) \\ \forall \alpha \in \mathbb{A} \quad \forall (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha.\end{gathered} \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) задачу (2.8) можно несколько переопределить, полагая

$$\mathfrak{M}_\alpha \triangleq \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{2.10}$$

Элементы множеств (2.10) (а это упорядоченные N-ки или кортежи “длины” N) определяют в существенной части трассы из множеств вида (2.6). Если $\mathbf{y} \colon \overline{1,N} \to \mathbf{X}$, то $x^0 \square \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ определяем условиями $\big((x^0 \square \mathbf{y})(0) \triangleq x^0\big) \,\&\, \big((x^0 \square \mathbf{y})(j) \triangleq \mathbf{y}(j) \ \forall j \in \overline{1,N}\big)$. В качестве $\mathbf{y}$ можно использовать кортежи из множеств (2.10). Тогда (см. (2.6), (2.10))

$$\mathfrak{X}_\alpha = \{x^0 \square \mathbf{y} \colon \mathbf{y} \in \mathfrak{M}_\alpha\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{2.11}$$

С учетом (2.11) при $\alpha \in \mathbb{A}$ выбор трассы из $\mathfrak{X}_\alpha$ можно отождествить с выбором кортежа из $\mathfrak{M}_\alpha$. Из (2.9), (2.11) следует, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}^{(\alpha)}[\mathbf{y}] \triangleq \mathfrak{C}_\alpha[x^0 \square \mathbf{y}] = \Pi(x^0, \mathbf{y}(1), \overline{1,N}) + \sum_{i=1}^{N-1} \Pi(\mathbf{y}(i), \mathbf{y}(i+1), \{\alpha(j) \colon j \in \overline{i+1,N}\}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}(N)) \\ \forall \alpha \in \mathbb{P} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathfrak{M}_\alpha.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Сама же задача (2.8), которая исследовалась на основе МДП в [20], сводится к виду

$$\mathfrak{C}^{(\alpha)}[(y_i)_{i \in \overline{1,N}}] \to \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \quad (y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha; \tag{2.13}$$

V — значение задачи (2.13), т. е. наименьшее из чисел $\mathfrak{C}^{(\alpha)}[\mathbf{y}]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}_\alpha$. Отметим, что непустое множество

$$\mathbf{S} \stackrel{\triangle}{=} \big\{(\alpha, \mathbf{y}) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{Y} \mid \mathbf{y} \in \mathfrak{M}_\alpha\big\}, \tag{2.14}$$

где $\mathfrak{Y}$ — множество всех кортежей $(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \colon \overline{1,N} \to \mathbf{X}$, образует пространство решений задачи (2.13). При $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ имеем $\mathrm{pr}_1(\mathbf{s}) \in \mathbb{A}$ и $\mathrm{pr}_2(\mathbf{s}) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{pr}_1(\mathbf{s})}$, что позволяет согласно (2.12) определить $\mathfrak{C}^{(\mathrm{pr}_1(\mathbf{s}))}[\mathrm{pr}_2(\mathbf{s})]$. В этой связи введем $W \in \mathcal{R}_+[\mathbf{S}]$ посредством правила $W(s) \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{C}^{(\mathrm{pr}_1(s))}[\mathrm{pr}_2(s)] \quad \forall s \in \mathbf{S}$. Иными словами, если $s \in \mathbf{S}$, $\alpha = \mathrm{pr}_1(s)$ и $(y_i)_{i \in \overline{1,N}} = \mathrm{pr}_2(s)$, то

$$W(s) = \mathfrak{C}^{(\alpha)}[(y_i)_{i \in \overline{1,N}}]. \tag{2.15}$$

Таким образом, задача (2.13), а стало быть, и (2.8) сводятся к виду

$$W(s) \to \min, \quad s \in \mathbf{S} \tag{2.16}$$

(учитываем, что $\mathbf{S}$ — непустое конечное множество, так как $\mathbb{A}$ есть непустое конечное множество и при $\alpha \in \mathbb{A}$ множество $\mathfrak{M}_\alpha$ (2.10) также конечно);

$$V = \min_{s \in \mathbf{S}} W(s) \in [0, \infty[, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{S}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{s_0 \in \mathbf{S} \mid W(s_0) = V\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{S}). \tag{2.18}$$

Мы ставим целью нахождение значения V (2.17) и какого-либо элемента множества $\mathbf{S}_0$ (2.18).

3. Преобразование основной экстремальной задачи

Заметим, что (см. (2.14), (2.16)) наша основная задача является экстремальной задачей с зависимыми переменными. Сейчас мы рассмотрим ее преобразование к задаче с независимыми переменными. В этой связи введем в рассмотрение (непустое конечное) множество

$$\mathfrak{M} \stackrel{\triangle}{=} \prod_{i=1}^{N} M_i \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Y}). \tag{3.1}$$

Тогда пространство решений преобразованной задачи определим в виде $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$, вновь получая непустое конечное множество. Введем теперь отображение

$$w\colon\ \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \to [0, \infty[\tag{3.2}$$

посредством следующего правила: если $h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$, то $w(h) \stackrel{\triangle}{=} \Pi(x^0, y_{\alpha(1)}, \overline{1,N}) + \sum_{i=1}^{N-1} \Pi(y_{\alpha(i)}, y_{\alpha(i+1)}, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{i+1,N}\}) + \mathbf{f}(y_{\alpha(N)})$, где $(y_i)_{i \in \overline{1,N}} = \mathrm{pr}_1(h)$ и $\alpha = \mathrm{pr}_2(h)$. Будем рассматривать задачу

$$w(h) \to \min, \quad h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}. \tag{3.3}$$

Разумеется, в (3.3) имеем экстремальную задачу с независимыми переменными;

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} \min_{h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}} w(h) \in [0, \infty[,$$

$$\mathbb{S} \stackrel{\triangle}{=} \{h_0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \mid w(h_0) = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M} \times \mathbb{A}) \tag{3.4}$$

определяют соответственно значение задачи (3.3) и (непустое) множество всех ее оптимальных решений. Нам потребуются еще три экстремальные задачи.

1) При $(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ рассматриваем следующую задачу курьера:

$$w((y_i)_{i \in \overline{1,N}}, \alpha) \to \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \tag{3.5}$$

получая, в частности, значение

$$(\mathrm{val})[(y_i)_{i\in\overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbb{A}} w((y_i)_{i\in\overline{1,N}},\alpha) \in [0,\infty[\tag{3.6}$$

и (непустое) экстремальное множество

$$(\mathrm{sol})[(y_i)_{i\in\overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \bigl\{\alpha_0\in\mathbb{A} \mid w((y_i)_{i\in\overline{1,N}},\alpha_0) = (\mathrm{val})[(y_i)_{i\in\overline{1,N}}]\bigr\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}). \tag{3.7}$$

2) Мы имеем также задачу реконструкции

$$(\mathrm{val})[\mathbf{y}] \to \min, \quad \mathbf{y}\in\mathfrak{M}. \tag{3.8}$$

Связь задач (3.3), (3.5) и (3.8) вполне очевидна: $\mathbb{V} = \min\limits_{\mathbf{y}\in\mathfrak{M}} (\mathrm{val})[\mathbf{y}]$.

3) Если фиксирован маршрут $\alpha\in\mathbb{A}$, будем рассматривать задачу оптимизации трассы

$$W(\alpha,\mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x}\in\mathfrak{M}_\alpha, \tag{3.9}$$

получая соответствующее значение задачи (экстремум) и экстремальное множество

$$\mathcal{V}[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}_\alpha} W(\alpha,\mathbf{x}) \in [0,\infty[, \tag{3.10}$$

$$(\mathrm{SOL})[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{x}_0\in\mathfrak{M}_\alpha \mid W(\alpha,\mathbf{x}_0) = \mathcal{V}[\alpha]\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}_\alpha). \tag{3.11}$$

Из (2.14), (2.17), (3.9)–(3.11) вытекает очевидное равенство

$$V = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \mathcal{V}[\alpha]. \tag{3.12}$$

Заметим, что при $\alpha\in\mathbb{A}$, $\mathbf{z}\in\mathfrak{M}_\alpha$ и $j\in\overline{1,N}$ индекс $\alpha^{-1}(j)\in\overline{1,N}$ обладает свойством $\mathbf{z}(\alpha^{-1}(j))\in M_j$ (поскольку $\mathbf{z}(k)\in M_{\alpha(k)}$ при $k\in\overline{1,N}$ согласно (2.10); остается учесть (2.4)). С учетом (3.1) получаем, что

$$(z_{\alpha^{-1}(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M} \quad \forall\alpha\in\mathbb{A} \quad \forall (z_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha. \tag{3.13}$$

На основе (3.13) корректно определяется отображение

$$\mathbf{t}:\ \mathbf{S}\to\mathfrak{M}, \tag{3.14}$$

действующее по следующему правилу: если $s\in\mathbf{S}$, то

$$\mathbf{t}(s) \stackrel{\triangle}{=} (z_{\alpha^{-1}(i)})_{i\in\overline{1,N}}, \tag{3.15}$$

где $\alpha = \mathrm{pr}_1(s)$ и $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} = \mathrm{pr}_2(s)$. Используя (3.14), (3.15), введем оператор

$$\mathbf{T}:\ \mathbf{S}\to\mathfrak{M}\times\mathbb{A} \tag{3.16}$$

посредством правила: если $s\in\mathbf{S}$, то

$$\mathbf{T}(s) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{t}(s), \mathrm{pr}_1(s)). \tag{3.17}$$

Из (3.14), (3.15) следует с учетом (2.14), что при $\alpha\in\mathbb{A}$ и $\mathbf{x}\in\mathfrak{M}_\alpha$ определен кортеж

$$\mathbf{t}(\alpha,\mathbf{x}) = (\mathbf{x}(\alpha^{-1}(i)))_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}. \tag{3.18}$$

Мы учитываем здесь, что при $\alpha\in\mathbb{A}$ и $\mathbf{x}\in\mathfrak{M}_\alpha$ непременно $(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbf{S}$ (см. (2.14)). Как следствие из (3.16) и (3.17) имеем теперь при $\alpha\in\mathbb{A}$ и $\mathbf{x}\in\mathfrak{M}_\alpha$, что

$$\mathbf{T}(\alpha,\mathbf{x}) = \bigl(\mathbf{t}(\alpha,\mathbf{x}),\alpha\bigr) = \bigl((\mathbf{x}(\alpha^{-1}(i)))_{i\in\overline{1,N}},\alpha\bigr). \tag{3.19}$$

Заметим, что (см. (3.2), (3.16)) определена функция $w\circ\mathbf{T}\in\mathcal{R}_+[\mathbf{S}]$.

Предложение 3.1. *Справедливо равенство* $W = w \circ \mathbf{T}$.

Доказательство подобно в идейном отношении рассуждению [17, с. 277].
Отметим, что при всяком выборе $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$ УП

$$(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S} \tag{3.20}$$

(см. (2.14)) обладает следующим свойством:

$$\mathbf{T}(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}) = ((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha). \tag{3.21}$$

Замечание 3.1. Проверим (3.21) (включение (3.20) вытекает из (2.14) непосредственно), полагая для краткости

$$h \triangleq (\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}});$$

при этом $h \in \mathbf{S}$ и $\mathbf{T}(h) = \mathbf{T}(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}})$ (см. раздел 2). Тогда согласно (3.17) и (3.19)

$$\mathbf{T}(h) = (\mathbf{t}(h), \alpha) = (\mathbf{t}(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}), \alpha), \tag{3.22}$$

где (см. (2.4), (3.15)) $\mathbf{t}(h) = \mathbf{t}(\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}) = (z_{\alpha(\alpha^{-1}(i))})_{i\in\overline{1,N}} = (z_i)_{i\in\overline{1,N}}$ (в самом деле, полагая при $j \in \overline{1,N}$, что $\mathbf{z}_j \triangleq z_{\alpha(j)}$, получаем включение $(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha$ и как следствие $(\alpha, (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}$, а потому $\mathbf{t}(\alpha, (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{1,N}}) = (\mathbf{z}_{\alpha^{-1}(i)})_{i\in\overline{1,N}} = (z_{\alpha(\alpha^{-1}(i))})_{i\in\overline{1,N}} = (z_i)_{i\in\overline{1,N}}$, чем и завершается проверка нужного свойства), а тогда из (3.22) имеем равенство $\mathbf{T}(h) = ((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha)$, что означает справедливость (3.21).

Предложение 3.2. *Отображение* $\mathbf{T}$ *есть биекция* $\mathbf{S}$ *на* $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$.

Доказательство фактически повторяет обоснование [9, предложение 4.2.1].
Из предложения 3.2 следует, что определена биекция $\mathbf{T}^{-1}$ множества $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ на $\mathbf{S}$, обратная к $\mathbf{T}$; в частности, $\mathbf{T}^{-1} \colon \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \to \mathbf{S}$. При этом справедливы, конечно, следующие два свойства:

$$\big(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(s)) = s \ \forall s \in \mathbf{S}\big) \,\&\, \big(\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}(h)) = h \ \forall h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}\big). \tag{3.23}$$

Предложение 3.3. *Отображение* $\mathbf{T}^{-1}$ *определяется условием*

$$\mathbf{T}^{-1}((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha) = (\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i\in\overline{1,N}}) \quad \forall (z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}.$$

Данное предложение установлено в [9, с. 99].

Предложение 3.4. *Задачи* (2.16) *и* (3.3) *эквивалентны по результату*: $V = \mathbb{V}$.

Доказательство. Напомним, что $\mathbf{S}_0$ есть непустое множество (см. (2.18)). С учетом этого выберем произвольно $s_0 \in \mathbf{S}_0$. Тогда, в частности, $s_0 \in \mathbf{S}$ и при этом $W(s_0) = V$. В этом случае $\mathbf{T}(s_0) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ и как следствие

$$\mathbb{V} \leq (w \circ \mathbf{T})(s_0) = w(\mathbf{T}(s_0)), \tag{3.24}$$

где $W(s_0) = (w \circ \mathbf{T})(s_0)$. Поэтому из (3.24) следует, что

$$\mathbb{V} \leq W(s_0) = V. \tag{3.25}$$

Далее, из (3.4) имеем, что $\mathbb{S}$ — непустое множество. Выберем произвольно $h^0 \in \mathbb{S}$. Тогда $h^0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$, причем $w(h^0) = \mathbb{V}$. При этом $\mathbf{T}^{-1}(h^0) \in \mathbf{S}$, а потому согласно (2.17) $V \leq W(\mathbf{T}^{-1}(h^0))$, причем $W(\mathbf{T}^{-1}(h_0)) = (w \circ \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}(h_0)) = w(\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}(h_0))) = w(h_0) = \mathbb{V}$ (см. (3.23)). Тогда $V \leq \mathbb{V}$ и с учетом (3.25) получаем требуемое равенство $V = \mathbb{V}$. $\square$

Предложение 3.5. *Экстремальные множества задач* (2.16), (3.3) *находятся во взаимно однозначном соответствии*

$$\big(\mathbb{S} = \{\mathbf{T}(s) \colon s \in \mathbf{S}_0\}\big) \,\&\, \big(\mathbf{S}_0 = \{\mathbf{T}^{-1}(h) \colon h \in \mathbb{S}\}\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о в существенных чертах повторяет рассуждение в [9, предложение 4.2.4].

Предложение 3.6. *Если* $\alpha \in \mathbb{A}$, *то*

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_\alpha} W(\alpha, \mathbf{x}) = \min_{h \in \mathfrak{M}} w(h, \alpha). \tag{3.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим величины в левой и правой частях (3.26) через μ и ν соответственно. Тогда согласно (3.10) имеем равенство $\mu = \mathcal{V}[\alpha]$. С учетом (3.11) выберем произвольно $\mathbf{x}_0 \in (\mathrm{SOL})[\alpha]$. Тогда $\mathbf{x}_0 \in \mathfrak{M}_\alpha$ и $W(\alpha, \mathbf{x}_0) = \mu$. При этом согласно (2.14) $\rho \triangleq (\alpha, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{S}$, а тогда в силу предложения 3.1

$$\mu = W(\rho) = (w \circ \mathbf{T})(\rho) = w(\mathbf{T}(\rho)), \tag{3.27}$$

где $\mathbf{T}(\rho) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ и (см. (3.17)) справедливо равенство $\mathbf{T}(\rho) = (\mathbf{t}(\rho), \alpha)$. Согласно (3.18) $\mathbf{t}(\rho) = \mathbf{t}(\alpha, \mathbf{x}_0) = \big(\mathbf{x}_0(\alpha^{-1}(i))\big)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$. Как следствие (см. (3.27))

$$\mu = w(\mathbf{T}(\rho)) = w(\mathbf{t}(\rho), \alpha) \geq \nu. \tag{3.28}$$

Напомним, что $\mathfrak{M}$ (3.1) есть непустое конечное множество, а потому минимум в правой части (3.26) достигается. Пусть $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ обладает свойством $w(\mathbf{h}, \alpha) = \nu$. Тогда (см. (3.20), (3.21)) $\lambda \triangleq (\alpha, \mathbf{h} \circ \alpha) \in \mathbf{S}$ и $\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{T}(\alpha, \mathbf{h} \circ \alpha) = (\mathbf{h}, \alpha)$. Поэтому (см. предложение 3.1) $\nu = w(\mathbf{h}, \alpha) = w(\mathbf{T}(\lambda)) = W(\lambda) = W(\alpha, \mathbf{h} \circ \alpha)$. При этом $\mathbf{h} \circ \alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ (см. (2.14)), а тогда из (3.10) следует, что $\mu = \mathcal{V}[\alpha] \leq W(\alpha, \mathbf{h} \circ \alpha)$ и как следствие $\mu \leq \nu$, откуда с учетом (3.28) вытекает требуемое равенство $\mu = \nu$. □

Итак, задачи (2.16) и (3.3) отождествимы. На этой основе в следующем разделе конструируется метод итераций, представляющий по существу вариант известного в теории экстремальных задач метода покоординатного спуска.

4. Метод итераций

Напомним, что согласно (2.2)

$$\Pi \colon \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to [0, \infty[. \tag{4.1}$$

Введем, кроме того, $M_0 \triangleq \{x^0\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$. Имеем кортеж $(M_i)_{i \in \overline{0,N}} \colon \overline{0,N} \to \mathrm{Fin}(\mathbf{X})$. С учетом этого полагаем, используя (4.1), что $\pi \colon \overline{0,N} \times \overline{1,N} \times \mathfrak{N} \to [0, \infty[$ определяется условием

$$\pi(i, j, K) \triangleq \min_{z \in M_i \times M_j} \Pi(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z), K) \quad \forall i \in \overline{0,N} \quad \forall j \in \overline{1,N} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \tag{4.2}$$

(мы используем в (4.2) правило экономии скобок, подобное оговоренному в разд. 2 для функции двух переменных: если $g \in \mathcal{R}_+(\overline{0,N} \times \overline{1,N} \times \mathfrak{N})$, $\mathbf{i} \in \overline{0,N}$, $\mathbf{j} \in \overline{1,N}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то $g(\mathbf{i}, \mathbf{j}, K) = g(z)$, где z есть триплет $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, K)$; данное правило используется и при определении функций из $\mathcal{R}_+(\overline{0,N} \times \overline{1,N} \times \mathfrak{N})$). Итак, посредством (4.1) определена функция $\pi \in \mathcal{R}_+(\overline{0,N} \times \overline{1,N} \times \mathfrak{N})$, являющаяся по сути дела объемной матрицей. Кроме того, полагаем

$$\mathbf{f}^{(k)} \triangleq \min_{x \in M_k} \mathbf{f}(x) \quad \forall k \in \overline{1,N}, \tag{4.3}$$

тогда $(\mathbf{f}^{(j)})_{j\in\overline{1,N}}\colon \overline{1,N} \to [0,\infty[$. Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то полагаем, что

$$\mathfrak{W}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \pi(0,\alpha(1),\overline{1,N}) + \sum_{k=1}^{N-1} \pi(\alpha(k),\alpha(k+1),\{\alpha(j)\colon j\in\overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}^{(\alpha(N))};$$

получаем при этом отображение $(\mathfrak{W}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{P}} \in \mathcal{R}_+(\mathbb{P})$. Задачу

$$\mathfrak{W}_\alpha \to \min, \quad \alpha\in\mathbb{A}, \tag{4.4}$$

назовем *начальной*, полагая при этом (см. (4.3)), что

$$\mathbf{v}_0 \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \mathfrak{W}_\alpha, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{sol} \stackrel{\triangle}{=} \{\beta\in\mathbb{A} \mid \mathfrak{W}_\beta = \mathbf{v}_0\}; \tag{4.6}$$

при этом (см. (4.5), (4.6)) $\mathbf{v}_0 \in [0,\infty[$ и $\mathbf{sol} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A})$.

Предложение 4.1. *Справедливо неравенство* $\mathbf{v}_0 \le V$.

Идея доказательства соответствует [17, предложение 4.1]; рассуждение отличается несущественными деталями и по этой причине опущено.

Сейчас рассмотрим на содержательном уровне итерационную процедуру решения основной задачи.

Итак, выбираем произвольно $\omega_0 \in \mathbf{sol}$. Тогда, в частности, $\omega_0\in\mathbb{A}$. При этом $\mathfrak{W}_{\omega_0} = \mathbf{v}_0$. Фиксируя маршрут ω_0, рассмотрим задачу $W(\omega_0,\mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x}\in\mathfrak{M}_{\omega_0}$, получая экстремум $\mathcal{V}[\omega_0]$ и (непустое) множество $(\mathrm{SOL})[\omega_0] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}_{\omega_0})$. Пусть

$$(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathrm{SOL})[\omega_0]. \tag{4.7}$$

Из (3.11), (4.7) имеем, в частности, включение $(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_0}$; при этом

$$W(\omega_0,(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.8}$$

Из (3.12) и предложения 4.1 имеем “вилку”

$$\mathbf{v}_0 \le V \le \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.9}$$

Заметим, что согласно (2.14) и (4.8)

$$\lambda_0 \stackrel{\triangle}{=} (\omega_0,(y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}\colon W(\lambda_0) = \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.10}$$

Кроме того, из (3.14) и (4.10) получаем, что

$$(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{t}(\lambda_0) \in \mathfrak{M}, \tag{4.11}$$

а $\mathbf{T}(\lambda_0) = ((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_0) \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}$; согласно (4.8), (4.10) и (4.11) имеем (см. предложение 3.1)

$$w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_0) = w(\mathbf{T}(\lambda_0)) = (w\circ\mathbf{T})(\lambda_0) = W(\lambda_0) = \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.12}$$

Используя (4.11), введем следующий вариант задачи (3.5):

$$w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\alpha) \to \min, \quad \alpha\in\mathbb{A}; \tag{4.13}$$

для этой задачи имеем, что

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\alpha), \tag{4.14}$$

$$(\mathrm{sol})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] = \big\{\alpha\in\mathbb{A} \mid w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\alpha) = (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}). \tag{4.15}$$

Решаем задачу (4.13): находим маршрут $\omega_1 \in (\mathrm{sol})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]$. Тогда $\omega_1\in\mathbb{A}$ и (см. (4.15))

$$w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1) = (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{4.16}$$

Поскольку $\omega_0\in\mathbb{A}$, то с учетом (4.14) имеем неравенство $(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \le w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_0)$, а потому (см. (4.12))

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \le \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.17}$$

Из (4.16), (4.17) следует, конечно, неравенство

$$w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1) \le \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.18}$$

В (4.17), (4.18) имеем на самом деле некоторое уточнение верхней оценки. Отметим в этой связи, что $((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1)\in\mathfrak{M}\times\mathbb{A}$ и определена УП

$$\rho_0 \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}^{-1}((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1) = (\omega_1,(z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S} \tag{4.19}$$

(см. предложение 3.3). При этом с учетом (3.23), (4.19) и предложения 3.1 $W(\rho_0) = (w\circ\mathbf{T})(\rho_0) = w(\mathbf{T}(\rho_0)) = w(\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1))) = w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1)$. Тогда из (4.18) получаем неравенство

$$W(\rho_0) \le \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.20}$$

Заметим, что согласно (2.14) и (4.19) имеет место включение

$$(z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_1}. \tag{4.21}$$

Рассмотрим теперь следующий вариант задачи (3.9):

$$W(\omega_1,\mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x}\in\mathfrak{M}_{\omega_1}. \tag{4.22}$$

Для этой задачи определены

$$\mathcal{V}[\omega_1] = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}_{\omega_1}} W(\omega_1,\mathbf{x}), \tag{4.23}$$

$$(\mathrm{SOL})[\omega_1] = \{\mathbf{x}_0\in\mathfrak{M}_{\omega_1} \mid W(\omega_1,\mathbf{x}_0) = \mathcal{V}[\omega_1]\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}_{\omega_1}). \tag{4.24}$$

Из (4.21) и (4.23) следует, что справедливо неравенство

$$\mathcal{V}[\omega_1] \le W(\omega_1,(z_{\omega_1(i)}^{0})_{i\in\overline{1,N}}) = W(\rho_0),$$

откуда с учетом (4.20) следует неравенство $\mathcal{V}[\omega_1]\le\mathcal{V}[\omega_0]$. Поскольку $V\le\mathcal{V}[\omega_1]$ согласно (3.12), получаем (см. (4.9)) цепочку неравенств

$$\mathbf{v}_0 \le V \le \mathcal{V}[\omega_1] \le \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.25}$$

Напомним, что (см. (4.24)) множество $(\mathrm{SOL})[\omega_1]$ непусто. Решаем задачу (4.22): определяем кортеж

$$(y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathrm{SOL})[\omega_1]. \tag{4.26}$$

Тогда согласно (3.11) $(y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_1}$, и при этом справедливо равенство

$$W(\omega_1,(y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.27}$$

Введем теперь в рассмотрение УП

$$\lambda_1 \triangleq (\omega_1,(y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}, \tag{4.28}$$

получая из (4.27) равенство $W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1]$. Из (3.14), (4.28) вытекает, что

$$(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{t}(\lambda_1) \in \mathfrak{M}, \tag{4.29}$$

и как следствие (см. (3.17)) получаем представление

$$\mathbf{T}(\lambda_1) = ((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1) \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}. \tag{4.30}$$

С учетом (4.29) рассмотрим следующий вариант задачи (3.5):

$$w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\alpha) \to \min, \quad \alpha\in\mathbb{A}. \tag{4.31}$$

Далее, для этой задачи имеем (см. (3.6), (3.7))

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\alpha), \tag{4.32}$$

$$(\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] = \{\alpha_0\in\mathbb{A} \mid w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\alpha_0) = (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}). \tag{4.33}$$

Из (4.32) следует, в частности, неравенство

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \le w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1). \tag{4.34}$$

При этом, однако, в силу предложения 3.1 имеем из (4.30), что $w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_1) = w(\mathbf{T}(\lambda_1)) = (w\circ\mathbf{T})(\lambda_1) = W(\lambda_1)$. Поэтому из (4.34) вытекает неравенство $(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \le W(\lambda_1)$ и как следствие

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \le \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.35}$$

С учетом (4.33) имеем, что $(\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \ne \varnothing$. Решаем задачу (4.31): находим маршрут

$$\omega_2 \in (\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{4.36}$$

Тогда (см. (3.7), (4.36)) $\omega_2\in\mathbb{A}$ и при этом $w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_2) = (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]$. С учетом (4.35) получаем неравенство

$$w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_2) \le \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{4.37}$$

Заметим, что $((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_2) \in \mathfrak{M}\times\mathbb{A}$ и определена УП

$$\rho_1 \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}^{-1}((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_2) = (\omega_2,(z_{\omega_2(i)}^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S} \tag{4.38}$$

(мы учли предложение 3.3). Тогда (см. (3.23), (4.38) и предложение 3.1) $W(\rho_1) = (w\circ\mathbf{T})(\rho_1) = w(\mathbf{T}(\rho_1)) = w(\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_2))) = w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},\omega_2)$, а тогда из (4.37) вытекает неравенство

$$W(\rho_1) = W(\omega_2,(z_{\omega_2(i)}^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}) \le \mathcal{V}[\omega_1], \tag{4.39}$$

где $(z^{(1)}_{\omega_2(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_2}$ (см. (2.14), (4.38)). Рассмотрим следующий вариант задачи (3.9):

$$W(\omega_2, \mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\omega_2}. \tag{4.40}$$

Для этой задачи имеем

$$\mathcal{V}[\omega_2] = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}_{\omega_2}} W(\omega_2, \mathbf{x}) \in [0, \infty[, \tag{4.41}$$

$$(\mathrm{SOL})[\omega_2] = \{\mathbf{x_0} \in \mathfrak{M}_{\omega_2} \mid W(\omega_2, \mathbf{x}_0) = \mathcal{V}[\omega_2]\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}_{\omega_2}). \tag{4.42}$$

Из (4.41) следует с очевидностью неравенство $\mathcal{V}[\omega_2] \leq W(\omega_2, (z^{(1)}_{\omega_2(i)})_{i\in\overline{1,N}}) = W(\rho_1)$, а тогда согласно (4.39) получаем неравенство

$$\mathcal{V}[\omega_2] \leq \mathcal{V}[\omega_1], \tag{4.43}$$

где (согласно (3.12)) $V \leq \mathcal{V}[\omega_2]$. С учетом (4.25) и (4.43) получаем цепочку неравенств

$$\mathbf{v}_0 \leq V \leq \mathcal{V}[\omega_2] \leq \mathcal{V}[\omega_1] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{4.44}$$

Поскольку $(\mathrm{SOL})[\omega_2]$ — непустое множество (см. (4.42)), выберем произвольно

$$(y^{(2)}_i)_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathrm{SOL})[\omega_2]. \tag{4.45}$$

Это означает фактически, что мы решаем задачу (4.40) и выбираем (в (4.45)) одно из ее оптимальных решений. Тогда (см. (4.42), (4.45)) $(y^{(2)}_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_{\omega_2}$ и при этом $W(\omega_2, (y^{(2)}_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_2]$, где (см. (2.14)) по способу построения УП посредством

$$\lambda_2 \stackrel{\triangle}{=} (\omega_2, (y^{(2)}_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S} \tag{4.46}$$

реализуется равенство $W(\lambda_2) = \mathcal{V}[\omega_2]$. Итак, мы построили решения (основной задачи) $\lambda_0 \in \mathbf{S}$, $\lambda_1 \in \mathbf{S}$ и $\lambda_2 \in \mathbf{S}$, реализующие уточнение верхней оценки глобального экстремума V:

$$W(\lambda_0) = \mathcal{V}[\omega_0], \quad W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1], \quad W(\lambda_2) = \mathcal{V}[\omega_2] \tag{4.47}$$

(см. (4.10), (4.28), (4.46), (4.44)). В следующем разделе рассматривается общий (регулярный) шаг итерационной процедуры.

5. Регулярный шаг процедуры

В разд. 4 подробно изложена цепочка преобразований $\lambda_0 \to \lambda_1 \to \lambda_2$, реализующаяся в множестве $\mathbf{S}$. Сейчас мы рассмотрим требуемое преобразование в общей форме, полагая

$$\mathbf{S}^0 \stackrel{\triangle}{=} \{s \in \mathbf{S} \mid W(s) = \mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(s)]\}. \tag{5.1}$$

Заметим, что согласно (4.8), (4.10) и (5.1) $\lambda_0 \in \mathbf{S}^0$. Кроме того, из (4.28) имеем, что $\omega_1 = \mathrm{pr}_1(\lambda_1)$, а тогда $W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(\lambda_1)]$ и как следствие (см. (5.1)) $\lambda_1 \in \mathbf{S}^0$. Наконец, из (4.46) и (4.47) следует, что $W(\lambda_2) = \mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(\lambda_2)]$. Тогда (см. (4.46), (5.1)) $\lambda_2 \in \mathbf{S}^0$.

Возвращаясь к (5.1), в общем случае отметим, что при $s \in \mathbf{S}^0$ определен кортеж $\mathbf{t}(s) \in \mathfrak{M}$, а тогда (см. (3.7)) имеем (непустое) множество $(\mathrm{sol})[\mathbf{t}(s)] \in \mathcal{P}'(\mathbb{A})$; поэтому для $\alpha \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(s)]$ определено значение $\mathcal{V}[\alpha] \in [0, \infty[$ и (непустое) множество $(\mathrm{SOL})[\alpha] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{M}_\alpha)$. Разумеется, при упомянутых условиях $(\alpha, (y_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}\ \forall (y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathrm{SOL})[\alpha]$. Справедливо следующее весьма очевидное

Предложение 5.1. *Если $s \in \mathbf{S}^0$, $\alpha \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(s)]$ и $\mathbf{y} \in (\mathrm{SOL})[\alpha]$, то $\widetilde{s} \stackrel{\triangle}{=} (\alpha, \mathbf{y}) \in \mathbf{S}^0$ и при этом $W(\widetilde{s}) \leq W(s)$.*

Схема доказательства подобна в существенных чертах [17, предложение 5.1].

Из предложения 5.1 имеем следующее свойство: если $s \in \mathbf{S}^0$, то

$$\widetilde{\mathbf{S}}^0_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\alpha \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(s)]} \{(\alpha, \mathbf{y})\colon \mathbf{y} \in (\mathrm{SOL})[\alpha]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{S}^0). \tag{5.2}$$

Кроме того, из предложения 5.1 вытекает, что $W(\widetilde{s}) \leq W(s) \quad \forall s \in \mathbf{S}^0 \quad \forall \widetilde{s} \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_s$. Возвращаясь к построениям предыдущего раздела, напомним прежде всего, что $\lambda_0 \in \mathbf{S}^0$. В самом деле, из (4.10) следует, что $\lambda_0 \in \mathbf{S}$ и при этом $(\mathrm{pr}_1(\lambda_0) = \omega_0) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(\lambda_0) = (y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}})$, причем справедливы соотношения (4.8), (4.10). Последнее означает, что $W(\lambda_0) = \mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(\lambda_0)]$. С учетом (5.1) получаем требуемое свойство. Тогда, в частности, определено множество $\widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_0}$. Далее, заметим, что $\lambda_1 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_0}$. В самом деле, согласно (4.28) $\lambda_1 \in \mathbf{S}$; при этом $(\mathrm{pr}_1(\lambda_1) = \omega_1) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(\lambda_1) = (y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}})$, а потому из (4.27), (4.28) вытекает, что $W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(\lambda_1)]$. Это означает, что (см. (5.1)) $\lambda_1 \in \mathbf{S}^0$. При этом согласно (4.11) имеем по выбору ω_1, что $\omega_1 \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(\lambda_0)]$. С учетом (4.26), (4.28) и (5.2) получаем теперь требуемое включение $\lambda_1 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_0}$. Отметим, что определено множество $\widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_1}$ (см. (5.2)).

При этом $\lambda_2 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_1}$. Действительно, согласно (4.46) $\lambda_2 \in \mathbf{S}$; $(\mathrm{pr}_1(\lambda_2) = \omega_2) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(\lambda_2) = (y_i^{(2)})_{i \in \overline{1,N}})$. Поэтому по выбору $(y_i^{(2)})_{i \in \overline{1,N}}$ имеем, что $W(\lambda_2) = \mathcal{V}[\mathrm{pr}_1(\lambda_2)]$ (см. (4.46)). Это означает (см. (5.1)), что $\lambda_2 \in \mathbf{S}^0$. Далее, напомним, что (см. (4.29), (4.36)) $\omega_2 \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(\lambda_1)]$. Учитывая (4.45) и (5.2), получаем, что $\lambda_2 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_1}$. Итак, мы получили в предыдущем разделе следующую двухэтапную процедуру: стартуя в точке $\lambda_0 \in \mathbf{S}^0$, мы перемещаемся в $\lambda_1 \in \mathbf{S}^0$, а затем в $\lambda_2 \in \mathbf{S}^0$, причем $\lambda_1 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_0}$, $\lambda_2 \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_1}$. Сейчас, возвращаясь к (5.2), отметим, что данное построение можно продолжать и далее, получая итерационную процедуру в $\mathbf{S}^0$, стартующую из λ_0: $\lambda_k \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda_{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Заметим, что вычислительный эксперимент показывает, что данная процедура быстро стабилизируется. Поэтому представляют интерес свойства решений $\lambda \in \mathbf{S}^0$, для которых $\lambda \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda}$.

Предложение 5.2. *Если* $\lambda \in \mathbf{S}^0$ *таково, что* $\lambda \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda}$, *то* $\Lambda \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}(\lambda) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ *обладает свойством*

$$pr_2(\Lambda) \in (\mathrm{sol})[\mathrm{pr}_1(\Lambda)]. \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\Lambda)$ и $\nabla \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\Lambda)$; тогда $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$ и $\nabla \in \mathbb{A}$, $\Lambda = (\mathbf{z}, \nabla)$. Далее, из (5.2) имеем по выбору λ, что для некоторых $\mu \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]$ и $\mathbf{y} \in (\mathrm{SOL})[\mu]$ справедливо равенство $\lambda = (\mu, \mathbf{y})$; тогда $\mu = \mathrm{pr}_1(\lambda)$ и $\mathbf{y} = \mathrm{pr}_2(\lambda)$. Напомним здесь же, что (см. (3.17)) $\Lambda = (\mathbf{t}(\lambda), \mathrm{pr}_1(\lambda)) = (\mathbf{t}(\lambda), \mu)$. Тогда $(\mathbf{t}(\lambda), \mu) = (\mathbf{z}, \nabla)$, а потому $\mathbf{t}(\lambda) = \mathbf{z}$ и $\mu = \nabla$. Последнее означает по выбору μ, что $\mathrm{pr}_2(\Lambda) = \nabla \in (\mathrm{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]$, где $\mathbf{t}(\lambda) = \mathbf{z} = \mathrm{pr}_1(\Lambda)$. Получили требуемое включение (5.3).

Следствие 5.1. *Если* $\lambda \in \mathbf{S}^0$ *таково, что* $\lambda \in \widetilde{\mathbf{S}}^0_{\lambda}$, *то УП* $\Lambda \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}(\lambda)$ *такова, что*

$$w(\Lambda) = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} w(pr_1(\Lambda), \alpha) = \min_{z \in \mathfrak{M}} w(z, pr_2(\Lambda)).$$

Схема доказательства подобна обоснованию [17, следствие 5.1].

Замечание 5.1. Из следствия 5.1 получаем, что каждая точка стабилизации итерационной процедуры обеспечивает "покоординатные" экстремумы функции w. Заметим, что каждая из задач (3.5) является задачей курьера, осложненной явной зависимостью функции стоимости от списка заданий; в [24] приведен вариант МДП для решения задачи такого рода. Впрочем, данную модификацию МДП можно извлечь и из [20], где рассматривалась более общая постановка. Заметим, что версия МДП [20] и (в частном варианте) [24] позволяет решать также начальную задачу (4.4). Остается задача (3.9), широко используемая в нашей итерационной процедуре.

6. Метод динамического программирования в задаче оптимизации трассы

В настоящем разделе рассматривается вариант решения задачи (3.9), использующий МДП (по сути дела речь идет здесь о задаче последовательного управления). Итак, всюду в настоящем разделе фиксируем маршрут $\alpha \in \mathbb{A}$; рассматриваем решение задачи (3.9), включающее нахождение $\mathcal{V}[\alpha]$ (3.10) и какого-то элемента множества $(\mathrm{SOL})[\alpha]$ (3.11). Настоящий раздел подобен в идейном отношении разд. 6 работы [17]; в этой связи будем использовать символику, подобную [17, разд. 6]. В частности, это касается вопроса о расширении задачи (3.9).

Если $m \in \overline{0, N-1}$ и $x \in \mathbf{X}$, то $\mathbf{Z}_m^{(\alpha)}[x]$ есть def множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, N-m}} \colon \overline{0, N-m} \to \mathbf{X},$$

для каждого из которых $z_0 = x$ и $z_j \in M_{\alpha(m+j)}$ $\forall j \in \overline{1, N-m}$; разумеется? $\mathbf{Z}_m^{(\alpha)}[x]$ — непустое конечное множество. Введем в рассмотрение следующие экстремальные задачи: при $m \in \overline{0, N-1}$ и $x \in \mathbf{X}$

$$\sum_{k=0}^{N-(m+1)} \Pi(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \{\alpha(j) \colon j \in \overline{m+k+1, N}\}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(N-m)) \to \min, \ \mathbf{x} \in \mathbf{Z}_m^{(\alpha)}[x]. \quad (6.1)$$

Каждая из задач (6.1) характеризуется экстремумом

$$\mathfrak{K}_m(x \mid \alpha) \stackrel{\triangle}{=} \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_m^{(\alpha)}[x]} \Big[\sum_{k=0}^{N-(m+1)} \Pi(\mathbf{z}(k), \mathbf{z}(k+1), \{\alpha(j) \colon j \in \overline{m+k+1, N}\}) + \mathbf{f}(\mathbf{z}(N-m))\Big] \in [0, \infty[\quad \forall m \in \overline{0, N-1} \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (6.2)$$

Кроме того, полагаем, что $\forall x \in \mathbf{X}$

$$\mathfrak{K}_N(x \mid \alpha) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{f}(x). \quad (6.3)$$

Предложение 6.1. *Если $m \in \overline{0, N-1}$ и $x \in \mathbf{X}$, то справедливо равенство*

$$\mathfrak{K}_m(x|\alpha) = \min_{y \in M_{\alpha(m+1)}} [\Pi(x, y, \{\alpha(j) \colon j \in \overline{m+1, N}\}) + \mathfrak{K}_{m+1}(y|\alpha)].$$

Схема доказательства допускает естественные аналогии с обоснованием [9, предложение 4.7.1] и опущена по соображениям объема.

Введем в рассмотрение следующие функции-сужения: полагаем, что

$$\mathfrak{K}_m^{(\alpha)} \stackrel{\triangle}{=} (\mathfrak{K}_m(x \mid \alpha))_{x \in M_{\alpha(m)}} \quad \forall m \in \overline{1, N}. \quad (6.4)$$

Из (6.2), (6.3) и (6.4) следует свойство: если $m \in \overline{1, N}$, то

$$\mathfrak{K}_m^{(\alpha)} \colon M_{\alpha(m)} \to [0, \infty[. \quad (6.5)$$

При этом, в частности, имеем из (6.3), что (см. (6.4)) $\mathfrak{K}_N^{(\alpha)} \colon M_{\alpha(N)} \to [0, \infty[$ определяется условием

$$\mathfrak{K}_N^{(\alpha)}(x) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in M_{\alpha(N)}. \quad (6.6)$$

Рассмотрим еще один важный случай. Для этого напомним, что при $x \in \mathbf{X}$ $\mathbf{Z}_0^{(\alpha)}[x]$ есть множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \colon \overline{0, N} \to \mathbf{X}, \quad (6.7)$$

для каждого из которых $z_0 = x$ и $z_j \in M_{\alpha(j)}$ $\forall j \in \overline{1, N}$. Иными словами (см. разд. 2), при $x \in \mathbf{X}$ $\mathbf{Z}_0^{(\alpha)}[x]$ есть множество всех кортежей (6.7) таких, что $z_0 = x$ и $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}_\alpha$ (см. (2.10)).

Для нас существенно очевидное представление множества $\mathbf{Z}_0^{(\alpha)}[x^0]$, а именно: с учетом (2.11) получаем, что

$$\mathbf{Z}_0^{(\alpha)}[x^0] = \mathfrak{X}_\alpha. \tag{6.8}$$

Тогда согласно (6.2) и (6.8) имеем с учетом сюръективности α

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_0(x^0|\alpha) &= \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}_\alpha}\Big[\sum_{k=0}^{N-1}\Pi(z_k, z_{k+1}, \{\alpha(j)\colon j\in\overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}(z_N)\Big]\\ &= \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}_\alpha}\Big[\Pi(z_0, z_1, \overline{1,N}) + \sum_{k=1}^{N-1}\Pi(z_k, z_{k+1}, \{\alpha(j)\colon j\in\overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}(z_N)\Big].\end{aligned} \tag{6.9}$$

Учтем теперь, что $z_0 = x^0\ \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}_\alpha$. Тогда согласно (6.9) имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_0(x^0\mid\alpha) &= \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}_\alpha}\Big[\Pi(x^0, z_1, \overline{1,N}) + \sum_{k=1}^{N-1}\Pi(z_k, z_{k+1}, \{\alpha(j)\colon j\in\overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}(z_N)\Big]\\ &= \min_{(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha}\Big[\Pi(x^0, y_1, \overline{1,N}) + \sum_{k=1}^{N-1}\Pi(y_k, y_{k+1}, \{\alpha(j)\colon j\in\overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}(y_N)\Big],\end{aligned} \tag{6.10}$$

где учтено то обстоятельство, что $x^0\square y\in\mathfrak{X}_\alpha\quad\forall y\in\mathfrak{M}_\alpha$ (см. (2.10), (2.11)). Из (2.12) и (6.10) следует равенство

$$\mathfrak{K}_0(x^0\mid\alpha) = \min_{(y_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}_\alpha}\mathfrak{C}^{(\alpha)}[(y_i)_{i\in\overline{1,N}}],$$

а тогда согласно (2.15) имеем, что $\mathfrak{K}_0(x^0\mid\alpha) = \min\limits_{\mathbf{y}\in\mathfrak{M}_\alpha} W(\alpha,\mathbf{y})$. С учетом (3.10) получаем важное равенство

$$\mathfrak{K}_0(x^0\mid\alpha) = \mathcal{V}[\alpha]. \tag{6.11}$$

Теперь из предложения 6.1 вытекает с учетом сюръективности α, что (см. (6.11))

$$\mathcal{V}[\alpha] = \min_{y\in M_{\alpha(1)}}[\Pi(x^0, y, \overline{1,N}) + \mathfrak{K}_1(y|\alpha)]; \tag{6.12}$$

при этом согласно (6.4) $\mathfrak{K}_1^{(\alpha)}(\widetilde{y}) = \mathfrak{K}_1(\widetilde{y}\mid\alpha)\quad\forall\widetilde{y}\in M_{\alpha(1)}$. В итоге из (6.12) следует, что

$$\mathcal{V}[\alpha] = \min_{y\in M_{\alpha(1)}}[\Pi(x^0, y, \overline{1,N}) + \mathfrak{K}_1^{(\alpha)}(y)]. \tag{6.13}$$

Далее, из предложения 6.1 и (6.4) следует, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_m^{(\alpha)}(x) = \mathfrak{K}_m(x\mid\alpha) &= \min_{y\in M_{\alpha(m+1)}}\Big[\Pi(x, y, \{\alpha(j)\colon j\in\overline{m+1,N}\}) + \mathfrak{K}_{m+1}(y\mid\alpha)\Big]\\ &= \min_{y\in M_{\alpha(m+1)}}\Big[\Pi(x, y, \{\alpha(j)\colon j\in\overline{m+1,N}\}) + \mathfrak{K}_{m+1}^{(\alpha)}(y)\Big]\quad\forall m\in\overline{1,N-1}\quad\forall x\in M_{\alpha(m)}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Соотношения (6.13), (6.14) позволяют построить рекуррентно все функции $\mathfrak{K}_m^{(\alpha)}$, $m\in\overline{1,N}$, и определить значение $\mathcal{V}[\alpha]$.

В самом деле, функция $\mathfrak{K}_N^{(\alpha)}$ определена явно в (6.6). Пусть теперь $m\in\overline{1,N}$ и функции $\mathfrak{K}_k^{(\alpha)}$, $k\in\overline{m,N}$, уже построены. Если $m=1$, то построение функций $\mathfrak{K}_s^{(\alpha)}$, $s\in\overline{1,N}$, завершено. Пусть теперь $m\neq 1$, т. е. $m\in\overline{2,N}$. Тогда $m-1\in\overline{1,N-1}$ и согласно (6.14)

$$\mathfrak{K}_{m-1}^{(\alpha)}(x) = \min_{y\in M_{\alpha(m)}}[\Pi(x, y, \{\alpha(j)\colon j\in\overline{m,N}\}) + \mathfrak{K}_m^{(\alpha)}(y)]\quad\forall x\in M_{\alpha(m-1)}. \tag{6.15}$$

Таким образом, мы получаем функцию $\mathfrak{K}_{m-1}^{(\alpha)}$. После конечного числа (регулярных) шагов типа (6.15) (имеется в виду преобразование $\mathfrak{K}_m^{(\alpha)}\to\mathfrak{K}_{m-1}^{(\alpha)}$, определяемое в (6.15)) все функции

($\mathfrak{K}_s^{(\alpha)}$, $s \in \overline{1,N}$) будут построены и, в частности, будет определена функция $\mathfrak{K}_1^{(\alpha)}\colon M_{\alpha(1)} \to [0,\infty[$. После этого по формуле (6.13) рассчитывается искомое значение $\mathcal{V}[\alpha]$.

Построение решения задачи (3.11). Рассмотрим процедуру построения кортежа из множества (3.11). Для этой цели будут использоваться функции $\mathfrak{K}_s^{(\alpha)}$, $s \in \overline{1,N}$, и значение $\mathcal{V}[\alpha]$, найденные ранее.

С учетом (6.13) выбираем

$$y_1^0 \in M_{\alpha(1)} \tag{6.16}$$

так, что при этом

$$\mathcal{V}[\alpha] = \Pi(x^0, y_1^0, \overline{1,N}) + \mathfrak{K}_1^{(\alpha)}(y_1^0); \tag{6.17}$$

напомним, что $\alpha \in \mathbb{P}$, а значит, $\{\alpha(j)\colon j \in \overline{1,N}\} = \overline{1,N}$. Следовательно, y_1^0 (6.16) таково, что $\mathcal{V}[\alpha] = \Pi(x^0, y_1^0, \{\alpha(j)\colon j \in \overline{1,N}\}) + \mathfrak{K}_1^{(\alpha)}(y_1^0)$. Затем отметим, что (см. (6.14), (6.16))

$$\mathfrak{K}_1^{(\alpha)}(y_1^0) = \min_{y \in M_{\alpha(2)}} [\Pi(y_1^0, y, \{\alpha(j)\colon j \in \overline{2,N}\}) + \mathfrak{K}_2^{(\alpha)}(y)]. \tag{6.18}$$

С учетом (6.18) выбираем точку

$$y_2^0 \in M_{\alpha(2)} \tag{6.19}$$

так, что при этом

$$\mathfrak{K}_1^{(\alpha)}(y_1^0) = \Pi(y_1^0, y_2^0, \{\alpha(j)\colon j \in \overline{2,N}\}) + \mathfrak{K}_2^{(\alpha)}(y_2^0). \tag{6.20}$$

Тогда, в частности, из (6.17) и (6.20) вытекает, что

$$\mathcal{V}[\alpha] = \Pi(x^0, y_1^0, \overline{1,N}) + \Pi(y_1^0, y_2^0, \{\alpha(j)\colon j \in \overline{2,N}\}) + \mathfrak{K}_2^{(\alpha)}(y_2^0). \tag{6.21}$$

Пусть вообще $r \in \overline{2,N}$ и уже определен кортеж

$$(y_i^0)_{i \in \overline{1,r}}\colon \overline{1,r} \to \mathbf{X}, \tag{6.22}$$

для которого выполнены условия:

$1'$) $y_j^0 \in M_{\alpha(j)}$ $\forall j \in \overline{1,r}$; $\quad 2'$) $\mathfrak{K}_{j-1}^{(\alpha)}(y_{j-1}^0) = \Pi(y_{j-1}^0, y_j^0, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{j,N}\}) + \mathfrak{K}_j^{(\alpha)}(y_j^0)$ $\forall j \in \overline{2,r}$;

$3'$) $$\mathcal{V}[\alpha] = \Pi(x^0, y_1^0, \overline{1,N}) + \sum_{j=2}^{r} \Pi(y_{j-1}^0, y_j^0, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{j,N}\}) + \mathfrak{K}_r^{(\alpha)}(y_r^0).$$

З а м е ч а н и е 6.1. Если $r = 2$, то $1'$)–$3'$) выполняются. В самом деле, $1'$) следует из (6.16) и (6.19). Свойство $2'$) вытекает из (6.20), поскольку $\overline{2,2} = \{2\}$. Наконец, из (6.21) извлекается свойство $3'$).

Возможен один из следующих двух случаев:

$$(r = N) \vee (r \in \overline{2, N-1}). \tag{6.23}$$

Оба случая в (6.23) рассмотрим отдельно.

а) Пусть сначала $r = N$. Тогда (6.22) есть кортеж $(y_i^0)_{i \in \overline{1,N}}\colon \overline{1,N} \to \mathbf{X}$, и согласно $1'$) $y_j^0 \in M_{\alpha(j)}$ $\forall j \in \overline{1,N}$. Из (2.10) следует, что

$$(y_i^0)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}_\alpha. \tag{6.24}$$

Далее, из $3'$) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[\alpha] &= \Pi(x^0, y_1^0, \overline{1,N}) + \sum_{j=2}^{N} \Pi(y_{j-1}^0, y_j^0, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{j,N}\}) + \mathfrak{K}_N^{(\alpha)}(y_N^0) \\ &= \Pi(x^0, y_1^0, \overline{1,N}) + \sum_{j=1}^{N-1} \Pi(y_j^0, y_{j+1}^0, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{j+1,N}\}) + \mathbf{f}(y_N^0) \end{aligned} \tag{6.25}$$

(см. (6.6)). Тогда согласно (2.12), (6.22) и (6.25) получаем, что $\mathcal{V}[\alpha] = \mathfrak{C}^{(\alpha)}[(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}]$, а потому из (2.15) вытекает равенство $\mathcal{V}[\alpha] = W(\alpha,(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}})$. Поэтому (см. (3.11), (6.24)) $(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}} \in$ (SOL)$[\alpha]$. Итак, в случае а) мы располагаем оптимальным решением задачи (3.9).

в) Пусть $r \in \overline{2, N-1}$. Тогда $r \le N-1$, а потому $r+1 \le N$, т. е. $r+1 \in \overline{3,N}$. Поэтому (см. (6.5)) определена функция $\mathfrak{K}_{r+1}^{(\alpha)}\colon M_{\alpha(r+1)} \to [0,\infty[$. Заметим, что согласно $1')$ $y_r^0 \in M_{\alpha(r)}$. Поэтому (см. (6.14)) $\mathfrak{K}_r^{(\alpha)}(y_r^0) = \min\limits_{y\in M_{\alpha(r+1)}} [\Pi(y_r^0, y, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{r+1,N}\}) + \mathfrak{K}_{r+1}^{(\alpha)}(y)]$. С учетом этого выбираем теперь

$$y_{r+1}^0 \in M_{\alpha(r+1)} \tag{6.26}$$

так, что при этом справедливо

$$\mathfrak{K}_r^{(\alpha)}(y_r^0) = \Pi(y_r^0, y_{r+1}^0, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{r+1,N}\}) + \mathfrak{K}_{r+1}^{(\alpha)}(y_{r+1}^0). \tag{6.27}$$

Мы имеем теперь (см. (6.22), (6.26)) кортеж

$$(y_i^0)_{i\in\overline{1,r+1}}\colon \overline{1,r+1} \to \mathbf{X}. \tag{6.28}$$

При этом из $1')$ и (6.26) получаем свойство

$$1'')\ y_j^0 \in M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,r+1}.$$

Далее, из $2')$ и (6.27) следует, что

$$2'')\ \mathfrak{K}_{j-1}^{(\alpha)}(y_{j-1}^0) = \Pi(y_{j-1}^0, y_j^0, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{j,N}\}) + \mathfrak{K}_j^{(\alpha)}(y_j^0) \quad \forall j \in \overline{2,r+1}.$$

Наконец, из $3')$ и (6.27) имеем свойство

$$3'')\ \mathcal{V}[\alpha] = \Pi(x^0, y_1^0, \overline{1,N}) + \sum_{j=2}^{r+1} \Pi(y_{j-1}^0, y_j^0, \{\alpha(k)\colon k \in \overline{j,N}\}) + \mathfrak{K}_{r+1}^{(\alpha)}(y_{r+1}^0).$$

Итак, в случае в) мы смогли продолжить кортеж (6.22) на один шаг (см. (6.28)) с сохранением всех требуемых свойств: система $1')$–$3')$ преобразуется в $1'')$–$3'')$. После выполнения конечного числа (регулярных) шагов типа в) мы неизбежно придем к ситуации случая а), т. е. к оптимальному решению задачи (3.9).

7. Вычислительный эксперимент

На основе конструкции, изложенной в предыдущих разделах, была построена программа для ПЭВМ, написанная на языке программирования C++ (использован пакет CodeGear C++ Builder XE), работающая в 32-разрядной операционной системе семейства Windows, начиная с Windows XP. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. В случае решения задачи на плоскости программа позволяет в графическом виде представлять результаты (маршрут и трассу) с возможностью увеличения отдельных участков графика; имеется возможность сохранения графика движения по множествам в файл формата bmp.

Рассматривались плоские задачи маршрутизации с особенностью в задании функции стоимости, отмеченной в (2.2). Итак, $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Мегаполисы — непустые конечные множества на плоскости X, порождаемые равномерными сетками на окружностях и границах прямоугольников (полное описание $M_1,\ldots,M_N$ опустим по соображениям объема). База x^0 отождествляется с началом координат: $x^0 = (0,0)$.

Пусть $N = 27$ и $|\mathbf{K}| = 25$ (имеется 25 адресных УП). Мы полагаем, что фигуры $Y_1,\ldots,Y_{27}$ (круги и прямоугольники), на границах которых задаются точки множеств $M_1,\ldots,M_{27}$, попарно не пересекаются; $M_s \subset Y_s\ \forall s \in \overline{1,N}$. Пусть $\rho\colon X\times X \to [0,\infty[$ есть евклидово расстояние на плоскости, а функция $\mathbf{f}$ — евклидова норма на X (расстояние до “нуля”). Определяем

$T \in \mathcal{R}_+[X]$ по следующему правилу: если $s \in \overline{1,N}$ и $x \in Y_s$, то $T(x)$ есть площадь Y_s; $T(\tilde{x}) \triangleq 0$ для $\tilde{x} \in X$ таких, что $\tilde{x} \notin Y_j \ \forall j \in \overline{1,N}$. Фиксируем $\gamma \in]0,\infty[$, $h_1 \in]0,\infty[, \ldots, h_N \in]0,\infty[$. С учетом этого определяем функцию Π (2.2) по правилу

$$\Pi(x', x'', K) \triangleq \gamma\rho(x', x'')|K| + T(x'')\sum_{i \in K} h_i \quad \forall x' \in \mathbf{X} \quad \forall x'' \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}.$$

Если $x' \in \mathbf{X}$, $x'' \in M_j$, где $j \in \overline{1,N}$, и $K \in \mathfrak{N}$, причем $j \in K$ и $x' \notin M_j$, то фактически значение $\Pi(x', x'', K)$ определяет стоимость целого этапа: значение $\gamma\rho(x', x'')|K|$ оценивает степень вредного воздействия при перемещении $x' \to x''$, а число $T(x'')\sum_{i \in K} h_i$ определяет воздействие при работе в пределах M_j (или “вблизи” M_j). Данная работа непременно заканчивается в точке x'' (пункт отправления, совпадающий с пунктом прибытия на M_j из точки x'), что может быть связано с возвращением к транспортному средству для следующего перемещения. Как уже отмечалось, исследуемые ниже мегаполисы реализуются каждый посредством задания равномерных сеток на множествах одного из двух типов; будем поэтому говорить о “круглых” и “прямоугольных” мегаполисах. По соображениям объема опускаем перечисление значений вышеупомянутых параметров задачи и ограничимся указанием только некоторых данных, характеризующих размерность задачи. Так, количество узлов сеток на окружностях (мощность “круглых” мегаполисов) соответствовало 20 (три мегаполиса) и 40 (шесть мегаполисов). Мощность “прямоугольных” мегаполисов варьировалась от 14 до 18. В этих условиях точный алгоритм на основе МДП реализовал построение оптимального решения и глобального экстремума за 54 мин 57 с (график маршрута и трассы приведен на рис. 1). При тех же условиях применение метода итераций позволило получить тот же самый (оптимальный) результат, но за 22 мин 58 с в виде значения $\mathcal{V}[\omega_0]\colon \mathcal{V}[\omega_0] = V = 534712$. При этом $\mathbf{v}_0 = 529621$. Вторая итерация была контрольной; она подтвердила стабилизацию процедуры, затратив на это 24 мин 6 с. На рис. 1 изображены маршрут и трасса при оптимальном решении.

В другом примере рассматривались 27 “прямоугольных” мегаполисов. При этом мощность этих мегаполисов была различной и варьировалась в пределах от 14 до 20. Условия предшествования сохранены прежними. С помощью точного алгоритма экстремум задачи и ее решение были найдены за 46 мин 38 с. При этом $V = 835098$. Траектория движения по множествам в графическом виде приведена на рис. 2.

Итерационный алгоритм работал следующим образом: $\mathbf{v}_0 = 830594$; оптимизация трассы вдоль маршрута ω_0 привела к результату $\mathcal{V}[\omega_0] = 835256$. На это было потрачено 21 мин 50 с. При этом проигрыш в сравнении с глобальным экстремумом V составил всего 0.02%. Маршрут и трасса в виде графика приведены на рис. 3. Вторая итерация была контрольной (уже наступила стабилизация процедуры) и потребовала 24 мин 49 с.

Конкретное решение (маршрут и трасса), полученное по методу итераций, отличается от оптимального, хотя и близко к нему по результату. Были обнаружены примеры, в которых выигрыш во времени был еще более существенным. Отметим их совсем кратко.

В задаче с 22 множествами при наличии 5 адресных пар ($|\mathbf{K}| = 5$) точным алгоритмом был найден глобальный экстремум $V = 519362$ и (оптимальное) решение за 12 мин 47 с. В итерационном методе стабилизация наступила на второй итерации. При этом в начальной задаче курьера был получен результат 516901; после оптимизации трассы был достигнут результат 521217. На первую итерацию было затрачено 32 с. На второй итерации после решения задачи курьера получен результат 520969, который после оптимизации трассы был улучшен до 520918. Время вычисления (вторая итерация) — 30 с. После этого наступила стабилизация, что было зафиксировано после выполнения контрольной итерации, на что было затрачено 30 с.

В задаче с 23 мегаполисами при наличии 8 адресных пар (случай $|\mathbf{K}| = 8$) при использовании точного алгоритма был найден глобальный экстремум $V = 586302$ и соответствующее оптимальное решение при временных затратах 10 мин 56 с. На первой итерации (время счета 54 с) в начальной задаче курьера получен результат 584449 и, после оптимизации трассы, 586387. Наступила стабилизация, что было подтверждено второй итерацией за время 55 с.

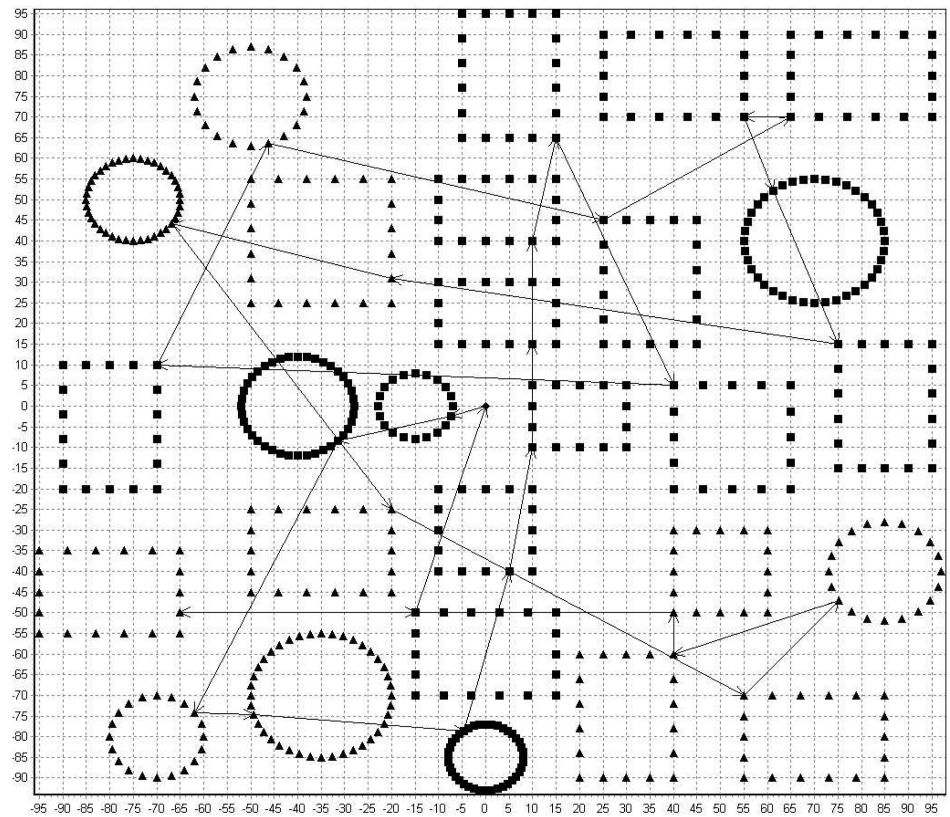


Рис. 1. Маршрут и трасса обхода множеств в виде окружностей и прямоугольников (точный алгоритм).

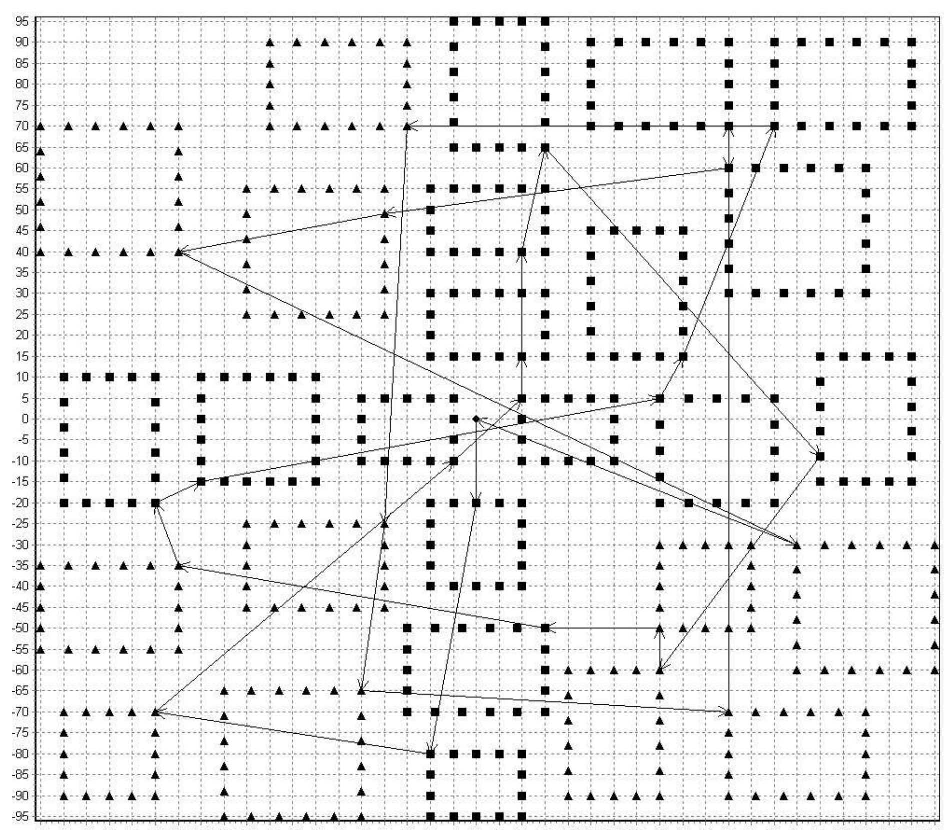


Рис. 2. Маршрут и трасса обхода множеств в виде прямоугольников (точный алгоритм).

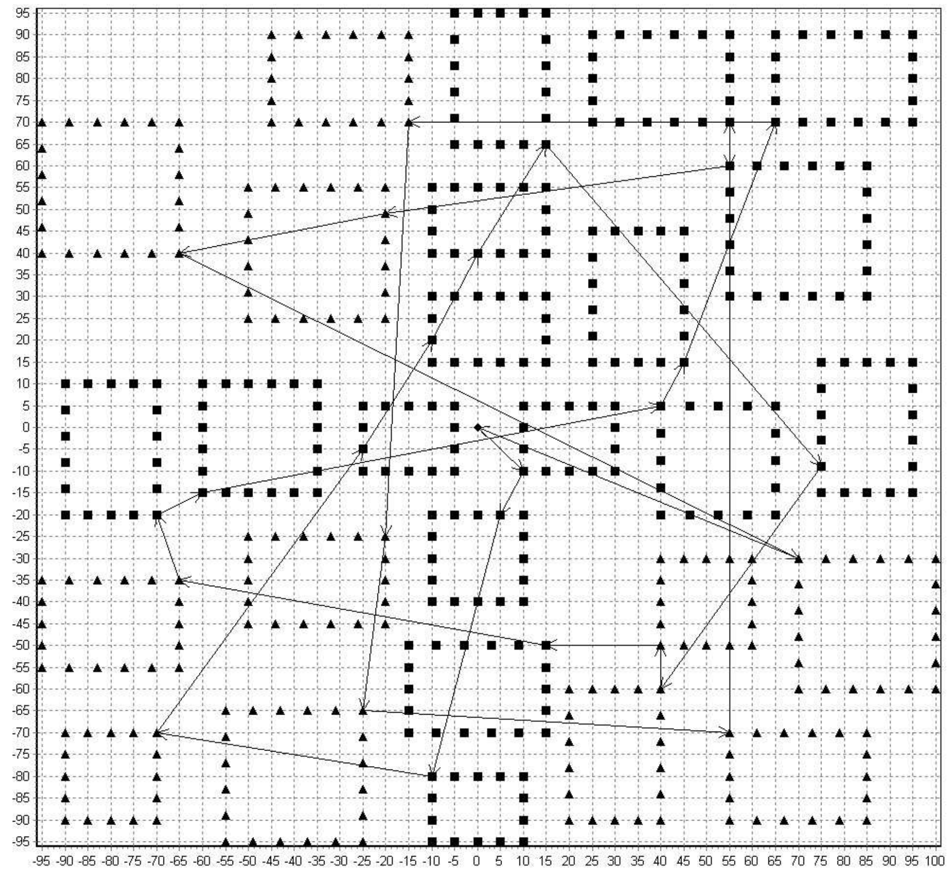


Рис. 3. Маршрут и трасса обхода множеств в виде прямоугольников (итерационный алгоритм).

Оценивая результаты экспериментов, можно заключить, что итерационный алгоритм достигает результатов, близких к оптимальным, существенно быстрее, хотя при этом важно зафиксировать факт стабилизации, что требует дополнительного времени. Упомянутая фиксация может, конечно, и не проводиться, если удается приблизиться к нижней оценке $\mathbf{v}_0$, получающейся в начальной задаче курьера, а потом принудительно остановить процедуру. В упомянутых примерах можно было бы пойти по этому пути и остановить процедуру после первой же итерации (в предпоследнем примере у нас был бы ничтожный проигрыш; поскольку итерационный алгоритм в этом примере работал очень быстро, вероятно, имеет смысл довести здесь процедуру до “полной” стабилизации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сб. 1964. Т. 9. С. 219–228.
5. **Хелд М., Карп Р.М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернет. сб. 1964. Т. 9. С. 202–218.
6. **Henry-Labordere A.L.** The record-balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized travelling salesman problem // R. I. R. O. 1969. Vol. 3, № 2. P. 43–49.

7. **Laporte G., Nobert Y.** Generalized traveling salesman problem through n-sets of nodes: an integer programming approach // INFOR. 1983. Vol. 21, № 1. P. 61–75.
8. **Лейтен А.К.** Некоторые модификации задачи коммивояжера // Тр. ВЦ Тарт. ун-та. 1973. Вып. 28. С. 44–58.
9. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 240 с.
10. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Редукция задач маршрутной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2000. № 10. С. 136–150.
11. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Об одном приближенном методе решения задач маршрутной оптимизации // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. Вып. 4. С. 287–302.
12. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** К вопросу о решении задачи последовательного обхода множеств с использованием "незамкнутой" задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2002. № 11. С. 151–166.
13. **Ченцов А.А.** Метод итераций в обобщенной задаче коммивояжера на узкие места // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. Вып. 5. С. 287–302.
14. **Ченцов А.А.** Метод итераций в задаче последовательного обхода множеств (обобщенная задача коммивояжера на узкие места) // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. Вып. 6. С. 209–230.
15. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Изв. вузов. Математика. 2010. № 6. С. 64–81.
16. **Ченцов А.Г.** Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Докл. РАН. 2008. Т. 423, № 3. С. 303–307.
17. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 268–287.
18. Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения / А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, С.Е. Щеклеин, М.Ю. Куклин, А.Г. Ченцов, А.А. Кадников // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41–48.
19. Вопросы математических методов моделирования в решении проблемы снижения облучаемости персонала / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, А.Г. Ченцов, С.Е. Щеклеин, Ф.А. Балушкин, А.П. Хомяков // Вопросы радиационной безопасности. 2009. № 4. С. 47–57.
20. **Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 3. С. 68–77.
21. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, А.Г. Ченцов // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115–120.
22. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
23. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990. 960 с.
24. Об одном варианте задачи коммивояжера / Ф.А. Балушкин, А.Н. Сесекин, Ю.А. Фрейберг, А.Г. Ченцов // Вестн. компьютерных и информ. технологий. 2009. № 12. С. 45–50.

Ченцов Алексей Александрович
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 1.02.2012

Ченцов Александр Георгиевич
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.532.2

ПЕРИОДИЧНОСТЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП[1]

В. Ю. Шапрынский

Вводится понятие I-элемента решетки, где I — произвольное решеточное тождество. Это понятие обобщает практически все рассматривавшиеся ранее типы специальных элементов решеток. Доказано, что если многообразие полугрупп является I-элементом решетки всех многообразий полугрупп для некоторого нетривиального решеточного тождества I и отлично от многообразия всех полугрупп, то оно является периодическим многообразием. Установлено, что обратное утверждение неверно.

Ключевые слова: полугруппа, многообразие, решетка многообразий, специальные элементы решетки.

V. Yu. Shaprynskii. The periodicity of special elements in the lattice of semigroup varieties.

The notion of I-element of a lattice is introduced, where I is an arbitrary lattice identity. This notion generalizes practically all types of special elements of lattices considered earlier. It is proved that, if a semigroup variety is an I-element of the lattice of all semigroup varieties for some nontrivial lattice identity I and is different from the variety of all semigroups, then it is a periodic variety. It is established that the converse is not true.

Keywords: semigroup, variety, lattice of varieties, special elements of a lattice.

Одним из основных направлений теории многообразий полугрупп является изучение решетки всех многообразий полугрупп, которую мы будем обозначать через **SEM**. Обстоятельному обзору современного состояния исследований в этой области посвящена статья [5].

При изучении решетки **SEM** заметное внимание уделяется рассмотрению тождеств в решетках полугрупповых многообразий. В этом направлении получен целый ряд глубоких результатов (см. § 11 и 12 в обзоре [5]). В частности, полностью описаны многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий [3], и достигнуто значительное продвижение в изучении многообразий с дистрибутивной решеткой подмногообразий.

Указанные результаты описывают, говоря неформально, “глобально модулярные (или дистрибутивные)” части решетки **SEM**. Следующим естественным шагом является изучение многообразий, обеспечивающих, так сказать, “локальную модулярность (дистрибутивность)” в своей окрестности. Говоря это, мы имеем в виду изучение специальных элементов различных типов в решетке **SEM**. Напомним определения наиболее часто рассматриваемых типов специальных элементов. Элемент x решетки L называется

модулярным, если	$\forall y, z \in L$	$y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$
нижнемодулярным, если	$\forall y, z \in L$	$x \le y \longrightarrow (z \vee x) \wedge y = (z \wedge y) \vee x;$
дистрибутивным, если	$\forall y, z \in L$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$
стандартным, если	$\forall y, z \in L$	$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$
нейтральным, если	$\forall y, z \in L$	$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$

Верхнемодулярные, кодистрибутивные и *костандартные* элементы определяются двойственно к нижнемодулярным, дистрибутивным и стандартным соответственно.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00524).

В последние годы появился целый ряд работ, посвященных изучению элементов всех восьми перечисленных выше типов в решетке **SEM** (см. § 14 обзора [5] и появившиеся уже после его опубликования статьи [1; 2; 8; 9]). При этом многообразия, являющиеся нижнемодулярными, дистрибутивными, стандартными, костандартными, нейтральными элементами, полностью описаны, а для элементов остальных типов получены сильные необходимые условия и описания в ряде обширных частных случаев.

Упомянутые в предыдущем абзаце результаты показывают, что специальные элементы различных типов в решетке **SEM** обладают некоторыми общими свойствами. Так, например, если исключить из рассмотрения тривиальный частный случай многообразия всех полугрупп (которое, очевидно, является специальным элементом любого типа), то оказывается, что специальные элементы всех перечисленных восьми типов в решетке **SEM** являются *периодическими* многообразиями (т. е. состоят из периодических полугрупп). Причем для элементов различных типов этот факт доказывался по-разному. Возникает естественный вопрос: случайно ли указанное совпадение или это проявление некоторой общей закономерности? Основная цель данной работы — дать ответ на этот вопрос. Чтобы сформулировать соответствующий результат, нам понадобятся некоторые новые понятия.

Заметим, что определения всех перечисленных выше типов специальных элементов строятся по одной и той же схеме: берется некоторое решеточное тождество (в большинстве случаев — тождество модулярности или дистрибутивности), после чего одна из входящих в него переменных выводится из-под действия квантора всеобщности и объявляется свободной. Отталкиваясь от этого наблюдения, введем следующее определение. Пусть I — решеточное тождество вида $s = t$, где s и t — решеточные термы от упорядоченного набора переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Элемент x решетки L назовем *I-элементом*, если $s(x, x_1, \ldots, x_n) = t(x, x_1, \ldots, x_n)$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in L$. Элемент x, являющийся I-элементом для некоторого нетривиального тождества I, назовем id-*элементом*. Многообразие полугрупп, являющееся I-элементом (id-элементом) решетки **SEM**, будем называть *I-многообразием* (соответственно id-*многообразием*).

Существует еще одно обстоятельство, свидетельствующее о естественности введенного только что понятия. Оно состоит в том, что id-многообразиями являются не только специальные элементы всех восьми перечисленных выше типов в решетке **SEM**, но и многообразия, решетка подмногообразий которых удовлетворяет какому-либо нетривиальному тождеству. В самом деле, нетрудно видеть, что решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда многообразие $\mathcal{V}$ является I-многообразием, где в качестве I взято тождество $p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$. Таким образом, изучение id-многообразий позволяет объединить два указанных в начале статьи направления изучения решетки многообразий полугрупп.

Понятие id-многообразия является настолько общим и неизученным, что ставить задачу полного описания таких многообразий на сегодняшний день, видимо, преждевременно. Более того, a priory ниоткуда не вытекает, что изучение id-многообразий может быть плодотворным, поскольку ни из каких общих соображений не следует, что эти многообразия должны обладать какими-то общими структурными свойствами. Тем не менее справедливо следующее утверждение, являющееся основным результатом данной работы.

Теорема 1. *Всякое* id-*многообразие полугрупп, отличное от многообразия всех полугрупп, является периодическим многообразием.*

Общность понятия id-многообразия делает естественным вопрос о том, присущи ли id-многообразиям какие-либо еще свойства, помимо периодичности. Иными словами, существуют ли периодические многообразия, не являющиеся id-многообразиями. Ответ на него оказывается положительным. Напомним, что многообразие полугрупп называется *нильмногообразием*, если оно состоит из нильполугрупп. Очевидно, что всякое нильмногообразие периодично.

Теорема 2. *Существует нильмногообразие полугрупп, не являющееся* id-*многообразием.*

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся некоторые определения, обозначения и вспомогательные результаты. Свободную полугруппу над счетным алфавитом обозначим через F, свободный моноид над этим же алфавитом — через F^1. Символ $\equiv$ обозначает отношение равенства на F. Как обычно, через $\mathrm{End}(F)$ обозначим полугруппу эндоморфизмов полугруппы F. Для любых $u, v \in F$ положим $u \leq v$, если $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторых $a, b \in F^1$ и некоторого $\xi \in \mathrm{End}(F)$. Определенное таким образом отношение $\leq$ является отношением квазипорядка на F. Через $\ell(w)$ обозначим длину слова w, через $\ell_x(w)$ — число вхождений буквы x в слово w. Полугрупповое тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если $\ell_x(u) = \ell_x(v)$ для любой буквы x. Как обычно, главный идеал (соответственно коидеал) решетки L, порожденный элементом $a \in L$, обозначим через $(a]_L$, (соответственно $[a)_L$) или просто $(a]$ (соответственно $[a)$), интервал между элементами a и b, где $a \leq b$, — через $[a, b]$. Решетка разбиений множества X, как обычно, обозначается через $\mathrm{Part}(X)$. Для всякого $\alpha \in \mathrm{Part}(X)$ через X/α обозначается множество классов разбиения α, а через x^α — α-класс элемента $x \in X$.

Следующая лемма описывает главные идеалы и главные коидеалы решеток разбиений.

Лемма 1 [4, лемма IV.4.1]. 1) *Пусть α — разбиение множества X на два класса*: A *и* B. *Тогда отображение из* $(\alpha]_{\mathrm{Part}(X)}$ *в* $\mathrm{Part}(A) \times \mathrm{Part}(B)$, *определенное по правилу*

$$\beta \longmapsto (\beta|_A, \beta|_B) \quad (\beta \in (\alpha]_{\mathrm{Part}(X)}),$$

является изоморфизмом решеток.

2) *Пусть α — произвольное разбиение множества X. Тогда отображение из* $\mathrm{Part}(X/\alpha)$ *в* $[\alpha)_{\mathrm{Part}(X)}$, *определенное по правилу*

$$\beta \longmapsto \{(x, y) \in X \times X \mid (x^\alpha, y^\alpha) \in \beta\} \quad (\beta \in \mathrm{Part}(X/\alpha)),$$

является изоморфизмом решеток.

Следующее утверждение общеизвестно.

Лемма 2. *Полугрупповое тождество $u = v$ следует из системы тождеств Σ тогда и только тогда, когда существует последовательность слов $u \equiv w_0, w_1, \ldots, w_n \equiv v$ такая, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдутся слова $a, b \in F^1$, эндоморфизм $\xi \in \mathrm{End}(F)$ и тождество $u' = v'$ из системы Σ, для которых $u \equiv a\xi(u')b$, $v \equiv a\xi(v')b$.*

В дальнейшем нам понадобятся еще некоторые понятия. Решетку всех вполне инвариантных конгруэнций на F будем обозначать через $\mathrm{FIC}(F)$. Вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую многообразию полугрупп $\mathcal{V}$, обозначим через $Con(\mathcal{V})$. Известно, что отображение $Con\colon \mathbf{SEM} \longrightarrow \mathrm{FIC}(F)$ является антиизоморфизмом решеток. Для произвольной антицепи (в смысле определенного выше отношения $\leq$) $A \subseteq F$ рассмотрим множество L_A всех многообразий $\mathcal{V}$, для которых A является объединением $Con(\mathcal{V})$-классов. Определим отображение $\varphi_A\colon \mathrm{L}_A \longrightarrow \mathrm{Part}(A)$, положив $\varphi_A(\mathcal{V}) = Con(\mathcal{V})|_A$ для любого $\mathcal{V} \in \mathrm{L}_A$.

Доказательство теоремы 1 основано на следующих двух леммах.

Лемма 3. *Пусть A — произвольная антицепь в F, в которой все слова зависят от одних и тех же букв. Тогда*:

1) *множество* L_A *является подрешеткой решетки* $\mathbf{SEM}$;
2) *отображение* φ_A *является антигомоморфизмом решетки* L_A *на решетку* $\mathrm{Part}(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Рассмотрим разбиение α полугруппы F на два класса: A и $F \setminus A$. Его главный идеал $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F)}$ состоит из всех разбиений β таких, что A является объединением β-классов. Из этого наблюдения и определения множества L_A следует, что L_A является прообразом подрешетки $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F)} \cap \mathrm{FIC}(F)$ решетки $\mathrm{FIC}(F)$ при антиизоморфизме Con. Следовательно, L_A — подрешетка в $\mathbf{SEM}$.

2) Рассмотрим отображение $\psi_A\colon (\alpha]_{\mathrm{Part}(F)} \longrightarrow \mathrm{Part}(A)$, определенное по правилу $\psi_A(\beta) = \beta|_A$ для любого $\beta \in (\alpha]$. Согласно п. 1) леммы 1 решетка $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F)}$ разложима в прямое произведение решеток $\mathrm{Part}(A)$ и $\mathrm{Part}(F \setminus A)$, причем отображение ψ_A есть проекция на первый сомножитель. Следовательно, ψ_A — гомоморфизм решеток. Отображение φ_A по определению является композицией антиизоморфизма Con, ограниченного на L_A, и гомоморфизма ψ_A, ограниченного на $(\alpha]_{\mathrm{FIC}(F)}$, а потому является антигомоморфизмом. Остается доказать сюръективность φ_A. Возьмем произвольное отношение эквивалентности $\beta \in \mathrm{Part}(A)$. Рассмотрим многообразие $\mathcal{V}$, для которого β (рассматриваемое как множество пар слов) является базисом тождеств, и убедимся, что $\mathcal{V} \in \mathrm{L}_A$ и $\varphi_A(\mathcal{V}) = \beta$. Это так, если каждый β-класс является $Con(\mathcal{V})$-классом. Таким образом, нужно показать, что если тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{V}$ и $u \in A$, то $(u, v) \in \beta$. Лемма 2 по индукции сводит проверку к случаю, когда $u \equiv a\xi(u')b$ и $v \equiv a\xi(v')b$ для некоторых $a, b \in F^1$, некоторого $\xi \in \mathrm{End}(F)$ и пары слов $(u', v') \in \beta$. Это означает, что $u' \le u$. Поскольку $u, u' \in A$ и A — антицепь, отсюда следует, что $u \equiv u'$. Тогда $a \equiv b \equiv 1$ и ξ действует тождественно на всех буквах слов u' и v'. Отсюда $v \equiv v'$, поэтому $(u, v) \in \beta$.

Лемма 4. *Пусть X и Y — два множества, $|Y| = n < \infty$, и пусть разбиение $\alpha \in \mathrm{Part}(X)$ содержит не менее n классов мощности не менее n. Тогда для любого $\beta \in \mathrm{Part}(Y)$ найдется вложение $\varphi\colon \mathrm{Part}(Y) \longrightarrow \mathrm{Part}(X)$ такое, что $\varphi(\beta) = \alpha$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Y/\beta = \{B_1, \dots, B_m\}$, и пусть $n_i = |B_i|$ для $1 \le i \le m$. Это, в частности, означает, что $m \le n$ и $n_i \le n$. Далее, пусть $B_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in_i}\}$ для каждого i. Выберем любые m различных α-классов $A_1, \dots, A_m$ мощности не менее n. Каждое множество A_i произвольным образом разобьем на n_i непустых подмножеств $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i}$, получив некоторое новое разбиение $\gamma \le \alpha$. Обозначим через δ разбиение, получаемое из α объединением всех классов A_i в один класс A. Отметим, что для любого $\rho \in [\gamma, \delta]$ выполняется равенство $\rho|_{X \setminus A} = \alpha|_{X \setminus A}$. Поэтому из п. 1) леммы 1 следует, что отображение $\rho \longmapsto \rho|_A$ является изоморфизмом интервала $[\gamma, \delta]$ решетки $\mathrm{Part}(X)$ на коидеал $[\gamma')$ решетки $\mathrm{Part}(A)$, где $\gamma' = \gamma|_A$. Отметим, что γ'-классами являются в точности множества A_{ij}. Обратный изоморфизм объединяет каждое отношение эквивалентности $\rho \in [\gamma')_{\mathrm{Part}(A)}$ с отношением $\alpha|_{X \setminus A}$. Согласно п. 2) леммы 1 имеется изоморфизм $\mathrm{Part}(A/\gamma') \cong [\gamma')_{\mathrm{Part}(A)}$. Далее, двойная нумерация элементов множества Y и γ'-классов определяет биекцию между Y и A/γ'. Эта биекция естественным образом определяет изоморфизм $\mathrm{Part}(Y) \cong \mathrm{Part}(A/\gamma')$. Таким образом, $\mathrm{Part}(Y) \cong \mathrm{Part}(A/\gamma') \cong [\gamma')_{\mathrm{Part}(A)} \cong [\gamma, \delta]$. Легко видеть, что композиция этих трех изоморфизмов отображает β в α, т. е. является искомым вложением.

Приступим теперь к непосредственному доказательству теорем 1 и 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Многообразие полугрупп называется *собственным*, если оно отлично от многообразия всех полугрупп. Зафиксируем любое собственное непериодическое многообразие $\mathcal{V}$ и нетривиальное решеточное тождество I. Нужно доказать, что $\mathcal{V}$ не является I-многообразием.

Поскольку тождество I нетривиально, двойственное ему тождество $\overline{I}$ также нетривиально. Следовательно, $\overline{I}$ нарушается в некоторой конечной решетке. Любая конечная решетка может быть вложена в некоторую конечную решетку разбиений [7]. Таким образом, $\overline{I}$ нарушается в решетке $\mathrm{Part}(X)$ для некоторого конечного множества X. Положим $|X| = n$. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathrm{Part}(X)$ — тот набор значений переменных тождества $\overline{I}$, на котором оно нарушается. В частности, разбиение α_0 не является $\overline{I}$-элементом решетки $\mathrm{Part}(X)$.

Будучи собственным, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству $u = v$. Хорошо известно, что всякое тождество, выполненное в непериодическом многообразии, уравновешено. Приравняв между собой все буквы в тождестве $u = v$, кроме одной, входящей в u и v в разных позициях, можно получить нетривиальное тождество от двух букв, которое также выполнено в $\mathcal{V}$. В силу этого можно считать, что $u = v$ — тождество от букв x и y. Кроме того, можно считать, что $\ell_x(u) > \ell_y(u)$: этого можно добиться, домножив обе части тождества на подходящую степень x. Далее, через A_i обозначим $Con(\mathcal{V})$-класс слова $x^{2n-i}y^iu^n$ для $1 \le i \le n$. Положим $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Убедимся, что множество A является антицепью. Действительно, пусть два слова $w_1, w_2 \in A$ сравнимы, скажем, $w_1 \le w_2$, т. е. $w_2 = a\xi(w_1)b$ для некоторых $a, b \in F^1$ и $\xi \in \mathrm{End}(F)$. Слова w_1 и w_2 имеют одинаковую длину, откуда следует, что слова a и b пусты, а ξ переводит каждую букву в букву. Поскольку слова w_1 и w_2 содержат лишь буквы x и y, эндоморфизм ξ либо действует на этих буквах тождественно, либо переводит их друг в друга. Но второе невозможно, поскольку $\ell_x(w_1) > \ell_y(w_1)$ и $\ell_x(w_2) > \ell_y(w_2)$. Следовательно, $w_1 \equiv w_2$.

Итак, множество A является антицепью, а потому к нему применима лемма 3. При этом множества $A_1, \ldots, A_n$ являются в точности $\varphi_A(\mathcal{V})$-классами. Чтобы убедиться в этом, отметим, что $A_i \ne A_j$ при $i \ne j$, поскольку тождество $x^{2n-i}y^iu^n = x^{2n-j}y^ju^n$ не является уравновешенным. При этом $|A_i| > n$, так как все слова $x^{2n-i}y^iu^kv^{n-k}$ при $0 \le k \le n$ различны и лежат в A_i. Применив лемму 4, построим гомоморфизм $\psi\colon \mathrm{Part}(X) \longrightarrow \mathrm{Part}(A)$, для которого $\psi(\alpha_0) = \varphi_A(\mathcal{V})$. В силу сюръективности φ_A найдутся многообразия $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ такие, что $\varphi_A(\mathcal{V}_i) = \psi(\alpha_i)$ для $1 \le i \le m$. Поскольку тождество $\overline{I}$ нарушается на элементах $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ решетки $\mathrm{Part}(X)$ и поскольку ψ — вложение, это же тождество будет нарушаться на элементах $\psi(\alpha_0), \ldots, \psi(\alpha_m)$ решетки $\mathrm{Part}(A)$, т. е. на элементах $\varphi_A(\mathcal{V}), \varphi_A(\mathcal{V}_1), \ldots, \varphi_A(\mathcal{V}_m)$. Следовательно, тождество I нарушается на элементах $\mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ решетки **SEM**, так как φ_A — антигомоморфизм. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$ не является I-многообразием. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В решетку нильмногообразий антиизоморфно вложима решетка $\mathrm{Part}(X)$, где X — счетное множество [6]. Так как I-элемент любой решетки, как легко видеть, является I-элементом любой ее подрешетки, достаточно показать, что решетка $\mathrm{Part}(X)$ содержит элемент, не являющийся I-элементом ни для какого нетривиального тождества I. Убедимся, что таковым является разбиение α множества X на счетное число счетных классов. По аналогии с доказательством теоремы 1 для произвольного тождества I можно найти конечную решетку разбиений $\mathrm{Part}(Y)$ и набор $\beta_0, \ldots, \beta_m$ значений переменных тождества I в решетке $\mathrm{Part}(Y)$, на котором это тождество нарушается. Воспользовавшись леммой 4, построим вложение $\varphi\colon \mathrm{Part}(Y) \longrightarrow \mathrm{Part}(X)$, для которого $\varphi(\beta_0) = \alpha$. Тождество I нарушается на элементах $\varphi(\beta_0), \ldots, \varphi(\beta_m)$ решетки $\mathrm{Part}(X)$, поэтому элемент $\varphi(\beta_0) = \alpha$ не является I-элементом. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верников Б.М.** Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2011. № 7. С. 13–21.
2. **Верников Б.М., Шапрынский В.Ю.** Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 303–330.
3. **Волков М.В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. АН СССР. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.
4. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
5. **Шеврин Л.Н., Верников Б.М., Волков М.В.** Решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2009. № 3. С. 3–36.
6. **Jezek J.** Intervals in lattices of varieties // Algebra Universalis. 1976. Vol. 6, № 2. P. 147–158.
7. **Pudlák P., Tůma J.** Every finite lattice can be embedded in the lattice of all equivalences over a finite set // Algebra Universalis. 1980. Vol. 10, № 1. P. 74–95.
8. **Shaprynskiĭ V.Yu.** Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties URL: http://arxiv.org/abs/1009.1929v1 (arXiv:1009.1929v1 [math.GT]: preprint). 15 p.
9. **Shaprynskiĭ V.Yu., Vernikov B.M.** Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties. III // Acta Sci. Math. (Szeged). 2010. Vol. 76, № 3–4. P. 371–382.

Шапрынский Вячеслав Юрьевич
студент
Уральский федеральный университет
e-mail: vshapr@yandex.ru

Поступила 09.02.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 24.08.12. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33, 7. Уч.-изд. л. 27,5. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226